[PTKB] Kolokwium 2 - opracowanie

1 Zadanie 1.

Treść: Ile razy trzeba wykonać protokół uwierzytelniania Fiata-Shamira by prawdopodobieństwo oszustwa było mniejsze od 10^{-1000}?

Rozwiązanie: Prawdopodobieństwo udanego oszustwa po wykonaniu n eksperymentów wynosi $(\frac{1}{2})^n$. Rozwiązujemy równanie $(\frac{1}{2})^x = 10^{-1000}$.

$$\begin{array}{lcl} (\frac{1}{2})^x & = & 10^{-1000} \\ 2^x & = & 10^{1000} \\ x & = & \log_2 10^{1000} \\ x & = & 1000 \log_2 10 \\ x & \simeq & 3321.928 \end{array}$$

Wybieramy $\lceil x \rceil = 3322$.

2 Zadanie 4.

Treść: Podać przykład liczby pseudopierwszej przy podstawie 2 i 3 jednocześnie. Czy takie liczby w ogóle istnieją?

Rozwiązanie: Liczba naturalna jest liczbą Carmichaela wtedy i tylko wtedy, gdy:

1. Jest liczbą złożoną.
2. Dla każdego $a \in \mathbb{N}$ z przedziału $1 < a < n$, względnie pierwszej z n, liczba $(a^{n-1} - 1)$ jest podzielna przez n.

Patrząc na najmniejsze liczby Carmichaela:

$$\begin{array}{lcl} 561 & = & 3 \cdot 11 \cdot 17 \\ 1105 & = & 5 \cdot 13 \cdot 17 \end{array}$$

widzimy, że liczba Carmichaela 1105 jest względnie pierwsza zarówno z 2, jak również 3, a więc pozwala ona stworzyć liczby pseudopierwsze $2^{1105-1} - 1$ oraz $3^{1105-1} - 1$.

3 Zadanie 5.

Treść: Podać przykład ciała $GF(3^2)$, czyli ciała o 9 elementach.

Rozwiązanie: Ciało $GF(p^n)$, gdzie p jest liczbą pierwszą oraz $n \in \mathbb{N}$, można wygenerować:

- Znajdując wielomian $f(x)$ stopnia n nierozkładalny w pierścieniu $GF(p)[x]$.
- Znajdując wszystkie możliwe reszty z dzielenia wielomianu $f(x)$ w pierścieniu $GF(p)[x]$.
- Wykorzystując działania dodawania i mnożenia wielomianów modulo $f(x)$.

Wielomianem drugiego stopnia nierozkładalnym w ciele $G(3)[x]$ jest $x^2 + 1$ (patrz: *Zadanie 7.*). Wszystkie możliwe reszty z dzielenia tego wielomianu w pierścieniu $G(3)[x]$ to: $2x+2$, $2x+1$, $2x$, $x+2$, $x+1$, x, 2, 1.

4 Zadanie 7.

Treść: Wykazać, że wielomian x^2+1 jest nierozkładalny w pierścieniu wielomianów $GF(3)[x]$, a jest rozkładalny w pierścieniu wielomianów $GF(2)[x]$.

Rozwiązanie: Wielomian drugiego stopnia można rozłożyć za pomocą dwóch wielomianów pierwszego stopnia, więc:

$$\begin{array}{lcl} x^2 + 1 & = & (ax + b) * (cx + d) \\ x^2 + 1 & = & (ac)x^2 + (ad + bc)x + bd \end{array}$$

Dla ciała $GF(3)[x]$, $b, d \in \{0, 1, 2\}$ oraz $a, c \in \{1, 2\}$ (bo wielomian musi być rozkładalny). Rozważmy wszystkie możliwe wartości $(ad+bc)$ mod 3. Jeżeli $(ad+bc) \equiv 0 \mod 3 \Rightarrow a = 0 \wedge c = 0$, co jest sprzeczne z dziedziną, a więc wielomian nie może być rozkładalny.

Dla ciała $GF(2)[x]$, $b, d \in \{0, 1\}$ oraz $a, c \in \{1\}$. Jeżeli $(b + d) \equiv 0 \mod 2 \Rightarrow (b = 0 \wedge d = 0) \vee (b = 1 \wedge d = 1)$. Dla drugiego przypadku otrzymujemy w $GF(2)[x]$:

$$x^2 + 1 \equiv (x + 1) * (x + 1)$$

Zatem wielomian jest rozkładalny.

5 Zadanie 8.

Treść: Wykazać, że w grupie skończonej dla każdego $a \in G$ mamy: $a^{rzG} = 1$, gdzie rzG oznacza rząd grupy G. Wykazać, wykorzystując ten fakt, twierdzenie Eulera. (Wskazówka: wykorzystać twierdzenie Lagrange'a: dla grup skończonych rząd podgrupy jest dzielnikiem rzędu grupy).

Rozwiązanie: W ciągu $a^1, a^2, \cdots, a^{rzG}, a^{rzG+1}$ muszą być dwa elementy równe, tzn. dla pewnych $k', k'' \in [1, rzG+1], k' < k''$ musimy mieć $a^{k'} = a^{k''}$. Zatem $a^{k''-k'} = 1$. Istnieje więc takie $k \in [1, rzG](k = k'' - k')$, że $a^k = 1$. Niech r będzie najmniejszym takim k, że $a^k = 1$, wówczas zbiór $H = \left\{a^1, a^2, \cdots, a^r\right\}$ stanowi podgrupę cykliczną rzędu r grupy G. Ponieważ, z twierdzenia Lagrange'a, r jest dzielnikiem rzędu grupy G, więc również $a^{rzG} = 1$.
Twierdzenie Eulera: jeśli $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ i $a \in \mathbb{N}$ oraz $NWD(a, n) = 1$ to $a^{\phi(n)} \equiv 1 \mod n$, gdzie ϕ jest funkcją Eulera. Rozważmy grupę multiplikatywną Z_n^*. Grupa Z_n^* ma rząd równy $\phi(n)$. Zatem korzystając z $a^{rzG} = 1$ dostajemy, że dla każdego $a \in Z_n^*$ mamy $a^{\phi(n)} \equiv 1 \mod n$. Warunek $a \in Z_n^*$ jest równoznaczny warunkowi $NWD(a, n) = 1$. Zatem twierdzenie Eulera jest prostym wnioskiem z ogólnego twierdzenia teoriogrupowego $a^{rzG} = 1$.

6 Zadanie 10.

Treść: Załóżmy, że mamy dwie niezależne zmienne losowe X_1 oraz X_2 o wartościach w zbiorze $Z_2 = \{0, 1\}$. Wykazać, że jeśli X_1 ma rozkład równomierny, to również $X_1 \oplus X_2$ ma rozkład równomierny. Ten fakt jest podstawą protokołu o nazwie „rzut monetą przez telefon".

Rozwiązanie: Najpierw wykażemy, że odwzorowanie $Y = X_1 \otimes X_2$ jest zmienną losową. Ogólnie rzecz biorąc, jeśli $(\Omega, \mathfrak{M})$ jest przestrzenią mierzalną, $(E_t, \mathfrak{F}_t)_{t \in T}$ jest dowolną rodziną przestrzeni mierzalnych, a odwzorowania $f_t : \Omega \to E_t$ są $(\mathfrak{M}, \mathfrak{F}_t)$ mierzalne dla każdego $t \in T$ to odwzorowanie $\underset{t \in T}{P} f_t : \Omega \to \underset{t \in T}{P} E_t$ jest $(\mathfrak{M}, \underset{t \in T}{P} \mathfrak{F}_t)$ mierzalne. Stosując ten ogólny fakt do naszej sytuacji stwierdzamy, że odwzorowanie (X_1, X_2) jest $(\mathfrak{M}, 2^{\{0,1\}} \otimes 2^{\{0,1\}})$ mierzalne. Odwzorowanie $S : \{0, 1\} \times \{0, 1\} \ni (x_1, x_2) \to x_1 \oplus x_2 \in \{0, 1\}$ jest oczywiście $(2^{\{0,1\}} \otimes 2^{\{0,1\}}, 2^{\{0,1\}})$ mierzalne, zatem $Y = X_1 \oplus X_2$ jako superpozycja odwzorowań mierzalnych (X_1, X_2) i S jest $(\mathfrak{M}, 2^{\{0,1\}})$ mierzalne, jest więc zmienną losową.

Udowodnimy teraz równomierność rozkładu zmiennej losowej $Y = X_1 \oplus X_2$. Oznaczmy:

$$\begin{aligned} A_0 &= \{\omega \in \Omega; X_1(\omega) = 0, X_2(\omega) = 0\}, \\ A_1 &= \{\omega \in \Omega; X_1(\omega) = 1, X_2(\omega) = 0\}, \\ B_0 &= \{\omega \in \Omega; X_1(\omega) = 1, X_2(\omega) = 1\}, \\ B_1 &= \{\omega \in \Omega; X_1(\omega) = 0, X_2(\omega) = 1\}. \end{aligned}$$

Wówczas zdarzenia A_0, A_1, B_0, B_1 są parami rozłączne. Stąd i z niezależności zmiennych losowych X_1 i X_2 oznaczając $P(X_1 = 0) = p_0$, $P(X_1 = 1) = p_1$ dostajemy:

$$\begin{gathered} P(Y = 1) = P(A_1 \cup B_1) = P(A_1) + P(B_1) = \\ = P(X_1 = 1) \cdot P(X_2 = 0) + \\ + P(X_1 = 0) \cdot P(X_2 = 1) = \\ = p_1 \cdot \tfrac{1}{2} + p_2 \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2} \end{gathered}$$

ponieważ $p_0 + p_1 = 1$. Podobnie:

$$\begin{gathered} P(Y = 0) = P(A_0 \cup B_0) = P(A_0) + P(B_0) = \\ = P(X_1 = 0) \cdot P(X_2 = 0) + \\ + P(X_1 = 1) \cdot P(X_2 = 1) = \\ = p_1 \cdot \tfrac{1}{2} + p_2 \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2} \end{gathered}$$

a więc istotnie zmienna losowa $Y = X_1 \oplus X_2$ ma rozkład równomierny.