

Grafy i Sieci. Sprawozdanie 2.

SK11 Kolorowanie grafu za pomocą przeszukiwania z tabu.

Michał Aniserowicz, Jakub Turek

1 Temat projektu

SK11 Kolorowanie grafu za pomocą przeszukiwania z tabu.

2 Opis algorytmu

Zadaniem programu jest pokolorowanie wierzchołków zadanego grafu z użyciem jak najmniejszej liczby kolorów. Kolorowanie odbywa się z wykorzystaniem heurystycznego algorytmu przeszukiwania z tabu. Węzłem przestrzeni przeszukiwań jest pokolorowany (legalnie bądź nie) graf.

2.1 Sąsiedztwo

Sąsiadami w przestrzeni przeszukiwań są takie dwa pokolorowane grafy G i H , że graf H można osiągnąć poprzez zmianę koloru jednego z wierzchołków grafu G .

2.2 Funkcja celu

Algorytm dąży do minimalizacji funkcji celu¹:

$$f(G) = - \sum_{i=1}^k C_i^2 + \sum_{i=1}^k 2C_i E_i \quad (1)$$

gdzie:

- G - graf, dla którego liczona jest funkcja celu,
- k - liczba kolorów użytych do pokolorowania grafu G ,
- C_i - liczba wierzchołków grafu G pokolorowanych na i -ty kolor,
- E_i - liczba krawędzi grafu G , których oba końce pokolorowane są na i -ty kolor.

Definicję funkcji należy rozumieć następująco:

1. z jednej strony, faworyzowane są pokolorowania z użyciem jak najmniejszej liczby kolorów,
2. z drugiej strony, dyskryminowane są pokolorowania nielegalne.

¹Definicja funkcji celu zaczerpnięta z: D. S. Johnson, C. R. Aragon, L. A. McGeoch, C. Schevon, Optimization by Simulated Annealing: An Experimental Evaluation; Part II, Graph Coloring and Number Partitioning, Operations Research, Vol. 39, No. 3, May-June 1991, pp. 378-406.

2.3 Lista tabu

Lista tabu zawiera ograniczoną liczbę ostatnich akcji podjętych przez algorytm. Pojedynczą akcją jest wybór wierzchołka, który zostanie pokolorowany na inny kolor. Akcja na liście tabu jest reprezentowana przez parę *identyfikator wierzchołka* oraz *kolor wierzchołka przed podjęciem akcji*. Reprezentacja ta zapobiega badaniu jednakowych kombinacji w kolejnych iteracjach algorytmu. Przykładowo, w minimum lokalnym może zdarzyć się sytuacja, gdy najlepsze wartości funkcji celu będziemy osiągać poprzez cykliczną zmianę koloru tego samego wierzchołka w kolejnych iteracjach, czego chcemy uniknąć.

3 Struktury danych

3.1 Graf

Podstawową strukturą danych użytą w programie jest graf, na który składa się zbiór wierzchołków. Pojedynczy wierzchołek zawiera:

- identyfikator wierzchołka (ciąg znaków),
- identyfikator przypisanego koloru (liczba całkowita),
- zbiór wskazań na sąsiadujące wierzchołki (kolekcja wskazań).

3.2 Pamięć

Pamięć to listowa struktura danych, do której kolejne wpisy dodawane są na początku listy. W pamięci przechowywane są pary (*identyfikator wierzchołka*, *kolor wierzchołka*).

- Pamięć długoterminowa jest realizowana poprzez przechowywanie na liście wszystkich przejść od początku działania algorytmu.
- Pamięć krótkoterminowa jest realizowana poprzez użycie okna o rozmiarze m , umieszczonego na początku listy.

4 Założenia programu

4.1 Złożoność obliczeniowa

Złożoność obliczeniową można oszacować wyrażeniem:

$$i * (nk * m + nk * n^2 + (nk * \log(nk))) \quad (2)$$

gdzie:

- i - liczba iteracji,
- n - liczba wierzchołków grafu,
- m - rozmiar pamięci tabu.

Każda z i iteracji składa się z następujących kroków:

1. Wyznaczenie wszystkich możliwych sąsiadów aktualnego grafu, wraz ze sprawdzeniem dopuszczalności (lista tabu): $nk * m$.
2. Obliczenie funkcji celu dla każdego dopuszczalnego sąsiada: $nk * n^2$. (Obliczenie funkcji celu wymaga odwiedzenia wszystkich wierzchołków oraz wszystkich wierzchołków z nimi połączonych: n^2 .)
3. Sortowanie wyznaczonych sąsiadów ze względu na wartość funkcji celu: $nk * \log(nk)$.

Algorytm ma zatem złożoność wielomianową.

4.2 Dane wejściowe

Na rysunku 1 przedstawiono przykładowe dane wejściowe. Dane wejściowe składają się z:

3
A,B
C,D
A,D
C,E

Rysunek 1: Przykładowe dane wejściowe.

Liczebności klas kolorów specyfikowanej jako pierwszy parametr.

Połączeń pomiędzy wierzchołkami specyfikowanych w kolejnych wierszach jako para identyfikatorów wierzchołków oddzielonych przecinkami.

4.3 Dane wyjściowe

Dane wyjściowe zależą od wybranego trybu programu (opisane w sekcji 4.5).

Tryb standardowy Na wyjściu programu wypisywane są:

- Nazwa pliku z analizowanym grafem.
- Wynikowe przyporządkowanie *wierzchołków* \leftrightarrow *kolor*.
- Sprawdzenie legalności wynikowego przyporządkowania (tak / nie).

Tryb „rozmowny” Na wyjściu programu, poza informacjami z trybu standardowego, wypisywane są:

- Dane początkowe - nazwy klas kolorów, wylosowane przyporządkowanie, wartość funkcji celu dla wylosowanego przyporządkowania.
- Dane związane z każdą iteracją - numer iteracji, liczba iteracji bez zmiany wyniku, wartość funkcji celu dla najlepszej permutacji w iteracji, wartość funkcji celu dla najlepszego wyniku, zawartość pamięci krótkotrwałej dla danej iteracji, pokolorowanie (permutację) wybrane w danej iteracji.

4.4 Parametry algorytmu

Wielkość pamięci Rozmiar tablicy tabu jest wymagany parametrem aplikacji. Rozmiar tablicy tabu jest specyfikowany opcją `-m`.

Przykład: `<nazwa_programu> -m 5` uruchamia algorytm z pięcioelementową tablicą tabu.

Maksymalna liczba iteracji Maksymalna liczba iteracji określa liczbę przejść algorytmu, po której aplikacja zakończy działanie (opisane w sekcji 4.6). Maksymalną liczbę iteracji specyfikuje się opcją `-i`.

Przykład: `<nazwa_programu> -i 500` uruchamia algorytm dla maksymalnie 500 iteracji.

Maksymalna liczba iteracji bez zmiany rezultatu Maksymalna liczba iteracji bez zmiany rezultatu określa liczbę przejść algorytmu, po której aplikacja wyłączy się, jeżeli wartość funkcji celu dla najlepszego dotychczas znalezionej pokolorowania nie zmieni się (opisane w sekcji 4.6). Maksymalną liczbę iteracji bez zmiany wyniku specyfikuje się opcją `-s`.

Przykład: `<nazwa_programu> -s 25` uruchamia algorytm dla maksymalnie 25 iteracji bez zmiany wyniku.

4.5 Opcje programu

Poza parametrami algorytmu, aplikacja udostępnia opisane poniżej opcje.

Plik(i) wejściowe W opcjach programu można wyspecyfikować jeden lub więcej plików wejściowych. Nazwę pliku wejściowego specyfikuje się bez dodatkowych opcji, zaraz po nazwie programu.

Przykład: `<nazwa_programu> graf1.txt graf2.txt` wykona algorytm dla grafów opisanych w plikach *graf1.txt* oraz *graf2.txt*.

Plik wyjściowy W opcjach programu można wyspecyfikować nazwę pliku, do którego zostanie zapisane wyjście programu. Nazwę pliku wyjściowego specyfikuje się opcją `-o`. Nazwa pliku wyjściowego jest parametrem opcjonalnym. Domyślnie wyjście przekierowywane jest na standardowy strumień (konsolę).

Przykład: `<nazwa_programu> -o wyjście1.txt` zapisze wyjście algorytmu do pliku *wyjście1.txt*.

Tryb „rozmowny” W opcjach programu można włączyć tryb „rozmowny” (*verbose*), który wyprowadza dodatkowe informacje diagnostyczne na wyjście w trakcie działania algorytmu. W trybie domyślnym na wyjście wyprowadzany jest tylko wynik działania algorytmu. Tryb „rozmowny” specyfikuje się opcją `-v`.

Przykład: `<nazwa_programu> -v` uruchamia aplikację w trybie „rozmownym”.

4.6 Kryteria stopu

Maksymalna liczba iteracji Wykonywanie programu zakończy się, gdy algorytm przekroczy maksymalną liczbę iteracji. Maksymalna liczba iteracji jest podana jako parametr aplikacji.

Maksymalna liczba iteracji bez zmiany rezultatu Wykonywanie programu zakończy się, gdy algorytm przekroczy maksymalną liczbę iteracji, w których nie zmieniła się wartość funkcji celu dla najlepszego pokolorowania. Maksymalna liczba iteracji bez zmiany wyniku jest podawana w parametrach aplikacji.

W obu przypadkach jako wynik działania programu zostanie podane najlepsze dotychczas znalezione pokolorowanie badanego grafu.

4.7 Sytuacje wyjątkowe

Brak któregośkolwiek z wymaganych parametrów programu W tym przypadku działanie programu kończy się niepowodzeniem, a na wyjście podawana jest informacja o poprawnym sposobie wywołania.

Niepoprawny format pliku wejściowego W tym przypadku działanie programu kończy się niepowodzeniem, a na wyjście podawana jest informacja o błędnym formacie pliku.

Niespójny graf wejściowy W tym przypadku działanie programu kończy się niepowodzeniem, a na wyjście podawana jest informacja o błędnej konstrukcji grafu.

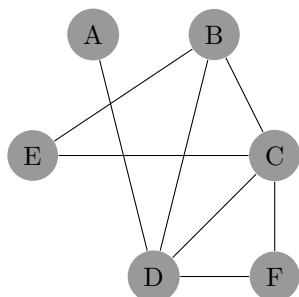
Brak możliwości wykonania jakiejkolwiek akcji Ta sytuacja może zdarzyć się w przypadku, gdy lista tabu ma zbyt duży rozmiar i zawiera wszystkie możliwe w danym kroku akcje (tzn. każda możliwa permutacja aktualnego grafu jest zabroniona). Aby umożliwić dalsze działanie, program usuwa najstarsze elementy listy, dopóki nie osiągnie stanu, w którym dozwolona będzie przynajmniej jedna z możliwych akcji.

5 Przykład działania

Poniżej przedstawiono przykładowy przebieg działania programu.

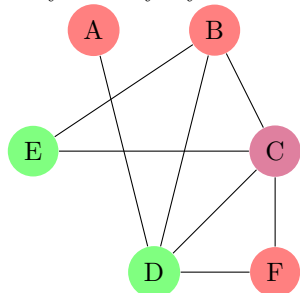
Dane wejściowe:

- Graf:



- Zestaw kolorów: ● ● ● ● ● ●
- Wielkość pmieci: 3
- Maksymalna liczba iteracji: 100
- Maksymalna liczba iteracji bez zmiany rezultatu: 2

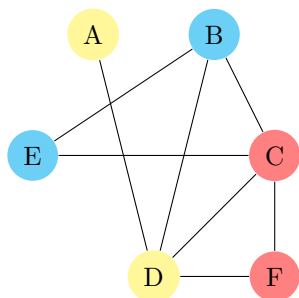
Przykładowy wynik:



5.1 Przygotowanie grafu

Przed rozpoczęciem właściwego działania algorytmu, program buduje graf i dokonuje jego losowego pokolorowania.

- Graf:




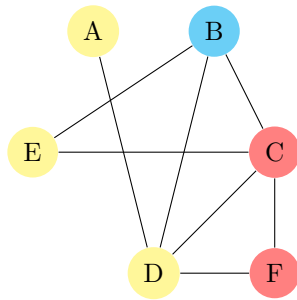
- Lista tabu: pusta


5.2 Przeszukiwanie

W każdym kroku algorytm sprawdza wszystkich sąsiadów aktualnego grafu. Jako aktualny graf biera tego sąsiada, dla którego wartość funkcji celu jest najmniejsza.


5.2.1 Krok 1

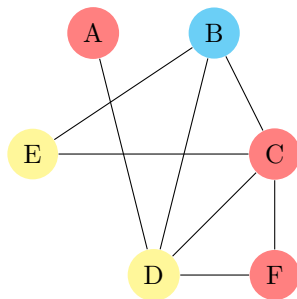
- Akcja: 
- Wartość funkcji celu: -4
- Graf:




- Lista tabu: 


5.2.2 Krok 2

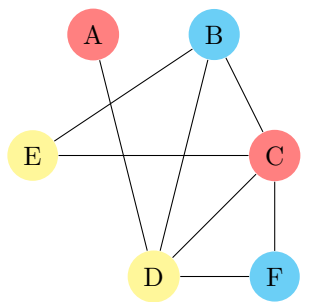
- Akcja: 
- Wartość funkcji celu: -8
- Graf:



- Lista tabu: 

5.2.3 Krok 3

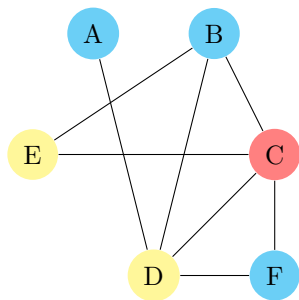
- Akcja: 
- Wartość funkcji celu: -12
- Graf:



- Lista tabu: F A E

5.2.4 Krok 4

- Akcja: A \rightarrow A
- Wartość funkcji celu: -14
- Graf:

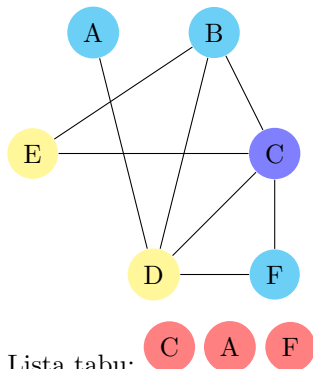


- Lista tabu: A F A

W tym momencie znalezione zostało optymalne pokolorowanie grafu. Program nie sprawdza jednak poprawności pokolorowania w każdym kroku, dlatego kontynuuje działanie.

5.2.5 Krok 5

- Akcja: C \rightarrow C
- Wartość funkcji celu: -14
- Graf:



W tym momencie osiągnięto maksymalną liczbę iteracji bez zmiany rezultatu. Program kończy działanie, jako wynik podając graf otrzymany w kroku 4 (jako że graf otrzymany w kroku 5 nie jest od niego lepszy).

6 Projekty testów

Przetestowane zostaną następujące aspekty programu:

6.1 Poprawność działania

Poprawność działania programu zostanie zweryfikowana:

Przy pomocy testów jednostkowych Każda metoda wykorzystywana w algorytmie zostanie przetestowana jednostkowo.

Przy pomocy zbiorów danych zaczerpniętych z Internetu Do testowania aplikacji zostaną wykorzystane znane optymalne pokolorowania grafu zaczerpnięte ze stron internetowych. Przykładowe dane znajdują się na serwerze <http://mat.gsia.cmu.edu/COLOR/instances.html>.

6.2 Optymalny rozmiar pamięci tabu

Optymalny rozmiar pamięci będziemy wyznaczać korzystając ze zbiorów danych testowych wymienionych w sekcji 6.1. Będziemy porównywać czas wyznaczania oraz poprawność danego rozwiązania dla różnych rodzajów pamięci.

6.3 Wydajność

- Wydajność algorytmu zostanie zmierzona z użyciem zestawu grafów testowych różniących się liczbą wierzchołków i krawędzi.
- Dla celów testowych program zostanie zmodyfikowany tak, aby jako dane wejściowe przyjmował wstępnie pokolorowany graf. Pozwoli to:
 - pominąć etap przygotowania grafu (patrz pkt. 5.1), a tym samym osiągnąć deterministyczne działanie programu,
 - zbadać wpływ wstępnego pokolorowania na wydajność algorytmu.
- Uzyskane wyniki zostaną ujęte w sprawozdaniu końcowym.