

[PTKB] Kolokwium 2 - opracowanie

1 Kolokwium 2 z PTKB (11.01.2012)

1.1 Zadanie 1.

Treść: Ile razy trzeba wykonać protokół uwierzytelniania Fiata-Shamira by prawdopodobieństwo oszustwa było mniejsze od 10^{-1000} ?

Rozwiązanie: Prawdopodobieństwo udanego oszustwa po wykonaniu n eksperymentów wynosi $(\frac{1}{2})^n$. Rozwiązujemy równanie $(\frac{1}{2})^x = 10^{-1000}$.

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2}\right)^x &= 10^{-1000} \\ 2^x &= 10^{1000} \\ x &= \log_2 10^{1000} \\ x &= 1000 \log_2 10 \\ x &\simeq 3321.928\end{aligned}$$

Wybieramy $\lceil x \rceil = 3322$.

1.2 Zadanie 2.

Treść: Skonstruować system podpisów cyfrowych ElGamala „dla małych liczb”. Przyjąć odpowiedni klucz publiczny i prywatny. Podpisać dowolną wybraną wiadomość m i zweryfikować podpis.

Rozwiązanie :

1. Ustanawianie systemu. Wybieramy liczbę pierwszą np. $p = 13$. Jako generator grupy mnożymy Z_{13}^* można wybrać $g = 2$, ponieważ $2^1(\text{mod } 13) = 2$, $2^2(\text{mod } 13) = 4$, $2^3(\text{mod } 13) = 8$, $2^4(\text{mod } 13) = 3$, $2^5(\text{mod } 13) = 6$, $2^6(\text{mod } 13) = 12$, $2^7(\text{mod } 13) = 11$, $2^8(\text{mod } 13) = 9$, $2^9(\text{mod } 13) = 5$, $2^{10}(\text{mod } 13) = 10$, $2^{11}(\text{mod } 13) = 7$, $2^{12}(\text{mod } 13) = 1$. Jako klucz prywatny wybieramy losowo dowolną liczbę $x \in \langle 2, p-2 \rangle$. Wybierzmy np. $x = 3$. Będzie to tajemnica strony podpisującej wiadomość. Ujawniamy klucz publiczny $y = g^x(\text{mod } p) = 2^3(\text{mod } 13) = 8$.
2. Podpisywanie wiadomości (dokumentu) przez stronę dysponującą tajnym kluczem prywatnym x . Wybieramy jako wiadomość podpisywaną dowolną liczbę $m \in Z_{p-1}$ czyli w naszym przypadku $m \in Z_{12}$. Wiadomość jawna m jest więc jednym z elementów zbioru $0, 1, 2, \dots, 11$. Wybierzmy jako wiadomość podpisywaną $m =$

4. Mając $m = 4$ i $x = 3$ tworzymy teraz podpis wiadomości $m = 4$ czyli odpowiednią parę uporządkowaną $(a, b) \in Z_p^* \times Z_{p-1}$. Losujemy $k \in Z_{p-1}$ takie, że $\text{NWD}(k, p-1) = 1$. Niech to będzie $k = 5$. Obliczamy k^{-1} w pierścieniu Z_{p-1} czyli w pierścieniu Z_{12} . Łatwo sprawdzić, że $k^{-1} = 5$. Obliczamy $a \in Z_p^*$ jako $g^k(\text{mod } p)$, mamy więc $2^5(\text{mod } 13) = 6$. Obliczamy teraz $b \in Z_{p-1}$ jako $b = k^{-1} \otimes_{p-1} (m - 12x \otimes [a]_{p-1})$. Przy przyjętych i obliczonych wartościach mamy więc $b = 5 \otimes_{12} (4 - 12 \cdot 3 \otimes_{12} 6) = 2$. Zatem podpis (a, b) wiadomości $m = 4$ ma postać pary uporządkowanej $(6, 2)$ a podpisywana wiadomość 4 z podpisem to para uporządkowana $(4, (6, 2))$.

3. Weryfikacja podpisu. Równanie weryfikacyjne dla podpisów ElGamala ma postać:

$$y^a \otimes_p a^b = g^m$$

gdzie podnoszenie do potęgi jest jak pierścieniu Z_p . Musimy sprawdzić dla $y = 8$, $a = 6$, $b = 2$, $m = 4$ i $g = 2$ czy równanie (*) jest spełnione.

$$\begin{aligned}L &= y^a \otimes_p a^b = 8^6 \cdot 2(\text{mod } 13) = 3 \\ P &= g^m = 2^4(\text{mod } 13) = 3\end{aligned}$$

Mamy więc $L = P$ i równanie weryfikacyjne (*) jest spełnione, zatem przedstawiony do weryfikacji podpis akceptujemy.

1.3 Zadanie 3.

Treść: Wykazać, że charakterystyka ciała skończonego (czyli najmniejsza taka liczba n , że spełniona jest równość $\underbrace{1 + 1 + 1 + \dots + 1}_n = 0$) jest zawsze

liczbą pierwszą.

Rozwiązanie: Załóżmy, że $\text{char } K = n$ i liczba $n = m_1 m_2$, gdzie $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$, a więc $n \cdot 1 = (m_1 m_2) \cdot 1 = 0$. Z łączności dodawania i rozdzielności mnożenia względem dodawania w ciele K mamy $(m_1 m_2) \cdot 1 = (m_1 \cdot 1)(m_2 \cdot 1)$, zatem:

$$(m_1 \cdot 1)(m_2 \cdot 1) = 0$$

Jeśli $m_1 < n$ to z definicji charakterystyki dostajemy, że $m_1 \cdot 1 \neq 0$, zatem istnieje element odwrotny $(m_1 \cdot 1)^{-1}$ do $m_1 \cdot 1$. Mnożąc lewostronnie równość

$(m_1 \cdot 1)(m_2 \cdot 1) = 0$ przez $(m_1 \cdot 1)^{-1}$ dostajemy $m_2 \cdot 1 = 0$, ponieważ jednak $1 \leq m_2 \leq n$ to biorąc pod uwagę definicję charakterystyki ciała musimy mieć $m_2 = n$. Wynika stąd, że liczba n nie jest podzielna przez żadną liczbę różną od n i 1 , a zatem jest liczbą pierwszą.

Można też rozumować nieco inaczej. Załóżmy, że $\text{char} K = n$ i liczba n daje się przedstawić w postaci $n = m_1 m_2$, gdzie $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ i $m_1, m_2 \geq 2$, czyli n nie jest liczbą pierwszą. Wówczas $n \cdot 1 = (m_1 m_2) \cdot 1 = (m_1 \cdot 1)(m_2 \cdot 1) = 0$. Ponieważ $m_1 \cdot 1 \neq 0$ i $m_2 \cdot 1 \neq 0$ oraz $(m_1 \cdot 1)(m_2 \cdot 1) = 0$ co nie jest możliwe, bo ciało nie ma niezerowych dzielników zera. Zatem założenie, że n nie jest liczbą pierwszą prowadzi do sprzeczności.

1.4 Zadanie 4.

Treść: Podać przykład liczby pseudopierwszej przy podstawie 2 i 3 jednocześnie. Czy takie liczby w ogóle istnieją?

Rozwiązanie: Liczba naturalna jest liczbą Carmichaela wtedy i tylko wtedy, gdy:

1. Jest liczbą złożoną.
2. Dla każdego $a \in \mathbb{N}$ z przedziału $1 < a < n$, względnie pierwszej z n , liczba $(a^{n-1} - 1)$ jest podzielna przez n .

Patrząc na najmniejsze liczby Carmichaela:

$$\begin{aligned} 561 &= 3 \cdot 11 \cdot 17 \\ 1105 &= 5 \cdot 13 \cdot 17 \end{aligned}$$

widzimy, że liczba Carmichaela 1105 jest względnie pierwsza zarówno z 2, jak również 3, a więc pozwala ona stworzyć liczby pseudopierwsze $2^{1105-1} - 1$ oraz $3^{1105-1} - 1$.

1.5 Zadanie 5.

Treść: Podać przykład ciała $GF(3^2)$, czyli ciała o 9 elementach.

Rozwiązanie: Ciało $GF(p^n)$, gdzie p jest liczbą pierwszą oraz $n \in \mathbb{N}$, można wygenerować:

- Znajdując wielomian $f(x)$ stopnia n nierozkładalny w pierścieniu $GF(p)[x]$.
- Znajdując wszystkie możliwe reszty z dzielenia wielomianu $f(x)$ w pierścieniu $GF(p)[x]$.
- Wykorzystując działania dodawania i mnożenia wielomianów modulo $f(x)$.

Wielomianem drugiego stopnia nierozkładalnym w ciele $G(3)[x]$ jest $x^2 + 1$ (patrz: *Zadanie 7*). Wszystkie możliwe reszty z dzielenia tego wielomianu w pierścieniu $G(3)[x]$ to: $2x+2$, $2x+1$, $2x$, $x+2$, $x+1$, x , 2 , 1 .

1.6 Zadanie 6.

Treść: Podać przykład szyfru Rabina „dla małych liczb”. Podać przykład szyfrowania i deszyfracji.

Rozwiązanie: Generacja pary kluczy przebiega następująco:

- Wybieramy dwie liczby pierwsze p i q . Dla uproszczenia można wybrać liczby, które spełniają warunek $p \equiv q \equiv 3 \pmod{4}$.
- Obliczamy klucz publiczny $n = p \cdot q$.

Żeby zaszyfrować wiadomość potrzebny jest wyłącznie klucz publiczny n . Żeby odczytać wiadomość potrzebny jest również rozkład klucza na czynniki pierwsze p i q . Przykładowe wartości „dla małych liczb” - $p = 7$, $q = 11$, $n = 77$.

Szyfrowanie wiadomości $m \in P = \{0, \dots, n-1\}$ polega na obliczeniu szyfrogramu $c = m^2 \pmod{n}$. Przykładowo, chcąc zakodować wiadomość $m = 20$, obliczamy $c = 20^2 \pmod{77} = 400 \pmod{77} = 15$. Niestety, szyfrowanie nie jest jednoznaczne, ponieważ ten sam szyfrogram uzyskujemy dla czterech różnych wiadomości $m \in \{13, 20, 57, 64\}$.

Deszyfrowanie wiadomości wymaga obliczenia pierwiastków kwadratowych ze względu na obie części klucza prywatnego p i q .

$$\begin{aligned} m_p &= \sqrt{c} \pmod{p} \\ m_q &= \sqrt{c} \pmod{q} \end{aligned}$$

Dla przykładowych małych liczb otrzymujemy $m_p = 1$ oraz $m_q = 9$. Następnie, używając rozszerzonego algorytmu Euklidesa, odnajdujemy y_p oraz y_q takie, że $y_p \cdot p + y_q \cdot q = 1$. Dla przykładowych danych $y_p = -3$ oraz $y_q = 2$. Teraz, korzystając z chińskiego twierdzenia o resztach, odnajdujemy cztery pierwiastki $(+r, -r, +s \text{ oraz } -s)$ równania $c + n\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} r &= (y_p \cdot p \cdot m_q + y_q \cdot q \cdot m_p) \pmod{n} \\ -r &= n - r \\ s &= (y_p \cdot p \cdot m_q - y_q \cdot q \cdot m_p) \pmod{n} \\ -s &= n - s \end{aligned}$$

Dla naszego przykładu pierwiastki tego równania przyjmują wartości $m \in \{64, 20, 13, 57\}$. Wśród nich jest zakodowana wiadomość $m = 20$.

1.7 Zadanie 7.

Treść: Wykazać, że wielomian $x^2 + 1$ jest nierozkładalny w pierścieniu wielomianów $GF(3)[x]$, a jest rozkładalny w pierścieniu wielomianów $GF(2)[x]$.

Rozwiązanie: Wielomian drugiego stopnia można rozłożyć za pomocą dwóch wielomianów pierwszego stopnia, więc:

$$\begin{aligned}x^2 + 1 &= (ax + b) * (cx + d) \\x^2 + 1 &= (ac)x^2 + (ad + bc)x + bd\end{aligned}$$

Dla ciała $GF(3)[x]$, $b, d \in \{0, 1, 2\}$ oraz $a, c \in \{1, 2\}$ (bo wielomian musi być rozkładalny). Rozważmy wszystkie możliwe wartości $(ad + bc) \bmod 3$. Jeżeli $(ad + bc) \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow a = 0 \wedge c = 0$, co jest sprzeczne z dziedziną, a więc wielomian nie może być rozkładalny.

Dla ciała $GF(2)[x]$, $b, d \in \{0, 1\}$ oraz $a, c \in \{1\}$. Jeżeli $(b + d) \equiv 0 \pmod 2 \Rightarrow (b = 0 \wedge d = 0) \vee (b = 1 \wedge d = 1)$. Dla drugiego przypadku otrzymujemy w $GF(2)[x]$:

$$x^2 + 1 \equiv (x + 1) * (x + 1)$$

Zatem wielomian jest rozkładalny.

1.8 Zadanie 8.

Treść: Wykazać, że w grupie skończonej dla każdego $a \in G$ mamy: $a^{rzG} = 1$, gdzie rzG oznacza rząd grupy G . Wykazać, wykorzystując ten fakt, twierdzenie Eulera. (Wskazówka: wykorzystać twierdzenie Lagrange'a: dla grup skończonych rząd podgrupy jest dzielnikiem rzędu grupy).

Rozwiązanie: W ciągu $a^1, a^2, \dots, a^{rzG}, a^{rzG+1}$ muszą być dwa elementy równe, tzn. dla pewnych $k', k'' \in [1, rzG + 1]$, $k' < k''$ musimy mieć $a^{k'} = a^{k''}$. Zatem $a^{k''-k'} = 1$. Istnieje więc takie $k \in [1, rzG](k = k'' - k')$, że $a^k = 1$. Niech r będzie najmniejszym takim k , że $a^k = 1$, wówczas zbiór $H = \{a^1, a^2, \dots, a^r\}$ stanowi podgrupę cykliczną rzędu r grupy G . Ponieważ, z twierdzenia Lagrange'a, r jest dzielnikiem rzędu grupy G , więc również $a^{rzG} = 1$.

Twierdzenie Eulera: jeśli $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ i $a \in \mathbb{N}$ oraz $NWD(a, n) = 1$ to $a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod n$, gdzie ϕ jest funkcją Eulera. Rozważmy grupę multiplikatywną Z_n^* . Grupa Z_n^* ma rząd równy $\phi(n)$. Zatem korzystając z $a^{rzG} = 1$ dostajemy, że dla każdego $a \in Z_n^*$ mamy $a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod n$. Warunek $a \in Z_n^*$ jest równoznaczny warunkowi $NWD(a, n) = 1$. Zatem twierdzenie Eulera jest prostym wnioskiem z ogólnego twierdzenia teoriogrupowego $a^{rzG} = 1$.

1.9 Zadanie 9.

Treść: Mamy zapis RNS z modułami $m_1 = 5$, $m_2 = 7$, $m_3 = 11$, $m_4 = 13$, za pomocą którego zapisujemy liczby całkowite ze zbioru $[0, m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot m_4 - 1]$. Dodać i pomnożyć dwie liczby $a = (3, 5, 9, 11)$ oraz $b = (1, 3, 7, 9)$ stosując typowy dla RNS algorytm. Czy uzyskane wyniki są poprawne?

Rozwiązanie: W RNS można wykonywać operację mnożenia i dodawania według poniższego algorytmu, dla każdego elementu z bazy:

$$\begin{aligned}\forall i \in M \quad a_i \pm b_i &\pmod{m_i} \\ \forall i \in M \quad a_i \cdot b_i &\pmod{m_i}\end{aligned}$$

Zatem:

$$\begin{aligned}(a + b) &= (3 + 1 \pmod 5, 5 + 3 \pmod 7, \\ &\quad 9 + 7 \pmod{11}, 11 + 9 \pmod{13}) = \\ &= (4, 1, 5, 7)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a \cdot b) &= (3 \cdot 1 \pmod 5, 5 \cdot 3 \pmod 7, \\ &\quad 9 \cdot 7 \pmod{11}, 11 \cdot 9 \pmod{13}) = \\ &= (3, 1, 8, 8)\end{aligned}$$

Aby sprawdzić poprawność tego rozwiązania, musimy wyznaczyć liczby a oraz b . Zapis RNS przedstawia liczby w postaci układu kongruencji w modulo bazy, a więc:

$$\begin{aligned}a &\equiv 3 \pmod 5 \\ a &\equiv 5 \pmod 7 \\ a &\equiv 9 \pmod{11} \\ a &\equiv 11 \pmod{13}\end{aligned}$$

Układ ten można sprowadzić do $a \equiv -2 \pmod{5005}$. Analogicznie dla b :

$$\begin{aligned}b &\equiv 1 \pmod 5 \\ b &\equiv 3 \pmod 7 \\ b &\equiv 7 \pmod{11} \\ b &\equiv 9 \pmod{13}\end{aligned}$$

Układ ten można sprowadzić do $b \equiv -4 \pmod{5005}$. Wyznamy sumę $a + b$.

$$a + b \equiv -6 \pmod{5005}$$

Wyznamy iloczyn $a \cdot b$.

$$a \cdot b \equiv 8 \pmod{5005}$$

Teraz sprawdzimy poprawność wyników uzyskanych przez algorytmy dodawania i mnożenia w RMS. Dodawanie:

$$\begin{aligned}-6 &\equiv 4 \pmod 5 \\ -6 &\equiv 1 \pmod 7 \\ -6 &\equiv 5 \pmod{11} \\ -6 &\equiv 7 \pmod{13}\end{aligned}$$

Czyli uzyskaliśmy te same współczynniki. Teraz sprawdzamy poprawność mnożenia:

$$\begin{aligned}8 &\equiv 3 \pmod 5 \\ 8 &\equiv 1 \pmod 7 \\ 8 &\equiv 8 \pmod{11} \\ 8 &\equiv 8 \pmod{13}\end{aligned}$$

Czyli wykorzystane algorytmy dodawania i mnożenia dały poprawne rezultaty.

1.10 Zadanie 10.

Treść: Załóżmy, że mamy dwie niezależne zmienne losowe X_1 oraz X_2 o wartościach w zbiorze $Z_2 = \{0, 1\}$. Wykazać, że jeśli X_1 ma rozkład równomierny, to również $X_1 \oplus X_2$ ma rozkład równomierny. Ten fakt jest podstawą protokołu o nazwie „rzut monetą przez telefon”.

Rozwiązanie: Najpierw wykażemy, że odwzorowanie $Y = X_1 \oplus X_2$ jest zmienną losową. Ogólnie rzecz biorąc, jeśli (Ω, \mathfrak{M}) jest przestrzenią mierzalną, $(E_t, \mathfrak{F}_t)_{t \in T}$ jest dowolną rodziną przestrzeni mierzalnych, a odwzorowania $f_t : \Omega \rightarrow E_t$ są $(\mathfrak{M}, \mathfrak{F}_t)$ mierzalne dla każdego $t \in T$ to odwzorowanie $\prod_{t \in T} f_t : \Omega \rightarrow \prod_{t \in T} E_t$ jest $(\mathfrak{M}, \prod_{t \in T} \mathfrak{F}_t)$ mierzalne. Stosując ten ogólny fakt do naszej sytuacji stwierdzamy, że odwzorowanie (X_1, X_2) jest $(\mathfrak{M}, 2^{\{0,1\}} \otimes 2^{\{0,1\}})$ mierzalne. Odwzorowanie $S : \{0, 1\} \times \{0, 1\} \ni (x_1, x_2) \rightarrow x_1 \oplus x_2 \in \{0, 1\}$ jest oczywiście $(2^{\{0,1\}} \otimes 2^{\{0,1\}}, 2^{\{0,1\}})$ mierzalne, zatem $Y = X_1 \oplus X_2$ jako superpozycja odwzorowań mierzalnych (X_1, X_2) i S jest $(\mathfrak{M}, 2^{\{0,1\}})$ mierzalne, jest więc zmienną losową.

Udowodnimy teraz równomierność rozkładu zmiennej losowej $Y = X_1 \oplus X_2$. Oznaczmy:

$$\begin{aligned} A_0 &= \{\omega \in \Omega; X_1(\omega) = 0, X_2(\omega) = 0\}, \\ A_1 &= \{\omega \in \Omega; X_1(\omega) = 1, X_2(\omega) = 0\}, \\ B_0 &= \{\omega \in \Omega; X_1(\omega) = 1, X_2(\omega) = 1\}, \\ B_1 &= \{\omega \in \Omega; X_1(\omega) = 0, X_2(\omega) = 1\}. \end{aligned}$$

Wówczas zdarzenia A_0, A_1, B_0, B_1 są parami rozłączne. Stąd i z niezależności zmiennych losowych X_1 i X_2 oznaczając $P(X_1 = 0) = p_0, P(X_1 = 1) = p_1$ dostajemy:

$$\begin{aligned} P(Y = 1) &= P(A_1 \cup B_1) = P(A_1) + P(B_1) = \\ &= P(X_1 = 1) \cdot P(X_2 = 0) + \\ &+ P(X_1 = 0) \cdot P(X_2 = 1) = \\ &= p_1 \cdot \frac{1}{2} + p_2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

ponieważ $p_0 + p_1 = 1$. Podobnie:

$$\begin{aligned} P(Y = 0) &= P(A_0 \cup B_0) = P(A_0) + P(B_0) = \\ &= P(X_1 = 0) \cdot P(X_2 = 0) + \\ &+ P(X_1 = 1) \cdot P(X_2 = 1) = \\ &= p_1 \cdot \frac{1}{2} + p_2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

a więc istotnie zmienna losowa $Y = X_1 \oplus X_2$ ma rozkład równomierny.

2 Zadania przygotowujące do kolokwium #2 z PTKB

2.1 Zadanie 2.

Treść: Ile razy trzeba wykonać protokół uwierzytelniania Fiata-Shamira by prawdopodobieństwo oszustwa było mniejsze od 10^{-100} .

Rozwiązanie: Patrz 1.1

2.2 Zadanie 3.

Treść: Pokazać jak musi sprepować protokół Fiata-Shamira Prover nie znający tajemnicy (a więc oszust lub zapominalski) by zawsze na wyzwanie $e = 1$ odpowiadać prawidłowo.

Rozwiązanie:

1. Prover nie znający tajemnicy s prawdziwego Provera (czyli nie znający klucza prywatnego) losuje liczbę $r \in Z_n, r \neq 0, 1$. Podnosi do kwadratu modulo n (przypominamy, że $n = pq$, gdzie p, q są różnymi liczbami pierwszymi) i przesyła w pierwszym kroku protokołu do Verifera liczbę $x = (r^2(\bmod n)(s^2(\bmod n))^{-1})(\bmod n)$, gdzie $s \in Z_n$ jest tajemnicą (kluczem prywatnym) prawdziwego Provera, $s^2(\bmod n) \in Z$, kluczem publicznym a odwrotność jest n brana w pierścieniu Z_n .
2. Jeśli Verifier żąda w drugim kroku protokołu odpowiedzi na pytanie $e = 1$ to Prover wysyła do Verifera liczbę $y = r$
3. Verifier sprawdza teraz równanie weryfikacyjne sprawdzając czy:

$$y^2(\bmod n) = (x * s^2)(\bmod n)$$

Równanie to jest dla $y = r$ i $x = (r^2(\bmod n)(s^2(\bmod n))^{-1})(\bmod n)$ Proverowi udało się dobrze odpowiedzieć na pytanie $e = 1$ Verifera.

2.3 Zadanie 33.

Treść: Obliczyć wartość symbolu Legendre’a: a) $(\frac{35}{7})$ b) $(\frac{64}{5})$

Rozwiązanie:

1.

$$(\frac{35}{7}) = (\frac{5}{7})(\frac{7}{7}) = 0$$

2.

$$(\frac{64}{5}) = (\frac{4}{5}) = 1$$

2.4 Zadanie 10.

Rozwiązanie: Patrz 1.10