Algebra of Matrices Ex 5.5 Q6

A square matrix A is called a symmetric matrix, if $A^T = A$

Here,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A + A^T = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2+2 & 4+5 \\ 5+4 & 6+6 \end{bmatrix}$$

$$A + A^T = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 9 & 12 \end{bmatrix} \qquad \text{---(i)}$$

$$\left(A + A^T\right)^T = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}^T$$

$$\left(A + A^T\right)^T = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 9 & 12 \end{bmatrix} \qquad \text{---(ii)}$$

From equation (i) and (ii),

$$\left(A + A^T\right)^T = \left(A + A^T\right)$$

So,

$\left(A + A^T\right)$ is a symmetric matrix.

Algebra of Matrices Ex 5.5 Q7

Here,

$$A=\begin{bmatrix}3 & -4\\ 1 & -1\end{bmatrix} \quad \Rightarrow A^T=\begin{bmatrix}3 & 1\\ -4 & -1\end{bmatrix}$$

$$Let,\quad X=\frac{1}{2}\left(A+A^T\right)=\frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}3 & -4\\ 1 & -1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & 1\\ -4 & -1\end{bmatrix}\right)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}3+3 & -4+1\\ 1-4 & -1-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & \frac{-3}{2}\\ \frac{-3}{2} & -1\end{bmatrix}$$

$$Now,\quad X^T=\begin{bmatrix}3 & \frac{-3}{2}\\ \frac{-3}{2} & -1\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}3 & \frac{-3}{2}\\ \frac{-3}{2} & -1\end{bmatrix}=X$$

$\Rightarrow$ X is symmetric matrix

$$Let\quad Y=\frac{1}{2}\left(A-A^T\right)=\frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}3 & -4\\ 1 & -1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3 & 1\\ -4 & -1\end{bmatrix}\right)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}3-3 & -4-1\\ 1+4 & -1+1\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & -5\\ 5 & 0\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & \frac{-5}{2}\\ \frac{5}{2} & 0\end{bmatrix}$$

$$Now,\quad -Y^T=-\begin{bmatrix}0 & \frac{-5}{2}\\ \frac{5}{2} & 0\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}0 & \frac{-5}{2}\\ \frac{5}{2} & 0\end{bmatrix}=Y$$

$\Rightarrow$ Y is skew symmetric

$$Now,\quad X+Y=\begin{bmatrix}3 & \frac{-3}{2}\\ \frac{-3}{2} & -1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & \frac{-5}{2}\\ \frac{5}{2} & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3+0 & \frac{-3}{2}-\frac{5}{2}\\ \frac{-3}{2}+\frac{5}{2} & -1+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -4\\ 1 & -1\end{bmatrix}=A$$

Algebra of Matrices Ex 5.5 Q8

Let,

$$A=\begin{bmatrix}3 & -2 & -4\\ 3 & -2 & -5\\ -1 & 1 & 2\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^T=\begin{bmatrix}3 & 3 & -1\\ -2 & -2 & 1\\ -4 & -5 & 2\end{bmatrix}$$

$$\text{Let, } X=\frac{1}{2}\left(A+A^T\right)=\frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}3 & -2 & -4\\ 3 & -2 & -5\\ -1 & 1 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & 3 & -1\\ -2 & -2 & 1\\ -4 & -5 & 2\end{bmatrix}\right)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}3+3 & -2+3 & -4-1\\ 3-2 & -2-2 & -5+1\\ -1-4 & 1-5 & 2+2\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}6 & 1 & -5\\ 1 & -4 & -4\\ -5 & -4 & 4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3 & \frac{1}{2} & \frac{-5}{2}\\ \frac{1}{2} & -2 & -2\\ \frac{-5}{2} & -2 & 2\end{bmatrix}$$

$$\text{Now,}\quad X^T=\begin{bmatrix}3 & \frac{1}{2} & \frac{-5}{2}\\ \frac{1}{2} & -2 & -2\\ \frac{-5}{2} & -2 & 2\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}3 & \frac{1}{2} & \frac{-5}{2}\\ \frac{1}{2} & -2 & -2\\ \frac{-5}{2} & -2 & 2\end{bmatrix}=X$$

$\Rightarrow$ X is a symmetric matrix

$$\text{Let, } Y=\frac{1}{2}\left(A-A^T\right)=\frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}3 & -2 & -4\\ 3 & -2 & -5\\ -1 & 1 & 2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3 & 3 & -1\\ -2 & -2 & 1\\ -4 & -5 & 2\end{bmatrix}\right)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}3-3 & -2-3 & -4+1\\ 3+2 & -2+2 & -5-1\\ -1+4 & 1+5 & 2-2\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & -5 & -3\\ 5 & 0 & -6\\ 3 & 6 & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & \frac{-5}{2} & \frac{-3}{2}\\ \frac{5}{2} & 0 & -3\\ \frac{3}{2} & 3 & 0\end{bmatrix}$$

$$-Y^T = -\begin{bmatrix} 0 & \frac{-5}{2} & \frac{-3}{2} \\ \frac{5}{2} & 0 & -3 \\ \frac{3}{2} & 3 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-5}{2} & \frac{-3}{2} \\ \frac{5}{2} & 0 & -3 \\ \frac{3}{2} & 3 & 0 \end{bmatrix} = Y$$

$\Rightarrow$ Y is a skew symmetric matrix

$$X + Y = \begin{bmatrix} 3 & \frac{1}{2} & \frac{-5}{2} \\ \frac{1}{2} & -2 & -2 \\ \frac{-5}{2} & -2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{-5}{2} & \frac{-3}{2} \\ \frac{5}{2} & 0 & -3 \\ \frac{3}{2} & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+0 & \frac{1}{2}-\frac{5}{2} & \frac{-5}{2}-\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2}+\frac{5}{2} & -2+0 & -2-3 \\ \frac{-5}{2}+\frac{3}{2} & -2+3 & 2+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 3 & -2 & -5 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = A$$

Hence, Symmetric matrix $X = \begin{bmatrix} 3 & \frac{1}{2} & \frac{-5}{2} \\ \frac{1}{2} & -2 & -2 \\ \frac{-5}{2} & -2 & 2 \end{bmatrix}$

*********** END **********