



Algebra of Matrices Ex 5.3 Q31

$$\text{Given, } A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4+3 & 6+6 \\ 2+2 & 3+4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 12 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2.A$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 12 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 14+12 & 21+24 \\ 8+7 & 12+14 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 26 & 45 \\ 15 & 26 \end{bmatrix}$$

$$\text{Hence, } A^3 - 4A^2 + A$$

$$= \begin{bmatrix} 26 & 45 \\ 15 & 26 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 7 & 12 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 26-28+2 & 45-48+3 \\ 15-16+1 & 26-28+2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= 0$$

$$\text{So, } A^3 - 4A^2 + A = 0$$

Algebra of Matrices Ex 5.3 Q32

Given, $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 12 & 7 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned}
 & A^2 - 12A - I \\
 &= \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 12 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 12 & 7 \end{bmatrix} - 12 \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 12 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 25+36 & 15+21 \\ 60+84 & 36+49 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 60 & 36 \\ 144 & 84 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 61 & 36 \\ 144 & 85 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 60 & 36 \\ 144 & 84 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 61-60-1 & 36-36-0 \\ 144-144-0 & 85-84-1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Since $A^2 - 12A - I = 0$

So,

A is a root of the equation $A^2 - 12A - I = 0$

Algebra of Matrices Ex 5.3 Q33

Given, $A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned}
 & A^2 = 5A - 14I \\
 &= \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} - 14 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 9+20 & -15-10 \\ -12-8 & 20+4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 15 & -25 \\ -20 & 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 14 & 0 \\ 0 & 14 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 29 & -25 \\ -20 & 24 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 15 & -25 \\ -20 & 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 14 & 0 \\ 0 & 14 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 29-15-14 & -25+25-0 \\ -20+20-0 & 24-10-14 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

So,

$A^2 - 5A - 14I = 0$

Algebra of Matrices Ex 5.3 Q34

$$\text{Given, } A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4+3 & 6+6 \\ 2+2 & 3+4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 12 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2.A$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 12 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 14+12 & 21+24 \\ 8+7 & 12+14 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 26 & 45 \\ 15 & 26 \end{bmatrix}$$

$$\text{Hence, } A^3 - 4A^2 + A$$

$$= \begin{bmatrix} 26 & 45 \\ 15 & 26 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 7 & 12 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 26-28+2 & 45-48+3 \\ 15-16+1 & 26-28+2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= 0$$

$$\text{So, } A^3 - 4A^2 + A = 0$$

It is given that $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} \therefore A^2 &= A \cdot A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3(3)+1(-1) & 3(1)+1(2) \\ -1(3)+2(-1) & -1(1)+2(2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 9-1 & 3+2 \\ -3-2 & -1+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{L.H.S.} &= A^2 - 5A + 7I \\ &= \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + 7 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 15 & 5 \\ -5 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= O = \text{R.H.S.} \end{aligned}$$

$$\therefore A^2 - 5A + 7I = O$$

Since $A^2 - 5A + 7I = O$, we have

$$A^2 = 5A - 7I$$

Therefore, $A^4 = A^2 \times A^2 = (5A - 7I)(5A - 7I)$

$$\Rightarrow A^4 = 25A^2 - 35AI - 35IA + 49I$$

$$\Rightarrow A^4 = 25A^2 - 70A + 49I$$

$$\Rightarrow A^4 = 25(5A - 7I) - 70A + 49I$$

$$\Rightarrow A^4 = 125A - 175I - 70A + 49I$$

$$\Rightarrow A^4 = 55A - 126I$$

$$\Rightarrow A^4 = 55 \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - 126 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^4 = \begin{bmatrix} 165 & 55 \\ -55 & 110 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 126 & 0 \\ 0 & 126 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^4 = \begin{bmatrix} 165 - 126 & 55 - 0 \\ -55 - 0 & 110 - 126 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^4 = \begin{bmatrix} 39 & 55 \\ -55 & -16 \end{bmatrix}$$

***** END *****