



Algebra of Matrices Ex 5.3 Q42

Given, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

And $f(x) = x^2 - 2x$

$\Rightarrow f(A) = A^2 - 2A$

$\Rightarrow f(A) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow f(A) = \begin{bmatrix} 0+4+0 & 0+5+4 & 0+0+6 \\ 0+20+0 & 4+25+0 & 8+0+0 \\ 0+8+0 & 0+10+6 & 0+0+9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 8 & 10 & 0 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow f(A) = \begin{bmatrix} 4 & 9 & 6 \\ 20 & 29 & 8 \\ 8 & 16 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 8 & 10 & 0 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow f(A) = \begin{bmatrix} 4-0 & 9-2 & 6-4 \\ 20-8 & 29-10 & 8-0 \\ 8-0 & 16-4 & 9-6 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow f(A) = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 2 \\ 12 & 19 & 8 \\ 8 & 12 & 3 \end{bmatrix}$

Algebra of Matrices Ex 5.3 Q43

Given,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{And } f(x) = x^3 + 4x^2 - x$$

$$\Rightarrow f(A) = A^3 + 4A^2 - A \quad \text{---(i)}$$

$$A^2 = A \times A$$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0+2+2 & 0-3-2 & 0+0+0 \\ 0-6+0 & 2+9+0 & 4+0+0 \\ 0-2+0 & 1+3+0 & 0+0+0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 0 \\ -6 & 11 & 4 \\ -2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \times A$$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} 4 & -5 & 0 \\ -6 & 11 & 4 \\ -2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0-10+0 & 4+15+0 & 8+0+0 \\ 0+22+4 & -6-33-4 & -12+0+0 \\ 0+8+2 & -2-12-2 & -4+0+0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} -10 & 19 & 8 \\ 26 & -43 & -12 \\ 10 & -16 & -4 \end{bmatrix}$$

Put the value of A, A^2, A^3 in equation (i)

$$f(A) = A^3 + 4A^2 - A$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{bmatrix} -10 & 19 & 8 \\ 26 & -43 & -12 \\ 10 & -16 & -4 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 4 & -15 & 0 \\ -6 & 11 & 4 \\ -2 & 4 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -10+16-0 & 19-20-1 & 8+0-2 \\ 26-24-2 & -43+44+3 & -12+16+0 \\ 10-8-1 & -16+16+1 & -4+8-0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 6 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Hence,

$$f(A) = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Algebra of Matrices Ex 5.3 Q44

Given that, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ and $f(x) = x^3 - 6x^2 + 7x + 2$

Therefore, $f(A) = A^3 - 6A^2 + 7A + 2I_3$

First find A^2 :

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 8 \\ 2 & 4 & 5 \\ 8 & 0 & 13 \end{bmatrix}$$

Now, Let us find A^3 :

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 8 \\ 2 & 4 & 5 \\ 8 & 0 & 13 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & 0 & 34 \\ 12 & 8 & 23 \\ 34 & 0 & 55 \end{bmatrix}$$

Thus,

$$f(A) = A^3 - 6A^2 + 7A + 2I_3$$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} 21 & 0 & 34 \\ 12 & 8 & 23 \\ 34 & 0 & 55 \end{bmatrix} - 6 \begin{bmatrix} 5 & 0 & 8 \\ 2 & 4 & 5 \\ 8 & 0 & 13 \end{bmatrix} + 7 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 21 & 0 & 34 \\ 12 & 8 & 23 \\ 34 & 0 & 55 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 30 & 0 & 48 \\ 12 & 24 & 30 \\ 48 & 0 & 78 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 0 & 14 \\ 0 & 14 & 7 \\ 14 & 0 & 21 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 21-30+7+2 & 0 & 34-48+14+0 \\ 12-12+0 & 8-24+14+2 & 23-30+7+0 \\ 34-48+14+0 & 0 & 55-78+21+2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = O \end{aligned}$$

Thus, A is a root of the polynomial.

Given,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 - 4A - 5I$$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1+4+4 & 2+2+4 & 2+4+2 \\ 2+2+4 & 4+1+4 & 4+2+2 \\ 2+4+2 & 4+2+2 & 4+4+1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 8 & 4 & 8 \\ 8 & 8 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 8 & 4 & 8 \\ 8 & 8 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 9-4-5 & 8-8-0 & 8-8-0 \\ 8-8-0 & 9-4-5 & 8-8-0 \\ 8-8-0 & 8-8-0 & 9-4-5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Hence,

$$A^2 - 4A - 5I = 0$$

***** END *****