Algebra of Matrices Ex 5.3 Q6

Given, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, C\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+0 & 0+0 \\ 0+0 & 0+1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = I_2 \qquad ---(i)$$

$$B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+0 & 0+0 \\ 0+0 & 0+1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B^2 = I_2 \qquad ---(ii)$$

$$C^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0+1 & 0+0 \\ 0+0 & 1+0 \end{bmatrix}$$

$$C^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C^2 = I_2 \qquad ---(iii)$$

Hence,

From equation (i), (ii) and (iii),

$$A^2 = B^2 = C^2 = I_2$$

Algebra of Matrices Ex 5.3 Q7

Given, $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ and $B = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$

$$3A^2 - 2B + I$$
$$= 3\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= 3\begin{bmatrix} 4-3 & -2-2 \\ 6+6 & -3+4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ -2 & 14 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= 3\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 12 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ -2 & 14 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 3 & -12 \\ 36 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ -2 & 14 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 3-0+1 & -12+8+0 \\ 36+2+0 & 3-14+1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 4 & -20 \\ 38 & -10 \end{bmatrix}$$

Hence,
$$3A^2 - 2B + I = \begin{bmatrix} 4 & -20 \\ 38 & -10 \end{bmatrix}$$

Algebra of Matrices Ex 5.3 Q8

Given, $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

$$(A - 2I)(A - 3I)$$
$$= \left(\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$
$$= \left(\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\right)$$
$$= \left(\begin{bmatrix} 4-2 & 2-0 \\ -1-0 & 1-2 \end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix} 4-3 & 2-0 \\ -1-0 & 1-3 \end{bmatrix}\right)$$
$$= \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 2-2 & 4-4 \\ -1+1 & -2+2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= 0$$

Hence,
$$(A - 2I)(A - 3I) = 0$$

Algebra of Matrices Ex 5.3 Q9

Given, $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

$$A^2=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1+0 & 1+1\\ 0+0 & 0+1\end{bmatrix}$$

$$A^2=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$A^3=A^2\cdot A$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1+0 & 1+2\\ 0+0 & 0+1\end{bmatrix}$$

$$A^3=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

Hence,

$$A^2=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}, A^3=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

Algebra of Matrices Ex 5.3 Q10

Given, $A=\begin{bmatrix} ab & b^2 \\ -a^2 & -ab \end{bmatrix}$

$$A^2 = \begin{bmatrix} ab & b^2 \\ -a^2 & -ab \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ab & b^2 \\ -a^2 & -ab \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^2b^2 - a^2b^2 & ab^3 - ab^3 \\ -a^3b + a^3b & -a^2b^2 + a^2b^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= 0$$

Hence,

$$A^2 = 0$$

*********** END **********