



Algebra of Matrices Ex 5.5 Q4

Given,

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 1 & 4 & 3 \\ -2 & 5 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 7 & 3 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \therefore X &= \frac{1}{2}(A + A^T) \\ &= \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 1 & 4 & 3 \\ -2 & 5 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 7 & 3 & 8 \end{bmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3+3 & 2+1 & 7-2 \\ 1+2 & 4+4 & 3+5 \\ -2+7 & 5+3 & 8+8 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 6 & 3 & 5 \\ 3 & 8 & 8 \\ 5 & 8 & 16 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow X &= \begin{bmatrix} 3 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} & 4 & 4 \\ \frac{5}{2} & 4 & 8 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Now, } Y &= \frac{1}{2}(A - A^T) \\ &= \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 1 & 4 & 3 \\ -2 & 5 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 7 & 3 & 8 \end{bmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3-3 & 2-1 & 7+2 \\ 1-2 & 4-4 & 3-5 \\ -2-7 & 5-3 & 8-8 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 9 \\ -1 & 0 & -2 \\ -9 & 2 & 0 \end{bmatrix} \\
 Y &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{9}{2} \\ \frac{-1}{2} & 0 & -1 \\ \frac{-9}{2} & 1 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Now,

$$X^T = \begin{bmatrix} 3 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} & 4 & 4 \\ \frac{5}{2} & 4 & 8 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 3 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} & 4 & 4 \\ \frac{5}{2} & 4 & 8 \end{bmatrix} = X$$

\Rightarrow X is a symmetric matrix

Now,

$$-Y^T = - \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{9}{2} \\ \frac{-1}{2} & 0 & -1 \\ \frac{-9}{2} & 1 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-9}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ \frac{9}{2} & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= - \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{9}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{-9}{2} & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow -Y^T = Y$$

$\therefore Y$ is skew symmetric matrix.

$$X + Y = \begin{bmatrix} 3 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} & 4 & 4 \\ \frac{5}{2} & 4 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{9}{2} \\ \frac{-1}{2} & 0 & -1 \\ \frac{-9}{2} & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3+0 & \frac{3}{2} + \frac{1}{2} & \frac{5}{2} + \frac{9}{2} \\ \frac{3}{2} - \frac{1}{2} & 4+0 & 4-1 \\ \frac{5}{2} - \frac{9}{2} & 4+1 & 8-0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 1 & 4 & 3 \\ -2 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= A$$

Hence,

$$X = \begin{bmatrix} 3 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} & 4 & 4 \\ \frac{5}{2} & 4 & 8 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{9}{2} \\ \frac{-1}{2} & 0 & -1 \\ \frac{-9}{2} & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

***** END *****

