Algebra of Matrices Ex 5.3 Q42

Given, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

And $f(x) = x^2 - 2x$

$\Rightarrow \quad f(A) = A^2 - 2A$

$$\Rightarrow \quad f(A) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad f(A) = \begin{bmatrix} 0+4+0 & 0+5+4 & 0+0+6 \\ 0+20+0 & 4+25+0 & 8+0+0 \\ 0+8+0 & 0+10+6 & 0+0+9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 8 & 10 & 0 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad f(A) = \begin{bmatrix} 4 & 9 & 6 \\ 20 & 29 & 8 \\ 8 & 16 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 8 & 10 & 0 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad f(A) = \begin{bmatrix} 4-0 & 9-2 & 6-4 \\ 20-8 & 29-10 & 8-0 \\ 8-0 & 16-4 & 9-6 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad f(A) = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 2 \\ 12 & 19 & 8 \\ 8 & 12 & 3 \end{bmatrix}$$

Algebra of Matrices Ex 5.3 Q43

Given,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

And $\quad f(x) = x^3 + 4x^2 - x$

$\Rightarrow \quad f(x) = A^3 + 4A^2 - A \qquad \text{---(i)}$

$$A^2 = A \times A$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0+2+2 & 0-3-2 & 0+0+0 \\ 0-6+0 & 2+9+0 & 4+0+0 \\ 0-2+0 & 1+3+0 & 0+0+0 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 0 \\ -6 & 11 & 4 \\ -2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \times A$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & -5 & 0 \\ -6 & 11 & 4 \\ -2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0-10+0 & 4+15+0 & 8+0+0 \\ 0+22+4 & -6-33-4 & -12+0+0 \\ 0+8+2 & -2-12-2 & -4+0+0 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} -10 & 19 & 8 \\ 26 & -43 & -12 \\ 10 & -16 & -4 \end{bmatrix}$$

Put the value of A, A^2, A^3 in equation (i)

$$f(A) = A^3 + 4A^2 - A$$

$$= \begin{bmatrix} -10 & 19 & 8 \\ 26 & -43 & -12 \\ 10 & -16 & -4 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 4 & -15 & 0 \\ -6 & 11 & 4 \\ -2 & 4 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -10+16-0 & 19-20-1 & 8+0-2 \\ 26-24-2 & -43+44+3 & -12+16+0 \\ 10-8-1 & -16+16+1 & -4+8-0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Hence,

$$f(A) = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Algebra of Matrices Ex 5.3 Q44

$$Given\ that,\ A=\begin{bmatrix}1&0&2\\0&2&1\\2&0&3\end{bmatrix}\ and\ f(x)=x^3-6x^2+7x+2$$

$$Therefore,\ f(A)=A^3-6A^2+7A+2I_3$$

$$First\ find\ A^2:$$

$$A^2=A\times A=\begin{bmatrix}1&0&2\\0&2&1\\2&0&3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&0&2\\0&2&1\\2&0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&0&8\\2&4&5\\8&0&13\end{bmatrix}$$

$$Now,\ Let\ us\ find\ A^3:$$

$$A^3=A^2\times A=\begin{bmatrix}5&0&8\\2&4&5\\8&0&13\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&0&2\\0&2&1\\2&0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}21&0&34\\12&8&23\\34&0&55\end{bmatrix}$$

$$Thus,$$

$$f(A)=A^3-6A^2+7A+2I_3$$

$$=\begin{bmatrix}21&0&34\\12&8&23\\34&0&55\end{bmatrix}-6\begin{bmatrix}5&0&8\\2&4&5\\8&0&13\end{bmatrix}+7\begin{bmatrix}1&0&2\\0&2&1\\2&0&3\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}21&0&34\\12&8&23\\34&0&55\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}30&0&48\\12&24&30\\48&0&78\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}7&0&14\\0&14&7\\14&0&21\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}21-30+7+2&0&34-48+14+0\\12-12+0&8-24+14+2&23-30+7+0\\34-48+14+0&0&55-78+21+2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=O$$

$$Thus,\ A\ is\ a\ root\ of\ the\ polynomial.$$

Algebra of Matrices Ex 5.3 Q45

Given,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$A^2 - 4A - 5I$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+4+4 & 2+2+4 & 2+4+2 \\ 2+2+4 & 4+1+4 & 4+2+2 \\ 2+4+2 & 4+2+2 & 4+4+1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 8 & 4 & 8 \\ 8 & 8 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 8 & 4 & 8 \\ 8 & 8 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9-4-5 & 8-8-0 & 8-8-0 \\ 8-8-0 & 9-4-5 & 8-8-0 \\ 8-8-0 & 8-8-0 & 9-4-5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= 0$$

Hence,

$$A^2 - 4A - 5I = 0$$

********** END **********