



Algebra of Matrices Ex 5.5 Q5

Given,

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & -2 \\ -1 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Let } X = \frac{1}{2}(A + A^T)$$

$$= \frac{1}{2} \left( \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & -2 \\ -1 & 7 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4+4 & 2+3 & -1+1 \\ 3+2 & 5+5 & 7-2 \\ 1-1 & -2+7 & 1+1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 8 & 5 & 0 \\ 5 & 10 & 5 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & \frac{5}{2} & 0 \\ \frac{5}{2} & 5 & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$X^T = \begin{bmatrix} 4 & \frac{5}{2} & 0 \\ \frac{5}{2} & 5 & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 4 & \frac{5}{2} & 0 \\ \frac{5}{2} & 5 & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} & 1 \end{bmatrix} = X$$

$\therefore X$  is symmetric matrix

Now,

$$Y = \frac{1}{2}(A - A^T)$$

$$= \frac{1}{2} \left( \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & -2 \\ -1 & 7 & 1 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4-4 & 2-3 & -1-1 \\ 3-2 & 5-5 & 7+2 \\ 1+1 & -2-7 & 1-1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 9 \\ 2 & -9 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore Y = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{9}{2} \\ 1 & \frac{-9}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow -Y^T = - \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{9}{2} \\ 1 & \frac{-9}{2} & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{9}{2} \\ 1 & \frac{-9}{2} & 0 \end{bmatrix} = Y$$

$\Rightarrow Y$  is a skew symmetric matrix.

Now,

$$\begin{aligned}X + Y &= \begin{bmatrix} 4 & \frac{5}{2} & 0 \\ \frac{5}{2} & 5 & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{9}{2} \\ 1 & \frac{-9}{2} & 0 \end{bmatrix} \\&= \begin{bmatrix} 4 + 0 & \frac{5}{2} - \frac{1}{2} & 0 - 1 \\ \frac{5}{2} + \frac{1}{2} & 5 + 0 & \frac{5}{2} + \frac{9}{2} \\ 0 + 1 & \frac{5}{2} - \frac{9}{2} & 1 + 0 \end{bmatrix} \\&= \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = A\end{aligned}$$

\*\*\*\*\* END \*\*\*\*\*