经综数学必备公式手册

第一部分 必须掌握基础知识

第 1 讲 指数的运算公式

1. 指数的基本运算公式

a,b 为常数，$a,b>0$ 且 $a,b\neq 1$ 时，有

（1）$a^r\cdot a^s=a^{r+s}$

（2）$\dfrac{a^r}{a^s}=a^{r-s}$

（3）$\left(a^r\right)^s=a^{rs}$

（4）$\left(ab\right)^r=a^rb^r$

（5）$a^0=1,a^{-p}=\dfrac{1}{a^p}$

（6）$\left(\dfrac{a}{b}\right)^k=\dfrac{a^k}{b^k}$

（7）$\sqrt[s]{a^r}=a^{\frac{r}{s}}$

第 2 讲 对数的运算公式

1.对数的运算公式

$\log_a N=b$（b 叫做以 a 为底 N 的对数）

（1）$\log_a M+\log_a N=\log_a(MN)$

（2）$\log_a M-\log_a N=\log_a\dfrac{M}{N}$

（3）$\log_a M^n=n\log_a M$

$(M>0, N>0, a>0, a\neq 1)$

（4）（换底公式）$\log_a N=\dfrac{\log_b N}{\log_b a}$

（5）$\log_a a^N=N$

（6）$a^{\log_a N}=N$

第 3 讲 常用乘法公式和因式分解公式

1. $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$.

2. $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

3. $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)$.

4. $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$.

5. $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$.

6. $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

7. $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3b^2a+b^3$.

8. $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3b^2a-b^3$.

9. $(a+b)^n=C_n^0a^nb^0+C_n^1a^{n-1}b^1+C_n^2a^{n-2}b^2+\cdots+C_n^na^0b^n$

第 4 讲 一元二次方程

1. 表达式：$ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$

2. 求根公式法：$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

① $\Delta=\mathrm{b}^2-4ac>0$，方程有两个不相等实数根 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

② $\Delta=\mathrm{b}^2-4ac=0$，方程有两个相等实数根 $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$.

③ $\Delta = b^2 - 4ac < 0$，方程无实数根.

3. 根与系数关系（韦达定理）：若 x_1, x_2 是方程 $ax^2 + bx + c = 0(a \neq 0)$ 的两个根，则

（1）$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$，$x_1x_2 = \frac{c}{a}$

（2）$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$

（3）$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{b}{c}$

（4）$|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|a|}$

第 5 讲 常用集合

N 表示自然数构成的集合，称为**自然数集**. $N = \{0, 1, 2, \cdots, n, \cdots\}$.

在表示数集的字母的右上角标上"+"来表示该数集内排除 0 与负数的集.

N^+ 表示全体正整数构成的集合，$N^+ = \{1, 2, \cdots, n, \cdots\}$.

R 表示全体实数构成的集合，称为**实数集** .

Z 表示全体整数构成的集合，称为**整数集** .

$$Z = \{\cdots, -n, \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots, n, \cdots\}.$$

Q 表示全体有理数构成的集合，称为**有理数集**.

$$Q = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in Z, q \in N^+ \text{且} p \text{与} q \text{互质} \right\}.$$

邻域 $U(x_0, \delta) = \{x \mid |x - x_0| < \delta, \delta > 0\}$.

去心邻域 $\mathring{U}(x_0, \delta) = \{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta, \delta > 0\}$

第 6 讲 常见不等式

1. **三角不等式** $|x + y| \leqslant |x| + |y|$, $||x| - |y|| \leqslant |x - y|$，$\forall x, y \in R$.

2. **均值不等式** $x^2 + y^2 \geqslant 2xy$ ，$\forall x, y \in R$.

特别 $x, y > 0$ ，$\frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy}$.

$\frac{x+y}{2}$ 称为算术平均值，$\sqrt{xy}$ 称为几何平均值. 可推广到 n 个实数.

第 7 讲 三角函数常用公式

1. 诱导公式

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha \qquad \cos(-\alpha) = \cos\alpha$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha$

$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha \qquad \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$

$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha \qquad \cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$

2. 倒数关系

$\sin\alpha \cdot \csc\alpha = 1$

$\cos\alpha \cdot \sec\alpha = 1$

$\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1$

3. 平方关系

$1 + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha$

$1 + \cot^2\alpha = \csc^2\alpha$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

4. 两角和与差的三角函数

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

5. 倍角公式

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$

$$\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$$

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$$

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

6. 半角公式

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

第 8 讲 基本初等函数

1.常数函数

$y=C$， C 为常数.

定义域 $(-\infty,+\infty)$，值域 $\{C\}$.

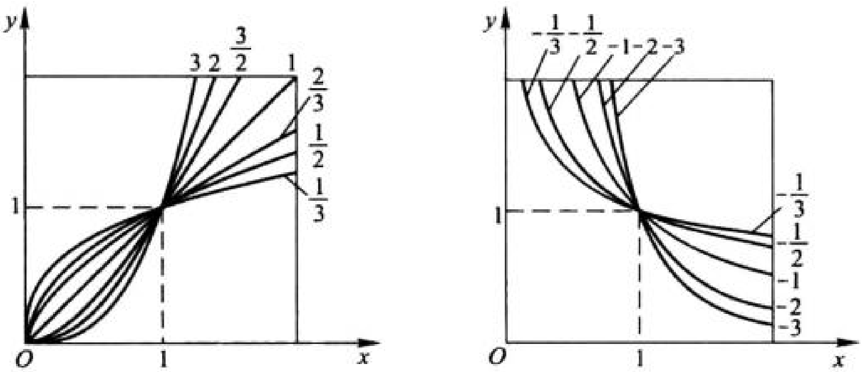
性质：偶函数，有界，周期函数，不存在最小正周期.

图像：直角坐标系上，平行于 x 坐标轴的一条直线.

2. 幂函数

$y=x^{\alpha},\alpha\in R.$

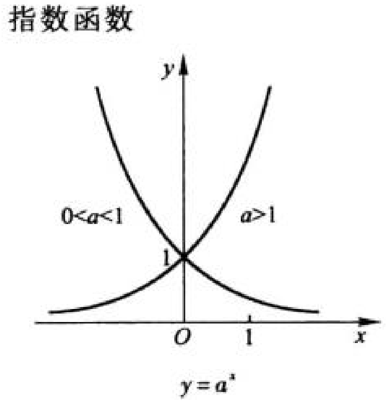
幂函数

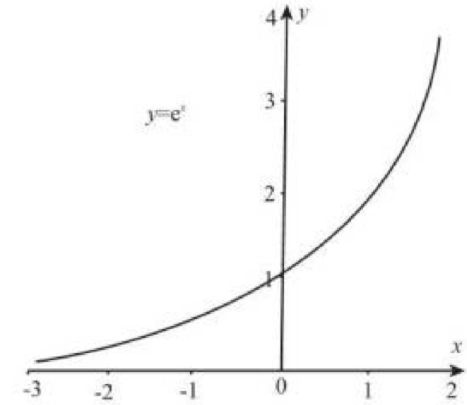


参数 α 的不同，函数的性质各不相同. $x>0$ 时，不论 α 为何值都有定义.

图像经过(1,1)点.

3. 指数函数





$y = a^x (a > 0, a \neq 1)$

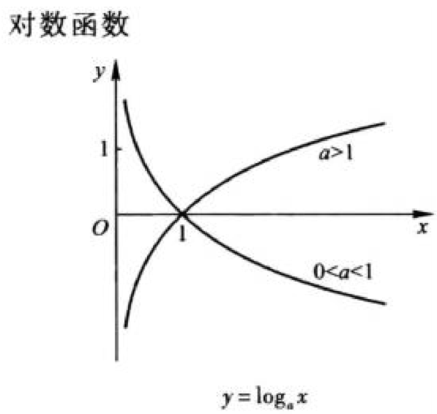
定义域为 R，值域为 $y > 0$.

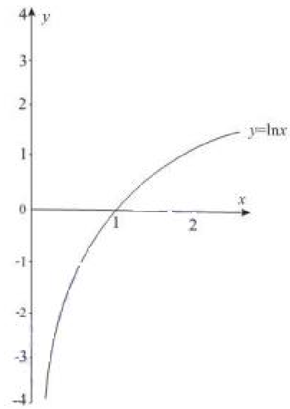
图像经过(0,1)点

自然指数函数 $y = \mathrm{e}^x$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0, \lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$.

4. 对数函数





$y = \log_a x \ (a > 0$ ， $a \neq 1)$

定义域为 $\left(0, +\infty\right)$，值域为 R .

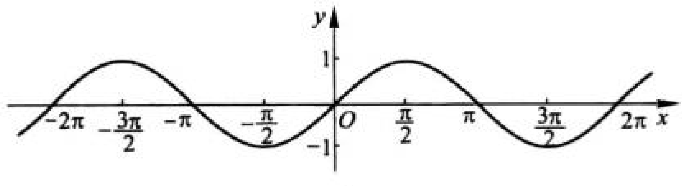
图像经过(1,0)点

自然对数函数 $y = \ln x$

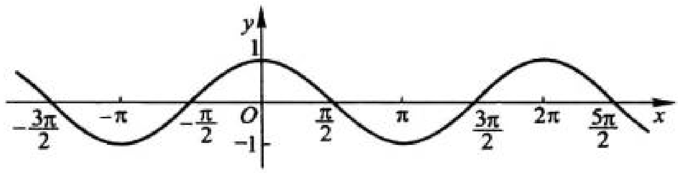
$\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty, \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.

5. 三角函数

正、余弦函数



$y=\sin x$

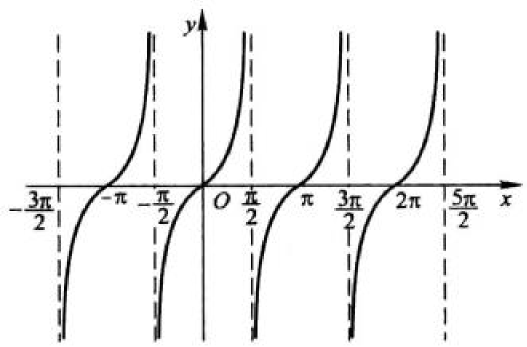


$y=\cos x$

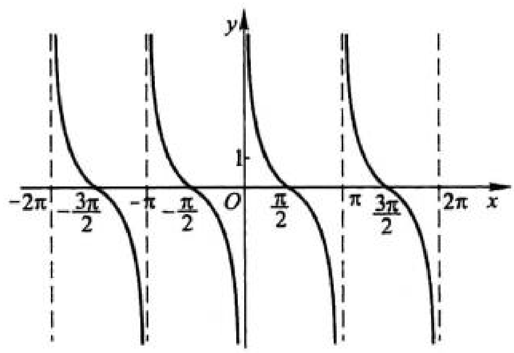
定义域为R，值域为$[-1,1]$，周期为2π.

正弦为奇函数，余弦为偶函数.

正、余切函数



$y=\tan x$



$y=\cot x$

定义域$\left\{x \mid x\in R \text{ 且} x\neq \frac{\pi}{2}+k\pi, k\in Z\right\}$.

值域为R.

周期为π，奇函数，

关于点$\left(\frac{k}{2}\pi,0\right)$对称，$k\in Z$.

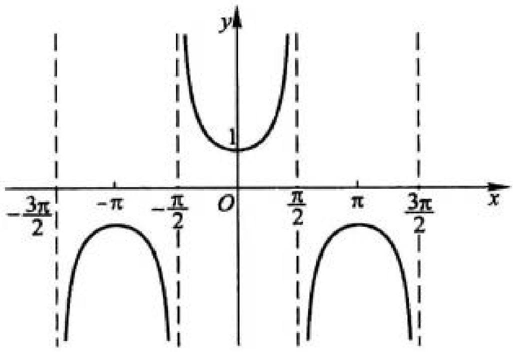
定义域$\{x \mid x\in R \text{且} x\neq k\pi, k\in Z\}$.

值域为R.

周期为π，奇函数，

关于点$\left(\frac{k}{2}\pi,0\right)$对称，$k\in Z$.

正、余割函数



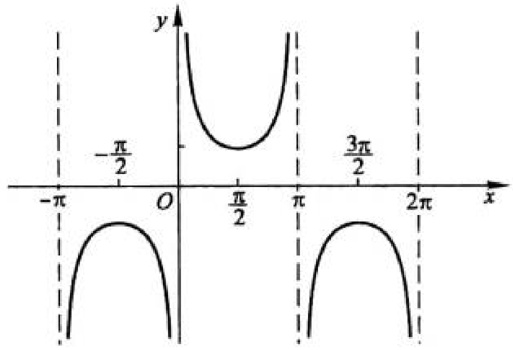
$y=\sec x$

定义域$\left\{x \mid x \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi, k \in Z\right\}$.

值域$\{y \mid y\leqslant -1$ 或 $y\geqslant 1\}$.

周期为2π，偶函数，

渐近线$x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k \in Z$.



$y=\csc x$

定义域$\{x \mid x \neq k\pi, k \in Z\}$.

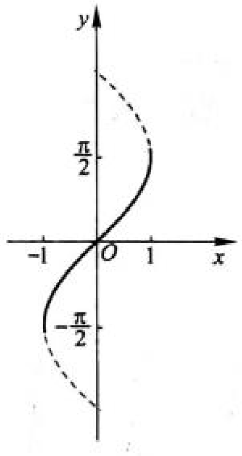
值域$\{y \mid y\leqslant -1$ 或 $y\geqslant 1\}$.

周期为2π，奇函数，

渐近线$x=k\pi, k \in Z$.

6. **反三角函数**

反正弦函数

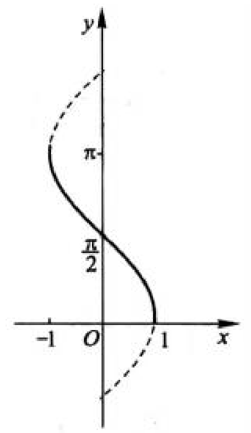


$y=\arcsin x$

定义域$[-1,1]$，值域$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$，

奇函数，在定义域上为增函数.

反余弦函数

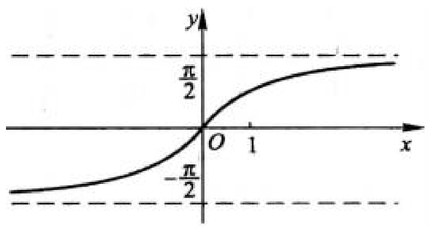


$y = \arccos x$

定义域$[-1,1]$，值域$[0,\pi]$，

非奇非偶函数，在定义域上为减函数.

反正切函数

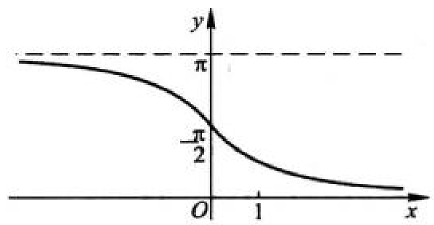


$y = \arctan x$

定义域$(-\infty,+\infty)$，值域$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，

奇函数，在定义域上为增函数.

反余切函数



$y = \operatorname{arccot} x$

定义域$(-\infty,+\infty)$，值域$(0,\pi)$，

非奇非偶函数，在定义域上为减函数.

反三角函数恒等式：

$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ $\quad$ $\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}$

$\sin(\arcsin x) = x, x \in [-1,1]$ $\quad$ $\sin(\arcsin x) = x, x \in [-1,1]$

$\cos(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}, x \in [-1,1]$ $\quad$ $\cos(\arccos x) = x, x \in [-1,1]$

$\cos(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}, x \in [-1,1]$

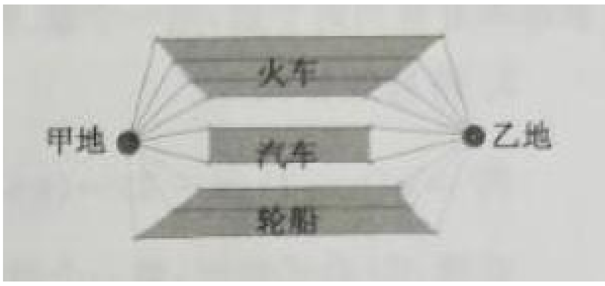
$\arcsin(\sin x) = x, x \in [0,\pi]$ $\quad$ $\arccos(\cos x) = x, x \in [0,\pi]$

第 9 讲 排列组合

一、加法原理和乘法原理

1.加法原理

如果完成一件事可以有 n 类办法，只要选择其中一类办法中的任何一种方法，就可以完成这件事；若第一类办法中有 m_1 种不同的方法，第二类办法中有 m_2 种不同的方法……第 n 类办法中有 m_n 种不同的办法，那么完成这件事共有 $N = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ 种不同的方法．



注：

（1）类与类之间相互独立．

（2）每一类中的每一种方法都能够单独完成此事件．

（3）若事情做完了后面用加法．

2.乘法原理

如果完成一件事，必须依次连续地完成 n 个步骤，这件事才能完成；若完成第一个步骤有 m_1 种不同的方法，完成第二个步骤有 m_2 种不同的方法 …… 完成第 n 个步骤有 m_n 种不同的方法．那么完成这件事共有 $N = m_1 m_2 \cdots m_n$ 种不同的方法．

注：

（1）步与步之间相互联系．

（2）步与步之间用乘法．

（3）事情没做完后边用乘法．

例题.旗杆上最多可以挂两面信号旗，现有红色、蓝色和黄色的信号旗各一面，如果用挂信号旗表示信号，最多能表示出（　　）种不同的信号．

A. 7　　B. 8　　C. 9　　D. 10　　E. 11

二、组合的定义及公式

定义：从n个不同元素中，任意选择出m个$(m \le n)$元素在一起，记为C_n^m.

【例 1】从 5 本不同书中任意取出 3 本有多少种方法？

【答案】C_5^3

【例 2】从 5 本完全相同书中任意取出 3 本有多少种方法？

【答案】1

【例 3】从 5 本不同书中任意取出 3 本，包含英语书有多少种方法？

【答案】C_4^2

【例 4】从 5 本不同书中任意取出 3 本，而且保证每两次选出的结果不完全相同有多少种方法？

【答案】C_5^3

三、阶乘

定义：n个不同的元素一一对应n个不同的位置（一个萝卜，一个坑）.

【例 1】3 个人坐到 3 个座位.

【答案】3!

【例 2】3 个人站成一排.

【答案】3!

【例 3】3 男生，3 女生配成 3 对.

【答案】3!

【例 4】5 男生，4 女生配成 2 对.

【答案】$C_5^2 \times C_4^2 \times 2!$

四、排列

1．排列定义：n 个不同元素中，任意选出 m 个（$m \le n$）元素，且 m 个元素一一对应 m 个不同位置，记为 $P_n^m = C_n^m \cdot m!$.

2．公式

（1）$P_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$.

（2）$P_n^n = n(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = n!$.

（3）$C_n^m = \dfrac{P_n^m}{m!}$.

（4）$C_n^m = c_n^{n-m}$.

（5）$C_n^1 = n$.

（6）$C_n^n = 1$.

注：

1．$C_4^2 = 6$　2．$C_5^2 = 10$　3．$C_6^2 = 15$　4．$C_6^3 = 20$　5．$C_7^3 = 35$　6．$C_8^2 = 28$

7．$C_8^3 = 56$　8．$C_9^3 = 84$　9．$C_{10}^2 = 45$　10．$C_{10}^3 = 120$　11．$C_{10}^4 = 210$　12．$C_{10}^5 = 252$

五、至多至少问题

1.分类法：至少两个以上.

2．对立面：至少 1 个.

例 1 从 5 名男教师和 4 名女教师中抽出 3 人支援西部地区，要求其中至少有两名男教师，共有（　　）种.

A．16　　B．18　　C．20　　D．22　　E．50

例 2 从 5 名男教师和 4 名女教师中抽出 3 人支援西部地区，要求其中至少有 1 名男教师，共有（　　）种.

A．16　　B．18　　C．20　　D．22　　E．80

六、分房问题

表现形式：不同的元素无限制的进入到不同的位置.

解决办法：直接套公式 m^n 或者用乘法原理.

第 10 讲 概率

一、基本概念

1．随机试验

这些试验都具有以下的特点：

（1）可以在相同的条件下重复地进行；

（2）每次试验的可能结果不止一个，并且能事先明确试验的所有可能结果；

（3）进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

在概率论中，我们将具有上述三个特点的试验称为随机试验.

2．样本空间

对于随机试验，尽管在每次试验之前不能预知试验的结果．但试验的一切可能的结果是已知的．把随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的样本空间，记为 S ．样本空间的元素，即 E 的每个结果，称为样本点.

3．随机事件

在随机试验中，可能发生也可能不发生的事情称为随机事件，随机事件常用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示，它是样本空间 S 的子集合，在每次试验中，当且仅当子集 A 中的一个样本点出现时，称事件 A 发生.

4．事件间的关系与运算

（1）事件的包含与相等.

若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A ，或称事件 A 包含于 B ，记为 $B\supset A$ 或者 $A\subset B$ 且 $B\subset A$ ，即 $A=B$ ，则称事件 A 与事件 B 相等.

（2）互不相容事件（互斥）.

若事件 A 与事件 B 不能同时发生．即 $AB=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B 是互斥的．或称它们是互不相容的．若事件 A_1，$A_2,\cdots,A_n$ 中的任意两个都互斥．则称事件是两两互斥的．

（3）对立事件．

“A 不发生”的事件称为事件 A 的对立事件．记为 $\overline{A}$，A 和 $\overline{A}$ 满足：$A\bigcup\overline{A}=S$，$A\overline{A}=\varnothing$，$\overline{\overline{A}}=A$.

（4）事件的和．

事件 A 与事件 B 至少有一个发生的事件称为事件 A 与事件 B 的和事件．记为 $A\bigcup B$．事件 $A\bigcup B$ 发生意味着：或事件 A 发生，或事件 B 发生，或事件 A 与事件 B 都发生．

事件的和可以推广到多个事件的情景，设有 n 个事件 A_1，$A_2,\cdots,A_n$，定义它们的和事件为{A_1，$A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生}，记为 $\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$．

（5）事件的积．

事件 A 与事件 B 都发生的事件称为事件 A 与事件 B 的积事件，记为 $A\bigcap B$，也简记为 AB，事件 $A\bigcap B$（或 AB）发生意味着事件 A 发生且事件 B 也发生，即 A 与 B 都发生．

（6）事件的差．

事件 A 发生而事件 B 不发生的事件称为事件 A 与事件 B 的差事件，记为 $A-B$．

5．概率的性质

（1）$0\le P(A)\le 1$．

（2）$P(\varnothing)=0$，$P(\Omega)=1$.

（3）对任意两个事件 A，B，有 $P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$．

（4）若 $AB=\varnothing$，则 $P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)$．

（5）$P(\overline{A})=1-P(A)$．

二、古典概型

1．古典概型特征

随机试验 E 具有以下两个特征：

（1）样本空间的元素（即基本事件）只有有限个；

（2）每个基本事件出现的可能性是相等的，称 E 为古典概型试验.

2．计算公式

在古典概型的情况下，事件 A 的概率定义为

$$P(A)=\frac{\text{事件}A\text{包含的基本事件数}k}{\text{样本空间中基本事件总数}n}=\frac{\text{分子的排列组合}}{\text{分母的排列组合}}.$$

例.袋中有 8 个大小形状相同的球，其中 5 个黑色球，3 个白色球.

（1）从袋中随机地取出 2 个球，求取出的两球都是黑色球的概率.

（2）从袋中不放回取两次，每次取一个球，求取出的两球都是黑色球的概率.

（3）从袋中有放回取两次，每次取一个球，求取出的两球至少有一个是黑球的概率.

3. 分房问题

分房问题主要是考查可重复的排列问题，核心是次方的运算特征.

例.某宾馆有 6 间客房，现要安排 4 位旅游者，每人可以住进任意一个房间，且住进各方间是等可能的.

事件 A：指定的 4 个房间各有 1 人.

事件 B：恰有 4 个房间各有 1 人.

事件 C：指定的某房间中有 2 人.

事件 D：一号房间有 1 人，二号房间有 2 人.

事件 E：至少有 2 人在同一个房间.

4.几何图形求概率

例.甲、乙两人约定于 6 时到 7 时之间在某处会面，并约定先到者应等候另一个人一刻钟，过时即可离去，求两人会面的概率.

三、相对独立事件

1．独立事件定义：

如果两事件中任一事件的发生不影响另一事件的发生，则称这两事件是相互独立的.

2．若 $P(AB)=P(A)P(B)$,则称两事件 A 和 B 是相互独立的，可将其理解为相互独立事件．同时发生的概率，即 $P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$.

3．3 种表现形式

（1）单独，独立.

（2）定概率.

（3）分组取样.

$\boxed{\text{例.}}$甲、乙两个篮球运动员互不影响地在同一位置投球，命中率分别为$\frac{1}{2}$与p，且乙投球 2 次均未命中的概率为$\frac{1}{16}$.

（1）求乙投球的命中率p.

（2）求甲投球 2 次，至少命中 1 次的概率.

（3）若甲、乙两个各投球 2 次，求两人共命中 2 次的概率.

四、伯努力独立重复试验

如果在一次试验中，某事件发生的概率是p，那么在n次独立试验中，这个事件恰好发生k次的概率为$P_n(K)=C_n^k P^k (1-p)^{n-k},(k=0,1,2,\cdots,n)$（贝努力公式）.

注：（1）独立重复.

（2）定概率.

（3）恰好发生.

$\boxed{\text{例.}}$某人打了 10 发子弹，每枪命中率为 0.7，求：

（1）第 6 枪不命中的概率.

（2）只有第 6 枪不命中的概率.

（3）恰有 3 枪命中的概率.

（4）恰有 2 枪不命中的概率.

（5）至少中 1 枪的概率.

（6）直到第六枪才中 4 枪的概率.

第二部分 微积分基本公式

第 1 讲：函数的定义

设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集，如果对于 D 中的每一个 x，变量 y 按照一定的法则总有唯一确定的值与之对应，则称 y 是 x 的函数，记为 $y=f(x)$．数集 D 称为函数的定义域，x 称为自变量，y 称为因变量.

【注】

（1）对应法则 f 是给定 x 求 y 值的方法.

（2）函数只与对应法则及定义域有关，而与变量及对应法则选取的字母无关.

（3）两个函数相同 $\Leftrightarrow$ 定义域相同且对应法则相同.

第 2 讲：函数的有界性

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，如果 $\exists\ M>0$，使对 $\forall x\in I$ 都有 $|f(x)|\le M$，则称 $f(x)$ 在区间 I 上有界；若不存在这样的 $M>0$，则称 $f(x)$ 在区间 I 上无界.

【注】

（1）函数有界的充要条件是函数既有上界又有下界.

（2）常用的有界函数：$|\sin x|\le 1, |\cos x|\le 1, x\in(-\infty,+\infty)$；

$|\arcsin x|\le \dfrac{\pi}{2}, x\in[-1,1]$；$0\le \arccos x\le \pi, x\in[-1,1]$；

$|\arctan x|<\dfrac{\pi}{2}, x\in(-\infty,+\infty)$；$0<\operatorname{arccot} x<\pi, x\in(-\infty,+\infty)$.

（3）函数 $f(x)$ 有界或无界是相对于某个区间而言的.

第 3 讲：函数的单调性

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，如果对于 $\forall\ x_1$，x_2 且 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$（$f(x_1)>f(x_2)$）,则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加（减少）的.

考法：判断函数的单调性
（1）定义法：设 $x_1<x_2$，计算判断 $f(x_1)-f(x_2)$ 的正负（较少使用）
（2）$f(x), g(x)$ 单调性相同（相反），则 $f[g(x)]$ 单调增加（减少）
（3）$f(x), g(x)$ 单调性增加（减少），则 $f(x)+g(x)$ 也单调增加（减少）

（4）利用一阶导的正负：$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 单调增加；$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 单调减少

第 4 讲：函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义且 I 关于原点对称，若 $\forall x\in I$，有 $f(-x)=f(x)$（$f(-x)=-f(x)$），则称 $f(x)$ 为偶（奇）函数. 偶函数的图像关于 y 轴对称，奇函数的图像关于原点对称.

考法：判断函数的奇偶性

（1）定义判断

（2）性质判断

① $f(x),g(x)$ 奇（偶），则 $k_1f(x)+k_2g(x)$ 奇（偶）

② $f(x),g(x)$ 奇偶性相同，则 $f(x)g(x)$ 为偶

③ $f(x),g(x)$ 奇偶性相反，则 $f(x)g(x)$ 为奇

（3） $f(x)$ 可导，若 $f(x)$ 为偶，则 $f'(x)$ 为奇；若 $f(x)$ 为奇，则 $f'(x)$ 为偶

第 5 讲：函数的周期性

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，如果存在一个正数 T，使得对于任一 $x\in I$，$(x+T)\in I$，都有 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数.

【注】

（1）若 $f(x)$ 以 T 为周期，则 $Cf(x)$ 仍然以 T 为周期（C 为非零常数），$f(Cx)$ 是以 $\frac{T}{|C|}$ 为周期.

（2）若 $f_1(x),f_2(x)$ 都以 T 为周期，则 $k_1f_1(x)+k_2f_2(x)$ 的周期也为 T，但注意最小正周期有可能缩小.例 $f_1(x)=\cos 2x+\sin x, f_2(x)=\sin x$ 的最小正周期均为 2π，而 $f_1(x)-f_2(x)=\cos 2x$ 的最小正周期为 π.

（3）常见周期函数的最小正周期

常见周期函数	最小正周期T
$y=\sin x$	2π
$y=\cos x$	2π
$y=\tan x$	π
$y=\cot x$	π

第 6 讲：反函数

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D_f，值域为 R_f，若对于每一个 $y\in R_f$，从关系式 $y=f(x)$ 中可以确定唯一的一个 x 值，则称变量 x 为变量 y 的函数，记为 $x=\varphi(y)$，$\varphi(y)$ 称为函数 $y=f(x)$ 的反函数，习惯上 $y=f(x)$ 的反函数记为 $y=f^{-1}(x)$.

【注】

（1）单调函数存在反函数.

（2）反函数 $y=f^{-1}(x)$ 与函数 $y=f(x)$ 有相同的单调性.

（3）函数 $y=f(x)$ 的图像与其反函数 $x=\varphi(y)$ 的图像重合；

但与反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

第 7 讲：复合函数

设 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$ 为两个函数，若 $\varphi(x)$ 的值域与 $f(u)$ 的定义域有非空交集，则由 $y=f(u)$ 及 $u=\varphi(x)$ 可复合而成函数 $y=f(\varphi(x))$，u 称为中间变量.

第 8 讲：考试中常见的基本函数类型

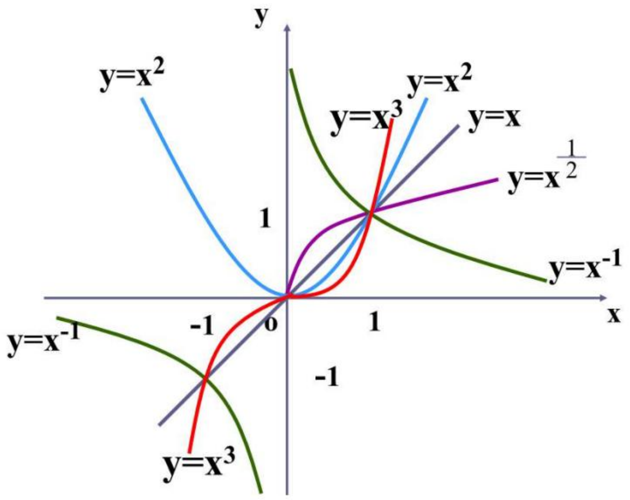
1. 基本初等函数

（1）幂函数

$y=x^{\mu}$（μ 是常数，$\mu\in\mathbf{R}$）. 其定义域随 μ 不同而不同：

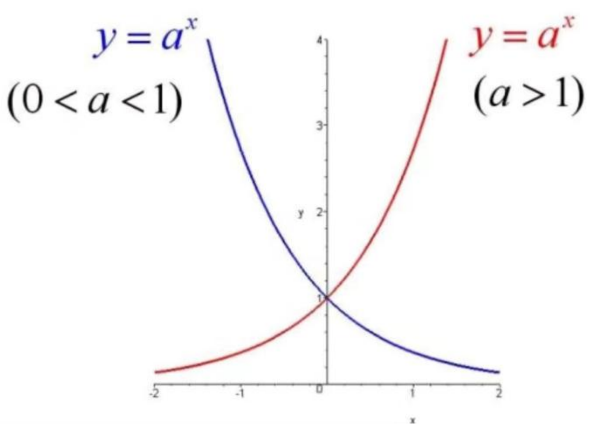
μ 值	函数	定义域	值域

1	$y=x$	$(-\infty,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$
2	$y=x^2$	$(-\infty,+\infty)$	$[0,+\infty)$
3	$y=x^3$	$(-\infty,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$
$1/2$	$y=\sqrt{x}$	$[0,+\infty)$	$[0,+\infty)$
-1	$y=\dfrac{1}{x}$	$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$	$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$



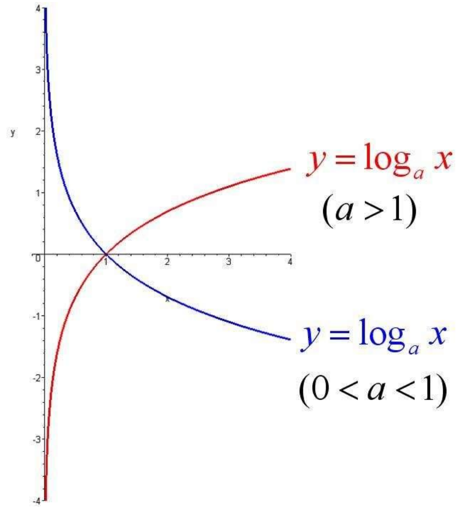
（2）指数函数

$y=a^x$（$a>0$ 且 $a\neq1$），定义域 $D=(-\infty,+\infty)$．因 $\forall x\in\mathbf{R}$，总有 $a^x>0$，因此值域 $R_f=(0,+\infty)$．又 $a^0=1$，故指数函数的图形总在 x 轴的上方，且过 $(0,1)$ 点．当 $a>1$ 时，$y=a^x$ 单调增加，当 $0<a<1$ 时，$y=a^x$ 单调减少．



（3）对数函数

$y=\log_a x$（$a>0$ 且 $a\neq 1$），定义域 $D=(0,+\infty)$，值域 $R_f=(-\infty,+\infty)$．它和指数函数 $y=a^x$ 互为反函数．$y=\log_a x$ 的图形总是在 y 轴的右方，且通过点 $(1,0)$．当 $a>1$ 时，函数单调增加，当 $0<a<1$ 时，函数单调减少．以 e 为底数的对数函数记作 $y=\ln x$．



（4）三角函数

名称	表示	定义域	值域	奇偶性
正弦函数	$y=\sin x$	$(-\infty,+\infty)$	$[-1,1]$	奇
余弦函数	$y=\cos x$	$(-\infty,+\infty)$	$[-1,1]$	偶
正切函数	$y=\tan x$	$\left\{x \mid x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right\}$	$(-\infty,+\infty)$	奇
余切函数	$y=\cot x$	$\{x \mid x\neq k\pi\}$	$(-\infty,+\infty)$	奇
正割函数	$y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$	$\left\{x \mid x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right\}$	$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$	偶
余割函数	$y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$	$\{x \mid x\neq k\pi\}$	$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$	奇

（5）反三角函数

名称	表示	定义域	值域	单调性	奇偶性

反正弦函数	$y=\arcsin x$	$[-1,1]$	$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$	增	奇
反余弦函数	$y=\arccos x$	$[-1,1]$	$[0,\pi]$	减	非奇非偶
反正切函数	$y=\arctan x$	$(-\infty,+\infty)$	$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$	增	奇
反余切函数	$y=\operatorname{arc}\cot x$	$(-\infty,+\infty)$	$(0,\pi)$	减	非奇非偶

以上五类函数统称为基本初等函数，关于基本初等函数的概念、性质及其图像非常重要，影响深远．例如以后经常会用 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x$， $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x$， $\lim\limits_{x\to0^+}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$， $\lim\limits_{x\to0^-}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$， $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x$ 等等．就需要对 $y=\arctan x$， $y=\mathrm{e}^x$， $y=\ln x$ 的图像很清晰．

2．初等函数

由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数，称为初等函数．例如 $y=\sqrt{1+x^2}, y=\mathrm{e}^{\sin x}$ 都是初等函数．

【注】

（1）幂指函数也是初等函数.

（2）分段函数一般不是初等函数.

（3）一切初等函数在其定义区间内连续.

3．分段函数

在自变量的不同范围中，对应法则用不同式子表示的函数称为分段函数.

例如：函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x<1,\\ 7x-5, & x\geq1\end{cases}$ 就是分段函数.

（1）绝对值函数

$$f(x)=|x|=\begin{cases}x, & x\geq0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

（2）符号函数

$$f(x)=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

（3）取整函数

$f(x)=[x]$ 表示不大于 x 的最大整数.

（4）最大（小）值函数

$$y=\max\{f(x),g(x)\}，y=\min\{f(x),g(x)\}.$$

4．参数方程确定的函数

$$\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t),\end{cases} t\in I.$$

5．隐函数

设有 $F(x,y)=0$，若对 $x\in D$，存在唯一确定的 y 满足 $F(x,y)=0$ 与 x 相对应，由此确定的 y 与 x 的函数关系 $y=y(x)$，称为由方程 $F(x,y)=0$ 所确定的隐函数.

6．极限函数

通过极限来定义的函数，如 $f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{nx}{n(x-1)+1}$

7．变限积分函数

$F(x)=\int_{h(x)}^{g(x)}f(t)dt$

第 9 讲：数列的极限

对于任意给定的正数 ε ,总存在正整数 N , 使得对于 $n>N$ 时的一切 x_n 不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 都成立，则称常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限，或者称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，记为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 或

$x_n \to a\left(n \to \infty\right)$.

简写定义：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0$，$\exists\ N \in N^+$，当$n > N$时，有$\left|x_n - a\right| < \varepsilon$.

【性质】（1）若数列$\{x_n\}$收敛，则极限必定唯一.

（2）若数列$\{x_n\}$收敛，则$\{x_n\}$必定有界.

（3）若数列$\{x_n\}$收敛于A，则它的任一子列也收敛于A.

（4）若$\{x_{2n\text{-}1}\}$与$\{x_{2n}\}$都收敛于A，则$\{x_n\}$必收敛于A.

（5）设数列$\{x_n\}$存在极限A，且$A > 0\left(或A < 0\right)$，则存在正整数N，当$n > N$时，有$x_n > 0\left(或x_n < 0\right)$

第 10 讲：函数的极限

（1）自变量趋于有限值时函数的极限

设函数$f(x)$在点x_0的某一去心邻域内有定义．如果存在常数A，对于任意给定的正数ε，总存在正数δ，使得当x满足不等式$0 < \left|x - x_0\right| < \delta$时，对应的函数值$f(x)$都满足不等式$\left|f(x) - A\right| < \varepsilon$，那么常数$A$就叫做函数$f(x)$当$x \to x_0$时的极限，记为$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$或$f(x) \to A(x \to x_0)$.

简写定义：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0$，$\exists\ \delta > 0$，当$0 < \left|x - x_0\right| < \delta$时，有$\left|f\left(x\right) - A\right| < \varepsilon$.

左极限：$\lim\limits_{x\to x_0^-} f\left(x\right) = A$（用$f(x_0^-)$表示$f(x)$在$x_0$的左极限值）

$\forall\ \varepsilon > 0$，$\exists\ \delta > 0$，当$-\delta < x - x_0 < 0$时，有$\left|f\left(x\right) - A\right| < \varepsilon$.

右极限：$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = A$（用$f(x_0^+)$表示$f(x)$在$x_0$的右极限值）

$\forall\ \varepsilon > 0$，$\exists\ \delta > 0$，当$0 < x - x_0 < \delta$时，有$\left|f\left(x\right) - A\right| < \varepsilon$.

（2）自变量趋于无穷大时函数的极限

设$f(x)$当$\left|x\right|$大于某一正数时有定义．如果存在常数A，对于任意给定的正数ε，总存在着正数X，使得当x满足不等式$\left|x\right| > X$时，对应的函数值$f(x)$都满足不等式$\left|f(x) - A\right| < \varepsilon$，

则常数 A 叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限，记为 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to\infty)$.

简写定义： $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ X>0$，当 $|x|>X$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ X>0$，当 $x<-X$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ X>0$，当 $x>X$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

重要结论： $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

【注】（1） 常用要分 $x\to-\infty,x\to+\infty$ 的极限：

$$\lim_{x\to-\infty}a^x=\begin{cases}0, & a>1,\\ +\infty, & 0<a<1,\end{cases}\qquad \lim_{x\to+\infty}a^x=\begin{cases}0, & 0<a<1,\\ +\infty, & a>1,\end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2},\quad \lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2},\quad \lim_{x\to-\infty}\operatorname{arc}\cot x=\pi,\quad \lim_{x\to+\infty}\operatorname{arc}\cot x=0.$$

（2）需要分左、右极限的情况归纳：

①分段函数求分段点处的极限

② $e^x\to\begin{cases}0,x\to-\infty\\ \infty,x\to\infty\end{cases}$

③ $\dfrac{1}{x}\to\begin{cases}0^+,x\to+\infty\\ 0^-,x\to-\infty\end{cases}$

④ $\arctan x\to\begin{cases}\dfrac{\pi}{2},x\to+\infty\\ -\dfrac{\pi}{2},x\to-\infty\end{cases}$

第 11 讲：极限的运算法则

1. 四则运算法则

如果 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，那么

（1）$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$.

（2）$\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$.

（3）$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}(B\neq0)$.

（4）$\lim cf(x)=c\lim f(x)=cA$ （c 为常数）

（5）$\lim[f(x)]^k=[\lim f(x)]^k=A^k$ （k 为正整数）

（6）另有常见公式

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}=\begin{cases}0, & n<m,\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & n=m,\ (a_0\neq 0,b_0\neq 0)\\ \infty, & n>m\end{cases}.$$

2．复合函数的极限运算法则

设函数 $y=f[g(x)]$ 是由函数 $y=f(u)$ 与函数 $u=g(x)$ 复合而成，$f[g(x)]$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义，若 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=u_0$，$\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$，且在 x_0 的某去心邻域内 $g(x)\neq u_0$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f[g(x)]=\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$.

第 12 讲：极限存在准则

准则 I 如果数列 $\{x_n\}$、$\{y_n\}$ 及 $\{z_n\}$ 满足下列条件：

（1）从某项起有 $y_n\le x_n\le z_n$

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$

那么数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

准则 I′ 如果函数 $f(x)$、$g(x)$ 及 $h(x)$ 满足下列条件：

（1）在某去心邻域内有 $g(x)\le f(x)\le h(x)$

（2）$\lim g(x)=\lim h(x)=A$，

那么 $\lim f(x)$ 存在，且 $\lim f(x)=A$.

准则 I 及准则 I′称为**夹逼准则**.

【注】利用夹逼准则求极限时，对数列（函数）适当放大缩小，且放大缩小所得数列（函数）的极限要存在且相等.

第 13 讲：无穷小量与无穷大量

1．无穷小的定义

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$（或 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$），则称函数 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的无穷小．特别地，若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$，则称数列 $\{x_n\}$ 为当 $n\to\infty$ 时的无穷小．

无穷小与函数极限的关系： $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha$，其中 α 是 $x\to x_0$（$x\to\infty$）的无穷小．

2．无穷大的定义

在 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时，总有 $|f(x)|$ 无限增大，则称 $f(x)$ 为 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的无穷大，记为 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=\infty$．

【注】

（1）无穷大必无界，而无界未必是无穷大．

（2）无穷小与无穷大的关系

在自变量的同一变化过程中，如果 $f(x)$ 为无穷大，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小；反之，如果 $f(x)$ 为无穷小，且 $f(x)\neq 0$，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大．

（3）无穷小的性质

①有界函数与无穷小之积是无穷小．

②常数与无穷小之积是无穷小．

③有限个无穷小之和是无穷小．

④有限个无穷小之积是无穷小．

第 14 讲：无穷小量的比较

设 $\lim f(x)=0$ 与 $\lim g(x)=0$

（1）若 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$，则称 $f(x)$ 是比 $g(x)$ 高阶的无穷小，记 $f(x)=o[g(x)]$．

（2）若 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\infty$，则称 $f(x)$ 是比 $g(x)$ 低阶的无穷小．

（3）若 $\lim\frac{f(x)}{g(x)}=c\neq 0$，则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是同阶无穷小.

（4）若 $\lim\frac{f(x)}{g(x)}=1$，则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是等价无穷小，记以 $f(x)\sim g(x)$.

（5）若 $\lim\frac{f(x)}{g^k(x)}=c\neq 0$，$k>0$，称 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的 k 阶无穷小.

常用等价无穷小代换：

当 $\square\to 0$ 时，$\square\sim\sin\square\sim\tan\square\sim\arcsin\square\sim\arctan\square\sim\ln(1+\square)\sim e^{\square}-1$，

$1-\cos\square\sim\frac{\square^2}{2}$，$(1+\square)^{\alpha}-1\sim\alpha\square$，$\square-\sin\square\sim\frac{\square^3}{6}$.

定理：若 $\alpha\sim\alpha',\beta\sim\beta'$，且 $\lim\frac{\alpha'}{\beta'}$ 存在，则 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\alpha'}{\beta'}$.

【注】只有整个式子的乘除因子才能用等价无穷小替换，有加减时不能替换.

第 15 讲：两个重要极限

1．第一重要极限 $\lim\frac{\sin\square}{\square}=1(\square\to 0,\square\neq 0)$

【注】（1）该极限为“$\frac{0}{0}$”

（2）所求极限能变形出 $\lim\frac{\sin\square}{\square}=1(\square\to 0)$

（3）分子分母中两个 □ 中的表达式要凑成同一表达式且要无限趋于 0.

2．第二重要极限

（1）$\lim(1+\square)^{\frac{1}{\square}}=e(\square\to 0)$

【注】①该极限为“1^{∞}”

②所求极限能变形出 $\lim(1+\square)^{\frac{1}{\square}}=e(\square\to 0)$

③两个 □ 中的表达式要凑成同一表达式且要无限趋于 0.

（2）$\lim u(x)^{v(x)}=e^{\lim[u(x)-1]v(x)}$ $(\lim u(x)=1,\ \lim v(x)=\infty)$

【注】①该极限为“1^∞”

②该极限的结果为$\lim u(x)^{v(x)}=\mathrm{e}^{\lim[u(x)-1]v(x)}$.

第16讲：函数的连续性

1．函数在一点连续的定义

设函数$f(x)$在$U(x_0)$内有定义，如果$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\right]=0$，则称函数$f(x)$在点$x_0$连续.

2．左右连续

如果$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$，则称$y=f(x)$在点$x_0$左连续.

如果$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$，则称$y=f(x)$在点$x_0$右连续.

3．左右连续与连续的关系

函数$y=f(x)$在点x_0连续$\Leftrightarrow$函数$y=f(x)$在点x_0左连续且右连续．即$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$

4．函数在区间连续的定义

函数$f(x)$在开区间(a,b)内连续，是指在(a,b)内每一点都连续.

函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，是指在开区间(a,b)内连续，并且在左端点a处右连续，在右端点b处左连续.

第17讲：函数的间断点

1．间断点的定义

设函数$f(x)$在点x_0的某去心邻域内有定义，在此前提下，如果函数$f(x)$有下列三种情形之一：

（1）在点x_0没有定义；

（2）虽在x_0有定义，但$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在；

（3）虽在x_0有定义，且$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，但$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$.

则函数 $f(x)$ 在点 x_0 为不连续，而点 x_0 称为函数 $f(x)$ 的不连续点或间断点.

2．间断点的分类

（1）第一类间断点: $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 都存在的间断点.

若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$，则称 x_0 为跳跃间断点.

若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$，则称 x_0 为可去间断点.

（2）第二类间断点: $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 中至少有一个不存在的间断点.

若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 中至少有一个为无穷大，则称 x_0 为无穷间断点.

当 $x \to x_0$ 时函数值在某个范围内振荡，称 x_0 为振荡间断点.

第 18 讲：导数的定义

1．函数在一点处的导数

设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，当自变量 x 在 x_0 处取得增量 Δx（点 $x_0 + \Delta x$ 仍在该邻域内）时，相应地函数 y 取得增量 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$；当 $\Delta x \to 0$ 时，如果 Δy 与 Δx 之比的极限存在，则称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可导，并称这个极限为函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的导数，记为 $y'\big|_{x=x_0}$，即

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$

也可记为 $y'\big|_{x=x_0}$，$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$ 或 $\left.\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$.

【注】导数的定义式也可取不同的形式，常见的有：

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}，\quad f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

2．单侧导数

$f(x)$ 在 x_0 处的左导数：$f'_-(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$，

$f(x)$ 在 x_0 处的右导数：$f'_{+}(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^{+}}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

3．导数与左右导数的关系

$f(x)$ 在 x_0 处可导 $\Leftrightarrow$ 左导数 $f'_{-}(x_0)$ 与右导数 $f'_{+}(x_0)$ 都存在且相等.

【注】 $f(x)$ 在 x_0 处可导 $\Rightarrow$ $f(x)$ 在 x_0 处连续.【可导必连续】

4．导函数

若函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内每一点都可导，则称 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内可导.

若函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内可导，且 $f'_{+}(a)$ 及 $f'_{-}(b)$ 都存在，则称 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可导.

第 19 讲：导数的几何意义

函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 在几何上表示曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x_0,f(x_0))$ 处的切线的斜率.

曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x_0,f(x_0))$ 处的切线方程为：$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$，

法线方程为：$y-f(x_0)=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$，其中 $f'(x_0)\neq 0$.

第 20 讲：常用的导数公式

1.导数公式：

$$\left(x^{\mu}\right)'=\mu x^{\mu-1}$$

$$\left(\sin x\right)'=\cos x$$

$$\left(\cos x\right)'=-\sin x$$

$$\left(\tan x\right)'=\sec^2 x$$

$$\left(\cot x\right)'=-\csc^2 x$$

$$(\sec x)' = \sec x \tan x$$

$$(\csc x)' = -\csc x \cot x$$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

$$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\mathrm{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

2．函数的和、差、积、商的求导

求导法则：

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$(Cu)' = Cu'$$

$$(u \cdot v)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u'v - uv'}{v^2} (v \neq 0)$$