Aprendizaje por refuerzo

Procesos de decisión de Markov

Antonio Manjavacas Lucas

manjavacas@ugr.es

Índice

Motivación

Hasta ahora, nos hemos centrado en **problemas no asociativos**:

- Problemas en los que *no asociamos* diferentes acciones a diferentes situaciones.
- El objetivo es encontrar la mejor acción si el problema es *estacionario*, o buscarla directamente si es *no-estacionario*.

No obstante, en problemas de RL más complejos, pueden darse diferentes situaciones donde **el valor de una acción varía dependiendo del estado actual del agente**.

> Es lo que denominamos un problema de **búsqueda asociativa**.

Búsqueda asociativa

Búsqueda asociativa

Problema de búsqueda asociativa

- **Búsqueda** basada en prueba y error para encontrar las mejores acciones.
- **Asociativa**, porque trata de asociar a cada situación (estado) la mejor acción disponible.

Búsqueda asociativa

Problema de búsqueda asociativa

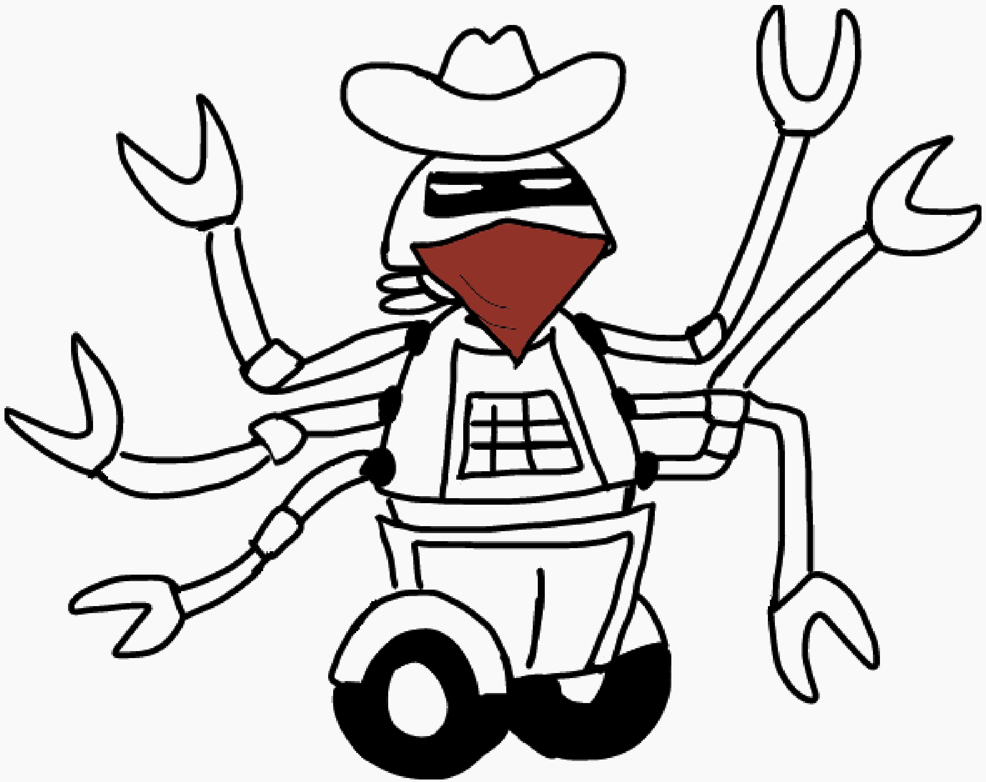
- **Búsqueda** basada en prueba y error para encontrar las mejores acciones.
- **Asociativa**, porque trata de asociar a cada situación (estado) la mejor acción disponible.

Elegir la mejor acción para cada estado, a partir de prueba y error.

Contextual bandits

A los problemas de búsqueda asociativa también se les denomina ***contextual bandits*** (*bandits* con contexto).

- El objetivo es aprender una **política** de comportamiento que mapee cada **situación** con la mejor **acción** posible.
- Los problemas de búsqueda asociativa / *contextual bandits* se encuentran a medio camino entre *K-armed bandits* y los problemas de RL completos.



K-armed bandits vs. *Contextual bandits* vs. RL completo

Problema	Características
K-armed bandits	• Elegimos una acción en cada instante de tiempo. • Buscamos maximizar la recompensa acumulada a lo largo del tiempo. • El valor de las acciones puede ser siempre el mismo (problema estacionario) o variar a lo largo del tiempo (problema no-estacionario).
Contextual bandits	• Podemos encontrarnos en diferentes situaciones/contextos que harán variar el valor de cada acción. • Buscamos aprender a tomar la mejor decisión para cada situación, maximizando las recompensas a largo plazo.
RL completo	• Buscamos maximizar la recompensa en un ambiente desconocido. • Las acciones afectan, no sólo a las recompensas inmediatas, sino también al estado del etnorno, que a su vez repercute en las recompensas futuras. • Generalmente entornos estocásticos, no estacionarios y con grandes espacios de estados y acciones.

Ejemplo: tienda *online*

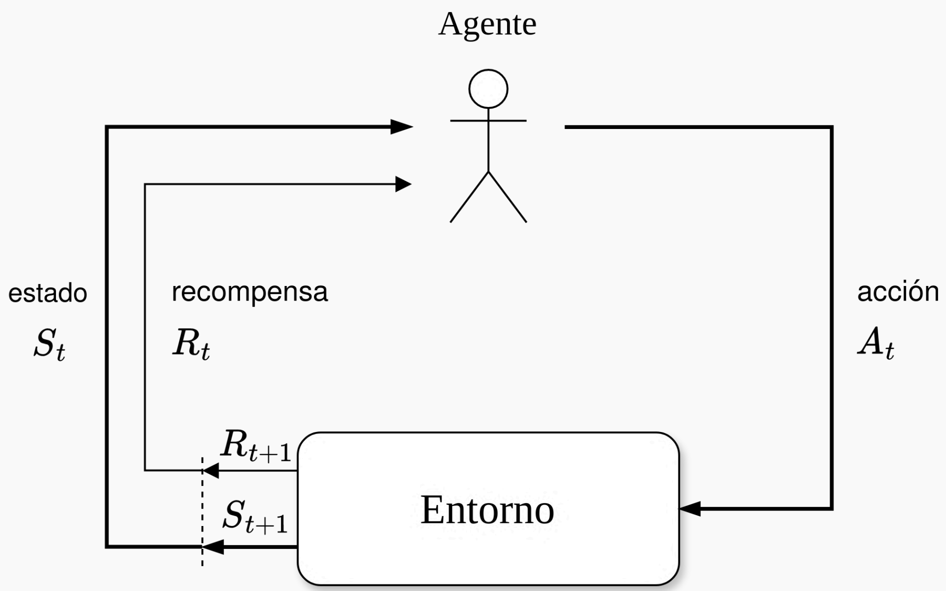
Problema	Características
K-armed bandits	• Cada producto a anunciar constituye una acción. • En cada instante de tiempo, el agente selecciona el producto a publicitar, y recibe una recompensa positiva si el usuario hace *click*.
Contextual bandits	• Añadimos contexto: informaicón sobre el usuario, edad, género, historial de búsqueda, etc. • Las recompensas también varían dependiendo dle usuario que haga *click* sobre el anuncio.
RL completo	• Las acciones ahora pueden repercutir en el entorno y recompensas futuras. • Por ejemplo, mostrar un anuncio de forma repetitiva puede molestar al usuario y hacer que abandone el sitio web, evitando que vuelva a hacer *click* en cualquier otro anuncio.

Procesos de decisión de Markov

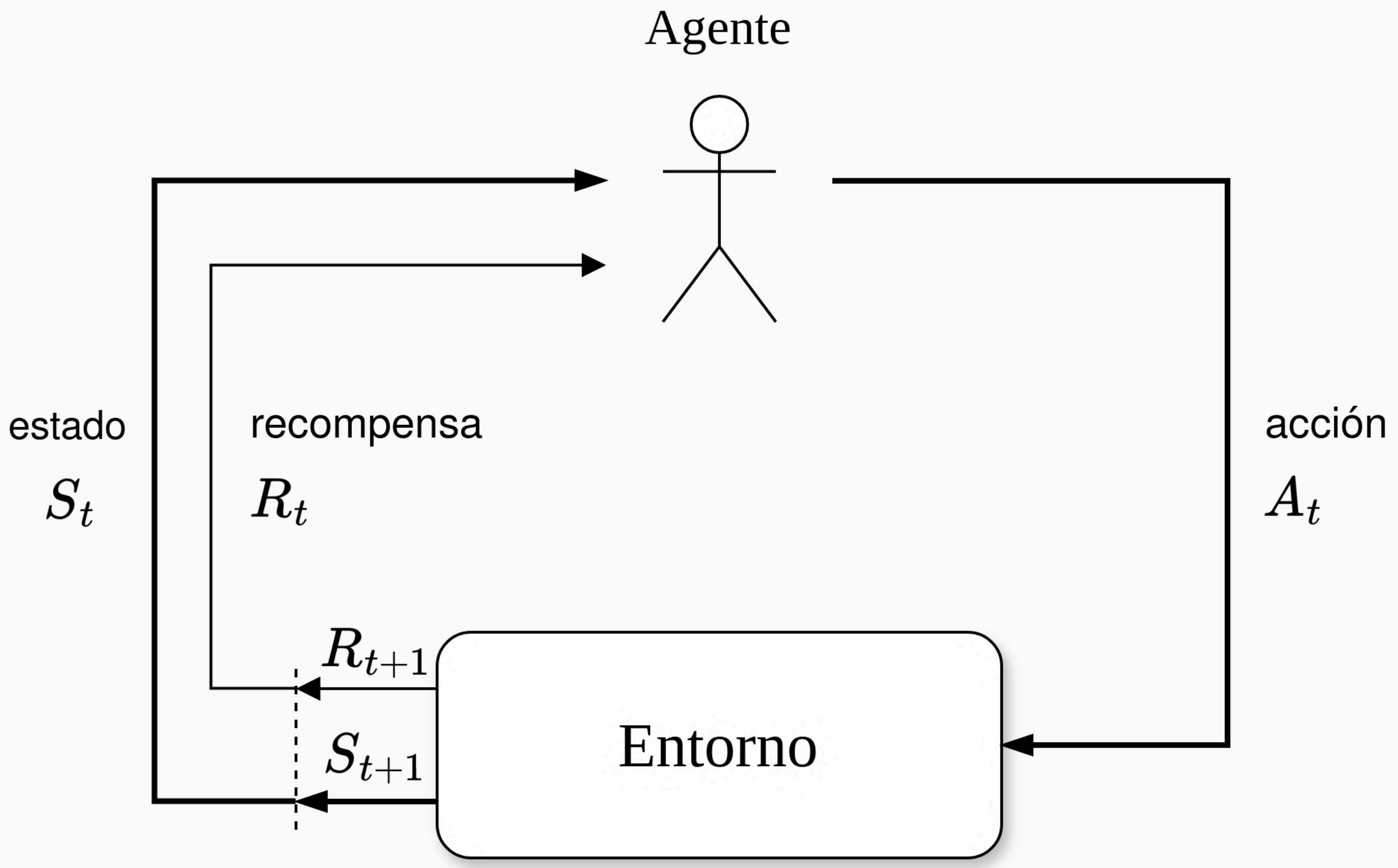
Procesos de decisión de Markov

El marco formal empleado para definir problemas de aprendizaje por refuerzo es el de **proceso de decisión de Markov** (**MDP**).

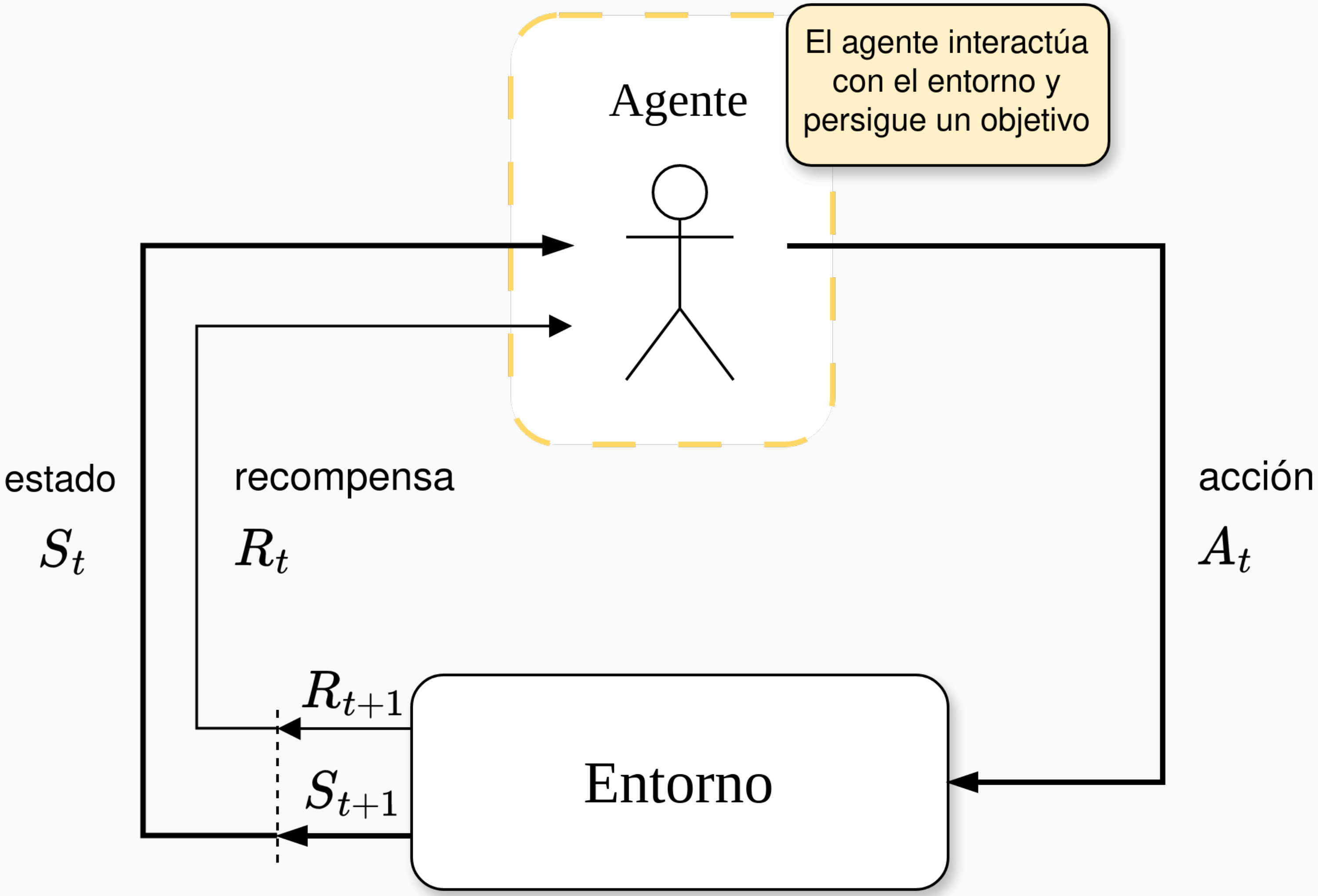
La interacción **agente-entorno** en un problema de RL puede representarse como un MDP finito de la siguiente manera:



Proceso de decisión de Markov (MDP)

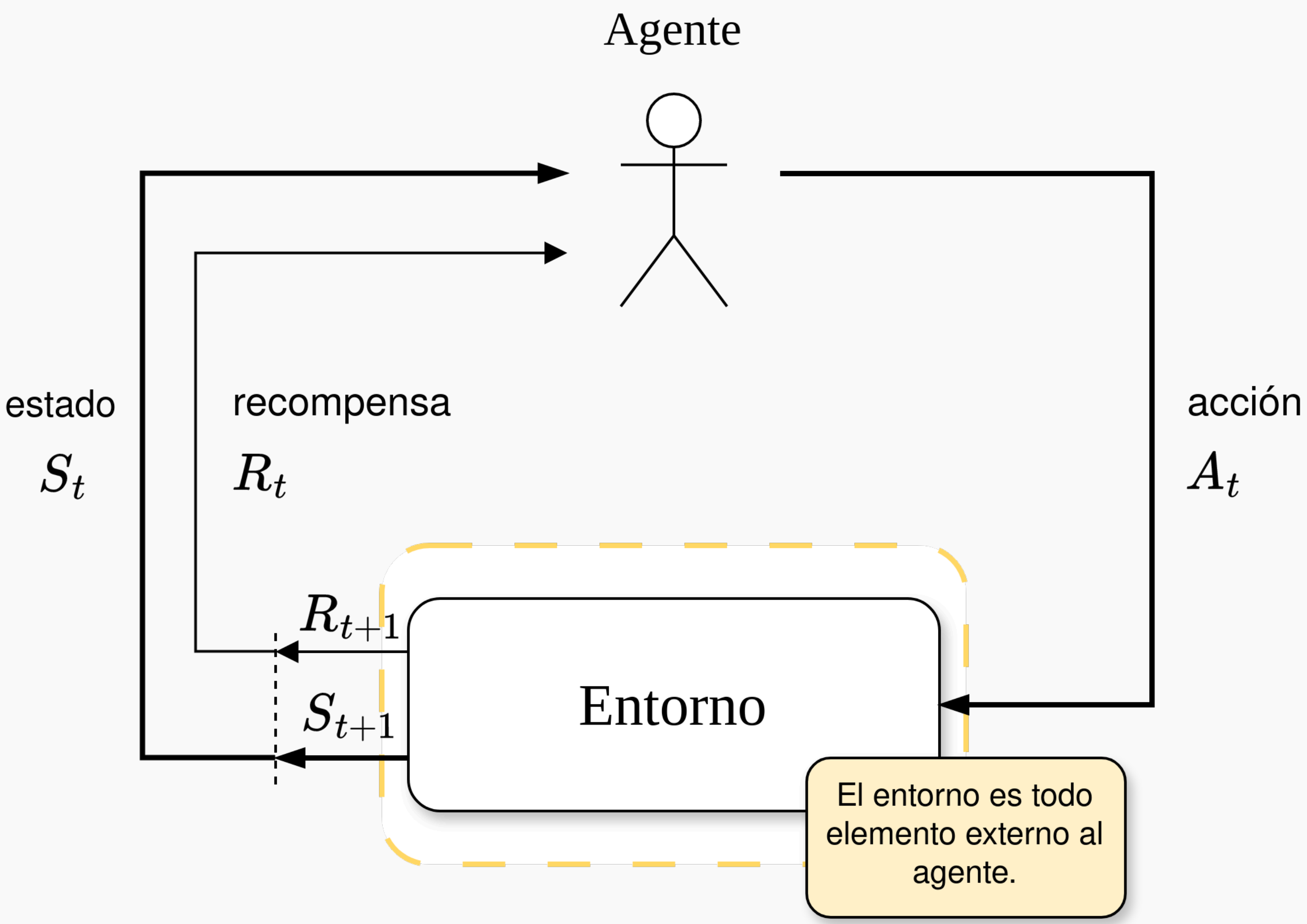


MDP: agente



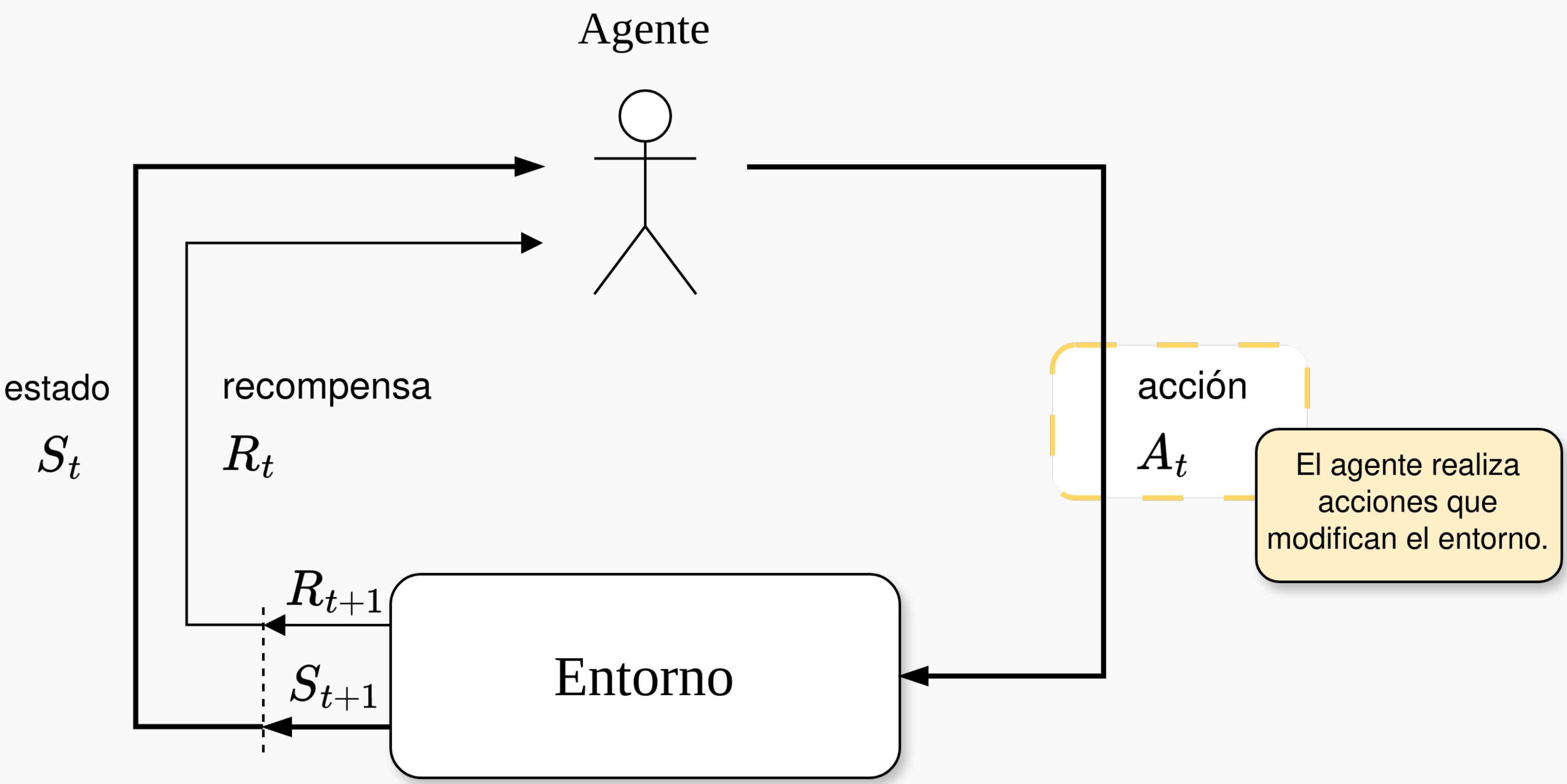
Agente
El agente interactúa con el entorno y persigue un objetivo
estado
S_t
recompensa
R_t
acción
A_t
R_{t+1}
S_{t+1}
Entorno

MDP: entorno



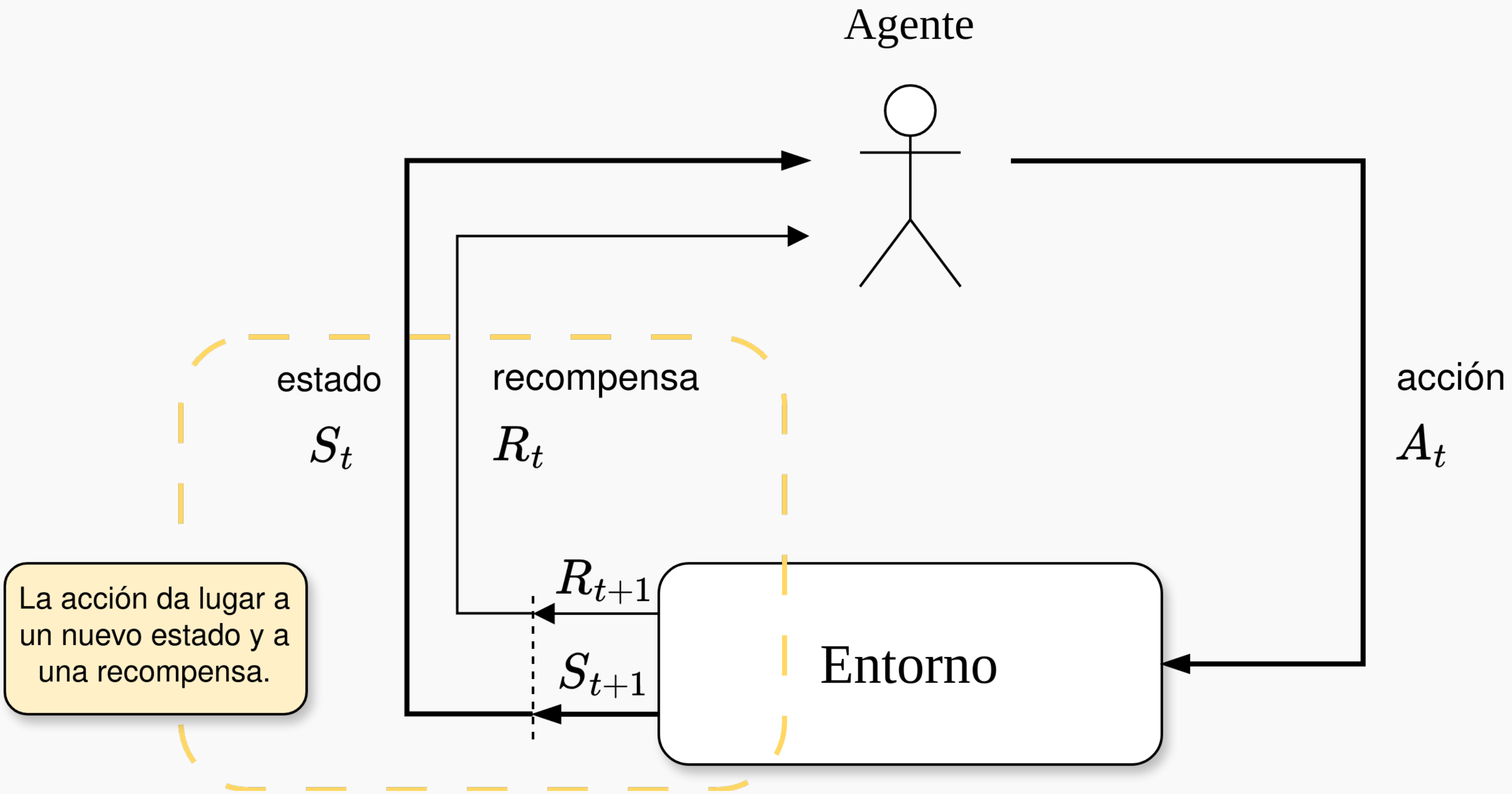
Agente
estado
S_t
recompensa
R_t
acción
A_t
R_{t+1}
S_{t+1}
Entorno
El entorno es todo elemento externo al agente.

MDP: acción

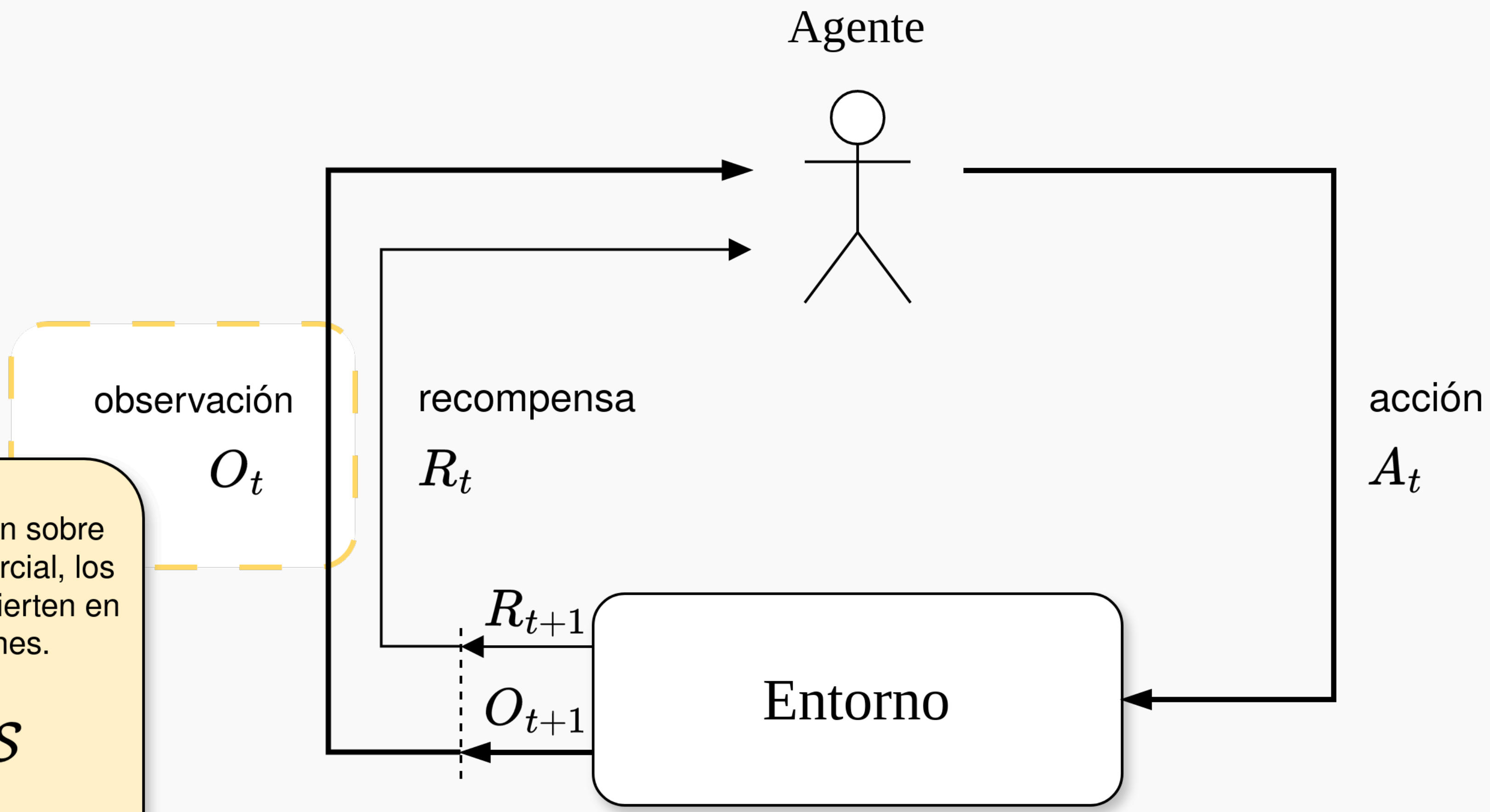


Agente
estado
S_t
recompensa
R_t
acción
A_t
El agente realiza acciones que modifican el entorno.
R_{t+1}
S_{t+1}
Entorno

MDP: estado y recompensa



MDPs parcialmente observables (POMDPs)



Si la información sobre el entorno es parcial, los estados se convierten en observaciones.

$$\mathcal{O} \subset \mathcal{S}$$

POMDP

Partially Observable MDP

Interacción agente-entorno

El agente interactúa con el entorno a lo largo de una secuencia de pasos o *timesteps*.

En cada instante de tiempo:

1. El agente percibe el **estado actual** S_t y realiza una **acción** A_t.
2. El entorno se ve modificado por dicha acción.
3. El agente percibe el **nuevo estado** del entorno S_{t+1} y recibe una **recompensa** R_{t+1}.

Esta interacción da lugar a una secuencia de estados, acciones y recompensas denominada **trayectoria**:

$$\tau = \{S_0, A_0, R_1, S_1, A_1, R_2, ..., S_{T-1}, A_{T-1}, R_T, S_T\}$$

Probabilidad de transición

En un MDP finito, los conjuntos $\mathcal{S}$ (estados), $\mathcal{A}$ (acciones) y $\mathscr{R}$ (recompensas) **son finitos.**

R_t y S_t son variables aleatorias con distribuciones de probabilidad bien definidas, que solamente dependen del estado anterior S_{t-1} y de la acción realizada A_t.

Es decir, para todo $s' \in \mathcal{S}, r \in \mathscr{R}$, existe la probabilidad de que estos valores se den en un instante t dados unos valores particulares para $s \in \mathcal{S}$ y $a \in \mathcal{A}$:

$$p(s', r | s, a) = \Pr\left\{S_t = s', R_T = r \mid S_{t-1} = s, A_{t-1} = a\right\}$$

Esta función define las dinámicas del MDP:

$$p : \mathcal{S} \times \mathscr{R} \times \mathcal{S} \times \mathcal{A} \to [0, 1]$$

Propiedad de Markov

Se cumple que:

$$\sum_{s' \in \mathcal{S},\, r \in \mathcal{R}} p(s', r | s, a) = 1, \forall s \in \mathcal{S}, a \in \mathcal{A}(s)$$

- En un MDP, las probabilidades de transición dependen únicamente del estado y acción inmediatamente previos (S_{t-1}, A_{t-1}).
- Es decir, un estado S_t codifica *toda* la información referente a la interacción agente-entorno previa, y es la *única* información necesaria para elegir la acción a realizar.

Es lo que definimos como **PROPIEDAD DE MARKOV**.

Propiedad de Markov

Propiedad de Markov

El estado actual S_t en un MDP contiene toda la información relevante de los estados pasados $S_{t-1}, S_{t-2}, ..., S_0$.

Por tanto, la transición a un nuevo estado S_{t+1} no requiere de información sobre los estados previos al estado actual:

$$\Pr\left[S_{t+1} | S_t\right] = \Pr\left[S_{t+1} \mid S_0, S_1, ..., S_t\right]$$

El futuro es independiente del pasado, dado el presente.

Transición entre estados

La siguiente fórmula representa la regla de transición entre estados en un MDP:

$$p(s' \mid s, a) = \Pr\{S_t = s \mid S_{t-1} = s, A_{t-1} = a\} = \sum_{r \in \mathcal{R}} p(s', r \mid s, a)$$

Proporciona la probabilidad de transicionar a s' partiendo de s y ejecutando a.

Transición entre estados

¿Por qué necesitamos saber las probabilidades de transición?

En problemas de RL **deterministas**, una acción a desde un estado s siempre conduce al mismo estado s'.

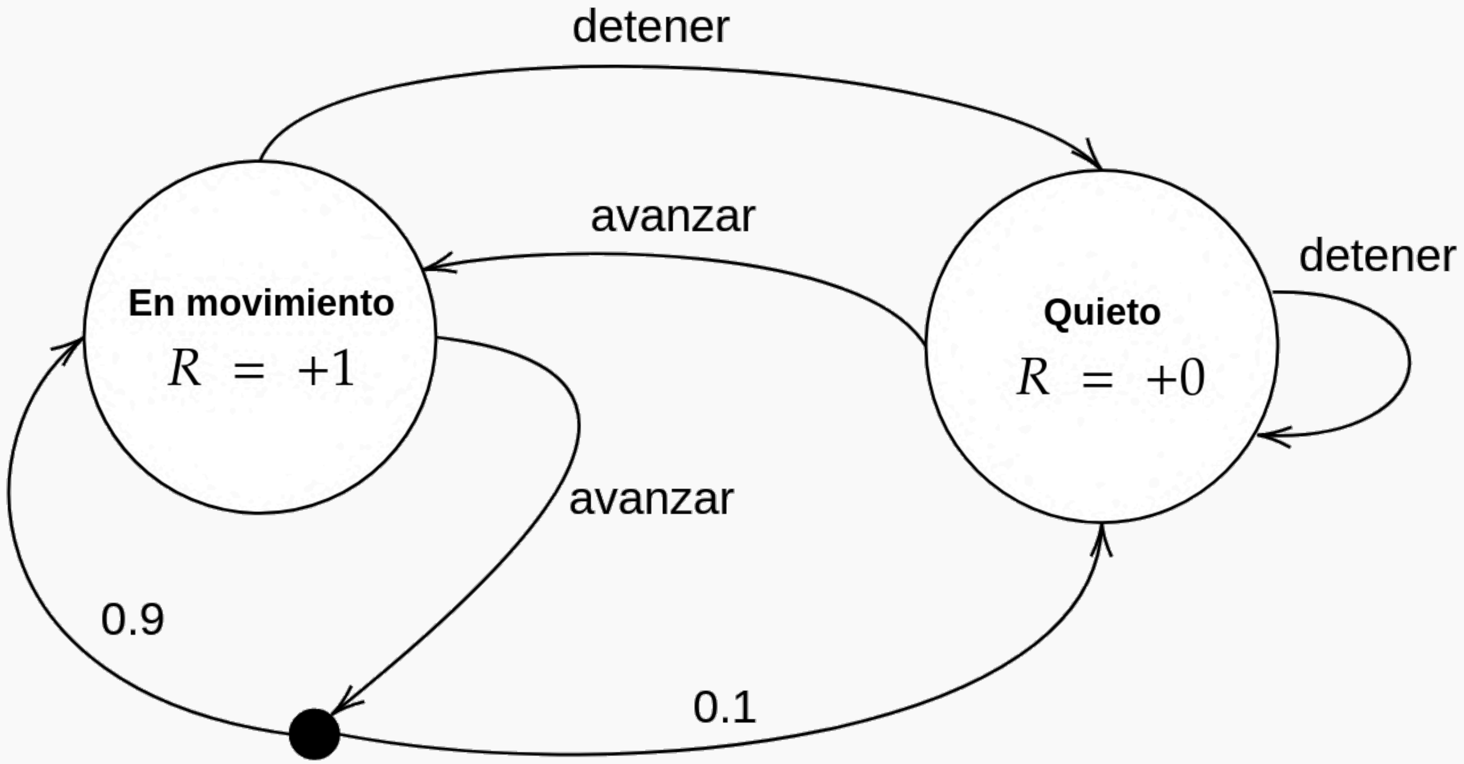
- *Ej. ajedrez* $\longrightarrow$ reglas fijas.

Pero en problemas de RL **estocásticos**, la misma acción a puede llevar a diferentes estados s'.

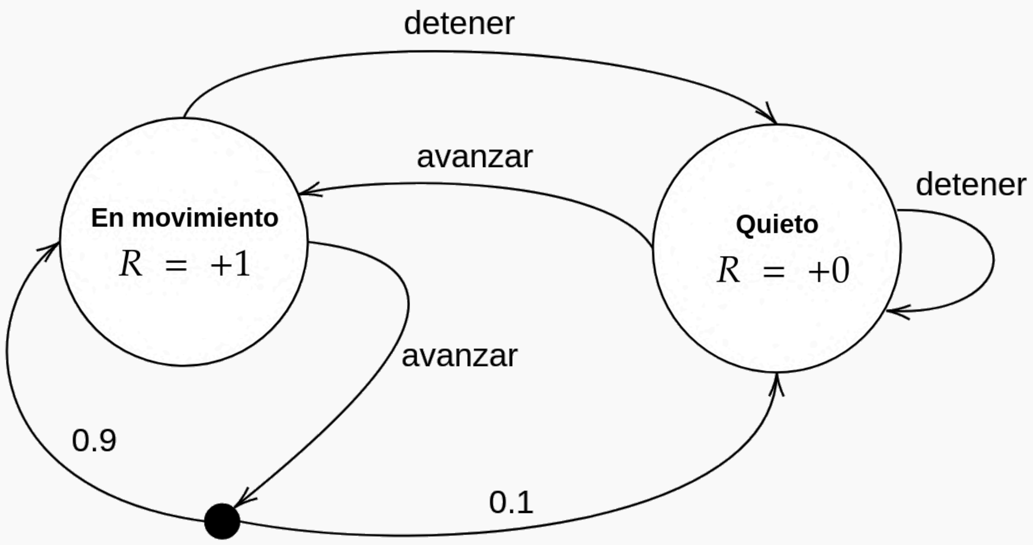
- *Ej. controlar la trayectoria de un dron* $\longrightarrow$ viento.

Veamos un ejemplo...

Ejemplo


detener
avanzar
detener
En movimiento
$R = +1$
Quieto
$R = +0$
avanzar
0.9
0.1

Ejemplo



$$p(s_1, 0 \mid s_0, a_1) =$$

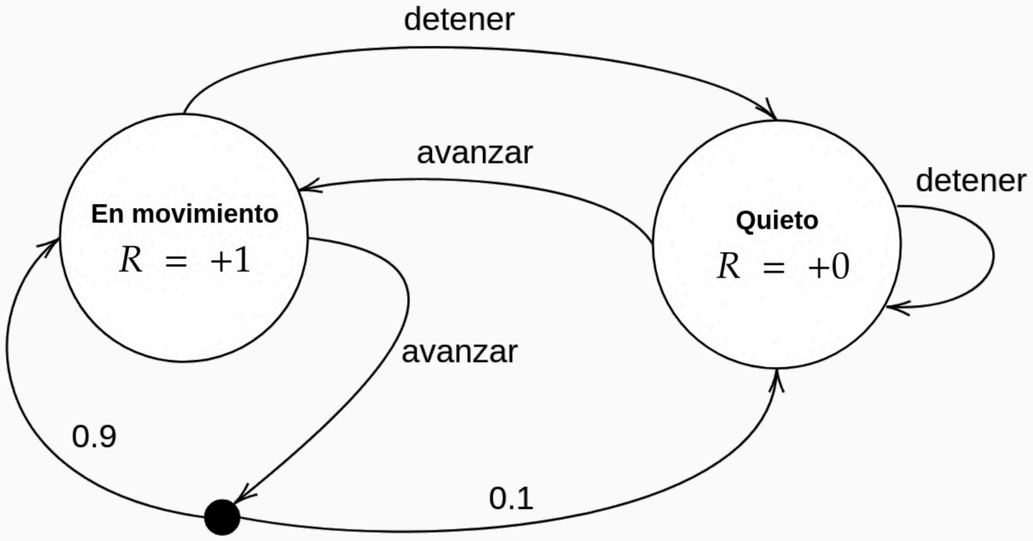
$\mathcal{S} = \{s_0, s_1\}$

- s_0 : en movimiento
- s_1 : quieto

$\mathcal{A} = \{a_0, a_1\}$

- a_0 : avanzar
- a_1 : detener

Ejemplo



$$p(s_1, 0 \mid s_0, a_1) = 1$$

$$p(s_0 \mid s_0, a_0) =$$

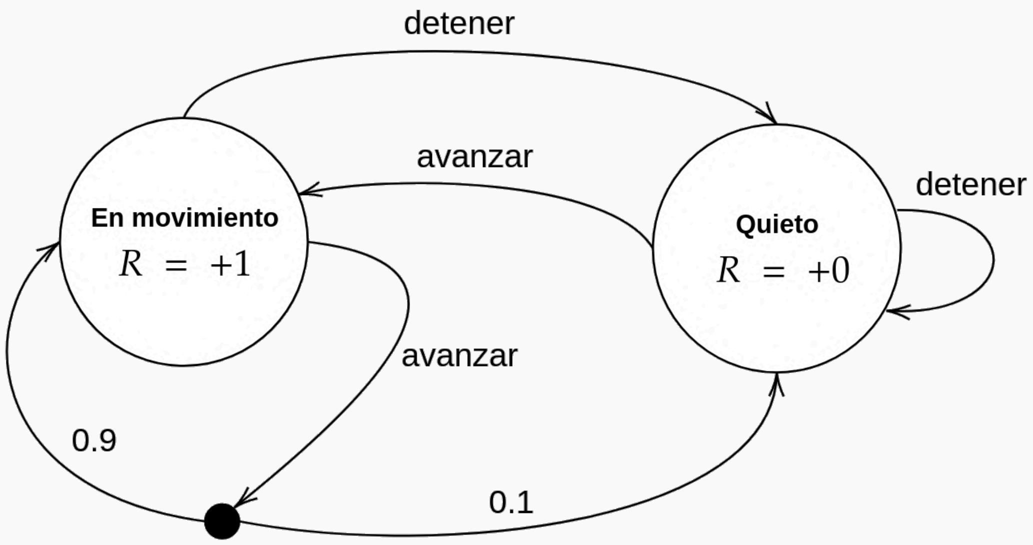
$\mathcal{S} = \{s_0, s_1\}$

- s_0 : en movimiento
- s_1 : quieto

$\mathcal{A} = \{a_0, a_1\}$

- a_0 : avanzar
- a_1 : detener

Ejemplo



$$p(s_1, 0 \mid s_0, a_1) = 1$$

$$p(s_0 \mid s_0, a_0) = 0.9$$

$$p(s_1 \mid s_0, a_0) =$$

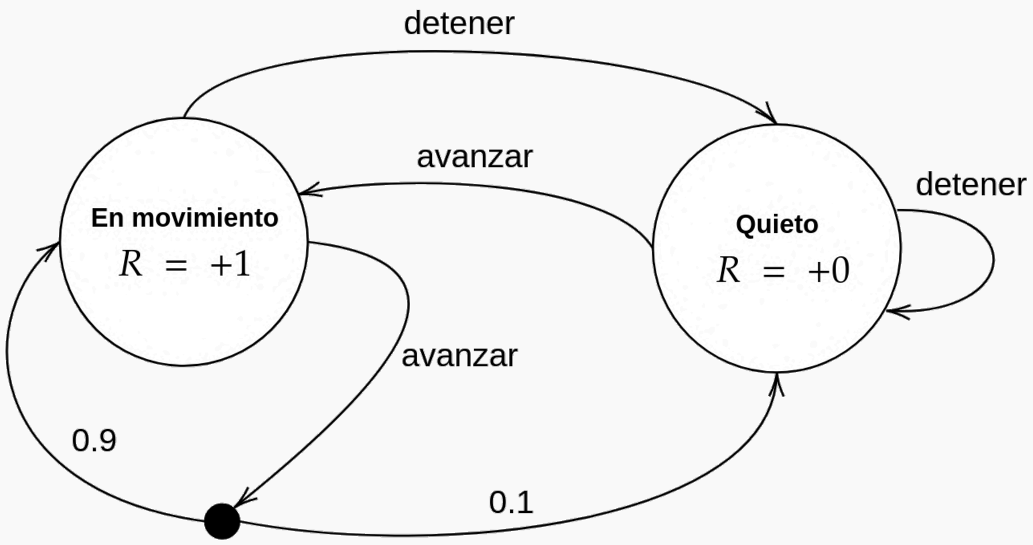
$\mathcal{S} = \{s_0, s_1\}$

- s_0 : en movimiento
- s_1 : quieto

$\mathcal{A} = \{a_0, a_1\}$

- a_0 : avanzar
- a_1 : detener

Ejemplo



$$p(s_1, 0 \mid s_0, a_1) = 1$$

$$p(s_0 \mid s_0, a_0) = 0.9$$

$$p(s_1 \mid s_0, a_0) = 0.1$$

$$p(s_1, 1 \mid s_1, a_0) =$$

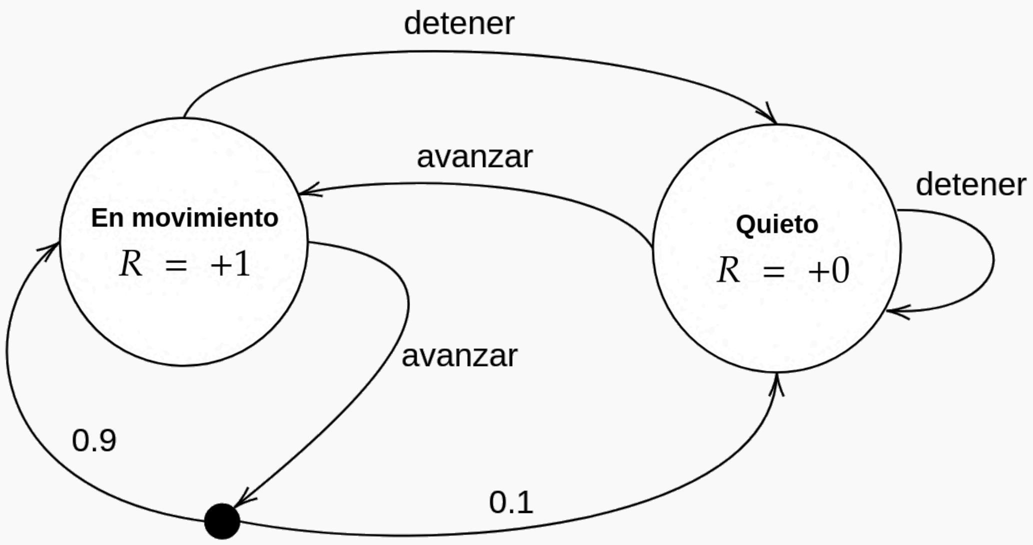
$\mathcal{S} = \{s_0, s_1\}$

- s_0 : en movimiento
- s_1 : quieto

$\mathcal{A} = \{a_0, a_1\}$

- a_0 : avanzar
- a_1 : detener

Ejemplo



$$p(s_1, 0 \mid s_0, a_1) = 1$$

$$p(s_0 \mid s_0, a_0) = 0.9$$

$$p(s_1 \mid s_0, a_0) = 0.1$$

$$p(s_1, 1 \mid s_1, a_0) = 0$$

$$p(s_0, 1 \mid s_1, a_1) =$$

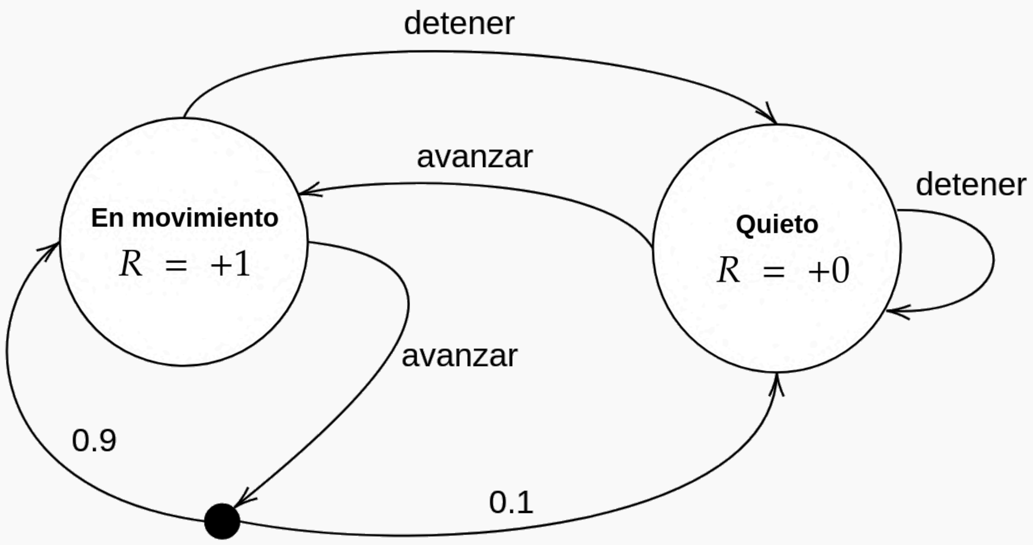
$\mathcal{S} = \{s_0, s_1\}$

- s_0 : en movimiento
- s_1 : quieto

$\mathcal{A} = \{a_0, a_1\}$

- a_0 : avanzar
- a_1 : detener

Ejemplo



$\mathcal{S} = \{s_0, s_1\}$

- s_0 : en movimiento
- s_1 : quieto

$\mathcal{A} = \{a_0, a_1\}$

- a_0 : avanzar
- a_1 : detener

$$p(s_1, 0 \mid s_0, a_1) = 1$$

$$p(s_0 \mid s_0, a_0) = 0.9$$

$$p(s_1 \mid s_0, a_0) = 0.1$$

$$p(s_1, 1 \mid s_1, a_0) = 0$$

$$p(s_0, 1 \mid s_1, a_1) = 0$$

Propiedad de Markov: las transiciones sólo dependen del **estado actual** (y la **acción** realizada).

Recompensa esperada

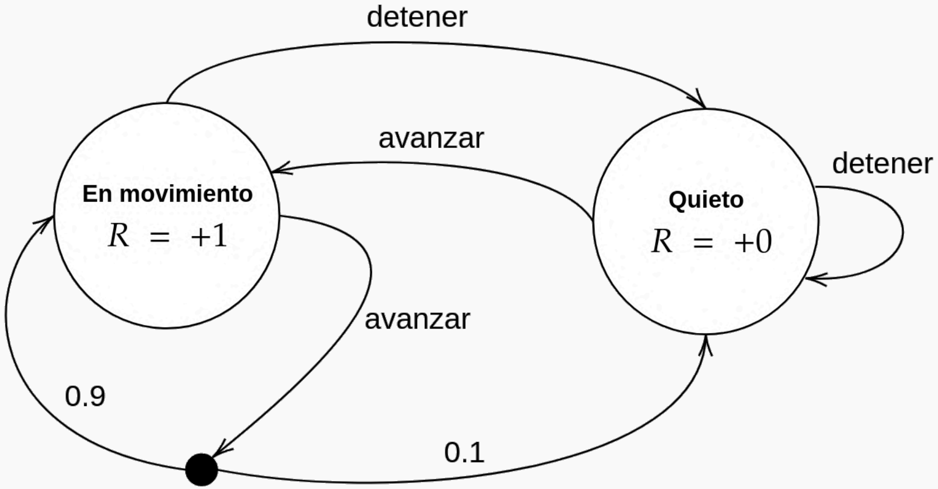
¿Qué **recompensa** podemos esperar de un par acción-estado?

$$r(s, a) = \mathbb{E}\left[R_t \mid S_{t+1} = s, A_{t-1} = a\right] = \sum_{r \in \mathcal{R}} r \sum_{s' \in \mathcal{S}} p(s', r \mid s, a)$$

¿Qué **recompensa** podemos esperar de una tripleta estado-acción-estado?

$$r(s, a, s') = \mathbb{E}\left[R_t \mid S_{t-1} = s, A_{t-1} = a, S_t = s'\right] = \sum_{r \in \mathcal{R}} r \frac{p(s', r \mid s, a)}{p(s' \mid s, a)}$$

Ejemplo



$$r(s_0, a_1) =$$

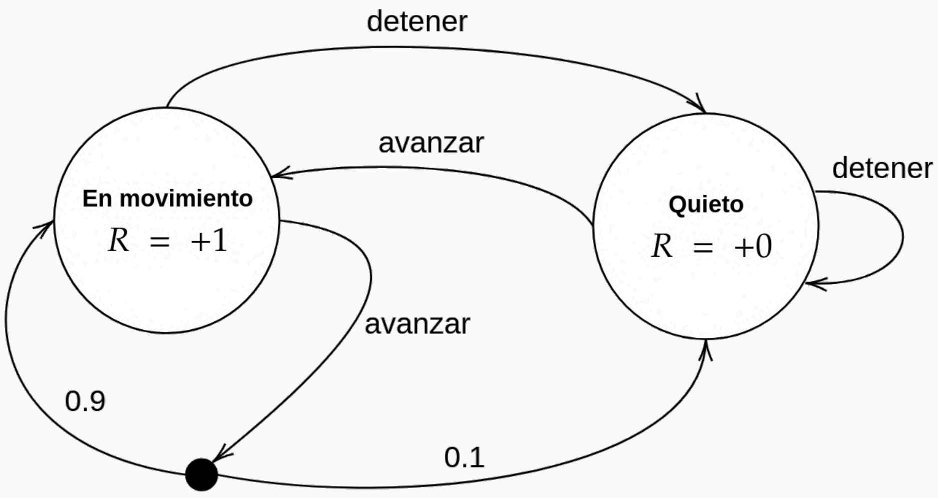
$\mathcal{S} = \{s_0, s_1\}$

- s_0 : en movimiento
- s_1 : quieto

$\mathcal{A} = \{a_0, a_1\}$

- a_0 : avanzar
- a_1 : detener

Ejemplo



$$r(s_0, a_1) = 0$$

$$r(s_1, a_0) =$$

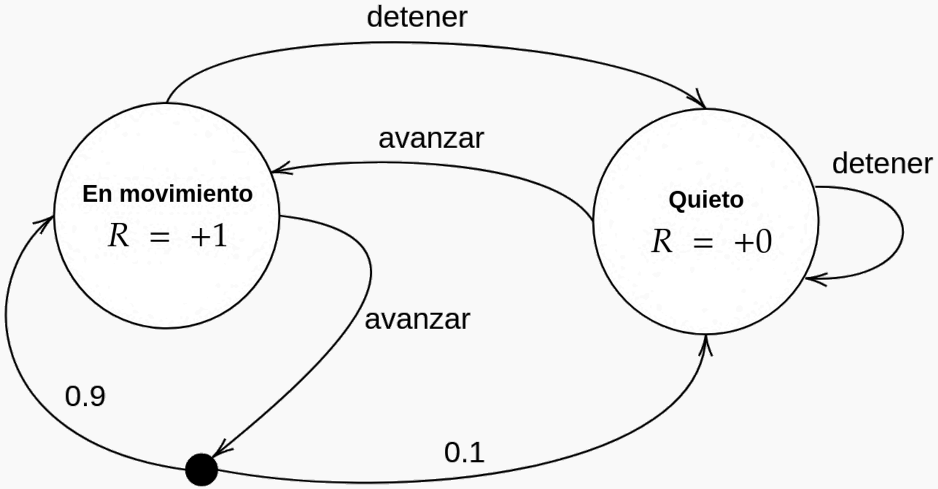
$\mathcal{S} = \{s_0, s_1\}$

- s_0 : en movimiento
- s_1 : quieto

$\mathcal{A} = \{a_0, a_1\}$

- a_0 : avanzar
- a_1 : detener

Ejemplo



$$r(s_0, a_1) = 0$$

$$r(s_1, a_0) = 1$$

$$r(s_0, a_0) =$$

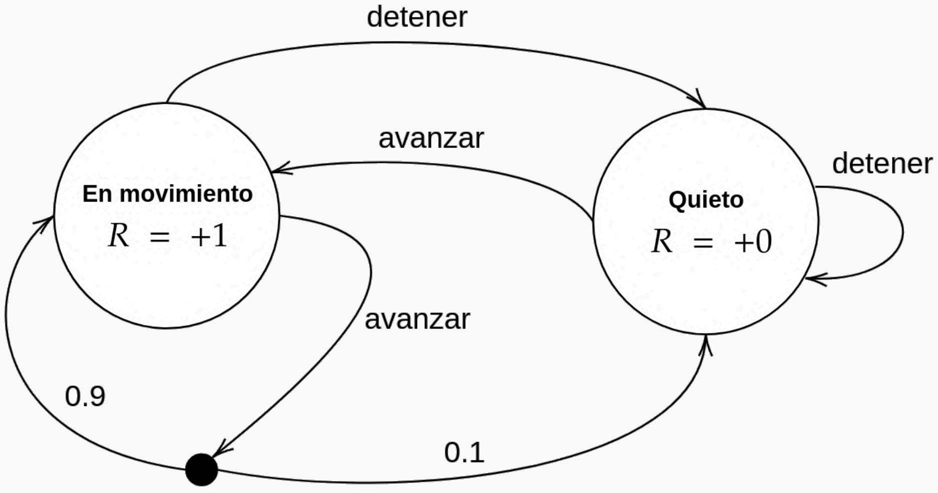
$\mathcal{S} = \{s_0, s_1\}$

- s_0 : en movimiento
- s_1 : quieto

$\mathcal{A} = \{a_0, a_1\}$

- a_0 : avanzar
- a_1 : detener

Ejemplo



$\mathcal{S} = \{s_0, s_1\}$

- s_0 : en movimiento
- s_1 : quieto

$\mathcal{A} = \{a_0, a_1\}$

- a_0 : avanzar
- a_1 : detener

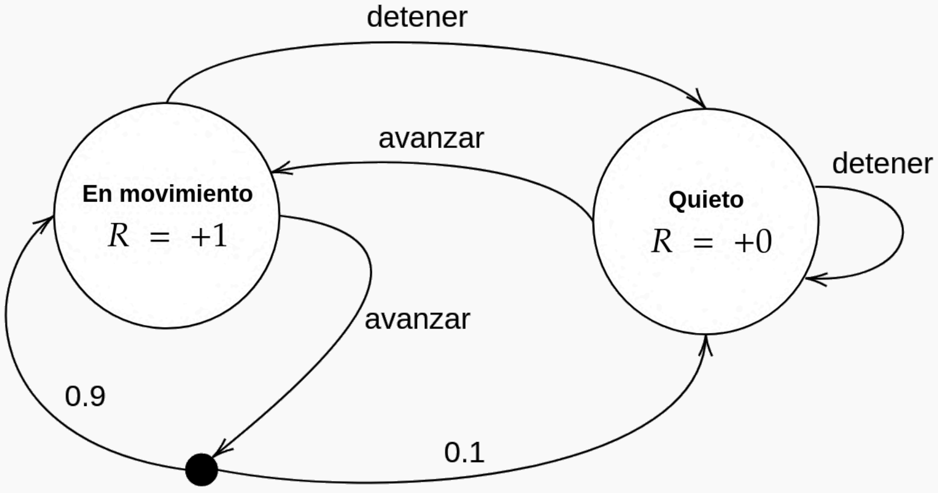
$$r(s_0, a_1) = 0$$

$$r(s_1, a_0) = 1$$

$$r(s_0, a_0) = (1 \cdot 0.9) + (0 \cdot 0.1) = 0.9$$

$$r(s_0, a_0, s_0) =$$

Ejemplo



$\mathcal{S} = \{s_0, s_1\}$

- s_0 : en movimiento
- s_1 : quieto

$\mathcal{A} = \{a_0, a_1\}$

- a_0 : avanzar
- a_1 : detener

$$r(s_0, a_1) = 0$$

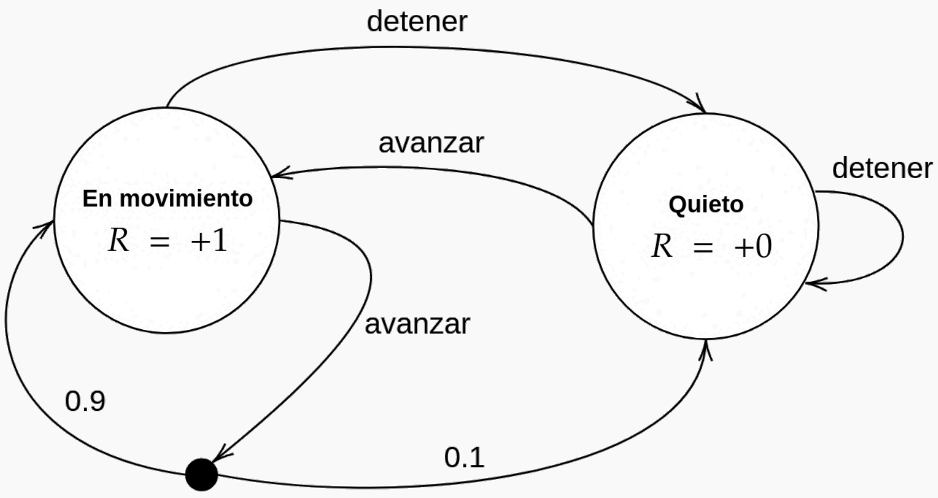
$$r(s_1, a_0) = 1$$

$$r(s_0, a_0) = (1 \cdot 0.9) + (0 \cdot 0.1) = 0.9$$

$$r(s_0, a_0, s_0) = 1$$

$$r(s_1, a_1, s_0) =$$

Ejemplo



$\mathcal{S} = \{s_0, s_1\}$

- s_0 : en movimiento
- s_1 : quieto

$\mathcal{A} = \{a_0, a_1\}$

- a_0 : avanzar
- a_1 : detener

$$r(s_0, a_1) = 0$$

$$r(s_1, a_0) = 1$$

$$r(s_0, a_0) = (1 \cdot 0.9) + (0 \cdot 0.1) = 0.9$$

$$r(s_0, a_0, s_0) = 1$$

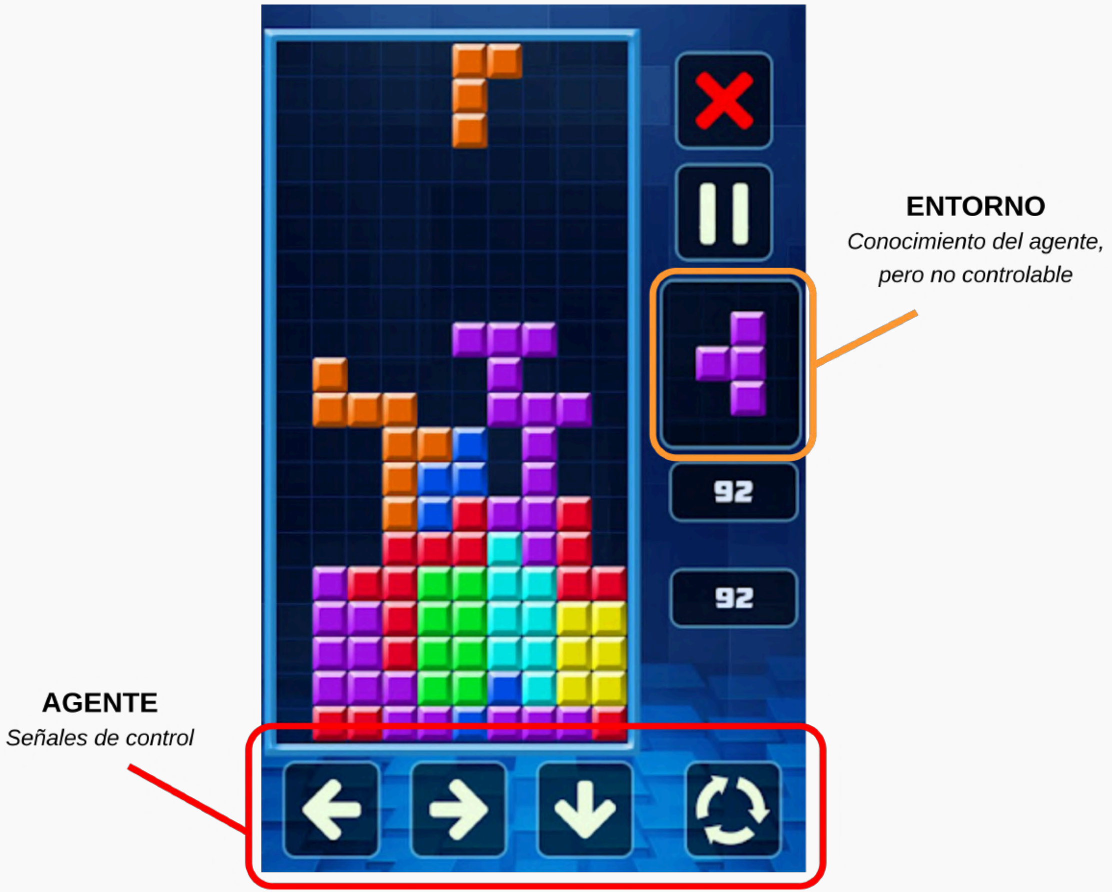
$$r(s_1, a_1, s_0) = ?$$

$$r(s, a, s') = \sum_{r \in \mathcal{R}} r \frac{p(s', r \mid s, a)}{\cancel{p(s' \mid s, a)}}$$

Algunas consideraciones...

Consideramos **entorno** a todo aquello sobre lo que el agente no tiene control.

> Es decir, la frontera agente-entorno viene dada por las capacidades de control del agente, no por su conocimiento.

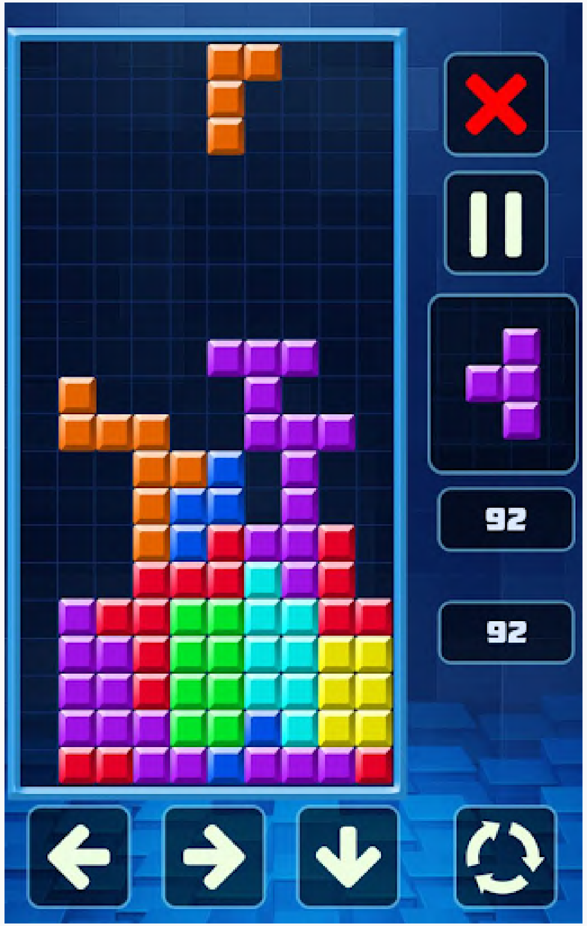


Interacción agente-entorno

Podemos resumir el **aprendizaje basado en interacción** en 3 señales:

1. Acciones: elecciones, control del agente.
2. Estados: información en base a dichas elecciones.
3. Recompensas: adecuación al objetivo.

El nivel de abstracción / complejidad de estados y acciones dependerá del problema a tratar.



Representaciones estructuradas

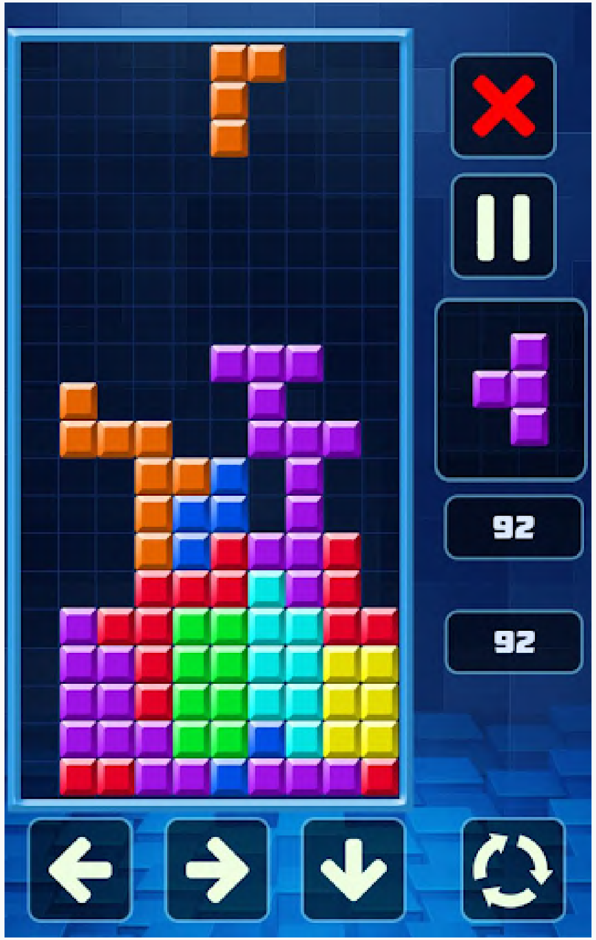
Es común contar con **representaciones estructuradas** de estados y acciones (ej. vectores de valores).

$$S_t : \{M_t, \text{type}, \text{pos}, \text{next}, \text{score}\}$$

- M_t : matriz con posiciones libres (0) u ocupadas (1)
- *type*: pieza actual
- *pos*: posición de la pieza actual
- *next*: próxima pieza
- *score*: puntuación acumulada

$$\mathcal{A} : \{0 : \boxed{\Leftarrow}, 1 : \boxed{\Rightarrow}, 2 : \boxed{\Downarrow}, 3 : \boxed{\Uparrow}\}$$

$$A_t \in \{0, 1, 2, 3\}$$



Estados no-markovianos

En un proceso de decisión de Markov, el futuro depende únicamente del estado presente y no de los estados anteriores (**propiedad de Markov**).

Sin embargo, podemos encontrarnos ante problemas con **estados no-markovianos**, donde el estado actual no contiene toda la información relevante para predecir el futuro.

Estado no-markoviano

Un estado no-markoviano es aquel en el que la información necesaria para tomar una decisión óptima no está completamente representada por el estado actual del sistema.

Ejemplo

¿La bola va hacia la niña o hacia el hombre?

Ejemplo

- En este ejemplo, no podemos predecir el movimiento de la bola a partir de una sola imagen.
  - Una imagen instantánea no nos ofrece la suficiente información.
  - Estado no-markoviano.
- Una posible solución sería **concatenar múltiples fotogramas consecutivos**.

Temporalidad

Los ***time steps*** pueden no darse en intervalos de tiempo fijos, sino estar condicionados por eventos.

Por ejemplo:

- Movimiento de piezas en una partida de ajedrez.
- Cambio de valor en el precio de un acción.
- Acceso a la web de venta de un producto.
- ...

Problemas episódicos y continuados

Problemas episódicos

El **estado inicial** de un problema de RL es el estado en el cual comienza la interacción del agente con el entorno.

Alcanzar un **estado terminal** supone el fin de esta interacción.

Un problema de RL puede contar con múltiples estados iniciales y finales.

- Estados no terminales: $\mathcal{S}$.
- Estados terminales y no terminales: $\mathcal{S}^+$.

Definimos así el concepto de **episodio**.

Episodio

Secuencia de *time steps* desde un estado inicial hasta un estado terminal.

$$s_0 \to s_1 \to s_2 \to \dots \to s_T$$

La longitud T de un episodio no tiene por qué ser fija, y puede variar entre episodios.

Problemas episódicos

Problema episódico

Problema dividido en una secuencia **finita** de estados, desde un estado inicial hasta un estado terminal.

¿Y si el problema no tiene fin?

Problemas continuados

En los **problemas continuados** (*vs.* episódicos), no existen episodios que finalicen en un estado terminal.

- Es decir, **no hay estados terminales**.
- Por tanto, el problema no finaliza en un *time step* T concreto ($T = \infty$).

Problema continuado

Problema consistente en una secuencia **infinita** de estados, partiendo de un estado inicial.

Suelen ser problemas más cercanos a la realidad (control térmico, robótica, ...).

Objetivos y recompensas

Objetivos y recompensas

¿Qué relación hay entre las señales de recompensa y los objetivos del agente?

Objetivos y recompensas

¿Qué relación hay entre las señales de recompensa y los objetivos del agente?

¿Cómo se realiza el cálculo de las recompensas?

Objetivos y recompensas

¿Qué relación hay entre las señales de recompensa y los objetivos del agente?

¿Cómo se realiza el cálculo de las recompensas?

¿Cómo condicionamos el comportamiento del agente en base a dichas recompensas?

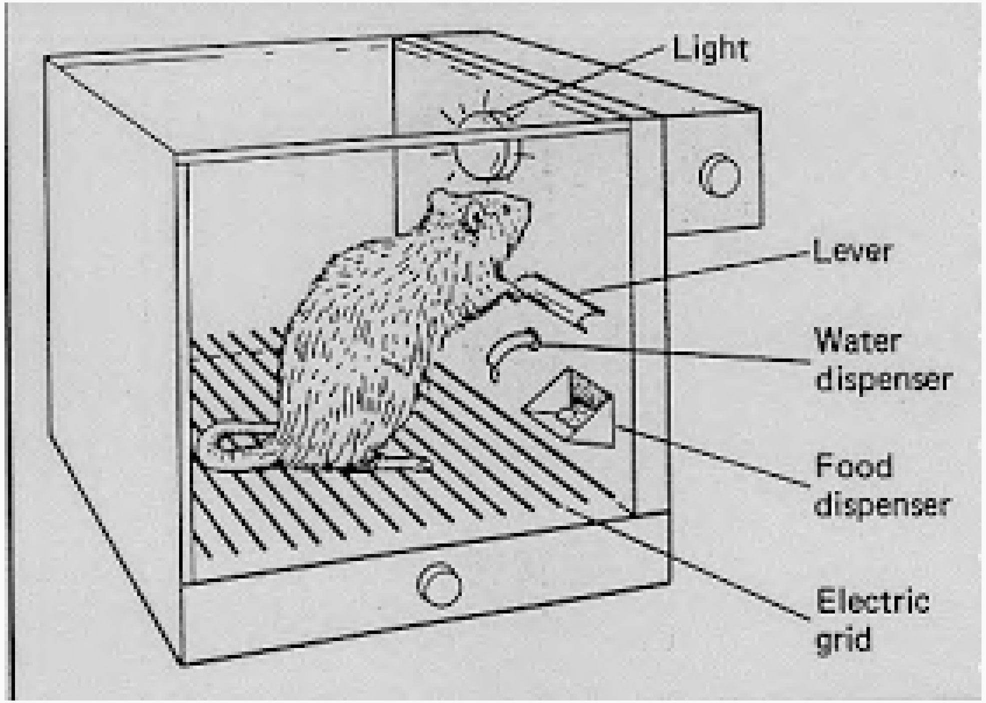
Recompensa

Para guiar a un agente hacia su **objetivo**, empleamos **recompensas**.

Una señal de **recompensa** es un valor numérico que indica al agente si su comportamiento le acerca o no a su objetivo.

$$R_t \in \mathbb{R}$$

Buscamos maximizar la recompensa acumulada a largo plazo, no sólo las recompensas inmediatas.



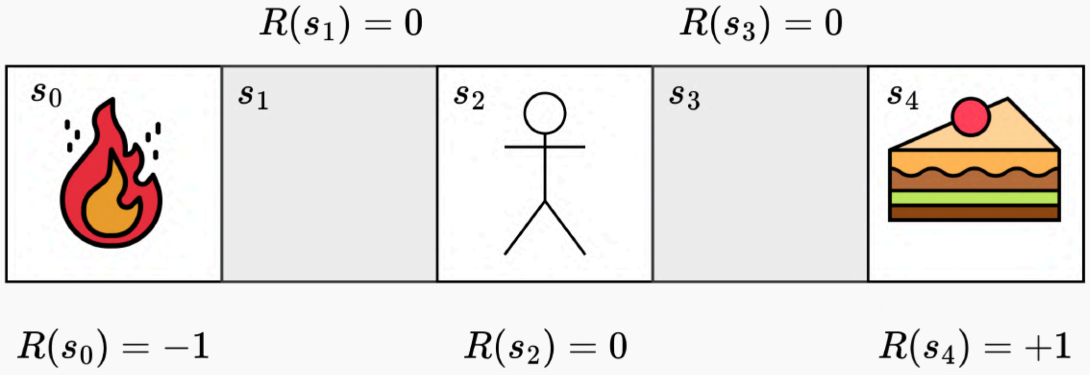
Reward hypotheses

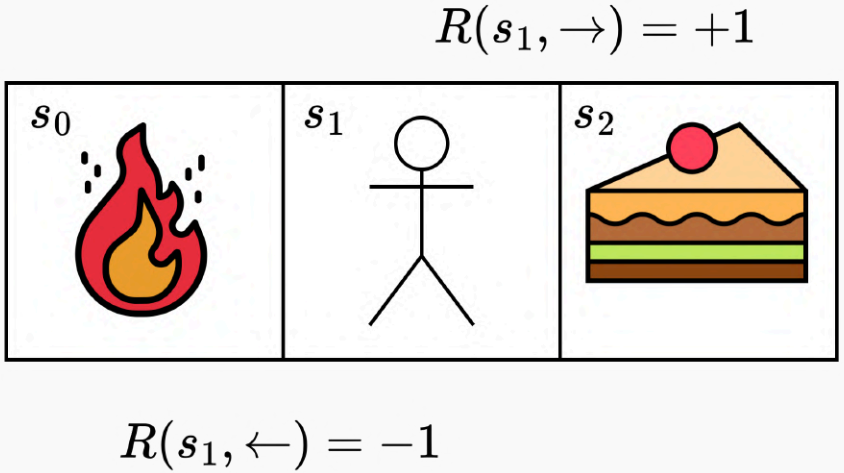
> *Todo lo que entendemos como objetivo o propósito puede interpretarse como la maximización del valor esperado para una suma acumulada de una señal escalar (llamada recompensa).*
>
> *Sutton, R. S., & Barto, A. G. (2018). Reinforcement learning: An introduction (2nd ed.). MIT press. (p. 53).*

El uso de una señal de recompensa para formalizar la idea de **objetivo** es uno de los aspectos más distintivos del aprendizaje por refuerzo.

Función de recompensa

Las recompensas que el agente recibe vienen dadas por una función de recompensa, que generalmente depende del **estado** alcanzado, o de la **acción** realizada, esto es: $r_t = R(S_t)$, o bien: $r_t = R(S_t, A_t)$.





Objetivos y subobjetivos

El objetivo de un agente de RL es **maximizar la recompensa acumulada** (*return*) a lo largo del tiempo.

- **Agente orientado a subobjetivos**: cada vez que se come una pieza, $R = +1$ (o valor variable, dependiendo de la pieza comida).
- **Agente orientado a objetivos**: si se gana, $R = +1$, si se pierde: $R = -1$, si se empata (*tablas*): $R = 0$.

Objetivos y subobjetivos

La recompensa **no** debe orientarse exclusivamente hacia el cumplimiento de **subobjetivos**, sino hacia el cumplimiento de un **objetivo final**.

- Ej. *comer piezas sin ningún criterio*.

Si, por ejemplo, queremos fomentar cierto comportamiento desde un principio, es mejor emplear otros recursos, como valores iniciales optimistas.

Retorno

El **retorno**, o ***recompensa acumulada***, es el valor que tratamos de maximizar.

Se define de la siguiente manera:

$$G_t = R_{t+1} + R_{t+2} + \ldots + R_{T-1} + R_T$$

Siendo T el último *time step* del **episodio** (o de una ventana de tiempo determinada).

Retorno

Suma de las recompensas a obtener desde el momento presente hasta el final de un episodio o ventana de tiempo determinada.

Retorno

$$G_t = R_{t+1} + R_{t+2} + \ldots + R_{T-1} + R_T$$

Esta formulación es válida para **problemas episódicos**, pero…

Retorno

$$G_t = R_{t+1} + R_{t+2} + \dots + R_{T-1} + R_T$$

Esta formulación es válida para **problemas episódicos**, pero...

¿Qué ocurre en los **problemas continuados**?

- Si el *time step* final es $T = \infty$, la recompensa esperada es una suma infinita $G_t = \infty$.

Necesitamos reformular la definición de recompensa acumulada.

Retorno descontado

Introducimos el concepto de **retorno descontado**:

$$G_t = R_{t+1} + \gamma R_{t+2} + \gamma^2 R_{t+3} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k R_{t+k+1}$$

Donde $\gamma \in [0, 1]$ se denomina **factor de descuento** (*discount factor*).

Factor de descuento

$$G_t = R_{t+1} + \gamma R_{t+2} + \gamma^2 R_{t+3} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k R_{t+k+1}$$

- El factor de descuento determina el valor presente asignado a recompensas futuras.
- Una recompensa recibida en k *time steps* futuros tiene un valor γ^{k-1} veces lo que valdría en el *time step* actual.
- Si $\gamma = 0$, el agente solamente tendrá en cuenta las recompensas inmediatas. Se trata de un *agente miope*, que sólo tiene en cuenta R_{t+1} para elegir A_t.
- A medida que γ se aproxima a 1, el agente tendrá más en cuenta aquellas acciones que maximicen las recompensas futuras.

Definición recursiva

El retorno descontado puede definirse **de forma recursiva**:

$$
\begin{aligned}
G_t &= R_{t+1} + \gamma R_{t+2} + \gamma^2 R_{t+3} + \dots \\
&= R_{t+1} + \gamma\left(R_{t+2} + \gamma R_{t+3} + \dots\right) \\
&= R_{t+1} + \gamma G_{t+1}
\end{aligned}
$$

Definición recursiva

El retorno descontado puede definirse **de forma recursiva**:

$$\begin{aligned} G_t &= R_{t+1} + \gamma R_{t+2} + \gamma^2 R_{t+3} + \gamma^3 R_{t+4} + \ldots \\ &= R_{t+1} + \gamma\left(R_{t+2} + \gamma R_{t+3} + \gamma^2 R_{t+4} + \ldots\right) \\ &= \underbrace{R_{t+1}}_{\text{Recompensa inmediata}} + \underbrace{\gamma G_{t+1}}_{\text{Return descontado desde } t+1} \end{aligned}$$

Definición recursiva

El retorno descontado puede definirse **de forma recursiva**:

$$G_t = R_{t+1} + \gamma G_{t+1}$$

Esta formulación será importante para la teoría y algoritmos de RL que veremos más adelante.

Recompensa constante

$$G_t = R_{t+1} + \gamma G_{t+1}$$

La definición recursiva de G_t es válida para todo *time step* $t < T$, incluso si la terminación ocurre en $t + 1$, siempre que definamos $G_T = 0$.

Por otro lado, aunque G_t sea una suma infinita, se convierte en finita si la recompensa es siempre > 0 y constante (con $\gamma < 1$).

- Por ejemplo, si la recompensa es siempre +1, el retorno será:

$$G_t = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k = \frac{1}{1 - \gamma}$$

¿Cómo definir la recompensa?

Existen diferentes formas de guiar el aprendizaje mediante una funciones de recompensa.

El aprendizaje puede basarse en refuerzos positivos o negativos. Por ejemplo:

Recompensa basada en **objetivos**:

+1 si el agente alcanza un objetivo
+0 en cualquier otro caso

Recompensa basada en **penalizaciones**:

–1 por *time step* empleado
+0 cuando se alcanza el objetivo.

Cualquier representación de la función de recompensa tiene sus *pros* y sus *contras*, por lo que la elección de una u otra dependerá del problema que tratemos de abordar.

¿Cómo definir la recompensa?

- ¿Qué definición de recompensa emplearías para entrenar a un robot a salir de un laberinto?

¿Cómo definir la recompensa?

- ¿Qué definición de recompensa emplearías para entrenar a un robot a salir de un laberinto?
- ¿Y para conducir un coche autónomo?

Inverse reinforcement learning

Existen formas alternativas de aplicar las funciones de recompensa.

Por ejemplo, el *inverse reinforcement learning* (RL inverso) consiste en plantear un ejemplo de comportamiento óptimo y hacer que el agente adivine la recompensa a maximizar que se asocia con este.

Comportamiento → Recompensa

vs.

Recompensa → Comportamiento

En resumen...

Un **MDP** se define por la tupla:

$$\langle \mathcal{S}, \mathcal{A}, \mathcal{P}, \mathcal{R}, \gamma \rangle$$

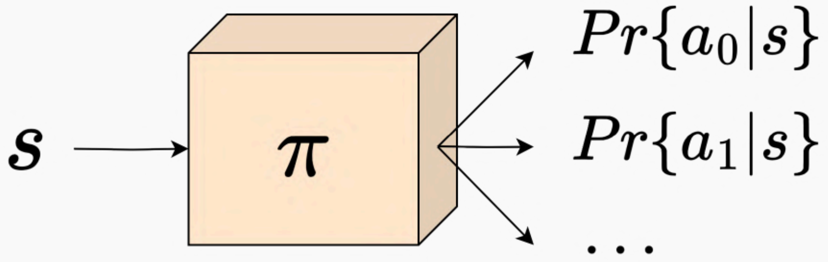
- ☑ Un conjunto de estados $\mathcal{S}$.
- ☑ Un conjunto de acciones $\mathcal{A}$.
- ☑ Una función de transición $\mathcal{P}$.
- ☑ Una función de recompensa $\mathcal{R} : \mathcal{S} \times \mathcal{A} \times \mathcal{S} \to \mathbb{R}$
- ☑ Un factor de descuento $\gamma \in [0, 1]$.

Políticas

Política

Una **política** es una función que refleja la probabilidad de emplear una determinada acción $a \in \mathcal{A}(s)$ a partir de un estado $s \in \mathcal{S}$.

- La política rige el comportamiento del agente, representando su preferencia por unas acciones u otras ante diferentes estados.



Diferenciamos entre políticas **deterministas** y **estocásticas**.

Tipos de políticas

Política determinista

La probabilidad de tomar una acción es 0 ó 1:

$$a_t = \mu(s_t)$$

Política estocástica

Distribución de probabilidades de todas las acciones posibles:

$$a_t \sim \pi(\cdot\,|s_t)$$

En ambos casos se cumple que:

$$\sum_{a \in \mathcal{A}(s)} \pi(s|a) = 1$$

Tipos de políticas

Política determinista

La probabilidad de tomar una acción es 0 ó 1:

$$a_t = \mu(s_t)$$

Política estocástica

Distribución de probabilidades de todas las acciones posibles:

$$a_t \sim \pi(\cdot \mid s_t)$$

En ambos casos se cumple que:

$$\sum_{a \in \mathcal{A}(s)} \pi(s|a) = 1$$

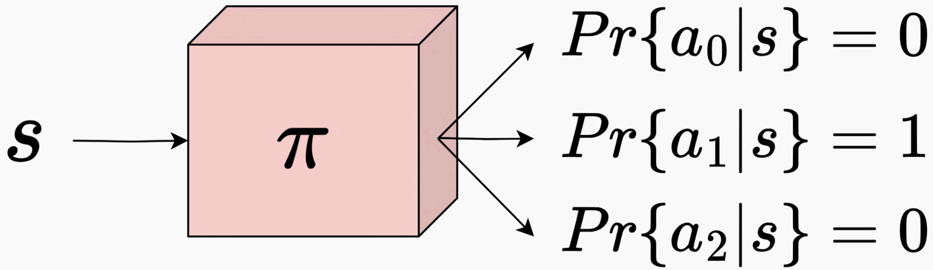
Por simplicidad, emplearemos indistintamente $\boldsymbol{\pi}$ para ambos tipos de políticas.

Tipos de políticas

Política determinista

La probabilidad de tomar una acción es 0 ó 1:

$$\pi(a \mid s) \in \{0, 1\}$$

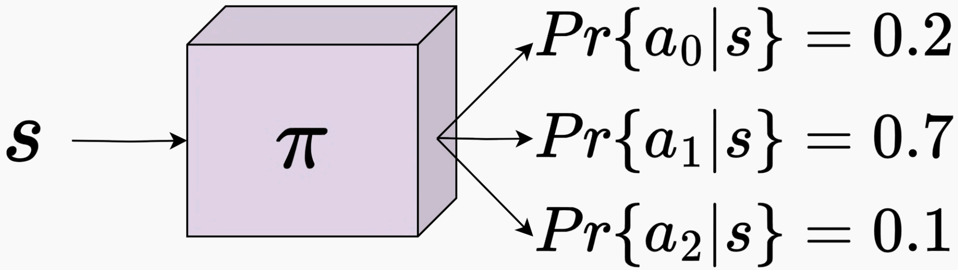


Tipos de políticas

Política estocástica

Distribución de probabilidades de todas las acciones posibles:

$$\pi(a \mid s) \in [0, 1]$$



Políticas estocásticas

Política categórica

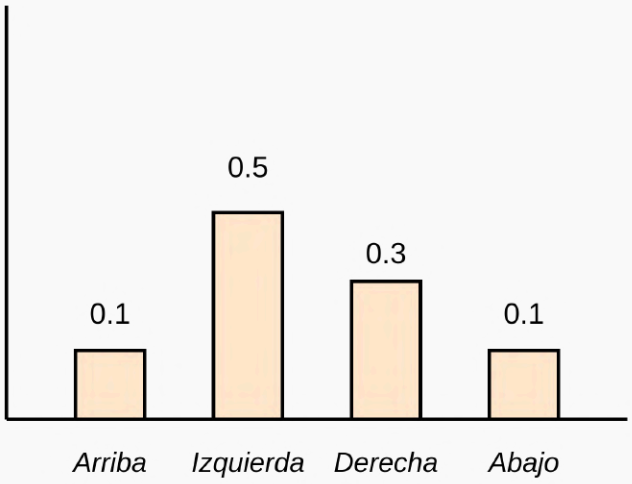
Selecciona acciones de una distribución categórica.

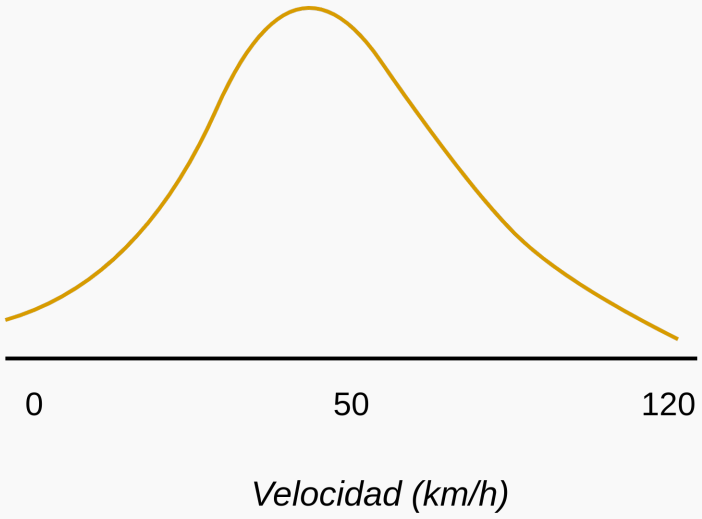
- Se emplea en **espacios de acciones discretos.**

Política gaussiana

Muestrea acciones de una distribucción gaussiana.

- Se emplea en **espacios de acciones continuos.**





Pregunta...

¿Alternar entre acciones (ej. $a_0, a_1, a_2, a_0, a_1, a_2, \ldots$) sería una ***política*** *válida?*

Pregunta...

¿Alternar entre acciones (ej. $a_0, a_1, a_2, a_0, a_1, a_2, \ldots$*) sería una* ***política*** *válida?*

⚠ **NO**, porque se incumple la propiedad de Markov.

Aprendizaje de la política óptima

Nuestro objetivo es hacer que el agente aprenda una **política de comportamiento óptima** que le permita alcanzar sus objetivos ...

... y, por tanto, maximizar la recompensa acumulada (retorno).

Esto se traduce en asignar una mayor probabilidad a aquellas acciones que conduzcan a una mayor recompensa a largo plazo.

Para guiar al agente en el proceso de aprendizaje empleamos **funciones de valor**.

Funciones de valor y optimalidad

Funciones de valor

Utilizamos **funciones de valor** para evaluar la *calidad* de estados y acciones.

FUNCIÓN ESTADO-VALOR

$$v_\pi(s) = \mathbb{E}\left[G_t | S_t = s\right]$$

Retorno esperado *al visitar el estado s y seguir una política π.*

FUNCIÓN ACCIÓN-VALOR

$$q_\pi(s, a) = \mathbb{E}\left[G_t | S_t = s, A_t = a\right]$$

Retorno esperado *al realizar la acción a desde el estado s y seguir una política π.*

Funciones de valor

Si desarrollamos estas fórmulas tenemos:

$$v_\pi(s) = \mathbb{E}_\pi\left[G_t \mid S_t = s\right] = \mathbb{E}_\pi\left[\sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k R_{t+k+1} \mid S_t = s\right]$$

$$q_\pi(s, a) = \mathbb{E}_\pi\left[G_t \mid S_t = s, A_t = a\right] = \mathbb{E}_\pi\left[\sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k R_{t+k+1} \mid S_t = s, A_t = a\right]$$

- *Suma de las recompensas descontadas desde t en adelante.*

Pregunta...

*¿Cuál es la diferencia entre **valor** y **recompensa**?*

Pregunta...

*¿Cuál es la diferencia entre **valor** y **recompensa**?*

- Recompensa → es una señal **inmediata** que el agente recibe después de realizar una acción o transicionar a un estado.
- Valor → es una estimación de las **recompensas** a obtener a largo plazo (*retorno*).

Ecuaciones de Bellman

Ecuación de Bellman para v_π

La **ecuación de Bellman** para v_π es la *definición recursiva* de la función estado-valor:

$$
\begin{aligned}
v_\pi(s) &= \mathbb{E}_\pi\big[G_t | S_t = s\big] \\
&= \mathbb{E}_\pi\big[R_{t+1} + \gamma G_{t+1} \mid S_t = s\big] \\
&= \sum_a \pi(a|s) \sum_{s',r} p(s', r|s, a)\big[r + \gamma v_\pi(s')\big]
\end{aligned}
$$

Ecuación de Bellman para v_π

La **ecuación de Bellman** para v_π es la *definición recursiva* de la función estado-valor:

$$\begin{aligned} v_\pi(s) &= \mathbb{E}_\pi\left[G_t | S_t = s\right] \\ &= \mathbb{E}_\pi\left[R_{t+1} + \gamma G_{t+1} \mid S_t = s\right] \\ &= \underbrace{\sum_a \pi(a|s)}_{\text{Probabilidad de elegir cada acción}} \underbrace{\sum_{s',r} p(s', r|s, a)}_{\text{Probabilidad de transición}} \underbrace{\left[r + \gamma v_\pi(s')\right]}_{\text{Recompensa inmediata + futura descontada}} \end{aligned}$$

Si el problema es determinista, $\sum_{s',r} p(s', r|s, a)$ se elimina de la ecuación de Bellman.

Ecuación de Bellman para v_π

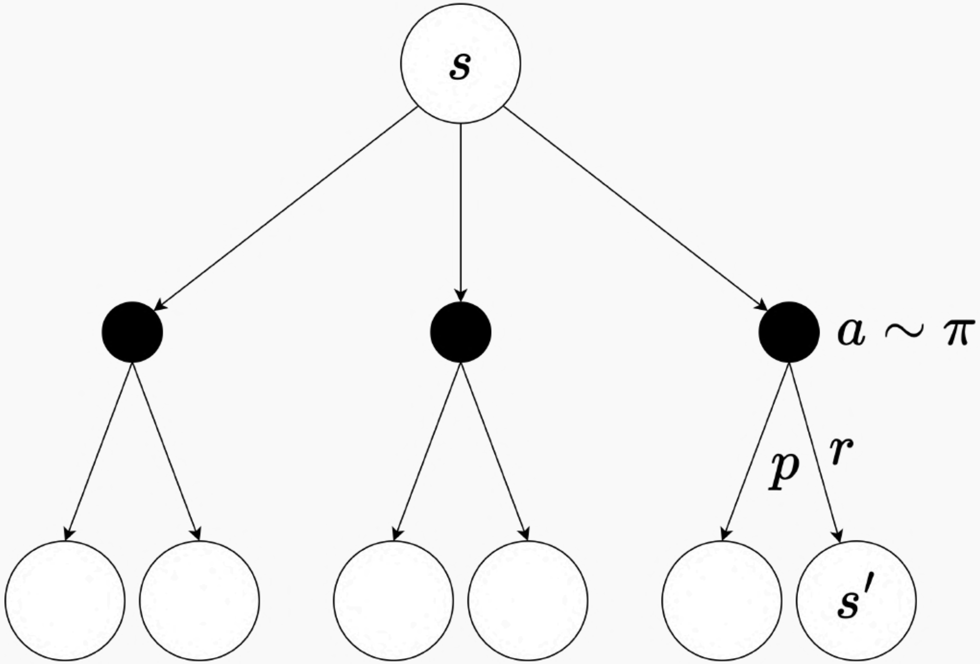
La **ecuación de Bellman** tiene en cuenta todas las probabilidades de transición, ponderando las recompensas obtenibles por su probabilidad.

$$
\begin{aligned}
v_{\pi(s)} &= \mathbb{E}_\pi\left[G_t | S_t = s\right] \\
&= \mathbb{E}_\pi\left[R_{t+1} + \gamma G_{t+1} \mid S_t = s\right] \\
&= \sum_a \pi(a|s) \sum_{s',r} p(s', r|s, a)\left[r + \gamma v_\pi(s')\right]
\end{aligned}
$$

Diagrama *backup* para v_π

Los diagramas *backup* representan cómo se transfiere la información sobre los valores desde estados sucesores hasta el estado actual.

- Similar para pares *acción-estado*.



Ecuación de Bellman para q_π

De forma análoga, esta es la **definición recursiva** de la función acción-valor:

$$
\begin{aligned}
q_\pi(s,a) &= \mathbb{E}_\pi\big[G_t | S_t = s, A_t = a\big] \\
&= \sum_{s',r} p(s',r|s,a)\big[r + \gamma \mathbb{E}_\pi\big[G_{t+1} \mid S_{t+1} = s'\big]\big] \\
&= \sum_{s',r} p(s',r|s,a)\left[r + \gamma \sum_{a'} \pi(a'|s')q_\pi(s',a')\right]
\end{aligned}
$$

Ecuación de Bellman para q_π

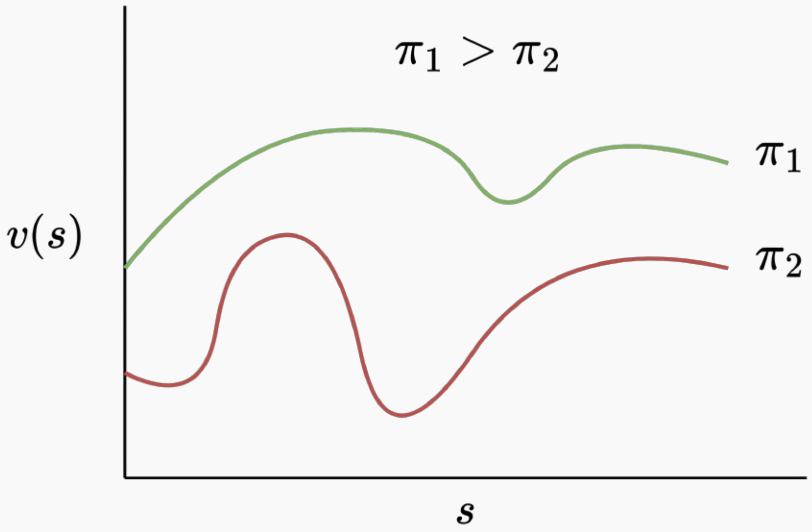
De forma análoga, esta es la **definición recursiva** de la función acción-valor:

$$
\begin{aligned}
q_\pi(s,a) &= \mathbb{E}_\pi\left[G_t | S_t = s, A_t = a\right] \\
&= \sum_{s',r} p(s',r|s,a)\left[r + \gamma \mathbb{E}_\pi\left[G_{t+1} \mid S_{t+1} = s'\right]\right] \\
&= \underbrace{\sum_{s',r} p(s',r|s,a)}_{\text{Probabilidades de transición (dependiente del entorno)}} \left[\underbrace{r}_{\text{Recompensa inmediata}} + \underbrace{\gamma \sum_{a'} \pi(a'|s') q_\pi(s',a')}_{\text{Recompensa futura, ponderada por la prob. de cada acción}} \right]
\end{aligned}
$$

Políticas y funciones de valor

Podemos comparar políticas y establecer un orden entre ellas empleando las funciones de valor:

$$\pi \geq \pi' \iff v_{\pi}(s) \geq v_{\pi'}(s), \quad \forall s \in \mathcal{S}$$



Políticas óptimas

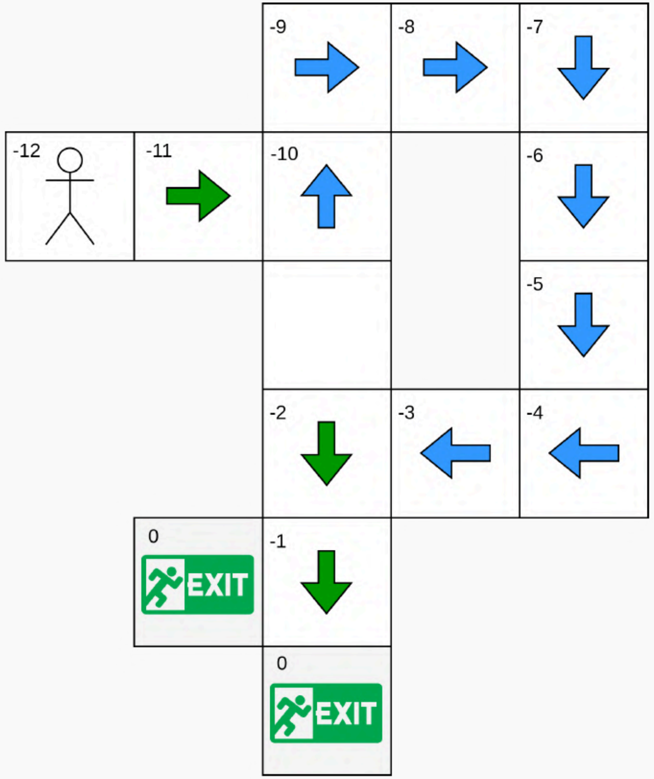
Siempre existirá, al menos, una política mejor que cualquier otra, denominada **política óptima**, π^*.

> ⚠ Puede haber más de una política óptima.

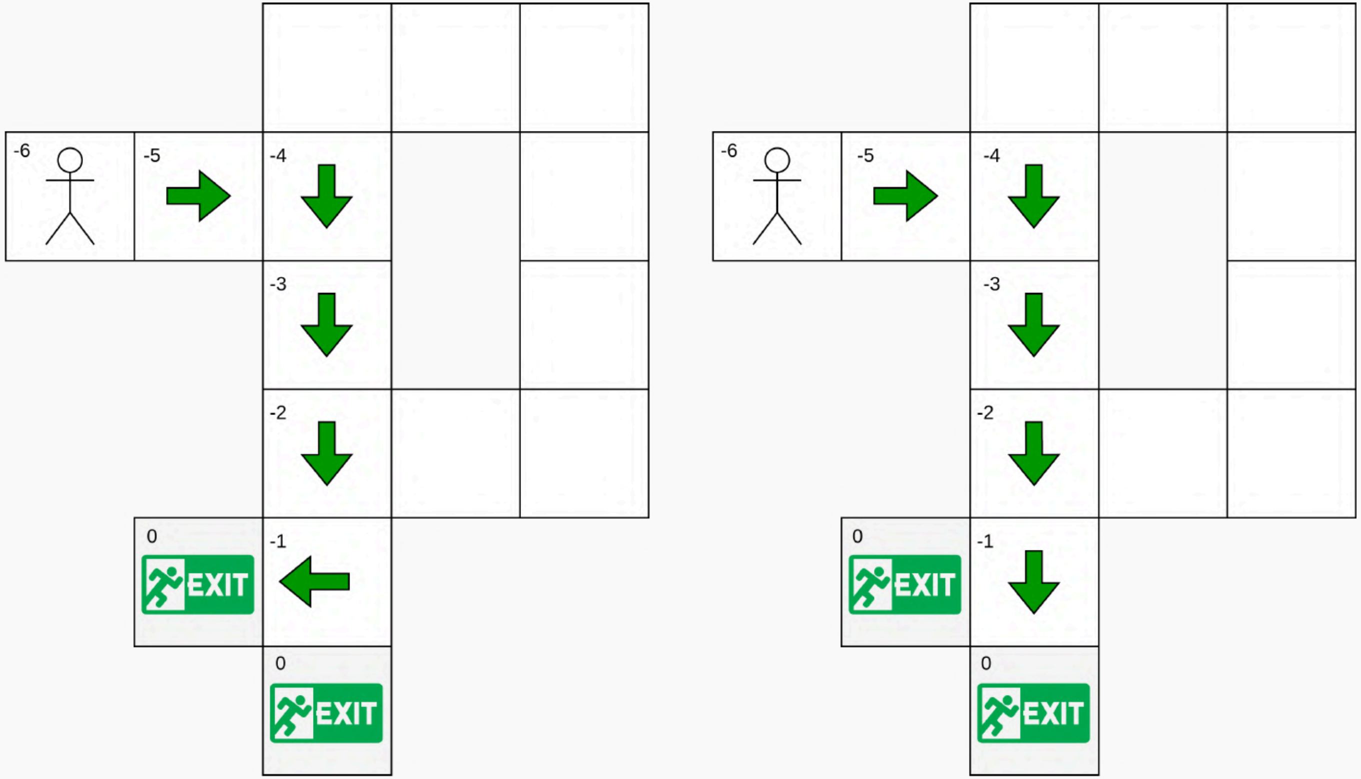
Las políticas óptimas comparten la misma **función estado-valor óptima** v^*:

$$v^*(s) = \max_{\pi} v_{\pi}(s), \quad \forall s \in \mathcal{S}$$

- La función estado-valor óptima es la función estado-valor con el valor más alto entre todas las políticas.
- La función estado-valor óptima es **única**.



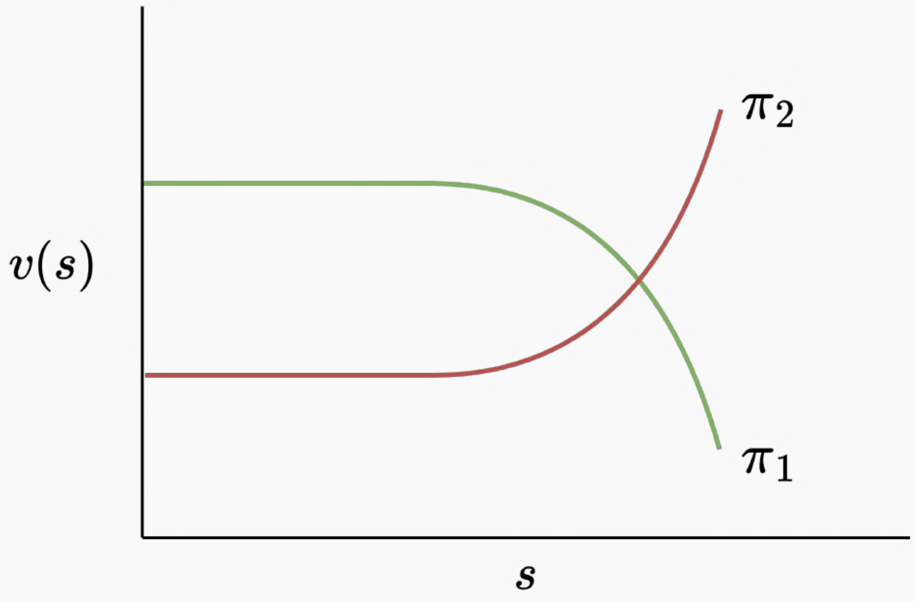
Política subóptima asociada a una función *estado-valor* que no es óptima para todos los estados.

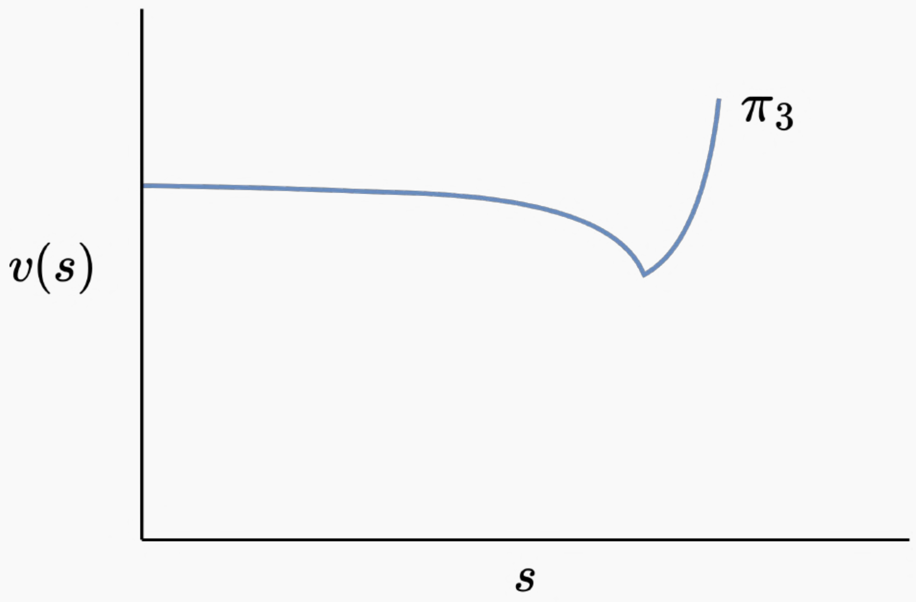


Diferentes **políticas óptimas** asociadas a la misma **función *estado-valor* óptima**.

Combinación de políticas

Podemos **combinar** políticas subóptimas para formar políticas mejores:





No es necesario hacer sacrificios en determinados estados tomando acciones subóptimas.

Función acción-valor óptima

Las políticas óptimas también comparten la misma **función *acción-valor* óptima**:

$$q^*(s,a) = \max_\pi q_\pi(s,a), \quad \forall s \in \mathcal{S}, a \in \mathcal{A}$$

También podemos definir q^* en términos de v^* tal que:

$$q^*(s,a) = \mathbb{E}\left[R_{t+1} + \gamma v^*\left(S_{t+1}\right) \mid S_t = s, A_t = a\right]$$

q^* asocia a cada par acción-estado una recompensa esperada igual a la recompensa inmediata + recompensa (descontada) futura de acuerdo a la función de valor óptima v^*.

Ecuaciones de optimalidad de Bellman

Ecuación de optimalidad de Bellman para v^*

La **función *estado-valor* óptima** v^* puede definirse tal que:

$$
\begin{aligned}
v^*(s) &= \max_{a \in \mathcal{A}(s)} q_{\pi^*}(s, a) \\
&= \max_a \mathbb{E}\left[R_{t+1} + \gamma v^*\left(S_{t+1}\right) \mid S_t = s, A_t = a\right] \\
&= \max_a \sum_{s', r} p(s', r | s, a)[r + \gamma v^*(s')]
\end{aligned}
$$

El valor óptimo de un estado será aquel asociado a seguir una acción óptima desde este en adelante.

Ecuación de optimalidad de Bellman para v^*

La **función *estado-valor* óptima** v^* puede definirse tal que:

$$
\begin{aligned}
v^*(s) &= \max_{a \in \mathcal{A}(s)} q_{\pi^*}(s, a) \\
&= \max_a \mathbb{E}\left[R_{t+1} + \gamma v^*\left(S_{t+1}\right) \mid S_t = s, A_t = a\right] && \text{(Eq. 1)} \\
&= \max_a \sum_{s', r} p(s', r | s, a)[r + \gamma v^*(s')] && \text{(Eq. 2)}
\end{aligned}
$$

El valor óptimo de un estado será aquel asociado a seguir una acción óptima desde este en adelante.

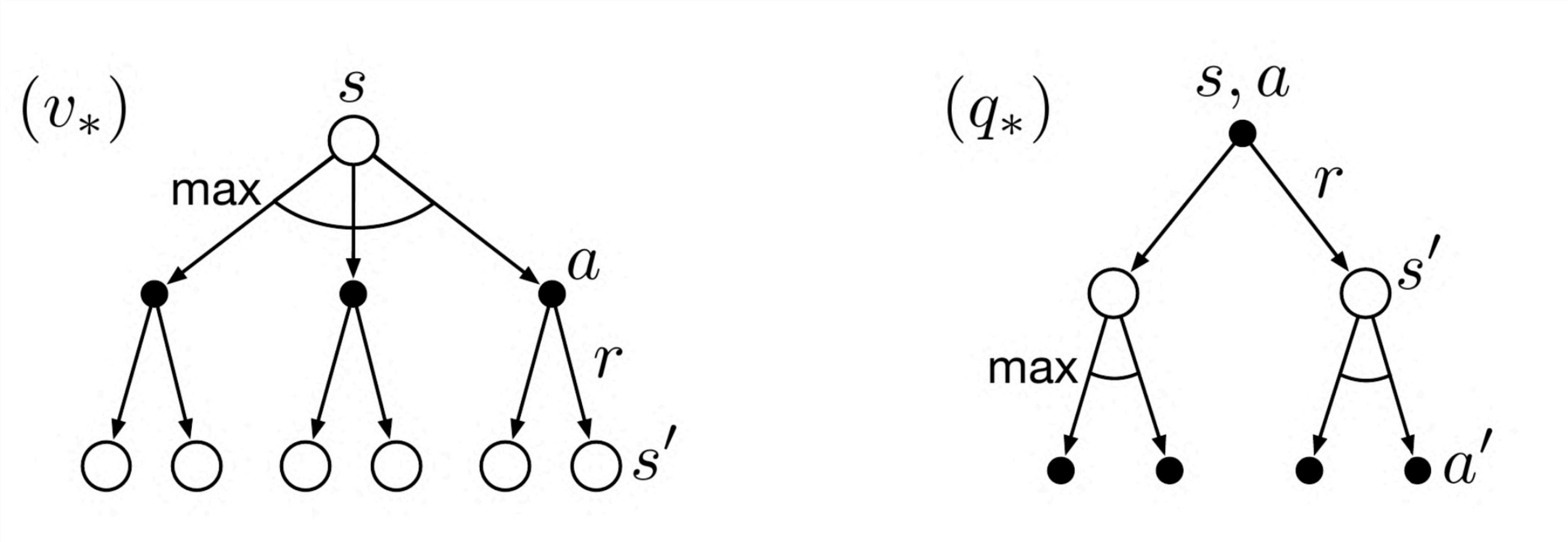
Ecuación de optimalidad de Bellman para v^*

La **función de *acción-valor* óptima** q^* puede definirse tal que:

$$q^*(s,a) = \mathbb{E}\left[R_{t+1} + \gamma \max_{a'} q^*\left(S_{t+1}, a'\right) \mid S_t = s, A_t = a\right]$$

$$= \sum_{s',r} p(s', r | s, a)\left[r + \gamma \max_{a'} q^*(s', a')\right]$$

Diagramas *backup* para ecuaciones de optimalidad



Obtención de la política óptima

Conociendo v^* podemos extraer fácilmente la política óptima, ya que cualquier política que actúa de forma *greedy* con respecto a v^* es óptima:

1. Examinar el valor de los sucesores de s.
2. Transición al s' de mayor valor (asumiendo que v^* es óptima).

Conocer q^* hace que el proceso de obtención de la política óptima sea incluso más sencillo:

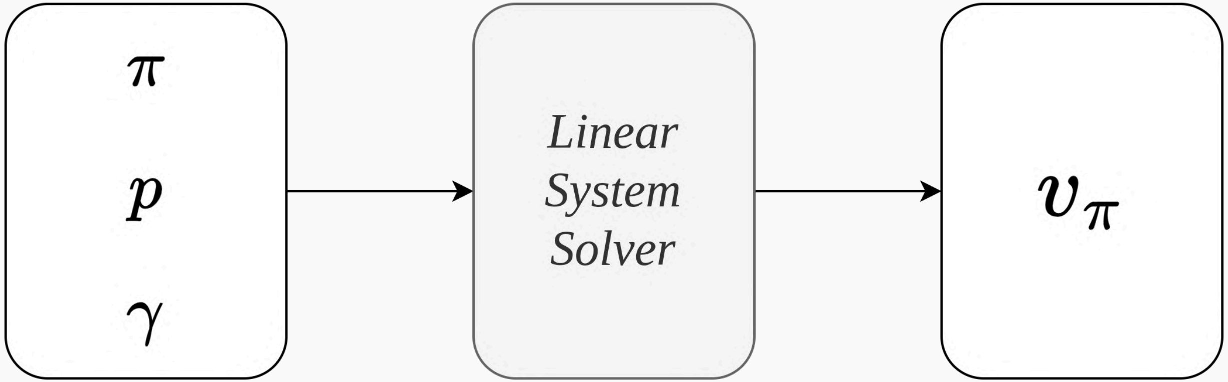
1. Para cualquier estado s, se emplea la acción que maximice $q^*(s, a)$.

Resolución de las ecuaciones de optimalidad de Bellman

En MDPs finitos, las ecuaciones de optimalidad de Bellman tienen soluciones únicas.

- Definimos una ecuación por estado.
- Dados n estados, tenemos n ecuaciones lineales y, por tanto, n incógnitas.

La resolución del sistema de ecuaciones nos permite obtener la **política óptima**.



Resolución de las ecuaciones de optimalidad de Bellman

No obstante, esto implica dar por supuestos tres aspectos fundamentales que rara vez se dan en la práctica:

1. Conocimiento preciso/completo de las **dinámicas del entorno**.
2. **Recursos computacionales** suficientes para calcular la solución.
3. El cumplimiento de la **propiedad de Markov**.

Esto motiva el uso de métodos alternativos basados en la aproximación de la solución.

Resolución de las ecuaciones de optimalidad de Bellman

A pesar de que se cumpliesen las condiciones:

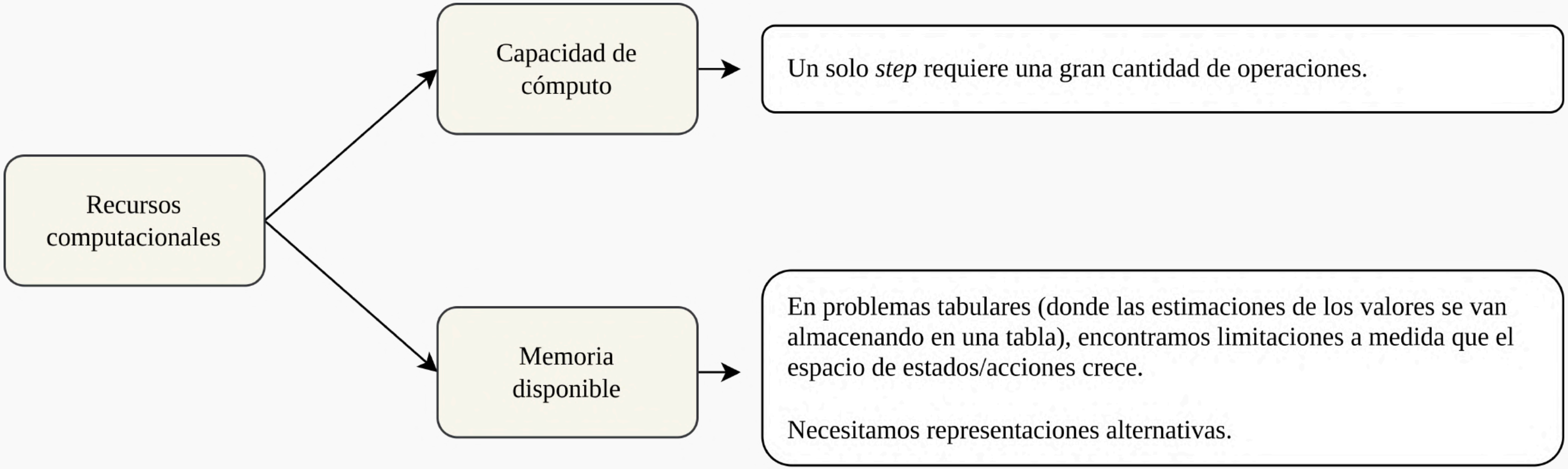
1. Conocimiento preciso/completo de las **dinámicas del entorno.** ☑
3. El cumplimiento de la **propiedad de Markov.** ☑

normalmente no es posible lidiar con:

2. **Recursos computacionales** suficientes para calcular la solución. ☒

especialmente en problemas complejos con un gran número de estados/acciones.

Resolución de las ecuaciones de optimalidad de Bellman



Sería deseable que el agente sacrificase cierta precisión en situaciones poco frecuentes, y la mejorase en aquellos casos más comunes.

Trabajo propuesto

Trabajo propuesto

- Leer sobre otros tipos de **MDPs** / **POMDPs** y conocer sus diferencias.
- Familiarización con la API de **Gymnasium**:
  - https://gymnasium.farama.org/
  - Implementación de un **agente aleatorio** sobre un entorno de ejemplo.
  - Implementación de un **agente basado en reglas** sobre el mismo entorno.
- **Resolver** un MDP sencillo mediante un **sistema de ecuaciones** lineal.
- **Función de ventaja** (*advantage function*):
  - ¿Qué es?
  - ¿En qué se diferencia de las funciones de valor estudiadas?

Bibliografía y vídeos:

- https://youtu.be/lfHX2hHRMVQ?si=2jR4HI72ReErh7rb
- https://web.stanford.edu/class/cme241/lecture_slides/david_silver_slides/MDP.pdf

Procesos de decisión de Markov

Procesos de decisión de Markov

Antonio Manjavacas Lucas

manjavacas@ugr.es