

APRENDIZAJE POR REFUERZO

Procesos de decisión de Markov

Antonio Manjavacas

manjavacas@ugr.es

CONTENTS

1. Búsqueda asociativa
2. Procesos de decisión de Markov
3. Problemas episódicos y continuados
4. Objetivos y recompensas
5. Políticas
6. Funciones de valor
7. Trabajo propuesto

Hasta ahora, nos hemos centrado en **problemas no asociativos**:

- Problemas en los que *no asociamos* diferentes acciones a diferentes situaciones.
- El objetivo es encontrar la mejor acción si el problema es **estacionario**, o buscarla directamente si es **no-estacionario**.

No obstante, en problemas de RL más complejos, pueden darse diferentes situaciones donde **el valor de una acción varía dependiendo del estado actual del agente**.

Es lo que denominamos un problema de **búsqueda asociativa**.

BÚSQUEDA ASOCIATIVA

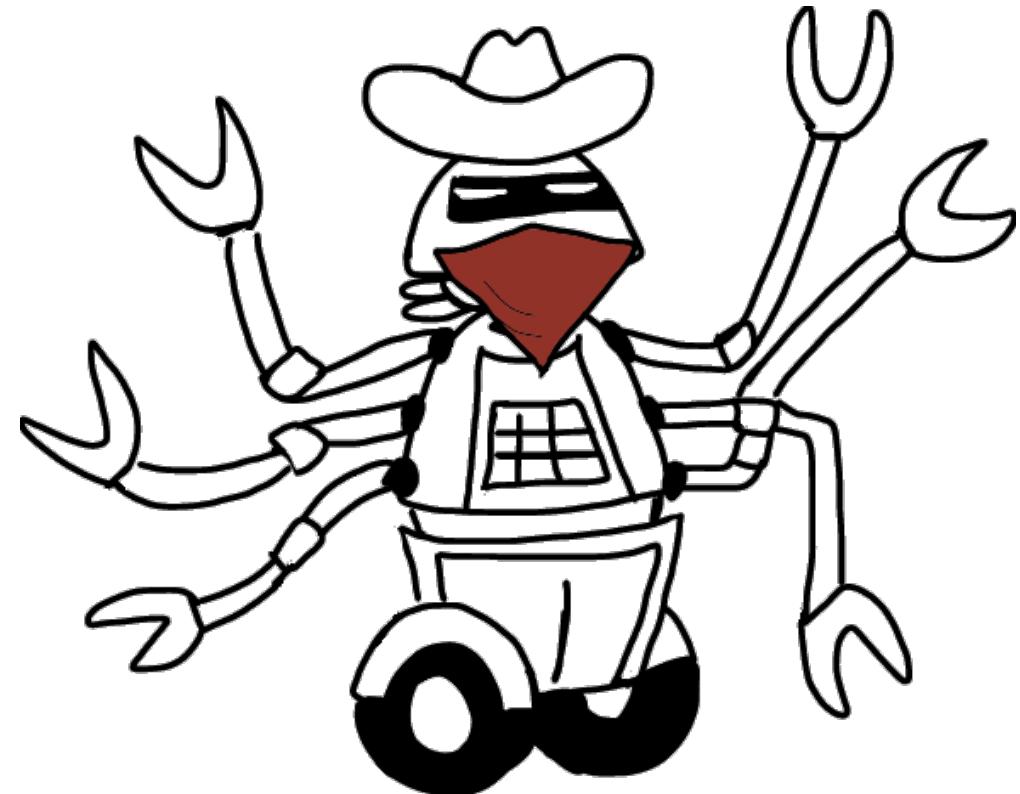
Problema de búsqueda asociativa

- **Búsqueda** basada en prueba y error para encontrar las mejores acciones.
- **Asociativa**, porque trata de asociar a cada situación (estado) la mejor acción disponible.

Elegir la mejor acción para cada estado, a partir de prueba y error.

A los problemas de búsqueda asociativa también se les denomina **contextual bandits** (*bandits* con contexto).

- El objetivo es aprender una **política** de comportamiento que mapee cada **situación** con la mejor **acción** posible.
- Los problemas de búsqueda asociativa/*contextual bandits* se encuentran a medio camino entre *K-armed bandits* y los problemas de RL «completos».



Problema	Características
<i>K-armed bandits</i>	<ul style="list-style-type: none">• Elegimos una acción en cada instante de tiempo.• Buscamos maximizar la recompensa acumulada a lo largo del tiempo.• El valor de las acciones puede ser siempre el mismo (problema estacionario) o variar a lo largo del tiempo (problema no-estacionario).
<i>Contextual bandits</i>	<ul style="list-style-type: none">• Podemos encontrarnos en diferentes situaciones/contextos que harán variar el valor de cada acción.• Buscamos aprender a tomar la mejor decisión para cada situación, maximizando las recompensas a largo plazo.
<i>RL completo</i>	<ul style="list-style-type: none">• Buscamos maximizar la recompensa en un ambiente desconocido.• Las acciones afectan, no sólo a las recompensas inmediatas, sino también al estado del entorno, que a su vez repercute en las recompensas futuras.• Generalmente entornos estocásticos, no estacionarios y con grandes espacios de estados y acciones.

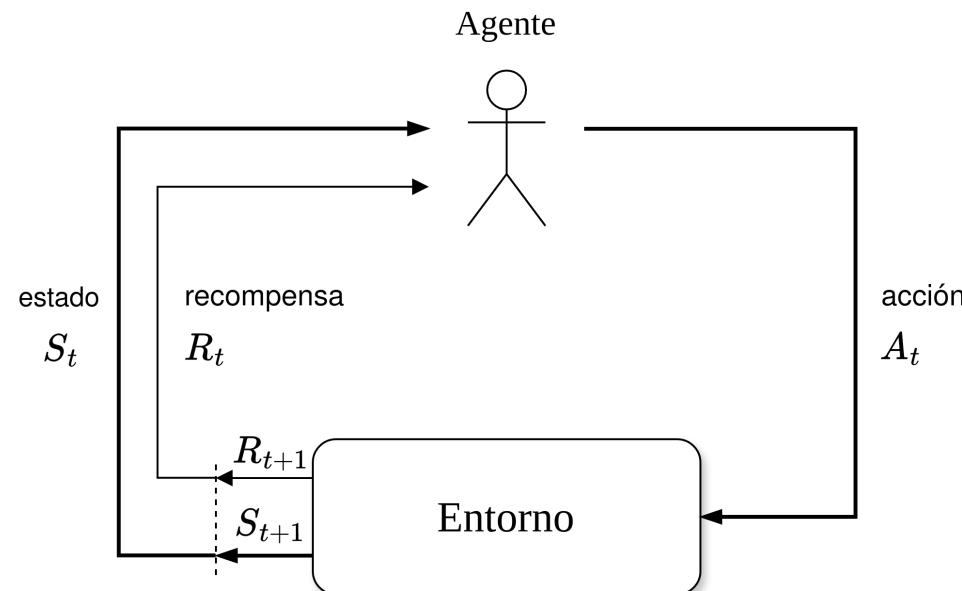
Un ejemplo...

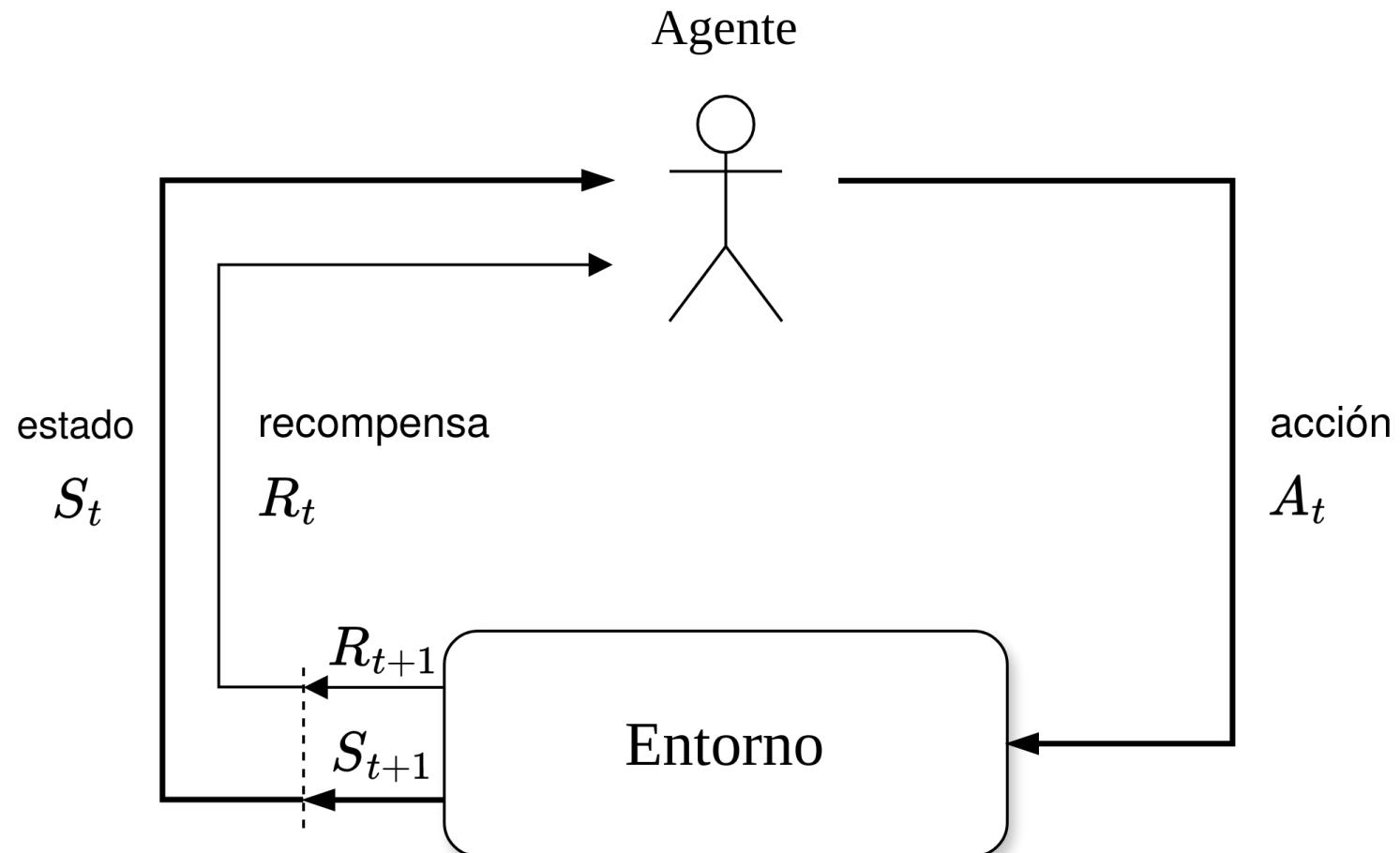
Problema	Características
<i>K-armed bandits</i>	<ul style="list-style-type: none">• Cada producto a anunciar constituye una acción.• En cada instante de tiempo, el agente selecciona el producto a publicitar, y recibe una recompensa positiva si el usuario hace <i>click</i>.
<i>Contextual bandits</i>	<ul style="list-style-type: none">• Añadimos contexto: información sobre el usuario, edad, género, historial de búsqueda, etc.• Las recompensas también varían dependiendo del usuario que haga <i>click</i> sobre el anuncio.
<i>RL completo</i>	<ul style="list-style-type: none">• Las acciones ahora pueden repercutir en el entorno y recompensas futuras.• Por ejemplo, mostrar un anuncio de forma repetitiva puede molestar al usuario y hacer que abandone el sitio web, evitando que vuelva a hacer <i>click</i> en cualquier otro anuncio.

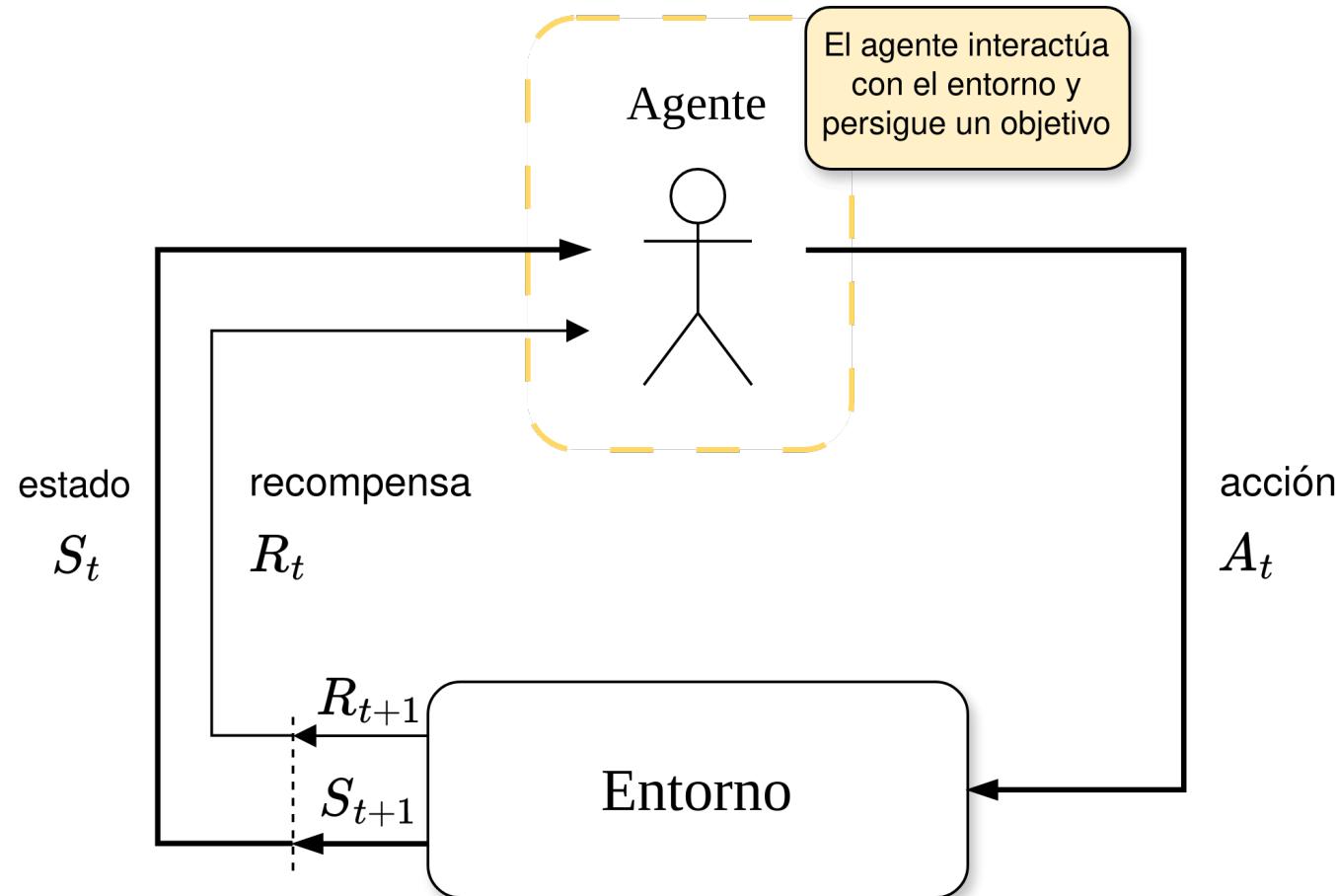
PROCESOS DE DECISIÓN DE MARKOV

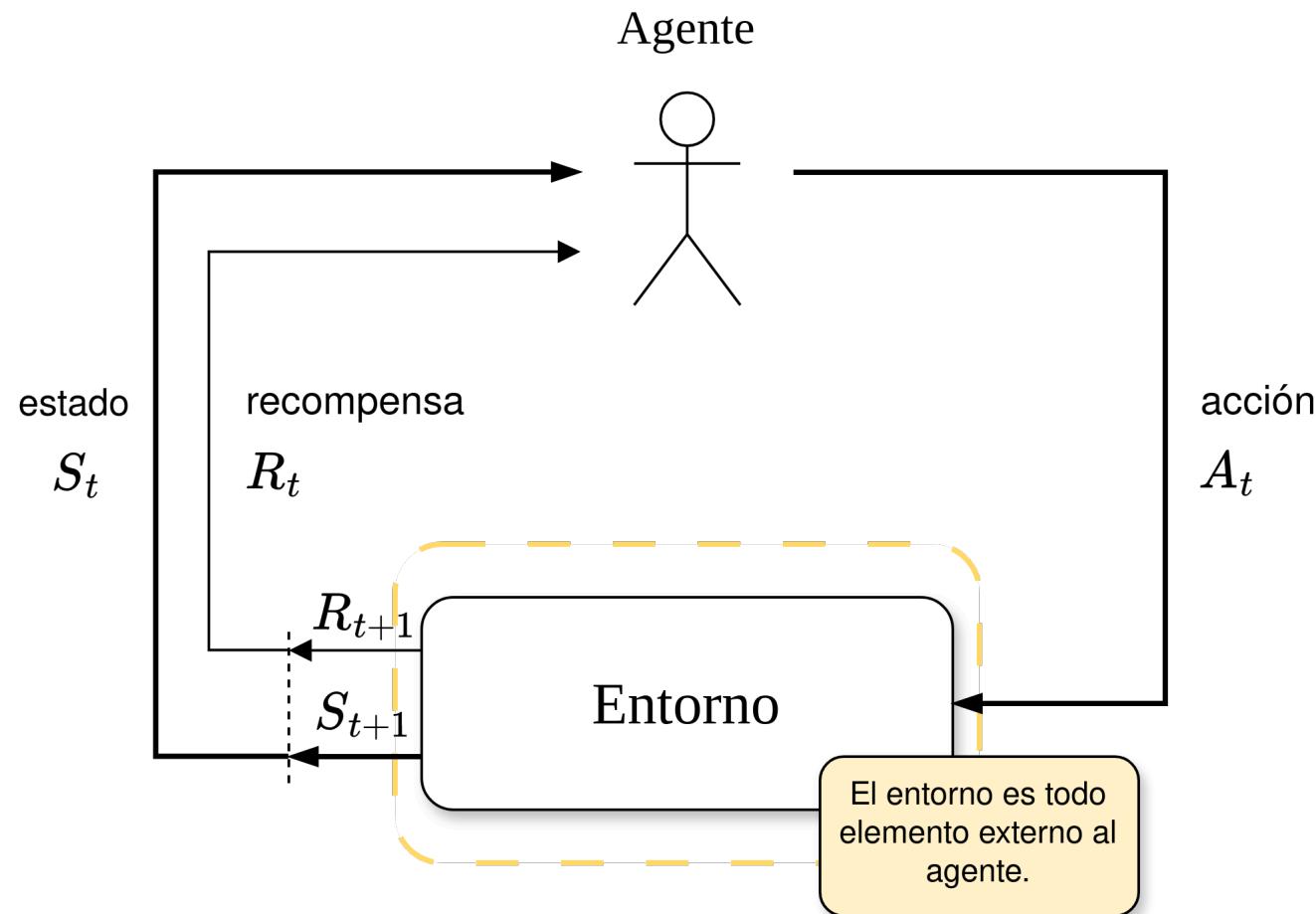
El marco formal empleado para definir problemas de aprendizaje por refuerzo «completos» es el de **proceso de decisión de Markov (MDP)**.

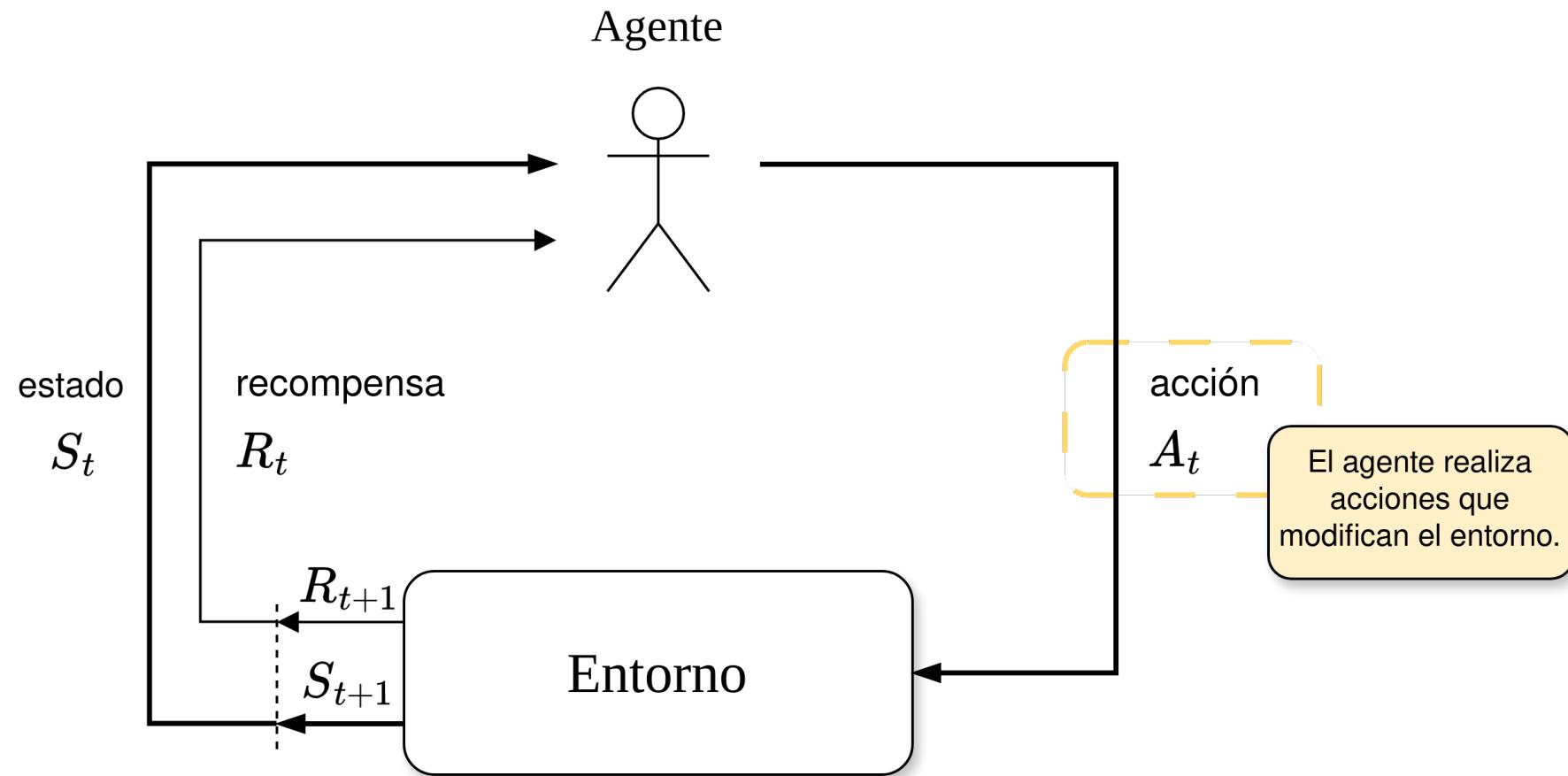
La interacción **agente-entorno** en un problema de RL puede representarse como un MDP finito de la siguiente manera:

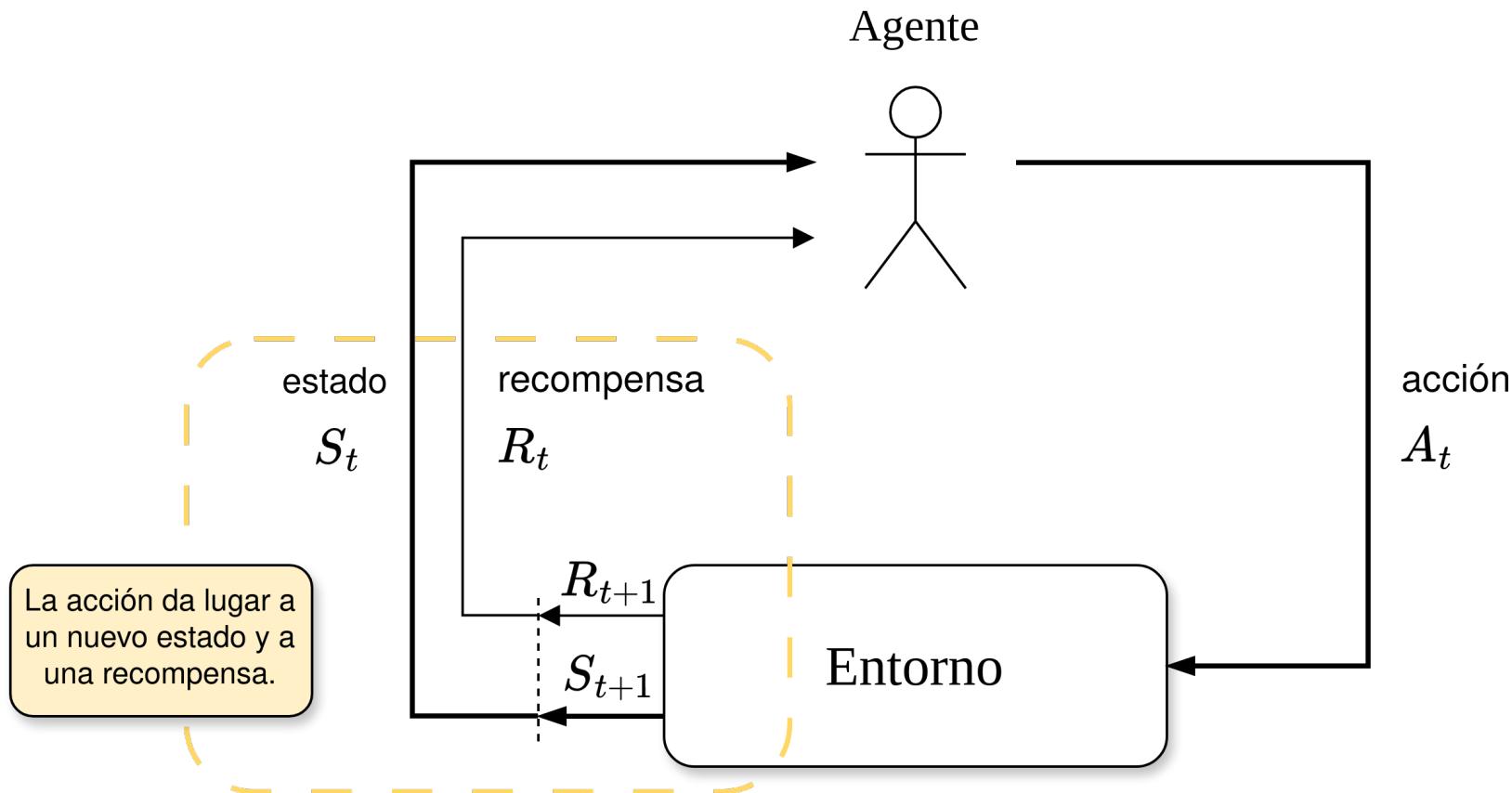


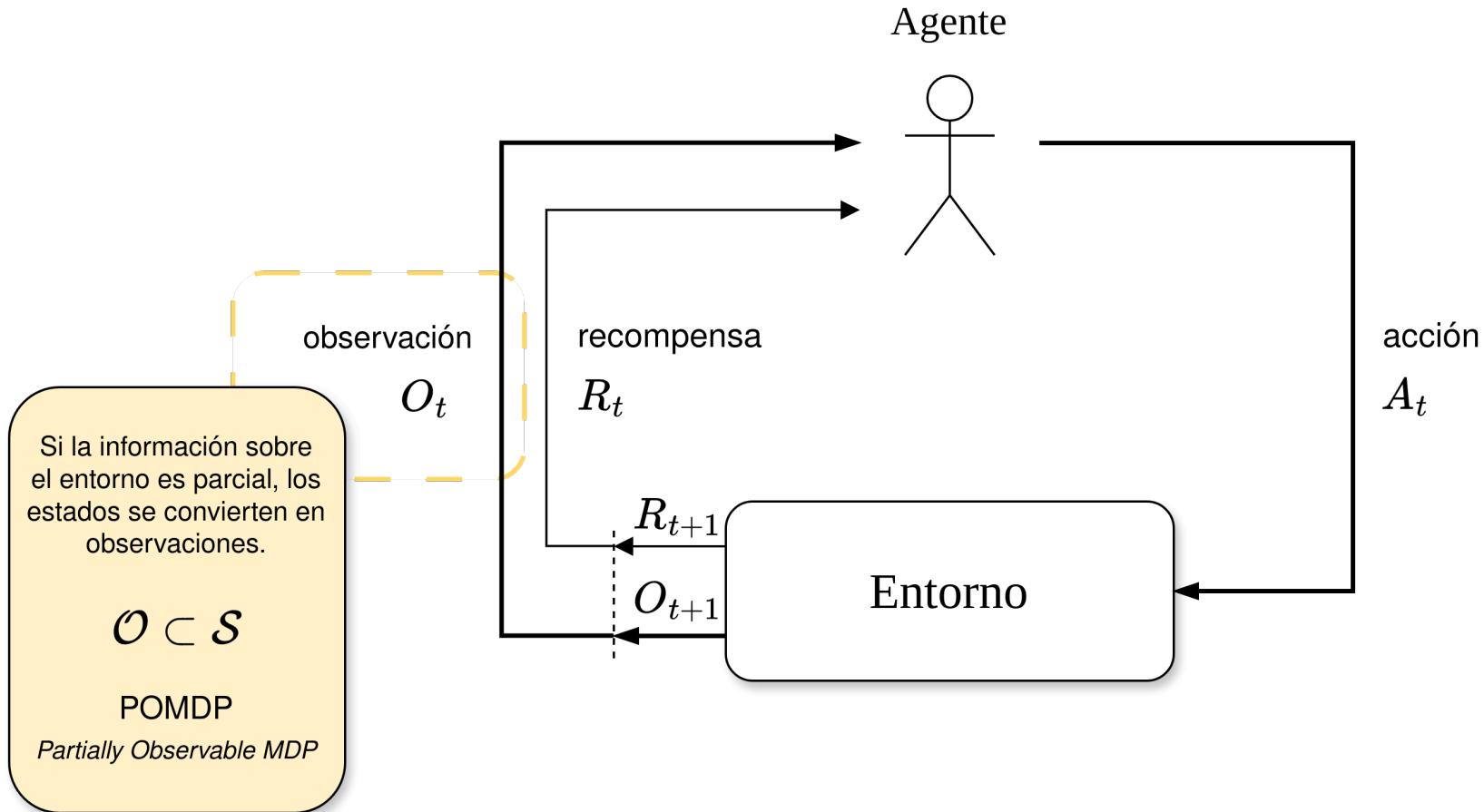












Un proceso de decisión de Markov se define como una 5-tupla: $\langle \mathcal{S}, \mathcal{A}, \mathcal{P}, \mathcal{R}, \gamma \rangle$.

- \mathcal{S} es el **espacio de estados**. Contiene el conjunto de estados posibles.
- \mathcal{A} es el **espacio de acciones** (conjunto de posibles acciones). Si las acciones disponibles dependen del estado $s \in \mathcal{S}$ actual, el conjunto se define como \mathcal{A}_s .
- \mathcal{P} es una función/matriz de probabilidad de transición entre estados.
- \mathcal{R} es la función de recompensa que valora las transiciones entre estados.
- γ es un factor de descuento. Veremos su utilidad más adelante.

El agente interactúa con el entorno a lo largo de una secuencia de pasos o **timesteps**.

En cada instante de tiempo:

1. El agente percibe el **estado actual** S_t y realiza una **acción** A_t .
2. El entorno se ve modificado por dicha acción.
3. El agente percibe el **nuevo estado** del entorno S_{t+1} y recibe una **recompensa** R_{t+1} .

Esta interacción da lugar a una secuencia de estados, acciones y recompensas denominada **trayectoria**:

$$\tau = \{S_0, A_0, R_1, S_1, A_1, R_2, \dots, S_{T-1}, A_{T-1}, R_T, S_T\}$$

En un **MDP finito**, los conjuntos \mathcal{S} (estados) y \mathcal{A} (acciones) **son finitos**.

R_t y S_t son variables aleatorias con distribuciones de probabilidad bien definidas, que solamente dependen del estado anterior S_{t-1} y de la acción realizada A_t .

Para todo $s' \in \mathcal{S}, r \in \mathcal{R}$, existe la probabilidad de que estos valores se den en un instante t dados unos valores particulares para $s \in \mathcal{S}$ y $a \in \mathcal{A}$:

$$p(s', r | s, a) = \mathbb{P}\{S_t = s', R_t = r \mid S_{t-1} = s, A_{t-1} = a\}$$

Esta función define las **dinámicas del MDP**:

$$p : \mathcal{S} \times \mathcal{R} \times \mathcal{S} \times \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$$

Se cumple que:

$$\sum_{s' \in \mathcal{S}, r \in \mathcal{R}} p(s', r | s, a) = 1, \forall s \in \mathcal{S}, a \in \mathcal{A}(s)$$

- En un MDP, las probabilidades de transición dependen únicamente del estado y acción inmediatamente previos (S_{t-1}, A_{t-1}) .
- Es decir, un estado S_t codifica *toda* la información referente a la interacción agente-entorno previa, y es la **única** información necesaria para elegir la acción a realizar.

Es lo que definimos como **PROPIEDAD DE MARKOV**.

Propiedad de Markov

El estado actual S_t en un MDP contiene toda la información relevante de los estados pasados $S_{t-1}, S_{t-2}, \dots, S_0$.

Por tanto, la transición a un nuevo estado S_{t+1} no requiere de información sobre los estados previos al estado actual:

$$\mathbb{P}[S_{t+1}|S_t] = \Pr[S_{t+1} | S_0, S_1, \dots, S_t]$$

El futuro es independiente del pasado, dado el presente.

La siguiente fórmula representa la **regla de transición** entre estados en un MDP:

$$p(s'|s, a) = \Pr\{S_t = s' \mid S_{t-1} = s, A_{t-1} = a\} = \sum_{r \in \mathcal{R}} p(s', r|s, a)$$

Proporciona la probabilidad de transicionar a s' partiendo de s y ejecutando a .

¿Por qué necesitamos saber las probabilidades de transición?

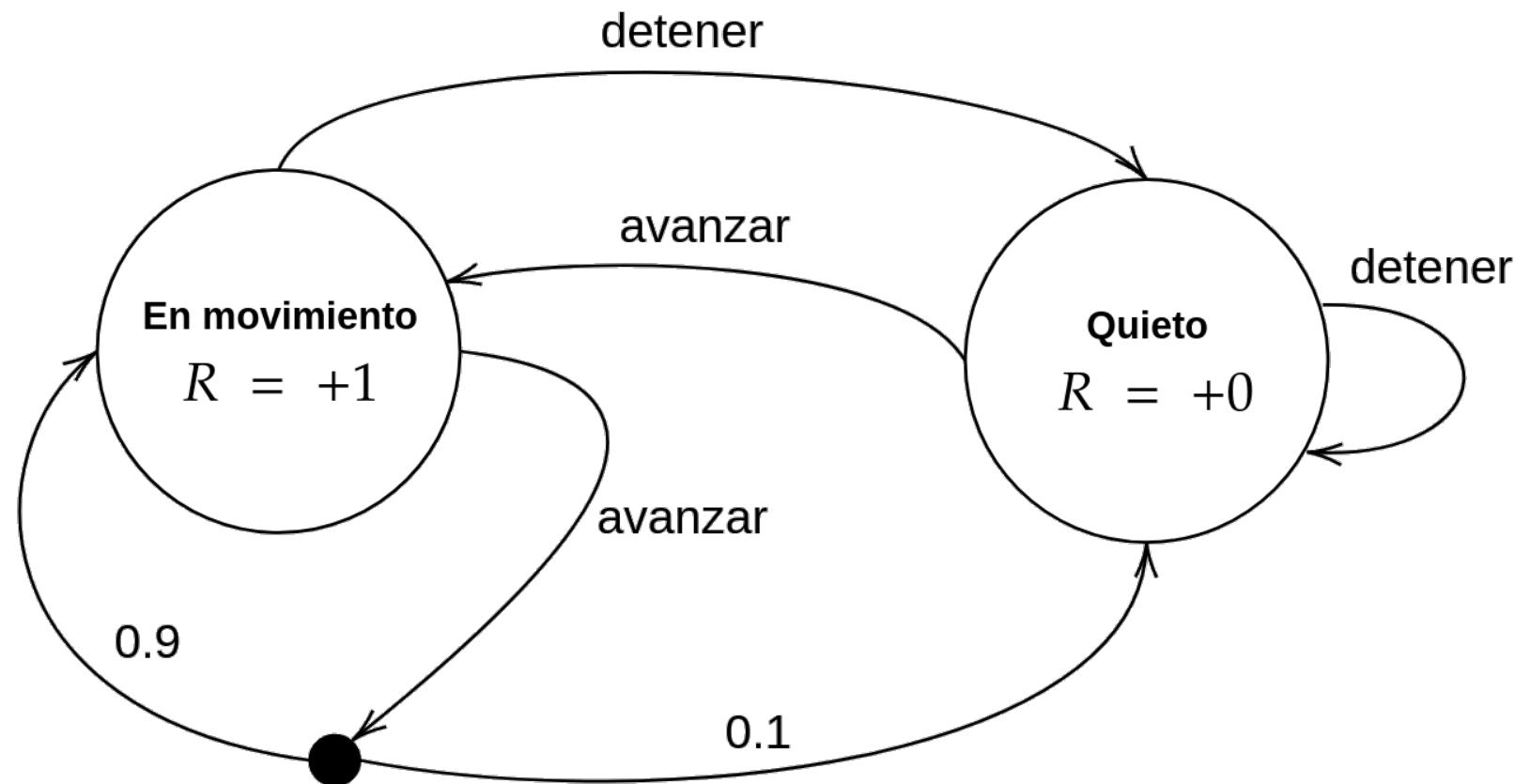
En problemas de RL **deterministas**, una acción a desde un estado s siempre conduce al mismo estado s' .

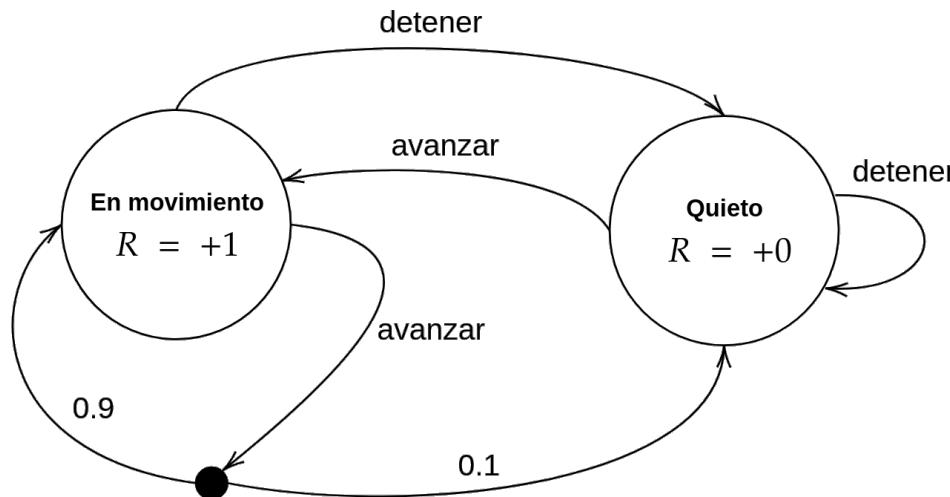
- Ej. ajedrez → reglas fijas.

Pero en problemas de RL **estocásticos**, la misma acción a puede llevar a diferentes estados s' .

- Ej. controlar la trayectoria de un dron → viento.

Un ejemplo...





$$\mathcal{S} = \{s_0, s_1\}$$

s_0 : en movimiento

s_1 : quieto

$$\mathcal{A} = \{a_0, a_1\}$$

a_0 : avanzar

a_1 : detener

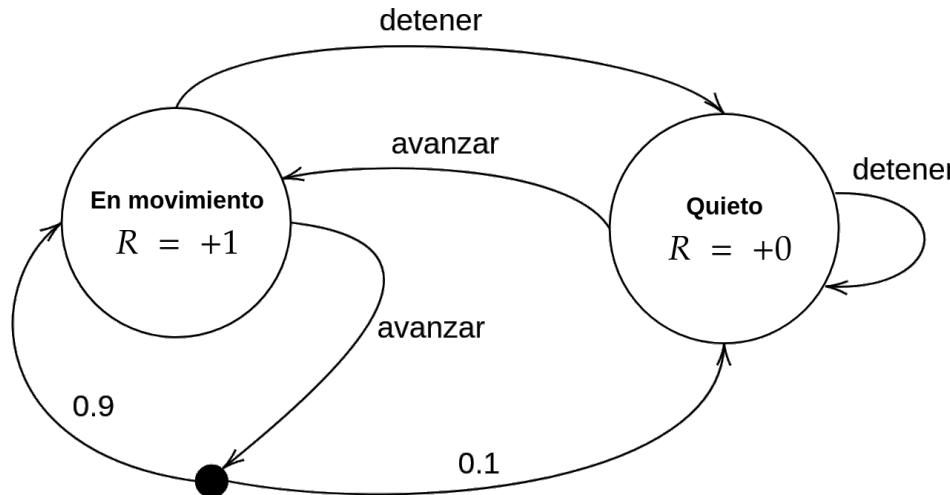
$$p(s_1, 0 \mid s_0, a_1) =$$

$$p(s_0 \mid s_0, a_0) =$$

$$p(s_1 \mid s_0, a_0) =$$

$$p(s_1, 1 \mid s_1, a_0) =$$

$$p(s_0, 1 \mid s_1, a_1) =$$



$$\mathcal{S} = \{s_0, s_1\}$$

s_0 : en movimiento

s_1 : quieto

$$\mathcal{A} = \{a_0, a_1\}$$

a_0 : avanzar

a_1 : detener

$$p(s_1, 0 \mid s_0, a_1) = 1$$

$$p(s_0 \mid s_0, a_0) = 0.9$$

$$p(s_1 \mid s_0, a_0) = 0.1$$

$$p(s_1, 1 \mid s_1, a_0) = 0$$

$$p(s_0, 1 \mid s_1, a_1) = 0$$

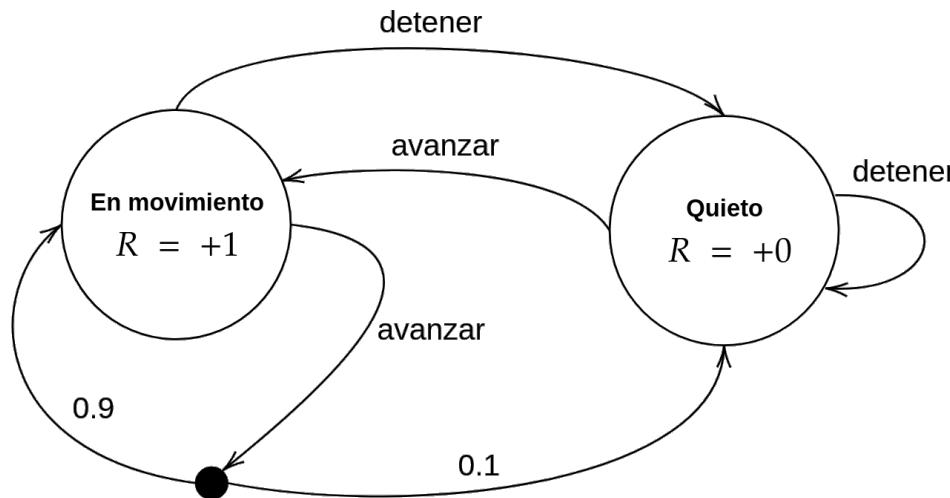
Propiedad de Markov: las transiciones sólo dependen del **estado actual** (y la **acción** realizada).

¿Qué **recompensa** podemos esperar de un par **acción-estado**?

$$r(s, a) = \mathbb{E}[R_t \mid S_{t+1} = s, A_{t-1} = a] = \sum_{r \in \mathcal{R}} r \sum_{s' \in \mathcal{S}} p(s', r \mid s, a)$$

¿Qué **recompensa** podemos esperar de una tripleta **estado-acción-estado**?

$$r(s, a, s') = \mathbb{E}[R_t \mid S_{t-1} = s, A_{t-1} = a, S_t = s'] = \sum_{r \in \mathcal{R}} r \frac{p(s', r \mid s, a)}{p(s' \mid s, a)}$$



$$\mathcal{S} = \{s_0, s_1\}$$

s_0 : en movimiento

s_1 : quieto

$$\mathcal{A} = \{a_0, a_1\}$$

a_0 : avanzar

a_1 : detener

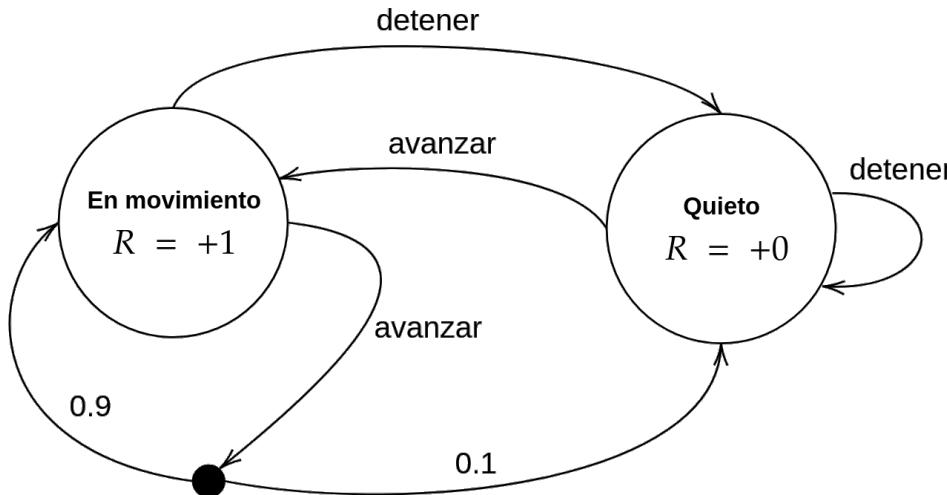
$$r(s_0, a_1) =$$

$$r(s_1, a_0) =$$

$$r(s_0, a_0) =$$

$$r(s_0, a_0, s_0) =$$

$$r(s_1, a_1, s_0) =$$



$$\mathcal{S} = \{s_0, s_1\}$$

s_0 : en movimiento

s_1 : quieto

$$\mathcal{A} = \{a_0, a_1\}$$

a_0 : avanzar

a_1 : detener

$$r(s_0, a_1) = 0$$

$$r(s_1, a_0) = 1$$

$$r(s_0, a_0) = (1 \cdot 0.9) + (0 \cdot 0.1) = 0.9$$

$$r(s_0, a_0, s_0) = 1$$

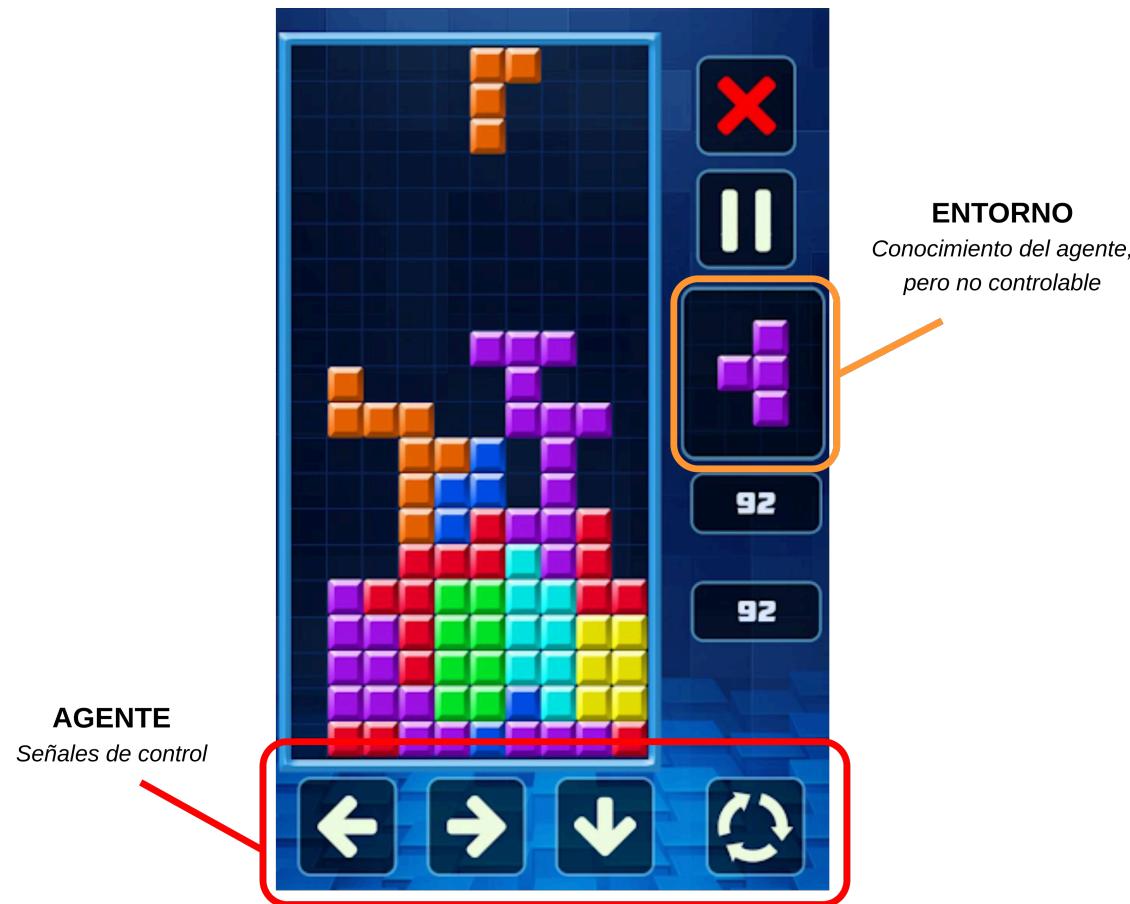
$$r(s_1, a_1, s_0) = ?$$

$$r(s, a, s') = \sum_{r \in \mathcal{R}} r \frac{p(s', r | s, a)}{\cancel{p(s' | s, a)}}$$

Algunas consideraciones...

Consideramos **entorno** a todo aquello sobre lo que el agente no tiene control.

La **frontera agente-entorno** viene dada por las capacidades de control del agente, no por su conocimiento.



Podemos resumir el **aprendizaje basado en interacción** en 3 señales:

1. **Acciones**: elecciones, control del agente.
2. **Estados**: información en base a dichas elecciones.
3. **Recompensas**: adecuación al objetivo.

El nivel de abstracción / complejidad de estados y acciones dependerá del problema a tratar.



Es común contar con **representaciones estructuradas** de estados y acciones (ej. vectores de valores).

$$S_t : \{M_t, \text{type}, \text{pos}, \text{next}, \text{score}\}$$

- M_t : matriz con posiciones libres (0) u ocupadas (1)
- type : pieza actual
- pos : posición de la pieza actual
- next : próxima pieza
- score : puntuación acumulada

$$\mathcal{A} : \{0 : \leftarrow, 1 : \rightarrow, 2 : \downarrow, 3 : \uparrow\}$$

$$A_t \in \{0, 1, 2, 3\}$$



En un proceso de decisión de Markov, el futuro depende únicamente del estado presente y no de los estados anteriores (**propiedad de Markov**).

Sin embargo, podemos encontrarnos ante problemas con **estados no-markovianos**, donde el estado actual no contiene toda la información relevante para predecir el futuro.

Estado no-markoviano

Un estado no-markoviano es aquel en el que la información necesaria para tomar una decisión óptima no está completamente representada por el estado actual del sistema.

¿La bola va hacia la niña o hacia el hombre?



¿La bola va hacia la niña o hacia el hombre?



- En este ejemplo, no podemos predecir el movimiento de la bola a partir de una sola imagen.
 - Una imagen instantánea no nos ofrece la suficiente información.
 - **Estado no-markoviano.**
 - Una posible solución sería **concatenar múltiples fotogramas consecutivos.**

Los **time steps** pueden no darse en intervalos de tiempo fijos, sino estar **condicionados por eventos**.

Por ejemplo:

- Movimiento de piezas en una partida de ajedrez.
- Cambio de valor en el precio de un acción.
- Acceso a la web de venta de un producto.
- ...



PROBLEMAS EPISÓDICOS Y CONTINUADOS

El **estado inicial** de un problema de RL es el estado en el cual comienza la interacción del agente con el entorno.

Alcanzar un **estado terminal** supone el fin de esta interacción.

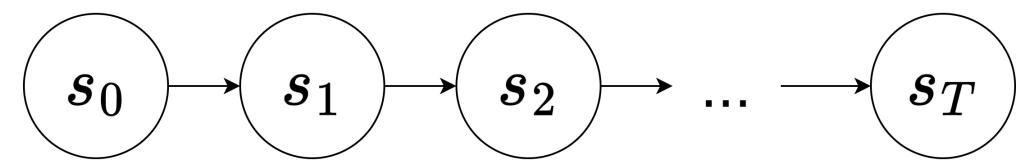
Un problema de RL puede contar con múltiples estados iniciales y finales.

- Estados no terminales: \mathcal{S}
- Estados terminales y no terminales: \mathcal{S}^+

Definimos así el concepto de **episodio**.

Episodio

Secuencia de *time steps* desde un estado inicial hasta un estado terminal.



La longitud T de un episodio no tiene por qué ser fija, y puede variar entre episodios.

Problema episódico

Problema dividido en una secuencia **finita** de estados, desde un estado inicial hasta un estado terminal.

¿Y si el problema
no tiene fin?

En los **problemas continuados** (vs. episódicos), no existen episodios que finalicen en un estado terminal.

- Es decir, **no hay estados terminales**.
- Por tanto, el problema no finaliza en un *time step* T concreto ($T = \infty$).

Problema continuado

Problema consistente en una secuencia **infinita** de estados, partiendo de un estado inicial.

Suelen ser problemas más cercanos a la realidad (control térmico, robótica, ...).

OBJETIVOS Y RECOMPENSAS

¿Qué relación hay entre las **señales de recompensa** y los **objetivos** del agente?

¿Cómo se realiza el **cálculo** de las recompensas?

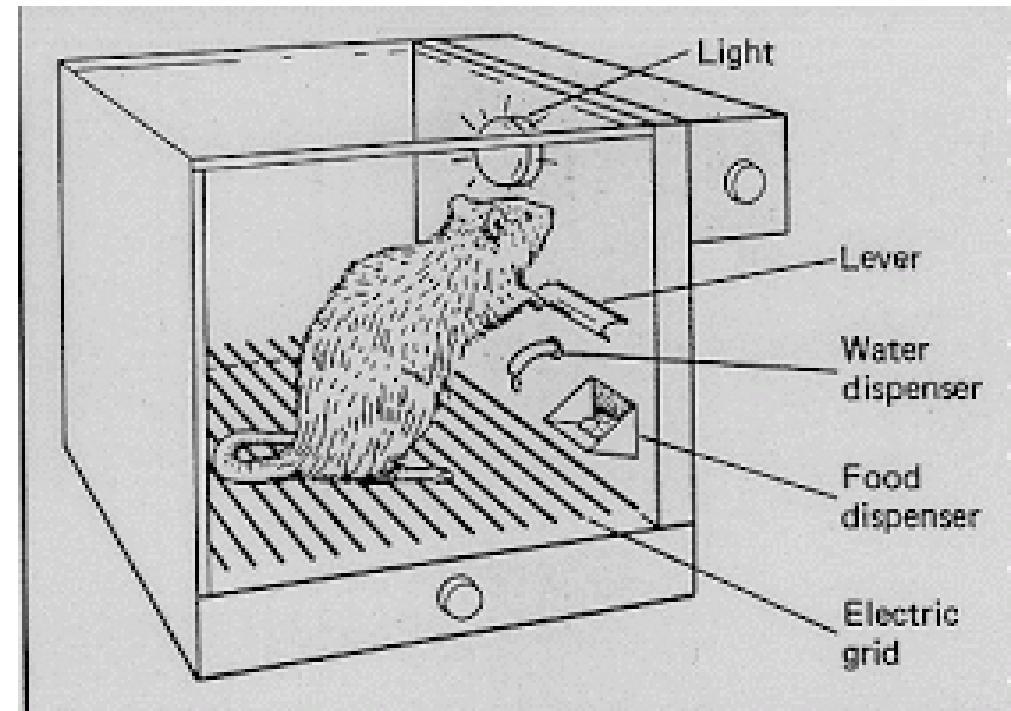
¿Podemos condicionar el **comportamiento** del agente en base a dichas recompensas?

Para guiar a un agente hacia su **objetivo**, empleamos **recompensas**.

Una señal de **recompensa** es un valor numérico que indica al agente si su comportamiento le acerca o no a su objetivo.

$$R_t \in \mathbb{R}$$

Buscamos maximizar la **recompensa acumulada** a largo plazo, no sólo las **recompensas inmediatas**.



Todo lo que entendemos como objetivo o propósito puede interpretarse como la maximización del valor esperado para una suma acumulada de una señal escalar (llamada recompensa).



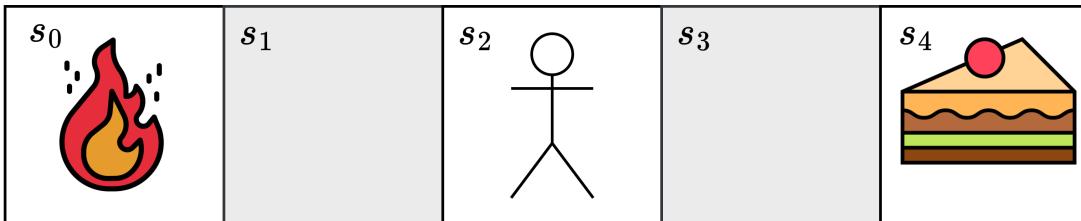
Sutton, R. S., & Barto, A. G. (2018). *Reinforcement learning: An introduction* (2nd ed.). MIT press. (p. 53).

El uso de una señal de recompensa para formalizar la idea de **objetivo** es uno de los aspectos más distintivos del aprendizaje por refuerzo.

Las recompensas que el agente recibe vienen dadas por una **función de recompensa**, que generalmente depende del **estado** alcanzado, o de la **acción** realizada, esto es: $r_t = R(S_t)$, o bien: $r_t = R(S_t, A_t)$.

$$R(s_1) = 0$$

$$R(s_3) = 0$$

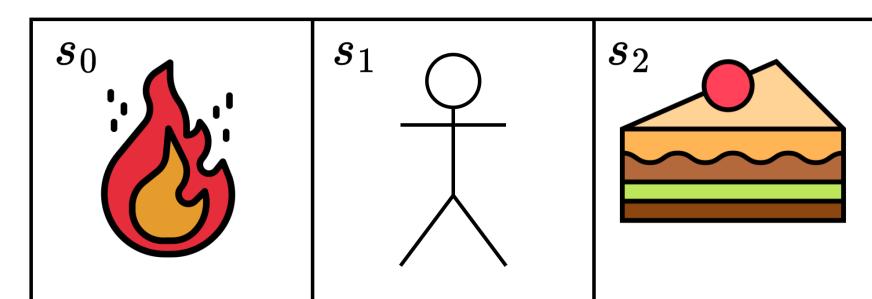


$$R(s_0) = -1$$

$$R(s_2) = 0$$

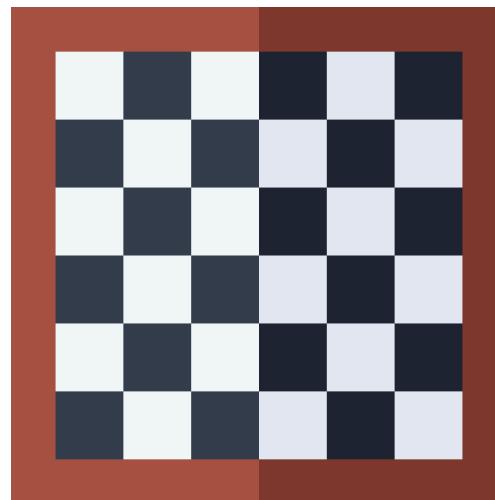
$$R(s_4) = +1$$

$$R(s_1, \rightarrow) = +1$$



$$R(s_1, \leftarrow) = -1$$

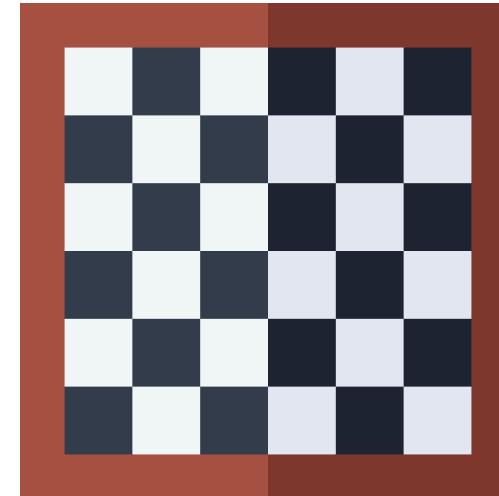
El **objetivo** de un agente de RL es **maximizar la recompensa acumulada (return)** a lo largo del tiempo.



- **Agente orientado a subobjetivos:** cada vez que se come una pieza, $R = +1$ (o valor variable, dependiendo de la pieza comida).
- **Agente orientado a objetivos:** si se gana, $R = +1$, si se pierde: $R = -1$, si se empata (*tablas*): $R = 0$.

La recompensa **no** debe orientarse exclusivamente hacia el cumplimiento de **subobjetivos**, sino hacia el cumplimiento de un **objetivo final**.

- Ej. *comer piezas sin ningún criterio.*



Si, por ejemplo, queremos fomentar cierto comportamiento desde un principio, es mejor emplear otros recursos, como **valores iniciales optimistas**.

El **retorno**, o **recompensa acumulada**, es el valor que tratamos de maximizar.

Se define de la siguiente manera:

$$G_t = R_{t+1} + R_{t+2} + \dots + R_{T-1} + R_T$$

Siendo T el último *time step* del **episodio** (o de una ventana de tiempo determinada).

Retorno

Suma de las recompensas a obtener desde el momento presente hasta el final de un episodio o ventana de tiempo determinada.

$$G_t = R_{t+1} + R_{t+2} + \dots + R_{T-1} + R_T$$

Esta formulación es válida para **problemas episódicos**, pero...

¿Qué ocurre en los **problemas continuados**?

Si el *time step* final es $T = \infty$, la recompensa esperada es una suma infinita $G_t = \infty$.

Necesitamos reformular la definición de recompensa acumulada.

Introducimos el concepto de **retorno descontado**...

$$G_t = R_{t+1} + \gamma R_{t+2} + \gamma^2 R_{t+3} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k R_{t+k+1}$$

Donde $\gamma \in [0, 1]$ se denomina **factor de descuento** (*discount factor*).

- El factor de descuento determina el **valor presente asignado a recompensas futuras**.

$$G_t = R_{t+1} + \gamma R_{t+2} + \gamma^2 R_{t+3} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k R_{t+k+1}$$

- Una recompensa recibida en k *time steps* futuros tiene un valor γ^{k-1} veces lo que valdría en el *time step* actual.
- Si $\gamma = 0$, el agente solamente tendrá en cuenta las **recompensas inmediatas**. Se trata de un *agente miope*, que sólo tiene en cuenta R_{t+1} para elegir A_t .
- A medida que γ se aproxima a 1, el agente tendrá más en cuenta aquellas acciones que maximicen las **recompensas futuras**.

El retorno descontado puede definirse **de forma recursiva**:

$$\begin{aligned}G_t &= R_{t+1} + \gamma R_{t+2} + \gamma^2 R_{t+3} + \dots \\&= R_{t+1} + \gamma(R_{t+2} + \gamma R_{t+3} + \dots) \\&= R_{t+1} + \gamma G_{t+1}\end{aligned}$$

El retorno descontado puede definirse **de forma recursiva**:

$$\begin{aligned} G_t &= R_{t+1} + \gamma R_{t+2} + \gamma^2 R_{t+3} + \gamma^3 R_{t+4} + \dots \\ &= R_{t+1} + \gamma(R_{t+2} + \gamma R_{t+3} + \gamma^2 R_{t+4} + \dots) \\ &= \underbrace{R_{t+1}}_{\substack{\text{Recompensa} \\ \text{inmediata}}} + \underbrace{\gamma G_{t+1}}_{\substack{\text{Return} \\ \text{descontado} \\ \text{desde } t+1}} \end{aligned}$$

$$G_t = \underbrace{R_{t+1}}_{\text{Recompensa inmediata}} + \underbrace{\gamma G_{t+1}}_{\text{Return descontado desde } t+1}$$

Esta formulación será importante para la teoría y algoritmos de RL que veremos más adelante.

$$G_t = R_{t+1} + \gamma G_{t+1}$$

La definición recursiva de G_t es válida para todo *time step* $t < T$, incluso si la terminación ocurre en $t + 1$, siempre que definamos $G_T = 0$.

Por otro lado, aunque G_t sea una suma infinita, se convierte en finita si la recompensa es siempre > 0 y constante (con $\gamma < 1$).

- Por ejemplo, si la recompensa es siempre $+1$, el retorno será:

$$G_t = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k = \frac{1}{1 - \gamma}$$

Existen diferentes formas de guiar el aprendizaje mediante una funciones de recompensa.

El aprendizaje puede basarse en **refuerzos positivos** o **negativos**. Por ejemplo:

Recompensa basada en **objetivos**:

- +1 si el agente alcanza un objetivo
- +0 en cualquier otro caso

Recompensa basada en **penalizaciones**:

- 1 por *time step* empleado
- +0 cuando se alcanza el objetivo.

Cualquier representación de la función de recompensa tiene sus *pros* y sus *contras*, por lo que la elección de una u otra dependerá del problema que tratemos de abordar.

¿Qué recompensa
emplearías para entrenar
a un robot a salir de un
laberinto?

¿Y para conducir
un coche autónomo?

Existen formas alternativas de aplicar las funciones de recompensa.

Por ejemplo, el ***inverse reinforcement learning*** (RL inverso) consiste en plantear un ejemplo de comportamiento óptimo y hacer que el agente adivine la recompensa a maximizar que se asocia con este.

Comportamiento → Recompensa

VS.

Recompensa → Comportamiento

Un **MDP** se define por la tupla:

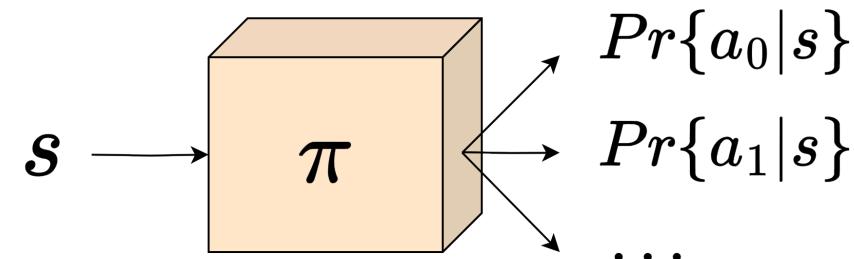
$$\langle \mathcal{S}, \mathcal{A}, \mathcal{P}, \mathcal{R}, \gamma \rangle$$

- ✓ Un conjunto de **estados** \mathcal{S} .
- ✓ Un conjunto de **acciones** \mathcal{A} .
- ✓ Una **función de transición** \mathcal{P} .
- ✓ Una función de **recompensa** $\mathcal{R} : \mathcal{S} \times \mathcal{A} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$
- ✓ Un **factor de descuento** $\gamma \in [0, 1]$.

POLÍTICAS

Una **política** es una función que refleja la probabilidad de emplear una determinada acción $a \in \mathcal{A}(s)$ a partir de un estado $s \in \mathcal{S}$.

- La política rige el comportamiento del agente, representando su preferencia por unas acciones u otras ante diferentes estados.



Diferenciamos entre políticas **deterministas** y **estocásticas**.

Política determinista

La probabilidad de tomar una acción es 0 ó 1: $a_t = \mu(s_t)$

Política estocástica

Distribución de probabilidades de todas las acciones posibles:

$$a_t \sim \pi(\cdot | s_t)$$

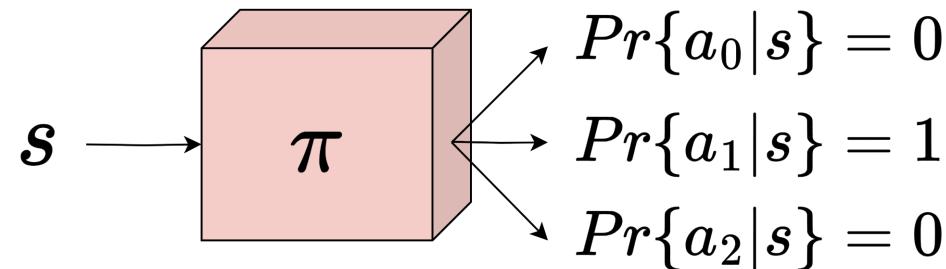
En ambos casos se cumple que:

$$\sum_{a \in \mathcal{A}(s)} \pi(s|a) = 1$$

Por simplicidad, emplearemos indistintamente π para designar a ambos tipos de políticas.

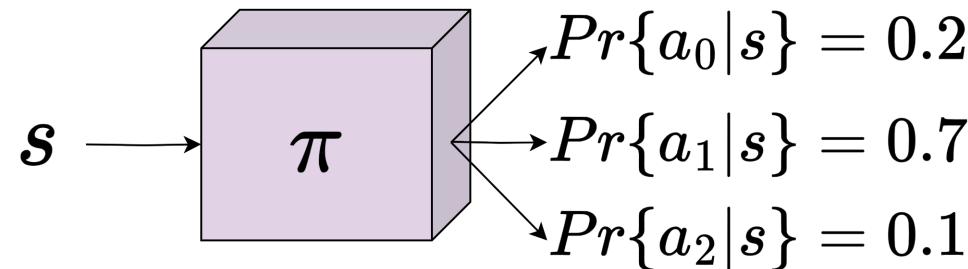
Política determinista

La probabilidad de tomar una acción es 0 ó 1: $\pi(a | s) \in \{0, 1\}$



Política estocástica

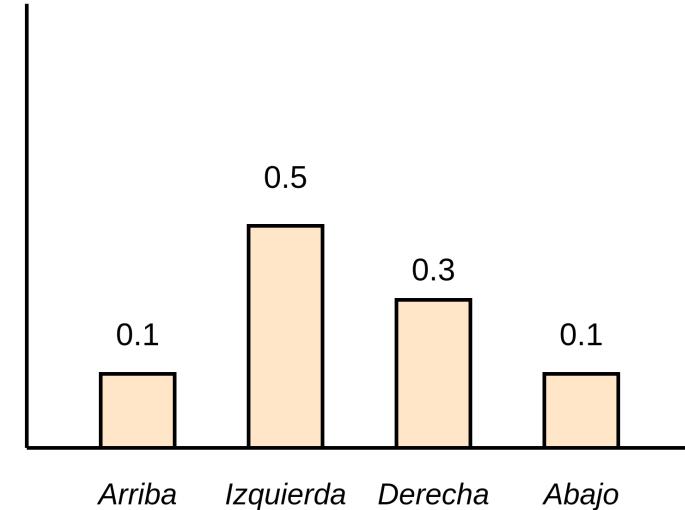
Distribución de probabilidades de todas las acciones posibles: $\pi(a | s) \in [0, 1]$



Política categórica

Selecciona acciones de una **distribución categórica**.

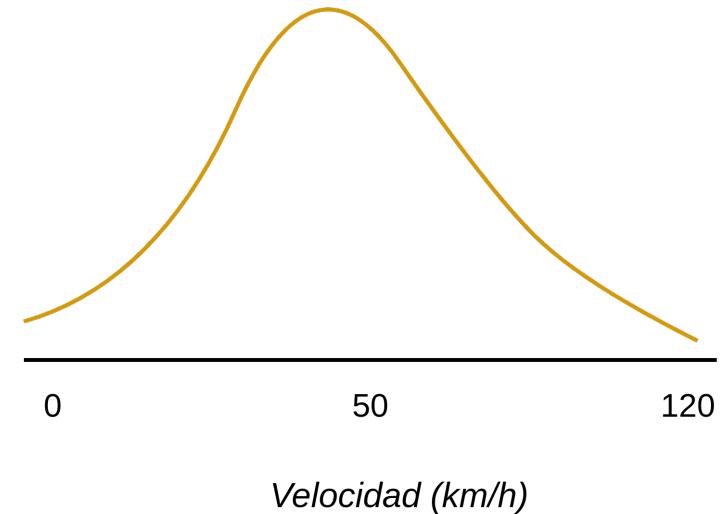
- Se emplea en **espacios de acciones discretos**.



Política gaussiana

Muestrea acciones de una **distribución gaussiana**.

- Se emplea en **espacios de acciones continuos**.



Pregunta...

*¿Alternar entre acciones
 $a_0, a_1, a_2, a_0, a_1, a_2, \dots$
sería una política válida?*



**NO, porque se incumple la
propiedad de Markov.**

Nuestro objetivo es hacer que el agente aprenda una **política de comportamiento óptima** que le permita alcanzar sus objetivos ...

... y, por tanto, **maximizar la recompensa acumulada** (retorno).

Esto se traduce en asignar una mayor probabilidad a aquellas acciones que conduzcan a una mayor recompensa a largo plazo.

Para guiar al agente en el proceso de aprendizaje empleamos **funciones de valor**.

FUNCIONES DE VALOR

Utilizamos **funciones de valor** para evaluar la *calidad* de **estados** y **acciones**.

FUNCIÓN ESTADO-VALOR

$$v_{\pi}(s) = \mathbb{E}[G_t | S_t = s]$$

Retorno esperado al visitar el estado s y seguir actuando conforme a la política π .

FUNCIÓN ACCIÓN-VALOR

$$q_{\pi}(s, a) = \mathbb{E}[G_t | S_t = s, A_t = a]$$

Retorno esperado al realizar la acción a desde el estado s y seguir una política π .

Si desarrollamos estas fórmulas tenemos:

$$\begin{aligned} v_\pi(s) &= \mathbb{E}_\pi[G_t \mid S_t = s] \\ &= \mathbb{E}_\pi \left[\sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k R_{t+k+1} \mid S_t = s \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_\pi(s, a) &= \mathbb{E}_\pi[G_t \mid S_t = s, A_t = a] \\ &= \mathbb{E}_\pi \left[\sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k R_{t+k+1} \mid S_t = s, A_t = a \right] \end{aligned}$$

- *Suma de las recompensas descontadas desde t en adelante.*

Pregunta...

*¿Cuál es la diferencia entre
valor y recompensa?*

Recompensa → es una señal **inmediata** que el agente recibe después de realizar una acción o transicionar a un estado.

Valor → es una estimación de las **recompensas** a obtener a largo plazo (*retorno*).

Ecuaciones de Bellman

La **ecuación de Bellman** para v_π es la *definición recursiva* de la **función estado-valor**:

$$\begin{aligned} v_\pi(s) &= \mathbb{E}_\pi[G_t | S_t = s] \\ &= \mathbb{E}_\pi[R_{t+1} + \gamma G_{t+1} \mid S_t = s] \\ &= \sum_a \pi(a|s) \sum_{s',r} p(s', r | s, a) [r + \gamma v_\pi(s')] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}v_\pi(s) &= \mathbb{E}_\pi[G_t | S_t = s] \\&= \mathbb{E}_\pi[R_{t+1} + \gamma G_{t+1} | S_t = s] \\&= \sum_a \underbrace{\pi(a|s)}_{\text{Probabilidad de elegir cada acción}} \sum_{s',r} \underbrace{p(s',r|s,a)}_{\text{Probabilidad de transición}} [r + \gamma v_\pi(s')]\end{aligned}$$

Recompensa inmediata + futura descontada

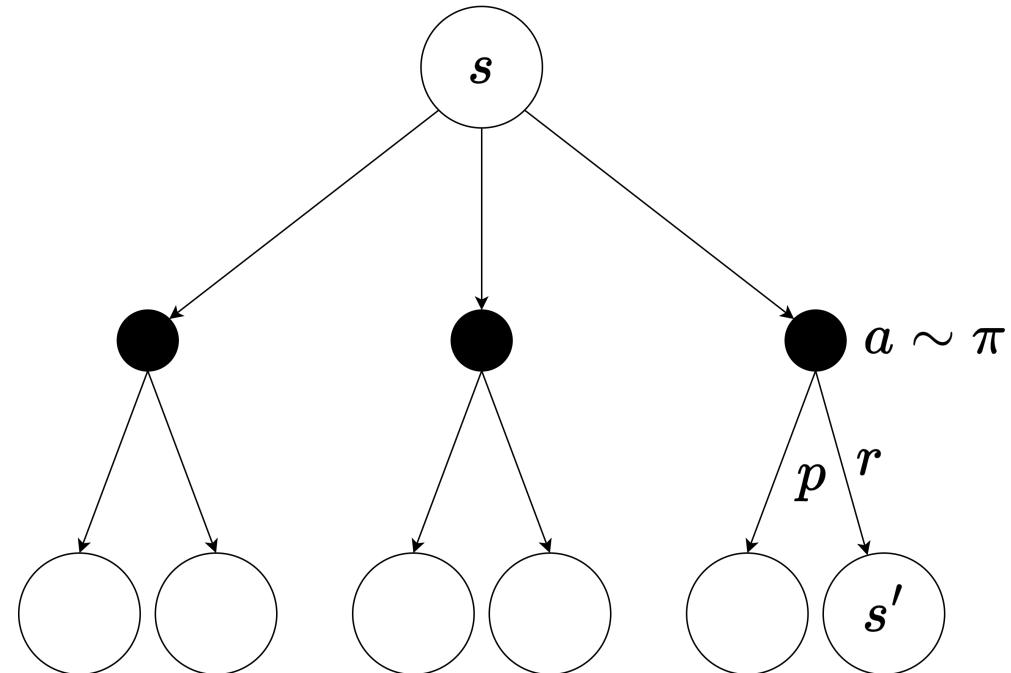
Si el problema es determinista, $\sum_{s',r} p(s',r|s,a)$ se elimina de la ecuación de Bellman.

La **ecuación de Bellman** tiene en cuenta todas las probabilidades de transición, ponderando las **recompensas obtenibles** por su **probabilidad**.

$$\begin{aligned}v_{\pi(s)} &= \mathbb{E}_\pi[G_t | S_t = s] \\&= \mathbb{E}_\pi[R_{t+1} + \gamma G_{t+1} \mid S_t = s] \\&= \sum_a \pi(a|s) \sum_{s',r} p(s', r | s, a) [r + \gamma v_\pi(s')]\end{aligned}$$

Los **diagramas backup** representan cómo se transfiere la información sobre los valores desde estados sucesores hasta el estado actual.

- Similar para pares acción-estado.



De forma análoga, esta es la **definición recursiva** de la **función acción-valor**:

$$\begin{aligned} q_\pi(s, a) &= \mathbb{E}_\pi[G_t | S_t = s, A_t = a] \\ &= \sum_{s', r} p(s', r | s, a) [r + \gamma \mathbb{E}_\pi[G_{t+1} | S_{t+1} = s']] \\ &= \sum_{s', r} p(s', r | s, a) \left[r + \gamma \sum_{a'} \pi(a' | s') q_\pi(s', a') \right] \end{aligned}$$

$$q_\pi(s, a) = \mathbb{E}_\pi[G_t | S_t = s, A_t = a]$$

$$= \sum_{s', r} p(s', r | s, a) [r + \gamma \mathbb{E}_\pi[G_{t+1} | S_{t+1} = s']]$$

$$= \sum_{s', r} p(s', r | s, a)$$

Probabilidades de transición
(dependiente del entorno)

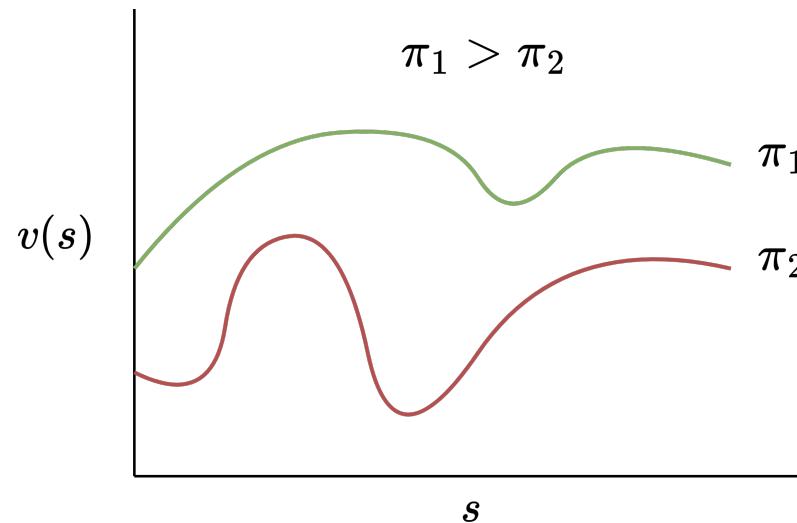
r
Recompensa
inmediata

$$+ \gamma \sum_{a'} \pi(a' | s') q_\pi(s', a')$$

Recompensa futura, ponderada
por la prob. de cada acción

Podemos comparar políticas y establecer un **orden** entre ellas empleando las funciones de valor:

$$\pi \geq \pi' \Leftrightarrow v_\pi(s) \geq v_{\pi'}(s), \quad \forall s \in \mathcal{S}$$



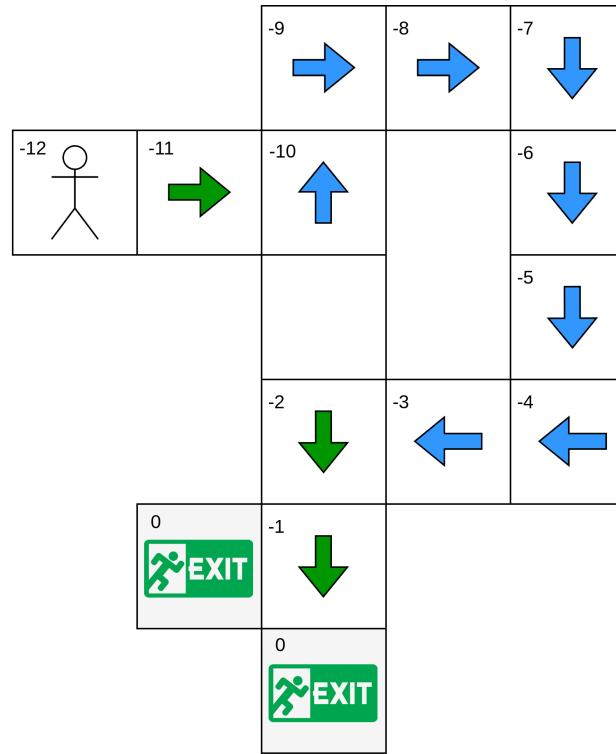
Siempre existirá, al menos, una política mejor que cualquier otra, denominada **política óptima**, π^* .

⚠️ Puede haber más de una política óptima.

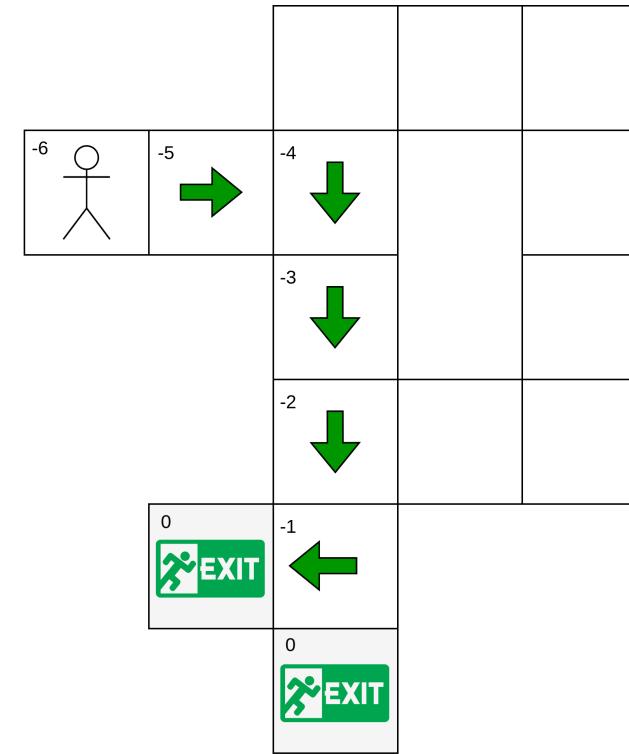
Las políticas óptimas comparten la misma **función estado-valor óptima** v^* :

$$v^*(s) = \max_{\pi} v_{\pi}(s), \quad \forall s \in \mathcal{S}$$

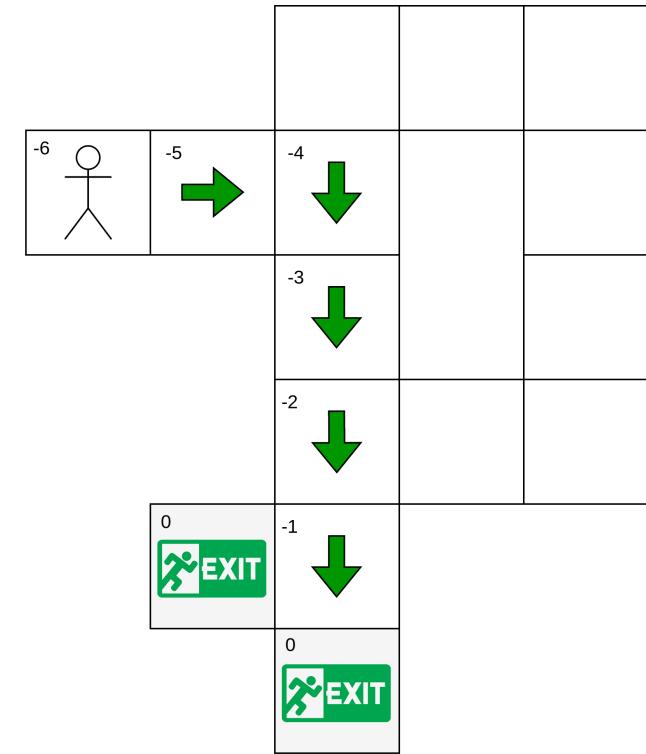
- La función estado-valor óptima es la función estado-valor con el valor más alto entre todas las políticas.
- La función estado-valor óptima es **única**.



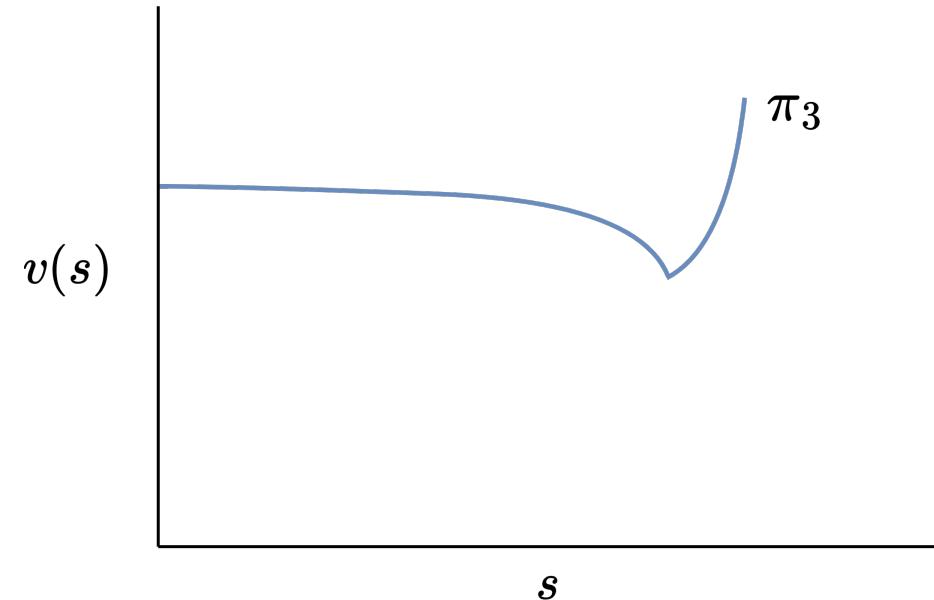
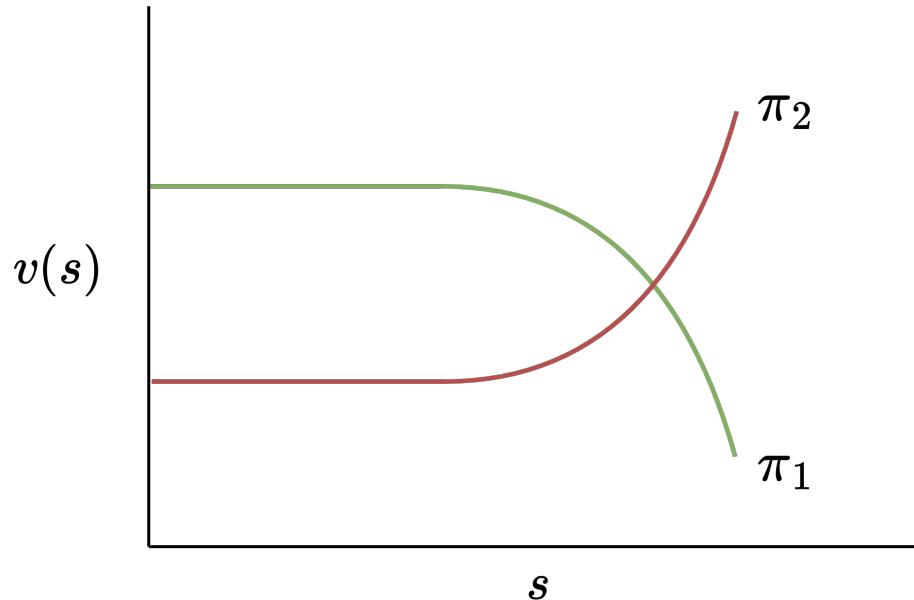
Política subóptima asociada a una función *estado-valor* que no es óptima para todos los estados.



Diferentes **políticas óptimas** asociadas a la misma función *estado-valor* óptima.



Podemos **combinar** políticas subóptimas para formar políticas mejores:



No es necesario hacer sacrificios en determinados estados tomando acciones subóptimas.

Las políticas óptimas también comparten la misma **función acción-valor óptima**:

$$q^*(s, a) = \max_{\pi} q_{\pi}(s, a), \quad \forall s \in \mathcal{S}, a \in \mathcal{A}$$

También podemos definir q^* en términos de v^* tal que:

$$q^*(s, a) = \mathbb{E}[R_{t+1} + \gamma v^*(S_{t+1}) \mid S_t = s, A_t = a]$$

q^* asocia a cada par acción-estado una recompensa esperada igual a la recompensa inmediata + recompensa (descontada) futura de acuerdo a la función de valor óptima v^* .

Ecuaciones de optimalidad de Bellman

La función *estado-valor óptima* v^* se define de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}v^*(s) &= \max_{a \in \mathcal{A}(s)} q_{\pi^*}(s, a) \\&= \max_a \mathbb{E}[R_{t+1} + \gamma v^*(S_{t+1}) \mid S_t = s, A_t = a] \\&= \max_a \sum_{s', r} p(s', r | s, a) [r + \gamma v^*(s')]\end{aligned}$$

$$v^*(s) = \max_{a \in \mathcal{A}(s)} q_{\pi^*}(s, a)$$

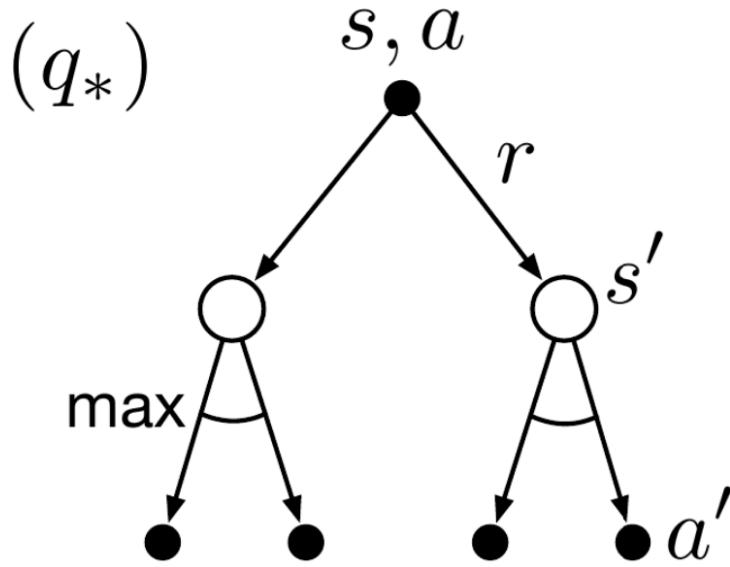
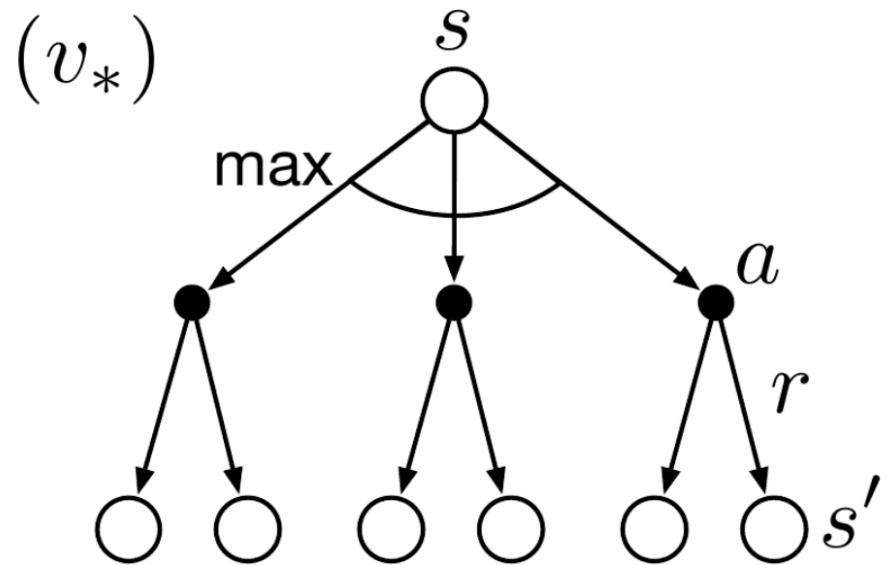
$$= \max_a \mathbb{E}[R_{t+1} + \gamma v^*(S_{t+1}) \mid S_t = s, A_t = a] \quad (\text{Eq. 1})$$

$$= \max_a \sum_{s', r} p(s', r | s, a) [r + \gamma v^*(s')] \quad (\text{Eq. 2})$$

El valor óptimo de un estado será aquel asociado a seguir una acción óptima desde este en adelante.

Por otro lado, la **función de acción-valor óptima** q^* puede definirse tal que:

$$\begin{aligned} q^*(s, a) &= \mathbb{E} \left[R_{t+1} + \gamma \max_{a'} q^*(S_{t+1}, a') \mid S_t = s, A_t = a \right] \\ &= \sum_{s', r} p(s', r | s, a) \left[r + \gamma \max_{a'} q^*(s', a') \right] \end{aligned}$$



Conociendo v^* podemos extraer fácilmente la política óptima, ya que **cualquier política que actúa de forma *greedy* con respecto a v^* es óptima**:

1. Examinar el valor de los sucesores de s .
2. Transición al s' de mayor valor (asumiendo que v^* es óptima).

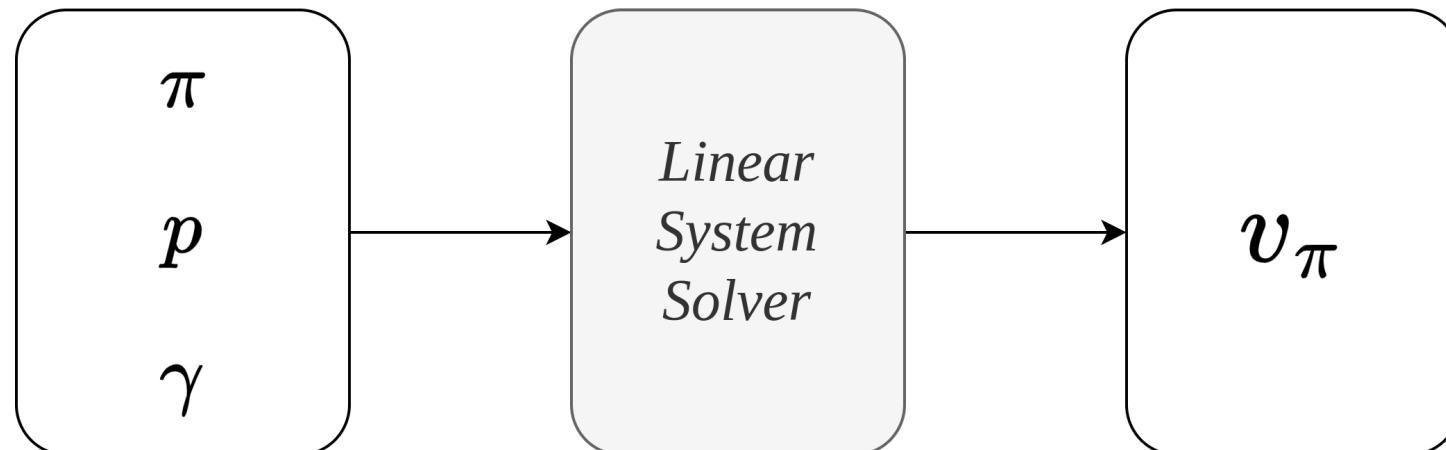
Conocer q^* hace que el proceso de obtención de la política óptima sea incluso **más sencillo**:

1. Para cualquier estado s , se emplea la acción que maximice $q^*(s, a)$.

En MDPs finitos, las ecuaciones de optimalidad de Bellman tienen **soluciones únicas**.

- Definimos una ecuación por estado.
- Dados n estados, tenemos n ecuaciones lineales y, por tanto, n incógnitas.

La resolución del sistema de ecuaciones nos permite obtener la **política óptima**.



No obstante, esto implica dar por supuestos tres aspectos fundamentales que rara vez se dan en la práctica:

1. Conocimiento preciso/completo de las **dinámicas del entorno**.
2. **Recursos computacionales** suficientes para calcular la solución.
3. El cumplimiento de la **propiedad de Markov**.

Esto motiva el uso de métodos alternativos basados en la **aproximación** de la solución.

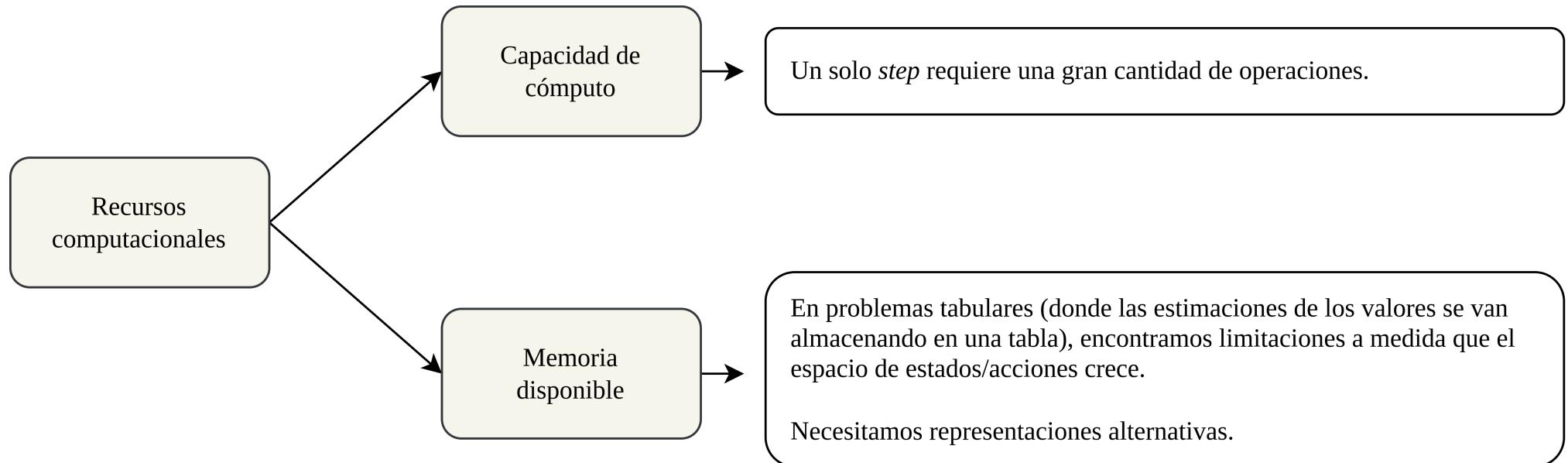
A pesar de que se cumpliesen las condiciones:

- Conocimiento preciso/completo de las **dinámicas del entorno**. 
- El cumplimiento de la **propiedad de Markov**. 

normalmente no es posible lidiar con:

- Recursos computacionales** suficientes para calcular la solución. 

especialmente en problemas complejos con un gran número de estados/acciones.



Sería deseable que el agente sacrificase cierta precisión en situaciones poco frecuentes, y la mejorase en aquellos casos más comunes.

TRABAJO PROPUESTO

- Leer sobre otros tipos de **MDPs / POMDPs** y conocer sus diferencias.
- Familiarización con la API de **Gymnasium**:
 - <https://gymnasium.farama.org/>
 - Implementación de un **agente aleatorio** sobre un entorno de ejemplo.
 - Implementación de un **agente basado en reglas** sobre el mismo entorno.
- **Resolver** un MDP sencillo mediante un **sistema de ecuaciones** lineal.
- **Función de ventaja (advantage function)**:
 - ¿Qué es?
 - ¿En qué se diferencia de las funciones de valor estudiadas?

Bibliografía y videos

- <https://youtu.be/lfHX2hHRMVQ?si=2jR4HI72ReErh7rb>
- https://web.stanford.edu/class/cme241/lecture_slides/david_silver_slides/MDP.pdf

APRENDIZAJE POR REFUERZO

Procesos de decisión de Markov

Antonio Manjavacas

manjavacas@ugr.es

