

Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

J. Moser, On invariant curves of area-preserving mapping of an annulus, *Matematika*, 1962, Volume 6, Issue 5, 51–68

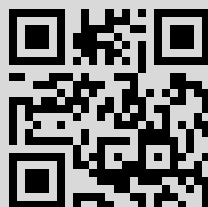
Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 49.206.21.189

October 4, 2019, 07:39:20



О КРИВЫХ, ИНВАРИАНТНЫХ ПРИ ОТОБРАЖЕНИЯХ КОЛЬЦА, СОХРАНЯЮЩИХ ПЛОЩАДЬ¹⁾

Ю. Мозер

§ 1. Введение

1. Занимаясь ограниченной задачей трех тел, Пуанкаре [1] пришел к исследованию отображений кольца на себя, сохраняющих площадь. Он сформулировал теорему о существовании неподвижных точек таких отображений; эта теорема может быть использована для доказательства существования бесконечного числа периодических решений ограниченной задачи трех тел. Позже Дж. Д. Биркгоф [2] дополнил эти исследования рядом глубоких доказательств.

Изучение колец важно для многих видов нелинейных дифференциальных уравнений; ограниченную задачу трех тел можно рассматривать как модель для таких уравнений, выявляющую основные трудности в простой форме. Сохраняющие площадь отображения возникают из обычных дифференциальных уравнений, описывающих движение без трения.

В этой статье мы доказываем теорему, гарантирующую существование замкнутых инвариантных кривых такого отображения. Замкнутые инвариантные кривые соответствуют почти периодическим решениям дифференциального уравнения, порождающего отображение. Они важны для изучения устойчивости периодических решений. Мы сформулируем задачу об отображениях точнее.

2. Пусть r, θ — полярные координаты на плоскости; рассмотрим кольцо

$$0 < a \leq r \leq b.$$

Рассмотрим сначала простое отображение

$$\left. \begin{aligned} \theta_1 &= \theta + \alpha(r), \\ r_1 &= r \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

и предположим, что угол вращения $\alpha(r)$ монотонно зависит от r :

$$\frac{d\alpha}{dr} > 0.$$

Это отображение сохраняет окружности, поворачивая их на угол, возрастающий вместе с возрастанием радиуса. Мы будем называть отображение (1.1) „кручением“.

Рассмотрим теперь возмущение кручения:

$$\left. \begin{aligned} \theta_1 &= \theta + \alpha(r) + F(r, \theta), \\ r_1 &= r + G(r, \theta), \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

где функции F и G предполагаются малыми и периодическими по θ с периодом 2π . Вопрос состоит в том, существуют ли для этого

¹⁾ Moser J., On invariant curves of area-preserving mapping of an annulus, Доклад на симпозиуме по нелинейным дифференциальным уравнениям, Колорадо-Спрингс, 1961.

отображения замкнутые инвариантные кривые, близкие к окружностям, инвариантным относительно кручения.

Очевидно, что без дополнительных предположений такие инвариантные кривые не существуют. Если, например, G положительна, то после применения отображения r возрастает, что исключает замкнутые инвариантные кривые. Поэтому мы сделаем следующее предположение: всякая замкнутая кривая, близкая к окружности $r = \text{const}$, т. е. кривая с уравнением

$$r = f(\theta) = f(\theta + 2\pi), \quad (1.3)$$

где $f'(\theta)$ достаточно мала, пересекается со своим образом. Если мы потребуем, чтобы отображение (1.2) сохраняло площадь и окружность $r = a$, то вышеупомянутое предположение будет, очевидно, выполнено¹⁾. Отметим, что, в частности, образ окружности $r = \text{const}$ должен пересекаться с этой окружностью, т. е. $G(r, \theta)$ при каждом фиксированном значении r имеет по крайней мере один нуль.

В теореме 1 утверждается, что при указанных выше условиях и для достаточно малых F и G замкнутая инвариантная кривая действительно существует, если только функции F, G достаточно число раз дифференцируемы. В формулировке теоремы мы используем следующее обозначение: если $h(r, \theta)$ есть s раз непрерывно дифференцируемая функция, то мы определим s -ю дифференциальную норму, положив

$$|h|_s = \sup \left| \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^{\sigma_1} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right)^{\sigma_2} h(r, \theta) \right|, \quad \sigma_1 + \sigma_2 \leq s,$$

где r, θ изменяются внутри области определения h .

Теорема 1. Для данного $\varepsilon > 0$ и данного целого $s \geq 1$ при нижеследующих предположениях отображение (1.2) имеет замкнутую инвариантную кривую

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \theta' + p(\theta'), \\ r &= r_0 + q(\theta'), \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

такую, что периодические с периодом 2π и s раз непрерывно дифференцируемые функции p и q удовлетворяют неравенству

$$|p|_s + |q|_s < \varepsilon. \quad (1.5)$$

Упомянутые предположения состоят в следующем. Пусть отображение (1.2) таково, что любая замкнутая кривая (1.3), близкая к окружности, пересекается со своим образом. Предположим далее, что $b - a \geq 1$ и что для некоторой постоянной $c_0 > 1$

$$c_0^{-1} \leq \frac{da(r)}{dr} \leq c_0. \quad (1.6)$$

Наконец, для некоторого положительного $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon, s, c_0)$ и целого $l = l(s)$ функции F и G имеют непрерывные производные до порядка l включительно и удовлетворяют неравенствам

$$|F|_0 + |G|_0 < \delta_0, \quad (1.7)$$

$$|\alpha|_l + |F|_l + |G|_l < c_0. \quad (1.7')$$

Кроме того, мы утверждаем, что отображение, индуцированное на кривой (1.4), задается равенством

$$\theta_1' = \theta' + \alpha(r_0). \quad (1.8)$$

¹⁾ Имеются, однако, и другие ситуации, в которых это условие может быть выполнено, например в случае обратимых систем, см. [4].

Замечание. В действительности существует много инвариантных кривых, и их можно различать с помощью (1.8) по их числам вращения $\alpha(r_0) = \omega$. В самом деле, будет показано, что для произвольного наперед заданного ω из интервала

$$\alpha(a) + \varepsilon < \omega < \alpha(b) - \varepsilon \quad (1.9)$$

и такого, что число $\omega/2\pi$ не может быть хорошо приближено рациональными числами

$$|n\omega - m2\pi| \geq \varepsilon n^{-3/2} \text{ для всех целых } n > 0, m, \quad (1.10)$$

существует кривая (1.4) с числом вращения $\omega = \alpha(r_0)$.

3. В 1954 г. А. Н. Колмогоровым [6], [7] была сформулирована теорема, аналогичная теореме 1. В утверждении Колмогорова речь идет о существовании почти периодических решений аналитических гамильтоновых систем дифференциальных уравнений, близких к интегрируемым. Настоящая работа возникла из попытки проверить справедливость теоремы Колмогорова, доказательство которой еще не опубликовано¹⁾. Мы предпочли сформулировать это утверждение в его простейшей форме, в которой оно может быть описано геометрически. Обобщение на случай высших размерностей не должно привести к новым трудностям.

Настоящий результат отличается от [7] в следующем пункте. В работе А. Н. Колмогорова дифференциальные уравнения предполагаются аналитическими по всем переменным, в то время как мы предполагаем существование только конечного числа производных. Этот факт не имеет, конечно, практического значения, так как число l в (1.7') очень велико (формула (2.4) дает $l = 333$ для $\sigma = 4$, $s = 1$), но он может быть интересен в принципе.

В связи с этим отметим, что нахождение инвариантных кривых с любой степенью точности не представляет труда, если доказано их существование. В аналитическом случае, например, нетрудно получить разложение по степеням малого параметра. Основной вопрос состоит в том, сходятся ли полученные ряды. В нашем случае мы построим итерационный процесс, который будет сходиться очень быстро. Быстрая сходимость итераций существенна для нейтрализации влияния малых знаменателей (см. также [11]).

4. Цель этой статьи состоит в том, чтобы дать полное доказательство теоремы 1. Ряд применений этой теоремы и ее естественных обобщений к уравнениям Дуффинга и ограниченной задаче трех тел упоминаются в [12] и здесь не будут обсуждаться.

Некоторое значение имеет тот факт, что теорема 1 в ее усиленном варианте может быть использована для доказательства устойчивости периодических решений. Следуя Дж. Биркгофу (см. [3], [4]), мы придем к изучению сохраняющих меру отображений (1.2) в окрестности неподвижной точки, в которой мы положим $r = 0$. Для доказательства устойчивости неподвижной точки нужно показать, что в произвольной близости от $r = 0$ существуют окружающие эту точку инвариантные кривые (эти идеи изложены в [5])²⁾. Последнее требует

¹⁾ Тем временем появилась работа В. И. Арнольда [8], в которой рассматриваются другие задачи, связанные с „малыми знаменателями“, такие, как задача Данжуа о дифференцируемых отображениях окружности и др. Кроме того, Арнольд анонсировал (см. [9], [10]) результаты, обобщающие утверждения А. Н. Колмогорова 1954 г. С другой стороны, замечание Колмогорова (см. начало стр. 23 в [8]) указывает, по-видимому, на то, что появляющиеся в этих исследованиях ряды могут расходиться.

[В [8] доказана сходимость упомянутых рядов. — Прим. ред.]

²⁾ Аналогичные результаты были анонсированы В. И. Арнольдом в [9].

обобщения теоремы 1 на отображения, для которых угол $\alpha(r)$ изменяется только внутри малого интервала. Такой результат рассматривается в § 5.

Эта работа была доложена на семинаре в Нью-Йоркском университете, в ходе которого Йон, Ланг, Л. Ниренберг и другие высказали много полезных замечаний. Я благодарен К. Л. Зигелю за стимулирующее влияние на мою работу в этой области, которое я испытывал во время предшествующих контактов.

§ 2. Набросок доказательства

1. Чтобы сделать яснее доказательство теоремы 1, мы ограничимся случаем $\alpha(r) = r$, $s = 1$, оставив обсуждение более общего случая до § 5. Обозначим угловую переменную θ через x , а радиус r через y . Тогда отображение принимает вид

$$\begin{cases} x_1 = x + y + f(x, y), \\ y_1 = y + g(x, y) \end{cases} \quad (2.1)$$

в кольце $a \leq y \leq b$, где функции f, g имеют период 2π по x и где $b - a \geq c_0^{-1}$. Предположения малости f и g выражаются неравенствами

$$|f| + |g| < \delta_0 \quad (2.2)$$

и

$$|D_x^{p_1} D_y^{p_2} f| + |D_x^{p_1} D_y^{p_2} g| < c_0 \text{ при } p_1 + p_2 = l. \quad (2.2')$$

Число ω выберем в интервале

$$a + \varepsilon < \omega < b - \varepsilon, \quad (2.3)$$

причем так, чтобы

$$\left| \omega - \frac{2\pi m}{n} \right| \geq \varepsilon n^{-\sigma+3/2} \text{ для всех целых } n > 0, m. \quad (2.3')$$

Здесь σ есть целое число ≥ 4 .

Построим инвариантную кривую с помощью итерационного процесса следующего типа. В данном кольце $a < y < b$ найдем более узкое кольцо и введем (в этом узком кольце — *перев.*) подходящие полярные координаты $\xi \pmod{2\pi}$ и η таким образом, чтобы преобразованное отображение приближало отображение кручения с большей точностью, чем исходное. Повторив это построение, мы найдем в предыдущем кольце еще более узкое кольцо и подходящие координаты, в которых преобразованное отображение еще точнее приближает кручение. В пределе последовательность колец сожмется к искомой инвариантной кривой. В то же время угловой параметр на этой кривой будет как раз таким, в котором индуцированное отображение станет вращением.

Было бы достаточно, конечно, найти инвариантную кривую без нормализованного параметра, который можно ввести на втором шагу. Однако для построения инвариантной кривой необходимо, чтобы число вращения плохо приближалось рациональными кратными 2π . Число вращения должно контролироваться в процессе итерации. Ввиду этого представляется невозможным определить кривую без одновременного нахождения на ней нормализованного параметра.

Чтобы провести это построение и доказать его сходимость, мы опишем сначала общий n -й шаг, т. е. переход от $(n-1)$ -го кольца к n -му. Положение колец и отклонение отображений от кручения оцениваются с помощью нескольких параметров, которые мы теперь введем. Для

простоты заранее укажем соотношения между этими параметрами, а именно N , M и δ . Пусть

$$\kappa = \frac{4}{3}, \quad \nu = 6(\sigma + 1), \quad l = 3 + 11\nu \quad (2.4)$$

и для $N > 1$

$$M = N^\nu > N, \quad \delta = M^{-2\kappa}. \quad (2.5)$$

Для дальнейшего доказательства принципиально важен тот факт, что итерационный процесс, который мы получим, быстро сходится: отклонение отображения от кручения убывает, как $\delta_0^{\kappa^n}$ (а не только как δ_0^n). Это выражает формулируемая ниже теорема.

Параметры N_- , M_- , δ_- , относящиеся к $(n-1)$ -му шагу итерации, связаны с N , M , δ равенствами

$$N = N^x_-, \quad M = M^x_-, \quad \delta = \delta^x_-.$$

Ослабим теперь оценки (2.2) и (2.2'), чтобы приспособить их к индукции, и предположим, что

$$|f| + |g| < \delta_- \quad \text{при} \quad |y - \omega| < \frac{1}{M_-}, \quad (2.6)$$

$$|D_x^{\rho_1} D_y^{\rho_2} N_- f| + |D_x^{\rho_1} D_y^{\rho_2} M_- g| \leq N_-^{\rho_1+1} M_-^{\rho_2}, \quad \rho_1 + \rho_2 = l. \quad (2.6')$$

Впоследствии мы заменим параметр δ_- на $\delta_{n-1} = \delta_0^{\kappa^{n-1}}$ и аналогично поступим с N_- и M_- .

Отметим, что для исходного отображения условия (2.6) и (2.6') будут выполнены при $n=1$, если δ_0 выбрано достаточно малым. Действительно, (2.2) и (2.6) согласуются между собой и при $M_0 > \varepsilon$ (2.3) и $|y - \omega| < 1/M_0 < \varepsilon$ гарантируют неравенства $a < y < b$. Наконец, из (2.2') вытекает

$$|D_x^{\rho_1} D_y^{\rho_2} N_0 f| + |D_x^{\rho_1} D_y^{\rho_2} M_0 g| \leq c_0 M_0,$$

и так как из $M_0 > N_0$ и $\rho_1 + \rho_2 = l \geq \nu$ следует

$$N_0^{\rho_1} M_0^{\rho_2} \geq N_0^l \geq N_0^\nu \geq M_0,$$

то

$$c_0 M_0 \leq c_0 N_0^{\rho_1} M_0^{\rho_2} \leq N_0^{\rho_1+1} M_0^{\rho_2},$$

если $N_0 > c_0$. Следовательно, (2.6) и (2.6') будут выполнены при $n=1$, если положить $M_0 > \varepsilon^{-1}$ и $N_0 > c_0$, т. е. если

$$\delta_0 < \varepsilon^{2\kappa}, \quad c_0^{-2\kappa\nu}.$$

Мы сохраним, однако, за собой свободу в определении δ_0 для дальнейшего.

Теорема 2. Пусть (2.1) описывает отображение кольца, удовлетворяющее (2.6), (2.6') и обладающее тем свойством, что всякая замкнутая непрерывная кривая, близкая к $y = \text{const}$, пересекается со своим образом.

Тогда для достаточно малого δ_0 существует преобразование координат

$$\left. \begin{aligned} x &= \xi + u(\xi, \eta), \\ y &= \eta + v(\xi, \eta) \end{aligned} \right\} \quad \text{при} \quad |\eta - \omega| < \frac{1}{M_-} - \frac{1}{M} > \frac{1}{M}, \quad (2.7)$$

удовлетворяющее неравенству

$$|u|_1 + |v|_1 < \frac{1}{N} \quad (2.7')$$

и такое, что в кольце

$$|\eta - \omega| < \frac{1}{M}$$

отображение (2.1) принимает в координатах ξ, η вид

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= \xi + \eta + \varphi(\xi, \eta), \\ \eta_1 &= \eta + \psi(\xi, \eta), \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

где

$$|\varphi| + |\psi| < \delta = \delta_- \text{ при } |\eta - \omega| < \frac{1}{M} \quad (2.9)$$

$$|D_\xi^{p_1} D_\eta^{p_2} N\varphi| + |D_\xi^{p_1} D_\eta^{p_2} M\psi| < N^{p_1+1} M^{p_2} \text{ при } p_1 + p_2 = l. \quad (2.9')$$

Доказательство этой теоремы мы отложим до § 4; оно является основным в настоящей работе. Сейчас мы хотим показать, что из теоремы 2 может быть получено доказательство теоремы 1 в том частном случае, когда $\alpha(r) = r$, $s = 1$.

Для этой цели обозначим отображение (2.1) через \mathcal{F}_0 и отображение кручения $x_1 = x + y$, $y_1 = y$ через \mathcal{F}_∞ . Неравенство (2.2) запишется в виде

$$|\mathcal{F}_0 - \mathcal{F}_\infty| < \delta_0.$$

Тогда, согласно теореме 2, существует преобразование (2.7), которое мы обозначим через \mathcal{U}_1 , переводящее \mathcal{F}_0 в отображение

$$\mathcal{U}_1^{-1} \mathcal{F}_0 \mathcal{U}_1 = \mathcal{F}_1,$$

задаваемое формулой (2.8) и такое, что

$$|\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_\infty| < \delta_0^x = \delta_1.$$

Повторяя этот процесс нормализации отображения в узком кольце, мы получаем отображение кольца

$$\mathcal{F}_n = \mathcal{U}_n^{-1} \mathcal{F}_{n-1} \mathcal{U}_n, \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2.10)$$

для которого

$$|\mathcal{F}_n - \mathcal{F}_\infty| < \delta_n = \delta_{n-1}^x. \quad (2.11)$$

Если обозначить координаты, в которых выражается \mathcal{F}_n через $x^{(n)} = \xi$, $y^{(n)} = \eta$, то \mathcal{F}_n будет определено в кольце

$$|\eta - \omega| < \frac{1}{M_n} = \frac{1}{M_{n-1}^x}. \quad (2.12)$$

Кроме того, согласно (2.7), преобразование координат \mathcal{U}_n от $x^{(n-1)}$, $y^{(n-1)}$ к $x^{(n)}$, $y^{(n)}$ близко к тождественному, что мы выразим с помощью неравенств

$$|\mathcal{U}_n - I|_1 < \frac{1}{N_n} = \frac{1}{N_{n-1}^x}. \quad (2.13)$$

Неравенства (2.11) и (2.12) свидетельствуют о том, что на окружности $\eta = \omega$ отображения \mathcal{F}_n сходятся к отображению \mathcal{F}_∞ , которое является вращением $\xi_1 = \xi + \omega$. Наконец, связь между $x^{(n)}$, $y^{(n)}$ и старыми координатами $x = x^{(0)}$, $y = y^{(0)}$ задается равенствами

$$\mathcal{W}_n = \mathcal{U}_1 \mathcal{U}_2 \dots \mathcal{U}_n$$

и

$$\mathcal{F}_n = \mathcal{W}_n^{-1} \mathcal{F}_0 \mathcal{W}_n.$$

Отображение \mathcal{W}_n определено в кольце $|y^{(n)} - \omega| < 1/M_n$ и переводит его в узкое кольцо, лежащее внутри $|y - \omega| < 1/M_0$. Запишем \mathcal{W}_n в виде

$$\left. \begin{aligned} x &= \xi + p_n(\xi, \eta), \\ y &= \eta + q_n(\xi, \eta), \end{aligned} \right\} \text{ где } \xi = x^{(n)}, \eta = y^{(n)}. \quad (2.14)$$

Мы должны показать, что $p_n(\xi, \omega)$, $q_n(\xi, \omega)$ и их первые производные равномерно сходятся к некоторым функциям $p(\xi)$, $q(\xi)$ (и их первым производным соответственно). Тогда инвариантная кривая теоремы 1 будет задаваться уравнениями

$$x = \xi + p(\xi), \quad y = \omega + q(\xi).$$

Сходимость самих p_n , q_n непосредственно следует из неравенства

$$|p_n| + |q_n| < \sum_{v=1}^n (|u_v| + |v_v|) < \sum_{v=1}^n \frac{1}{N_v}.$$

Правая часть неравенства может быть сделана меньше ϵ , если N_0 достаточно велико. Для доказательства сходимости производных от p_n , q_n мы обозначим матрицу Якоби преобразования \mathcal{U}_n через

$$U_n = \begin{pmatrix} 1 + u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & 1 + v_\eta \end{pmatrix};$$

тогда, согласно (2.13) (или (2.7')),

$$|U_n - I| < \frac{1}{N_n}.$$

По правилу умножения якобиевых матриц матрица Якоби W_n преобразования \mathcal{W}_n равна

$$W_n = U_1 U_2 \dots U_n,$$

где справа стоит произведение матриц. Сходимость производных p_n , q_n эквивалентна сходимости W_n , т. е. сходимости произведения матриц. Так как, в силу (2.13), матрица U_v мажорируется матрицей

$$I + \frac{1}{N_v} J, \quad \text{где} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

то достаточно доказать сходимость произведения коммутирующих матриц

$$\prod_{v=1}^{\infty} \left(I + \frac{1}{N_v} J \right) \quad \text{или} \quad \prod_{v=1}^{\infty} e^{(1/N_v) J},$$

которая очевидна. Кроме того, мы получаем оценку

$$\begin{aligned} |W_n - I| &\leq \left| \prod_{v=1}^{\infty} \left(I + \frac{1}{N_v} J \right) - I \right| \leq \left| \exp \left(\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{N_v} J \right) - I \right| \leq \\ &\leq \exp \left(2 \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{N_v} \right) - 1 \leq \exp \frac{c_2}{N_0} - 1 \leq \frac{c_3}{N_0}. \end{aligned}$$

Выбрав N_0 достаточно большим, мы получим

$$|W_n - I| < \epsilon,$$

откуда при $s = 1$ следует (1.7).

Этим доказательство теоремы 1 (в частном случае $s = 1$, $\alpha(r) = r$) сводится к теореме 2. В § 3 мы развиваем некоторые методы для доказательства теоремы 2 и дадим это доказательство в § 4.

§ 3. Разностное уравнение. Сглаживающий оператор

1. При построении преобразования (2.7) теоремы 2 решающее значение имеет нахождение решения разностного уравнения

$$w(x + \omega) - w(x) = h(x); \quad (3.1)$$

здесь ω, h — функции периода 2π со средним значением нуль. Предполагается, что число ω удовлетворяет условию (2.3'), т. е.

$$|n\omega - 2\pi m| \geq \varepsilon n^{-\tau+1/2}, \quad (3.1')$$

где $\tau = \sigma - 1 \geq 3$ — целое число.

Лемма 1. Если h есть τ раз непрерывно дифференцируемая функция ($\tau \geq 3$), то (3.1) имеет непрерывное решение, которое мы обозначим через $w = Lh$ и для которого

$$|Lh|_0 \leq \frac{c}{\varepsilon} |h|_{\tau}; \quad (3.2)$$

здесь c — абсолютная постоянная.

Доказательство. Для тригонометрических полиномов

$$h = \sum_{k \neq 0} h_k e^{ikx}$$

решение задается формулой

$$w = \sum_{k \neq 0} \frac{h_k}{e^{ik\omega} - 1} e^{ikx}. \quad (3.3)$$

Неравенство (3.2) требует оценки для коэффициентов Фурье. Так как h есть τ раз дифференцируемая функция, то

$$|h_k| \leq |k|^{-\tau} |h|_{\tau} \quad (k \neq 0).$$

Из условия (3.1) получаем для малых знаменателей

$$|e^{ik\omega} - 1| = 2 \sin \left| \frac{\omega k - 2\pi l}{2} \right| \geq \frac{2}{\pi} \varepsilon |k|^{-\tau+3/2}.$$

Следовательно,

$$\left| \frac{h_k}{e^{ik\omega} - 1} \right| \leq \frac{\pi}{2\varepsilon} |k|^{-3/2} |h|_{\tau},$$

так что ряды (3.3) абсолютно сходятся и (3.2) доказано при

$$c = \pi \sum_{k=1}^{\infty} k^{-3/2}.$$

Если $h(x, y)$ есть функция двух переменных с периодом 2π по x и средним значением нуль, то разностное уравнение

$$w(x + \omega, y) - w(x, y) = h(x, y)$$

может быть решено тем же способом и для решения $w = Lh$ из леммы 1 следует оценка

$$|Lh(x, y)|_0 \leq \frac{c}{\varepsilon} |D_x^{\tau} h|_0 \quad (3.4)$$

при условии, что производные в правой части существуют и непрерывны.

2. Сглаживающий оператор (см. [11]). Мы введем для функций двух переменных сглаживающий оператор, который приближает произвольную $h(x, y)$ гладкими функциями. Особенность этого оператора состоит в том, что достаточно гладкие функции h приближаются с высокой степенью точности. Это свойство выражает лемма 2.

Пусть $h(x, y)$ есть непрерывная функция, определенная в некоторой области, в качестве которой возьмем полосу

$$a < y < b.$$

Порядок приближения по каждому из аргументов x, y будет устанавливаться отдельно и будет измеряться двумя большими параметрами $N, M > 1$. Сглаженная функция $T_{NM}h$ определяется в меньшей полосе

$$\alpha = a + \frac{1}{M} < y < b - \frac{1}{M} = \beta$$

в предположении, что $2M^{-1} < b - a$, и задается формулой

$$T_{NM}h(x, y) = \iint_{a < y' < b} \chi_{NM}(x - x', y - y') h(x', y') dx' dy'. \quad (3.5)$$

В качестве ядра χ_{NM} возьмем функцию вида

$$\chi_{NM}(x, y) = N\chi(Nx) \cdot M\chi(My),$$

где $\chi(x)$ — функция, все производные которой существуют и непрерывны и которая удовлетворяет соотношениям

$$\chi(x) \equiv 0 \quad \text{при} \quad |x| > 1, \quad (3.6)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^k \chi(x) dx = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad k = 0, \\ 0 & \text{при} \quad 0 < k < l, \end{cases} \quad (3.7)$$

где l — фиксированное число. Таким образом, T_{NM} зависит от l , которое будет выбрано согласно (2.4).

Из условия (3.6) вытекает, что χ_{NM} равно нулю при $|x| > N^{-1}$ и при $|y| > M^{-1}$. Следовательно, интегрирование в (3.5) распространяется на носитель $\chi_{NM}(x - x', y - y')$, который содержится в $a < y' < b$, так как $\alpha < y < \beta$. Поэтому, если ввести новые переменные интегрирования, (3.5) можно записать в виде

$$T_{NM}h(x, y) = \iint_{\substack{|\xi| < 1 \\ |\eta| < 1}} \chi_{11}(\xi, \eta) h\left(x - \frac{\xi}{N}, y - \frac{\eta}{M}\right) d\xi d\eta. \quad (3.8)$$

Из условия (3.7) следует, что полиномы $p(x, y)$ степени, меньшей l , при сглаживании сохраняются, т. е.

$$T_{NM}p(x, y) = p(x, y). \quad (3.9)$$

Лемма 2. Если $h(x, y)$ непрерывна в полосе $a < y < b$, то при $\alpha < y < \beta$

$$|D_x^{p_1} D_y^{p_2} T_{NM}h| \leq c_p N^{p_1} M^{p_2} \sup_{a < y < b} |h| \quad \text{для всех } p_1, p_2, \quad (3.10)$$

где c_p зависит от функции χ и от p_1, p_2 . Если $h(x, y)$ есть l раз непрерывно дифференцируемая функция, то при $\alpha < y < \beta$

$$|h - T_{NM}h| \leq c \sup_{\substack{p_1 + p_2 = l \\ a < y < b}} N^{-p_1} M^{-p_2} |D_x^{p_1} D_y^{p_2} h|, \quad (3.11)$$

где постоянная c зависит от функции $\chi(x)$, но не зависит от M, N .

Доказательство. Справедливость (3.10) непосредственно следует из (3.5):

$$\begin{aligned} |D_x^{p_1} D_y^{p_2} T_{NM}h(x, y)| &\leq \sup_{a < y < b} |h| \iint |D_x^{p_1} D_y^{p_2} \chi_{NM}(x - x', y - y')| dx' dy' \leq \\ &\leq \sup_{a < y < b} |h| N^{p_1} M^{p_2} \int |D_x^{p_1} \chi(x)| dx \int |D_y^{p_2} \chi(y)| dy. \end{aligned}$$

Для доказательства (3.11) мы используем формулу (3.8), разложив $h(x - \xi/N, y - \eta/M)$ в ряд Тейлора с остаточным членом в точке

$\xi = \eta = 0$ до членов порядка, меньшего чем l . Так как T_{NM} сохраняет полиномы степени, меньшей чем l , то $(I - T_{NM})h$ определяется только остаточным членом $r_l(x, y, \xi, \eta)$ функции $h(x - \xi/N, y - \eta/M)$. Для этого члена можно дать оценку

$$|r_l(x, y, \xi, \eta)| \leq \sup_{\substack{p_1 + p_2 = l \\ x', y'}} \frac{\xi^{p_1} \eta^{p_2}}{N^{p_1} M^{p_2}} |D_x^{p_1} D_y^{p_2} h(x', y')|,$$

где $(x' - x) < 1/N$, $|y' - y| < 1/M$ и $|\xi|, |\eta| < 1$. Следовательно, из (3.8) найдем

$$|(I - T_{NM})h(x, y)| \leq \sup_{\substack{p_1 + p_2 = l \\ x', y'}} N^{-p_1} M^{-p_2} |D_x^{p_1} D_y^{p_2} h(x', y')| \cdot c,$$

где

$$c = \sup_{p_1 + p_2 = l} \iint \xi^{p_1} \eta^{p_2} \chi(\xi, \eta) |d\xi d\eta|.$$

Этим лемма 2 доказана.

Упомянем о следующих двух примерах оценок (3.2) и (3.10). При $\alpha < y < \beta$ имеем

$$|LT_{NM}h(x, y)| \leq \frac{c}{\varepsilon} |D_x^\tau T_{NM}h|_0 \leq c_p \cdot c \frac{N^\tau}{\varepsilon} |h|_0,$$

и если $N > \varepsilon$, $\sigma = \tau + 1$, то

$$|LT_{NM}h| \leq c_p \cdot c N^{\tau+1} |h|_0 = c_p \cdot c N^\sigma |h|_0. \quad (3.12)$$

Аналогично

$$|L^2 T_{NM}h| \leq c_p \cdot c^2 N^{2\sigma} |h|_0. \quad (3.13)$$

Напомним, что $T_{NM}h$ определена в меньшей области, чем сама функция h .

3. Для полноты изложения покажем, как можно построить функцию $\chi(x)$ со свойствами (3.6), (3.7). Пусть функция $\varphi(x)$ принадлежит классу C^∞ , равна 0 при $|x| > 1/2$ и положительна при $|x| < 1/2$. Тогда можно определить l постоянных a_1, \dots, a_l таким образом, чтобы

$$\chi(x) = \sum_{\lambda=1}^l a_\lambda \varphi(x - \delta_\lambda), \quad \delta_\lambda = \frac{\lambda}{2l},$$

обладала желаемыми свойствами. Постоянные a_1, \dots, a_l находятся из линейной системы (3.7), определитель которой не равен нулю. В самом деле, в противном случае равняется нулю некоторая нетривиальная линейная комбинация чисел

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^\mu \varphi(x - \delta_\lambda) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (x + \delta_\lambda)^\mu \varphi(x) dx,$$

т. е. существует полином $p(x) \neq 0$ степени, меньшей чем l , и такой, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x + \delta_\lambda) \varphi(x) dx = 0, \quad \lambda = 1, \dots, l.$$

Но так как $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x + \delta) \varphi(x) dx$ есть полином по δ той же степени, что и p , то он может иметь только $l - 1$ или меньше корней; это доказывает утверждение.

§ 4. Доказательство теоремы 2

1. Построение u, v . Для доказательства теоремы 2 рассмотрим опять отображение кольца

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x + y + f(x, y) \quad \text{при} \quad |y - \omega| < \frac{1}{M}, \\ y_1 &= y + g(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

и попытаемся с помощью преобразования

$$\left. \begin{aligned} x &= \xi + u(\xi, \eta), \\ y &= \eta + v(\xi, \eta) \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

перевести его в новое отображение

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= \xi + \eta + \varphi(\xi, \eta), \\ \eta_1 &= \eta + \psi(\xi, \eta), \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

точнее приближающее кручение.

Мы постараемся мотивировать осуществляемое ниже построение сначала для u, v . Формулы преобразования имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \xi + \eta + \varphi + u_1 &= \xi + u + \eta + v + f(\xi + u, \eta + v), \\ \eta + \psi + v_1 &= \eta + v + g(\xi + u, \eta + v); \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

для краткости мы пишем $u_1 = u(\xi_1, \eta_1)$, $v_1 = v(\xi_1, \eta_1)$. Мы линеаризируем уравнения, получающиеся при $\varphi = \psi = 0$, имея в виду следующее: рассматривая f, g, u, v и $|\eta - \omega|$ как малые величины порядка λ , отбросим члены порядка малости λ^2 . Так, например, согласно этому процессу линеаризации, мы заменим u_1 на $u(\xi + \omega, \eta)$, так как $|u_1 - u(\xi + \omega, \eta)| \leq |u|_1 \cdot |\eta - \omega|$ мала, порядка квадрата λ . Итак, эта линеаризация приводит к уравнениям

$$\begin{aligned} u(\xi + \omega, \eta) - u(\xi, \eta) &= v + f(\xi, \eta), \\ v(\xi + \omega, \eta) - v(\xi, \eta) &= g(\xi, \eta). \end{aligned}$$

При решении этих разностных уравнений появляются малые знаменатели. Отметим, что второе уравнение может быть решено только в том случае, когда среднее значение g равно нулю. Для дальнейшего важно, кроме того, что функции f, g соответствующим образом сглаживаются, чтобы нейтрализовать потери производных.

Исходя из этих соображений, определим u, v как решения системы

$$\left. \begin{aligned} u(\xi + \omega, \eta) - u(\xi, \eta) &= v + Tf(\xi, \eta), \quad [u] = 0, \\ v(\xi + \omega, \eta) - v(\xi, \eta) &= T(g - [g]). \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

Здесь T означает оператор T_{NM} из предыдущего параграфа и через $[]$ обозначено среднее значение функции по угловому переменному. Взяв среднее значение правой и левой частей первого уравнения в (4.5), найдем

$$[v] + [Tf] = 0,$$

так что

$$v = L(Tg) + [v] = L(Tg) - [Tf].$$

Так как в первом уравнении (4.5) среднее значение правой части равно нулю, то

$$u = L(v + Tf) = L^2Tg + LTf.$$

Соотношения

$$\left. \begin{aligned} u &= L^2Tg + LTf, \\ v &= (LTg - [Tf]) \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

определяют u, v в кольце

$$|\eta - \omega| < \frac{1}{M_-} - \frac{1}{M}.$$

2. Оценка на u, v . Из (3.12), (3.13) и предположения (2.6) следует

$$|u| + |v| \leq c_3 N^{2\sigma} (|f|_0 + |g|_0) < c_3 N^{2\sigma} \delta_- = c_3 N^{2\sigma} M^{-2} \quad (4.7)$$

и аналогично

$$\left. \begin{aligned} |D_\xi u| + |D_\xi v| &\leq c_4 N^{2\sigma+1} M^{-2} \leq c_4 N^{2\sigma} M^{-1}, \\ |D_\eta u| + |D_\eta v| &\leq c_4 N^{2\sigma} M^{-1}. \end{aligned} \right\} \quad (4.7')$$

Так как, согласно (2.4), $\nu \geq 2\sigma + 1$, то

$$\left. \begin{aligned} |u|_0 + |v|_0 &< \frac{1}{NM}, \\ |u|_1 + |v|_1 &< \frac{1}{N}. \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

что доказывает (2.7).

Таким образом, u, v определены в кольце

$$|\eta - \omega| < \frac{1}{M_-} - \frac{1}{M} > \frac{3}{M} \quad (\text{если } M_0 > 2^{1/(s-1)})$$

и внутри него удовлетворяют (4.7). Из теоремы о неявной функции заключаем, что образ кольца $|\eta - \omega| < 3/M$ при отображении (4.2) покрывает по меньшей мере кольцо $|y - \omega| < 2/M$. Следовательно, отображение, обратное к (4.2), однозначно определено в кольце $|y - \omega| < 2/M$ и непрерывно дифференцируемо в нем (при условии, что $M \gg M_0$ выбрано достаточно большим).

Из этого видно, что отображение (4.3) определено и дифференцируемо в кольце $|\eta - \omega| < 1/M$, а именно посредством (4.2) это кольцо отображается в

$$|y - \omega| < |\eta - \omega| + |v| < \frac{1}{M} + \frac{1}{NM},$$

а посредством (4.1) — в

$$|y_1 - \omega| < |y - \omega| + \delta_- < \frac{1}{M} + \frac{1}{NM} + \frac{1}{M^2} < \frac{2}{M},$$

где определено обратное отображение к (4.2). Следовательно, (4.3) определено и дифференцируемо при $|\eta - \omega| < 1/M$.

3. Оценка на $|\varphi| + |\psi|$. Чтобы оценить $|\varphi|, |\psi|$ в кольце $|\eta - \omega| < 1/M$, отметим сначала, что по предположению каждая замкнутая кривая вблизи окружности $y = \text{const}$, например $\eta = \eta_1$, пересекается со своим образом, в данном случае с кривой

$$\eta_1 = \overset{\circ}{\eta} + \psi(\overset{\circ}{\xi}, \overset{\circ}{\eta}),$$

т. е. $\psi(\overset{\circ}{\xi}, \overset{\circ}{\eta})$ имеет по крайней мере один нуль. Отсюда следует, что

$$\sup_{\xi} |\psi(\overset{\circ}{\xi}, \overset{\circ}{\eta})| \leq \text{osc}_{\xi} \psi(\overset{\circ}{\xi}, \overset{\circ}{\eta}) \leq 2 \sup_{\xi} |\psi(\overset{\circ}{\xi}, \overset{\circ}{\eta}) + w(\overset{\circ}{\eta})|,$$

где $w(\eta)$ есть любая функция от η и где через $\text{osc}_{\xi} \psi(\overset{\circ}{\xi}, \overset{\circ}{\eta})$ обозначена

осцилляция ψ . Мы положим $w(\eta) = -[Tg(\xi, \eta)]$. Таким образом, из (4.4) имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |\psi(\xi, \eta)|_0 &\leq |\psi(\xi, \eta) - [Tg(\xi, \eta)]|_0 = \\ &= |v(\xi, \eta) - v(\xi_1, \eta_1) + g(\xi + u, \eta + v) - [Tg]|_0. \end{aligned}$$

Воспользовавшись тем, что v удовлетворяет (4,5), найдем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |\psi|_0 &\leq |v(\xi + \omega, \eta) - v(\xi_1, \eta_1)|_0 + |g(\xi + u, \eta + v) - [Tg]|_0 \leq \\ &\leq |D_\xi v|_0 |\eta - \omega + \varphi|_0 + |D_\eta v|_0 |\psi|_0 + \\ &+ |Tg(\xi + u, \eta + v) - Tg|_0 + \sup_{|y - \omega| < 1/M_-} |(I - T)g(x, y)|. \end{aligned}$$

Учитывая (4.7), имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |\psi|_0 &\leq c_4 N^{2\sigma+1} M^{-2} |\eta - \omega| + |v|_1 (|\varphi|_0 + |\psi|_0) + \\ &+ |Tg(x, y)|_1 (|u|_0 + |v|_0) + |(I - T)g(x, y)|_0. \end{aligned}$$

В последних двух членах, в которых указаны переменные x, y , максимум берется по большему кольцу $|y - \omega| < 1/M_- - 1/M$. Для φ получим аналогичную оценку из первого уравнения (4.4) и из (4,5); вычитая одно из этих соотношений из другого, найдем

$$\varphi = u(\xi + \omega, \eta) - u(\xi_1, \eta_1) + f(\xi + u, \eta + v) - Tf$$

и

$$\begin{aligned} \varphi|_0 &\leq c_4 N^{2\sigma+1} M^{-2} |\eta - \omega| + |u|_1 (|\varphi|_0 + |\psi|_0) + \\ &+ |Tf(x, y)|_1 (|u|_0 + |v|_0) + |(I - T)f(x, y)|_0 \end{aligned}$$

Сложив это неравенство с оценкой для $|\psi|_0$ и воспользовавшись соотношением (4.7), получим

$$\begin{aligned} |\varphi|_0 + |\psi|_0 &\leq 3c_4 N^{2\sigma+1} M^{-3} + (|u|_1 + 2|v|_1) (|\varphi|_0 + |\psi|_0) + \\ &+ (2|Tg(x, y)|_1 + |Tf|_1) N^{2\sigma} M^{-2} + \\ &+ |(I - T)g|_0 + |(I - T)f|_0. \end{aligned}$$

Второй член можно исключить, предварительно перенеся его в правую часть, так как, согласно (4.8), $|u|_1 + 2|v|_1 < 2/N < 1/2$ при $N > 4$. Член $|Tf|_1$ можно оценить с помощью леммы 2, а именно

$$|Tf|_1 \leq c_5 M |f|_0 < \frac{c_5}{M}.$$

Вместе с аналогичной оценкой для g имеем

$$|\varphi|_0 + |\psi|_0 \leq c_6 \{N^{2\sigma+1} M^{-3} + |(I - T)g|_0 + |(I - T)f|_0\}.$$

Используя предположения (2.6') и лемму 2, получаем

$$\begin{aligned} |(I - T)g|_0 + |(I - T)f|_0 &\leq c_7 \sup_{p_1 + p_2 = l} (N^{-p_1} M^{-p_2} N_-^{p_1+1} M_-^{p_2}) \leq \\ &\leq c_7 N_- \sup_{p_1 + p_2 = l} \left(\frac{N_-}{N}\right)^{p_1} \left(\frac{M_-}{M}\right)^{p_2} = \\ &= c_7 N_- \left(\frac{N_-}{N}\right)^l = c_7 N_-^{1+(1-\alpha)l}, \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$|\varphi|_0 + |\psi|_0 \leq c_8 \{N^{2\sigma+1} M^{-3} + N_-^{1+(1-\alpha)l}\}. \quad (4.9)$$

Воспользуемся теперь соотношениями (2.4):

$$c_8 N^{2\sigma+1} M^{-3} = c_8 M^{(2\sigma+1)/\nu-3} < \frac{1}{2} M^{-2\kappa}$$

при условии, что M_0 достаточно велико и

$$\nu > \frac{2\sigma+1}{3-2\kappa} = 6\sigma+3; \quad (4.10)$$

последнее вытекает из (2.4). Аналогично

$$c_8 N_-^{1+(1-\kappa)l} < \frac{1}{2} M^{-2\kappa} = \frac{1}{2} N_-^{-2\kappa\nu},$$

если

$$(\kappa-1)l > 1+2\kappa^2\nu, \quad (4.11)$$

что следует из (2.4) при $\kappa=4/3$ и ν , определенном, как и выше. Следовательно, из (4.9) вытекает

$$|\varphi|_0 + |\psi|_0 < M^{-2\kappa} = \delta,$$

что и доказывает (2.9).

4. Оценка для высших производных. Чтобы доказать, наконец, (2.9'), введем новые переменные

$$\begin{aligned} \hat{x} &= Nx, & \hat{\xi} &= N\xi, \\ \hat{y} &= My, & \hat{\eta} &= M\eta. \end{aligned}$$

Тогда отображение (4.1) принимает вид

$$\left. \begin{aligned} \hat{x}_1 &= \hat{x} + \frac{N}{M} \hat{y} + \hat{f}(\hat{x}, \hat{y}), \\ \hat{y}_1 &= \hat{y} + \hat{g}(\hat{x}, \hat{y}), \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

где

$$\hat{f} = Nf, \quad \hat{g} = Mg.$$

Покажем сначала, что производные \hat{f} , \hat{g} по \hat{x} , \hat{y} до порядка l включительно можно оценить постоянной, не зависящей от N , M . Для этой цели мы используем предположение (2.6') и при $\rho_1 + \rho_2 = l$ получим

$$\begin{aligned} |D_{\hat{x}}^{\rho_1} D_{\hat{y}}^{\rho_2} Nf| + |D_{\hat{x}}^{\rho_1} D_{\hat{y}}^{\rho_2} Mg| &\leq N_- \frac{M}{M_-} \cdot \left(\frac{N_-}{N}\right)^{\rho_1} \left(\frac{M_-}{M}\right)^{\rho_2} \leq \\ &\leq N_- \frac{M}{M_-} \left(\frac{N_-}{N}\right)^l = N_-^{1+(1-\kappa)(l-\nu)} \leq 1, \end{aligned}$$

так как ввиду (4.11) показатель степени отрицателен. С другой стороны, в области $|y - \omega| < 1/M_-$

$$|Nf| + |Mg| \leq M \cdot \delta_- = \frac{1}{M_-} \leq 1.$$

Следовательно, функции $\hat{f}(\hat{x}, \hat{y})$, $\hat{g}(\hat{x}, \hat{y})$ определены для всех действительных \hat{x} и в области $|\hat{y} - M\omega| < M/M_- > 1$ эти функции и все их производные до порядка l ограничены числом 1. Отсюда (многokратным применением теоремы о среднем значении) получаем, что все производные меньшего порядка можно оценить с помощью зависящей только от l постоянной c_9 :

$$|\hat{f}(\hat{x}, \hat{y})|_{\nu} + |\hat{g}(\hat{x}, \hat{y})|_{\nu} < c_9, \quad 0 \leq l' \leq l.$$

Следовательно, записав отображение (4.12), которое мы обозначим через $\hat{\mathcal{F}}$, в виде $\hat{x}_1 = F(\hat{x}, \hat{y})$, $\hat{y}_1 = G(\hat{x}, \hat{y})$, получим

$$|F|_l + |G|_l < c_{10},$$

или, сокращенно, $|\hat{\mathcal{F}}|_l < c_{10}$.

Аналогичная оценка справедлива для $\hat{\mathcal{U}}$:

$$\hat{x} = \hat{\xi} + \hat{u}(\hat{\xi}, \hat{\eta}), \quad \hat{y} = \hat{\eta} + \hat{v}(\hat{\xi}, \hat{\eta}),$$

где $\hat{u} = Nu$, $\hat{v} = Mv$. Производные \hat{u} , \hat{v} по ξ, η оцениваются из (4.6) и леммы 2 (при $\rho_1 + \rho_2 \leq l + 2\sigma$):

$$|\hat{u}|_l + |\hat{v}|_l \leq c' M N^{2\sigma} \delta_- = c' M^{-1} N^{2\sigma} < \frac{1}{N} < \frac{1}{4},$$

где производные берутся по $\hat{\xi}, \hat{\eta}$. Теорема о неявной функции гарантирует существование в кольце $|y - \omega| < 2/M$ обратного отображения с не зависящей от N, M оценкой для производных до порядка l включительно. В символической записи

$$|\hat{\mathcal{U}}| < 2, \quad |\hat{\mathcal{U}}^{-1}| < 2,$$

так что отображение $\hat{\Phi} = \hat{\mathcal{U}}^{-1} \hat{\mathcal{F}} \hat{\mathcal{U}}$ записывается с помощью функций, производные которых до порядка l включительно оцениваются не зависящей от N, M постоянной, скажем c_{11} . В применении к φ, ψ это означает, что

$$|D_{\xi}^{p_1} D_{\eta}^{p_2} N \varphi| + |D_{\xi}^{p_1} D_{\eta}^{p_2} M \psi| \leq c_{11} N^{p_1} M^{p_2} \text{ при } |\eta - \omega| < \frac{1}{M}.$$

Оценка (2.9) будет справедлива при $\rho_1 + \rho_2 \leq l$. Этим доказательство теоремы 2 закончено.

§ 5. Некоторые обобщения

1. Доказательство теоремы 1 получено пока только для случая $\alpha(r) = r$ и $s = 1$. В этом параграфе мы покажем, что случай функции $\alpha(r)$ общего вида может быть сведен к обсуждавшемуся случаю. Кроме того, мы укажем, как видоизменить доказательство, чтобы получить s ($s > 1$) раз дифференцируемую кривую.

Пусть

$$\left. \begin{aligned} \theta_1 &= \theta + \alpha(r) + F(r, \theta), & a \leq r \leq b, \\ r_1 &= r + G(r, \theta), \end{aligned} \right\} \quad (*)$$

есть данное отображение. Введем новые независимые переменные

$$x = \theta, \quad y = \alpha(r), \quad \alpha(a) \leq y \leq \alpha(b).$$

Согласно предположениям (1.6), (1.7'), это преобразование взаимно однозначно и имеет l производных с заданными оценками. Далее, отображение (*) имеет вид (2.1), причем

$$f(x, y) = F(r, \theta), \quad g(x, y) = \alpha(r + G(r, \theta)) - \alpha(r),$$

откуда видно, что условия (2.2), (2.2') выполнены для некоторого c_0 . Оценка для ширины кольца дается неравенством $\alpha(b) - \alpha(a) \geq c_0^{-1}$.

2. Дифференцируемость инвариантной кривой более высокого порядка можно получить, увеличивая l . Для этой цели нужно видоизменить выбор параметров x, y, l в (2.4) и соотношение, связывающее δ

и M . Укажем необходимые изменения: пусть $s \geq 1$ есть желаемое число непрерывных производных кривой; тогда мы заменим (2.4) на

$$x = 1 + \frac{1}{2s+1}, \quad v = 6(\sigma + 1), \quad e = 2s + 1 + 4(s+2)v \quad (5.1)$$

и (2.5) на

$$\delta = M^{-(s+1)x}. \quad (5.2)$$

Доказательство в § 4 теперь может быть проведено тем же способом, что и раньше, но со следующими изменениями: в п. 3 вместо формулы (4.9) получим

$$\begin{aligned} |\varphi|_0 + |\psi|_0 &\leq c_8 (N^{2\sigma+1} (M^{-s-2} + M^{-2s-1}) + N^{1+(1-x)l}) \leq \\ &\leq 2c_8 (N^{2\sigma+1} M^{-s-2} + N^{1+(1-x)l}). \end{aligned}$$

Для того чтобы правую часть сделать меньше, чем $M^{-x(s+1)}$, нужно выбрать v, l столь большими, чтобы

$$s+2 > x(s+1) + \frac{2\sigma+1}{v}$$

и

$$(x-1)l \geq 1 + 2x^2v.$$

Оба этих соотношения следуют из (5.1).

Вследствие сделанного выбора δ в (5.2) можно заменить (4.8) на

$$|u|_s + |v|_s \leq \frac{1}{N},$$

что позволяет доказать равномерную сходимость s -й производной отображения (2.14) и, следовательно, непрерывность s -й производной предельной кривой.

3. Малые кручения. Для исследования устойчивости неподвижных точек отображений важно иметь обобщение теоремы 1 для случаев, в которых угол вращения в отображении кручения (1.1) изменяется только в малом интервале. Мы рассмотрим здесь такое обобщение.

С этой целью введем параметр γ в полуинтервале

$$0 < \gamma \leq 1$$

и запишем отображение (1.2) в виде

$$\left. \begin{aligned} \theta_1 &= \theta + \gamma(\alpha(r) + F(r, \theta)), \\ r_1 &= r + \gamma G(r, \theta), \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

где r изменяется в пределах $a \leq r \leq b$, $b - a \geq 1$.

Теорема 3. В предположениях (1.4), (1.5), (1.5') утверждение теоремы 1 остается справедливым, если заменить (1.8) на

$$\theta'_1 = \theta' + \gamma\alpha(r_0).$$

Число $\delta_0 = \delta_0(c_0, \varepsilon, s)$ может быть выбрано независимо от γ .

Заметим, что в этой форме невозмущенное отображение (5.3) имеет вид

$$\theta_1 = \theta + \gamma\alpha(r), \quad r_1 = r;$$

угол вращения $\gamma\alpha(r)$ изменяется в интервале $(\gamma\alpha(a), \gamma\alpha(b))$, который будет мал при малых значениях γ .

Для этого случая не ясно, существует ли в таком малом интер-

вале число ω , удовлетворяющее (1.10). Поэтому мы видоизменяем (1.9) и (1.10):

$$\alpha(a) + \varepsilon < \frac{\omega}{\gamma} < \alpha(b) - \varepsilon, \quad (5.4)$$

$$|n\omega - 2\pi m| \geq \gamma \varepsilon n^{-3/2}. \quad (5.5)$$

Тогда плотность множества допустимых ω будет близка к 1.

Изложенное ранее (в § 4) доказательство может быть проведено для случая малых кручений так же, как и выше, если параметру γ придавать подходящие значения. Стоит отметить, что, если принять во внимание (5.5), формула (3.2) должна быть видоизменена следующим образом:

$$|\gamma Lh|_0 \leq \frac{c}{\varepsilon} |h|_\tau.$$

С другой стороны, формула (4.6) должна быть заменена формулой

$$\left. \begin{aligned} u &= (\gamma L)^2 Tg + \gamma LTf, \\ v &= \gamma LTg - [Tf], \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

откуда видно, что понадобятся оценки только на γL . Остальные детали достаточно просты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Poincaré H., Sur une théorème de géométrie, *Rend. Circolo mat. Palermo*, **33**, (1912), 375—407.
2. Birkhoff G. D., The restricted problem of three bodies, *Rend. Circolo mat. Palermo*, **39** (1915), 1—70.
3. Birkhoff G. D., Surface transformations and their dynamical applications, *Acta math.*, **43** (1922), 1—119.
4. Биркгоф Дж. Д., Динамические системы, Гостехиздат, М.—Л., 1941.
5. Зигель К. Л., Лекции по небесной механике, Физматгиз, М.—Л., 1960.
6. Колмогоров А. Н., Общая теория динамических систем и классическая механика, Математический конгресс в Амстердаме, 1954 г. Физматгиз, М.—Л., 1961, стр. 187—208.
7. Колмогоров А. Н., О сохранении условно периодического движения при малом изменении функции Гамильтона, *Докл. АН СССР*, **98** (1954), 527—530.
8. Арнольд В. И., Малые знаменатели. I. Об отображениях окружности на себя, *Изв. АН СССР, сер. матем.*, **25** (1961), 21—86.
9. Арнольд В. И., Об устойчивости положения равновесия гамильтоновой системы обыкновенных дифференциальных уравнений в общем эллиптическом случае, *Докл. АН СССР*, **137** (1961), 255—257.
10. Арнольд В. И., О рождении условно периодического движения из семейства периодических движений, *Докл. АН СССР*, **138** (1961), 13—15.
11. Moser J., A new technique for the construction of solutions of nonlinear differential equations, *Proc. Nat. Acad. Sci., U. S. A.*, **47** (1961), 1824—1831. [Есть русский перевод. См. сб. *Математика*, **6:4** (1962), 3—10.]
12. Moser J., Perturbation theory for almost periodic solutions for undamped nonlinear differential equations (в печати).

