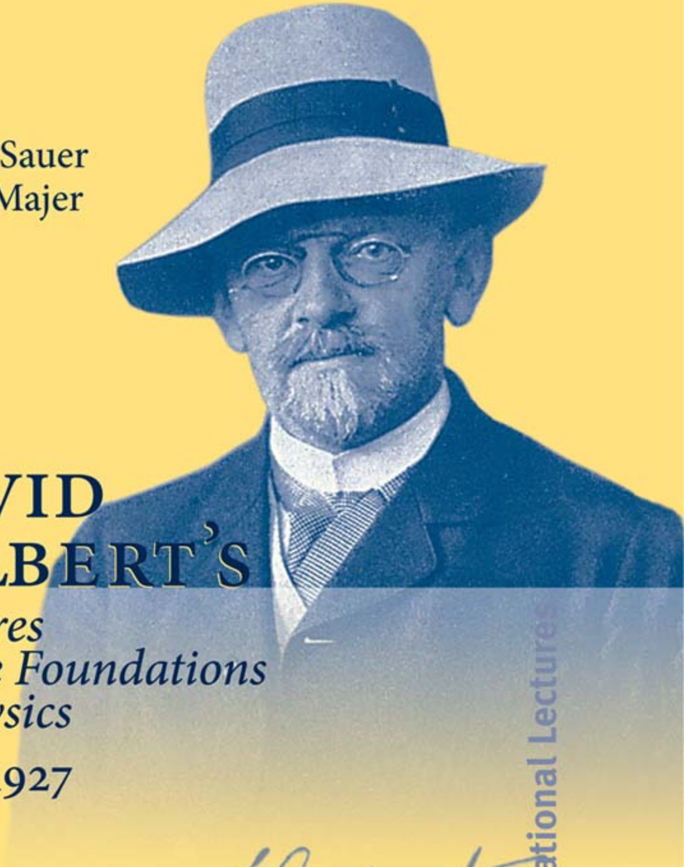
Tilman Sauer
Ulrich Majer
Editors

DAVID HILBERT'S
Lectures on the Foundations of Physics
1915–1927



David Hilbert.

David Hilbert's Foundational Lectures

Springer

David Hilbert's Lectures on the Foundations of Physics 1915–1927

David Hilbert's Lectures on the Foundations of Mathematics and Physics, 1891–1933

General Editors
William Ewald, Michael Hallett, Ulrich Majer and Wilfried Sieg

Volume 1
David Hilbert's Lectures on the Foundations of Geometry, 1891–1902

Volume 2
David Hilbert's Lectures on the Foundations of Arithmetic and Logic, 1894–1917

Volume 3
David Hilbert's Lectures on the Foundations of Arithmetic and Logic, 1917–1933

Volume 4
David Hilbert's Lectures on the Foundations of Physics, 1898–1914
Classical, Relativistic and Statistical Mechanics

Volume 5
David Hilbert's Lectures on the Foundations of Physics, 1915–1927
Relativity, Quantum Theory and Epistemology

Volume 6
David Hilbert's Notebooks and General Foundational Lectures

Tilman Sauer
Ulrich Majer
Editors

David Hilbert's Lectures on the Foundations of Physics 1915–1927

Relativity, Quantum Theory and Epistemology

in collaboration with
Arne Schirrmacher and Heinz-Jürgen Schmidt

Springer

Editors

Ulrich Majer
Philosophisches Seminar
-Hilbert-Edition-
Georg-August-Universität Göttingen
Humboldtallee 19
37073 Göttingen
Germany
umajer@gwdg.de

Tilman Sauer
Einstein Papers Project
California Institute of Technology
Division of the Humanities and Social Sciences
MC 20-7
1200 E. California Blvd.
Pasadena, CA 91125
USA
tilman@caltech.edu

Heinz-Jürgen Schmidt
Fachbereich Physik
Universität Osnabrück
Barbarastr. 7
49069 Osnabrück
Germany
hschmidt@uos.de

Arne Schirrmacher
Max Planck Institute for the
History of Science
Boltzmannstr. 22
14195 Berlin
Germany
aschirrmacher@mpiwg-berlin.mpg.de

ISBN 978-3-540-20606-4 e-ISBN 978-3-540-68285-1
DOI 10.1007/978-3-540-68285-1
Springer Dordrecht Heidelberg London New York

Library of Congress Control Number: 2009930650

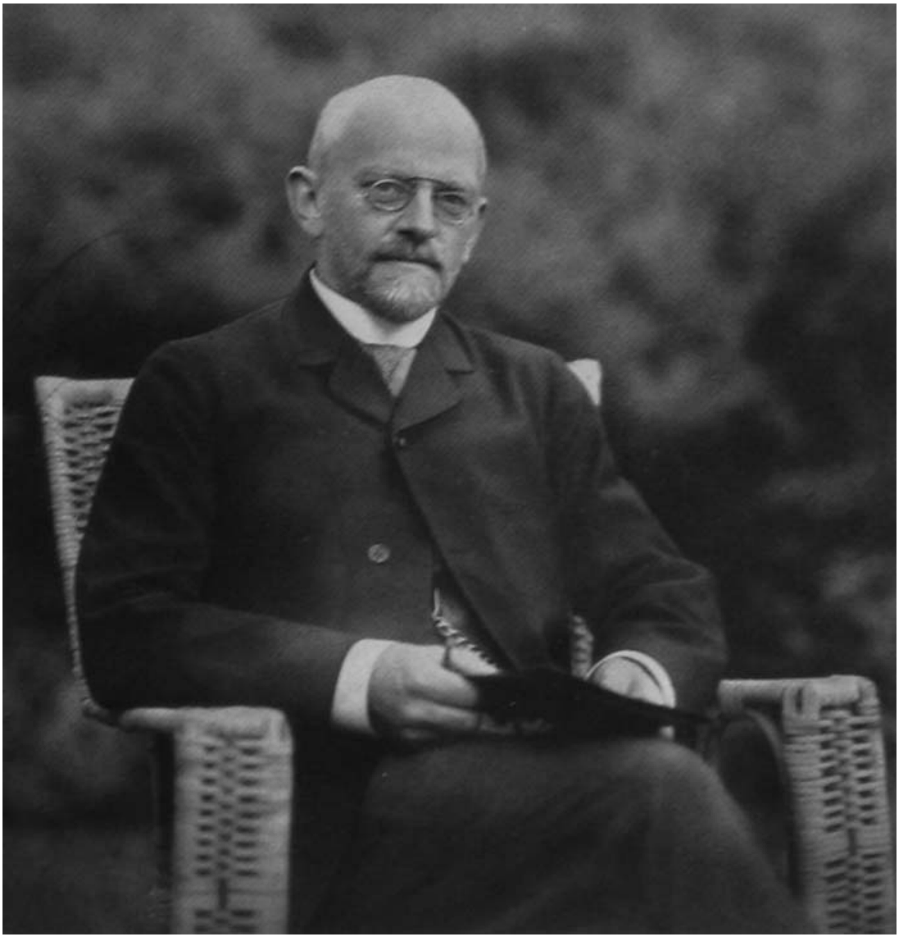
© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2009
This work is subject to copyright. All rights are reserved, whether the whole or part of the material is concerned, specifically the rights of translation, reprinting, reuse of illustrations, recitation, broadcasting, reproduction on microfilm or in any other way, and storage in data banks. Duplication of this publication or parts thereof is permitted only under the provisions of the German Copyright Law of September 9, 1965, in its current version, and permission for use must always be obtained from Springer. Violations are liable to prosecution under the German Copyright Law.
The use of general descriptive names, registered names, trademarks, etc. in this publication does not imply, even in the absence of a specific statement, that such names are exempt from the relevant protective laws and regulations and therefore free for general use.

Cover design: WMXDesign, Heidelberg

Typeset by the editors.

Printed on acid-free paper

Springer is part of Springer Science+Business Media (www.springer.com)



David Hilbert, ca. 1921/22
(Voit Collection, Manuscript Division of the
Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen)

“*This page left intentionally blank.*”

Preface

The present Volume is the fifth in a series of six presenting a selection from Hilbert's previously unpublished lecture notes on the foundations of mathematics and physics during the period from 1890 to 1933. Hilbert's lecture courses represent an enormous fund of learning and invention, and embrace almost every subject common in the mathematical sciences of his day, including mathematical physics. The notes therefore provide a remarkable record, sometimes almost from day to day, of the development of his foundational ideas, and show, in addition, his engagement with the work of other scientific figures of the first rank. The present Volume treats Hilbert's lectures on relativity, quantum theory and epistemology from the fall of 1915 on. During this period, Hilbert reached the height of his research investigations into the foundations of the natural sciences.

The structure of this Edition, the nature, location, and condition of the Hilbert lecture notes, their provenance, and what we have been able to reconstruct of their history, are all described in the general 'Introduction to the Edition', which is to be found at the beginning of Volume 1. That Introduction also explains in detail the criteria for the selection of the texts, the way in which they were edited, and general matters of textual policy. Those matters are uniform for the entire Edition, and we have not repeated the full account here. We do, however, include a brief description of the textual policies in section 5 of the introduction to this Volume. This section is intended to provide all the basic information necessary to a reading of the texts, above all, information concerning the policies specific to this Volume.

That these lectures are finally being published is the result of the efforts, over nearly two decades, of many individuals and institutions. The series as a whole is under the supervision of four General Editors, William Ewald, Michael Hallett, Ulrich Majer, and Wilfried Sieg, who bear the collective responsibility for editorial policy. For each individual volume, Volume Editors were designated to produce the final selection of texts and to write the scholarly apparatus; this work was carried out in consultation with the General Editors. The designated Editors for this Volume were Tilman Sauer and Ulrich Majer. It should be noted that Arne Schirrmacher worked on Hilbert's lectures on radiation theory presented in Chapter 5, and Heinz-Jürgen Schmidt worked on Hilbert's lectures on quantum theory presented in Chapter 6.

All the Editors wish to express their thanks to the Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG) for its generous financial support from 1993 to 2003. To edit even the mere fragment of the voluminous Hilbert *Nachlaß* that appears in these six volumes required a considerable institutional apparatus located in proximity to the archives in Göttingen. Without the assistance of the DFG, which enabled us to establish a permanent staff in Göttingen, the present Edition could never have been realized. Ulrich Majer, the General Editor who was constantly 'vor Ort', supervised the permanent staff and thus had the task of dealing with all the technical problems that an edition of this sort must inevitably face. We again acknowledge the indispensable scholarly, editorial and technical contributions to the Edition as a whole of Ralf Haubrich, Albert Krayer, Tilman Sauer and Arne Schirrmacher, all at one time full-time members of the permanent staff.

The final work for this particular Volume was made possible through the generous gift of a donor who has asked to remain anonymous. These funds made it possible for Tilman Sauer to be freed from his project duties as an editor of the *Collected Papers of Albert Einstein* for several months during the summers of 2006 and 2007 and devote himself exclusively to work on the present Volume. We wish to thank Tom Ryckman for his interest in the project and his assistance in securing this additional funding. We are also extremely grateful to Diana Kormos Buchwald, general editor of the *Collected Papers of Albert Einstein*, for her encouragement, patience and unfailing support. Her generous sharing of the office resources of the Einstein Papers Project with its sister project of the Hilbert Edition enabled Tilman Sauer to work on the Hilbert project without being exiled from home.

We thank the Institut für Wissenschaftsgeschichte at the University of Göttingen (in particular Lorraine Daston, its former director) for giving the project its first physical home and for recognizing its significance. We are also grateful to the Philosophisches Seminar at the University of Göttingen for space and support.

Numerous other institutions and individuals provided significant support for the Edition. In Göttingen, from the first, formative stages of the project, we received encouragement and advice from the late Martin Kneser, Samuel Patterson, Günther Patzig and Helmut Rohlfing. The Mathematisches Institut and the Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek in Göttingen (SUB), the holders of the original Hilbert documents, granted the necessary permission for publication, for which we are deeply grateful.

The Institute for Advanced Study in Princeton, through the offices of Harry Woolf and Phillip Griffiths, provided the Editors with a collective working environment in the summer of 1997.

Carnegie Mellon University, the Georg-August-Universität Göttingen, the Universität Bern, hosted a series of conferences on Hilbert's unpublished foundational writings. The Poincaré Project at the Université Nancy 2 hosted a conference on editing scientific papers. These meetings and conferences, in addition to their intellectual focus, provided occasion of personal encounter without which a collaboration of this sort cannot thrive. We also thank Peter Aichelburg and the Arbeitsgruppe Gravitationsphysik at the University of Vienna for generously providing office space for Tilman Sauer during the summer of 2008.

Catriona Byrne of Springer Verlag has given the Edition abundant support and advice, and has been patient with the inevitable delays.

A large number of people have been of assistance in various technical and research capacities. For their help we thank: Volker Ahlers, Tobias Brendel, Willem Hagemann, Julia Hartmann, Nina Hehn, Arnim von Helmolt, Stefan Krämer, Pamela Klapproth, Michael Mai, Heiko Schilling, Rebecca Pates, Friedericke Schröder-Pander, Hans-Jakob Wilhelm, and many others. We thank Felicity Pors, Niels-Bohr-Archive Copenhagen, for help in locating documents, and Gudrun Staedel-Schneider, Munich, for her help in documenting Hilbert's Bucharest lecture. Special thanks go to Carol Chaplin and Rosy Meiron, Pasadena, for their gracious and meticulous help in proofreading in the final stages of preparing the Volume.

This series of volumes was originally set up under the supervision of Ralf Haubrich, who played an essential role in the design of the overall editorial apparatus, which was subsequently greatly advanced by Albert Krayer. The preparation, organization and presentation of the two volumes on the natural sciences were largely in the hands of Tilman Sauer.

Finally, the responsible Editors of this Volume wish to thank their wives and families for their tolerance, patience, and support during the arduous and protracted tasks of the preparation and finishing of this volume.

The General Editors

William Ewald, Michael Hallett, Ulrich Majer, Wilfried Sieg

“*This page left intentionally blank.*”

Contents

Introduction

David Hilbert was concerned with the foundations of the mathematical sciences and physics throughout his career; this Volume is the second of two Volumes (4 and 5) concentrating on the foundations of physics. Most of the documents selected for these two Volumes were chosen from a large corpus of Hilbert's unpublished writings (primarily notes for lecture courses) on the natural sciences. These begin in 1898 with a four hour lecture course "Mechanics" (*Hilbert 1898/99**) and end in 1930 with the lecture course "Mathematical Methods of the New Physics."[1] The selection of documents and its distribution over the two Volumes was based on the fact that Hilbert's work prior to 1915 is concerned mainly with classical mechanics and electrodynamics, including the special theory of relativity, together with thermodynamics and statistical mechanics. Hilbert's work from 1915, on the other hand, deals with the new physics embodied in general relativity theory and quantum mechanics, and also the attendant epistemological implications. Volume 4 deals with the period before 1915, whereas the present Volume deals with material from 1915 and later. It presents a selection of Hilbert's writings and unpublished lectures from this period, beginning with his "First Communication" on the "Foundations of Physics" (*Hilbert 1915*) in late 1915 up to and including Hilbert's penultimate lecture course on physics, i.e., his course on the new quantum mechanics held in the winter semester 1926/27 (*Hilbert 1926/27**).

There are two exceptions to the temporal division between Volumes 4 and 5, both made on conceptual grounds. We have included in the present Volume parts of Hilbert's 1912 lecture course on radiation theory (*Hilbert 1912**) in order to document Hilbert's concerns with the old quantum theory based on Planck's law of blackbody radiation. By the same token, a lecture course on "Statistical mechanics" from 1922 (*Hilbert 1922**) is planned for inclusion in Volume 4 in order to complement the material presented there on statistical physics and thermodynamics.

Hilbert is known to have had a long-standing interest in the conceptual foundations and mathematical methods of physics. This is clear even from his published œuvre. Among other things, he made significant contributions to the debates about the proper foundations of kinetic theory, radiation theory,

[1] See "Hilbert's Lecture Courses, 1886–1934," this Volume, 709–726.

as well as to the foundations of general relativity and quantum mechanics. However, Hilbert's unpublished writings show his interest to be even deeper and more extended, a fact testified to by manuscripts for talks and individual lectures, and in notes and *Ausarbeitungen* for lecture courses. They show Hilbert not only as a skillful and ingenious mathematician, but also as a scientist with a profound understanding of the physics of his time, both in its technical details and in its conceptual foundations. We see a mathematician who contributes original ideas to the rapidly developing disciplines of theoretical physics, and we also see a *mathematical* logician pursuing an epistemologically motivated research program concerned with analyzing the most complex and deepest foundational problems of modern physics.[2] The unpublished papers also reveal him, even more than the published ones, as a mature philosopher of physical science, if one understands by philosopher someone who engages in the logical analysis of theories quite in the tradition of analytical philosophy. Hilbert reflects profoundly and in a deeply informed way on the central epistemological and ontological presuppositions and implications of the conceptual innovations of relativistic, statistical and quantum physics. In these lectures, the philosophical nature of Hilbert's thought emerges with striking clarity. The value of Hilbert's unpublished contributions to physics cannot be overestimated. In his appreciation of Hilbert's work published in 1922, Otto Blumenthal remarks that Hilbert had published relatively little on physics, at least when compared to his engagement and achievements. He then issues a general request:

> I would like to close this survey of Hilbert's scientific achievements with a request for him. He worked during his classical period, like Weierstraß did during his, mainly for himself and for the circle of his Göttingen students, but he brought very little to publication. The amount of the unknown that had to be worked through may have been the reason for this, just as much as his reluctance to give out anything imperfect or incomplete. But, on the other hand, would he consider the wealth of problems that have been opened up for us by his results, the solutions of which require the work of so many researchers and therefore would he make his insights accessible to us at least in the simple and little time-consuming way of copied lecture notes.[3]

[2] Blumenthal reports Hilbert as saying that "physics is certainly far too difficult for the physicists." See *Blumenthal 1922*, 70.

[3] "Ich möchte diesen Überblick über Hilberts wissenschaftliche Leistungen mit einer Bitte an ihn schliessen. Er hat in seiner klassischen Periode, ebenso wie Weierstraß in der seinigen, in der Hauptsache für sich und seinen Göttinger Schülerkreis gearbeitet, wenig an die Öffentlichkeit gebracht. Die Menge des Neuen, das zu verarbeiten war, mag davon ebenso viel die Ursache sein wie die Scheu, etwas Unvollkommenes, Unvollständiges herauszugeben. Möge er demgegenüber bedenken, welche Fülle von Problemen uns seine bisherigen Ergebnisse erschließen, von Problemen, zu deren Bewältigung Massenarbeit gehört, und uns deshalb seine Erkenntnisse wenigstens in der anspruchslosen und wenig zeitraubenden Form vervielfältigter Vorlesungshefte zugänglich machen!" *Blumenthal 1922*, 71. Blumenthal repeats the

In these Volumes, we fulfill this request as far as the most important lecture notes on physics are concerned. Indeed, we present a selection of the unpublished work which attempts to bring out the significance and potential of Hilbert's contributions to the foundations of physics in all their aspects. For reasons made clear below, this selection of hitherto unpublished work is supplemented by two works on relativity theory that Hilbert published in 1915 and 1917 respectively.

In the following, we will comment only on the period from 1915 on, and focus on the most important contributions represented in the present Volume.

1 The Contents of the Volume

Three major themes pervade Hilbert's thinking about the foundations of physics in the period with which the present Volume is concerned: 1) the formulation of a generally covariant theory of gravitation and electromagnetism and his ideas about a unified theory of the gravitational and electromagnetic fields based on a generalization of Maxwell's equations; 2) the mathematical formulation of quantum theory and its physical interpretation; and 3) the reflection on epistemological questions suggested by the developments of general relativity and quantum theory.

The desire to document these three themes was of fundamental importance in the selection of the unpublished documents for this Volume. The selection is centered on three major documents, corresponding to the three themes mentioned above. The first theme is documented by Hilbert's own two major lecture courses entitled "Foundations of Physics" which deal with general relativity, the unification of gravitation and electromagnetism, and its mathematical foundations. To document the second theme, we include Hilbert's two major lecture courses on the mathematical methods of quantum theory. These two pairs of lecture courses speak more or less for themselves, i.e., they do not need much additional editorial explanation and conceptual clarification. Lastly, Hilbert's philosophical reflections are documented by manuscripts for lectures dealing with causality, irreversibility, and the completeness of science. In order to give a better understanding of these documents, we have supplemented our selection by a number of smaller documents that shed further light on the emergence and refinement of Hilbert's ideas. For completeness and purposes of comparison, we have also included Hilbert's two published papers on the general theory of relativity published in 1915 and 1917, both under the title "Foundations of Physics," distinguished by

request, this time specifically concerning the lectures on physics, in *Blumenthal 1935*, 417. See also the plea in Sommerfeld's funeral oration held just before Hilbert's burial in *Sommerfeld 1943*, 213.

the appellation "First Communication" and "Second Communication" respectively, and both published in the *Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.*

The Volume is divided into six chapters. The division is based on a mixture of thematic and chronological considerations, and aims to preserve the connection of documents as intended by Hilbert. The distribution is as follows:

Chapter 1: Hilbert's two "Communications" on the "Foundations of Physics" as published originally in 1915 and 1917 in the *Nachrichten* of the Göttingen Academy of Sciences.

Chapter 2: The *Ausarbeitungen* of a two-semester course entitled "Foundations of Physics" held at the University of Göttingen in the summer semester of 1916 and the winter semester of 1916/17.

Chapter 3: Proofs (a large section of which survived in the Hilbert archives) for Hilbert's "First Communication" in the *Nachrichten* of 1915 as well as three sets of notes for lectures on specific topics related to the subject matter presented in Chapters 1 and 2.

Chapter 4: Two sets of notes for lectures from 1921 and 1923 dealing with general epistemological questions raised by the new physics.

Chapter 5: Parts of an *Ausarbeitung* of a 1912 lecture course on classical and quantum radiation theory held at the University of Göttingen.

Chapter 6: An *Ausarbeitung* of Hilbert's two courses held at the University of Göttingen in the winter semesters 1922/23 and 1926/27 that were devoted to the old and new quantum theory.

Chapter 1 presents Hilbert's two "Communications" in their original published versions. The differences between these and a merged and revised version which appeared in 1924 in the *Mathematische Annalen* are pointed out in Editorial Notes. Also annotated are differences in the 1935 reprint of the 1924 version in Hilbert's *Gesammelte Abhandlungen.* Chapter 2 presents the two unpublished *Ausarbeitungen* of the course entitled "Foundations of Physics," which present the rich mathematical background of Hilbert's published "Communications" with the same title presented in Chapter 1. Chapter 3 presents the page proofs for the "First Communication." There are a number of small differences between the proofs and the published version that are already pointed out in the notes to the published paper in Chapter 1, but here we provide the full text of the proofs that survived. Chapter 3 also presents a set of notes for what appears to be a lecture on the subject matter of the "First Communication" given some time in late 1915 or 1916. Also included in this Chapter is an unpublished typescript with notes of a lecture on the "Causality Principle in Physics" given just a few weeks before the publication of Hilbert's "Second Communication" in 1917 and which covers somewhat similar material. Finally, Chapter 3 presents Hilbert's handwritten notes for a series of lectures on space and time delivered by Hilbert in Bucharest in the spring of

1918. In Chapter 4, we present Hilbert's handwritten notes for a lecture entitled "Nature and Mathematical Knowledge" given in Copenhagen in 1921 on the occasion of the award of an honorary doctorate. Chapter 4 also contains Hilbert's handwritten notes for a set of three lectures given in the summer of 1923 at the University of Hamburg. These lectures were announced under the title "Epistemological Questions of Modern Physics" and represent, perhaps, Hilbert's most explicit and most original discussion of his understanding of the epistemological and ontological implications of modern physics. Chapter 5 contains selections from the *Ausarbeitung* of the 1912 lecture course on radiation theory. This selection (we publish only Chapters 1 and 5–13) is presented here because it contains among other things a discussion of the early quantum theory of radiation. (Chapters 2–4 are omitted since they reproduce material on special relativity that is covered elsewhere.) In Chapter 6, we present in full the *Ausarbeitung* of Hilbert's first course on quantum theory, given in 1922/23 at the University of Göttingen, and the second part of the *Ausarbeitung* of Hilbert's second course on quantum theory, given in Göttingen in 1926/27. The first part of the 1926/27 course is a repetition of the 1922/23 course with only minor deviations, so it is omitted here. The 1922/23 *Ausarbeitung* has comments, corrections and additions in Hilbert's hand; the differences between the two *Ausarbeitungen* as well as Hilbert's handwritten notes are explicitly noted.

The general principles governing the selection of unpublished documents for the Edition as a whole are set out in detail in the "Introduction to the Edition" presented in Volume 1. A further guiding principle for this Volume was above all to select manuscripts which show clearly the originality of Hilbert's contributions to, and reflection on, modern physics, in particular quantum theory and the general theory of relativity. For this reason, we have included Hilbert's first exposition of general relativity and the new theory of gravitation rather than his later lectures on the same topic ("Advanced Mechanics and New Theory of Gravitation," *Hilbert 1920**). We have omitted later lecture courses by Hilbert that emphasize particular applications of physical theories ("Electron Theory," *Hilbert 1917/18**) or which discuss the unity of the mathematical sciences ("Nature and Mathematical Knowledge," *Hilbert 1919**, "On the Unity of Science," *Hilbert 1923/24a**). Likewise, we have not included later lectures on physics of a more popular character addressed to a broader audience ("Space and Time," *Hilbert 1918/19**, "Basic Ideas of Relativity Theory," *Hilbert 1921/22**). These lecture courses (or parts thereof) will be considered among others for publication in Volume 6 of this series. Finally, lecture courses whose focus is not primarily the natural sciences but in which Hilbert nevertheless comments on physics are also omitted from Volumes 4 and 5. Two cases in point are Hilbert's 1905 lectures "The Logical Principles of Mathematical Thought" (*Hilbert 1905**), and Hilbert's 1924/25 lecture course "On the Infinite" (*Hilbert 1924/25**). These will be included in Volumes 2 and 3 of this series respectively, since properly speaking their primary focus is the foundations of pure mathematics. One might say the same of Hilbert's published lectures on "Axiomatic Thought" (*Hilbert 1918*) and his 1930 Königsberg lecture on "Science and Logic" (*Hilbert 1930*). Although they contain specific considerations about physics, their main concerns are with foundational questions about mathematics and science in general.

It should also be kept in mind that the public perception of Hilbert's ideas on physics was mediated to a large extent by two later published works. One is the widely-read book *Methods of Mathematical Physics*, co-authored with Richard Courant (*Courant and Hilbert 1924*, *Courant and Hilbert 1937*). As Courant indicates in the Preface, the book was largely composed by Courant himself and it lists Hilbert as a co-author, mainly to give credit to the general influence of his ideas. The second is the joint paper by Hilbert, John von Neumann, and Lothar Nordheim "Foundations of Quantum Mechanics" (*Hilbert, von Neumann and Nordheim 1928*), which emerged from Hilbert's 1926/27 lectures on the subject and was inspired by Hilbert's program for the axiomatization of quantum physics. As indicated in the paper itself, the final version of the published article was composed by Nordheim and includes important mathematical contributions by von Neumann. We have omitted this publication from the present Volume, although we stress that the lectures given in Chapter 6 contain the relevant background material for this very important paper.

2 Hilbert's Work in Physics Represented in this Volume

The period covered by this Volume, i.e., from 1915 to 1926/27, was the most productive one in all of Hilbert's engagement with physics.[4] The year 1915 marks the point in Hilbert's investigations into the foundations of the natural sciences in which he no longer merely reflects on the conceptual problems and logical gaps in existing physical theories, but begins to advance his own original solutions to some of the more fundamental problems. This year, therefore, marks an important shift in Hilbert's understanding of physics. A new interest in current fundamental research into the natural sciences remained characteristic for his subsequent work, despite extended periods of concern with other problems across many areas. This interest pertains to the general theory of relativity and a unified field theory of gravitation and electromagnetism, including a fundamental theory of matter. But it is also characteristic for his later investigations in the mid-1920s into the conceptual and logical structure of the emerging and the maturing quantum theory.

[4]This assessment is somewhat at odds with Weyl's periodization, which singles out the years between 1910 and 1922 as Hilbert's most intense period in his work on physics; see *Weyl 1944*. For a more comprehensive discussion, see *Corry 2004* and *Majer 2006*.

This is not to say that there is no continuity between Hilbert's work after 1915 and his earlier work. Hilbert's main interest in foundational problems and the methodological means that he employs in their solution derive from his early axiomatic work in geometry. It is his interest in an analysis of the logical structure of physical theory and the axiomatic method as a general approach to such an analysis that provide the background for Hilbert's work both before and after the year 1915. But the application of the axiomatic method to such advanced and abstract physical theories like the theory of relativity and quantum theory poses a formidable challenge. In these fields many different aspects of scientific reasoning are interwoven, which means, for one thing, that the variation or addition or deletion of axioms is by no means as easy as it is in geometry.

An outstanding and lasting fruit of Hilbert's engagement with the natural sciences is represented by the two communications entitled "Foundations of Physics" from late 1915 and late 1916 (*Hilbert 1915*, *Hilbert 1917*) presented in Chapter 1 of this Volume. These two publications contain the essence of Hilbert's insights in a very condensed form. A broader and more comprehensive exposition of Hilbert's perspective and his ideas is set out in the two major lecture courses from the summer of 1916 and the winter of 1916/17, the *Ausarbeitungen* of which were given the same title: "Foundations of Physics." These lecture courses are presented in Chapter 2 and it is in these much more detailed expositions that we get an idea of how Hilbert envisaged a true axiomatic presentation of the new physics. In an impressive and illuminating exposition, Hilbert here goes back to the foundations of non-Euclidean, Riemannian differential geometry, and shows how these more refined geometrical concepts provide the background for treating the problem of the relationship between geometry and experience in the new relativistic physics. In the first part of these lectures, Hilbert also gives the first axiomatic analysis of the conceptual foundations of the special theory of relativity, an endeavor that was taken up some years later by Constantin Carathéodory (*Carathéodory 1924*) and Hans Reichenbach (*Reichenbach 1924*). A number of intriguing and complex aspects of Hilbert's work on the foundations of physics from this period are documented by the short manuscripts reproduced in Chapter 3. This Chapter also reproduces Hilbert's first presentation of the new concepts of space and time designed for a broader audience.

In the manuscripts for lectures at Copenhagen, Hamburg, and Zürich from 1921–1923, which are given in Chapter 4, Hilbert explicitly addresses the philosophical and metaphysical consequences of the theories of relativity and quantum theory. In particular, he addresses the metaphysical question of what part of the respective theories can be considered as objective and real, and what part only stems from our subjective and anthropomorphic point of view. Hilbert's special contribution is to identify a number of crucial epistemological problems on which the new physics casts an entirely new light.

These problems are the question of causality in a generally covariant theory, and the related problem of the time-reversal invariance of fundamental laws in view of the irreversibility observed in our practical world. More generally, he also reflects on the issue of the completeness of physical theories, and considers the question of the apriori and aposteriori with respect to geometrical concepts, and also the debate about geometrical conventionalism. In Chapter 5, we give an example of Hilbert's earlier work, demonstrating the difficulties of achieving satisfactory conceptual clarity in the emerging quantum theory. The contentions Hilbert presents here led to a significant controversy among physicists, and the lectures vividly document Hilbert's reflections on the difficulties arising from the conceptual integration of the idea of quanta into the statistical theory of radiation in the early quantum theory.

Many of the difficulties Hilbert raises here were clarified in the later quantum theory that he discusses in full detail in his lectures of 1922/23 and again in 1926/27; these lectures make up Chapter 6. The 1922/23 lecture course on quantum theory deals with the quantization conditions underlying Bohr's theory of atomic spectra, and, in particular, with the problem of generalizing those conditions to systems of more than one dimension and several degrees of freedom as advanced in works by Sommerfeld, Schwarzschild, Epstein, Einstein and others.[5] To this end, Hilbert begins his presentation with an extensive discussion of the variational calculus applicable to classical mechanics with several degrees of freedom and derives the Hamilton-Jacobi equations in some detail. This discussion provides the basis for the introduction of a concept that Hilbert calls the "quantrix" and which he regards as the proper mathematical entity subject to the quantization rules.

The first part of Hilbert's second exposition of quantum mechanics in 1926/27 repeats the 1922/23 exposition. It then presents the "new quantum mechanics," discussing the latest work by Heisenberg, Schrödinger, Jordan, Born, and other quantum physicists, with particular emphasis on the mathematical concepts employed in the new matrix and wave-mechanics.[6] Heisenberg's matrix mechanics is presented as a natural application of Hilbert's own theory of linear integral equations developed from 1909 on, which in part is a linear algebra for systems with infinitely many variables, and Hilbert then discusses the eigenvalue problems for the harmonic oscillator, the rotator and the hydrogen atom respectively. In the penultimate chapter of the lectures, Hilbert takes up the problem of applying quantum theory to statistical mechanics, discussing the distinction between Bose-Einstein and Fermi-Dirac

[5]See, e.g., *Sommerfeld 1915*, *Sommerfeld 1916*, *Schwarzschild 1916c*, *Epstein 1916a*, *Epstein 1916b*, *Einstein 1917b*, and, for a general historical discussion, *Mehra and Rechenberg 1982a*, ch. II.4.

[6]For a comprehensive historical account, see *Mehra and Rechenberg 1982b*, *Mehra and Rechenberg 1982c*, *Mehra and Rechenberg 1982d*, *Mehra and Rechenberg 1987a*, *Mehra and Rechenberg 1987b*, *Mehra and Rechenberg 2000*, *Mehra and Rechenberg 2001*.

statistics. Finally, Hilbert discusses Born's recently proposed probability interpretation of the wave function,[7] and sets this interpretation in the context of a new axiomatic analysis of the fundamental concepts of quantum mechanics, which follows the then recently published work of Jordan.[8]

So much for a general description of the contents of the Volume. In the next two sections, a more detailed discussion of the historical context of Hilbert's two communications on the "Foundations of Physics" deals with subjects and themes involving the contents of Chapters 1–3. It is presented here because it spans those Chapters collectively, and because the division of material we have adopted means that those Chapters do not represent a strictly chronological presentation of Hilbert's treatment of general relativity, thus making a general survey desirable.

3 Hilbert's "First Communication" on the "Foundations of Physics" and the Energy Concept in General Relativity

Recent historical scholarship has paid a great deal of attention to the *original* version of Hilbert's "First Communication" on the "Foundations of Physics" (*Hilbert 1915*), and to its prehistory.[9] This interest is motivated mainly by Hilbert's prominent role in the genesis of general relativity. Hilbert's note was published almost simultaneously with Einstein's celebrated paper (*Einstein 1915d*, submitted for publication to the Prussian Academy on 25 November 1915), in which he marked the completion of his search for a general theory of relativity by publishing his gravitational field equations.[10] Hilbert's paper presented generally covariant field equations using a variational formulation, but it also contained the gravitational field equations much as they were presented in Einstein's communication. Therefore, it has become customary to acknowledge Hilbert's contribution to the genesis of general relativity by

[7] *Born 1926a*, *Born 1926b*, *Born 1927*; for historical discussion, see *Pais 1982b* and *Mehra and Rechenberg 2000*, ch. I.3.

[8] *Jordan 1926a*.

[9] For further literature discussing Hilbert's two communications, see *Pauli 1921*, *Born 1922*, *Mehra 1974*, *Earman and Glymour 1978*, *Eisenstaedt 1982*, *Pais 1982a*, *Norton 1984*, *Stachel 1992*, *Vizgin 1994*, *Corry, Renn and Stachel 1997*, *Corry 1999a*, *Corry 1999b*, *Rowe 1999*, *Sauer 1999*, *Stachel 1999*, *Rowe 2001*, *Vizgin 2001 Sauer 2002*, *Corry 2004*, *Goenner 2004*, *Logunov, Mestvirishvili and Petrov 2004*, *Sauer 2005*, *Renn and Stachel 2007*, *Brading and Ryckman 2008*.

[10] For a comprehensive historical discussion of Einstein's path toward general relativity, see *Janssen et al. 2007a*, *Janssen et al. 2007b*.

referring to classical general relativity as the "Einstein-Hilbert Theory," particularly when the formulation of the theory by means of a variational principle is to be emphasized.

The interest in Hilbert's original paper was reawakened about ten years ago when it was pointed out that an extensive (but incomplete) set of proofs for this note exists among Hilbert's papers (*Corry, Renn and Stachel 1997*). These proofs bear the printer's stamp of 6 December 1915, and display a number of significant differences when compared to the published version. The debate with respect to these proofs initially focussed on the issue of priority, since it had been insinuated that Hilbert made substantial changes only *after* having seen Einstein's paper and without proper acknowledgement. As one of the Editors of this Volume has argued, however, the proofs do not in fact justify any such claim (*Sauer 1999*). We recapitulate here the main points.

Einstein visited Göttingen in the summer of 1915 to deliver a series of six Wolfskehl lectures to the Göttingen mathematicians and physicists. In these lectures Einstein presented his so-called *Entwurf* theory, i.e., the precursor to the general theory of relativity, a theory which is expounded in the major review that Einstein published in 1914 under the title "The Formal Foundation of the General Theory of Relativity" (*Einstein 1914*). A major part of the exposition in the "Formal Foundations" paper was concerned with a mathematical derivation of the field equations of the *Entwurf* theory from a variational principle. But since the equations themselves were not generally covariant, the variational integral was not invariant either.

Hilbert had studied this paper carefully, and had understood its argument in all technical details.[11] It is therefore quite possible that he found problems with Einstein's derivation of the field equations, and sought to revert to a derivation that remained fully covariant and restricted the covariance only at a clearly defined juncture. His heuristic idea was to try to connect Einstein's theory to a generalized version of Maxwellian electrodynamics which had recently been proposed by Gustav Mie. Mie's non-linear generalization of

[11] See Einstein to Arnold Sommerfeld, 15 July 1915: "In Göttingen I had the great pleasure of seeing that everything was understood down to the details. I am quite enchanted with Hilbert. That's an important man for you!" (*CPAE8-A 1998*, Doc. 96). Immediately after his breakthrough to general covariance Einstein referred to Hilbert in a letter to Heinrich Zangger, 26 November 1915: "The theory is beautiful beyond comparison. However, only *one* colleague has really understood it, [...]," (*CPAE8-A 1998*, Doc. 152). The latter comment was written in a mood of misgivings about Hilbert's parallel publication of his "First Communication," as is clear from a similar quote in Einstein's letter to Zangger, written at about the same time, before 4 December 1915: "Currently I am also having quite a curious experience with my dear colleagues. All but one of them is trying to poke holes in my discovery or to refute the matter, if only so very superficially; just one of them acknowledges it, insofar as he is seeking to 'partake' in it, with great fanfare, after I had initiated him, with much effort, into the gist of the theory." (*CPAE9 2004*, p. 36).

Maxwellian electromagnetism was also presented in a variational formulation, albeit strictly Lorentz covariant. Hilbert's central idea had been to combine both Mie's and Einstein's theories by means of an invariant variational integral governing the theory.

In the meantime, Einstein himself had found fault with his theory, and had returned to general covariance, as is clear from the series of four communications which Einstein presented to the Prussian Academy in November of 1915. When Hilbert discovered this, he saw himself forced in November of 1915 to write up his insights somewhat prematurely.

Through the proofs of Hilbert's "First Communication," we have learned more about his original ideas and his own particular path towards general relativity. There are two significant differences between the proofs of Hilbert's paper and the published version. The first difference is actually a rather minor point, even though it has received a great deal of attention in the debates surrounding the issue of priority. The proofs do not yet contain the gravitational field equations published by Einstein in his fourth and final note of 25 November in their explicit form using the Ricci tensor and its trace. These equations were added in the published version of Hilbert's paper, but not only did Hilbert properly cite Einstein's fourth note in this context, he also pointed out that the derivation of the explicit form of the Einstein equations from the variational formulation is, in fact, rather trivial.[12] The other substantive changes that Hilbert introduced at proof stage concern the discussion of the energy concept in his theory. These changes are more interesting and more important, both from a historical and a systematic point of view.

At first sight, what seems to be the major difference between the proofs and the published version of Hilbert's "Communication" is the formulation in the proofs of a third axiom that was dropped altogether in the version published.

In essence, the argument presented in the proofs was the following. In order to derive an expression for energy, Hilbert considered his variational integral (proofs, p. 2, this Volume, p. 318)

$$I = \int H \sqrt{g} dS \tag{1}$$

He then looked at what we would now call the Lie variation of this integral. Since the Lagrangian H was assumed to depend on the components of the metric tensor $g^{\mu\nu}$ and its first and second derivatives as well as on the components of the electromagnetic four-potential q_s and its first derivatives, although *not* on the coordinates themselves, the integral should be invariant under those changes of the metric induced by an arbitrary infinitesimal transformation of the coordinates. Technically, Hilbert assumed p^μ to be an

[12] See *Sauer 2005* for a more detailed discussion of this point and further references.

arbitrary infinitesimal vector field. The induced Lie variation of the metric would then be $\delta g^{\mu\nu} \propto p^{(\mu;\nu)}$ or, closer to Hilbert's notation (proofs, p. 5, this Volume, p. 321),

$$\delta g^{\mu\nu} \equiv p^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}_{,s} p^s - g^{\mu s} p^{\nu}_{,s} - g^{\nu s} p^{\mu}_{,s}. \tag{2}$$

In classical general relativity, the way to proceed from here would be to look at the formal variation of I with respect to $\delta g^{\mu\nu}$, and to remove derivatives on $p^{(\mu;\nu)}$ by partial integrations; then, in a second step, one would remove the derivative involved in $p^{(\mu;\nu)}$ itself by a further partial integration. What results is a bulk integral depending linearly on the arbitrary vector field p^{μ}, as well as surface integrals produced by the partial integrations. The fact that p^{μ} is arbitrary then implies vanishing of the bulk integrand itself; this then produces the desired results such as the vanishing of the covariant divergence of the energy-momentum tensor. The procedure also produces special cases of Noether's theorems to be considered in a moment.

In contrast to what would occur in a more modern treatment, Hilbert does not carry out the calculations on the level of the action integral, but rather concentrates on the changes of the Lagrangian density itself. These still have to be integrated, while also dealing with intermediate terms that later cancel out when the integrations are actually carried out. In the proofs, however, Hilbert proceeded in an even more unusual manner. In performing the partial integrations, Hilbert's first step is not to replace *all* derivatives of p^{μ} terms involving H; rather he retains those terms proportional to the first derivative of p^{μ}. Consequently, he arrives at an expression of the form (proofs, p. 6, this Volume, p. 322)

$$E = \sum \left(e_s p^s + \sum e^l_s \frac{\partial p^s}{\partial w^l} \right) \tag{3}$$

where e_s and e^l_s are to be interpreted by looking at the explicit integral obtained after performing the necessary partial integrations.

Hilbert now shows that, using the field equations, E can be transformed into a pure divergence. He also argues that if you now proceed from equation (3) and also proceed to convert the derivative acting on p^{μ} to e^l_s, then the resulting expression multiplying the arbitrary vector p^{μ} must vanish. Hilbert now identifies the vanishing of the divergence of e^l_s with the energy theorem of the old, Lorentz-covariant theory, and he concludes that this divergence can only vanish independently if the vector e^s vanishes independently. This condition is postulated as a third axiom to the theory, and since it is not in itself a covariant equation, it represents a coordinate condition, restricting admissible coordinate systems to those in which $e^s \equiv 0$.

In the published version of Hilbert's note, a very different expression is derived to represent the energy vector. Moreover, the vanishing of the divergence of this vector is shown to hold for all coordinates. Hence the conservation of energy no longer serves to provide an effective restriction of the covariance of the theory, and, consequently, the third axiom of the proofs was dropped in the published version.

More than two years later, in March 1918, Hilbert's Göttingen colleagues, including Felix Klein and Carl Runge, were deeply engaged in disentangling the intricacies of the problem of energy-momentum conservation in general relativity. At one point during the debates that ensued, Klein and Runge had an idea that must have struck Hilbert as reminiscent of his early attempts to come to grips with the problem of energy conservation. In any case, he sent the original proofs of his "First Communication" to Klein, pointing out that he, too, at one time had similar ideas, and in particular had tried to recover the conservation laws of the classical theory by using special coordinates. But, he goes on,

> But I suppressed the whole thing, since the thing did not seem clear to me.[13]

The problem of energy conservation is not only fascinating from a historical persepctive, but also points to a philosophically interesting issue in the foundations of general relativity.[14]

One way to view Hilbert's "First Communication" on the "Foundations of Physics" is as one of the decisive steps in a line of development that originates in the restricted covariance of Einstein's original *Entwurf* theory and eventually culminates in Emmy Noether's celebrated theorems about the relation between symmetries and conservation laws. Briefly, the main steps of this line of development were the following:

- Einstein's "Formal Foundations" (*Einstein 1914*): Restricted covariance in the variational derivation of the gravitational field equations of the *Entwurf* theory.
- Hilbert's proofs for his "First Communication": Generally covariant field equations but restricted covariance introduced by a third axiom that postulates the vanishing of an energy expression.
- Hilbert's "First Communication" itself (*Hilbert 1915*): Generally covariant field equations without restrictions of the covariance group. No further third axiom, and a complete treatment of the invariance properties by means of the Lie variation.

[13]"Ich habe aber die ganze Sache später unterdrückt, weil die Sache mir nicht reif erschien." *Hilbert and Klein 1985*, p. 144.

[14]See, e.g., *Hoefer 2000*, *Brading 2005* for some further discussion.

- Klein's "First Note" (*Klein 1917*) consisting of extracts of the correspondence between Klein and Hilbert on this matter: A first comparison of Einstein's and Hilbert's treatment of the energy problem by looking at the Lie variation of the action integral rather than at the changes of the Lagrangian alone. Speculations about "improper" conservation laws by Hilbert. For the Lie variation, the vanishing of the boundary terms is considered from the beginning.

- Klein's "Second Note" (*Klein 1918*): A further investigation of the various energy concepts, in particular those advanced by Einstein and Hilbert. The Lie variation is considered, taking into full account all boundary terms. Einstein's and Hilbert's energy expressions are identified as the contributions from the bulk integral and the surface integrals respectively.

- Noether's Note (*Noether, E. 1918*): An extension of Klein's treatment endowing it with full generality, i.e., without restriction to four dimensions and for arbitrary local and global group transformations.

It is particularly intriguing to trace back to Hilbert's "First Communication" Emmy Noether's distinction between "proper" and "improper" conservation laws. In the last section of her famous paper on "invariant variational problems," using her second theorem Noether gives a definitive justification for what she calls an "assertion of Hilbert's [*eine Hilbertsche Behauptung*]" concerning the validity of "proper" energy theorems:

> From the preceding finally follows the proof of a theorem due to Hilbert about the connection between the failure of proper energy theorems with "general relativity" (first note by Klein, Göttinger Nach. 1917, response, 1. paragraph) in a generalized group-theoretic way.[15]

The distinction between "proper" and "improper" conservation laws is introduced by Noether in the following passage:

> The invariance with respect to the translation group, as is well-known, asserts that the x in $I = \int \dots \int f\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots\right) dx$ do not appear explicitly. The corresponding divergence relations
>
> $$\sum \Psi_i \frac{\partial u_i}{\partial x_\lambda} = \mathrm{Div} B^{(\lambda)} \qquad (\lambda = 1, 2, \dots, n)$$
>
> shall be called "energy relations" since the "conservation theorems" that follow from the variational problem correspond to the "energy theorems" and the $B^{(\lambda)}$ correspond to the "energy components." Then it follows: *If I*

[15]"Aus dem Vorhergehenden ergibt sich schließlich noch der Beweis einer Hilbertschen Behauptung über den Zusammenhang des Versagens eigentlicher Energiesätze mit "allgemeiner Relativität" (erste Kleinsche Note, Göttinger Nachr. 1917, Antwort, 1. Absatz), und zwar in verallgemeinerter gruppentheoretischer Fassung." *Noether, E. 1918*, 256–257.

> *allows for the translation group, then the energy relations become improper ones, if and only if I is invariant under an infinite group that contains the translation group as a subgroup.*[16]

In a footnote, Noether explains

> The energy theorems of classical mechanics and also those of the old "relativity theory" (where $\sum dx^2$ transforms into itself) are "proper" ones, since here no infinite groups occur.[17]

The justification for Hilbert's "assertion" given by Noether at the end of her paper is then the following:

> Hilbert phrases his theorem in such a way that the failure of proper energy theorems is a characteristic feature of the "general theory of relativity." For this statement to be literally true, one needs to understand the term "general relativity" in a more general sense as is usually done, thus that it includes also the previous groups that depend on n arbitrary functions.[18]

How did Noether come to consider the question of the distinction between proper and improper conservation laws? She herself points to Klein's "First Note," and in particular to a remark of Hilbert's to Klein, repeated in that Note, which was an excerpt from the correspondence between Klein and Hilbert about the latter's "First Communication."

In his Note, Klein reproduces the following passage he had written to Hilbert:

> If we now assume the validity of the 14 field equations [...], then the e^ν [i.e., Hilbert's energy vector of his published note] reduce to this extra term and the claim of your note that
>
> $$\sum_\nu \frac{\partial \sqrt{g} e^\nu}{\partial w^\nu} = 0$$

[16]"Die Invarianz gegenüber der Verschiebungsgruppe sagt bekanntlich aus, daß in $I = \int \ldots \int f\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \ldots\right) dx$ die x nicht explizit in f auftreten. Die zugehörigen n Divergenzrelationen

$$\sum \Psi_i \frac{\partial u_i}{\partial x_\lambda} = \mathrm{Div} B^{(\lambda)} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

seien als „Energierelationen" bezeichnet, da die dem Variationsproblem entsprechenden „Erhaltungssätze" Div $B^{(\lambda)} = 0$ den „Energiesätzen", die $B^{(\lambda)}$ den „Energiekomponenten" entsprechen. Dann gilt also: *Gestattet I die Verschiebungsgruppe, so werden die Energierelationen dann und nur dann uneigentliche, wenn I invariant ist gegenüber einer unendlichen Gruppe, die die Verschiebungsgruppe als Untergruppe enthält.*" *Noether, E. 1918*, p. 255.

[17]"Die Energiesätze der klassischen Mechanik und ebenso die der alten „Relativitätstheorie" (wo $\sum dx^2$ in sich übergeht), sind „eigentliche", da hier keine unendlichen Gruppen auftreten." (Ibid.)

[18]"Hilbert spricht seine Behauptung so aus, daß das Versagen eigentlicher Energiesätze ein charakteristisches Merkmal der „allgemeinen Relativitätstheorie" sei. Damit diese Behauptung wörtlich gilt, ist also die Bezeichnung „allgemeine Relativität" weiter als gewöhnlich zu fassen, auch auf die vorangehenden von n willkürlichen Funktionen abhängenden Gruppen auszudehnen." *Noether, E. 1918*, 256–257.

> holds, appears as a mathematical identity. That claim, therefore, cannot be well regarded as analogon to the conservation theorems of energy as they hold in the usual mechanics. For, if we write in the latter
>
> $$\frac{d(T+U)}{dt} = 0,$$
>
> then this differential relation does not hold identically but only as a consequence of the differential equations of mechanics.[19]

It should be noted that Klein explicitly extends the same observation to Einstein's treatment of the energy problem, for he says

> [...] I want to point out that, of course, the same that holds for your theorem (19) also holds for the "conservation theorems" as they were formulated by Einstein in 1916.[20]

In his response to Klein's letter, Hilbert writes

> As regards the matter of the fact, I completely agree with your argument: *Emmy Noether*, whose assistance I called upon a year ago for the clarification of such analytical questions concerning my energy theorem, found at the time that the energy components that I had constructed—like Einstein's—can formally be transformed by means of the Lagrangian differential equations (4), (5) of my first communication into expressions whose divergence vanishes identically, that is without assuming the validity of the Lagrangian equations (4), (5). On the other hand, since the energy equations of classical mechanics, elasticity theory, and electrodynamics are only satisfied as a consequence of the Lagrangian differential equations of the problem at hand, it is justified if you do not regard my energy equations as the analogon of the ones in those theories. Of course, then I claim that for *general* relativity, i.e., for the case of *general* invariance of Hamilton's function, energy equations that correspond to the energy equations of the orthogonal-invariant theories in your sense, do not

[19] "Nehmen wir jetzt die 14 Feldgleichungen [...] hinzu, so reduziert sich e^ν [i.e., Hilbert's energy vector of his published note] auf diesen Zusatzterm und die Angabe [...] Ihrer Note, daß

$$\sum_\nu \frac{\partial \sqrt{g} e^\nu}{\partial w^\nu} = 0$$

statt hat, erscheint als mathematische Identität. Besagte Angabe kann also wohl nicht als Analogie zum Erhaltungssatze der Energie, wie er in der gewöhnlichen Mechanik herrscht, angesehen werden. Denn wenn wir in letzterer schreiben:

$$\frac{d(T+U)}{dt} = 0,$$

so besteht diese Differentialbeziehung doch nicht identisch, sondern erst in Folge der Differentialgleichungen der Mechanik." *Klein 1917*, p. 475.

[20] "[...] will ich noch darauf aufmerksam machen, daß für die „Erhaltungssätze", wie sie Einstein 1916 formuliert hat, selbstverständlich das gleiche gilt, wie für Ihren Satz (19)." *Klein 1917*, 476.

exist at all; yes, I would like to view this circumstance as a characteristic feature of the general theory of relativity. For my assertion one could provide the mathematical proof.[21]

Thus, this *Behauptung* of Hilbert's originated in his "First Communication" on the "Foundations of Physics." It was finally established by Emmy Noether on the basis of her two theorems on invariant variational problems.

4 Hilbert's "Second Communication"

Hilbert's "Second Communication" on the "Foundations of Physics" is much less familiar, and consequently much less discussed than his first one.[22] On 4 December 1915, two weeks after the submission of his "First Communication," Hilbert presented for publication in the *Nachrichten* of the Mathematical-Physical Class of the Göttingen Academy of Sciences a "Second Communication" on the "Foundation of Physics."[23] However, further processing of this "Second Communication" was withheld. No doubt part of the reason for this was a desire to prepare the "First Communication" for the press. As discussed above, this involved a rewrite of the section that dealt with the energy concept in Hilbert's theory, as well as the other revisions that had to be introduced following the proof stage. Furthermore, the "Second Communication" was submitted for publication at a time of intense activity. Some days before, on 30 November, Hilbert and Carathéodory had presented a talk "on invariant theory" to the Göttingen Mathematical Society. On the very same day, Hilbert wrote to the Prussian Ministry on behalf of

[21] "Mit Ihren Ausführungen über den Energiesatz stimme ich sachlich völlig überein: *Emmy Noether*, deren Hülfe ich zur Klärung derartiger analytischer meinen Energiesatz betreffenden Fragen vor mehr als Jahresfrist anrief, fand damals, daß die von mir aufgestellten Energiekomponenten — ebenso wie die *Einstein*schen — formal mittelst der *Lagrange*schen Differentialgleichungen (4), (5) in meiner ersten Mitteilung in Ausdrücke verwandelt werden können, deren Divergenz *identisch* d.h. ohne Benutzung der *Lagrange*schen Gleichungen (4), (5) verschwindet. Da andererseits die Energiegleichungen der klassischen Mechanik, der Elastizitätstheorie und Elektrodynamik nur als Folge der *Lagrange*schen Differentialgleichungen des Problems erfüllt sind, so ist es gerechtfertigt, wenn Sie deswegen in meinen Energiegleichungen nicht das Analogon zu denen jener Theorien erblicken. Freilich behaupte ich dann, daß für die *allgemeine* Relativität, d.h. im Falle der *allgemeinen* Invarianz der *Hamilton*schen Funktion, Energiegleichungen, die in Ihrem Sinne den Energiegleichungen der orthogonalinvarianten Theorien entsprechen, überhaupt nicht existieren; ja ich möchte diesen Umstand sogar als ein charakteristisches Merkmal der allgemeinen Relativitätstheorie bezeichnen. Für meine Behauptung wäre der mathematische Beweis erbringbar." *Klein 1917*, 477.

[22] See, however, *Corry 2004*, ch. 8.4, *Renn and Stachel 2007* and *Brading and Ryckman 2008*.

[23] See entry 739 of the *Journal* for the *Nachrichten* (Archives of the Göttingen Academy of Sciences (GAA), Scient 66, Nr. 2), and *Geschäftliche Mitteilungen* (GM) of the *Königliche Gesellschaft der Wissenschaften, Göttingen* 1916, 6; cp also *Sauer 1999*, 560–561.

Emmy Noether's *Habilitation.* And the following day, i.e., on the 5 December, Hilbert and four of his Göttingen colleagues wrote a formal proposal for the election of Einstein as a Corresponding Member of the Göttingen Academy of Sciences. And three days after, on 7 December, Hilbert and Carathéodory continued their lecture to the Mathematical Society on invariant theory.

In late December, the hectic activities abated somewhat. Einstein was elected as a Corresponding Member of the Göttingen Academy, and conciliatory letters were exchanged between him and Hilbert. Early in 1916, Hilbert gave two more talks to the Göttingen Mathematical Society, the first on 25 January entitled "Invariantentheorie und allgemeiner Energiesatz," and the second three weeks later (15 February) entitled "Zur Integrationstheorie gewöhnlicher Differentialgleichungen." The titles are taken from the reports in Volume 25 (1917) of the *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* (p. 31 of the *2. Abteilung*). Although nothing is known about the precise contents of these talks, it seems clear that the first lecture concerns Hilbert's revisions of his "First Communication" regarding the omission of the third axiom. As far as the second lecture is concerned, what is known is that Hilbert gave a lecture course on differential equations in that semester and then a lecture course on partial differential equations in the following summer semester.[24] Hilbert may well have addressed a particular topic eventually treated in the published version of his "Second Communication," i.e., the problem of the uniqueness of solutions to differential equations arising from a generally invariant variational principle.

In this context, an important event for the prehistory of Hilbert's "Second Communication" is the publication of Schwarzschild's paper "The gravitational field of a material point according to Einstein's theory".[25] This paper took up Einstein's approximate integration of the gravitational field equations of his paper from 18 November on the anomalous perihelion advance of Mercury (*Einstein 1915c*) and presented the exact solution of the gravitational field equations for the static and spherically symmetric case. In addition to its astronomical implications for the classical tests of general relativity, Schwarzschild's solution directly concerned Hilbert's program of finding a particle solution that would represent the electron.

By mid-February, offprints of Hilbert's "First Communication" were finally available.[26] It may be assumed that Hilbert sent a copy to Einstein,

[24] *Ausarbeitungen* of these courses are extant in the Mathematics Institute of Göttingen University (*Hilbert 1915** and *Hilbert 1916b**). See the list of Hilbert's lectures, p. 719, below.

[25] *Schwarzschild 1916a*; the paper was presented to the Prussian Academy by Einstein on 13 January, read at the joint Academy meeting of both Classes on 3 February, and the published version was issued on 10 February. We do not know exactly when Hilbert learnt about Schwarzschild's solution.

[26] For details, see *Sauer 1999*, 543–544.

presumably with an invitation to visit Göttingen to attend three lectures on the history of mechanics until Galileo to be delivered on behalf of the Wolfskehl foundation by Conrad Müller.[27] Einstein's response from 18 February did not mention Hilbert's paper but did state his intention to visit Göttingen. Hilbert's "Second Communication" was presented to the Göttingen Academy for the second time on 26 February 1916, and the Journal for the Proceedings records that it was forwarded to the printer on 2 March 1916.[28] Probably on the same day, Einstein arrived in Göttingen for a second visit and remained for a few days.[29]

We know little about the precise contents of the first version of the "Second Communication," and similarly we can only guess about the contents and modifications of this second version, since it, too, was subsequently withdrawn. There are indications that Hilbert believed he had found a solution to the electron problem, or was just about to do so. In a letter to Hilbert, dated 29 February 1916, Mie wrote:

> That you have already succeeded in obtaining electrons theoretically surpasses all my expectations, and I am very curious to see your next publications.[30]

Mie's letter was written in response to a letter from Hilbert that in all probability had been written around 26 February when Hilbert had resubmitted his "Second Communication." Hilbert had also sent a brief postcard to Schwarzschild on the same day, asking him whether he had received an offprint of his "First Communication" and alerting him to the fact that the "postulate of $g = 1$ would be unnecessary." A few days later, Hecke sent a postcard to Hilbert, thanking him for offprints and asking:

> When will you publish the electron?[31]

Whether or not this is related to discussions between Hilbert and Einstein in Göttingen, Hilbert decided to withdraw the second version of his paper

---

[27]See the report in the *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* for 1917, Volume 25, *2te Abteilung*, p. 31.

[28]*Journal*; see note 23 above.

[29]In the letter from 18 February announcing his visit, Einstein writes that he will arrive on a Thursday; this would be 2 March, since he was still in Berlin on Monday, 28 February, and he was definitely in Göttingen on Friday, 3 March, for there is a postcard from Göttingen to his son postmarked on that day. Einstein was back in Berlin on 10 March, and in a letter to Hilbert from 30 March, he expresses gratitude for the "hoch interessanten und behaglichen Tage meines Aufenthaltes in Ihrem gastlichen Hause." See *CPAE8-A 1998*, Docs. 193, 196–198, 207.

[30]"Dass es Ihnen schon gelungen ist, Elektronen theoretisch zu erhalten, geht über all mein Erwarten, und ich bin sehr gespannt auf Ihre nächsten Veröffentlichungen." Mie to Hilbert, 29 February 1916, SUB Göttingen *Cod. Ms. Hilbert* 254/3.

[31]"Wann publizieren Sie das Elektron?"; see SUB Göttingen *Cod. Ms. Hilbert* 141/9.

from print at the beginning of March, during or immediately following Einstein's visit.[32] With his "Second Communication" withheld again, the ensuing months were apparently devoted to a more thoroughgoing investigation of the issues at hand.

The winter semester in Göttingen officially ended on 15 March 1916.[33] In April, Hilbert spent four weeks in Lugano, Switzerland.[34] When he came back at the beginning of May and began his summer lectures[35], he also had a new assistant for his work on physics, the mathematician Richard Bär from Zurich. For the summer semester, Hilbert had announced a lecture course on partial differential equations, in continuation of his lecture course on ordinary differential equations from the preceding winter semester. He also announced a course entitled "Introduction to the Principles of Physics," the *Ausarbeitung* of which was prepared by Bär under the title "Foundations of Physics." (This *Ausarbeitung* is presented in Chapter 2 of the present Volume.) In the Preface to this *Ausarbeitung*, a parallel set of lectures on invariant theory by Emmy Noether also was announced.[36] In addition to this, Hilbert gave his weekly seminar on the "Structure of Matter" together with Debye.[37]

From Bär's *Ausarbeitung* of the course on the "Foundations of Physics," we see that in May of 1916 Hilbert actually went back to the beginning. He gives considerable attention to an axiomatic discussion of Newtonian and special relativistic kinematics. He gives a brief account of three- and four-dimensional vector calculus. He then devotes some time to special relativistic dynamics, presenting Mie's electrodynamics as an alternative to the Abraham-Born theory based on the rigid electron hypothesis. Only in the last lecture,

---

[32] *Journal* (see note 23). The date "2.III.16" in the column "To the printer" was crossed out in pencil, and no dates were entered in the column for corrections.

[33] *Verzeichnis der Vorlesungen auf der Georg-August-Universität zu Göttingen* (VV), Göttingen: Kästner, 1916, p. 1.

[34] Hilbert wrote to Einstein on 27 May 1916: "Ostern war ich vier Wochen in Lugano und habe dort Fleisch u. Schlagsahne geschlemmt etc." See *CPAE8-A 1998*, pp. 290f. See also Königsberger to Hilbert, 8 April 1916 (SUB Göttingen *Cod. Ms. Hilbert* 187/14); Hilbert to Russell, 14 April 1916 (Russell Archives, McMaster University, Hamilton, quoted in *Sieg 1999*, 37ff); and M. Coehn to Hilbert, 21 April 1916 (SUB Göttingen *Cod. Ms. Hilbert* 453/3). Easter Sunday in 1916 was on 23 April.

[35] The summer term officially began on 16 April. However, note that "im allgemeinen finden die ersten Vorlesungen etwa 8 Tage nach offiziellem Semesteranfang statt" (VV, pp. 1, 35). The first lecture of Hilbert's course "Foundations of Physics" was given on 4 May 1916, *Hilbert 1916a**; p. 1 (this Volume, p. 81).

[36] *Hilbert 1916a**; see p. 1, this Volume, p. 81). Since the first attempt to obtain the *venia legendi* for Noether had failed (women were barred from obtaining the *habilitation* at Prussian universities), she was not allowed to announce lectures on her own. (See *Tollmien 1991*.)

[37] The course "Partielle Differentialgleichungen" was given on Monday mornings from 9:00 to 11:00; the course "Einleitung in die Prinzipien der Physik" was given on Thursday mornings, also from 9:00 to 11:00; and the seminar with Debye took place on Wednesday afternoons from 4:00 to 6:00. See the (VV) for Summer 1916, pp. 14–16.

probably held at the beginning of August,[38] does Hilbert discuss the reasons for generalizing special relativity to a generally covariant theory, following this with a brief prospective summary of general relativity.

Among the events relevant for Hilbert's work on physics during the summer, there is a cycle of Wolfskehl Lectures given by Marian von Smoluchowski from 20–22 June, and the publication of Einstein's paper entitled "Approximative Integration of the Field Equations of Gravitation" (*Einstein 1916b*), in which Einstein gave his first discussion of gravitational waves. There is also an exchange of letters between Einstein and Hilbert[39], triggered by Einstein's preparation of an account for Heinrich Rubens's physics colloquium of Hilbert's work. Einstein asks Hilbert for clarification of some points in his "First Communication." Einstein also very politely declined another invitation to come to Göttingen, this time to attend the Smoluchowksi lectures, although he indicates that he might come at the end of July. However, it seems that this third visit did not take place, and it was some time before Einstein visited Göttingen again.

In September, Hilbert was again on holiday in Switzerland. For the winter semester, which began in mid-October, Hilbert had initially announced a course on set theory. But this course was postponed to the following summer semester, and instead Hilbert continued his course on the "Foundations of Physics."[40] Bär was again entrusted with the task of preparing an *Ausarbeitung.* The term began, however, with important news. Einstein had just presented another paper to the Prussian Academy under the title "Hamilton's Principle and the General Theory of Relativity" (*Einstein 1916c*). In this paper, Einstein presented a derivation of the gravitational field equations on the basis of a variational principle, and also discussed the problem of energy conservation.[41] This may well have convinced Hilbert of the necessity to finally publish the results of his "Second Communication."

As a first step toward this, Hilbert gave in Göttingen on 21 November a talk on the principle of causality (see Chapter 3 of this Volume), and a continuation of it a week later on 28 November. Just before Christmas, on 23 December, he eventually, and for the third time, submitted his "Second Communication" for publication in the Göttingen Academy Proceedings.

In this final version of the "Second Communication" Hilbert is concerned with two kinds of question. First, he addresses some foundational issues and

[38]The summer semester officially ended on 15 August (VV), but already on 12 August, Carathéodory wrote a postcard addressed to Hilbert in Chur, Switzerland.

[39]Einstein to Hilbert, 25 May 1916, Hilbert to Einstein, 27 May 1916, Einstein to Hilbert, 30 May 1916 and 2 June 1916; see *CPAE8-A 1998*, Docs. 221–224.

[40]The joint seminar with Debye was also continued, as were Noether's lectures on invariant theory. Noether's course was again announced under Hilbert's name (VV).

[41]The paper was presented to the Prussian Academy on 26 October and issued on 2 November.

conceptual problems faced by general relativity, specifically that of measuring the space-time metric, and that of the conditions which must be in place to preserve the cause-effect relation among events. With this, Hilbert thus commits to print ideas he had been developing in the weeks and months before, ideas which he had already presented to his students in his ongoing lecture course (see Chapter 2, this Volume) and also to the wider audience of the Göttingen Mathematical Society. Secondly, in the second part of the "Communication" Hilbert discusses some problems that arise in applying the general theory of relativity to the empirical world. Among other things, he gives a new derivation of Schwarzschild's solution, and he also discusses the implications of this solution for the bending of light and for particle trajectories (planetary orbits). Hilbert also gives a first definition of a singularity in general relativity. According to the definition which Hilbert gives, however, the Schwarzschild radius represents a true singularity. Subsequent definitions of singularities have been of necessity more refined, and indeed the history of the concept of true space-time singularities is long and involved.[42]

Hilbert also deals with these topics in the second half of his course on the "Foundations of Physics" in the winter semester. At the end of this course, Hilbert grapples again with an intriguing problem presented in the "First Communication," i.e., the problem of identifying a reasonable expression for energy-momentum in the general theory, and of deriving physically plausible conservation laws for these quantities.

The end of these lectures and the publication of his "Second Communication" on the "Foundation of Physics" mark a certain completion of Hilbert's concerns with general relativity and unified field theory. A lecture course on set theory that had been announced for the winter semester 1916/17, but which had apparently been postponed, was then given in the summer of 1917.[43] The fact that Hilbert had intended to turn his full attention to foundational problems of logic is also obvious from his negotiations to stay in Göttingen after he had received a call to Berlin in January 1917.[44] Bär, the composer of the *Ausarbeitung* of the lectures on the "Foundations of Physics" in 1916/17, left Göttingen in August 1917, returning to his home city of Zürich. Another assistant with a background in physics, Fréedericksz, who was also working with Felix Klein, also left Göttingen some time between January 1917 and the summer of 1918. In their stead, Paul Bernays came to Göttingen from Zürich and began to work with Hilbert on logic and the foundations of mathematics.[45] In April 1918, Kurt Grelling wrote to Hilbert:

[42] See *Earman 1999* for further discussion.
[43] See *Sieg 1999*. The *Ausarbeitung* for this course will appear in Volume 2 of this series.
[44] See *Sauer 2000*.
[45] For more details, see the Introductions in Chapter 1 of Volume 3 of this series.

> ...I hear that you intend to give special attention to the philosophy of mathematics in Göttingen in the future.[46]

Nonetheless, Hilbert remained highly interested in physics and continued to lecture about it. However, his lectures begin to embrace general relativity from a more comprehensive perspective. For one, Hilbert attempts to connect his views on general relativity and a unified theory of the gravitational and electromagnetic fields with the discoveries and advances in quantum theory then taking place. He also begins to discuss the significance of the general theory of relativity, the possibilities that it opened for a unified field theory, and its epistemological consequences, all from a philosophical point of view. Hilbert also begins to present the theory on a less technical level to a broader audience.

5 *The Editing of the Texts*

Hilbert's writings in this Volume include published documents, manuscripts and *Vorlesungsausarbeitungen*. "Manuscripts" refer to documents written by Hilbert himself. On the other hand, the *Vorlesungsausarbeitungen* are typewritten notes with handwritten mathematical symbols and equations prepared from (or in advance of) Hilbert's lectures by assistants or students. This Volume, as with the Edition as a whole, does not include any of Hilbert's correspondence.

The documents reproduced here are selected from Hilbert's *Nachlaß* as preserved in the *Handschriftenabteilung* of the *Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek* in Göttingen (*Cod. Ms. D. Hilbert*) and from the collection of *Vorlesungsausarbeitungen* preserved in the library of the *Mathematisches Institut* of Göttingen University. The criteria for the selection of these documents are set out in Section 2 of this Introduction. Whenever a document has been included only in part, as is the case for instance with the lecture course on radiation theory, the selection is described and justified in the Introduction to the Chapter where the document is to be found.

All the documents included in the Volume are presented in their original language, although each document has been given an English title, either a direct translation of the original title or a title added by the Editors to indicate either the contents or the occasion that the document marks. Footnotes that appear in the text of the document itself are indicated by uppercase Roman letters and appear directly below the text beneath a short horizontal line. Marginal comments are pointed out in the editorial annotation. An attempt has been made to establish complete and grammatically correct sentences.

[46] "...höre ich, daß Sie beabsichtigen der Philosophie der Mathematik in Göttingen in Zukunft besondere Pflege zukommen zu lassen." SUB Göttingen, *Cod. Ms. D. Hilbert* 118a.

Insertions by the Editors are marked in the text inside ⟨angled brackets⟩, and all editorial decisions in the reconstruction of the manuscripts are annotated. Deletions marked by the composer of the manuscript have been executed, and interlineations brought down to line, the fact of deletion or interlineation being annotated when deemed significant. Note that "m̄" has been silently expanded to "mm", and to increase legibility of the mathematical text, commas and full stops have been silently added whenever appropriate. Manuscript pagination
3 is given in the margin, and page breaks in the original, as this example | shows, are indicated by vertical lines. Figures and diagrams have been redrawn, but follow those in the original text as closely as possible.

The only textual symbols used in the reproduction of the texts are angled brackets ⟨indicating editorial insertions⟩, vertical lines | indicating page breaks in the original and, in rare cases, the following signs for an illeg⟪?⟫ble letter, several ill⟪??⟫ble letters, or an ⟪???⟫ word.

The documents are gathered into chapters, usually more than one to a chapter. Each chapter is supplied with commentary of two sorts, all of it in English, that provided in the Introduction to the chapter, and that in the footnotes to the texts. Editors' notes of this kind are indicated by superscribed arabic numerals and printed at the bottom of the page beneath a full horizontal line. Neither the editorial footnotes nor the Introductions aspire to completeness. The guiding principle behind both forms of commentary was to supply basic contextual information of benefit to the reader, above all whatever basic information we have about the genesis of the text, and then specific information about concepts, proofs, new theoretical developments, sources, allusions and historical connections. In general, we have tried to avoid burdening the reader with assessments and interpretations of the texts. The Introductions for Chapters 1–3 were written by Tilman Sauer, for Chapter 4 by Ulrich Majer and Tilman Sauer, for Chapter 5 by Arne Schirrmacher, and for Chapter 6 by Heinz-Jürgen Schmidt, Ulrich Majer, and Tilman Sauer. The commentary footnotes for Chapters 1–4 are by Tilman Sauer, for Chapter 5 are by Arne Schirrmacher, and for Chapter 6 are by Heinz-Jürgen Schmidt and Tilman Sauer.

Ulrich Majer, Tilman Sauer

Chapter 1

The Foundations of Physics:

Mitteilungen *(1915 and 1917)*

Introduction

The first document that provides insight into Hilbert's concern with Einstein's general theory of relativity and with a unified field theory of the foundations of physics is perhaps also his best known. It is his "First Communication" on the "Foundations of Physics" (*Hilbert 1915*). This note was submitted to the Göttingen Academy of Science for publication in its *Proceedings* on 20 November 1915. It was followed by a "Second Communication" that was submitted to the Academy a year later on 23 December 1916 (*Hilbert 1917*). In 1924, Hilbert combined both papers into a single article and made some revisions before it was reprinted in the *Mathematische Annalen* (*Hilbert 1924*). Today, Hilbert's work in general relativity and unified field theory is known primarily through this 1924 paper, which was reprinted again with a few, but very minor changes, in the third volume of his *Gesammelte Abhandlungen* (*Hilbert 1935*, pp. 258–289).

We present the text of the original publication of Hilbert's two notes (*Hilbert 1915* and *Hilbert 1917*).[1] Differences between the two original notes and the 1924 and 1935 merged reprints are pointed out in the annotation. Furthermore, a set of proofs for Hilbert's "First Communication" is extant in the Hilbert papers.[2] These proofs bear a printer's stamp of 6 December 1916 and display a number of significant differences from the published version which are pointed out in the Introduction to Chapter 3, p. 310. More specifically, the text of the proofs is very similar to the published paper in the beginning and in the end, but an extended section in the middle (dealing with the energy concept and its peculiar role in general relativity) was completely rearranged and rewritten (*Hilbert 1915*, pp. 398–402). In the annotation of the "First Communication" given here, differences between the proofs and the published paper are pointed out only in the beginning and in the end, where only minor differences occur. Differences in the middle part were not annotated.[3] But the full text of the extant proofs is given in Chapter 3 of this Volume on pp. 317–329.

Regarding Hilbert's "Second Communication," a typescript exists entitled "The Causality Principle in Physics" that presents a discussion that closely parallels the corresponding discussion of the problem of causality in the published paper.[4] The text of the typescript is presented in Chapter 3 of this Volume on pp. 335–345.

[1]For a facsimile reprint of *Hilbert 1915*, see *Renn 2005*, pp. 161–173. Online versions are available on the Website of the Max Planck Institut for the History of Science in Berlin and on the Website of the *Göttinger Digitalisierungszentrum*. For English translations of *Hilbert 1915*, see *Hilbert 2005* and *Hilbert 2007a*; for an English translation of *Hilbert 1917*, see *Hilbert 2007b*.

[2]SUB Göttingen, *Cod. Ms. D. Hilbert* 634, pp. 23–29.

[3]See notes 24 and 35 of the annotation.

[4]SUB Göttingen, *Cod. Ms. D. Hilbert 642*.

Taken together, both communications present a condensed form of Hilbert's axiomatic point of view with respect to the theory of general relatvity and the unification of the gravitational and electromagnetic field.[5]

Tilman Sauer

[5]For further discussion of Hilbert's communications on the "Foundations of Physics" in the context of his foundational work, see the general Introduction to this Volume.

Die Grundlagen der Physik. (Erste Mitteilung.)

Vorgelegt in der Sitzung vom 20. November 1915.[1]

Die gewaltigen Problemstellungen von Einstein[A] sowie dessen scharfsinnige zu ihrer Lösung ersonnenen Methoden und die tiefgreifenden Gedanken und originellen Begriffsbildungen, vermöge derer Mie[B] seine Elektrodynamik aufbaut, haben der Untersuchung über die Grundlagen der Physik neue Wege eröffnet.[4]

Ich möchte im Folgenden — im Sinne der axiomatischen Methode — wesentlich aus zwei einfachen Axiomen[5] ein neues[6] System von Grundgleichungen

[A] Sitzungsber. d. Berliner Akad. 1914 S. 1030, 1915 S. 778, 799, 831, 844.[2]

[B] Ann. d. Phys. 1912, Bd. 37 S. 511, Bd. 39 S. 1, 1913, Bd. 40 S. 1.[3]

[1] A set of preserved proofs for this paper (SUB Göttingen, *Cod. Ms. D. Hilbert 634*) bears a printer's stamp of 6 December 1915 and displays substantial differences from the published version, as was first pointed out in *Corry, Renn and Stachel 1997*. For further discussion of these proofs and their significance, see the Introduction to this Volume, sec. 3. In 1924, the published paper and the "Second Communication" (*Hilbert 1917*) were reprinted with some changes as *Hilbert 1924*. A slightly revised version of the 1924 reprint was then included in the *Gesammelte Abhandlungen* (*Hilbert 1935*, Doc. 16). Differences between the first published version, presented here, and the proofs and the 1924 and 1935 reprints are pointed out in the annotation.

[2] *Einstein 1914*, *Einstein 1915a*, *Einstein 1915b*, *Einstein 1915c*, *Einstein 1915d*.

[3] *Mie 1912a*, *Mie 1912b*, *Mie 1913*.

[4] In the proofs, the first papragraph reads: "Die tiefgreifenden Gedanken und originellen Begriffsbildungen, vermöge derer Mie seine Elektrodynamik aufbaut, und die gewaltigen Problemstellungen von Einstein sowie dessen scharfsinnige zu ihrer Lösung ersonnenen Methoden haben der Untersuchung über die Grundlagen der Physik neue Wege eröffnet." The proofs also did not yet contain the bibliographical references for Einstein and Mie.

[5] The words "wesentlich aus zwei einfachen Axiomen" was changed from "aus drei einfachen Axiomen" in the proofs. The third axiom formulated in the proofs and deleted in the published version introduced the distinction between world parameters and space-time coordinates by stipulating four non-covariant additional equations. The restricted covariance of so-called "adapted coordinate systems" was a characteristic feature of Einstein's gravitation theory from 1913 to 1915, given up only in his last November memoir, dated 25 November 1915 (*Einstein 1915d*), see *Janssen et al. 2007a*, *Janssen et al. 2007b*. For further discussion of the changes introduced with respect to the proofs, see the Introduction to this Volume, sec. 3.

[6] The word "neues" was crossed out in the proofs.

der Physik aufstellen, die von idealer Schönheit sind, und in denen, wie ich glaube, die Lösung der Probleme von Einstein und Mie gleichzeitig[7] enthalten ist. Die genauere Ausführung sowie vor Allem die spezielle Anwendung meiner Grundgleichungen auf die fundamentalen Fragen der Elektrizitätslehre behalte ich späteren Mitteilungen vor.[8]

Es seien $w_s (s = 1, 2, 3, 4)$ irgendwelche die Weltpunkte wesentlich eindeutig benennende Koordinaten, die sogenannten Weltparameter (allgemeinste Raum-Zeit-Koordinaten).[9] Die das Geschehen in w_s charakterisierenden Größen seien:

1) die zehn zuerst von Einstein eingeführten[10] Gravitationspotentiale $g_{\mu\nu}$ $(\mu, \nu = 1, 2, 3, 4)$ mit symmetrischem Tensorcharakter gegenüber einer beliebigen Transformation der Weltparameter w_s;[11]

2) die vier elektrodynamischen Potentiale q_s mit Vektorcharakter im selben Sinne[12].

Das physikalische Geschehen ist nicht willkürlich, es gelten vielmehr fol- 396
gende zwei Axiome:[13]

Axiom I (Mie's Axiom von der Weltfunktion[C]): *Das Gesetz des physikalischen Geschehens bestimmt sich durch eine Weltfunktion H, die folgende Argumente enthält:*

$$g_{\mu\nu}, \qquad g_{\mu\nu l} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial w_l}, \qquad g_{\mu\nu lk} = \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial w_l \partial w_k}, \tag{1}$$

[C] Mie's Weltfunktionen enthalten nicht genau diese Argumente; insbesondere geht der Gebrauch der Argumente (2) auf Born zurück; es ist jedoch gerade die Einführung und Verwendung einer solchen Weltfunktion im Hamiltonschen Prinzip das Charakteristische der Mie'schen Elektrodynamik.[14]

[7] The words "die Lösung der Probleme von Einstein und Mie gleichzeitig" were corrected from "die Lösung der gestellten Probleme" in the proofs.

[8] In *Hilbert 1924*, the first two paragraphs were replaced by a new introduction which indicated that the 1924 version was essentially only a reprint of *Hilbert 1915* and *Hilbert 1917* and of Hilbert's remarks published in *Klein 1917*, with only minor editorial changes and rearrangements. In the 1924 introduction Hilbert also mentioned later work by Einstein and Weyl and expressed his belief that his theory contained a valid core ("einen bleibenden Kern"). After the new introduction, the 1924 version inserted a subtitle "Part I" ("Teil I").

[9] The words in brackets are missing in the proofs. In *Hilbert 1924*, coordinates are denoted by x_s instead of w_s, and a real time coordinate is used.

[10] In the proofs, the words "zuerst von Einstein eingeführten" were added in Hilbert's hand. The word "zehn" is missing in *Hilbert 1924*. The metric tensor as a representation of the gravitational potentials in a tensorial theory was first introduced in *Einstein and Grossmann 1913*.

[11] In *Hilbert 1924*, the following sentence was added: "sie bilden die Koeffizienten der invarianten Differentialform $\sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu$."

[12] In *Hilbert 1924*, the following phrase was added: ", welche die Koeffizienten der invarianten Linearform $\sum_s q_s dx_s$ bilden".

[13] In the proofs, the words "vielmehr folgende" read "vielmehr zunächst folgende." In *Hilbert 1924*, the word "zwei" is missing.

[14] See *Born 1914* and, for further discussion, *Corry 2004*, 298–315.

$$q_s, \qquad q_{sl} = \frac{\partial q_s}{\partial w_l}, \qquad\qquad (l, k = 1, 2, 3, 4) \tag{2}$$

und zwar muß die Variation des Integrals

$$\int H\sqrt{g}d\omega$$

$$(g = |g_{\mu\nu}|, d\omega = dw_1 dw_2 dw_3 dw_4)$$

für jedes der 14 Potentiale $g_{\mu\nu}$, q_s verschwinden.

An Stelle der Argumente (1) können offenbar auch die Argumente

$$g^{\mu\nu}, \qquad g^{\mu\nu}_l = \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial w_l}, \qquad g^{\mu\nu}_{lk} = \frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial w_l \partial w_k}, \tag{3}$$

treten, wobei $g^{\mu\nu}$ die durch g dividierte Unterdeterminante der Determinante g in Bezug auf ihr Element $g_{\mu\nu}$ bedeutet.

Axiom II[15] (Axiom von der allgemeinen Invarianz[D]): *Die Weltfunktion H ist eine Invariante gegenüber einer beliebigen Transformation der Weltparameter w_s.*

Axiom II ist der einfachste mathematische Ausdruck für die Forderung, daß die Verkettung der Potentiale $g_{\mu\nu}$, q_s an und für sich völlig unabhängig ist von der Art, wie man die Weltpunkte durch Weltparameter benennen will.[17]

Das Leitmotiv für den Aufbau meiner[18] Theorie liefert der folgende mathematische Satz, dessen Beweis ich an einer anderen Stelle darlegen werde.[19]

397 Theorem I. Ist J eine Invariante bei beliebiger Transformation der vier

[D] Die Forderung der orthogonalen Invarianz hat bereits Mie gestellt. In dem oben aufgestellten Axiom II findet der Einsteinsche fundamentale Grundgedanke[16] der allgemeinen Invarianz den einfachsten Ausdruck, wennschon bei Einstein das Hamiltonsche Prinzip nur eine Nebenrolle spielt und seine Funktionen H keineswegs allgemeine Invarianten sind, auch die elektrischen Potentiale nicht enthalten.

[15] In *Hilbert 1924*, Axiom II was moved to follow the introduction of the field equations (4), (5) below.

[16] The proofs read: "Grundgedanke fundamentale" instead of "fundamentale Grundgedanke".

[17] In *Hilbert 1924*, the corresponding sentence reads: "Axiom II ist der einfachste mathematische Ausdruck für die Forderung, daß die Koordinaten an sich keinerlei physikalische Bedeutung haben, sondern nur eine Numerierung der Weltpunkte darstellen, von deren Art die Verkettung der Potentiale $g_{\mu\nu}$, q_s völlig unabhängig ist."

[18] In the proofs, Hilbert indicated that the word "meiner" was to be replaced by "der". This correction of the proofs was not executed.

[19] In *Hilbert 1924*, the following theorem was reformulated and not given a number. Its discussion in *Hilbert 1924* is given between Theorem III (which there is Theorem 2) and its proof, and it is introduced as follows: "Dieses Theorem 2 enthält als wesentlichen Kern einen allgemeinen mathematischen Satz, der mir das Leitmotiv für den Aufbau der Theorie gewesen ist und der sich folgendermaßen ausspricht:
Ist F eine Funktion von n Größen (Funktionen von x_1, x_2, x_3, x_4) und ihren Ableitungen,

Weltparameter, welche n Größen und ihre Ableitungen enthält, und bildet man[20] dann aus

$$\delta \int J\sqrt{g}d\omega = 0$$

in Bezug auf jene n Größen die n Lagrangeschen Variationsgleichungen, so sind in diesem invarianten System von n Differentialgleichungen für die n Größen stets vier eine Folge der $n-4$ übrigen — in dem Sinne, daß zwischen den n Differentialgleichungen und ihren totalen Ableitungen stets vier lineare, von einander unabhängige Kombinationen identisch erfüllt sind.

Bezüglich der Differentialquotienten nach $g^{\mu\nu}$, $g_k^{\mu\nu}$, $g_{kl}^{\mu\nu}$, wie sie in (4) und nachfolgenden Formeln auftreten, sei ein für allemal bemerkt, daß wegen der Symmetrie in μ, ν einerseits und k, l andererseits die Differentialquotienten nach $g^{\mu\nu}$, $g_k^{\mu\nu}$ mit 1 bezw. $\frac{1}{2}$ multipliziert zu nehmen sind, jenachdem $\mu=\nu$ bezw. $\mu\neq\nu$ ausfällt, ferner die Differentialquotienten nach $g_{kl}^{\mu\nu}$ mit 1 bezw. $\frac{1}{2}$ bezw. $\frac{1}{4}$ multipliziert zu nehmen sind, jenachdem $\mu=\nu$ und $k=l$ bezw. $\mu=\nu$ und $k\neq l$ oder $\mu\neq\nu$ und $k=l$ bezw. $\mu\neq\nu$ und $k\neq l$ ausfällt.

Aus Axiom I folgen zunächst bezüglich der zehn Gravitationspotentiale $g^{\mu\nu}$ die zehn Lagrangeschen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial\sqrt{g}H}{\partial g^{\mu\nu}} - \sum_k \frac{\partial}{\partial w_k}\frac{\partial\sqrt{g}H}{\partial g_k^{\mu\nu}} + \sum_{k,l}\frac{\partial^2}{\partial w_k\partial w_l}\frac{\partial\sqrt{g}H}{\partial g_{kl}^{\mu\nu}} = 0, (\mu,\nu=1,2,3,4) \tag{4}$$

und sodann bezüglich der vier elektrodynamischen Potentiale q_s die vier Lagrangeschen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial\sqrt{g}H}{\partial q_h} - \sum_k \frac{\partial}{\partial w_k}\frac{\partial\sqrt{g}H}{\partial q_{hk}} = 0, \quad (h=1,2,3,4). \tag{5}$$

---

und ist das Integral

$$\int F d\omega$$

invariant bei beliebigen Transformationen der vier Weltparameter x_1, x_2, x_3, x_4, so sind in dem System der n Langrangeschen Differentialgleichungen, welche zu dem Variationsproblem

$$\delta\int F d\omega = 0$$

gehören, stets vier ein Folge der $n-4$ übrigen in dem Sinne, daß zwischen den n Lagrangeschen Ableitungen von F in bezug auf jene n Größen und deren totalen Differentialquotienten nach x_1, x_2, x_3, x_4 stets vier linear unabhängige Relationen identisch erfüllt sind." In addition, in *Hilbert 1924* a footnote was added reading: "Den Beweis dieses Satzes hat allgemein Emmy Noether geliefert (Göttinger Nachr. 1918, Heft 2: "Invariante Variationsprobleme"). Die in Theorem 2 angegebenen Identitäten sind in meiner ersten Mitteilung zwar nur für den Fall behauptet worden, daß die Invariante von $g^{\mu\nu}$ und deren Ableitungen abhängt; aber das dort eingeschlagene und im Text reproduzierte Beweisverfahren gilt ebenso auch für unsere allgemeine Invariante J. In der allgemeinen Form sind die angegebenen Identitäten zuerst von Klein auf Grund der Methode der infinitesimalen Transformation abgeleitet worden (Gött. Nachr. 1917, Heft 3: "Zu Hilberts erster Note über die Grundlagen der Physik")." The references are to *Noether, E. 1918* and *Klein 1917*. For further discussion of this theorem, see the Introduction to this Volume, sec. 3.

[20]The proofs read "man bildet" instead of "bildet man".

Der[21] Kürze halber bezeichnen wir die linken Seiten der Gleichungen (4), (5) bez. mit

$$[\sqrt{g}H]_{\mu\nu}\,, [\sqrt{g}H]_h\,.$$

Die Gleichungen (4) mögen die Grundgleichungen der Gravitation, die Gleichungen (5) die elektrodynamischen Grundgleichungen oder die verallgemeinerten Maxwellschen Gleichungen heißen.[22] Infolge des oben aufgestellten Theorems können die vier Gleichungen (5) als eine Folge der Gleichungen (4) angesehen werden, d. h. wir können unmittelbar wegen jenes mathematischen Satzes die Behauptung aussprechen, *daß in dem bezeichneten Sinne die elektrodynamischen Erscheinungen Wirkungen der Gravitation sind.*[23] In dieser
398 Erkenntnis erblicke ich die einfache und sehr überraschende Lösung des Problems von Riemann, der als der Erste theoretisch nach dem Zusammenhang zwischen Gravitation und Licht gesucht hat.[24]

Im folgenden benutzen wir die leicht beweisbare Tatsache, daß, wenn p^j $(j = 1, 2, 3, 4)$ einen willkürlichen kontravarianten Vektor bedeutet, der Ausdruck

$$p^{\mu\nu} = \sum_s (g_s^{\mu\nu} p^s - g^{\mu s} p_s^{\nu} - g^{\nu s} p_s^{\mu}), \quad \left(p_s^j = \frac{\partial p^j}{\partial w_s}\right)$$

einen symmetrischen kontravarianten Tensor und der Ausdruck

$$p_l = \sum_s (q_{ls} p^s + q_s p_l^s)$$

einen kovarianten Vektor darstellt.[25]

Des Weiteren stellen wir zwei mathematische Theoreme auf, die wie folgt lauten:

Theorem II.[26] Wenn J eine von $g^{\mu\nu}$, $g_l^{\mu\nu}$, $g_{lk}^{\mu\nu}$, q_s, q_{sk} abhängige Invariante ist, so gilt stets identisch in allen Argumenten und für jeden willkürlichen

---

[21] The following sentence is not contained in the proofs. There, equations (4), (5) were given with the terms containing the coordinate derivatives written on the right hand side. The compact notation for the variational derivatives introduced here was given in the proofs on p. 4 following its equation (6) and on p. 11, i.e., in the equation that preceds eq. (22) on p. 405 below (cf. note 46).

[22] In *Hilbert 1924*, the rest of the paragraph was deleted.

[23] Cf. eq. (22) below and the surrounding discussion.

[24] The following discussion of the energy concept on pp. 398–402 of the published text replaced a significantly different discussion of this concept on pp. 4–9 of the proofs. See the Introduction to this Volume, sec. 3, for further discussion of these differences and ch. 3, pp. 317–329 below for the text of the proofs. Starting with p. 403, the published version again closely follows the text of the proofs, and all further differences between the two versions will be recorded again in the annotation starting with note 35 below.

[25] In *Hilbert 1924*, the following footnote was added: "p_l ist nicht zu verwechseln mit dem zu p^s gehörigen kovarianten Vektor $\sum_s g_{ls} p^s$."

[26] In *Hilbert 1924*, this theorem is called "Theorem 1."

kontravarianten Vektor p^s

$$\sum_{\mu,\nu,l,k}\left(\frac{\partial J}{\partial g^{\mu\nu}}\Delta g^{\mu\nu}+\frac{\partial J}{\partial g_l^{\mu\nu}}\Delta g_l^{\mu\nu}+\frac{\partial J}{\partial g_{lk}^{\mu\nu}}\Delta g_{lk}^{\mu\nu}\right)$$
$$+\sum_{s,k}\left(\frac{\partial J}{\partial q_s}\Delta q_s+\frac{\partial J}{\partial q}\Delta q_{sk}\right)=0$$

dabei ist

$$\Delta g^{\mu\nu}=\sum_m(g^{\mu m}p_m^\nu+g^{\nu m}p_m^\mu),$$
$$\Delta g_l^{\mu\nu}=-\sum_m g_m^{\mu\nu}p_l^m+\frac{\partial\Delta g^{\mu\nu}}{\partial w_l},$$
$$\Delta g_{lk}^{\mu\nu}=-\sum_m(g_m^{\mu\nu}p_{lk}^m+g_{lm}^{\mu\nu}p_k^m+g_{km}^{\mu\nu}p_l^m)+\frac{\partial^2\Delta g^{\mu\nu}}{\partial w_l\partial w_k},$$
$$\Delta q_s=-\sum_m q_m p_s^m,$$
$$\Delta q_{sk}=-\sum_m q_{sm}p_k^m+\frac{\partial\Delta q_s}{\partial w_k}.$$

Dieses Theorem II läßt sich auch folgendermaßen aussprechen:

Wenn J eine Invariante und p^s ein willkürlicher Vektor wie vorhin ist, so gilt die Identität[27]

$$\sum_s\frac{\partial J}{\partial w_s}p^s=PJ; \tag{6}$$

dabei[28] ist 399

$$P=P_g+P_q,$$

$$P_g=\sum_{\mu,\nu,l,k}\left(p^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial g^{\mu\nu}}+p_l^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial g_l^{\mu\nu}}+p_{lk}^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial g_{lk}^{\mu\nu}}\right)$$
$$P_q=\sum_{l,k}\left(p_l\frac{\partial}{\partial q_l}+p_{lk}\frac{\partial}{\partial q_{lk}}\right)$$

[27]When Einstein prepared a report on Hilbert's work for Heinrich Rubens' physics colloquium in Berlin, he had difficulties understanding the following formula. On 25 May 1916, he wrote to Hilbert: "Ihre schöne Formel (6) habe ich ableiten können, allerdings nur mit Hilfe der ersten Form derselben auf Seite 398. Dagegen vermag ich dem Ausdruck $P(J)$ S. 399 seine Invarianz nicht direkt anzusehen. Wie erschliesst man sie?" (*CPAE8-A 1998*, Doc. 221). Hilbert answered on 27 May 1916: "P ist nichts anderes als der Polarenprozess, der stets allgemein invariant ist. Beweis ist so: Wenn $J(g^{\mu\nu}g_\sigma^{\mu\nu}\dots q_s,\dots)$ eine Invariante ist, so ist es offenbar auch $J(g^{\mu\nu}+\kappa p^{\mu\nu},g_\sigma^{\mu\nu}+\kappa p_\sigma^{\mu\nu},\dots q_s+\kappa p_s)$ wo κ eine Konstante und $p^{\mu\nu}$ zu $g^{\mu\nu}$ und p_s zu q_s cogredient ist. Folglich ist auch jeder Koeffizient bei der Potenzentwickelung nach κ eine Invariante. Der Koeffizient von κ^1 ist aber $P=P_g+P_q$." (*CPAE8-A 1998*, Doc. 222).

[28]In *Hilbert 1935*, "dabei" was changed to "daher."

gesetzt und es gelten die Abkürzungen:

$$p_k^{\mu\nu} = \frac{\partial p^{\mu\nu}}{\partial w_k}, \quad p_{kl}^{\mu\nu} = \frac{\partial^2 p^{\mu\nu}}{\partial w_k \partial w_l}, \quad p_{lk} = \frac{\partial p_l}{\partial w_k}.$$

Der Beweis von (6) ergibt sich leicht; denn diese Identität ist offenbar richtig, wenn p^s ein konstanter Vektor ist und daraus folgt sie wegen ihrer Invarianz allgemein.[29]

Theorem III.[30] Wenn J eine nur von den $g^{\mu\nu}$ und deren Ableitungen abhängige Invariante ist, und, wie oben, die Variationsableitungen von $\sqrt{g}J$ bezüglich $g^{\mu\nu}$ mit $[\sqrt{g}J]_{\mu\nu}$ bezeichnet werden, so stellt der Ausdruck — unter $h^{\mu\nu}$ irgend einen kontravarianten Tensor verstanden —

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{\mu,\nu} [\sqrt{g}J]_{\mu\nu} h^{\mu\nu}$$

eine Invariante dar; setzen wir in dieser Summe an Stelle von $h^{\mu\nu}$ den besonderen Tensor $p^{\mu\nu}$ ein und schreiben

$$\sum_{\mu,\nu} [\sqrt{g}J]_{\mu\nu} p^{\mu\nu} = \sum_{s,l} (i_s p^s + i_s^l p_l^s),$$

wo alsdann die Ausdrücke

$$i_s = \sum_{\mu,\nu} [\sqrt{g}J]_{\mu\nu} g_s^{\mu\nu},$$
$$i_s^l = -2 \sum_{\mu} [\sqrt{g}J]_{\mu s} g^{\mu l}$$

---

[29] In *Hilbert 1935*, the following footnote was added by the editors: "Ein anderer einfacher Beweis für das Theorem 1 besteht darin, zu zeigen, daß die behauptete Identität, in ihrer ersten Fassung, die Bedingung dafür darstellt, daß bei einer Koordinatentransformation

$$x'_\alpha = x_\alpha + \epsilon p^\alpha (x_1, x_2, x_3, x_4) \qquad (\alpha = 1, 2, 3, 4)$$

die „infinitesimale Änderung" der Invariante J, d. h. $\left(\frac{dJ}{d\epsilon}\right)_{\epsilon=0}$ den Wert Null hat. Anm. d. H." (In *Hilbert 1924* and *Hilbert 1935*, "Theorem 1" was "Theorem II" of *Hilbert 1915*, see note 26).

[30] In *Hilbert 1924* this theorem is called "Theorem 2" and reads:
"Wenn J, wie im Theorem 1, eine von $g^{\mu\nu}$, $g_l^{\mu\nu}$, $g_{lk}^{\mu\nu}$, q_s, q_{sk} abhängige Invariante ist, und, wie oben, die Variationsableitungen von $\sqrt{g}J$ bez. $g^{\mu\nu}$ mit $[\sqrt{g}J]_{\mu\nu}$, bez. q_μ mit $[\sqrt{g}J]_\mu$ bezeichnet werden, und wenn ferner zur Abkürzung:

$$i_s = \sum_{\mu,\nu} ([\sqrt{g}J]_{\mu\nu} g_s^{\mu\nu} + [\sqrt{g}J]_\mu q_{\mu s}),$$
$$i_s^l = -2 \sum_{\mu} [\sqrt{g}J]_{\mu s} g^{\mu l} + [\sqrt{g}J]_l q_s,$$

gesetzt wird, so gelten die Identitäten

$$i_s = \sum_l \frac{\partial i_s^l}{\partial x_l} \qquad (s = 1, 2, 3, 4)."$$

lediglich von den $g^{\mu\nu}$ und deren Ableitungen abhängen, so ist

$$i_s = \sum_l \frac{\partial i_s^l}{\partial w_l} \tag{7}$$

in der Weise, daß diese Gleichung identisch für alle Argumente, nämlich die $g^{\mu\nu}$ und deren Ableitungen, erfüllt ist.

Zum Beweise[31] betrachten wir das Integral

$$\int J\sqrt{g}d\omega, \quad d\omega = dw_1 dw_2 dw_3 dw_4$$

das über ein endliches Stück der vierdimensionalen Welt zu er|strecken ist. 400
Ferner soll p^s ein Vektor sein, der nebst seinen Ableitungen auf der dreidimensionalen Oberfläche jenes Weltstückes verschwindet. Wegen $P = P_g$ folgt aus der letzten Formel der nächsten Seite

$$P_g(\sqrt{g}J) = \sum_s \frac{\partial \sqrt{g}Jp^s}{\partial w_s};$$

dies ergibt

$$\int P_g(J\sqrt{g})d\omega = 0$$

und wegen der Bildungsweise der Lagrangeschen Ableitung ist demnach auch

$$\int \sum_{\mu\nu} [\sqrt{g}J]_{\mu\nu} p^{\mu\nu} d\omega = 0.$$

Die Einführung von i_s, i_s^l in diese Identität zeigt schließlich, daß

$$\int \left(\sum_l \frac{\partial i_s^l}{\partial w_l} - i_s \right) p^s d\omega = 0$$

und daher auch die Behauptung unseres Theorems richtig ist.

Das wichtigste Ziel ist nunmehr die Aufstellung des Begriffes der Energie und die Herleitung des Energiesatzes allein auf Grund der beiden Axiome I und II.[32]

Dazu bilden wir zunächst:

$$P_g(\sqrt{g}H) = \sum_{\mu,\nu,\kappa,l} \left(\frac{\partial \sqrt{g}H}{\partial g^{\mu\nu}} p^{\mu\nu} + \frac{\partial \sqrt{g}H}{\partial g_k^{\mu\nu}} p_k^{\mu\nu} + \frac{\partial \sqrt{g}H}{\partial g_{kl}^{\mu\nu}} p_{kl}^{\mu\nu} \right).$$

[31] In *Hilbert 1924*, before presenting the following proof, Hilbert inserted what in 1915 was called Theorem I, cf. note 19 above. Furthermore in *Hilbert 1924*, the following proof was modified to include the additional dependence of J on q_s and q_{sl}. And in *Hilbert 1935*, two explanatory footnotes were added by the editors to the modified proof of *Hilbert 1924*.

[32] The following discussion of the energy concept (until the definition (14) of e^l and the invariant energy theorem that it satisfies) was dropped in *Hilbert 1924*. See the Introduction to this Volume, sec. 3, for a discussion of the energy concept in the various versions of Hilbert’s note.

Nun ist $\frac{\partial\sqrt{g}H}{\partial g^{\mu\nu}_{kl}}$ ein gemischter Tensor vierter Ordnung[33] und daher wird, wenn man

$$A^{\mu\nu}_k = p^{\mu\nu}_k + \sum_\rho \left(\begin{Bmatrix} k\rho \\ \mu \end{Bmatrix} p^{\rho\nu} + \begin{Bmatrix} k\rho \\ \nu \end{Bmatrix} p^{\rho\mu} \right),$$

$$\begin{Bmatrix} k\rho \\ \mu \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \sum_\sigma g^{\mu\sigma} (g_{k\sigma\rho} + g_{\rho\sigma k} + g_{k\rho\sigma})$$

setzt, der Ausdruck

$$a^l = \sum_{\mu,\nu,\kappa} \frac{\partial\sqrt{g}H}{\partial g^{\mu\nu}_{kl}} A^{\mu\nu}_k \tag{8}$$

ein kontragredienter Vektor.

Bilden wir daher den Ausdruck

$$P_g(\sqrt{g}H) - \sum_l \frac{\partial\sqrt{g}a^l}{\partial w_l}$$

401 so enthält derselbe die zweiten Ableitungen $p^{\mu\nu}_{kl}$ nicht mehr und | hat daher die Gestalt

$$\sqrt{g} \sum_{\mu,\nu,\kappa} (B_{\mu\nu} p^{\mu\nu} + B^k_{\mu\nu} p^{\mu\nu}_k),$$

worin

$$B^k_{\mu\nu} = \sum_{\rho,l} \left(\frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}_k} - \frac{\partial}{\partial w_l} \frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}_{kl}} - \frac{\partial H}{\partial g^{\rho\nu}_{kl}} \begin{Bmatrix} l\mu \\ \rho \end{Bmatrix} - \frac{\partial H}{\partial g^{\mu\rho}_{kl}} \begin{Bmatrix} l\nu \\ \rho \end{Bmatrix} \right)$$

wiederum ein gemischter Tensor ist.

Nunmehr bilden wir den Vektor

$$b^l = \sum_{\mu,\nu} B^l_{\mu\nu} p^{\mu\nu} \tag{9}$$

und erhalten dann

$$P_g(\sqrt{g}H) - \sum_l \frac{\partial\sqrt{g}(a^l + b^l)}{\partial w_l} = \sum_{\mu,\nu} [\sqrt{g}H]_{\mu\nu}\, p^{\mu\nu}. \tag{10}$$

---

[33]In his letter to Hilbert of 25 May 1916 (cf. note 27 above), Einstein asked for a justification of this assertion: "Auf Seite 400, etwas unter der Mitte sagen Sie: „Nun ist $\frac{\partial\sqrt{g}H}{\partial g^{\mu\nu}_{kl}}$ ein gemischter Tensor ...". Ich aber sehe bei aller Mühe hiefür keinen Grund und begreife deshalb das Folgende nicht." (*CPAE8-A 1998*, Doc. 221). Hilbert answered: "$\langle\ldots\rangle$ folgt letzteres direkt aus der Art, wie die Ableitungen der $g^{\mu\nu}$ sich transformiren; dies geschieht immer so, dass die n^{ten}-Ableileitungen [sic] der $g^{\mu\nu}$ sich bei der Transformation nur mit $n-1^{\text{ten}}$ Ableitungen—also mit solchen *niederer* Ordnung kombiniren. Und daraus ersieht man ja, dass die Differentialquotienten einer Invariante nach den *höchsten* in ihr auftretenden Ableitungen der $g^{\mu\nu}$ [st]ets Tensoren sein müssen." (*CPAE8-A 1998*, Doc. 222).

Andererseits bilden wir

$$P_q(\sqrt{g}H) = \sum_{k,l}\left(\frac{\partial\sqrt{g}H}{\partial q_k}p_k + \frac{\partial\sqrt{g}H}{\partial q_{kl}}p_{kl}\right);$$

dann ist $\frac{\partial H}{\partial q_{kl}}$ ein Tensor und der Ausdruck

$$c^l = \sum_k \frac{\partial H}{\partial q_{kl}}p_k \tag{11}$$

stellt daher einen kontragredienten Vektor dar. Entsprechend, wie oben, wird

$$P_q(\sqrt{g}H) - \sum_l \frac{\partial\sqrt{g}c^l}{\partial w_l} = \sum_k [\sqrt{g}H]_k\, p_k. \tag{12}$$

Berücksichtigen wir nun die Grundgleichungen (4) und (5), so folgt durch Addition von (10) und (12):

$$P(\sqrt{g}H) = \sum_l \frac{\partial\sqrt{g}(a^l + b^l + c^l)}{\partial w_l}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} P(\sqrt{g}H) &= \sqrt{g}PH + H\sum_{\mu,\nu}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial g^{\mu\nu}}p^{\mu\nu} \\ &= \sqrt{g}PH + H\sum_s\left(\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial w_s}p^s + \sqrt{g}p^s_s\right) \end{aligned}$$

und vermöge der Identität (6) daher

$$P(\sqrt{g}H) = \sqrt{g}\sum_z \frac{\partial H}{\partial w_s}p^s + H\sum_s\left(\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial w_s}p^s + \sqrt{g}p^s_s\right) = \sum_s \frac{\partial\sqrt{g}Hp^s}{\partial w_s}.$$

Somit erhalten wir schließlich die invariante Gleichung 402

$$\sum_l \frac{\partial}{\partial w_l}\sqrt{g}(Hp^l - a^l - b^l - c^l) = 0$$

Jetzt berücksichtigen wir daß

$$\frac{\partial H}{\partial q_{lk}} - \frac{\partial H}{\partial q_{kl}}$$

ein schiefsymmetrischer kontravarianter Tensor ist; infolgedessen wird

$$d^l = \frac{1}{2\sqrt{g}}\sum_{k,s}\frac{\partial}{\partial w_k}\left\{\left(\frac{\partial\sqrt{g}H}{\partial q_{lk}} - \frac{\partial\sqrt{g}H}{\partial q_{kl}}\right)p^s q_s\right\} \tag{13}$$

ein kontravarianter Vektor und zwar erfüllt derselbe offenbar die Identität

$$\sum_l \frac{\partial \sqrt{g} d^l}{\partial w_l} = 0.$$

Definieren wir nunmehr

$$e^l = Hp^l - a^l - b^l - c^l - d^l \tag{14}$$

als den *Energievektor, so ist der Energievektor ein kontravarianter Vektor, der noch von dem willkürlichen Vektor p^s linear abhängt und identisch für jede Wahl dieses Vektors p^s die invariante Energiegleichung*

$$\sum_l \frac{\partial \sqrt{g} e^l}{\partial w_l} = 0$$

erfüllt.

Was die Weltfunktion H betrifft, so sind, damit ihre Wahl eindeutig wird, noch weitere Axiome erforderlich. Sollen die Gravitationsgleichungen nur zweite Ableitungen der Potentiale $g^{\mu\nu}$ enthalten, so muß H die Gestalt haben[34]

$$H = K + L$$

wo K die aus dem Riemannschen Tensor entspringende Invariante (Krümmung der vierdimensionalen Mannigfaltigkeit)

$$K = \sum_{\mu,\nu} g^{\mu\nu} K_{\mu\nu},$$

[34] In the proofs, the following equation is not found explicitly but it was contained most likely on the top portion of one sheet which was later cut off and is lost. The excised piece would also have contained, in all probability, some form of the Riemann scalar K and Ricci tensor $K_{\mu\nu}$ as given below. See *Sauer 2005* for a detailed discussion of the missing piece of the proofs.
In *Hilbert 1924*, the equation $H = K + L$ was introduced as an extra axiom; there the respective paragraph reads:
"Zur Bestimmung der Weltfunktion H sind noch weitere Axiome erforderlich. Sollen die Grundgleichungen (4), (5) der Gravitation und der Elektrodynamik nur zweite Ableitungen der $g^{\mu\nu}$ enthalten, so muß H sich additiv zusammensetzen aus einer linearen Funktion mit konstanten Koeffizienten von der Invariante

$$K = \sum_{\mu,\nu} g^{\mu\nu} K_{\mu\nu},$$

wo $K_{\mu\nu}$ den Krümmungstensor [...] bedeutet, und einer Invariante L, die nur von $g^{\mu\nu}$, $g_l^{\mu\nu}$, q_s, q_{sk} abhängt. Wir machen folgende spezielle Annahme:
Axiom III (Axiom von der Gravitation und der Elektrizität). *Die Weltfunktion H hat die Gestalt*

$$H = K + L,$$

wo K die aus dem Riemannschen Tensor entspringende Invariante, die Krümmung, ist und L nur von den $g^{\mu\nu}$, q_s, q_{sk} abhängt."

$$K_{\mu\nu} = \sum_{\kappa} \left(\frac{\partial}{\partial w_\nu} \begin{Bmatrix} \mu\kappa \\ \kappa \end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial w_\kappa} \begin{Bmatrix} \mu\nu \\ \kappa \end{Bmatrix} \right) + \sum_{k,\lambda} \left(\begin{Bmatrix} \mu\kappa \\ \lambda \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda\nu \\ \kappa \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mu\nu \\ \lambda \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda\kappa \\ \kappa \end{Bmatrix} \right)$$

bedeutet und L nur von $g^{\mu\nu}$, $g_l^{\mu\nu}$, q_s, q_{sk} abhängt. Endlich machen wir im folgenden noch die vereinfachende Annahme, daß L nicht die $g_l^{\mu\nu}$ enthält.

Wir[35] wenden alsdann[36] Theorem II auf die Invariante L an und erhalten 403

$$\sum_{\mu,\nu,m} \frac{\partial L}{\partial g^{\mu\nu}} (g^{\mu m} p_m^\nu + g^{\nu m} p_m^\mu) - \sum_{s,m} \frac{\partial L}{\partial q_s} q_m p_s^m \tag{15}$$

$$- \sum_{s,k,m} \frac{\partial L}{\partial q_{sk}} (q_{sm} p_k^m + q_{mk} p_s^m + q_m p_{sk}^m) = 0.$$

Das Nullsetzen des Koeffizienten von p_{sk}^m linker Hand liefert die Gleichung

$$\left(\frac{\partial L}{\partial q_{sk}} + \frac{\partial L}{\partial q_{ks}} \right) q_m = 0$$

oder

$$\frac{\partial L}{\partial q_{sk}} + \frac{\partial L}{\partial q_{ks}} = 0, \tag{16}$$

d. h. die Ableitungen der elektrodynamischen Potentiale q_s treten nur in den Verbindungen

$$M_{ks} = q_{sk} - q_{ks}$$

auf. Damit erkennen wir, daß bei unseren Annahmen die Invariante L außer ⟨von⟩ den Potentialen $g^{\mu\nu}$, q_s lediglich von den Komponenten des schiefsymmetrischen invarianten Tensors

$$M = (M_{ks}) = \mathrm{Rot}(q_s)$$

d. h. des sogenannten elektromagnetischen Sechservektors abhängt.[37] *Dieses Resultat, durch welches erst der Charakter der Maxwellschen Gleichungen*

[35] From this point on, the published text again closely follows the proofs, cf. note 24 above.

[36] The proofs read "nun" instead of "alsdann".

[37] In *Hilbert 1924*, the following sentence was replaced by the following text: "Und hieraus folgt weiter, daß

$$\frac{\partial L}{\partial q_{sk}} = \frac{\partial L}{\partial M_{ks}} = H^{ks}$$

ein schiefsymmetrischer kontravarianter Tensor, sowie daß

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = r^k$$

ein kontravarianter Vektor ist.

Mit Anwendung der eingeführten Bezeichnungen erhalten die elektrodynamischen Gleichungen die Form

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \sum_k \frac{\partial \sqrt{g} H^{kh}}{\partial x_k} = r^h \qquad (h = 1, 2, 3, 4). \tag{12}$$

bedingt ist,[38] *ergibt sich hier wesentlich als Folge der allgemeinen Invarianz, also auf Grund von Axiom II.*[39]

Setzen wir in der Identität (15) den Koeffizienten von p^ν_m linker Hand gleich Null, so erhalten wir mit Benutzung von (16)

$$2\sum_\mu \frac{\partial L}{\partial g^{\mu\nu}} g^{\mu m} - \frac{\partial L}{\partial q_m} q_\nu - \sum_s \frac{\partial L}{\partial M_{ms}} M_{\nu s} = 0, \qquad (\mu = 1,2,3,4). \qquad (17)$$

Diese Gleichungen gestattet eine wichtige Umformung der elektromagnetischen Energie,[40] d. h. des von L herrührenden Theiles des Energievektors. Dieser Teil ergibt sich nämlich aus (11), (13), (14) wie folgt:

$$Lp^l - \sum_k \frac{\partial L}{\partial q_{kl}} p_k - \frac{1}{2\sqrt{g}} \sum_{k,s} \frac{\partial}{\partial w_k} \left\{ \left(\partial \frac{\sqrt{g}\partial L}{\partial q_{lk}} - \frac{\partial \sqrt{g} L}{\partial q_{kl}} \right) p^q_s \right\}.$$

Wegen (16) und mit Berücksichtigung von (5) wird dieser Ausdruck gleich

404

$$\sum_{s,k} \left(L\delta^l_s - \frac{\partial L}{\partial M_{lk}} M_{sk} - \frac{\partial L}{\partial q_l} q_s \right) p^s \qquad (18)$$

$$(\delta^l_s = 0, l \neq s; \delta^s_s = 1)$$

d. h. wegen (17) gleich

$$-\frac{2}{\sqrt{g}} \sum_{\mu,s} \frac{\partial \sqrt{g} L}{\partial g^{\mu s}} g^{\mu l} p^s. \qquad (19)$$

Man erkennt in diesen Gleichungen eine Verallgemeinerung des einen Systems der Maxwellschen Gleichungen; das andere System erhält man aus den Gleichungen:

$$M_{ks} = q_{sk} - q_{ks}$$

durch Differentiation und Addition:

$$\frac{\partial M_{ks}}{\partial x_t} + \frac{\partial M_{st}}{\partial x_k} + \frac{\partial M_{tk}}{\partial x_s} = 0 \qquad (t, k, s = 1,2,3,4). \qquad (13)$$

Wir sehen also, daß die Form dieser „verallgemeinerten Maxwellschen Gleichungen“ (12), (13) im wesentlichen schon durch die Forderung der allgemeinen Invarianz, also auf Grund von Axiom II, bestimmt ist."

[38] The preceding half sentence is missing in the proofs.

[39] In his letter to Hilbert of 25 May 1916 (cf. note 27 above), Einstein expressed his appreciation of this result: "Sehr gut gefällt mir der Beweis auf Seite 403." (*CPAE8-A 1998*, Doc. 221).

[40] The following material (until "Wenn man in dem Ausdrucke (18) zur Grenze") replaces a reference to the different energy concept of the proofs. In the proofs, an energy expression $E^{(e)}$ had been defined and the substituted text reads:
"Der mit p^ν_m multiplizierte Teil von $E^{(e)}$ in (19) wird nämlich wegen (23) ⟨i.e.(17)⟩:

$$(24) \qquad -2\sum_\mu \frac{\partial \sqrt{g} L}{\partial g^{\mu\nu}} g^{\mu m} = \sqrt{g} \left\{ L\delta^m_\nu - \frac{\partial L}{\partial q_m} q_\nu - \sum_s \frac{\partial L}{\partial M_{ms}} M_{\nu s} \right\},$$

$$(\mu = 1,2,3,4) \quad (\delta^\mu_\nu = 0, \quad \mu \neq \nu, \quad \delta^\mu_\mu = 1).$$

Wenn man hier in dem Ausdrucke rechter Hand zur Grenze".

Wegen der im folgenden entwickelten Formeln (21) ersehen wir hieraus insbesondere, daß die elektromagnetische Energie und mithin auch der totale Energievektor e^l sich allein durch K ausdrücken läßt, so daß nur die $g^{\mu\nu}$ und deren Ableitungen, nicht aber die q_s und deren Ableitungen darin auftreten. Wenn man in dem Ausdrucke (18) zur Grenze für

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= 0, \qquad (\mu \neq \nu) \\ g_{\mu\mu} &= 1 \end{aligned}$$

übergeht, so stimmt derselbe genau mit demjenigen überein, den Mie in seiner Elektrodynamik aufgestellt hat: der Mie'sche elektromagnetische Energietensor ist also nichts anderes als der durch Differentiation der Invariante L nach den Gravitationspotentialen $g^{\mu\nu}$ entstehende allgemein invariante Tensor beim Übergang zu jener Grenze[41] — ein Umstand, der mich zum ersten Mal auf den notwendigen engen Zusammenhang zwischen der Einsteinschen allgemeinen Relativitätstheorie und der Mie'schen Elektrodynamik hingewiesen und mir die Überzeugung von der Richtigkeit der hier entwickelten Theorie gegeben hat.

Es bleibt noch übrig, bei der Annahme

$$H = K + L, \tag{20}$$

direkt zu zeigen,[42] wie die oben aufgestellten verallgemeinerten Maxwellschen Gleichungen (5) eine Folge der Gravitationsgleichungen (4) in dem oben angegebenen Sinne sind.

Unter Verwendung der vorhin eingeführten Bezeichnungsweise für die Variationsableitungen bezüglich der $g^{\mu\nu}$ erhalten die Gravitationsgleichungen wegen (20) die Gestalt

$$[\sqrt{g}K]_{\mu\nu} + \frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial g^{\mu\nu}} = 0. \tag{21}$$

Das[43] erste Glied linker Hand wird

$$[\sqrt{g}K]_{\mu\nu} = \sqrt{g}(K_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Kg_{\mu\nu}),$$

[41] In the proofs, "zu jener Grenze" reads "zum Grenzfall (25)" where equation (25) in the proofs is the preceding unnumbered equation in the published text.

[42] In the proofs, the equation $H = K + L$ is not given explicitly here but only referred to in terms of an equation number: "Es bleibt noch übrig, bei der Annahme (17) direkt zu zeigen, ..." An equation number (17) would have been found on a piece of the extant proofs that was later cut off; see note 34 above.
In *Hilbert 1924*, the following derivation of equation (27) was given in a different way.

[43] The following two sentences are missing in the proofs. In *Hilbert 1924*, they were replaced by the following two sentences which were added after the specification of H in Axiom III (cf. note 34): "Um den Ausdruck von $[\sqrt{g}K]_{\mu\nu}$ zu bestimmen, spezialisiere man zunächst das Koordinatensystem so, daß für den betrachteten Weltpunkt die $g_s^{\mu\nu}$ sämtlich verschwinden. Man findet auf diese Weise:

$$[\sqrt{g}K]_{\mu\nu} = \sqrt{g}\left(K_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}K\right).$$

405 wie leicht ohne Rechnung aus der Tatsache folgt, daß $K_{\mu\nu}$ außer $g_{\mu\nu}$ der einzige Tensor zweiter Ordnung und K die einzige Invariante ist, die nur mit den $g^{\mu\nu}$ und deren ersten und zweiten Differentialquotienten $g_k^{\mu\nu}$, $g_{kl}^{\mu\nu}$ gebildet werden kann.[44]

Die so zu Stande kommenden Differentialgleichungen der Gravitation sind, wie mir scheint, mit der von Einstein in seinen späteren Abhandlungen[E] aufgestellten großzügigen Theorie der allgemeinen Relativität im Einklang.[45]

Bezeichnen wir ferner allgemein wie oben[46] die Variationsableitungen von $\sqrt{g}J$ bezüglich des elektrodynamischen Potentials q_h mit

$$[\sqrt{g}J]_h = \frac{\partial\sqrt{g}J}{\partial q_h} - \sum_k \frac{\partial}{\partial w_k}\frac{\partial\sqrt{g}J}{\partial q_{hk}},$$

so erhalten die elektrodynamischen Grundgleichungen wegen (20) die Gestalt

$$[\sqrt{g}J]_h = 0. \tag{22}$$

[E] l.c. Berliner Sitzungsber. 1915

Führen wir noch für den Tensor

$$-\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial g^{\mu\nu}}$$

die Bezeichnung $T_{\mu\nu}$ ein, so lauten die Gravitationsgleichungen

$$K_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}K = T_{\mu\nu}.''$$

See also the following two notes.

[44] This justification for the explicit form of the gravitational field equation in terms of the Einstein tensor $K_{\mu\nu} - (1/2)Kg_{\mu\nu}$ is wrong if taken literally. There are, in fact, many tensors of second rank that can be formed using only the metric components and their first and second derivatives, as was pointed out in *Corry, Renn and Stachel 1997*. These authors take this fact as indication that Hilbert only added the explicit form of the gravitational field equations and, in fact, only revised his paper *after* having read Einstein's paper of November 25 (*Einstein 1915d*) which contains an equivalent form of the field equations given here. However, Hilbert's claim is defendable if one takes into account the condition that second derivatives may appear only linearly, as Hilbert had postulated explicitly on p. 402. This condition restricts the tensor to be of the form $K_{\mu\nu} - \alpha K g_{\mu\nu}$, and the factor α is fixed to be $1/2$ if one further postulates the vanishing of the tensor's covariant divergence. The latter condition is not made explicitly in the paper but is implied by Theorem III. For further discussion of this issue, see the Introduction to this Volume, sec. 3, and *Sauer 2005*.

[45] In *Einstein 1915d*, which Hilbert had cited above, see note 2, Einstein had presented field equations of the form $K_{\mu\nu} = -\kappa\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right)$ where $T_{\mu\nu}$ denotes the stress-energy tensor and T its trace. Apart from differences in notation, and the technical difference that the trace T of $T_{\mu\nu}$ appears in the equation rather than the trace K of the Ricci tensor $K_{\mu\nu}$, equations (21) are equivalent to the field equations presented in *Einstein 1915d* if Hilbert's $\frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial g^{\mu\nu}}$ is identified with Einstein's energy tensor $T_{\mu\nu}$. However, Hilbert specified L to depend only on the electromagnetic potential q_s and its derivatives q_{sk} (and on the metric $g_{\mu\nu}$), allowing also for non-gauge invariant combinations of these variables in the sense of Mie's theory but excluding a dependence on any other matter variables. Consequently Hilbert's energy tensor differs from Einstein's which was left completely unspecified and could, e.g., also be taken to be the energy tensor of an incoherent flow of dust particles.

[46] In the proofs, the words "wie oben" are missing, see note 21 above.

Da nun K eine lediglich von $g^{\mu\nu}$ und deren Ableitungen abhängige Invariante ist, so gilt nach Theorem III identisch die Gleichung (7), worin

$$i_s = \sum_{\mu\nu} [\sqrt{g}K]_{\mu\nu}\, g_s^{\mu\nu} \tag{23}$$

und

$$i_s^l = -2 \sum_{\mu} [\sqrt{g}K]_{\mu s}\, g^{\mu l}, (\mu = 1, 2, 3, 4) \tag{24}$$

ist.

Wegen (21) und (24) ist (19) gleich $-\frac{1}{\sqrt{g}} i_\nu^m$.[47] Durch Differentiation nach w_m und Summation über m erhalten wir wegen (7)

$$\begin{aligned} i_\nu =& \sum_m \frac{\partial}{\partial w_m} \left(-\sqrt{g}L\delta_\nu^m + \frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial q_m} q_\nu + \sum_s \frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial M_{sm}} M_{s\nu} \right) \\ =& - \frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial w_\nu} + \sum_m \Bigg\{ q_\nu \frac{\partial}{\partial w_m} \left([\sqrt{g}L]_m + \sum_s \frac{\partial}{\partial w_s} \frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial q_{ms}} \right) \\ & + q_{\nu m} \left([\sqrt{g}L]_m + \sum_s \frac{\partial}{\partial w_s} \frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial q_{ms}} \right) \Bigg\} \\ & + \sum_s \left([\sqrt{g}L]_s - \frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial q_s} \right) M_{s\nu} + \sum_{s,m} \frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial M_{sm}} \frac{\partial M_{s\nu}}{\partial w_m}, \end{aligned}$$

da ja

$$\frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial q_m} = [\sqrt{g}L]_m + \sum_s \frac{\partial}{\partial w_s} \frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial q_{ms}}$$

und[48] 406

$$-\sum_m \frac{\partial}{\partial w_m} \frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial q_{sm}} = [\sqrt{g}L] - \frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial q_s}.$$

Nunmehr berücksichtigen wir, daß wegen (16)

$$\sum_{m,s} \frac{\partial^2}{\partial w_m \partial w_s} \frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial q_{ms}} = 0$$

ist, und erhalten dann bei geeigneter Zusammenfassung:

$$\begin{aligned} i_\nu = & - \frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial w_\nu} + \sum_m \left(q_\nu \frac{\partial}{\partial w_m} [\sqrt{g}L]_m + M_{m\nu} [\sqrt{g}L]_m \right) \\ & + \sum_m \frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial q_m} q_{m\nu} + \sum_{s,m} \frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial M_{sm}} \frac{\partial M_{s\nu}}{\partial w_m}. \end{aligned} \tag{25}$$

---

[47] Should be "$-\frac{1}{\sqrt{g}} i_s^l p^s$". In the proofs, "ist (19) gleich $-\frac{1}{\sqrt{g}} i_\nu^m$" reads "ist die linke Seite von (24) gleich $-i_\nu^m$". For equation (24) of the proofs, see note 40 above.

[48] In the following equation, $[\sqrt{g}L]$ should be $[\sqrt{g}L]_s$.

Andererseits ist

$$-\frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial w_\nu} = -\sum_{s,m}\frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial g^{sm}}g_\nu^{sm} - \sum_m \frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial q_m}q_{m\nu} - \sum_{m,s}\frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial q_{ms}}\frac{\partial q_{ms}}{\partial w_\nu}.$$

Das erste Glied der rechten Seite ist wegen (21) und (23) nichts anderes als i_ν. Das letzte Glied rechter Hand erweist sich als entgegengesetzt gleich dem letzten Glied rechter Hand in (25); es ist nämlich

$$\sum_{s,m}\frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial M_{sm}}\left(\frac{\partial M_{s\nu}}{\partial w_m} - \frac{\partial q_{ms}}{\partial w_\nu}\right) = 0, \tag{26}$$

da der Ausdruck

$$\frac{\partial M_{s\nu}}{\partial w_m} - \frac{\partial q_{ms}}{\partial w_\nu} = \frac{\partial^2 q_\nu}{\partial w_s \partial w_m} - \frac{\partial^2 q_s}{\partial w_\nu \partial w_m} - \frac{\partial^2 q_m}{\partial w_\nu \partial w_s}$$

symmetrisch in s, m und der erste Faktor unter dem Summenzeichen in (26) schiefsymmetrisch in s, m ausfällt.

Aus (25) folgt mithin die Gleichung

$$\sum_m \left(M_{m\nu}\,[\sqrt{g}L]_m + q_\nu \frac{\partial}{\partial w_m}\,[\sqrt{g}L]_m\right) = 0; \tag{27}$$

d. h. aus den Gravitationsgleichungen (4) folgen in der Tat die vier von einander unabhängigen linearen Kombinationen (27) der elektrodynamischen Grundgleichungen (5) und ihrer ersten Ableitungen.[49] *Dies ist der genaue*[50] *mathematische Ausdruck der oben allgemein ausgesprochenen Behauptung über den Charakter der Elektrodynamik als einer Folgeerscheinung der Gravitation.*[51]

407 Da L unserer Annahme zufolge nicht von den Ableitungen der $g^{\mu\nu}$ abhängen soll, so muß L eine Funktion von gewissen vier allgemeinen Invarianten sein,[52] die den von Mie angegebenen speziellen orthogonalen Invarianten entsprechen und von denen die beiden einfachsten diese sind:

$$Q = \sum_{k,l,m,n} M_{mn}M_{lk}g^{mk}g^{nl}$$

---

[49] In *Hilbert 1924*, the derivation of equation (27) was presented in a different way, and the sentence following it reads: "d. h. aus den Gravitationsgleichungen (4) folgen vier von einander unabhängige lineare Relationen zwischen den elektrodynamischen Grundgleichungen (5) und ihren ersten Ableitungen."

[50] In the proofs, "genaue" reads "ganze".

[51] In *Hilbert 1924*, the previous sentence is given without italics and reads: "Dies ist der genaue mathematische Ausdruck für den Zusammenhang zwischen Gravitation und Elektrodynamik, der die ganze Theorie beherrscht.".

[52] For further discussion, see *Hilbert 1916/17**, § 83 (this Volume, p. 287 below).

und

$$q = \sum_{k,l} q_k q_l g^{kl}.$$

Der einfachste und im Hinblick auf den Bau von K nächstliegende Ansatz für L ist zugleich derjenige, der der Mie'schen Elektrodynamik entspricht, nämlich

$$L = \alpha Q + f(q)$$

oder[53] noch spezieller an Mie anschließend:[54]

$$L = \alpha Q + \beta q^3,$$

wo $f(q)$ irgend eine Funktion von q und α, β Konstante bedeuten.

Wie man sieht, genügen bei sinngemäßer Deutung die wenigen einfachen in den Axiomen I und II[55] ausgesprochenen Annahmen zum Aufbau der Theorie: durch dieselbe werden nicht nur unsere Vorstellungen über Raum, Zeit und Bewegung von Grund aus in dem von Einstein dargelegten[56] Sinne umgestaltet, sondern ich bin auch der Überzeugung, daß durch die hier aufgestellten Grundgleichungen die intimsten bisher verborgenen Vorgänge innerhalb des Atoms Aufklärung erhalten werden und insbesondere allgemein eine Zurückführung aller physikalischen Konstanten auf mathematische Konstanten möglich sein muß — wie denn überhaupt damit die Möglichkeit naherückt, daß

---

[53]In *Hilbert 1924*, the remaining material was replaced by:
"Gemäß diesem Ansatz erhält man zwischen den Größen, die in den verallgemeinerten Maxwellschen Gleichungen auftreten, die Beziehungen

$$H^{ks} = 4\alpha M^{ks},$$
$$r^k = 2f'(q)q^k,$$

wo

$$M^{ks} = \sum_{\mu,\nu} g^{k\mu} g^{s\nu} M_{\mu\nu},$$
$$q^k = \sum_l g^{kl} q_l$$

zu setzen ist. Für den ganz speziellen Fall

$$f(q) = \beta q \qquad (\beta = \text{ konst.})$$

folgt, daß der „Stromvektor" r^k proportional dem kontravarianten Vektor q^k wird."

[54]The following Lagrangian is discussed in *Mie 1912b*, pp. 18–38, as an example for the general framework of an electromagnetic theory of matter since the resulting differential equations may explicitly be integrated. At the end of that discussion, that particular function, however, is discarded as a possible world function that would properly describe the electron since it would lead to unacceptable consequences: "Eine Welt, die durch die Weltfunktion $\langle L \rangle$ regiert würde, müßte sich also schließlich zu zwei großen Klumpen elektrischer Ladungen zusammenballen, einem positiven und einem negativen, und diese beiden Klumpen müßten immer weiter und weiter voneinander wegstreben." *Mie 1912b*, p. 38. The example is also discussed in *Hilbert 1916a**, pp. 92–96, (this Volume, pp.146–149).

[55]The words "in den Axiomen I und II" read "in den Axiomen I, II, III" in the proofs.

[56]In the proofs, "dargelegten" reads "geforderten".

aus der Physik im Prinzip eine Wissenschaft von der Art der Geometrie werde: gewiß der herrlichste Ruhm der axiomatischen Methode, die hier wie wir sehen die mächtigen Instrumente der Analysis, nämlich Variationsrechnung und Invariantentheorie,[57] in ihre Dienste nimmt.

[57]The proofs read: "Analysis nämlich, die Variationsrechnung und Invariantentheorie," instead of "Analysis, nämlich Variationsrechnung und Invariantentheorie,".

Die Grundlagen der Physik.
(Zweite Mitteilung.)

Vorgelegt in der Sitzung vom 23. Dezember 1916.

In meiner ersten Mitteilung[F] habe ich ein System von Grundgleichungen der Physik aufgestellt. Ehe ich mich zur Theorie der Integration dieser Gleichungen wende, erscheint es nötig, einige allgemeinere Fragen sowohl logischer wie physikalischer Natur zu erörtern.

Zunächst führen wir an Stelle der Weltparameter w_s $(s = 1, 2, 3, 4)$ die allgemeinsten r e e l l e n Raum-Zeit-Koordinaten x_s $(s = 1, 2, 3, 4)$ ein, indem wir

$$w_1 = x_1, \qquad w_2 = x_2, \qquad w_3 = x_3, \qquad w_4 = ix_4$$

setzen und entsprechend an Stelle von

$$ig_{14}, \qquad ig_{24}, \qquad ig_{34}, \qquad -g_{44}$$

einfach

$$g_{14}, \qquad g_{24}, \qquad g_{34}, \qquad g_{44}$$

schreiben. Die neuen $g_{\mu\nu}$ $(\mu, \nu = 1, 2, 3, 4)$ — die Einsteinschen Gravitationspotentiale — sollen dann sämtlich reelle Funktionen der reellen Variablen x_s $(s = 1, 2, 3, 4)$ sein von der Art, daß bei der Darstellung der quadratischen Form

$$G(X_1, X_2, X_3, X_4) = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} X_\mu X_\nu \tag{28}$$

als Summe von vier Quadraten linearer Formen der X_s stets drei Quadrate mit positivem und ein Quadrat mit negativem Vor|zeichen auftritt: die 54
quadratische Form (28) liefert somit für unsere vierdimensionale Welt der x_s

[F] Diese Nachrichten 20. November 1915.[1]

[1] See *Hilbert 1915* (this Volume, Doc. 1). In 1924, *Hilbert 1915* and this "Second Communication" (*Hilbert 1917*) were reprinted, with some changes, as *Hilbert 1924*. A slightly revised version of the 1924 reprint was then included in the *Gesammelte Abhandlungen* (*Hilbert 1935*, Doc. 16). Differences between the first published version, presented here, and both the 1924 and 1935 reprints are pointed out in the annotation, cf. p. 28, note 1 above.

die Maßbestimmung einer Pseudogeometrie. Die Determinante g der $g_{\mu\nu}$ fällt negativ aus.[2]

Ist in dieser Geometrie eine Kurve

$$x_s = x_s(p) \qquad (s = 1, 2, 3, 4)$$

gegeben, wo $x_s(p)$ irgend welche reelle Funktionen des Parameters p bedeuten, so kann diese in Teilstücke zerlegt werden, auf denen einzeln der Ausdruck

$$G\left(\frac{dx_1}{dp}, \frac{dx_2}{dp}, \frac{dx_3}{dp}, \frac{dx_4}{dp}\right)$$

nicht sein Vorzeichen ändert: ein Kurvenstück, für welches

$$G\left(\frac{dx_s}{dp}\right) > 0$$

ausfällt, heiße eine *Strecke*[3] und das längs dieses Kurvenstücks genommene Integral

$$\lambda = \int \sqrt{G\left(\frac{dx_s}{dp}\right)} dp$$

heiße die *Länge der Strecke*; ein Kurvenstück, für welches

$$G\left(\frac{dx_s}{dp}\right) < 0$$

ausfällt, heiße eine *Zeitlinie* und das längs dieses Kurvenstückes genommene Integral

$$\tau = \int \sqrt{-G\left(\frac{dx_s}{dp}\right)} dp$$

heiße die *Eigenzeit der Zeitlinie*; endlich heiße ein Kurvenstück, längs dessen

$$G\left(\frac{dx_s}{dp}\right) = 0$$

---

[2] In the republication as the second part of *Hilbert 1924*, the beginning of the paper was replaced by the following text:
"Es soll nun der Zusammenhang der Theorie mit der Erfahrung näher erörtert werden. Dazu ist noch ein weiteres Axiom erforderlich.
Axiom IV (Raum-Zeit-Axiom). *Es soll die quadratische Form*

$$G(X_1, X_2, X_3, X_4) = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} X_\mu X_\nu \tag{18}$$

von der Art sein, daß bei ihrer Darstellung als Summe von vier Quadraten linearer Formen der X_s stets drei Quadrate mit positivem und ein Quadrat mit negativem Vorzeichen auftritt.
Die quadratische Form (18) liefert somit für unsere vierdimensionale Welt der x_s *die Maßbestimmung einer Pseudogeometrie*. Die Determinante g der $g_{\mu\nu}$ fällt negativ aus." In *Hilbert 1935*, "g" reads "$(-g)$".

[3] In the corresponding discussion in *Das Kausalitätsprinzip in der Physik*, Hilbert had used the term "Raumlinie" (*Cod. Ms. D. Hilbert 642*, p. 12; this Volume, p. 342).

wird, eine *Nullinie*.

Um diese Begriffe unserer Pseudogeometrie anschaulich zu machen, denken wir uns zwei ideale Maßinstrumente: den *Maßfaden*, mittelst dessen wir die Länge λ einer jeden Strecke zu messen im Stande sind und zweitens die *Lichtuhr*, mittelst derer wir die Eigenzeit einer jeden Zeitlinie bestimmen können. Der Maßfaden zeigt Null und die Lichtuhr hält an längs jeder Nullinie, während ersterer längs einer Zeitlinie, letztere längs einer Strecke gänzlich versagt.[4]

Zunächst zeigen wir, daß jedes der beiden Instrumente[5] ausreicht, um mit 55
seiner Hülfe die Werte der $g_{\mu\nu}$ als Funktionen von x_s zu berechnen, sobald nur ein bestimmtes Raum-Zeit-Koordinatensystem x_s eingeführt worden ist. In der Tat wählen wir irgend 10 Strecken aus, die sämtlich längs verschiedenen Richtungen in den nämlichen Weltpunkt x_s einlaufen, so daß diesem Endpunkt jedesmal der Parameterwert p zukommt, so ergibt sich für jede der 10 Strecken im Endpunkt die Gleichung

$$\left(\frac{d\lambda^{(h)}}{dp}\right)^2 = G\left(\frac{dx_s^{(h)}}{dp}\right), \qquad (h = 1, 2, \cdots, 10);$$

hier sind die linken Seiten bekannt, sobald wir die Längen $\lambda^{(\mathrm{h})}$ mittlest des Maßfadens[6] bestimmt haben. Setzen wir nun zur Abkürzung

$$D(u) = \begin{vmatrix} \left(\frac{dx_1^{(1)}}{dp}\right)^2, & \frac{dx_1^{(1)}}{dp}\frac{dx_2^{(1)}}{dp}, & \cdots, & \left(\frac{dx_4^{(1)}}{dp}\right)^2, & \left(\frac{d\lambda^{(1)}}{dp}\right)^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \left(\frac{dx_1^{(10)}}{dp}\right)^2, & \frac{dx_1^{(10)}}{dp}\frac{dx_2^{(10)}}{dp}, & \cdots, & \left(\frac{dx_4^{(10)}}{dp}\right)^2, & \left(\frac{d\lambda^{(10)}}{dp}\right)^2 \\ X_1^2, & X_1X_2, & \cdots, & X_4^2, & u \end{vmatrix}$$

so wird offenbar

$$G(X_s) = -\frac{D(0)}{\frac{\partial D}{\partial u}}, \tag{29}$$

wodurch sich zugleich für die Richtungen der ausgewählten 10 Strecken[7] im Punkte $x_s(p)$ die Bedingung

$$\frac{\partial D}{\partial u} \neq 0$$

[4]In *Hilbert 1924*, the following discussion is given for the *Lichtuhr* alone. Hence, the preceding paragraph reads:
"Um diese Begriffe unserer Pseudogeometrie anschaulich zu machen, denken wir uns ein ideales Maßinstrument: die *Lichtuhr*, mittels derer wir die Eigenzeit längs einer jeden Zeitlinie bestimmen können."

[5]In *Hilbert 1924*, "jedes der beiden Instrumente" was replaced by "dieses Instrument". Also in the following two paragraphs, "Strecken" was replaced by "Zeitlinien", "$\lambda^{(h)}$" by "$\tau^{(h)}$", and "Längen" by "Eigenzeiten".

[6]In *Hilbert 1924*, "Längen $\lambda^{(\mathrm{h})}$" was replaced by "Eigenzeiten $\tau^{(\mathrm{h})}$", and "des Maßfadens" was replaced by "der Uhr".

[7]In *Hilbert 1924*, "Strecken" was replaced by "Zeitlinien".

als notwendig herausstellt.

Ist G nach (29) berechnet, so würde die Anwendung des Verfahrens auf irgend eine 11te Strecke,[8] die in $x_s(p)$ endigt, die Gleichung

$$\left(\frac{d\lambda^{(11)}}{dp}\right)^2 = G\left(\frac{dx_s^{(11)}}{dp}\right)$$

liefern und diese Gleichung wäre dann sowohl eine Kontrolle für die Richtigkeit des Instrumentes als auch eine experimentelle Bestätigung dafür, daß die Voraussetzungen der Theorie für die wirkliche Welt zutreffen.

Für die Lichtuhr gilt die entsprechende Ueberlegung.[9]

56 Der axiomatische Aufbau unserer Pseudogeometrie ließe sich ohne Schwierigkeit durchführen: erstens ist ein Axiom aufzustellen, auf Grund dessen folgt, daß Länge bez. Eigenzeit Integrale sein müssen, deren Integrand lediglich eine Funktion der x_s und ihrer ersten Ableitungen nach dem Parameter ist; als ein solches Axiom wäre etwa die Eigenschaft des Abrollens des Maßfaden oder[10] der bekannte Enveloppensatz für geodätische Linien verwendbar. Zweitens ist ein Axiom erforderlich, wonach die Sätze der pseudo-Euklidischen Geometrie d. h. das alte Relativitätsprinzip im Unendlichkleinen gelten soll; hierzu wäre das von W. Blaschke[G] aufgestellte Axiom besonders geeignet, welches aussagt, daß die Bedingung der Orthogonalität für irgend zwei Richtungen — sei es bei Strecken oder Zeitlinien — stets eine gegenseitige sein soll.

Es seien noch kurz die hauptsächlichsten Tatsachen zusammengestellt, die uns die Monge-Hamiltonsche Theorie der Differentialgleichungen für unsere Pseudogeometrie lehrt.

Jedem Weltpunkte x_s gehört ein Kegel zweiter Ordnung zu, der in x_s seine Spitze hat und in den laufenden Punktkoordinaten X_s durch die Gleichung

$$G(X_1 - x_1,\ X_2 - x_2,\ X_3 - x_3,\ X_4 - x_4) = 0$$

bestimmt ist; derselbe heiße der zum Punkte x_s zugehörige *Nullkegel*. Die sämtlichen Nullkegel bilden ein vierdimensionales Kegelfeld, zu dem einerseits die „Mongesche“ Differentialgleichung

$$G\left(\frac{dx_1}{dp}, \frac{dx_2}{dp}, \frac{dx_3}{dp}, \frac{dx_4}{dp}\right) = 0$$

[G] Räumliche Variationsprobleme mit symmetrischer Transversabilitätsbedingung, Leipziger Berichte, Math.-phys. Kl. 68 (1916) S. 50.[11]

---

[8] In *Hilbert 1924*, “Strecke” was replaced by “Zeitlinie”.

[9] This sentence was deleted in *Hilbert 1924*.

[10] The preceding seven words are deleted in *Hilbert 1924*.

[11] The reference is to *Blaschke 1916*.

und andererseits die „Hamiltonsche“ partielle Differentialgleichung

$$H\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}, \frac{\partial f}{\partial x_4}\right) = 0 \tag{30}$$

gehört, wo H die zu G reziproke quadratische Form

$$H\left(U_1, U_2, U_3, U_4\right) = \sum_{\mu\nu} g^{\mu\nu} U_\mu U_\nu$$

bedeutet. Die Charakteristiken der Mongeschen und zugleich die der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichungen (30) sind die geodätischen Nulllinien. Die sämtlichen von einem bestimmten Weltpunkt $a_s (s = 1, 2, 3, 4)$ ausgehenden geodätischen Nullinien erzeugen eine dreidimensionale Punktmannigfaltigkeit, die die zum | Weltpunkt a_s gehörige *Zeitscheide* heißen 57
möge.[12] Diese Zeitscheide besitzt in a_s einen Knotenpunkt, dessen Tangentialkegel gerade der zu a_s gehörige Nullkegel ist. Bringen wir die Gleichung der Zeitscheide auf die Gestalt

$$x_4 = \varphi(x_1, x_2, x_3),$$

so ist

$$f = x_4 - \varphi(x_1, x_2, x_3)$$

ein Integral der Hamiltonschen Differentialgleichung (30). Die sämtlichen vom Punkte a_s ausgehenden Zeitlinien verlaufen gänzlich innerhalb desjenigen vierdimensionalen Weltteiles, der die zu a_s gehörige Zeitscheide als Begrenzung hat.

Nach diesen Vorbereitungen wenden wir uns dem Problem der Kausalität in der neuen Physik zu.[13]

Bisher haben wir alle Koordinatensysteme x_s, die aus irgend einem durch eine willkürliche Transformation hervorgehen, als gleichberechtigt angesehen. Diese Willkür muß eingeschränkt werden, sobald wir die Auffassung zur Geltung bringen wollen, daß zwei auf der nämlichen Zeitlinie gelegene Weltpunkte im Verhältnis von Ursache und Wirkung zu einander stehen können und daß es daher nicht möglich sein soll, solche Weltpunkte auf gleichzeitig zu transformieren. Indem wir x_4 als die *eigentliche* Zeitkoordinate auszeichnen, stellen wir folgende Definitionen auf:

Ein *eigentliches* Raum-Zeitkoordinatensystem ist ein solches, für welches außer $g < 0$ stets noch die folgenden vier Ungleichungen

$$g_{11} > 0, \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} > 0, \quad g_{44} < 0 \tag{31}$$

[12] In the corresponding discussion in *Das Kausalitätsprinzip der Physik* (p. 12), Hilbert had used the term "Zeitkegel", see p. 342 below.

[13] Cf. the parallel discussion of the causality conditions in *Das Kausalitätsprinzip in der Physik*, pp. 10ff (this Volume, pp. 341ff.).

erfüllt sind. Eine Transformation, die ein solches Raum-Zeitkoordinatensystem in ein anderes eigentliches Raum-Zeitkoordinatensystem überführt, heiße eine *eigentliche* Raum-Zeitkoordinatentransformation.

Die vier Ungleichungen drücken aus, daß in irgend einem Weltpunkte a_s der zugehörige Nullkegel den linearen Raum

$$x_4 = a_4$$

ganz außerhalb läßt, die Gerade

$$x_1 = a_1, \qquad x_2 = a_2, \qquad x_3 = a_3$$

dagegen im Inneren enthält; die letztere Gerade ist daher stets eine Zeitlinie.

58 Es sei nunmehr irgend eine Zeitlinie $x_s = x_s(p)$ gegeben; wegen

$$G\left(\frac{dx_s}{dp}\right) < 0$$

folgt dann, daß in einem eigentlichen Raum-Zeitkoordinatensystem stets

$$\frac{dx_4}{dp} \neq 0$$

sein und folglich längs einer Zeitlinie die eigentliche Zeitkoordinate x_4 stets wachsen bez. abnehmen muß. Da eine Zeitlinie bei jeder Koordinatentransformation Zeitlinie bleibt, so können zwei Weltpunkte einer Zeitlinie durch eine eigentliche Raum-Zeitkoordinatentransformation niemals den gleichen Wert der Zeitkoordinate x_4 erhalten d. h. unmöglich auf gleichzeitig transformiert werden.

Andererseits wenn die Punkte einer Kurve eigentlich auf gleichzeitig transformiert werden können, so gilt nach der Transformation für diese Kurve

$$x_4 = \text{const. d. h. } \frac{dx_4}{dp} = 0,$$

mithin

$$G\left(\frac{dx_s}{dp}\right) = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} \frac{dx_\mu}{dp}\frac{dx_\nu}{dp}, \qquad (\mu, \nu = 1, 2, 3)$$

und hier ist wegen der ersten drei unserer Ungleichungen (31) die rechte Seite positiv; die Kurve charakterisiert sich demnach als eine Strecke.

So sehen wir, daß die dem Kausalitätsprinzip zu Grunde liegenden Begriffe von Ursache und Wirkung auch in der neuen Physik zu keinerlei inneren Widersprüchen führen, sobald wir nur stets die Ungleichungen (31) zu unseren Grundgleichungen hinzunehmen d. h. uns auf den Gebrauch eigentlicher Raum-Zeitkoordinaten beschränken.

An dieser Stelle sei auf ein späterhin nützliches besonderes Raum-Zeitkoordinatensystem hingewiesen, welches ich das *Gaußische Koordinatensystem* nennen möchte, weil es die Verallgemeinerung desjenigen geodätischen Polarkoordinatensystems ist, das Gauß in die Flächentheorie eingeführt hat.[14] Es sei in unserer vierdimensionalen Welt irgend ein dreidimensionaler Raum gegeben von der Art, daß jede in diesem Raum verlaufende Kurve eine Strecke
ist: *ein Streckenraum*, wie ich einen solchen nennen möchte;[15] | $x_{\langle 1\rangle}, x_2, x_3$ 59
seien irgend welche Punktkoordinaten dieses Raumes. Wir konstruieren nun in einem jeden Punkte x_1, x_2, x_3 desselben die zu ihm orthogonale geodätische Linie, die eine Zeitlinie sein wird, und tragen auf derselben x_4 als Eigenzeit auf; dem so erhaltenen Punkte der vierdimensionalen Welt weisen wir die Koordinatenwerte $x_1 x_2 x_3 x_4$ zu. Für diese Koordinaten wird, wie leicht zu sehen ist,

$$G(X_s) = \sum_{\mu\nu}^{1,2,3} g_{\mu\nu} X_\mu X_\nu - X_4^2 \tag{32}$$

d. h. das Gaußische Koordinatensystem ist analytisch durch die Gleichungen

$$g_{14} = 0, \quad g_{24} = 0, \quad g_{34} = 0, \quad g_{44} = -1 \tag{33}$$

charakterisiert. Wegen der vorausgesetzten Beschaffenheit des dreidimensionalen Raumes $x_4 = 0$ fällt die rechter Hand in (32) stehende quadratische Form der Variabeln X_1, X_2, X_3 notwendig positiv definit aus d. h. die drei ersten der Ungleichungen (31) sind erfüllt und da dies auch für die vierte gilt, so erweist sich das Gaußische Koordinatensystem stets als ein eigentliches Raum-Zeitkoordinatensystem.

Wir kehren nun zur Erforschung des Kausalitätsprinzips in der Physik zurück.[16] Als den hauptsächlichen Inhalt desselben sehen wir die Tatsache an, die bisher in jeder physikalischen Theorie galt, daß aus der Kenntnis der physikalischen Größen und ihrer zeitlichen Ableitungen in der Gegenwart allemal die Werte dieser Größen für die Zukunft eindeutig bestimmt werden können: die Gesetze der bisherigen Physik fanden nämlich ausnahmslos ihren Ausdruck in einem System von Differentialgleichungen solcher Art, daß die Anzahl der darin auftretenden Funktionen wesentlich mit der Anzahl der unabhängigen Differentialgleichungen übereinstimmte und somit bot dann der bekannte allgemeine Cauchysche Satz über die Existenz von Integralen partieller Differentialgleichungen unmittelbar den Beweisgrund für jene Tatsache.

---

[14] Gaussian coordinates are also discussed in *Hilbert 1916/17**, §§ 16, 31 (this Volume, pp. 195, 216).

[15] For another definition of the concept of a "Streckenraum", see *Hilbert 1916/17**, p. 85, (this Volume, p. 228).

[16] Cf. the parallel discussion of the causality conditions in *Das Kausalitätsprinzip in der Physik*, pp. 1ff (this Volume, pp. 335ff.).

Die in meiner ersten Mitteilung aufgestellten[17] Grundgleichungen (4) und (5) der Physik sind nun, wie ich dort besonders hervorgehoben habe,[18] keineswegs von der oben charakterisierten Art; vielmehr sind nach Theorem I[19] vier von ihnen eine Folge der übrigen: wir sahen die vier Maxwellschen Gleichungen (5) als Folge der zehn Gravitationsgleichungen (4) an[20] und haben somit für die 14 Potentiale $g_{\mu\nu}, q_s$ nur die 10 von einander wesentlich unabhängigen Gleichungen (4).

60 Sobald wir an der Forderung der allgemeinen Invarianz für die Grundgleichungen der Physik festhalten, ist der eben genannte Umstand auch wesentlich und notwendig. Gäbe es nämlich für die 14 Potentiale noch weitere von (4) unabhängige invariante Gleichungen, so würde die Einführung eines Gaußischen Koordinatensystems vermöge (33) für die 10 physikalischen Größen

$$g_{\mu\nu} \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3), \qquad q_s \quad (s = 1, 2, 3, 4)$$

ein System von Gleichungen liefern, die wiederum von einander unabhängig wären und, da sie mehr als 10 sind, unter einander in Widerspruch ständen.[21]

Unter solchen Umständen also, wie sie in der neuen Physik der allgemeinen Relativität zutreffen, ist es keineswegs mehr möglich, aus der Kenntnis der physikalischen Größen in Gegenwart und Vergangenheit eindeutig ihre Werte in der Zukunft zu folgern. Um dies anschaulich an einem Beispiel zu zeigen, seien unsere Grundgleichungen (4) und (5) der ersten Mitteilung[22] in dem besonderen Falle integriert, der dem Vorhandensein eines einzigen dauernd ruhenden Elektrons entspricht, so daß sich die 14 Potentiale

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x_1, x_2, x_3)$$
$$q_s = q_s(x_1, x_2, x_3)$$

als bestimmte Funktionen von x_1, x_2, x_3 ergeben, die von der Zeit x_4 sämtlich unabhängig sind, und überdies so, daß noch die drei ersten Komponenten r_1, r_2, r_3 der Viererdichte verschwinden mögen. Wir wenden sodann auf

[17] In *Hilbert 1924*, "Die in meiner ersten Mitteilung aufgestellten" was replaced by "Unsere".

[18] In *Hilbert 1924*, the preceding half-sentence was deleted.

[19] In *Hilbert 1924*, "nach Theorem I" was replaced by "wie ich gezeigt habe".

[20] In *Hilbert 1924*, "wir sahen ... an" was replaced by "Pwir können ... ansehen".

[21] In *Hilbert 1924*, "unter einander in Widerspruch ständen" was replaced by "ein überbestimmtes System bilden würden".

[22] The preceding three words were deleted in *Hilbert 1924*.

diese[23] Potentiale die folgende Koordinatentransformation[24] an:

$$\begin{cases} x_1 = x'_1 & \text{für } x'_4 \leqq 0 \\ x_1 = x'_1 + e^{-\frac{1}{x'^2_4}} & \text{für } x'_4 > 0 \end{cases}$$
$$x_2 = x'_2$$
$$x_3 = x'_3$$
$$x_4 = x'_4;$$

die transformierten Potentiale $g'_{\mu\nu}, q'_s$ sind für $x'_4 \leqq 0$ die gleichen Funktionen von x'_1, x'_2, x'_3 wie die $g_{\mu\nu}, q_s$ in den ursprünglichen Variabeln x_1, x_2, x_3, während die $g'_{\mu\nu}, q'_s$ für $x'_4 > 0$ wesentlich auch von der Zeitkoordinate x'_4 abhängen d. h. die Potentiale $g'_{\mu\nu}$, q'_s stellen ein Elektron dar, das bis zur Zeit $x'_4 = 0$ ruht, dann aber sich in seinen Teilen in Bewegung setzt.

Dennoch glaube ich, daß es nur einer schärferen Erfassung der dem Prin- 61
zip der allgemeinen Relativität[H] zu Grunde liegenden Idee bedarf, um das Kausalitätsprinzip auch in der neuen Physik aufrecht zu halten. Dem Wesen des neuen Relativitätsprinzipes entsprechend müssen wir nämlich die Invarianz nicht nur für die allgemeinen Gesetze der Physik verlangen, sondern auch jeder Einzelaussage in der Physik den invarianten Charakter zusprechen, falls sie einen physikalischen Sinn haben soll — im Einklang damit, daß jede physikalische Tatsache letzten Endes durch Maßfaden oder Lichtuhr[26] d. h. durch Instrumente von i n v a r i a n t e m Charakter feststellbar sein muß. Gerade so wie in der Kurven- und Flächentheorie eine Aussage, für die die Parameterdarstellung der Kurve oder Fläche gewählt ist, für die Kurve oder Fläche selbst keinen geometrischen Sinn hat, wenn nicht die Aussage gegenüber einer beliebigen Transformation der Parameter invariant bleibt oder sich in eine invariante Form bringen läßt, so müssen wir auch in der Physik eine Aussage, die nicht gegenüber jeder beliebigen Transformation des Koordinatensystems invariant bleibt, als *physikalisch sinnlos* bezeichnen. Beispielsweise hat im oben betrachteten Falle des ruhenden Elektrons die Aussage, daß dasselbe etwa zur

[H] In seiner ursprünglichen, nunmehr verlassenen Theorie hatte A. Einstein (Sitzungsberichte der Akad. zu Berlin. 1914 S. 1067) in der Tat, um das Kausalitätsprinzip in der alten Fassung zu retten, gewisse 4 nicht invariante Gleichungen für die $g_{\mu\nu}$ besonders postuliert.[25]

[23] In *Hilbert 1924*, "diese" was replaced by "die".

[24] In *Hilbert 1935*, the editors added the following footnote:
"Für nicht zu große Werte von x_4 ist diese Transformation eine *eigentliche* Raum-Zeit-Koordinatentransformation. Anm. d. H."
The following example is also discussed in *Das Kausalitätsprinzip in der Physik*, see p. 339 below; see also the discussion in *Norton 1993*, pp. 805–806.

[25] The reference is to *Einstein 1914*; for further discussion see the introduction to this Volume, sec. 3.

[26] In *Hilbert 1924*, "Maßfaden oder Lichtuhr" was replaced by "Lichtuhren".

Zeit $x_4 = 1$ ruhe, physikalisch keinen Sinn, weil diese Aussage nicht invariant ist.

Was nun das Kausalitätsprinzip betrifft, so mögen für die Gegenwart in irgend einem gegebenen Koordinatensystem die physikalischen Größen und ihre zeitlichen Ableitungen bekannt sein: dann wird eine Aussage nur physikalischen Sinn haben, wenn sie gegenüber allen denjenigen Transformationen invariant ist, bei denen eben die für die Gegenwart benutzten Koordinaten[27] unverändert bleiben; ich behaupte, daß die Aussagen dieser Art für die Zukunft sämtlich eindeutig bestimmt sind d.h. das Kausalitätsprinzip gilt in dieser Fassung:

Aus der Kenntnis der 14 physikalischen Potentiale $g_{\mu\nu}, q_s$ in der Gegenwart[28] *folgen alle Aussagen über dieselben für die Zukunft notwendig und eindeutig, sofern sie physikalischen Sinn haben.*

Um diese Behauptung zu beweisen, benutzen wir das Gaußische Raum-Zeitkoordinatensystem. Die Einführung von (33) in die Grundgleichung (4)
62 der ersten Mitteilung[29] liefert uns[30] für die 10 Potentiale|

$$g_{\mu\nu} \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3), \qquad q_s \quad (s = 1, 2, 3, 4) \tag{34}$$

ein System von ebensovielen partiellen Differentialgleichungen; wenn wir diese auf Grund der gegebenen Anfangswerte für $x_4 = 0$ integrieren, so finden wir[31] auf eindeutige Weise die Werte von (34) für $x_4 > 0$. Da das Gaußische Koordinatensystem selbst eindeutig festgelegt ist, so sind auch alle auf dieses Koordinatensystem bezogenen Aussagen über jene Potentiale (34) von invariantem Charakter.[32]

Die Formen, in denen physikalisch sinnvolle d. h. invariante Aussagen mathematisch zum Ausdruck gebracht werden können, sind sehr mannigfaltig.

Erstens. Dies kann mittelst eines invarianten Koordinatensystems geschehen. Ebenso wie das vorhin benutzte Gaußische ist zu solchem Zwecke auch das bekannte Riemannsche und desgleichen dasjenige Raum-Zeitkoordinatensystem verwendbar, in welchem die Elektrizität auf Ruhe und Einheitsdichte transformiert erscheint. Bezeichnet[33] $f(q)$, wie am Schluß der ersten Mitteilung[34] die im Hamiltonschen Prinzip auftretende Funktion der

[27] In *Hilbert 1924*, "eben die für die Gegenwart benutzten Koordinaten" was replaced by "jene als bekannt vorausgesetzten Werte für die Gegenwart".

[28] As mentioned in the preceding paragraph, the time derivatives need to be specified as well. In *Hilbert 1935*, "14 physikalischen Potentiale $g_{\mu\nu}, q_s$" was replaced by "physikalischen Zustandsgrößen".

[29] In *Hilbert 1924*, the preceding three words were deleted. In *Hilbert 1935*, "Grundgleichung (4)" reads "Grundgleichungen (4), (5)".

[30] Added in *Hilbert 1935*: "nach Weglassung von vier überzähligen Gleichungen."

[31] In *Hilbert 1935*, an extended footnote on the initial-value problem was added by the editors at this point.

[32] The preceding sentence was deleted in *Hilbert 1935*.

[33] In *Hilbert 1935*, "Bezeichnet" was changed to "Ein solches Koordinatensystem ist in der Tat unter sehr allgemeinen Bedingungen vorhanden; bezeichnet".

[34] In *Hilbert 1924*, "der ersten Mitteilung" was replaced by "von Teil I".

Invariante

$$q = \sum_{kl} q_k q_l g^{kl},$$

so ist[35]

$$r^s = \frac{\partial f(q)}{\partial q_s}$$

die Viererdichte der Elektrizität; sie stellt einen kontravarianten Vektor dar und ist daher, wie leicht ersichtlich, gewiß[36] auf (0, 0, 0, 1) transformierbar. Ist dies geschehen,[37] so sind aus den vier Gleichungen

$$\frac{\partial f(q)}{\partial q_s} = 0 \qquad (s = 1, 2, 3), \qquad \frac{\partial f(q)}{\partial q_4} = 1$$

die vier Komponenten des Viererpotentials q_s durch die $g_{\mu\nu}$ ausdrückbar und jede Beziehung zwischen den $g_{\mu\nu}$ in diesem oder einem der beiden ersteren[38] Koordinatensysteme ist sodann eine invariante Aussage.[39] Für Partikularlösungen der Grundgleichungen kann es besondere invariante Koordinatensysteme geben; sie bilden z. B. im unten behandelten Falle des zentrisch-symmetrischen Gravitationsfeldes r, ϑ, φ, t ein bis auf Drehungen invariantes Koordinatensystem.

Zweitens. Die Aussage, wonach sich ein Koordinatensystem finden läßt, in welchem die 14 Potentiale $g_{\mu\nu}, q_s$ für die Zukunft gewisse bestimmte Werte haben oder gewisse bestimmte Beziehungen erfüllen, ist stets eine invariante und daher physikalisch sinnvoll. Der mathematische invariante Ausdruck für eine | solche Aussage wird durch Elimination der Koordinaten 63
aus jenen Beziehungen erhalten. Ein Beispiel bietet der oben betrachtete Fall des ruhenden Elektrons: der wesentliche und physikalisch sinnvolle Inhalt des Kausalitätsprinzips drückt sich hier in der Aussage aus, daß das für die Zeit $x_4 \leqq 0$ ruhende Elektron bei geeigneter Wahl des Raum-Zeitkoordinatensystems auch für die Zukunft $x_4 > 0$ beständig in allen seinen Teilen ruht.

Drittens. Auch ist eine Aussage invariant und hat daher stets physikalischen Sinn, wenn sie für jedes beliebige Koordinatensystem gültig sein soll. Ein Beispiel dafür sind die Einsteinschen Impuls-Energiegleichungen vom

[35] In *Hilbert 1924*, the following equation was replaced by

$$r^s = 2f'(q) \cdot q^s = 2f'(q) \sum_l g^{sl} q_l.$$

[36] In *Hilbert 1924*, "wie leicht ersichtlich, gewiß" was replaced by "für ein Weltgebiet, in dem $f'(q) \neq 0$ ist und das Viererpotential nirgends verschwindet,". In *Hilbert 1935*, it was changed to "daher für ein Weltgebiet, in dem $f'(q) \neq 0$ und das Vorzeichen von q negativ ist, durch eine eigentliche Raum-Zeit-Koordinatentransformation". The editors of *Hilbert 1935* also added a critical footnote at this point.

[37] In *Hilbert 1924*, "Ist dies geschehen," was replaced by "Nach dieser Transformation".

[38] The preceding five words were deleted in *Hilbert 1924*.

[39] In *Hilbert 1935*, the preceding sentence was deleted.

Divergenz-Charakter. Obwohl nämlich die Einsteinsche Energie die Invarianteneigenschaft nicht besitzt und die von ihm aufgestellten Differentialgleichungen für ihre Komponenten auch als Gleichungssystem keineswegs kovariant sind, so ist doch die in ihnen enthaltene Aussage, daß sie für jedes beliebige Koordinatensystem erfüllt sein sollen, eine invariante Forderung und hat demnach einen physikalischen Sinn.[40]

Nach meinen Ausführungen ist die Physik eine vierdimensionale Pseudogeometrie, deren Maßbestimmung $g_{\mu\nu}$ durch die Grundgleichungen (4) und (5) meiner ersten Mitteilung[41] an die elektromagnetischen Größen d. h. an die Materie gebunden ist. Mit dieser Erkenntnis wird nun eine alte geometrische Frage zur Lösung reif, die Frage nämlich, ob und in welchem Sinne die Euklidische Geometrie — von der wir aus der Mathematik nur wissen, daß sie ein logisch widerspruchsfreier Bau ist — auch in der Wirklichkeit Gültigkeit besitzt.

Die alte Physik mit dem absoluten Zeitbegriff übernahm die Sätze der Euklidischen Geometrie und legte sie vorweg einer jeden speziellen physikalischen Theorie zu Grunde. Auch Gauß verfuhr nur wenig anders: er konstruierte hypothetisch eine nicht-Euklidische Physik, indem er unter Beibehaltung der absoluten Zeit von den Sätzen der Euklidischen Geometrie nur das Parallelenaxiom fallen ließ; die Messung der Winkel eines Dreieckes mit großen Dimensionen zeigte ihm dann die Ungültigkeit dieser nicht-Euklidischen Physik.

Die neue Physik des Einsteinschen allgemeinen Relativitätsprinzips nimmt gegenüber der Geometrie eine völlig andere Stellung ein. Sie legt weder die Euklidische noch irgend eine andere bestimmte Geometrie vorweg zu Grunde, um daraus die eigentlichen physikalischen Gesetze zu deduzieren, sondern die
64 neue Theorie der Physik liefert, wie ich in meiner ersten Mitteilung | gezeigt
habe,[42] mit einem Schlage durch ein und dasselbe Hamiltonsche Prinzip die geometrischen und die physikalischen Gesetze nämlich die Grundgleichungen (4) und (5), welche lehren, wie die Maßbestimmung $g_{\mu\nu}$ — zugleich der mathematische Ausdruck der physikalischen Erscheinung der Gravitation — mit den Werten q_s der elektrodynamischen Potentiale verkettet ist.

Die Euklidische Geometrie ist ein der modernen Physik fremdartiges Ferngesetz: indem die Relativitätstheorie die Euklidische Geometrie als allgemeine Voraussetzung für die Physik ablehnt, lehrt sie vielmehr, daß Geometrie und Physik gleichartigen Charakters sind und als eine Wissenschaft auf gemeinsamer Grundlage ruhen.

---

[40] In *Hilbert 1924*, the preceding paragraph reads:
"Drittens. Auch ist eine Aussage invariant und hat daher stets physikalischen Sinn, wenn sie für jedes beliebige Koordinatensystem gültig ist, ohne daß dabei die auftretenden Ausdrücke formal invarianten Charakter zu besitzen brauchen."

[41] In *Hilbert 1924*, the preceding three words were deleted.

[42] In *Hilbert 1924*, the preceding half-sentence was deleted.

Die oben genannte geometrische Frage läuft darauf hinaus, zu untersuchen, ob und unter welchen Voraussetzungen die vierdimensionale Euklidische Pseudogeometrie

$$\begin{aligned} &g_{11} = 1, \quad g_{22} = 1, \quad g_{33} = 1, \quad g_{44} = -1 \\ &g_{\mu\nu} = 0 \quad (\mu \neq \nu) \end{aligned} \tag{35}$$

eine Lösung der physikalischen Grundgleichungen[43] bez. die einzige reguläre Lösung derselben ist.

Die Grundgleichungen (4) meiner ersten Mitteilung lauten wegen der daselbst gemachten Annahme (20):[44]

$$[\sqrt{g}K]_{\mu\nu} + \frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial g^{\mu\nu}} = 0,$$

wo

$$[\sqrt{g}K]_{\mu\nu} = \sqrt{g}(K_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Kg_{\mu\nu})$$

ist. Bei der Einsetzung der Werte (35) wird

$$[\sqrt{g}K]_{\mu\nu} = 0 \tag{36}$$

und für

$$q_s = 0 \qquad (s = 1, 2, 3, 4)$$

wird

$$\frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial g^{\mu\nu}} = 0;$$

d. h. wenn alle Elektrizität entfernt wird, so ist die pseudo-Euklidische Geometrie möglich. Die Frage, ob sie in diesem Falle auch notwendig ist d. h. ob — bez. unter gewissen Zusatzbedingungen — die Werte (35) und die durch Transformation der Koordinaten daraus hervorgehenden Werte der $g_{\mu\nu}$ die einzigen regulären Lösungen der Gleichungen (36) sind, ist eine mathematische
hier nicht allgemein zu erörternde Aufgabe. Ich beschränke mich | vielmehr 65
darauf, einige besondere diese Aufgabe betreffende Überlegungen anzustellen.

Dazu kehren wir wieder zu den ursprüglichen Weltkoordinaten meiner ersten Mitteilung

$$w_1 = x_1, \qquad w_2 = x_2, \qquad w_3 = x_3, \qquad w_4 = ix_4$$

zurück und erteilen den $g_{\mu\nu}$ die entsprechende Bedeutung.[45]

[43] In *Hilbert 1924*, “physikalische Grundgleichungen” was replaced by “Gravitationsgleichungen”.

[44] In *Hilbert 1924*, the preceding sentence reads: “Die Gravitationsgleichungen (8) lauten:”. The equation (8) referred to is equal to eq. (21) in *Hilbert 1915* (this Volume, p. 41).

[45] In *Hilbert 1924*, the preceding paragraph was deleted, and, accordingly, real coordinates x_i are used in the following.

Im Falle der pseudo-Euklidischen Geometrie haben wir

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu},$$

worin[46]

$$\delta_{\mu\mu} = 1, \qquad \delta_{\mu\nu} = 0 \quad (\mu \neq \nu)$$

bedeutet. Für jede dieser pseudo-Euklidischen Geometrie benachbarte Maßbestimmung gilt der Ansatz

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \varepsilon h_{\mu\nu} + \cdots, \tag{37}$$

wo ε eine gegen Null konvergierende Größe und $h_{\mu\nu}$ Funktionen der w_s sind. Über die Maßbestimmung (37) mache ich die folgenden zwei Annahmen:

I. Die $h_{\mu\nu}$ mögen von der Variabeln w_4 unabhänging sein.

II. Die $h_{\mu\nu}$ mögen im Unendlichen ein gewisses reguläres Verhalten zeigen.

Soll nun die Maßbestimmung (37) für alle ε die Differentialgleichungen (36) erfüllen, so folgt, daß die $h_{\mu\nu}$ notwendig gewisse lineare homogene partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung erfüllen müssen. Diese Differentialgleichungen lauten, wenn man nach Einstein[I]

$$h_{\mu\nu} = k_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}\sum_s k_{ss}, \qquad (k_{\mu\nu} = k_{\nu\mu}) \tag{38}$$

einsetzt[48] und zwischen den 10 Funktionen $k_{\mu\nu}$ die vier Relationen

$$\sum_s \frac{\partial k_{\mu s}}{\partial w_s} = 0, \qquad (\mu = 1, 2, 3, 4) \tag{39}$$

annimmt, wie folgt:

$$\Box k_{\mu\nu} = 0, \tag{40}$$

wo zur Abkürzung

$$\Box = \sum_s \frac{\partial^2}{\partial w_s^2}$$

benutzt ist.[49]

Die Relationen (39) sind wegen des Ansatzes (38) einschränkende Vor-
66 aussetzungen für die Funktionen $h_{\mu\nu}$; ich will jedoch | zeigen, wie es durch ei-

[I] Näherungsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation. Berichte d. Akad. zu Berlin 1916 S. 688.[47]

[46] In *Hilbert 1924*, $\gamma_{\mu\nu}$ with $\gamma_{11} = \gamma_{22} = \gamma_{33} = 1$ and $\gamma_{44} = -1$ is used instead of $\delta_{\mu\nu}$.

[47] The reference is to *Einstein 1916b*.

[48] In *Hilbert 1924*, "einsetzt" was replaced by "setzt", and $\delta_{\mu\nu} = 0$, $(\mu \neq \nu)$, $\delta_{\nu\nu} = 1$ was defined at this point.

[49] In *Hilbert 1924*, "benutzt" was replaced by "gesetzt", and the box was defined as $\Box = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_4^2}$.

ne geeignete infinitesimale Transformation der Variabeln w_1, w_2, w_3, w_4 stets erreicht werden kann, daß für die entsprechenden Funktionen $h'_{\mu\nu}$ nach der Transformation jene einschränkenden Voraussetzungen erfüllt sind.

Zu dem Zwecke bestimme man vier Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ der Variabeln, die bez. den Differentialgleichungen

$$\Box\varphi_\mu = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial w_\mu}\sum_\nu h_{\nu\nu} - \sum_\nu \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial w_\nu} \tag{41}$$

genügen. Vermöge der infinitesimalen Transformation

$$w_s = w'_s + \varepsilon\varphi_s$$

geht $g_{\mu\nu}$ über in

$$g'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \varepsilon\sum_\alpha g_{\alpha\nu}\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial w_\mu} + \varepsilon\sum_\alpha g_{\alpha\mu}\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial w_\nu} + \cdots$$

oder wegen (37) in

$$g'_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \varepsilon h'_{\mu\nu} + \cdots ,$$

wo

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \frac{\partial\varphi_\nu}{\partial w_\mu} + \frac{\partial\varphi_\mu}{\partial w_\nu}$$

gesetzt ist. Wählen wir nun

$$k_{\mu\nu} = h'_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}\sum_s h'_{ss},$$

so erfüllen diese Funktionen wegen (41) die Einsteinschen Bedingungen (39) und es wird

$$h'_{\mu\nu} = k_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}\sum_s k_{ss} \qquad (k_{\mu\nu} = k_{\nu\mu}).$$

Die Differentialgleichungen (40), die nach den obigen Ausführungen für die gefundenen $k_{\mu\nu}$ gelten müssen, gehen wegen der Annahme I in

$$\frac{\partial^2 k_{\mu\nu}}{\partial w_1^2} + \frac{\partial^2 k_{\mu\nu}}{\partial w_2^2} + \frac{\partial^2 k_{\mu\nu}}{\partial w_3^2} = 0$$

über und, da die Annahme II — demgemäß verstanden — zu schließen gestattet, daß die $k_{\mu\nu}$ im Unendlichen sich Konstanten nähern, so folgt, daß dieselben überhaupt Konstante sein müssen d.h.: Durch Variation der Maßbestimmung der pseudo-Euklidischen Geometrie unter den Annahmen I und II ist es nicht möglich, eine reguläre Maßbestimmung zu erlangen, die nicht ebenfalls pseudo-Euklidisch ist und die doch zugleich einer elektrizitätsfreien Welt entspricht.

Die Integration der partiellen Differentialgleichungen (36) gelingt noch in 67
einem anderen Falle, der von Einstein[A] und Schwarzschild[B] zuerst behandelt worden ist. Ich gebe im Folgenden für diesen Fall einen Weg an, der über die Gravitationspotentiale $g_{\mu\nu}$ im Unendlichen keinerlei Voraussetzungen macht und außerdem auch für meine späteren Untersuchungen Vorteile bietet. Die Annahmen über die $g_{\mu\nu}$ sind folgende:

1. Die Maßbestimmung ist auf ein Gaußisches Koordinatensystem bezogen — nur daß g_{44} noch willkürlich gelassen wird; d. h. es ist
$$g_{14} = 0, \quad g_{24} = 0, \quad g_{34} = 0.$$
2. Die $g_{\mu\nu}$ sind von der Zeitkoordinate x_4 unabhängig.
3. Die Gravitation $g_{\mu\nu}$ ist zentrisch symmetrisch in Bezug auf den Koordinatenanfangspunkt.

Nach Schwarzschild ist die allgemeinste diesen Annahmen entsprechende Maßbestimmung in räumlichen Polarkoordinaten, wenn

$$\begin{aligned} w_1 &= r\cos\vartheta \\ w_2 &= r\sin\vartheta\cos\varphi \\ w_3 &= r\sin\vartheta\sin\varphi \\ w_4 &= l \end{aligned}$$

gesetzt wird, durch den Ausdruck

$$F(r)dr^2 + G(r)(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2) + H(r)dl^2 \tag{42}$$

dargestellt, wo $F(r), G(r), H(r)$ noch willkürliche Funktionen von r sind. Setzen wir

$$r^* = \sqrt{G(r)},$$

so sind wir in gleicher Weise berechtigt r^*, ϑ, φ als räumliche Polarkoordinaten zu deuten. Führen wir in (42) r^* anstatt r ein und lassen dann wieder das Zeichen $*$ weg, so entsteht der Ausdruck

$$M(r)dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2\sin^2\vartheta d\varphi^2 + W(r)dl^2, \tag{43}$$

wo $M(r), W(r)$ die zwei wesentlichen willkürlichen Funktionen von r bedeuten. Die Frage ist, ob und wie diese auf die allgemeinste Weise zu bestimmen sind, damit den Differentialgleichungen (36) Genüge geschieht.

68 Zu dem Zwecke müssen die bekannten in meiner ersten Mitteilung[52] an-

[A] Perihelbewegung des Merkur. Sitzungsber. d. Akad. zu Berlin. 1915 S. 831.[50]

[B] Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes. Sitzungsber. d. Akad. zu Berlin. 1916 S. 189.[51]

[50] *Einstein 1915c.*

[51] *Schwarzschild 1916a.*

gegebenen Ausdrücke $K_{\mu\nu}, K$ berechnet werden.[53] Der erste Schritt hierzu ist die Aufstellung der Differentialgleichungen der geodätischen Linien durch Variation des Integrals

$$\int \left(M \left(\frac{dr}{dp}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\vartheta}{dp}\right)^2 + r^2 \sin^2\vartheta \left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2 + W \left(\frac{dl}{dp}\right)^2 \right) dp.$$

Wir erhalten als Lagrangesche Gleichungen diese:

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2 r}{dp^2} + \frac{1}{2}\frac{M'}{M}\left(\frac{dr}{dp}\right)^2 - \frac{r}{M}\left(\frac{d\vartheta}{dp}\right)^2 - \frac{r}{M}\sin^2\vartheta\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{W'}{M}\left(\frac{dl}{dp}\right)^2 = 0,\\
&\frac{d^2\vartheta}{dp^2} + \frac{2}{r}\frac{dr}{dp}\frac{d\vartheta}{dp} - \sin\vartheta\cos\vartheta\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2 = 0,\\
&\frac{d^2\varphi}{dp^2} + \frac{2}{r}\frac{dr}{dp}\frac{d\varphi}{dp} + 2\operatorname{cotg}\vartheta\frac{d\vartheta}{dp}\frac{d\varphi}{dp} = 0,\\
&\frac{d^2 l}{dp^2} + \frac{W'}{W}\frac{dr}{dp}\frac{dl}{dp} = 0;
\end{aligned}$$

hier und in der folgenden Rechnung bedeutet das Zeichen $'$ die Ableitung nach r. Durch Vergleich mit den allgemeinen Differentialgleichungen der geodätischen Linien:

$$\frac{d^2 w_s}{dp^2} + \sum_{\mu\nu} \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ s \end{matrix} \right\} \frac{dw_\mu}{dp}\frac{dw_\nu}{dp} = 0$$

entnehmen wir für die Klammersymbole $\left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ s \end{matrix} \right\}$ die folgenden Werte — wobei die verschwindenden nicht angegeben sind:

$$\begin{aligned}
&\left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2}\frac{M'}{M}, \quad \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} = -\frac{r}{M}, \quad \left\{ \begin{matrix} 33 \\ 1 \end{matrix} \right\} = -\frac{r}{M}\sin^2\vartheta,\\
&\left\{ \begin{matrix} 44 \\ 1 \end{matrix} \right\} = -\frac{1}{2}\frac{W'}{M}, \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{r}, \quad \left\{ \begin{matrix} 33 \\ 2 \end{matrix} \right\} = -\sin\vartheta\cos\vartheta,\\
&\left\{ \begin{matrix} 13 \\ 3 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{r}, \quad \left\{ \begin{matrix} 23 \\ 3 \end{matrix} \right\} = \operatorname{cotg}\vartheta, \left\{ \begin{matrix} 14 \\ 4 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2}\frac{W'}{W}.
\end{aligned}$$

[52] In *Hilbert 1924*, "meiner ersten Mitteilung" was replaced by "Teil I".

[53] Cf. *Hilbert 1915*, p. 402 (this Volume, p. 38).

Hiermit bilden wir:[54]

$$\begin{aligned}
K_{11} &= \frac{\partial}{\partial r}\left(\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}13\\3\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}14\\4\end{Bmatrix}\right)-\frac{\partial}{\partial r}\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\\
&\quad+\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}21\\2\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}13\\3\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}31\\3\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}14\\4\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}41\\4\end{Bmatrix}\\
&\quad-\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\left(\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}13\\3\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}14\\4\end{Bmatrix}\right)\\
&= \frac{1}{2}\frac{W''}{W}+\frac{1}{4}\frac{W'^2}{W^2}-\frac{M'}{rM}-\frac{1}{4}\frac{M'W'}{MW}
\end{aligned}$$

69

$$\begin{aligned}
K_{22} &= \frac{\partial}{\partial\vartheta}\begin{Bmatrix}23\\3\end{Bmatrix}-\frac{\partial}{\partial r}\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\\
&\quad+\begin{Bmatrix}21\\2\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}23\\3\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}32\\3\end{Bmatrix}\\
&\quad-\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\left(\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}13\\3\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}14\\4\end{Bmatrix}\right)\\
&= -1-\frac{1}{2}\frac{rM'}{M^2}+\frac{1}{M}+\frac{1}{2}\frac{rW'}{MW}\\
K_{33} &= -\frac{\partial}{\partial r}\begin{Bmatrix}33\\1\end{Bmatrix}-\frac{\partial}{\partial\vartheta}\begin{Bmatrix}33\\2\end{Bmatrix}\\
&\quad+\begin{Bmatrix}31\\3\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}33\\1\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}32\\3\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}33\\2\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}33\\1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}13\\3\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}33\\2\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}23\\3\end{Bmatrix}\\
&\quad-\begin{Bmatrix}33\\1\end{Bmatrix}\left(\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}13\\3\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}14\\4\end{Bmatrix}\right)-\begin{Bmatrix}33\\2\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}23\\3\end{Bmatrix}\\
&= \sin^2\vartheta\left(-1-\frac{1}{2}\frac{rM'}{M^2}+\frac{1}{M}+\frac{1}{2}\frac{rW'}{MW}\right)\\
K_{44} &= -\frac{\partial}{\partial r}\begin{Bmatrix}44\\1\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}41\\4\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}44\\1\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}44\\1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}41\\4\end{Bmatrix}\\
&\quad-\begin{Bmatrix}44\\1\end{Bmatrix}\left(\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}13\\3\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}14\\4\end{Bmatrix}\right)\\
&= \frac{1}{2}\frac{W''}{M}-\frac{1}{4}\frac{M'W'}{M^2}-\frac{1}{4}\frac{W'^2}{MW}+\frac{W'}{rM}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K=\sum_s g^{ss}K_{ss} &= \frac{W''}{MW}-\frac{1}{2}\frac{W'^2}{MW^2}-2\frac{M'}{rM^2}-\frac{1}{2}\frac{M'W'}{M^2W}\\
&\quad-\frac{2}{r^2}+\frac{2}{r^2M}+2\frac{W'}{rMW}.
\end{aligned}$$

Wegen

$$\sqrt{g}=\sqrt{MW}r^2\sin\vartheta$$

[54] In *Hilbert 1924*, the last equation for K_{44} was corrected with an overall minus sign.

wird

$$K\sqrt{g} = \left\{ \left(\frac{r^2 W'}{\sqrt{MW}} \right)' - 2\frac{rM'\sqrt{W}}{M^{\frac{3}{2}}} - 2\sqrt{MW} + 2\sqrt{\frac{W}{M}} \right\} \sin\vartheta$$

und, wenn wir

$$M = \frac{r}{r-m}, \quad W = w^2 \frac{r-m}{r}$$

setzen, wo nunmehr m und w die unbekannten Funktionen von r werden, so erhalten wir schließlich

$$K\sqrt{g} = \left\{ \left(\frac{r^2 W'}{\sqrt{MW}} \right)' - 2wm' \right\} \sin\vartheta,$$

so daß die Variation des vierfachen Integrals 70

$$\iiiint K\sqrt{g}\, dr\, d\vartheta\, d\varphi\, dl$$

mit der Variation des einfachen Integrals

$$\int wm'\, dr$$

äquivalent ist und zu den Lagrangeschen Gleichungen

$$\begin{aligned} m' &= 0 \\ w' &= 0 \end{aligned} \tag{44}$$

führt.[55] Man überzeugt sich leicht, daß diese Gleichungen in der Tat das Verschwinden sämtlicher $K_{\mu\nu}$ bedingen; sie stellen demnach wesentlich die allgemeinste Lösung der Gleichungen (36) unter den gemachten Annahmen 1., 2., 3., dar. Nehmen wir als Integrale von (44) $m = \alpha$, wo α eine Konstante ist und $w = 1$, was offenbar keine wesentliche Einschränkung bedeutet, so ergibt sich aus (43) für $l = it$[56] die gesuchte Maßbestimmung in der von Schwarzschild zuerst gefundenen Gestalt

$$G(dr, d\vartheta, d\varphi, dl) = \frac{r}{r-\alpha} dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2\vartheta d\varphi - \frac{r-\alpha}{r} dt^2. \tag{45}$$

Die Singularität dieser Maßbestimmung bei $r = 0$ fällt nur dann fort, wenn $\alpha = 0$ genommen wird, d. h. Die Maßbestimmung der pseudo-Euklidischen Geometrie ist bei den Annahmen 1., 2., 3. die einzige reguläre Maßbestimmung, die einer elektrizitätsfreien Welt entspricht.

[55] In a letter to Klein from March 3, 1918, Hilbert emphasized the simplification he had achieved by the introduction of the functions m, w; see *Hilbert and Klein 1985*, p. 142.

[56] In *Hilbert 1924*, "für $l = it$" was deleted.

Für $\alpha \neq 0$ erweisen sich $r = 0$ und bei positivem α auch $r = \alpha$ als solche Stellen, an denen die Maßbestimmung nicht regulär ist. Dabei nenne ich eine Maßbestimmung oder ein Gravitationsfeld $g_{\mu\nu}$ an einer Stelle *regulär*, wenn es möglich ist, durch umkehrbar eindeutige Transformation ein solches Koordinatensystem einzuführen, daß für dieses die entsprechenden Funktionen $g'_{\mu\nu}$ an jener Stelle regulär d. h. in ihr und in ihrer Umgebung stetig und beliebig oft differenzierbar sind und eine von Null verschiedene Determinante g' haben.[57]

Obwohl nach meiner Auffassung nur reguläre Lösungen der physikalischen Grundgleichungen die Wirklichkeit unmittelbar darstellen, so sind doch gerade die Lösungen mit nicht regulären Stellen ein wichtiges mathematisches Mittel zur Annäherung an charakteristische reguläre Lösungen — und in diesem Sinne ist nach dem Vorgange von Einstein und Schwarzschild die für $r = 0$
71 und $r = \alpha$ nicht reguläre Maßbestimmung (45) als Ausdruck der | Gravitation einer in der Umgebung des Nullpunktes zentrisch-symmetrisch verteilten Masse anzusehen[C]. Im gleichen Sinne ist auch der Massenpunkt als der Grenzfall einer gewissen Verteilung der Elektrizität um einen Punkt herum aufzufassen, doch sehe ich an dieser Stelle davon ab, die Bewegungsgleichungen desselben aus meinen physikalischen Grundgleichungen abzuleiten. Ähnlich verhält es sich mit der Frage nach den Differentialgleichungen für die Lichtbewegung.

Als Ersatz für die Ableitung aus den Grundgleichungen mögen nach Einstein die folgenden zwei Axiome dienen:

Die Bewegung eines Massenpunktes im Gravitationsfeld wird durch eine geodätische Linie dargestellt, welche Zeitlinie ist[D].

Die Lichtbewegung im Gravitationsfeld wird durch eine geodätische Nullinie dargestellt.[59]

Da die Weltlinie, die die Bewegung des Massenpunktes darstellt, eine Zeitlinie sein soll, so ist es, wie wir leicht einsehen können, stets möglich, den Massenpunkt durch eigentliche Raum-Zeittransformationen auf Ruhe zu

[C] Die Stellen $r = \alpha$ nach dem Nullpunkt zu transformieren, wie es Schwarzschild tut, ist meiner Meinung nach nicht zu empfehlen; die Schwarzschildsche Transformation ist überdies nicht die einfachste, die diesen Zweck erreicht.

[D] Dieser letzte einschränkende Zusatz findet sich weder bei Einstein noch bei Schwarzschild.[58]

[57] This is, in fact, the first general definition of a singularity in General Relativity, cf. *Earman 1999*, p. 236f. The coordinate singularity of the Schwarzschild solution at $r = \alpha$ can, however, be removed by a coordinate transformation that is not required to be smooth and invertible at $r = \alpha$; see *Eisenstaedt 1982*, pp. 172–173, for further discussion.

[58] In *Hilbert 1924*, this footnote was deleted.

[59] In *Hilbert 1924*, the following footnote was added: “Laue hat für den Spezialfall $L = \alpha Q$ gezeigt, wie man diesen Satz aus den elektrodynamischen Gleichungen durch Grenzübergang zur Wellenlänge Null ableiten kann; Phys. Zeitschrift 21 (1920).” The reference is to *Laue 1920*.

bringen d. h. es gibt eigentliche Raum-Zeitkoordinatensysteme, in Bezug auf die der Massenpunkt beständig ruht.

Die Differentialgleichungen der geodätischen Linien für das zentrische Gravitationsfeld (45) entspringen aus dem Variationsproblem

$$\delta \int \left(\frac{r}{r-\alpha} \left(\frac{dr}{dp}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\vartheta}{dp}\right)^2 + r^2 \sin^2\vartheta \left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2 - \frac{r-\alpha}{r} \left(\frac{dt}{dp}\right)^2 \right) dp = 0,$$

sie lauten nach bekanntem Verfahren:

$$\frac{r}{r-\alpha} \left(\frac{dr}{dp}\right)^2 + r^2 \left(\frac{dr}{dp}\right)^2 + r^2 \sin^2\vartheta \left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2 - \frac{r-\alpha}{r} \left(\frac{dt}{dp}\right)^2 = A, \tag{46}$$

$$\frac{d}{dp}\left(r^2 \frac{d\vartheta}{dp}\right) - r^2 \sin\vartheta \cos\vartheta \left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2 = 0, \tag{47}$$

$$r^2 \sin^2\vartheta \frac{d\varphi}{dp} = B, \tag{48}$$

$$\frac{r-\alpha}{r} \frac{dt}{dp} = C, \tag{49}$$

wo A, B, C Integrationskonstante bedeuten.

Ich beweise zunächst, daß die Bahnkurven des $r\vartheta\varphi$-Raumes 72
stets in Ebenen liegen, die durch das Gravitationszentrum gehen.

Zu dem Zwecke eliminieren wir den Parameter p aus den Differentialgleichungen (47) und (48), um so eine Differentialgleichung für ϑ als Funktion von φ zu erhalten. Es ist identisch

$$\frac{d}{dp}\left(r^2 \frac{d\vartheta}{dp}\right) = \frac{d}{dp}\left(r^2 \frac{d\vartheta}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dp}\right) = \left(2r \frac{dr}{d\varphi}\frac{d\vartheta}{d\varphi} + r^2 \frac{d^2\vartheta}{d\varphi^2}\right)\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2 \tag{50}$$

$$+ r^2 \frac{d\vartheta}{d\varphi} \frac{d^2\varphi}{dp^2}.$$

Andererseits liefert (48) durch Differentiation nach p:

$$\left(2r \frac{dr}{d\varphi} \sin^2\vartheta + 2r^2 \sin\vartheta \cos\vartheta \frac{d\vartheta}{d\varphi}\right)\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2 + r^2 \sin^2\vartheta \frac{d^2\varphi}{dp^2} = 0$$

und wenn wir hieraus den Wert von $\frac{d^2\varphi}{dp^2}$ entnehmen und rechter Hand von (50) eintragen, so wird

$$\frac{d}{dp}\left(r^2 \frac{d\vartheta}{dp}\right) = \left(\frac{d^2\vartheta}{d\varphi^2} - 2 \operatorname{cotg}\vartheta \left(\frac{d\vartheta}{d\varphi}\right)^2\right) r^2 \left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2.$$

Die Gleichung (47) nimmt damit die Gestalt an:

$$\frac{d^2\vartheta}{d\varphi^2} - 2\operatorname{cotg}\vartheta\left(\frac{d\vartheta}{d\varphi}\right)^2 = \sin\vartheta\cos\vartheta,$$

eine Differentialgleichung, deren allgemeines Integral

$$\sin\vartheta\cos(\varphi + a) + b\cos\vartheta = 0$$

lautet, wo a, b Integrationskonstanten bedeuten.

Hiermit ist der gewünschte Nachweis geführt und es genügt daher zur weiteren Diskussion der geodätischen Linien, allein den Wert $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ in Betracht zu ziehen. Alsdann vereinfacht sich das Variationsproblem wie folgt

$$\delta\int\left\{\frac{r}{r-\alpha}\left(\frac{dr}{dp}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2 - \frac{r-\alpha}{r}\left(\frac{dt}{dp}\right)^2\right\}dp = 0,$$

und die drei aus demselben entspringenden Differentialgleichungen erster Ordnung lauten

73

$$\frac{r}{r-\alpha}\left(\frac{dr}{dp}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2 - \frac{r-\alpha}{r}\left(\frac{dt}{dp}\right)^2 = A, \tag{51}$$

$$r^2\frac{d\varphi}{dp} = B, \tag{52}$$

$$\frac{r-\alpha}{r}\frac{dt}{dp} = C. \tag{53}$$

Die Lagrangesche Differentialgleichung für r

$$\frac{d}{dp}\left(\frac{2r}{r-\alpha}\frac{dr}{dp}\right) + \frac{\alpha}{(r-\alpha)^2}\left(\frac{dr}{dp}\right)^2 - 2r\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2 + \frac{\alpha}{r^2}\left(\frac{dt}{dp}\right)^2 = 0 \tag{54}$$

ist notwendig mit den vorigen Gleichungen verkettet und zwar haben wir, wenn die linken Seiten von (51), (52), (53), (54) bez. mit [1], [2], [3], [4] bezeichnet werden, identisch

$$\frac{d[1]}{dp} - 2\frac{d\varphi}{dp}\frac{d[2]}{dp} + 2\frac{dt}{dp}\frac{d[3]}{dp} = \frac{dr}{dp}[4]. \tag{55}$$

Indem wir $C = 1$ nehmen, was auf eine Multiplikation des Parameters p mit einer Konstanten hinausläuft, und dann aus (51), (52), (53) p und t eliminieren, gelangen wir zu derjenigen Differentialgleichung für $\varrho = \frac{1}{r}$ als Funktion von φ, welche Einstein und Schwarzschild gefunden haben, nämlich:

$$\left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2 = \frac{1+A}{B^2} - \frac{A\alpha}{B^2}\varrho - \varrho^2 + \alpha\varrho^3. \tag{56}$$

Diese Gleichung stellt die Bahnkurve des Massenpunktes in Polarkoordinaten dar; aus ihr folgt in erster Annäherung für $\alpha = 0$ bei $B = \sqrt{\alpha}b$, $A = -1+\alpha a$ die Kepplersche Bewegung und die zweite Annäherung führt sodann zu einer der glänzendsten Entdeckungen der Gegenwart: der Berechnung des Vorrückens des Merkurperihels.

Nach dem obigen Axiom soll die Weltlinie für die Bewegung eines Massenpunktes Zeitlinie sein; aus der Definition der Zeitlinie folgt mithin stets $A < 0$.

Wir fragen nun insbesondere, ob der Kreis d. h. $r = \text{const}$ die Bahnkurve einer Bewegung sein kann. Die Identität (55) zeigt, daß in diesem Falle — wegen $\frac{dr}{dp} = 0$ — die Gleichung (54) keineswegs eine Folge von (51), (52), (53) ist; letztere drei Gleichungen sind daher zur Bestimmung der Bewegung nicht ausreichend; vielmehr sind (52), (53), (54) die notwendig zu erfüllenden Gleichungen. Aus (54) folgt 74

$$-2r\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2 + \frac{\alpha}{r^2}\left(\frac{dt}{dp}\right)^2 = 0 \tag{57}$$

oder für die Geschwindigkeit v in der Kreisbahn

$$v^2 = \left(r\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{\alpha}{2r}. \tag{58}$$

Andererseits ergibt (51) wegen $A < 0$ die Ungleichung

$$r^2\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2 - \frac{r-\alpha}{r}\left(\frac{dt}{dp}\right)^2 < 0 \tag{59}$$

oder mit Benutzung von (57)

$$r > \frac{3\alpha}{2}. \tag{60}$$

Wegen (58) folgt hieraus für die Geschwindigkeit des im Kreise sich bewegenden Massenpunktes die Ungleichung[E]

$$v < \frac{1}{\sqrt{3}}. \tag{61}$$

Die Ungleichung (60) gestattet folgende Deutung. Nach (58) ist die Winkelgeschwindigkeit des kreisenden Massenpunktes[60]

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\frac{\alpha}{2r^3}}.$$

[E]Die Angabe von Schwarzschild l.c., wonach sich die Geschwindigkeit des Massenpunktes auf der Kreisbahn bei Verkleinerung des Bahnradius der Grenze $\frac{1}{\sqrt{2}}$ nähert, entspricht der Ungleichung $r \geqq \alpha$ und dürfte nach Obigem nicht zutreffend sein.

[60]Added in *Hilbert 1924*: "für $r = r_0$." Also, in the following two equations "r" was replaced by "r_0".'

Wollen wir also statt r, φ die Polarkoordinaten eines um den Nullpunkt mitrotierenden Koordinatensystems einführen, so haben wir nur nötig,

$$\varphi \text{ durch } \varphi + \sqrt{\frac{\alpha}{2r^3}}t$$

zu ersetzen. Die Maßbestimmung

$$\frac{r}{r-\alpha}dr^2 + r^2 d\varphi^2 - \frac{r-\alpha}{r}dt^2$$

geht durch die betreffende Raum-Zeittransformation über in[61]

$$\frac{r}{r-\alpha}dr^2 + r^2 d\varphi^2 + \sqrt{2\alpha r}d\varphi dt + \left(\frac{\alpha}{2r} - \frac{r-\alpha}{r}\right)dt^2.$$

75 Hier ist wegen (60) die Ungleichung $g_{44} < 0$ erfüllt und da auch die übrigen Ungleichungen (31) gelten, so ist[62] die betrachtete Transformation des Massenpunktes auf Ruhe eine *eigentliche* Raum-Zeittransformation.

Andererseits hat auch die in (61) gefundene obere Grenze $\frac{1}{\sqrt{3}}$ für die Geschwindigkeit eines kreisenden Massenpunktes eine einfache Bedeutung. Nach dem Axiom für die Lichtbewegung wird nämlich diese durch eine geodätische Nullinie dargestellt. Setzen wir demnach in (51) $A = 0$, so ergibt sich für die kreisende Lichtbewegung anstatt der Ungleichung (59) die Gleichung

$$r^2\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2 - \frac{r-\alpha}{r}\left(\frac{dt}{dp}\right)^2 = 0;$$

zusammen mit (57) folgt hieraus für den Radius der Lichtbahn:

$$r = \frac{3\alpha}{2}$$

und für die Geschwindigkeit des kreisenden Lichtes der als obere Grenze in (61) auftretende Wert:

$$v = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

[61] In *Hilbert 1924*, the following equation reads:

$$\frac{r}{r-\alpha}dr^2 + r^2 d\varphi^2 + \sqrt{\frac{2\alpha}{r_0^3}r^2}d\varphi dt + \left(\frac{\alpha}{2r_0^3}r^2 - \frac{r-\alpha}{r}\right)dt^2$$

[62] In *Hilbert 1924*, the preceding half-sentence reads:
"Für $r = r_0$ erhält man hieraus

$$\frac{r_0}{r_0-\alpha}dr^2 + r_0^2 d\varphi^2 + \sqrt{2\alpha r_0}d\varphi dt + \left(\frac{3\alpha}{2r_0} - 1\right)dt^2$$

und da hier, wegen $r_0 > \frac{3\alpha}{2}$, die Ungleichungen (21) erfüllt sind, so ist für die Umgebung der Bahn des kreisenden Massenpunktes".

Allgemein erhalten wir für die Lichtbahn aus (56) wegen $A = 0$ die Differentialgleichung

$$\left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2 = \frac{1}{B^2} - \varrho^2 + \alpha\varrho^3; \tag{62}$$

dieselbe besitzt für $B = \frac{3\sqrt{3}}{2}\alpha$ den Kreis $r = \frac{3\alpha}{2}$ als Poincaréschen „Zykel“— entsprechend dem Umstande, daß alsdann $\varrho - \frac{2}{3\alpha}$ rechts als Doppelfaktor auftritt. In der Tat besitzt in diesem Falle die Differentialgleichung (62) — für die allgemeinere Gleichung (56) gilt Entsprechendes — unendlich viele Integralkurven, die jenem Kreise in Spiralen sich unbegrenzt nähern, wie es die allgemeine Zykeltheorie von Poincaré verlangt.

Betrachten wir einen vom Unendlichen herkommenden Lichtstrahl und nehmen α klein gegenüber seiner kürzesten Entfernung vom Gravitationszentrum, so hat der Lichtstrahl angenähert die Gestalt einer Hyperbel mit Brennpunkt im Zentrum[F].

Ein Gegenstück zu der Bewegung im Kreise ist die Bewegung in einer Geraden, die durch das Gravitationszentrum geht. Wir erhalten die Differentialgleichung für diese Bewegung, wenn wir in (54) $\varphi = 0$ setzen und dann aus (53) und (54) p eliminieren; die so entstehende Differentialgleichung für r als Funktion von t lautet: 76

$$\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{3\alpha}{2r(r-\alpha)}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{\alpha(r-\alpha)}{2r^3} = 0 \tag{63}$$

mit dem aus (51) folgenden Integral

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \left(\frac{r-\alpha}{r}\right)^2 + A\left(\frac{r-\alpha}{r}\right)^3. \tag{64}$$

Nach (63) fällt die Beschleunigung negativ oder positiv aus d. h. die Gravitation wirkt anziehend oder abstoßend, jenachdem der Absolutwert der Geschwindigkeit

$$\left|\frac{dr}{dt}\right| < \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{r-\alpha}{r}$$

oder

$$> \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{r-\alpha}{r}$$

[F] Eine ausführliche Diskussion der Differentialgleichungen (56) und (62) wird die Aufgabe einer demnächst hier erscheinenden Mitteilung von V. Fréedericksz sein.[63]

[63] In *Hilbert 1924*, the footnote was deleted and the following sentence was added after “Zentrum.”: “Daraus ergibt sich auch die Ablenkung, die ein Lichtstrahl durch ein Gravitationszentrum erfährt; dieselbe wird nämlich gleich $\frac{2\alpha}{B}$.” The paper by V. Fréedericks never appeared in the *Nachrichten*

ausfällt.

Für das Licht ist wegen (64)

$$\left|\frac{dr}{dt}\right| = \frac{r-\alpha}{r};$$

das geradlinig zum Zentrum gerichtete Licht wird in Übereinstimmung mit der letzten Ungleichung stets abgestoßen; seine Geschwindigkeit wächst von 0 bei $r = \alpha$ bis 1 bei $r = \infty$.

Wenn sowohl α wie $\frac{dr}{dt}$ klein sind, geht (63) angenähert in die Newtonsche Gleichung

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{\alpha}{2}\frac{1}{r^2} \tag{1}$$

über.

Chapter 2

The Foundation of Physics:

The Lectures (1916–1917)

Introduction

Hilbert gave a two-semester course on the "Foundations of Physics" in the summer semester 1916 and the following winter semester 1916/17. In this Chapter we present the *Ausarbeitungen* of this two-part course.

While Hilbert was preparing his "First Communication" on the "Foundations of Physics" for publication (*Hilbert 1915*, this Volume pp. 28–46), classes had resumed in Göttingen for the winter term of 1915/16. But Hilbert did not lecture on relativity during this semester. Instead, he lectured on differential equations (*Hilbert 1915**). Thus, in contrast to his lectures and publications on radiation theory and his second note, the publication of his first note is not an example of Hilbert's teaching on a topic prior to or simultaneous with his current research concerns. But in the following summer term of 1916, Hilbert started to lecture on relativity theory. The lecture was announced as "Einleitung in die Prinzipien der Physik" and took place on Thursdays, 9–11 a.m.[1] As is clear from the handwritten equations, Hilbert's summer lectures were worked out by the Swiss mathematician and physicist Richard Bär, who had come to work as Hilbert's assistant some time around Easter 1916.[2]

While the title of the lecture course in summer 1916 bears the same title as Hilbert's "First Communication" of the previous winter, it does not present the same material. Hilbert's intention was to bring his students up to speed with his own research work in this field. In order to do so, Hilbert goes back to the foundations of special relativity and first presents an axiomatic discussion of special relativistic kinematics. This work may be regarded as the starting point of a subsequent tradition of attempts to axiomatize relativity theory, an endeavour that is currently associated with Hans Reichenbach's writings. It is unclear, though, whether and to what extent Reichenbach was aware of Hilbert's investigations when he was working out his own axiomatic analysis of relativity theory.

In the second part of the summer course, Hilbert also discusses special relativistic dynamics and, in particular, dynamic concepts of the electron. In this context, Hilbert first presents the rigid electron model developed by the former Göttingen physicist Max Abraham and later refined by Hilbert's own students Erich Hecke and Wilhelm Behrens. This model of electron dynamics is then contrasted with Gustav Mie's field theoretic concept of the electron as a static and spherically symmetric solution of non-linear generalizations of Maxwell's equations. Particularly interesting is Hilbert's lucid discussion of Mie's explicit solution of one such non-linear set of Maxwell equations in which the electromagnetic potential enters the field equations to fifth power. This solution had already been discussed by Mie in his own original paper

[1] Hilbert also lectured on "Partielle Differentialgleichungen" (Mondays, 9-11 a.m., *Hilbert 1916b**); see Hilbert's Lecture Courses, 1886–1934, this Volume, p. 719.

[2] See the discussion in the Introduction to this Volume, sec. 4.

on the subject. It is taken up here by Hilbert and discussed in its simple mathematical essence. This explicit solution became a paradigmatic example for later field theoretic programs that attempted to overcome the duality of matter and fields by conceiving material particles as non-singular, static, and spherically symmetric solutions to generalized field equations of the gravitational and electromagnetic fields.

It is only in the last lecture of the 1916 summer course that Hilbert addresses the question of generalizing special relativity and Mie's non-linear electrodynamics into a generally covariant theory. Mie had proposed a theory of gravitation within the Lorentz covariant framework of his non-linear electrodynamics. But it had been one of Hilbert's central insights of the fall of 1915 that Mie's electromagnetic theory can be combined with Einstein's theory of gravitation. His main idea had been to generalize Mie's electrodynamics to a generally covariant theory where, following Einstein, a metric tensor field would represent the inertio-gravitational field. Mie's equations would be recovered from the generally covariant theory in the special relativistic limit. A didactic exposition of Einstein's theory of general relativity is hence announced for the winter term 1916/17 at the end of the first part of Hilbert's summer course.

During the years of World War I, Felix Klein studied this *Ausarbeitung* as he prepared the second volume of his lectures on the development of mathematics in the nineteenth century (*Klein 1927*). Excerpt notes by Klein are extant in his papers,[3] and some of his comments have been pointed out in the annotation.

The second part of Hilbert's course on the "Foundations of Physics" was given in the winter term 1916/17. Again, the lecture was not explicitly announced under this title. In fact, it was not announced at all.[4] The *Ausarbeitung* of this course, which was given for four hours per week, was again prepared by Richard Bär as is indicated explicitly on its title page. It is here presented in its entirety.

This second part of the course covers the subject matter of Hilbert's first note. But again, it starts with a discussion that will be the foundation for what is to follow. Hilbert first gives an introduction to differential geometry, proceeding step-by-step from standard two-dimensional surface theory to the case of three and four dimensions, and from a positive-definite to an indefinite line element. Hilbert spends a great deal of time carefully explaining the basic concepts of differential geometry for the simple case of two-dimensional surface theory. He introduces what he calls Riemannian coordinates, i.e., geodesic normal coordinates, which he then uses to motivate and derive the Riemann

[3] SUB Göttingen, *Cod. Ms. F. Klein* 22A, f. 31–32.

[4] See Hilbert's Lecture Courses, 1886–1934, this Volume, p. 719.

curvature tensor. He explicitly illustrates the concepts and equations by discussing the example of the sphere, and then moves on to introduce Gaussian coordinates showing that the Riemann curvature in two dimensions is proportional to the Gaussian curvature which is given geometrically in terms of principal radii of curvature. Hilbert also discusses the case of non-Euclidean geometries of constant curvature and what he calls the pseudosphere. Before moving on to the three-dimensional case, Hilbert devotes a few paragraphs to the case of an indefinite metric. Here we find him using the term "pseudo-Euclidean geometry," perhaps a local Göttingen expression. In his treatment of the three-dimensional case, he proceeds along the same lines by emphasizing the structural generalizations that are necessitated by the additional dimension. The three-dimensional case also gives him occasion to discuss the theory of characteristics of the Hamilton-Jacobi and Monge differential equations. Of particular interest is his introduction and use of the invariant conditions that express the character of the geometry, and which develop into his so-called reality conditions in the four-dimensional case. After such long preparation, Hilbert's treatment of the physically relevant four-dimensional case can then be rather brief.

While the first part of the course presents a purely mathematical discussion, it is in § 37, entitled *Zusammenhang der Theorie mit der Wirklichkeit*, that Hilbert then begins to address the specific issues with which he is most concerned. Among the first interpretational and foundational problems to be treated are the questions of the principal measurability of the components of the metric tensor and the necessary reinterpretation of the notion of causality in a generally covariant physical theory. By this time, Hilbert's lecture has caught up with his current research interest, and parts of the material covered in his lectures are quite similar to the discussion in his "Second Communication" to the "Foundations of Physics" (*Hilbert 1917*, this Volume, pp. 47–72). Nevertheless, his lectures are more explicit and sometimes more lucid than his published account. It is in this second part of the lecture course that Hilbert brings to bear his knowledge of a rich mathematical tradition to the analysis of foundational problems raised by general relativity. Several themes are discussed in the course of his lectures. He first gives a derivation of the gravitational and electromagnetic field equations, then discusses the question of the empirical status of Minkowskian space-time. This question is debated on the level of the open question of the existence and uniqueness of the Minkowski line element as a solution of the vacuum field equation. In a second step, he looks at the case of spatial spherical symmetry, rederiving Schwarzschild's solution. He also discusses the subtle issue of singularities of the metric.

Further discussion of the implications of the field equations involve the solution of the equations of motion for a particle in a gravitational field. The conceptual framework for this problem is set up by means of provisional axioms for the motion of material particles and for the geometry of light rays in curved space-times. The axiomatic postulates here serve as a substitute for a complete derivation of the equations of motion from the field equations themselves. Given the mathematical problem of solving a differential equation for geodesic motion in a curved space-time, Hilbert skilfully gives a state-of-the-art discussion of the predictions for the three classical tests of general relativity.

In the final chapters of his second course, Hilbert deals with the field theoretic problem of the integration of electrodynamics into the gravito-inertial framework. He outlines a research program in which a full theoretical account of the real world is to be achieved by a series of successive approximations. An expansion of the metric field in terms of the coupling constant to the electromagnetic field around the vacuum solution defines a series of ever better approximations of the real world. As a first approximation, Hilbert takes Einstein's gravitational wave solution of the linearized field equations. The second approximation then would include the electron as a spherically symmetric solution of the field equations. This program is only hinted at, and we have little evidence about any progress that Hilbert would have made along these lines.[5] The final part of the lecture course discusses the problem of the concept of energy in a general relativistic field theory and the problem of formulating a generalized theorem about energy-momentum conservation. These problems had played a role already in the proofs and published version of *Hilbert 1915* (see this Volume, pp. 317–329 and pp. 28–46) and were further discussed in Göttingen until its principal solution by Felix Klein and Emmy Noether in 1918.[6]

Several other copies of the *Ausarbeitung* of the second course of this lecture are known to the Editors. The papers of Erich Hückel in the Berlin Staatsbibliothek contain an unbound copy[7] that is identical to the Göttingen copy and shows the same page breaks throughout the whole text. The copy has the same equations and the same occasional corrections. These were added in R. Bär's hand for pages 1 to 155. Following page 156, however, all handwritten additions are in a different hand. This copy contains page 107, which is missing in the Göttingen copy. The papers of Max Born in the Berlin Staatsbibliothek contain a complete bound copy[8] that is identical in text but has different page breaks. Its title page says that the *Ausarbeitung* was prepared by Paul Scherrer. A comparison of this copy with the Göttingen copy and the copy in the Hückel papers shows that the handwritten corrections

[5] See his notes on the "Foundations of Physics," this Volume, pp. 331–333.

[6] For further discussion of Hilbert's lectures on the *Foundations of Physics*, see *Corry 2004*, ch. 8.3, *Renn and Stachel 2007*, *Brading and Ryckman 2008*.

[7] Staatsbibliothek Preußischer Kulturbesitz, Berlin. Handschriftenabteilung. Nachl. Hückel 2.11.

[8] Staatsbibliothek Preußischer Kulturbesitz, Berlin. Handschriftenabteilung. Nachl. Born 1818.

of the latter versions are incorporated into the typewritten text of the former. It appears that the copy in the Born papers is merely a fresh typescript of the earlier Göttingen version, which according to its title page was prepared by Richard Bär, and otherwise is an identical copy. Finally, the Archives of the California Institute of Technology own a bound copy that was part of the papers of Paul Epstein.[9] Its title page also credits Paul Scherrer with the *Ausarbeitung*, it shows the same page breaks as the copy in the Born papers, and appears to be an identical copy of the version in the Born papers.

Tilman Sauer

[9] California Institute of Technology, Pasadena, Archives. Call No. QA401.H5.

Die Grundlagen der Physik

Inhalt

Einleitung

Die Vorlesung, die ich in diesem Semester mit „Grundlagen der Physik" angezeigt habe,[1] soll sich wesentlich mit den modernen relativistischen Ideen beschäftigen, die den Namen „Grundlagen" wohl mit ebenso grossem, wenn nicht mit grösserem Recht für sich in Anspruch nehmen dürfen, wie andere moderne Theorien und Ideenbildungen. Der Anfang soll mit dem sogenannten „kleinen Relativitätsprinzip"[2] gemacht werden, einmal aus pädagogischen Gründen, dann aber auch des grossen und selbständigen Interesses wegen, das es bietet. In einem späteren Teil werden wir dann zu der allgemeinsten Fassung des Relativitätsprinzips übergehen.[3] Unsere mathematischen Hilfsmittel werden hier die Variationsrechnung und die Invariantentheorie sein. Letztere wird von Fräulein Dr. Noether in einem Zyklus von Vorträgen im Seminar behandelt werden.[4]

§ 1. Das Problem und seine Geschichte

Es handelt sich bei den relativistischen Theorien ganz wesentlich um die fundamentalsten Begriffe der Physik, um Raum und Zeit. Die Philosophen untersuchten schon frühzeitig das gegenseitige Verhältnis von Raum und Zeit und kamen, bald instinktiv, bald aus philosophischen Gründen, zur Erkenntnis der Zusammengehörigkeit beider. Hier ist, um von älteren ganz zu schweigen, Kant zu nennen, in dessen Erkenntnistheorie (vgl. Kritik der reinen Vernunft, wo in der „transzendentalen Aesthetik"[5] die Frage: „Wie ist Mathematik als reine Wissen|schaft möglich?"[6] untersucht wird) Raum- und Zeitbegriff eine 2

[1]The lecture course was announced as "Einleitung in die Prinzipien der Physik" (*Hilbert 2004*, p. 617) and took place on Thursdays, 9–11 am (*Verzeichnis 1916*, p. 15). In the page margin, a typewritten date ("4.V.16") was added next to the first line. The summer semester 1916 started on 16 April (*Verzeichnis 1916*, p. 1).

[2]The terminology "kleines Relativitätsprinzip" is non-standard. In excerpt notes about Hilbert's course notes, dated 26 August 1916, Felix Klein remarked: "Neue Termini: "Kleines Relativitätsprinzip" "Zukunfts- bez. Vergangenheitskegel". Das Historische ist immer unzureichend! Vielfach die Termini. Wie viel kommt auf unvollkommene Ausarbeitung?" (SUB *Cod. Ms. Klein 22A*, sheet 29).

[3]General Relativity is introduced only in the last paragraph (§ 31.) of this lecture; see pp. 154ff below. It is treated *in extenso* in the second part of the lecture course on *Grundlagen der Physik* given in winter 1916/17, *Hilbert 1916/17**, this Volume, pp. 162–307.

[4]Emmy Noether (1882–1935) had come to Göttingen in summer 1915 in order to work with Klein and Hilbert. Supported by Hilbert, she had attempted twice to obtain a *venia legendi* in spite of an explicit decree against the habilitation of women at Prussian universities dating from 1908. Both attempts had failed due to the conservative majority of the Göttingen philosophical faculty (*Tollmien 1991*), and Noether had to announce her lectures under Hilbert's name. In early 1917, after receiving a call to Berlin, Hilbert negotiated with the Prussian ministry that funds be allocated to support Noether's teaching in Göttingen after the war (*Sauer 2000*, p. 191). Noether finally obtained her habilitation in 1919.

[5]*Kant 1956*, pp. 63–93.

fundamentale Rolle spielen.
Neben dieser philosophischen Entwicklung läuft eine zweite Reihe von Untersuchungen her, die sich zwar ursprünglich nur auf den Raum selbst beziehen, aber zu einer Erweiterung auf Raum und Zeit drängten. Wir meinen hier die Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie. Diese bezwecken eine axiomatisch-logische Analyse der Grundbegriffe unserer Raumanschauung und suchen ein System von Axiomen, durch die es möglich ist, die ganze Wissenschaft vom Raume lückenlos und widerspruchsfrei aufzubauen. Nimmt man zum Raum noch die Zeit hinzu, so kommt man von hier aus zur Kinematik.
Der wichtigste und folgenreichste Anstoss zur Weiterentwicklung ist aber von keiner der skizzierten Richtungen gekommen, sondern vom physikalischen Experiment. Hieran anschliessend vollzog sich eine der grössten Umwälzungen, die unsere Wissenschaft kennt und noch immer ist das Ende dieser Revolution nicht gekommen. Soviel können wir aber sagen: Was die Philosophen instinktiv gefühlt, was sie immer gefordert, hier wird es zur Tat. Raum und Zeit stehen nicht mehr getrennt nebeneinander, sondern gehen eine so enge Verbindung ein, dass Zeit ohne Raum, Raum ohne Zeit nicht mehr denkbar ist.[7]
Wir schliessen uns im folgenden dem historischen Weg an, denn es ist nötig, die alte Auffassung von Raum und Zeit zu kennen, um die neue zu verstehen. Der Weg, den wir einschlagen, wird der axiomatische sein.

3 § 2. Die Axiome der Geometrie

Entsprechend dem zuletzt gesagten, gehen wir aus von den Axiomen der Geometrie, wie sie aus den Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie bekannt sind, und lassen es dahingestellt, ob sich nicht schon hier Schwierigkeiten ergeben, d.h. ob es erlaubt ist, hier die Zeit so vom Raum abzutrennen, insbesondere, ob hier nicht vielleicht schon von dem Begriff der Gleichzeitigkeit implizite Gebrauch gemacht ist. Jedenfalls müssen wir, um mit der Erfahrung in Uebereinstimmung zu bleiben, axiomatisch fordern, dass die „Welt“ (die Gesamtheit von Raum und Zeit) eine vierdimensionale Mannigfaltigkeit ist, also durch vier Parameter völlig beschrieben werden kann, von denen drei, die „Raumkoordinaten“, zusammengehören und der vierten, der Zeitkoordinate gegenüberstehen, aber nicht so, dass sie streng von einander geschieden wären.
Wir wollen aus pädagogischen Gründen im folgenden für den Raum nie mehr Dimensionen annehmen, als wir unbedingt brauchen, also nur dann drei Dimensionen, wenn dies unbedingt notwendig ist, sonst zwei oder womöglich nur

[6]In the introduction to the second edition of the *Kritik der reinen Vernunft*, Kant asks the questions: “Wie ist reine Mathematik möglich? Wie ist reine Naturwissenschaft möglich?” *Kant 1956*, p.52*.

[7]An allusion to Minkowski, cf. note 29 below.

eine. Es würde die Anschauung eben unleugbar erschwert, wenn wir immer mit drei Dimensionen operieren wollten.

Wir legen in den Raum ein festes Koordinatensystem. Schon hier tritt uns die erste Schwierigkeit entgegen: Was heisst „fest" oder, wie wir auch sagen werden, „starr"? Die Starrheit ist natürlich ursprünglich das Resultat eines aus der Erfahrung entsprungenen physikalischen Grenzprozesses, muss aber hier axiomatisch gefasst werden. Wir kommen hierauf | noch zurück.[8] 4

Wir haben also ein Cartesisches Koordinatensystem in einer Euklidischen Ebene. Jeder Punkt ist Träger eines Zahlenpaares (x, y). Wir können uns dies so versinnbildlichen, dass wir uns in jedem Punkt einen Kilometerstein denken, auf dem die beiden Zahlen x und y stehen. Wir denken uns weiter ein physikalisches Instrument, den starren[9] „Massstab", der als „Entfernung" zweier Punkte mit den Koordinaten (x', y') u. (x'', y'') überall $\sqrt{(x'-x'')^2+(y'-y'')^2}$ angibt. Von diesem Massstab werden wir sagen, er sei „starr". In unserer Ebene soll, wie wir schon oben sagten, die euklidische Geometrie, (also insbesondere der Satz von der Winkelsumme im Dreieck und die ganze analytische Geometrie) gelten. Die reinste Form dieser Voraussetzung ist in folgenden Forderungen enthalten:

1. Die Gleichung jeder geraden Linie ist linear.
2. Alle möglichen Benennungen der Ebene durch Cartesische Koordinaten werden erhalten durch Transformationen von der Form

$$\begin{aligned} \xi &= \alpha_{11}x + \alpha_{12}y \\ \eta &= \alpha_{21}x + \alpha_{22}y \end{aligned} \tag{I}$$

mit der Nebenbedingung:

$$\xi^2 + \eta^2 = x^2 + y^2$$

und von der Form

$$\begin{aligned} \xi &= x + \alpha_1 \\ \eta &= y + \alpha_2 \end{aligned} \tag{II}$$

und durch Zusammensetzungen von Transformationen beider Arten. Die Nebenbedingung bei I sagt aus, dass die „Entfernung" zweier | Punkte etwas vom 5
Koordinatensystem unabhängiges ist, bei den Transformationen II ist eine solche Nebenbedingung überflüssig, da sie die Entfernung von selbst invariant lassen. Da uns die Transformationen I und II stets erlauben, ein Koordinatensystem zu finden, dessen Anfangspunkt ein vorgegebener Punkt ist und dessen eine Achse durch einen zweiten gegebenen Punkt hindurch geht, so dürfen wir sagen, dass die Transformationen I und II das Anlegen des Massstabes repräsentieren.

Wir haben angenommen, dass die Geometrie die Euklidische sei, man könnte natürlich auch eine der nichteuklidischen Geometrien zu Grunde legen und

[8] See the discussion in § 6, pp. 88–90, and in § 25, pp. 136–140, below.

[9] „starren" was interlineated.

darauf weiterbauen. Die Frage, ob unsere Annahme zulässig ist, muss durch das Experiment entschieden werden, da wir nur dann hoffen dürfen, mit der Wirklichkeit in Uebereinstimmung zu bleiben, wenn unsere Annahmen der Erfahrung nicht widersprechen. Für unsere Frage ist das Experiment schon von Gauss angestellt worden; unter der Annahme, dass die Lichtstrahlen Gerade sind, ergaben sich für die Winkelsumme im Dreieck so geringe Abweichungen von 180°, dass sie völlig innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler fielen, also keine Entscheidung zu Ungunsten der Euklidischen Geometrie lieferten.[10] Für den dreidimensionalen Raum verläuft alles genau so, wie wir es eben für den zweidimensionalen darlegten, wir gehen also darauf nicht weiter ein.

§ 3. Die Axiome und Definition der Zeitmessung

Zu dem Raum müssen wir nun die Zeit hinzunehmen und da ist es nötig,
6 von der Zeitmessung und den ihr | zugrunde liegenden Axiomen zu sprechen,
um dann zu den Axiomen überzugehen, die Zeit und Raum in Verbindung bringen, also für den Aufbau der Mechanik und damit der ganzen Physik entscheidend sind.

In der Geometrie müssen wir von gewissen Begriffen Gebrauch machen, die wir der Anschauung entnehmen und die durch ihre für die Geometrie allein wesentlichen Eigenschaften noch nicht völlig bestimmt sind, wie die „Gerade Linie“ u. s. w. Es gibt ja z. B. Kreisgebüsche, in denen die Euklidische Geometrie herrscht, wenn man statt „Kreis des Gebüsches“ überall „Gerade“ sagt, diese Kreise haben also alle Eigenschaften der euklidischen Geraden, sind aber für unsere Anschauung jedenfalls keine Geraden. Genau so ist es mit der Zeit und Bewegung. Was „Bewegung“, was „Zeit“ ist, ist einer einwandfreien Definition nicht zugänglich, alle Definitionen sind Scheindefinitionen, wir drehen uns bei ihnen immer im Kreise. Wir wollen den Begriff der Zeit also als gegeben voraussetzen. Bewegung ist dann die Abhängigkeit des Ortes (d. h. der Koordinaten) von der Zeit. Es handelt sich nur darum, die Zeit zu messen, und wir messen sie durch eine Bewegung, beziehen also alle Bewegungen auf eine Normalbewegung. Das Axiom, das wir zugrunde legen müssen, ist, dass es eine Bewegung gibt, mit der wir alle anderen Bewegungen vergleichen, auf die wir die anderen Bewegungen beziehen können, m.a.W., dass es möglich ist, eine Uhr zu konstruieren.

7 Als diese Normalbewegung wollen wir die Lichtbewe|gung nehmen und uns

[10] In *Gauss 1828*, § 28, Gauß reported measurements of the spherical excess of the angular sum of the triangle formed by the three mountain peaks of Brocken, Hohehagen, and Inselsberg in the Hanoverian kingdom. According to his contemporary and friend Sartorius von Waltershausen, Gauß took these most precise geodesic measurements of a large terrestial triangle as evidence that the embedding three-dimensional space is Euclidean to high approximation (*Sartorius von Waltershausen 1856*, p. 81). The historical accuracy of this claim has been a topic of debate in the history of science. For a critical summary of

eine „Lichtuhr" wie folgt konstruieren: Wir stellen in dem Punkte $\frac{1}{2}$ der x-Achse einen Spiegel auf,[11] lassen vom Koordinatenanfang 0 ein Lichtsignal ausgehen und sagen, es sei die Zeiteinheit verflossen, wenn der reflektierte Strahl wieder in 0 ankommt. Ebenso soll die Zeit t verflossen sein, wenn der Spiegel in der Entfernung $\frac{t}{2}$ von 0 aufgestellt war.[12] Der Grund, warum wir die Lichtbewegung als Normalbewegung nehmen, ist hier leicht ersichtlich; es ist möglich, das Licht zu zwingen, zweimal denselben Ort zu passieren. Wir sind aber mit der Definition der Lichtuhr noch nicht am Ziel, soll sie brauchbar sein, so muss zunächst noch folgendes Axiom erfüllt sein:

Die Lichtuhr ist unabhängig vom Koordinatensystem. Es ist also gleichgültig, dass wir den Spiegel gerade im Punkt $\frac{1}{2}$ der x-Achse aufstellten; jeder andere Punkt in der Entfernung $\frac{1}{2}$ von 0 hätte uns dieselbe Stellung der Uhr angezeigt. Wir können nun in jedem Punkt der Ebene eine solche Lichtuhr konstruieren (dass die Uhr im Koordinatenanfang konstruiert war, ist ja keine Einschränkung, da man durch die im vorigen Paragraphen angegebenen Transformationen II jeden Punkt zum Koordinatenanfang machen kann). Es handelt sich nun darum, diese verschiedenen Uhren, die noch völlig unabhängig voneinander sind, in Beziehung zu setzen, nach einer von ihnen ⟨die anderen⟩ zu stellen.[13] Wir tun dies wie folgt:

Man sendet von 0 beim Uhrstand $t = t_0$ ein Licht|signal aus und stelle alle 8
Uhren in der Entfernung r von 0 auf $t_0 + r$, sobald das Signal dort ankommt. In dieser Art des Stellens liegen zwei Axiome, wenn sie Sinn haben soll, nämlich:

1) Die Stellung der Uhr soll von t_0 unabhängig sein, d. h. habe ich die Uhr wie angegeben gestellt und vergleiche die Uhrstände, indem ich dasselbe zur Zeit t_1 in 0 wiederhole, so stehen die Uhren schon alle richtig, oder anders ausgedrückt: Der Gang der Uhr ist vom Ort unabhängig.

2) Die Stellung der Uhr ist vom Punkt 0 nicht wesentlich abhängig, d. h. hätte ich die Uhren alle nach der Uhr in einem Punkt $0'$ gestellt, statt nach der Uhr in 0, so wäre der Unterschied der Stellung nach 0 und nach $0'$ bei allen Uhren derselbe, also konstant, und zwar gleich der Zeit, um die die Uhr in $0'$ gegen die Uhr in 0 falsch geht.

Wir haben nun in jedem Raumpunkt ausser seinem Kilometerstein noch eine Uhr, die vierdimensionale Mannigfaltigkeit Raum und Zeit wollen wir „Welt" nennen und einen Kilometerstein mit einem bestimmten Uhrstand infolgedessen einen „Weltpunkt" oder auch „Ereignis".

---

the debate and a detailed historical discussion that supports the account of Sartorius von Walterhausen, see *Scholz 2004*.

[11] The preceding sentence was corrected from: "Wir stellen in einem der Punkte in der x-Achse (dem Koordinatenanfang) einen Spiegel auf, ...".

[12] For this definition of a light clock, cf. *Einstein 1912*, p. 366, cf. also *Einstein 1913*, p. 1254, where this kind of clock is compared with a gravitational clock.

[13] "in Beziehung zu setzen, nach einer von ihnen zu stellen" was corrected from "in Beziehung zu stellen, nach einer von ihnen".

Wir nennen nun zwei Ereignisse *gleichzeitig*, wenn der Uhrstand bei beiden derselbe ist.

§ 4. Zusammenstellung der Axiome und Definitionen der beiden ersten Axiomgruppen

Wir wollen die bisher besprochenen Axiome und Definitionen nochmals kurz
hier rekapitulieren, bevor wir zur nächsten, der wichtigsten Gruppe von Axio-
9 men und Definitionen über|gehen. Wir hatten zunächst zwei Gruppen von
Axiomen nebst den zugehörigen Definitionen:

I. Axiome des Raumes

II. " der Zeit.

Und zwar waren dies im einzelnen folgende:
I. Axiome des Raumes.[14]

Axiom 1. Es gibt ein Bezugssystem x y der Ebene, so dass die Gleichung der geraden Linie linear ist.

Axiom 2. Alle möglichen solchen Bezugssysteme gehen aus ihm hervor durch die Transformation:

$$\text{I.}\quad \begin{aligned} \xi &= \alpha_{11}x + \alpha_{12}y \\ \eta &= \alpha_{21}x + \alpha_{22}y \end{aligned} \qquad \text{nebst} \quad \xi^2 + \eta^2 = x^2 + y^2$$

$$\text{II.}\quad \begin{aligned} \xi &= x + \alpha_1 \\ \eta &= y + \alpha_2 \end{aligned}$$

Definition: Wir nennen $\sqrt{(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2}$ "Entfernung" der Punkte $P' = (x', y')$ und $P'' = (x'', y'')$.

II. Axiome der Zeit:

Axiom 1. Es gibt eine Normalbewegung, die Lichtbewegung, die als Vergleichsbewegung brauchbar ist, also zur Konstruktion einer Uhr dienen kann.
Definition 1.: Definition der Lichtuhr und der Zeiteinheit.
Axiom 2.: Die Lichtuhr ist unabhängig vom Koordinatensystem. [15]
Hier ist enthalten:
10 (2a: Die Lichtuhr kann in jedem Punkt der Ebene | konstruiert
werden).
Definition 2.: Stellung der Uhren in der Ebene.

---

[14] The following two sentences were corrected from:
"Es gibt eine Bewegung xy der Ebene, so dass
Axiom 1. die Gleichung der geraden Linie linear ist
2. alle möglichen Bewegungen gehen aus ihr hervor durch die Transformation:"

[15] "vom Koordinatensystem" was corrected in pencil to "von der Richtung".

Axiom 3. Der Gang der Uhr ist vom Ort unabhängig.
4. Die Stellung der Uhr ist von 0 nicht wesentlich[16] abhängig.
(Gleichberechtigungsaxiom)

Definition 3.: Ereignis.
4. Gleichzeitigkeit.

§ 5. Der Begriff der Bewegung

Unter "Bewegung" verstehen wir, wie schon oben gesagt,[17] die Abhängigkeit der Koordinaten von der Zeit. Es handelt sich für uns nun darum, dies mathematisch so zu fassen, wie wir es im folgenden brauchen.

Kontinuum nennen wir jede stetige Punktmenge des x, y, z Raumes. Das Kontinuum bewegt sich, wenn für jeden Punkt der Menge die Koordinaten x, y, z Funktionen von t sind, wir haben also, da das Kontinuum eine dreifach unendliche Punktmenge ist, die Bewegung gegeben, wenn x, y, z in der Form

$$\begin{aligned} x &= f(\lambda, \mu, \nu, t), \\ y &= g(\lambda, \mu, \nu, t), \\ z &= h(\lambda, \mu, \nu, t) \end{aligned}$$

gegeben sind. Von diesen Funktionen f, g, h müssen wir, wenn die Definition der Bewegung mit der Erfahrung übereinstimmen soll, verschiedenes voraussetzen (so z.B. mehrfache Differenzierbarkeit usw.), hier brauchen wir nur 1) die Stetigkeit, 2) dass bei konstantem t die Zahlentripel x, y, z und λ, μ, ν einander eineindeutig zugeordnet sind.[18]

Die letztere Forderung besagt: Zwei Punkte des Kontinuums, die zur Zeit t_1 11
verschieden sind, sind auch zu jeder anderen Zeit t_2 verschieden. Die Parameter λ, μ, ν kann man noch auf unendlich viele Arten wählen, man wird dies natürlich so tun, dass sie physikalisch anschauliche Bedeutung haben.

Bahnkurven der Punkte des Kontinuums nennen wir die dreiparametrige Schar der Kurven, die durch

$$\begin{aligned} x &= f(\lambda, \mu, \nu, t), \\ y &= g(\lambda, \mu, \nu, t), \\ z &= h(\lambda, \mu, \nu, t) \end{aligned}$$

in Parameterstellung mit t als Parameter gegeben sind. Die Länge des Wegs, den ein Punkt in der Zeit t_0 bis t_1 zurücklegt, ist die Länge der Bahnkurve zwischen den zu $t = t_0$ und $t = t_1$ gehörigen Kurvenpunkten.

---

[16] "wesentlich" was corrected from "unendlich".

[17] § 3, p. 6, above.

[18] *Boltzmann 1897*, § 3, discusses differentiability of the trajectories of material particles as an independent axiom for mechanics, with reference to the existence of functions which are continuous everywhere but nowhere differentiable.

Mehr als das Gesagte brauchen wir vom allgemeinen Bewegungsbegriff nicht, da wir uns im folgenden auf spezielle Bewegungen, die geradlinig gleichförmigen beschränken.

§ 6. Die gleichförmige gradlinige Bewegung starrer Systeme

Wir nennen die Bewegung „*geradlinig*", wenn die Bahnkurven aller Punkte des Kontinuums gerade Linien sind, wir nennen sie „*gleichförmig*", wenn der Weg eines Punktes in einem Zeitintervall $t_1 - t_0$ nur von der Grösse dieses Intervalls und nicht von t_0 und t_1 selbst abhängt, also, für die *geradlinige* Bewegung:

$$\sqrt{(x_{t_1} - x_{t_0})^2 + (y_{t_1} - y_{t_0})^2 + (z_{t_1} - z_{t_0})^2} = f(t_1 - t_0)$$

12 unabhängig von x, y, z, t_0, t_1 | ist. Da f, wie aus der Definition folgt, noch die Funktionalgleichung:

$$f(t_2 - t_1) + f(t_1 - t_0) = f(t_2 - t_0)$$

erfüllen muss, muss f notwendig linear sein, also

$$f(t_1 - t_0) = (t_1 - t_0)\varphi(\lambda, \mu, \nu),$$

und daraus folgt, dass bei *geradliniger gleichförmiger Bewegung ist*:

$$\begin{aligned}
x &= f_1(\lambda, \mu, \nu) + \varphi_1 \cdot t, \\
y &= f_2(\lambda, \mu, \nu) + \varphi_2 \cdot t, \\
z &= f_3(\lambda, \mu, \nu) + \varphi_3 \cdot t.
\end{aligned}$$

Wir sagen, das Kontinuum bewege sich als starrer Körper, wenn die Entfernungen zweier bestimmter Punkte des Kontinuums unabhängig von der Zeit sind:

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = \text{unabhängig von } t,$$

$$x_1 = f(\lambda_1, \mu_1, \nu_1, t) \qquad x_2 = f(x_2, \mu_2, \nu_2, t) \qquad \cdots$$

u. s. w.

Im Falle der geradlinigen gleichförmigen Bewegung heisst das:

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_1 &= \text{const.} = c_1 \\
\varphi_2 &= \text{const.} = c_2 \\
\varphi_3 &= \text{const.} = c_3
\end{aligned}\right\} \quad \text{unabhängig von } \lambda,\ \mu,\ \nu,$$

also

$$\begin{aligned}
x &= f_1 + c_1 t, \\
y &= f_2 + c_2 t, \\
z &= f_3 + c_3 t.
\end{aligned}$$

Wir müssen nun die Parameter λ, μ, ν so wählen, resp. statt ihrer andere so einführen, dass sie eine anschauliche physikalische Bedeutung erhalten.

13 Dies machen wir so, indem wir zunächst sehen, was bei der Bewegung erhalten bleibt. Wir behaupten zunächst, dass Punkte des Kontinuums, die einmal in einer Geraden liegen, für jedes t auf einer Geraden liegen. Es sei z.B. für $t = t_0$

$$(ax + by + cz)_{t=t_0} = \text{const.} = d, \quad \text{d. h. aber:}$$

$$af_1 + bf_2 + bf_3 = d - (ac_1 + bc_2 + cc_3)t_0 = \text{const.}$$

dann ist auch

$$(ax + bx + cz)_{t=t_1} = \text{const.} = d_1,$$

wie man sofort sieht. Unsere Behauptung ist also richtig.

Die zweite Eigenschaft der geradlinig-gleichförmigen Bewegung eines starren Kontinuums ist, dass Gerade, die einmal parallel waren, parallel bleiben.

Legen wir also in das Kontinuum ein Koordinatensystem ξ, η, ζ, das mit dem Kontinuum fest verbunden ist (d. h. jeder Punkt des Kontinuums hat zu aller Zeit dieselben ξ, η, ζ-Koordinaten), so entsprechen Gerade im ξ, η, ζ-System Geraden im x, y, z-System, und insbesondere Parallelen im ξ, η, ζ-System Parallelen im x, y, z-System und umgekehrt. D. h. aber, jede Figur des ξ, η, ζ-Systems ist das affine Bild einer Figur des x, y, z-Systems, beide Ebenen sind affin aufeinander bezogen. Daraus folgt aber, dass zwischen x, y, z und ξ, η, ζ eine lineare Beziehung besteht für jedes konstante t:

$$\begin{aligned}
\xi &= A_{11}x + A_{12}y + A_{13}z + A_{14},\\
\eta &= A_{21}x + A_{22}y + A_{23}z + A_{24},\\
\zeta &= A_{31}x + A_{32}y + A_{33}z + A_{34}.
\end{aligned}$$

Dabei sind die A_{ik} Funktionen von t, die wir noch bestimmen wollen. | Löst 14
man nun nach den x, y, z auf, so muss Linearität in t herauskommen (denn die Bewegung soll ja gleichförmig geradlinig sein), da die ξ, η, ζ aber von t gar nicht abhängen, so heisst dies, nach elementaren Determinantensätzen:

$$\begin{aligned}
&A_{ik} = a_{ik} = \text{const.}, && i, k = 1, 2, 3,\\
&A_{i4} = a_{i4}t + a'_{i4}, && i \quad = 1, 2, 3,\\
&\left.\begin{matrix} a_{i4} \\ a'_{i4} \end{matrix}\right\} = \text{const.}
\end{aligned}$$

und wir haben, wenn wir noch statt ξ, η, ζ $\quad \xi - a'_{14}$, $\eta - a'_{24}$, $\zeta - a'_{34}$ einführen (also das ξ, η, ζ-System parallel zu sich selbst verschieben) und diese Grössen wieder ξ, η, ζ nennen:

$$\begin{aligned}
\xi &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14},\\
\eta &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24},\\
\zeta &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}.
\end{aligned}$$

Nach x, y, z aufgelöst ist das genau ein Tripel von Gleichungen wie das, durch welches wir die Bewegung definierten, nur haben wir hier für λ, μ, ν ganz spezielle Parameter gewählt, ξ, η, ζ, die aber eine anschauliche Bedeutung haben, es sind ja die Koordinaten des bewegten Punktes in einem mitbewegten Koordinatensystem. Wir haben also das Resultat:
Die geradlinig-gleichförmige Bewegung eines starren Systems lässt sich beschreiben durch drei Gleichungen von der Form:

$$\begin{aligned}\xi &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t,\\ \eta &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}t,\\ \zeta &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}t.\end{aligned}$$

Dabei können ξ, η, ζ als Koordinaten der bewegten Punkte in einem mitbewegten Koordinatensystem gedeutet werden.

15 § 7. Die Axiome der gleichförmig gradlinigen Bewegung

Wir müssen nun irgendwelche Axiome einführen, die uns erlauben, die Koeffizienten $a_{11} \dots a_{34}$ zu bestimmen.
Wir fordern zunächst, und dies ist ein neues Axiom, dass durch jede geradlinig-gleichförmige Bewegung nur eine einzige Richtung des Raumes ausgezeichnet wird, die Richtung der Bahngeraden. Dieses Axiom führt sofort zu einigen wichtigen Folgerungen, durch die die Anzahl der wesentlichen Koeffizienten in ξ, η, ζ auf zwei reduziert wird.
Zunächst können wir die Koordinatensysteme ξ, η, ζ und x, y, z so orthogonal linear transformieren, dass die neue ξ- und die neue x-Achse Bahngerade sind, also parallel sind; dann hat die Transformation schon die speziellere Gestalt:

$$\begin{aligned}\xi &= a_{11}x + \qquad + \qquad + a_{14}t,\\ \eta &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}t,\\ \zeta &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}t.\end{aligned}$$

Nun machen wir davon Gebrauch, dass jede affine Transformation des Raumes sich zusammensetzt aus zwei speziellen Arten affiner Transformationen: 1) einer Aehnlichkeitstransformation, 2) einer Verkürzung des Raumes im konstanten Verhältnis in einer gegebenen Richtung, bei der eine Ebene in sich übergeht. Die erste Transformation, die Aehnlichkeitstransformation, brauchen wir hier nicht zu berücksichtigen, sie kommt ja nur darauf hinaus, dass statt ξ, η, ζ $\rho\xi$, $\rho\eta$, $\rho\zeta$ eingesetzt werden. (Sie lässt sich übrigens auch durch drei spezielle Transformationen 2) ersetzen) die zweite ist für uns die wesentliche.
16 Bei ihr gibt es zwei ausgezeichnete Richtungen, die Richtung der | Verkürzung und die Normale der Ebene; da es bei den durch geradlinig-gleichförmige Bewegungen vermittelten affinen Transformationen aber nur eine ausgezeichnete

Richtung geben soll, müssen beide zusammenfallen, d. h. die invariante Ebene muss senkrecht auf der Verkürzungsrichtung stehen und die Verkürzungsrichtung muss die Bahngerade sein. Daraus folgt aber $a_{21} = a_{31} = 0$ und dass a_{22}, a_{23}, a_{32}, a_{33} so beschaffen sind, dass durch eine lineare orthogonale Transformation von y, z bzw. η, ζ die Beziehung zwischen x, y, z und ξ, η, ζ die Gestalt erhält:

$$\begin{aligned} \xi &= a_{11}x + && + a_{14}t, \\ \eta &= \qquad y && + a_{24}t, \\ \zeta &= \qquad\quad z && + a_{34}t. \end{aligned}$$

Wir betrachten nun den Punkt $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$. Dieser befindet sich in der Zeit $t = 0$ in $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Die x-Achse ist aber Bahnkurve, also muss er *immer* die Koordinaten $y = 0$, $z = 0$ haben (nach Definition der Bahnkurve). Also muss $a_{24} = a_{34} = 0$ sein.
Also ist schliesslich:

$$\begin{aligned} \xi &= a_{11}x && + a_{14}t, \\ \eta &= \qquad y && \quad , \\ \zeta &= \qquad\quad z && \quad . \end{aligned}$$

Die geradlinig-gleichförmige Bewegung hat also höchstens zwei wesentliche Konstanten, da aber in der Definition der Bewegung nur von *einer* Konstanten die Rede war, nämlich von

$$\frac{\sqrt{(x_{t_1} - x_{t_0})^2 + (y_{t_1} - y_{t_0})^2 + (z_{t_1} - z_{t_0})^2}}{t_1 - t_0} = -\frac{a_{14}}{a_{11}},$$

so werden wir uns fragen, ob nicht Axiome nötig sind, die einen Zusammen- 17
hang herstellen zwischen a_{11} und a_{14}. Die Konstante $\frac{a_{14}}{a_{11}}$ wollen wir die *Geschwindigkeit* des Systems ξ, η, ζ gegen das System x, y, z nennen.
Aus unserer Formel folgt:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\xi}{a_{11}} && - \frac{a_{14}}{a_{11}}t, \\ y &= \qquad \eta && \quad , \\ z &= \qquad\quad \zeta && \quad , \end{aligned}$$

und hieraus wird in Verbindung mit einem weiteren Axiom der gewünschte Zusammenhang folgen.

§ 8. Das Gleichberechtigungsaxiom der gleichförmig geradlinigen Bewegung

Im Koordinatensystem ξ, η, ζ müssen wir natürlich wieder die Zeit messen, Uhren haben. Es wird also alles darauf hinauslaufen, wie man den Uhrstand im

System ξ, η, ζ definiert. Dies wird man natürlich so versuchen, dass möglichst viel von den bisher genannten Axiomen erhalten bleibt, also insbesondere die Axiome der ersten beiden Gruppen (des Raumes und der Zeit). Zunächst ist folgendes Zwischenaxiom zu machen:

Axiom (Gleichberechtigungsaxiom der gleichförmig-geradlinigen Bewegung)

Bewegt sich das System ξ, η, ζ gleichförmig-geradlinig gegen das System x, y, z, so bewegt sich auch umgekehrt x, y, z gleichförmig-geradlinig gegen ξ, η, ζ mit der entgegengesetzt gleichen Geschwindigkeit. Waren im x, y, z System die Bahnkurven die Parallelen zur x-Achse und lag die ξ-Achse so,
18 dass sie in die x-Achse fiel, so sind umgekehrt bei der Be|wegung von x, y, z gegen ξ, η, ζ die Bahnkurven Parallelen zur ξ-Achse und die x-Achse fällt in die ξ-Achse.

Der erste Teil dieses Axioms sagt, dass stets die Zeit τ im neuen System mit der im alten System linear zusammenhängt in der Form

$$\tau = a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}t,$$

wobei die a_{4i} allerdings nicht alle willkürlich sind, der zweite Teil sagt, dass bei der speziellen Orientierung unserer Koordinatensysteme, die wir zuletzt vorgenommen hatten,

$$\tau = a_{41}x + a_{44}t$$

wird. Wir haben also

$$\begin{aligned}
\xi &= a_{11}x + \cdot + \cdot + a_{14}t, \\
\eta &= \qquad\quad y \qquad\quad , \\
\zeta &= \qquad\qquad\quad z \quad\;\; , \\
\tau &= a_{41}x + \cdot + \cdot + a_{44}t.
\end{aligned}$$

Nach x, y, z, t aufgelöst ergibt das:

$$\begin{aligned}
x &= \frac{a_{44}\xi}{a_{11}a_{44} - a_{41}a_{14}} - \frac{a_{14}\tau}{a_{11}a_{44} - a_{41}a_{14}} = \alpha_{11}\xi + \alpha_{14}\tau, \\
y &= \qquad\qquad\qquad \eta \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad , \\
z &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \zeta \qquad\qquad\qquad , \\
t &= -\frac{a_{41}\xi}{a_{11}a_{44} - a_{41}a_{14}} + \frac{a_{11}\tau}{a_{11}a_{44} - a_{41}a_{14}} = \alpha_{41}\xi + \alpha_{44}\tau.
\end{aligned}$$

Nach dem Teil des Axioms, der von der Geschwindigkeit handelt, muss nun noch

$$-\frac{a_{14}}{a_{11}} = +\frac{\alpha_{14}}{\alpha_{11}}$$

sein. Dies ist aber der Fall, wenn

$$\frac{a_{14}}{a_{11}} = +\frac{a_{14}}{a_{44}},$$

d. h.

$$a_{11} = a_{44}$$

ist. Für a_{14} und a_{41} ergibt sich *keine* Bedingung.

§ 9. Das Newtonsche Axiom (Axiom von der absoluten Zeit) 19

Es liegt nun nahe, und damit kommen wir zur sogenannten *Newtonschen* Mechanik, die Annahme zu machen, dass im ξ, η, ζ System die erste Axiomgruppe erhalten bleibt, in dem Sinn, dass der ξ, η, ζ Raum ein kongruentes Bild des x, y, z Raumes (nicht nur ein affines Bild) ist. Dann muss aber

1) $a_{11} = 1$

sein. Daraus folgt weiter (infolge der letzten Formel des vorigen Paragraphen)

2) $a_{44} = 1$.

Weiter muss dann aber auch umgekehrt der x, y, z Raum ein kongruentes Bild des ξ, η, ζ Raumes sein (beide Räume sind je nicht vor einander ausgezeichnet) also muss

$$\alpha_{11} = 1 \qquad \alpha_{44} = 1$$

sein, d. h. aber:

$$a_{41}a_{14} = 0,$$

und da die Geschwindigkeit $a_{14} \neq 0$ sein soll, folgt daraus

$$a_{41} = 0,$$

womit übrigens zugleich $\alpha_{41} = 0$ miterfüllt ist.

Unser Formelsystem wird also, wenn wir für die Geschwindigkeit, die jetzt gleich a_{14} ist, noch v schreiben,

$$\begin{aligned} \xi &= x + vt, \\ \eta &= y, \\ \zeta &= z, \\ \tau &= t. \end{aligned}$$

Dies ist das Formelsystem der Newtonschen Mechanik, aus dem | wir nun 20
unsere Folgerungen ziehen wollen.

Zunächst ist klar, dass die erste Axiomengruppe wieder für das ξ, η, ζ System gilt, das ist ja in unserem Axiom enthalten, wir dürfen aber, das wird sich später zeigen, nicht behaupten, dass dies die einzig mögliche Art ist, bei der die Axiome der ersten Gruppe erhalten bleiben. Mit unserem Axiom völlig gleichwertig ist die Annahme $t = \tau$; denn einmal konnten wir $t = \tau$ aus unserem Axiom folgern, dann aber folgt auch umgekehrt, wie man nachrechnen kann, aus $t = \tau$ unser Axiom.

Man nennt unser Axiom oder das mit ihm völlig gleichwertige Axiom $t = \tau$ das *Axiom von der absoluten Zeit*; den Grund hierfür wollen wir im folgenden auseinandersetzen. Er liegt darin, dass für das ξ, η, ζ System bei unserer Annahme $t = \tau$ die Axiome der zweiten Gruppe keine Gültigkeit mehr haben.

§ 10. Die Lichtgeschwindigkeit im bewegten System nach dem Newtonschen Axiom und der Michelsonsche Versuch

Wir wollen der Einfachheit halber im folgenden wieder den Raum als nur zweidimensional annehmen, haben also

$$\begin{aligned} \xi &= x + vt, \\ \eta &= y, \\ \tau &= t \end{aligned}$$

als Grundformeln.

Die erste Folgerung, die wir aus diesen Formeln ziehen, ist das sogenannte Gesetz von der Addition der Geschwindigkeiten.

21 Es bewege sich ξ, η relativ zu x, y mit der Ge|schwindigkeit v, $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ relativ zu ξ, η mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$; dann ist

$$\begin{aligned} \xi &= x + vt, & \mathfrak{x} &= \xi + \mathfrak{v}\tau, \\ \eta &= y, & \mathfrak{y} &= \eta, \\ \tau &= t, & \mathfrak{t} &= \tau. \end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned} \mathfrak{x} &= x + (v + \mathfrak{v})t, \\ \mathfrak{y} &= y, \\ \mathfrak{t} &= t. \end{aligned}$$

d. h. $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ bewegt sich gegen x, y mit der Geschwindigkeit

$$v + \mathfrak{v}.$$

Wir betrachten nun die Konstruktion der Lichtuhr für das ξ, η-System. Senden wir zur Zeit $t = \tau = 0$ von $x = \xi = 0$ $y = \eta = 0$ ein Lichtsignal aus, so ist dies zur Zeit r in allen Punkten im Abstand r angelangt:

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0,$$

und die Koordinaten des Punktes auf der unter dem Winkel ϑ gegen die x-Achse geneigten Geraden durch $(0, 0)$, in dem das Signal zur Zeit t anlangt, sind daher

$$x = t\cos\vartheta \qquad\qquad y = t\sin\vartheta.$$

Welcher Punkt im $\xi\eta$ System ist das nun? Offenbar, nach unserer Formel der Punkt

$$\begin{aligned}\xi &= t\cos\vartheta - vt = t(\cos\vartheta - v),\\ \eta &= t\sin\vartheta.\end{aligned}$$

Der vom Licht im ξ, η System zurückgelegte Weg ist also:

$$\sqrt{\xi^2+\eta^2} = t\sqrt{1-2v\cos\vartheta+v^2}.$$

Nun definierten wir aber oben: Geschwindigkeit $= \frac{\text{Weg}}{\text{Zeit}}$, also ist die Geschwin- 22
digkeit des Lichtes im x, y-System konstant $= 1$ im ξ, η System aber gleich

$$\gamma_\vartheta = \sqrt{1-2v\cos\vartheta+v^2},$$

also von der Richtung abhängig. Es gilt also in der ξ, η-Ebene das Axiom von der Unabhängigkeit der Uhr vom Koordinatensystem[19] nicht mehr, wenn wir uns im ξ, η System eine Lichtuhr konstruieren. Es wäre also nicht erlaubt, im ξ, η System die Zeit mit einer Lichtuhr zu messen, sondern wir müssen die Zeit im Vorüberfahren von den Uhren des x, y Systems ablesen und dies wäre dann die richtige Zeit.

Es fragt sich nun, ob dies, d. h. also die Abhängigkeit der Lichtgeschwindigkeit in ξ, η von v und ϑ, mit der Erfahrung übereinstimmt. Wir bilden dazu

$$\frac{1}{\gamma_\vartheta} + \frac{1}{\gamma_{\vartheta+\pi}}.$$

Diese Grösse ist nämlich, wie sich gezeigt hat, der experimentellen Untersuchung leicht zugänglich. Dabei ist nach der Definition:

$$\begin{aligned}\gamma_\vartheta &= \sqrt{1-2v\cos\vartheta+v^2},\\ \gamma_{\vartheta+\pi} &= \sqrt{1+2v\cos\vartheta+v^2}.\end{aligned}$$

$\gamma_{\vartheta+\pi}$ ist also die Lichtgeschwindigkeit in einem System ξ', η', das sich mit der Geschwindigkeit $-v$ gegen x, y bewegt, die Geschwindigkeit des Systems ξ, η gegen das System ξ', η' ist also $2v$ nach dem Additionsgesetz.

Nun ist nach dem binomischen Satz, wenn wir nur die Glieder bis zur zweiten 23
Potenz von v beibehalten:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\gamma_\vartheta} &= 1 + \frac{1}{2}(2v\cos\vartheta - v^2) + \frac{3}{8}4v^2\cos^2\vartheta,\\ \frac{1}{\gamma_{\vartheta+\pi}} &= 1 - \frac{1}{2}(2v\cos\vartheta + v^2) + \frac{3}{8}4v^2\cos^2\vartheta.\end{aligned}$$

Also ist

$$\frac{1}{\gamma_\vartheta} + \frac{1}{\gamma_{\vartheta+\pi}} = 2 + (3\cos^2\vartheta - 1)v^2.$$

[19]"Koordinatensystem" was corrected in blue pencil to "der Richtung".

An dieser Formel ist folgendes zu beachten: sie gilt nur für kleine v und ferner, das ist das wichtigste, sie enthält nur die *relative* Geschwindigkeit von ξ, η gegen ξ', η', da v die Hälfte dieser Relativgeschwindigkeit ist. Auch ϑ ist aus v berechenbar, denn der Ort der Punkte, an die die Lichtsignale kommen, die im x, y System auf der Geraden $\vartheta = \text{const}$ liegen, ist die Gerade

$$\xi \sin\vartheta = \eta(\cos\vartheta - v),$$

und v eingesetzt ergibt sich ϑ. Es sind also nur Grössen vorhanden, die von der Relativbewegung der beiden Systeme ξ, η und ξ', η' abhängen. Die experimentelle Prüfung schien zunächst zu stimmen, es ergab sich $\frac{1}{\gamma_\vartheta} + \frac{1}{\gamma_{\vartheta+\pi}}$ fast genau gleich 2, die Beobachtungsfehler waren aber grösser als das Glied mit v^2, der Versuch bewies also nur das Fehlen des linearen Gliedes in v, also in dieser Hinsicht eine Uebereinstimmung mit unserer Formel.

Später erdachte *Michelson* eine Versuchsanordnung, in der er die Bewegung der Erde benutzte, und die⟨se Anordnung⟩ erlaubte, Glieder von der Grössen-
24 ordnung v^2 noch genau zu messen. *Es* | *ergab sich* da, und dies ist der Punkt, in dem der Fortschritt unserer Erkenntnis dem Experiment zu danken ist, *dass eine Abhängigkeit von* $\frac{1}{\gamma_\vartheta} + \frac{1}{\gamma_{\vartheta+\pi}}$ *von* v^2 *nicht vorhanden war*, dass sich in den Grenzen der Beobachtungsfehler, und das mit grosser Genauigkeit,

$$\frac{1}{\gamma_\vartheta} + \frac{1}{\gamma_{\vartheta+\pi}} = 2$$

ergab.[20]

§ 11. Die Verknüpfung von Raum und Zeit bei Erhaltung der Axiome der zweiten Gruppe (Axiom von der konstanten Lichtgeschwindigkeit)

Woher kommt nun diese Nichtübereinstimmung von Theorie und Experiment? Offenbar daher, dass das Koordinatensystem x, y *ausgezeichnet* ist; ausgezeichnet insofern, als in ihm alle Axiome der zweiten Gruppe gelten, was für das System ξ, η usw. nicht der Fall ist. Die Zeitmessung hängt aber wesentlich von diesen Axiomen ab, es ist also eine Messung in einem ausgezeichneten System, also etwas *absolutes*. Da wir schon darauf vorbereitet waren, dass wir etwas absolutes nicht erkennen können, richteten wir unsere Formel zur Prüfung unserer Axiome so ein, dass sie nur Grössen der relativen Bewegung enthielten.

Wollen wir also den Fehler korrigieren, so müssen wir dafür sorgen, dass die Axiome der zweiten Gruppe auch im ξ, η-System gelten, das wesentliche an diesen Axiomen aber war, dass die Lichtgeschwindigkeit (wir haben ja jetzt

[20] For Michelson's experiment, see *Michelson 1881* and *Michelson 1887*. For a general discussion of the experimental foundations of special relativity, see, e.g., *Laue 1911*, § 2.

den Begriff der Geschwindigkeit, den wir damals noch nicht hatten) unabhängig von der Richtung und vom Ort, konstant gleich 1 war. Dies wollen wir jetzt verlangen und dann sehen, was dabei heraus kommt. Vorher wollen wir uns
aber überlegen, wie es denn | mit den Axiomen der ersten Gruppe steht. Hier 25
liegt die Sache sehr einfach. Schon dadurch, dass wir ein Koordinatensystem ξ, η haben, ist gesagt, dass im ξ, η-System wieder die Euklidische Geometrie gilt, aber nur für einen Beobachter, der im System steht; für einen Beobachter im x, y-System allerdings sehen alle Figuren verkürzt aus, ist die ξ, η-Ebene ein affines Bild der x, y-Ebene, aber nicht für Beobachter im ξ, η System.

Wir gehen jetzt zu der angekündigten Ueberlegung über. Die Lichtgeschwindigkeit ist ja jetzt, wenn wir wieder, wie vorhin zur Zeit $t = 0$ von $(0, 0)$ unter dem Winkel ϑ im x, y-System ein Signal aussenden:

$$\frac{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}{\tau} = \sqrt{\frac{(a_{11} t \cos\vartheta + a_{14} t)^2 + t^2 \sin^2\vartheta}{(a_{41} t \cos\vartheta + a_{44} t)^2}},$$

und diese Grösse soll konstant $= 1$ sein. Dabei müssen wir uns erinnern, dass $a_{11} = a_{44}$ war. Es ergibt sich hieraus:

$$(a_{11}\cos\vartheta + a_{14})^2 + \sin^2\vartheta = (a_{41}\cos\vartheta + a_{44})^2,$$

also

$$\begin{aligned} 1 + a_{14}^2 &= a_{44}^2, \\ a_{11} a_{14} &= a_{41} a_{44}, \\ a_{11}^2 - 1 &= a_{41}^2, \end{aligned}$$

und hieraus folgt wegen $a_{11} = a_{44}$ sofort $a_{14} = a_{41}$ und alle Gleichungen sind verträglich. Wir brauchen aber $a_{14} = a_{41}$ nicht zu benutzen, denn es ergibt sich durch Multiplikation der ersten und dritten Gleichung:

$$a_{11}^2 a_{14}^2 + a_{11}^2 - a_{14}^2 - 1 = a_{41}^2 a_{44}^2,$$

d. h. wegen der zweiten Gleichung 26

$$a_{11}^2 - a_{14}^2 - 1 = 0,$$

oder:

$$\begin{aligned} a_{41}^2 &= a_{14}^2, \\ a_{41} &= \pm a_{14}. \end{aligned}$$

Wir nehmen hier das Pluszeichen, also

$$a_{41} = a_{14},$$

daraus folgt dann $a_{11} = a_{44}$.

Setzen wir wieder die Geschwindigkeit gleich v:

$$-\frac{a_{14}}{a_{11}} = v,$$

so wird wegen der dritten Gleichung und $a_{14} = a_{41}$

$$\begin{aligned} a_{11} &= a_{44} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \\ a_{41} &= a_{14} = -a_{11}v, \end{aligned}$$

und daher ist

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{x - vt}{\sqrt{1-v^2}}, \\ \eta &= y, \\ \tau &= \frac{-vx + t}{\sqrt{1-v^2}}. \end{aligned}$$

Auflösung nach x, y, t ergibt:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\xi + vt}{\sqrt{1-v^2}} \\ y &= \eta \\ t &= \frac{v\xi + \tau}{\sqrt{1-v^2}}. \end{aligned}$$

27 § 12. Erste Folgerungen; das „Relativitätsprinzip"

Wir wollen nun aus diesen beiden Formelsystemen die einfachsten Schlussfolgerungen ziehen. Dass die beiden Axiomgruppen I und II erhalten bleiben, haben wir schon gesagt. Weiter folgt aus den Formeln, dass wir die Uhren in dem einen System sehr wohl wieder nach den Uhren im anderen richten können, aber nicht, indem wir nur die Uhr ablesen, sondern auch den Kilometerstein, in dem sie steht. Dann erhalten wir in dem zweiten System die Zeit für gewisse bestimmte Uhren.

Die nächste Folgerung ist die, dass nicht jede Geschwindigkeit möglich ist, denn da nur reelle Grössen physikalische Bedeutung haben, müssen ξ, η, τ reell sein, weil x, y, t reell sind. Daraus folgt aber

$$1 - v^2 > 0,$$

d. h.

$$|v| < 1.$$

Es sind also nur Geschwindigkeiten kleiner als Lichtgeschwindigkeit möglich. Bei der früheren Annahme $t = \tau$ war dies anders, wie aus dem Satz von der Addition der Geschwindigkeiten folgt. Die grösste Geschwindigkeit ist also jetzt die Geschwindigkeit 1, die Lichtgeschwindigkeit. Das stimmt auch sehr gut mit der Erfahrung, denn fast alle Geschwindigkeiten, die wir kennen, die der Planeten, Fixsterne, Elektronen, bleiben sehr weit hinter der Lichtgeschwindigkeit zurück, nur die β-Strahlen haben eine ähnlich grosse Geschwindigkeit.[21]

Wir wollen nun das Gesetz von der Superposition der | Geschwindigkeiten 28
ableiten. Es sei also

$$\xi = \frac{x - vt}{\sqrt{1-v^2}}, \quad \eta = y, \quad \tau = \frac{-vx + t}{\sqrt{1-v^2}},$$
$$\mathfrak{x} = \frac{\xi - \mathfrak{v}\tau}{\sqrt{1-\mathfrak{v}^2}}, \quad \mathfrak{y} = \eta, \quad \mathfrak{t} = \frac{-\mathfrak{v}\xi + \tau}{\sqrt{1-\mathfrak{v}^2}}.$$

Rechnet man hieraus $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{t}$ als Funktion von x, t aus, so ergibt sich:

$$\mathfrak{x} = \frac{x - Vt}{\sqrt{1-V^2}}, \quad \mathfrak{y} = y, \quad \mathfrak{t} = \frac{-Vx + t}{\sqrt{1-V^2}}$$

wenn V durch die Gleichung

$$V = \frac{v + \mathfrak{v}}{1 + v\mathfrak{v}}$$

definiert wird.

Nun ist, da nur Geschwindigkeiten < 1 möglich sind:

$$(1 - v^2)(1 - \mathfrak{v}^2) \geqq 0,$$

da aber

$$(1 - v^2)(1 - \mathfrak{v}^2) = (1 + \mathfrak{v}v)^2 - (v + \mathfrak{v})^2$$

ist, so folgt

$$(1 - v^2)(1 - \mathfrak{v}^2) = (1 + \mathfrak{v}v)^2(1 - V^2),$$
$$V^2 \leqq 1,$$

d. h. die zusammengesetzte Geschwindigkeit ist wieder kleiner als 1 und gleich 1, wenn eine der ursprünglichen 1 war. Man sieht durch eine elementare Ueberlegung übrigens, dass

$$V \geqq \mathfrak{v}, \quad V \geqq v$$

ist, wenn $\mathfrak{v}$ und v beide positiv sind, aber

$$v \geqq V \geqq \mathfrak{v},$$

wenn

$$v > 0, \quad \mathfrak{v} < 0$$

ist, und 29

$$v \geqq V, \qquad \mathfrak{v} \geqq V,$$

wenn v und $\mathfrak{v}$ beide negativ sind.

Eine Vereinfachung ist in unseren Formeln dadurch eingetreten, dass wir überall die Lichtgeschwindigkeit als Einheit angenommen haben. Hätten wir dies nicht getan, sondern überall die Lichtgschwindigkeit gleich c gesetzt, so hätten wir das Formelsystem erhalten, das entsteht, wenn man t und τ durch ct und $c\tau$, v aber durch $\frac{v}{c}$ ersetzt, also:

$$\xi = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad \eta = y; \quad \tau = \frac{-\frac{vx}{c^2} + t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

bezw.

$$x = \frac{\xi + vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad y = \eta; \quad t = \frac{\frac{v}{c^2}\xi + \tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Machen wir hierin den Grenzübergang für $c = \infty$, so kommen die Formeln der Newtonschen Mechanik heraus; dasselbe gilt auch für das Additionsgesetz der Geschwindigkeiten:

$$V = \frac{v + \mathfrak{v}}{1 + \frac{v\mathfrak{v}}{c^2}}.$$

Dass beide Systeme für unendlich grosse Lichtgeschwindigkeit ineinander übergehen müssen, folgt auch sofort daraus, dass dann ja γ_ϑ auch unendlich ist, also eine wirkliche Abhängigkeit von ϑ bei γ_ϑ dann nicht mehr vorliegt.

Man nennt die auf den Formeln

$$\xi = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}}; \quad \tau = \frac{-vx + t}{\sqrt{1 - v^2}}$$

30 sich aufbauende Theorie der Bewegung auch „Relativitätstheorie", da in ihr die Gleichwertigkeit aller relativ zueinander geradlinig-gleichförmig bewegten Koordinatensysteme, d. h. die Nichtexistenz von etwas absolutem, wie der absoluten Zeit, der Nichtabhängigkeit aller physikalischen Erscheinungen vom Koordinatensystem zugrunde liegt. Dieses Prinzip der Gleichwertigkeit aller relativ zueinander geradlinig-gleichförmig bewegten Koordinatensysteme nennt man (oft zusammen mit dem ganzen Komplex von Folgerungen) das „*kleine Relativitätsprinzip*" oder „Relativitätsprinzip" schlechthin. Der Ausdruck „kleines" soll es von den weitergehenden Relativitätsforderungen unterscheiden, die neueren Theorien zugrunde liegen.[22]

---

[21] An undated manuscript in Hilbert's papers, written perhaps by a certain Weber, lists on two pages „Einige interessante Geschwindigkeiten aus der Astronomie", see *Cod. Ms. D. Hilbert 718.*

[22] This is Hilbert's terminology; see note 2 above.

§ 13. Zusammenhang der Relativitätstheorie mit der quadratischen Form $x^2 + y^2 + z^2 - t^2$

Die Gleichungen, die den Uebergang von dem System xy zu dem System $\xi\eta$ vermitteln, sind homogen und linear, aber von einer besonderen Form, sie transformieren nämlich den Ausdruck $x^2 - t^2$ in sich. Nach unseren Formeln ist ja:

$$\xi^2 = \frac{x^2 - 2vxt + v^2t^2}{1 - v^2},$$
$$\tau^2 = \frac{v^2x^2 - 2vxt + t^2}{1 - v^2},$$

also

$$\xi^2 - \tau^2 \equiv x^2 - t^2.$$

Wir haben also den Satz: die homogenen linearen Transformationen, die einer geradlinig-gleichförmigen Bewegung entsprechen, führen die Form

$$x^2 + y^2 + z^2 - t^2$$

in sich über. 31

Wir haben in diesem Satz schon etwas mehr gesagt, als wir bisher besprochen haben. Ueben wir nämlich auf x, y, z eine *lineare orthogonale* Transformation aus, und fügen $t = \tau$ hinzu, so ist das auch eine Transformation, die $x^2 + y^2 + z^2 - t^2$ in sich überführt, sie entspricht einer blossen Veränderung des Koordinatensystems im x, y, z-Raume, also einer Umbenennung der Punkte dieses Raumes. Dazu kommt noch die Transformation, die die Bewegung repräsentiert; bei dieser war angenommen, dass die Koordinatensysteme x, y, z und ξ, η, ζ so orthogonal transformiert waren, dass die entsprechenden Achsen parallel wurden und die x-Achse die Bewegungsrichtung angab. Unsere Behauptung ist also richtig, dass jede Transformation, die einer geradlinig-gleichförmigen Bewegung entspricht, und die also, wenn das Koordinatensystem nicht so spezialisiert wird, wie wir es spezialisiert hatten, die Form hat:

$$\xi = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t,$$
$$\eta = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}t,$$
$$\zeta = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}t,$$
$$\tau = a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}t,$$

die Form

$$x^2 + y^2 + z^2 - t^2$$

überführt in

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - \tau^2.$$

Wir wollen die nähere Besprechung des Zusammenhanges der quadratischen Form mit der Relativitätstheorie noch etwas zurück|stellen und uns zu einem 32 wichtigen Punkt wenden, der Frage der Gleichzeitigkeit zweier Ereignisse und dem Zusammenhang dieser Frage mit dem Kausalitätsprinzip.[23]

§ 14. Lorentzkontraktion, Gleichzeitigkeit und Kausalität

Wir haben früher den Begriff der Gleichzeitigkeit *innerhalb* des x, y-Systems, und damit, wegen der Gleichwertigkeit beider Systeme, auch *innerhalb* des ξ, η-Systems definiert. Betrachten wir nun unsere Formeln, die x, y, t mit ξ, η, τ verbinden, so sehen wir, dass aus $t = \text{const.}$ *nicht* auch $\tau = \text{const.}$ folgt. Ereignisse, die im x, y-System gleichzeitig sind, sind also im ξ, η-System nicht gleichzeitig.

Daraus folgt auch, dass Ereignisse, die nicht gleichzeitig sind, unter Umständen gleichzeitig dadurch werden können, dass man sie auf ein geeignet gewähltes Koordinatensystem bezieht. Wir fragen nun, wann können Ereignisse in dem angegebenen Sinn gleichzeitig gemacht werden? Wir gehen etwas allgemeiner vor. Wir betrachten zunächst zwei Ereignisse am selben Ort im neuen System: ξ, τ_1 und ξ, τ_2. Dann ist der zugehörige Zeitunterschied im alten System

$$t_2 - t_1 = \frac{\tau_2 - \tau_1}{\sqrt{1-v^2}},$$

d. h.

$$t_2 - t_1 > \tau_2 - \tau_1,$$

oder: *eine Uhr im bewegten System ξ, η, verglichen mit einer Uhr im festen System x, y scheint langsamer zu gehen.*[24] Krass ausgedrückt: Durch schnelles Reisen kann man sein Leben verlängern. Weiter ist $t_2 - t_1$ nur dann Null,
33 wenn $\tau_2 - \tau_1$ Null ist: Ver|schiedene Ereignisse am selben Ort können nicht auf Gleichzeitigkeit transformiert werden.

Anders ist es mit Ereignissen ξ_1, τ u. ξ_2, τ zur selben Zeit an verschiedenen Orten. Hier ergibt sich:

$$x_2 - x_1 = \frac{\xi_2 - \xi_1}{\sqrt{1-v^2}},$$
$$t_2 - t_1 = v\frac{\xi_2 - \xi_1}{\sqrt{1-v^2}} = v(x_2 - x_1),$$

d. h. alle Längen im bewegten System scheinen vom ruhenden aus verkürzt[25] (Lorentzkontraktion), Ereignisse, die im bewegten System gleichzeitig sind, haben im festen eine Zeitdifferenz, die proportional ihrem Abstand ist.

Aus unserer letzten Formel folgt daher:

[23] Added in pencil in an unknown hand: $\xi = \frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2}}$ and $\tau = \frac{-vx+t}{\sqrt{1-v^2}}$.

[24] In the preceding sentence "scheint" was underlined twice.

[25] In the preceding sentence "scheinen" was underlined twice.

Haben zwei Ereignisse im alten System die Zeitdifferenz $t_2 - t_1$, so werden sie im neuen System gleichzeitig, wenn die Geschwindigkeit v des neuen Systems:

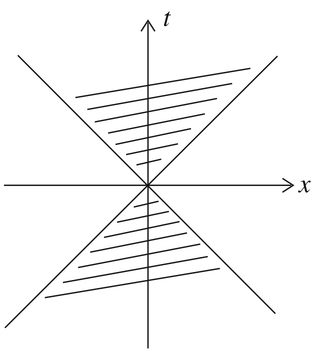
$$v = \frac{t_2 - t_1}{x_2 - x_1}$$

ist. Da aber $|v| < 1$ sein muss, so sind nur solche Ereignisse auf Gleichzeitigkeit transformierbar, für die

$$-1 \leqq \frac{t_2 - t_1}{x_2 - x_1} \leqq +1$$

ist. (Hätten wir die Lichtgeschwindigkeit nicht 1 sondern c gesetzt, so wäre[26]

$$-c > \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} > c)$$



Stellen wir uns dies in einer x, t-Ebene graphisch
dar, so | heisst das ($x_1 = 0$, $t_1 = 0$ angenommen), 34
dass die Ereignisse, deren Bildpunkte in dem schraffierten Winkelraum liegen, nicht auf Gleichzeitigkeit transformiert werden können, während eine solche Transformation bei den übrigen Punkten möglich ist.

Es fragt sich nun, wie die Möglichkeit, zwei Punkte auf Gleichzeitigkeit zu transformieren, mit dem Kausalitätsprinzip verträglich ist. Soll das Kausalitätsprinzip gelten, so müssen wir verlangen, dass zwei Ereignisse nur dann auf Gleichzeitigkeit transformiert werden können, wenn sie nicht im Verhältnis von Ursache und Wirkung stehen können, d. h. wenn es nicht möglich ist, dass das eine Ereignis eine Folge des anderen ist. Soll ein Ereignis aber die Folge des anderen sein, so muss sich die Wirkung von diesem aus mit einer gewissen Geschwindigkeit fortpflanzen und diese Geschwindigkeit muss kleiner als Lichtgeschwindigkeit sein. Da wir Geschwindigkeit definiert haben als $\frac{\text{Weg}}{\text{Zeit}}$, so heisst das:

$$\left| \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \right| < 1,$$

d. h. die Bildpunkte müssen in dem schraffierten Gebiet liegen. *Damit ist gezeigt, dass die Möglichkeit der Transformation auf Gleichzeitigkeit zum Kausalitätsprinzip nicht im Widerspruch steht: Nur solche Ereignisse kön-
nen gleichzeitig gemacht | werden, die nicht im Verhältnis von Ursache und 35
Wirkung stehen. Es ist nicht möglich, zwei Ereignisse, die auf Gleichzeitigkeit transformiert werden können, durch Signale zu verbinden.*

Hätten wir statt einer Raumkoordinate x zwei ⟨Raumkoordinaten⟩ x, y genommen, so wäre an die Stelle des Winkelraumes in unserer Figur ein Rotationskegel getreten, wenn wir alle Koordinaten nehmen, ist eine geometrische

[26]In the following formula, the ">"s were corrected from "<"s.

Darstellung nicht mehr möglich, da wir dann ein Gebilde im vierdimensionalen Raum erhalten.

Die beiden Teile unseres Winkelraumes (bezw. beide Hälften des Kegels) sind übrigens nicht gleichwertig. In dem einen Teil sind nämlich die Bildpunkte aller der Ereignisse x_2, t_2, deren Uhrstand t_2 stets grösser als t_1 ist, also die für jedes Bezugssystem *zukünftigen* Ereignisse, während der andere die für jedes Bezugssystem *vergangenen* Ereignisse repräsentiert. Da diese Ereignisse allein in der Geschichte des Ereignisses x_1, t_1 eine Rolle spielen (denn nur diese Ereignisse können von ihm beeinflusst sein bezw. ihn beeinflusst haben), so wollen wir sie mit „*Zukunftskegel*“ und „*Vergangenheitskegel*“ des Ereignisses x_1, t_1 bezeichnen.[27]

Wir haben früher die *Bahnkurven* eines Punktes definiert, wir wollen jetzt die „*Weltlinien*“ eines Punktes definieren. Die Bewegung eines Punktes war dargestellt durch drei Funktionen:

$$x = f(t),$$
$$y = g(t),$$
$$z = h(t).$$

36 Als Parameterdarstellung einer Kurve des x, y, z-Raumes gab das die Bahnkurve. Wir können diese drei Funktionen aber auch als eine Kurve im x, y, z, t-Raum (also im Raum von vier Dimensionen) auffassen, und diese Kurve nennen wir die Weltlinie des Punktes.[28]

Aus dieser Definition folgt, dass die Bahnkurve die Projektion der Weltlinie aus dem x, y, z, t-Raume in den x, y, z-Raum ist. Während sich für die Bahnkurve keine wesentlichen Einschränkungen ergaben, (jede einigermassen vernünftige Kurve kann Bahnkurve sein), ist dies für die Weltlinie anders. Jeder Punkt der Weltlinie ist ja eine Folge der Punkte mit kleinerem t, die Punkte der Weltlinie stehen also im Verhältnis von Ursache und Wirkung. Daraus folgt, dass die Neigung jeder Sekante gegen die t-Achse absolut kleiner als 1 sein muss:

$$\left| \frac{\sqrt{(x_{t_2} - x_{t_1})^2 + (y_{t_2} - y_{t_1})^2 + (z_{t_2} - z_{t_1})^2}}{t_2 - t_1} \right| < 1,$$

oder, da dies auch im Limes d. h. für die Tangente der Weltlinie gilt:

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} < 1.$$

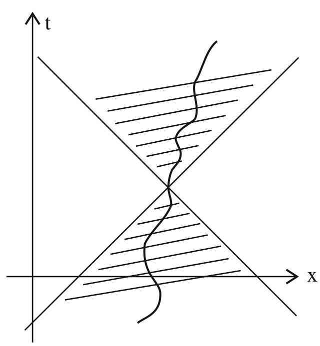
[27] In his excerpts of these lectures, Klein remarked that “Zukunftskegel” and “Vergangenheitskegel” were new terminology, introduced by Hilbert, see note 2 above. *Minkowski 1909*, p. 107, introduced the words “Nachkegel” and “Vorkegel”.

[28] The term “Weltlinie” was introduced in *Minkowski 1909*, p. 104: “Wir erhalten [...] als Bild sozusagen für den ewigen Lebenslauf des substantiellen Punktes eine Kurve in der Welt, eine Weltlinie, deren Punkte sich eindeutig auf den Parameter t von $-\infty$ bis $+\infty$ beziehen lassen.”

Die Quadratwurzel ist das Verhältnis des in der unendlich kleinen Zeit dt zurückgelegten Weges zu dieser Zeit, wir werden sie also als sinngemässe Verallgemeinerung des Begriffs Geschwindigkeit auffassen und Geschwindigkeit des Punktes nennen. Beschränken wir uns, um uns das graphisch besser vor-
stellen zu | können, auf eindimensionale Bewegungen $y =$ const., $z =$ const. 37
so muss, nach unserer Formel

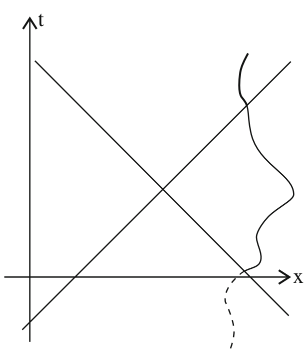
$$-1 < \frac{dx}{dt} < +1$$

sein, also die Tangente der Weltlinie steiler wie 45°. Konstruieren wir zu einem Punkte x_1, t_1 der Weltlinie Zukunfts- und Vergangenheitskegel, so zerfällt die Weltlinie in zwei Stücke, deren eines ganz im Zukunftskegel liegt, während das andere im Vergangenheitskegel verläuft.



Betrachten wir nun die Weltlinie (also die Lebensgeschichte) eines Punktes, und ein Ereignis ausserhalb der Weltlinie und fragen uns: Wann kann der Punkt unter der Einwirkung dieses Ereignisses stehen und von welchem Teil der Lebensgeschichte meines Punktes ist mein Ereignis beeinflusst? Hier brauchen wir nur zu unserem Ereignis Zukunfts- und Vergangenheitskegel zu konstruieren. Der Teil der Weltlinie, der im Zukunftskegel des Ereignisses liegt, stellt den Teil des Lebens unseres Punktes dar, der unter dem Einfluss des gegebenen Ereignisses verläuft, der Teil der im Vergangenheitskegel liegt, repräsentiert den Teil des Lebens des Punktes, der auf das Ereignis gewirkt hat.

38



§ 15. Beispiele

Wir wollen noch einige Beispiele für die im vorigen Paragraphen besprochenen Unterschiede in der Grösse von Zeit- und Raumintervallen in zwei gegen einander bewegten Systemen angeben.

1) Ein Zeitintervall von 100 Jahren auf der Sonne erscheint vom Fixsternsystem als ruhendem System aus gesehen um 6^{sec} verlängert.

2) Die Erde würde von der Sonne aus gemessen um 6 cm verkürzt erscheinen.

3) Zwei Ereignisse auf der Sonne und dem nächsten Fixstern, die von der Sonne aus betrachtet

gleichzeitig erscheinen, sind vom Fixsternsystem aus betrachtet um 2^{h} verschieden.

Die Differenzen sind also praktisch völlig bedeutungslos, die prinzipielle Wichtigkeit aber ist nicht zu verkennen. Wir verstehen jetzt das Wort Minkowskis:[29] „Raum und Zeit sinken zu blossen Schatten herab und nur eine Art Union zwischen ihnen behält Selbständigkeit.“ Die menschliche Phantasie hat wohl die nichteuklidische Geometrie aus sich heraus geschaffen, aber zu Ideenbildungen von solcher Kühnheit, wie die hier entwickelten Grundlagen der Relativitätstheorie musste der Anstoss von aussen kommen. Das Experiment gab ihn, und wenn es im Faust heisst:

„Geheimnisvoll am lichten Tag
Lässt sich Natur des Schleiers nicht berauben,
Und was sie deinem Geist nicht offenbaren mag,
Das zwingst du ihr nicht ab mit Hebeln und mit Schrauben“[30]

39 so waren hier Hebel und Schrauben stärker als die kühnste Phantasie, stärker als das reine Denken, unerbittliche Richter über eines der grössten und schönsten Systeme, die menschliches Denken zur Erklärung der Natur geschaffen.

§ 16. Die Physik als Geometrie des vierdimensionalen Raumes

Für die gleichförmig geradlinige Bewegung hatten wir das Gleichungssystem gefunden:

$$\begin{aligned}
\xi &= \alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \alpha_{13}z + \alpha_{14}t,\\
\eta &= \alpha_{21}x + \alpha_{22}y + \alpha_{23}z + \alpha_{24}t,\\
\zeta &= \alpha_{31}x + \alpha_{32}y + \alpha_{33}z + \alpha_{34}t,\\
\tau &= \alpha_{41}x + \alpha_{42}y + \alpha_{43}z + \alpha_{44}t,
\end{aligned}$$

wo die α_{ik} der Bedingung genügten

$$\begin{vmatrix}
\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14}\\
\alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24}\\
\alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34}\\
\alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44}
\end{vmatrix} = 1.$$

[29] A reference to Minkowski's famous opening words of his address at the 80th annual meeting of the German Assocation of Scientists and Physicians in Cologne: “Die Anschauungen über Raum und Zeit, die ich Ihnen entwicklen möchte, sind auf experimentell-physikalischem Boden erwachsen. Darin liegt ihre Stärke. Ihre Tendenz ist eine radikale. Von Stund' an sollen Raum und Zeit für sich und Zeit für sich völlig zu Schatten herabsinken und nur noch eine Art Union der beiden soll Selbständigkeit bewahren.” *Minkowski 1909*, p. 104.

[30] From the tragedy's first part, first scene (“Nacht”), *Goethe 1993a*, lines 672–675; the same quote is used in Hilbert's Bucharest lectures, [p. 7], this Volume, p. 355.

Dann blieb der Ausdruck
$$x^2 + y^2 + z^2 - t^2$$
gegenüber dieser Transformation ungeändert.
Diese quadratische Form ist wesentlich verschieden von der entsprechenden der Geometrie
$$x^2 + y^2 + z^2.$$
Dort sind alle Vorzeichen positiv, hier dagegen sind drei positiv, ein Vorzeichen negativ, was besagt, dass Raum und Zeit nicht völlig durcheinandergehen, wenn dieses auch in quantitativer Hinsicht der Fall ist. Die Welt zerfällt in Raum und Zeit, die Vierzahl in $3 + 1$. Aeusserlich kann man das negative Zeichen leicht beseitigen, indem man statt t it einführt, und z. B.
$$it = l,$$
$$i\tau = \lambda$$
setzt. Dann geht $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - \tau^2$ über in 40
$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + \lambda^2 = x^2 + y^2 + z^2 + l^2.$$
λ und l sind dabei rein imaginär. In diesem Sinn sind die räumlichen und zeitlichen Abmessungen völlig äquivalent. — Führen wir noch die Lichtgeschwindigkeit c ein, so lautet die quadratische Form
$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - c^2\tau^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2.$$
Um auch hier überall positive[31] Vorzeichen zu bekommen, müssen wir setzen
$$ict = l,$$
$$ic\tau = \lambda.$$
Wenn wir, wie üblich, als Einheiten cm, sec. wählen und
$$c = 3 \cdot 10^{10} \text{ cm sec}^{-1}$$
setzen, so folgt hieraus
$$i \cdot 3 \cdot 10^{10} \text{ cm} = 1 \text{ sec.}$$
oder
$$i \cdot 3 \cdot 10^{5} \text{ km} = 1 \text{ sec.}$$
In dieser allgemeinen Raum- und Zeit-Auffassung spielt die Lichtgeschwindigkeit eine exceptionelle Rolle, wir kommen darauf später zurück.[32] — Durch die imaginäre Transformation
$$ict = l$$

[31]“positive” was corrected by an unknown writer from “passende”.

[32]In § 30, p. 102, below, the exceptional role of light is listed as one of Hilbert’s arguments against Mie’s theory.

ist die genaue Analogie zur Euklidischen Geometrie des dreidimensionalen Raumes formal hergestellt. Wenn wir also jetzt die Physik aufbauen wollen, können wir uns an die Geometrie halten. Dem dreidimensionalen Raum entspricht in der Physik der vierdimensionale, die Welt; dem Punkte xyz ein
41 Punkt $xyzt$, | d. h. ein Ereignis. Es handelt sich also darum, eine Geometrie des vierdimensionalen Raumes aufzubauen, die der des dreidimensionalen Raumes formal entspricht.

Das Grundaxiom der Geometrie lautet: die Sätze der Geometrie sind von der Wahl des Bezugssystems x, y, z unabhängig, d. h. wenn wir von einem System zu einem anderen durch orthogonale Transformation[33] übergehen, erhalten wir dieselben Aussagen. Da wir nun gesehen haben, dass die Physik (Raum, Zeit) eine Verallgemeinerung der Geometrie (Raum) ist, setzen wir auch hier das Grundaxiom an die Spitze: *die Sätze der Physik sind von der Wahl des Koordinatensystems unabhängig*. Gesetze sind Aussagen. Aussagen sind Beziehungen zwischen Begriffen. Wir werden uns also mit den Beziehungen der vom Koordinatensystem[34] unabhängigen Begriffe beschäftigen. Dadurch gelangen wir in das Gebiet der Invariantentheorie. Hier speziell wird es die Vektor-Analysis sein, die uns die Aufstellung von invarianten Beziehungen vermittelt.

§ 17. Definitionen und Sätze der Dreiervektor-Analysis

Die Vektoranalysis ist eine Sprache, das Wesentliche bleibt ihr Inhalt.[35] Sie ist das Instrument, die Beziehungen der Geometrie und der Physik zu ermitteln. Im dreidimensionalen Raum mit festem Nullpunkt ist der unabhängige Begriff der Punkt selbst, er ist gegeben durch x, y, z.

(x, y, z) bezeichnet man als Radius-Vektor, drei Grössen, die sich wie (x, y, z) transformieren, als *Vektor*

$$\mathfrak{A} = (\mathfrak{A}_x, \mathfrak{A}_y, \mathfrak{A}_z).$$

42 Neben dem Vektor können wir den *Tensor* definieren.[36] Er besteht im allgemeinen Falle aus 9 Grössen:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix},$$

[33] "zu einem anderen durch orthogonale Transformation" was corrected from "zu einem orthogonalen".

[34] „vom Koordinatensystem" was interlineated.

[35] Cf. Hilbert's exposition of three-dimensional vector calculus in his lectures on "Continuum theory" (*Hilbert 1911**, chap. II). For a historical account of vector calculus, see *Crowe 1994*. For a contemporary expositions, see, e.g. *Foeppl 1907*, chap. I.

[36] For a historical account of the notion of a tensor, see *Reich 1994*.

die sich wie die Produkte x^2, y^2, z^2, xy, $xz\cdots$ transformieren:

$$\sigma_{ik} = x_i y_k.$$

Ist speziell

$$\sigma_{ik} = \sigma_{ki} \quad \text{bez.} \quad \sigma_{ik} = -\sigma_{ki},$$

so nennt man den Tensor symmetrisch bez. schiefsymmetrisch, die 9 Tensorkomponenten reduzieren sich auf 6 bez. 3. Endlich ist

$$\sigma_{ik} = \delta_{ik} \quad \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad i = k \\ 0 & \text{"} \quad i \neq k \end{cases}$$

ein Tensor, der bei orthogonalen Transformationen invariant bleibt.[37]
Wir stellen nun die wichtigsten Formeln der Vektorrechnung zusammen:
A) *Vektor-Algebra.*
Vektor-Addition: $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = (\mathfrak{A}_x + \mathfrak{B}_x, \mathfrak{A}_y + \mathfrak{B}_y, \mathfrak{A}_z + \mathfrak{B}_z)$.
Das Resultat ist wieder ein Vektor.
Bei der *Multiplikation* unterscheidet man zwei Arten.
1) *Das skalare Produkt*:

$$\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} = \mathfrak{A}_x \mathfrak{B}_x + \mathfrak{A}_y \mathfrak{B}_y + \mathfrak{A}_z \mathfrak{B}_z.$$

Dies ist eine einzige Grösse, also ein Skalar. Der Radius-Vektor mit sich selbst skalar multipliziert ist $= x^2 + y^2 + z^2$ und ist daher eine invariante Grösse. Die Quadratwurzel aus dieser | Grösse bezeichnet man als Entfernung vom 43
Nullpunkt, oder allgemein als Betrag des Vektors:

$$|\mathfrak{A}| = \sqrt{\mathfrak{A}_x^2 + \mathfrak{A}_y^2 + \mathfrak{A}_z^2}.$$

2) Das *vektorielle Produkt*:

$$\mathfrak{A} \times \mathfrak{B} = (\mathfrak{A}_y \mathfrak{B}_z - \mathfrak{A}_z \mathfrak{B}_y, \mathfrak{A}_z \mathfrak{B}_x - \mathfrak{A}_x \mathfrak{B}_z, \mathfrak{A}_x \mathfrak{B}_y - \mathfrak{A}_y \mathfrak{B}_x).$$

Es stellt einen Vektor $\mathfrak{C}$ dar, der senkrecht zur Ebene der beiden Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ steht, u. zwar so, dass die Vektoren $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ aufeinander folgen wie x, y, z in einem Rechtssystem; sein absoluter Betrag ist gleich dem Inhalt des von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gebildeten Parallelogramms.
Mit Hilfe dieser Grundoperationen lassen sich schon Beziehungen aufstellen. Es ist z. B.:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \cdot (\mathfrak{B} \times \mathfrak{C}) &= (\mathfrak{A} \times \mathfrak{B})\mathfrak{C} \\ &= \begin{vmatrix} \mathfrak{A}_x & \mathfrak{A}_y & \mathfrak{A}_z \\ \mathfrak{B}_x & \mathfrak{B}_y & \mathfrak{B}_z \\ \mathfrak{C}_x & \mathfrak{C}_y & \mathfrak{C}_z \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

[37] The typed words of the last sentence were corrected from "Ist endlich … so heisst der Tensor schiefsymmetrisch." The words "bez. schiefsymmetrisch" in the preceding sentence are interlineated. Those corrections apparently were made in order to introduce the tensor δ_{ik} without retyping the page, cf. 44 below.

also $= \frac{1}{6}$ Inhalt des durch die 3 Vektoren definierten Tetraeders.

B) *Differential- und Integralrechnung der Vektoren.*

Zu diesen algebraischen Relationen treten noch die Differential- und Integraloperationen der Vektoranalysis. Auch hier handelt es sich wieder darum, dass diese Beziehungen invariant, also unabhängig von der Wahl des Bezugsystems bleiben. Ist jedem Punkt im Raum ein Vektor zugeordnet, so sind die Komponenten Funktionen von x, y, z. Man nennt nun

$$\operatorname{div}\mathfrak{A} = \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial z}.$$

44 Das ist eine einzige Grösse, ein Skalar, wie die Vektorrechnung aussagt.

Aus einem Vektor kann man wieder einen Vektor erhalten durch folgende Operation:[38] Rotation $\mathfrak{A}$ ist definiert:

$$\operatorname{rot}\mathfrak{A} = (\frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial z}, \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial x}, \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial y}).$$

Aber auch aus einem Skalar kann man einen Vektor erhalten. Man definiert

$$\operatorname{grad} S = (-\frac{\partial S}{\partial x}, -\frac{\partial S}{\partial y}, -\frac{\partial S}{\partial z}).$$

Aus diesen Definitionen folgen nun die Identitäten:

$$\begin{aligned}
\Delta S &= \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} \\
&= -\operatorname{div}\operatorname{grad} S, \\
\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{A} &= -\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathfrak{A} - \Delta\mathfrak{A}, \\
\operatorname{rot}(S\mathfrak{A}) &= -\mathfrak{A} \times \operatorname{grad} S + S \operatorname{rot}\mathfrak{A}.
\end{aligned}$$

Dieser Differentialrechnung schliesst sich eine Integralrechnung der Vektoren an. Wichtig ist die Gauss'sche Formel. Ist K das Innere eines begrenzten Körpers, F dessen Oberfläche, und n die äussere Normalenrichtung, so besagt der Gauss'sche Satz:[39]

$$\int_K \operatorname{div}\mathfrak{A} dK = \int_F (\operatorname{grad}\mathfrak{A})_n \, dF.$$

Sei G eine samt ihren ersten Ableitungen stetige Funktion in K und auf dessen
45 Oberfläche | so ist[40]

$$\int\limits_K \operatorname{div}\mathfrak{A} dK = \int\limits_F \mathfrak{A}_n dF.$$

[38] "wieder" was corrected from "aber noch"; "durch" was corrected from ", und zwar durch".

[39] The following equation was entered in a different hand and crossed out again.

[40] The preceding half-sentence was corrected from: "wo ⟨?⟩ eine stetige Funktion von ⟨?⟩ und auf dessen Oberfläche ist, und daselbst stetige Ableitung besitzt".

§ 18. Uebertragung dieser Beziehungen auf den vierdimensionalen Raum

Um die im vorigen Paragraphen zusammengestellten Beziehungen in der Physik gebrauchen zu können, müssen wir sie erst auf den vierdimensionalen Raum übertragen. Es handelt sich um das Bezugssystem x, y, z, t, die Welt. Wir werden ein System von Formeln bekommen, wo an Stelle der Dreizahl die Vierzahl tritt. Bei manchen ⟨Formeln⟩ wird sich ganz Analoges ergeben, jedoch werden in einigen Fällen wesentliche Aenderungen auftreten. — In der Dreier-Analysis werden Vektoren mit deutschen Buchstaben, Skalare mit lateinischen Buchstaben bezeichnet. Statt rot schrieb man früher auch curl.[41]
Neben x, y, z ist dort auch die Bezeichnung x_1, x_2, x_3 gebräuchlich, die Vektor-Komponenten bezeichnet man dann mit $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$.
In der Vierer-Analysis ist die Bezeichnung nicht mehr so einheitlich, z. B. werden Vektoren nicht mehr durchgehend mit deutschen Buchstaben bezeichnet.[42]
Im vierdimensionalen Raum ist der Weltpunkt x, y, z, t oder in imaginären Koordinaten: x, y, z, l die einfachste Invariante. $(x,\ y,\ z,\ l)$ ist auch hier der Radius-Vektor; $(\mathfrak{A}_x, \mathfrak{A}_y, \mathfrak{A}_z, \mathfrak{A}_l)$ ein Vektor. Einen solchen Vierervektor wollen wir mit kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnen:

$$a = (x, y, z, l)$$

oder auch

$$a = (x_1, x_2, x_3, x_4).$$

Daneben können wir gleich den 16er Tensor stellen. 46

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \sigma_{14} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} & \sigma_{24} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} & \sigma_{34} \\ \sigma_{41} & \sigma_{42} & \sigma_{43} & \sigma_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} & \sigma_{xl} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} & \sigma_{yl} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} & \sigma_{zl} \\ \sigma_{lx} & \sigma_{ly} & \sigma_{lz} & \sigma_{ll} \end{pmatrix},$$

wo sich die 16 Grössen σ_{ik} transformieren wie die Produkte:

$$\sigma_{ik} = x_i y_k.$$

Wenn sich 16 Grössen so transformieren, sagt man, sie bilden einen 16er Tensor.[43]
Diese 16 Grössen können nun besondere Eigenschaften haben, die invariant sind. Drei der wichtigsten dieser Eigenschaften sind⟨:⟩[44]

[41] For a history of vector calculus, see *Crowe 1994*.

[42] For historical accounts of four-dimensional vector calculus, see *Norton 1992*, pp. 302–310, *Reich 1994*, sec. 5.2.2., *Walter 1999*.

[43] Added: "$\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} + \sigma_{44}$ ist eine skalare Invariante."

[44] A number of corrections on this page indicate that the case $\sigma_{ik} = \delta_{ik}$ was added later, see note 37 above.

Die Symmetrie $\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$; ferner $\sigma_{ik} = -\sigma_{ki}$, d. h. die Antisymmetrie oder Schiefsymmetrie; und schließlich die Eigenschaft $\sigma_{ik} = \delta_{ik}$, wo $\delta_{ik} = 0$ für $i \neq k$, $\delta_{ik} = 1$ für $i = k$.

Diese Eigenschaften haben also die Besonderheit, invariant zu sein, d. h. es gilt auch für die transformierten Grössen σ'_{ik}

$$\sigma'_{ik} = \sigma'_{ki}, \quad \text{bez.} \quad \sigma'_{ik} = -\sigma'_{ki}, \quad \text{bez.} \quad \sigma'_{ik} = \delta_{ik}.$$

Die Eigenschaft der Symmetrie reduziert die 16 Grössen auf 10, die der Schiefsymmetrie auf 6 und die letzte sogar auf 1, so dass der symmetrische 16er Tensor nur wesentlich 10, der schiefsymmetrische 16er Tensor nur 6 Komponenten hat, während der Tensor δ_{ik} 4 Komponenten vom Betrage eins besitzt. Man spricht dann von 10er Tensoren bezw. 6er Tensoren oder - was im letzten Falle gebräuchlicher ist - von 6er Vektoren.[45] Man wählt zur Bezeichnung eines solchen Sechservektors grosse lateinische Buchstaben:

$$F = (F_{yz}, F_{zx}, F_{xy}, F_{xl}, F_{yl}, F_{zl}),$$

47 oder als Tensor geschrieben:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & F_{xy} & F_{xz} & F_{xl} \\ -F_{xy} & 0 & F_{yz} & F_{yl} \\ -F_{xz} & -F_{yz} & 0 & F_{zl} \\ -F_{xl} & -F_{yl} & -F_{zl} & 0 \end{pmatrix},$$

dabei ist für F_{yx} etc. $-F_{xy}$ gesetzt.

Zu F gehört ein *dualer Vektor* F^*

$$F^* = (F_{xl}, F_{yl}, F_{zl}, F_{yz}, F_{zx}, F_{xy}).$$

In dieser Reihenfolge transformieren sich die Grössen genau so wie die ursprünglichen, das liegt an der Orthogonalität der Transformation. Wenden wir auf den dualen Vektor F^* noch einmal den Prozess * an, so erhalten wir wieder F, also

$$F^{**} = F.$$

Der 6er Vektor ist von besonderer Wichtigkeit. Die entsprechende Bildung in der 3er Analysis liefert nichts besonderes, sondern nur wieder einen 3er Vektor.

Das *Rechnen mit Vektoren* wird einfach aus der 3er Analysis übertragen.

Vektor Algebra.

---

[45] Antisymmetric tensors in four dimensions were introduced in *Minkowski 1908*, §. 5, where they are called "Raum-Zeit-Vektoren II. Art." The term "Sechservektor" was introduced in *Sommerfeld 1910a*, cf. also *Laue 1911*, § 10; see also *Reich 1994* and *Walter 1999*.

Sind $f = (f_1, f_2, f_3, f_4) = (f_x, f_y, f_z, f_l)$ und $g = (g_1, g_2, g_3, g_4) = (g_x, g_y, g_z, g_l)$ 2 Vektoren, so ist ihre Summe definiert durch

$$f + g = (f_x + g_x, f_y + g_y, f_z + g_z, f_l + g_l)$$

Ebenso definiert man das skalare Produkt durch:

$$\begin{aligned} f \cdot g &= f_x g_x + f_y g_y + f_z g_z + f_l g_l \qquad \text{(Skalar)} \\ &= \sum_{i=1}^{4} f_i g_i \end{aligned}$$

Insbesondere ist 48

$$f \cdot f = \sum_{i=i}^{4} f_i^2$$

und

$$|f| = \sqrt{f \cdot f}.$$

Auch das vektorielle Produkt definiert man wie in der 3er Analysis, also durch die zweireihigen Unterdeterminanten. Hier erhält man wieder einen Vektor, aber wegen der Vierzahl unseres Systems einen Sechservektor

$$f \times g = F,$$

wo F_{jk} definiert ist durch[46]

$$F_{jk} = f_j g_k - f_k g_j = -F_{kj}.$$

Ein Verervektor f skalar mit einem Sechzehnertensor σ multipliziert gibt einen Verervektor g

$$f \cdot \sigma = g,$$

wo

$$g_j = f_x \sigma_{xj} + f_y \sigma_{yj} + f_z \sigma_{zj} + f_l \sigma_{lj}$$

bedeutet.

Speziell ist

$$f \cdot F = g,$$

wo

$$g_j = f_x F_{xj} + f_y F_{yj} + f_z F_{zj} + f_l F_{lj} = \sum_{i=1}^{4} f_i F_{ij}$$

ist.

Zwei Sechzehnertensoren σ und τ skalar multipliziert liefern

$$\sigma \cdot \tau = \sum_{jk} \sigma_{jk} \tau_{jk},$$

also einen Skalar. In der Physik kommt nur das skalare Produkt zweier spezi- 49
eller Tensoren, nämlich zweier Sechservektoren F u. G vor:[47]

$$F \cdot G = F_{yz}G_{yz} + F_{zx}G_{zx} + F_{xy}G_{xy} + F_{xl}G_{xl} + \cdots + F_{lz}G_{lz} \quad \text{(12 Glieder)},$$

$$F \cdot F = F^2 = \sum_{jk} (F_{jk})^2.$$

Wichtig ist das vektorielle Produkt zweier Tensoren[48] σ und τ: $\rho = \sigma \times \tau$, wo

$$\begin{aligned} S_{jk} &= \sigma_{jx}\tau_{xk} + \sigma_{jy}\tau_{yk} + \sigma_{jz}\tau_{zk} + \sigma_{jl}\tau_{lk} \\ &= \sum_s \sigma_{js}\tau_{sk} \end{aligned}$$

ist. Hieraus folgt für die vektorielle Mulitplikation zweier Sechservektoren F und G:

$$\begin{aligned} F \times G &= \sigma, \\ \sigma_{jk} &= \sum_s F_{js}G_{sk}. \end{aligned}$$

Alle diese Ausdrücke sind Invarianten, d. h. sie gehen nach Ausführung einer orthogonalen linearen Transformation

$$\begin{aligned} x_1' &= \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \alpha_{14}x_4, \\ x_2' &= \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3 + \alpha_{24}x_4, \\ x_3' &= \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \alpha_{33}x_3 + \alpha_{34}x_4, \\ x_4' &= \alpha_{41}x_1 + \alpha_{42}x_2 + \alpha_{43}x_3 + \alpha_{44}x_4, \end{aligned}$$

wo $\sum_s (\alpha_{js})^2 = 1$ ist, über in die entsprechenden gestrichenen Grössen; z.B. geht

$$F \cdot F^* = 2(F_{yz}F_{xl} + F_{zx}F_{yl} + F_{xy}F_{zl})$$

50 über in: $2(F_{y'z'}F_{x'l'} + F_{z'x'}F_{y'l'} + F_{x'y'}F_{z'l'})$. Auch die folgende Invariante sei hier erwähnt:

Es war

$$\begin{aligned} f \times g &= F, \\ F_{jk} &= f_j g_k - f_k g_j. \end{aligned}$$

Multiplizieren wir den zu F gehörigen dualen Vektor F^* skalar mit h, so erhalten wir einen Vierervektor, und durch nochmalige skalare Multiplikation

[46]In the following equation, "$= -F_{kj}$" was added in violet pencil.

[47]The preceding sentence was handwritten by the composer of the *Ausarbeitung*.

[48]The preceding sentence was corrected from: "Das skalare Produkt zweier Tensoren kommt in der Physik nicht vor. Wichtig hingegen ist ihr vektorielles Produkt".

des letzteren mit k einen Skalar, der gleich der negativen Determinante:

$$\begin{vmatrix} k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \\ h_1 & h_2 & h_3 & h_4 \\ f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \\ g_1 & g_2 & g_3 & g_4 \end{vmatrix}$$

ist.

Andererseits ist diese Determinante $= KF^* = K^*F$, wo $K = k \times h$ gesetzt, d. h. also

$$-k(h(f \times g)^*) = -k(hF^*) = KF^* = K^*F.$$

Setzen wir hierin $k = h$, so sind zwei Zeilen der Determinante einander gleich, d. h. also

$$k(k \cdot F^*) = 0 \quad \text{oder} \quad k(k \cdot G) = 0,$$

wo $G = F^*$ ein beliebiger Sechserverktor ist.[49]

Differentialrechnung der Vektoren.

Von grösster Wichtigkeit für die Physik ist es nun, festzustellen, was der Differentialrechnung der Dreieranalysis in der Viereranalysis entspricht.

Wie dort betrachten wir auch hier die Vektoren und ihre Komponenten als 51
Funktionen der Koordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 bezw. x, y, z, l, d. h. wir ordnen jedem Punkte des x_1, x_2, x_3, x_4 Raumes, der Welt, einen Vektor zu. Dadurch gelangen wir wieder zu einem Vektorfelde, jetzt also zu einem Weltvektorfelde, und auf dieses übertragen wir die früheren Prozesse, die wir aber nach Sommerfeld mit grossen Anfangsbuchstaben bezeichnen.[50] Dann ist

$$\operatorname{Grad} S = (-\frac{\partial S}{\partial x}, -\frac{\partial S}{\partial y}, -\frac{\partial S}{\partial z}, -\frac{\partial S}{\partial l}).$$

Diese vier Ableitungen transformieren sich, wie man beweisen kann, wie die Komponenten eines Vierervektors. Ferner definieren wir den Ausdruck:

$$\operatorname{Div} f = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z} + \frac{\partial f_l}{\partial l},$$

der, wie man leicht sieht, ein Skalar ist. Weiter wird

$$\begin{aligned} &\operatorname{Div} \sigma = g, \text{ wo} \\ &g_j = \frac{\partial \sigma_{xj}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yj}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zj}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{lj}}{\partial l}; \end{aligned}$$

[49] For the preceding paragraph, the typewritten text reads: "Andererseits ist diese Determinante wobei gesetzt ist d. h. also". The typed words "wobei gesetzt ist" were then deleted, and the remaining text was added by hand.

[50] Cf. *Sommerfeld 1910b*.

die Divergenz eines Sechzehnertensors ist also ein Vierervektor. Speziell ergibt sich hieraus:

$$\operatorname{Div} F = g,$$
$$g_j = \frac{\partial F_{xj}}{\partial x} + \frac{\partial F_{yj}}{\partial y} + \frac{\partial F_{zj}}{\partial z} + \frac{\partial F_{lj}}{\partial l}.$$

Endlich ist

$$\operatorname{Rot} f = F, \text{ wo}$$
$$F_{jk} = \frac{\partial f_j}{\partial x_k} - \frac{\partial f_k}{\partial x_j}$$

52 ist, | d. h. die Rotation eines Vierervektors ist ein Sechservektor.
Dies sind die wichtigsten Definitionen der Viereranalysis, aus ihnen ergeben sich leicht folgende *Identitäten*:[51]

$$\operatorname{Div}\operatorname{Div} F = 0, \qquad (1 \text{ Gleichung}), \tag{1}$$

denn aus

$$(\operatorname{Div} F)_j = g_j = \sum_k \frac{\partial F_{kj}}{\partial x_k}$$

folgt:

$$\begin{aligned}\operatorname{Div}\operatorname{Div} F &= \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \sum_k \frac{\partial F_{kj}}{\partial x_k} \\ &= \sum_{jk} \frac{\partial^2 F_{kj}}{\partial x_k \partial x_j} \equiv 0 \quad \text{wegen } F_{kj} = -F_{jk},\end{aligned}$$

$$\operatorname{Rot}\operatorname{Grad} S = 0 \qquad (6 \text{ Gleichungen}), \tag{2}$$
$$\operatorname{Div}\operatorname{Grad} S = -\Box S \qquad (1 \text{ Gleichung}), \tag{3}$$

wo $\Box = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial l^2}$ bedeutet.

$$\operatorname{Div}(\operatorname{Rot} f)^* = 0 \qquad (4 \text{ Gleichungen}), \tag{4}$$
$$\operatorname{Div}\operatorname{Rot} f = -\operatorname{Div}\operatorname{Grad} f + \operatorname{Grad}\operatorname{Div} f. \tag{5}$$

Setzen wir speziell

$$\sigma = -\frac{1}{2} F \cdot F \delta_{sk} + \sum_m F_{sm} F_{km}, \quad \delta_{sk} = \begin{matrix} 0 \text{ für } s \neq k \\ 1 \text{ für } s = k, \end{matrix}$$

so gilt die Identität

$$\operatorname*{Div}_k \left\{ -\frac{1}{2} F \cdot F \delta_{sk} + \sum_m F_{sm} F_{km} \right\} \qquad (4 \text{ Gleichungen}) \tag{6}$$

[51] The equation numbers on this page were added in the left page margin.

$$= \sum_k \left\{ F_{ks} \underset{m}{\mathrm{Div}} F_{km} - F^*_{ks} \underset{m}{\mathrm{Div}} F^*_{km} \right\}$$
$$= \sum_k \left\{ F^*_{ks} \cdot (\mathrm{Div}\, F^*)_k - F_{ks} \cdot (\mathrm{Div}\, F)_k \right\}.^{\langle 52 \rangle}$$

Schließlich hatten wir schon

$$f(f \cdot F) = 0. \tag{7}$$

Die Identität: 53

$$\mathrm{Div}(\mathrm{Rot}\, f)^* = 0$$

sagt aus: Wenn wir $F = \mathrm{Rot}\, f$ bilden und zu F^* übergehen, so ist die

$$\mathrm{Div}\, F^* = 0.$$

Ist umgekehrt F ein solcher Sechservektor, dass

$$\mathrm{Div}\, F^* = 0$$

ist, so gibt es stets einen Vierervektor f, so dass

$$F = \mathrm{Rot}\, f$$

ist. Hieraus wollen wir den folgenden Satz ableiten: Gibt es einen Sechservektor F, so dass

$$\mathrm{Div}\, F^* = 0$$

ist, so gibt es auch einen Vierervektor f, so dass gleichzeitig

$$F = \mathrm{Rot}\, f$$
$$\text{und} \quad \mathrm{Div}\, F = -\Box f$$

ist.

Beweis.

Nach dem vorhergehenden Satz ist die erste Behauptung

$$F = \mathrm{Rot}\, f \quad \text{stets erfüllt.}$$

Wir können den Vierervektor aber modifizieren, ohne seine Rotation zu ändern, denn

$$\mathrm{Rot}(f + \mathrm{Grad}\, S) = \mathrm{Rot}\, f.$$

Nun fügen wir $\mathrm{Grad}\, S$ hinzu, dass

$$\mathrm{Div}(f + \mathrm{Grad}\, S) = 0 \quad \text{ist.}$$

Setzen wir $f + \mathrm{Grad}\, S = g$, so genügt g, in die obige Gleichung für f eingesetzt, unter Berücksichtigung der Iden|tität (5) 54

[52] The last line was interlineated.

$$\mathrm{Div}\,\mathrm{Rot}\, f = \mathrm{Div}\,\mathrm{Grad}\, f - \mathrm{Grad}\,\mathrm{Div}\, f$$

den beiden Anforderungen

$$F = \mathrm{Rot}\, g,$$
$$\mathrm{Div}\, F = -\Box g.$$

Bezüglich der *Realitätsverhältnisse* ist noch folgendes zu bemerken: Wir haben einen Vierervektor definiert als ein System von 4 Grössen x, y, z, l, die sich wie x_1, x_2, x_3, x_4 transformieren. Um nun bei der Anwendung wieder auf reelle Grössen zurückzukommen, müssen wir für

$$x_4 = l = it$$

einführen. Nun geschieht es oft, dass man für

$$(f_1, f_2, f_3, f_4) = \overline{(f_1, f_2, f_3, if_4)}$$

schreibt, wobei f_4 reell zu nehmen ist, und man einfach das i fortlässt. Man betrachtet dann also an Stelle des Vektors

$$(f_1, f_2, f_3, f_4) \quad \text{den Vektor} \quad \overline{(f_1, f_2, f_3, f_4)}$$

dessen Komponenten alle reell sind, und sich wie

$$x, y, z, t$$

transformieren.

Wenden wir diese Regel auf die obigen Differentialoperationen an, so ergibt sich zunächst:

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{Div}\, f} &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} + \frac{\partial i f_4}{\partial x_4} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} + \frac{\partial f_4}{\partial it}\\ &= \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} + \frac{\partial f_4}{\partial t}.\end{aligned}$$

55 Wir erhalten also rechts wieder lauter positive Vorzeichen. Aus

$$\begin{aligned}\mathrm{Grad}\, S &= (-\frac{\partial S}{\partial x}, -\frac{\partial S}{\partial y}, -\frac{\partial S}{\partial z}, -\frac{\partial S}{\partial it})\\ &= (-\frac{\partial S}{\partial x}, -\frac{\partial S}{\partial y}, -\frac{\partial S}{\partial z}, \mp i\frac{\partial S}{\partial t})\end{aligned}$$

folgt reell geschrieben:

$$\overline{\mathrm{Grad}\, S} = (-\frac{\partial S}{\partial x}, -\frac{\partial S}{\partial y}, -\frac{\partial S}{\partial z}, \mp i\frac{\partial S}{\partial t}).$$

Ferner ist, wegen

$$\begin{aligned}\Box S &= -\,\mathrm{Div}\,\mathrm{Grad}\, S,\\ \overline{\Box S} &= \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 S}{\partial t^2}.\end{aligned}$$

§ 19. Analytische Formulierung des Begriffes der Weltlinie; die Eigenzeit

Es wird im folgenden unsere Aufgabe sein, die Physik unabhängig vom Koordinatensystem aufzubauen. Dass die geometrischen Gebilde vom Koordinatensystem unabhängig sind, entspricht ganz unseren anerzogenen Anschauungen. Das Bezugssystem erscheint hier als etwas künstlich Hereingebrachtes, von dem das Wesen[53] der Sache unabhängig ist. In der Physik ist es anders. Wir sind gewohnt, die physikalischen Ereignisse als an ein Bezugssystem gebunden zu betrachten. So sehr uns also die Fortschaffung des Koordinatensystems das Verständnis der Geometrie erleichtert, erschwert sie das der Physik. Wir verfahren nun am besten, wenn wir uns eine vierdimensionale Welt denken. Das einfachste Gebilde derselben ist der Weltpunkt x, y, z, t, das Ereignis. Das Lebensschicksal eines Punktes, eine Kette | von Ereignissen, bildet eine 56
Kurve, eine *Weltlinie*, die wir uns auch durch Bewegung eines Punktes erzeugt denken können. Die Bewegung eines Punktes im dreidimensionalen Raum ist gegeben durch die Bahnkurve. Kennen wir noch die Zeit t als Funktion der Bogenlänge s, so können wir angeben, wo sich der Punkt P zu jeder Zeit befindet. Im vierdimensionalen Raum stellen auch x, y, z als Funktionen von t eine Kurve dar, die die Bewegung des Punktes angibt. Wir brauchen aber hier nicht t als Funktion von s hinzuzufügen, sondern die Kurve gibt schon an sich das ganze Lebensschicksal des Punktes an. Die Projektion dieser Weltlinie auf den dreidimensionalen Raum liefert die Bahnkurve. Die Bahnkurve ist also nichts Invariantes, denn sie ist bei andern Koordinaten x', y', z' eine andere; invariant hingegen ist die Weltlinie.

Nunmehr gehen wir dazu über, den Begriff der Weltlinie analytisch zu formulieren. Eine Kurve im dreidimensionalen Raum wird in symmetrischer Form dargestellt durch die 3 Funktionen von t:

$$x = x(t),$$
$$y = y(t),$$
$$z = z(t).$$

Diese drei Gleichungen geben aber auch die Weltlinie, doch ist dann t als vierte Koordinate gegenüber den drei anderen ausgezeichnet. In der gewöhnlichen Mechanik ist diese Darstellung aber durchaus naturgemäss, denn die Zeit ist hier in der Tat | etwas Absolutes, und die Bewegung ist gegeben durch den 57
Vektor

$$\mathfrak{R} = (x(t), y(t), z(t)),$$

wo die Zeit t die Rolle eines Parameters spielt. Die Darstellung bleibt aber nicht invariant.

[53]"von dem das Wesen" was corrected from "das vom Wesen".

Um auch die Weltlinie in symmetrischer Gestalt darzustellen, geben wir x, y, z, t gleichzeitig als Funktionen eines Parameters p:

$$\begin{aligned} x &= x(p),\\ y &= y(p),\\ z &= z(p),\\ t &= t(p), \end{aligned}$$

wo der Parameter p seiner Natur nach eine skalare Grösse ist. Es handelt sich nun um die Normierung von p, wobei ja eine gewisse Willkür besteht. In der Kurventheorie wählt man, wenn eine Kurve gegeben ist durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} x &= x(p),\\ y &= y(p),\\ z &= z(p) \end{aligned}$$

oft für p die Bogenlänge s, die definiert ist durch die Invariante

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1,$$

woraus folgt

$$s = \int \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \int \sqrt{\left(\frac{dx}{dp}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dp}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dp}\right)^2}\, dp.$$

58 Wir wollen jetzt eine analoge Ueberlegung auch in der Physik | ausführen. Um auch hier die Willkür bezüglich p zu beseitigen, führen wir statt p einen bestimmten Parameter τ ein durch die Gleichung:

$$\tau = \int \sqrt{\left(\frac{dx_1}{dp}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dp}\right)^2 + \left(\frac{dx_3}{dp}\right)^2 + \left(\frac{dx_4}{dp}\right)^2}\, dp,$$

wofür wir auch schreiben können:

$$\left(\frac{dx_1}{dp}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dp}\right)^2 + \left(\frac{dx_3}{dp}\right)^2 + \left(\frac{dx_4}{dp}\right)^2 = \pm 1.$$

Das Vorzeichen bestimmt sich aus folgender Ueberlegung:
Setzen wir für

$$\begin{aligned} x_1 &= x(p),\\ x_2 &= y(p),\\ x_3 &= z(p),\\ x_4 &= it \end{aligned}$$

und für $p = t$, so erhalten wir

$$\tau = \int \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 - 1}\, dt.$$

Hier geben nun die drei Quadrate unter der Wurzel das Quadrat der gewöhnlichen Geschwindigkeit, das ja $\leqq 1$ sein soll. Damit also die Quadratwurzel reell ausfällt, müssen wir das Vorzeichen umkehren, also setzen

$$\tau = \int \sqrt{1 - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt$$

oder

$$\tau = \int \sqrt{1 - \mathfrak{v}^2}\, dt,$$

wo $\mathfrak{v}$ die alte Bedeutung hat:

$$\begin{aligned} \mathfrak{v}^2 &= \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2, \\ \mathfrak{v} &= \frac{ds}{dt}. \end{aligned}$$

Die Gleichung 59

$$\tau = \int \sqrt{1 - \mathfrak{v}^2}\, dt$$

lässt sich noch etwas umformen:
Es gilt

$$\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 = 1 - \mathfrak{v}^2$$

oder

$$\begin{aligned} 1 &= \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \mathfrak{v}^2 \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \\ &= \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2 \end{aligned}$$

oder

$$-1 = \left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2.$$

Gehen wir nun zur allgemeinen Darstellung über, so erhalten wir

$$\left(\frac{dx_1}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dx_3}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dx_4}{d\tau}\right)^2 = -1,$$

d. h. in unserer oben erwähnten Gleichung gilt das negative Vorzeichen.

τ ist dann für die Weltlinie der naturgemässe Parameter, der hier auch stets reell ausfallen wird. Er entspricht genau der Bogenlänge in der Geometrie und ist, wie diese dort, hier eine invariante und skalare Grösse. Wir werden uns im folgenden stets seiner bedienen, sobald es sich darum handeln wird, die Weltlinie in Parametergestalt darzustellen. Für die Weltlinie ergibt sich also die allgemeine imaginäre Darstellung

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(\tau), \\ x_2 &= x_2(\tau), \\ x_3 &= x_3(\tau), \\ x_4 &= x_4(\tau), \end{aligned}$$

60 oder wenn wir die letzte Gleichung reell schreiben:

$$x = x(\tau), \quad y = y(\tau), \quad z = z(\tau), \quad t = t(\tau).$$

Der der Weltlinie zugehörige Parameter τ wird die *Eigenzeit des Weltpunktes* genannt.

Um den Sinn dieser Bezeichnung zu verstehen, erinnern wir uns daran, wie wir in der Geometrie die Bogenlänge definieren. Diese ist gleich der oberen Grenze aller eingeschriebenen Polygone der Kurve. Wir betrachten dort also zunächst die Sehnen, lassen diese kleiner und kleiner werden und gehen zur Grenze über. Analog verhält es sich mit der Eigenzeit. Man gelangt zu ihr, indem man die Weltlinie als aus lauter geraden Stücken bestehend betrachtet, (d. h. indem man die Bewegung des Punktes längs der Weltlinie so auffasst, als wenn sie in jedem einzelnen Teilintervall gleichförmig geradlinig wäre[G]), und zur Grenze übergeht. Wir denken uns also einen gleichförmig bewegten Punkt, der, von einem zweiten System aus betrachtet, sich in Ruhe befindet, dann lauten die Transformationsformeln bekanntlich, wenn wir wie oben der Einfachheit halber die Bewegung als in der x, t Ebene verlaufend betrachten:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{1-\mathfrak{v}^2}}(\xi + \mathfrak{v}\tau), \\ t &= \frac{1}{\sqrt{1-\mathfrak{v}^2}}(|\mathfrak{v}|\xi + \tau). \end{aligned}$$

61 Dann ergibt sich für ein Zeitintervall $\tau_2 - \tau_1 = \sqrt{1-\mathfrak{v}^2}(t_2 - t_1)$ | oder, wenn wir zur Grenze übergehen

$$d\tau = \sqrt{1-\mathfrak{v}^2}dt.$$

Hieraus erkennt man, dass die Eigenzeit $d\tau$ der Zeitzuwachs ist, den die Uhr anzeigt, wenn sie dies Element durchläuft. Für ein endliches Stück der

[G] Nur dann ist nämlich eine Transformation auf Ruhe möglich.

Weltlinie gelangen wir zu ihr durch Integration über elementare geradlinige Stücke.[54] Wir können also sagen: die Eigenzeit ist diejenige Zeit, die in einem mit dem Punkte mitbewegten Koordinatensystem gemessen wird.

§ 20. Geschwindigkeit und Beschleunigung

Nachdem wir τ eingeführt haben, ist es leicht, die wichtigsten Begriffe der Mechanik so zu modifizieren, dass sie auf die Vierersprache passen.

Geschwindigkeit: In der gewöhnlichen Mechanik ist die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ ein Dreiervektor, den wir erhalten, indem wir den Radiusvektor

$$w = (x(t), y(t), z(t))$$

nach t differenzieren:

$$\mathfrak{v} = \frac{dw}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) = (\mathfrak{v}_x, \mathfrak{v}_y, \mathfrak{v}_z),$$

$$|\mathfrak{v}|^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2.$$

Analog definieren wir nun als Geschwindigkeit den Vierervektor v

$$v = \frac{dr}{d\tau} = \left(\frac{dx_1}{d\tau}, \frac{dx_2}{d\tau}, \frac{dx_3}{d\tau}, \frac{dx_4}{d\tau}\right)$$

oder in reeller Sprache 62

$$\frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau}, \frac{dt}{d\tau}.$$

v nennen wir kurz die *Vierergeschwindigkeit*. Ihre Komponenten sind also:

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{dx_1}{d\tau}, \\ v_2 &= \frac{dx_2}{d\tau}, \\ v_3 &= \frac{dx_3}{d\tau}, \\ v_4 &= \frac{dx_4}{d\tau} \end{aligned}$$

---

[54] The preceding two sentences were corrected from: "Hieraus erkennt man, dass die Eigenzeit $d\tau$ gerade das ist, was der   , das wir oben bei der geradlinigen Bewegung betrachtet haben, entsprechen würde. Nun haben wir zwar bei unserer allgemeinen Weltlinie keine geradlinige gleichförmige Bewegung, doch gelangen wir gerade zu dieser Formel durch Integration über elementare geradlinige Stücke. Diese Eigenzeit ist gerade das, was auf unsere alten Ueberlegungen passt."

oder

$$v_x = \frac{dx}{d\tau} = \frac{\mathfrak{v}_x}{\sqrt{1-\mathfrak{v}^2}},$$
$$v_y = \frac{dy}{d\tau} = \frac{\mathfrak{v}_y}{\sqrt{1-\mathfrak{v}^2}},$$
$$v_z = \frac{dz}{d\tau} = \frac{\mathfrak{v}_z}{\sqrt{1-\mathfrak{v}^2}},$$
$$v_t = \frac{dt}{d\tau} = \frac{i}{\sqrt{1-\mathfrak{v}^2}}$$

oder, wenn man reell schreibt und das i fortlässt

$$v_t = \frac{1}{\sqrt{1-\mathfrak{v}^2}}.$$

Daraus folgt umgekehrt:

$$\mathfrak{v}_x = \frac{v_x}{v_t},$$
$$\mathfrak{v}_y = \frac{v_y}{v_t},$$
$$\mathfrak{v}_z = \frac{v_z}{v_t}.$$

Die Vierergeschwindigkeit v ist kein beliebiger Vektor, denn aus der Definitionsgleichung für τ,

$$\left(\frac{dx_1}{d\tau}\right) + \left(\frac{dx_2}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dx_3}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dx_4}{d\tau}\right)^2 = -1,$$

63 folgt

$$v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2 = -1$$

oder

$$v \cdot v = -1.$$

Man erkennt leicht, dass die einzelnen Komponenten von v beliebig gross sein dürfen und nicht der früher erwähnten Bedingung für die Geschwindigkeit $|v| < 1$ unterliegen.[55]

Beschleunigung. In der gewöhnlichen Mechanik bekommen wir die Beschleunigung durch zweimalige Differentiation des Radiusvektors w nach t:

$$\mathfrak{b} = \frac{d^2w}{dt^2} = \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}\right).$$

[55] Cf. the discussion in § 14 above.

Analog definieren wir auch hier den Beschleunigungsvektor b,

$$\begin{aligned} b = \frac{d^2 r}{d\tau^2} &= \left(\frac{d^2 x_1}{d\tau^2}, \frac{d^2 x_2}{d\tau^2}, \frac{d^2 x_3}{d\tau^2}, \frac{d^2 x_4}{d\tau^2} \right) \\ &= \frac{dv}{d\tau}, \end{aligned}$$

und nennen ihn die *Viererbeschleunigung.*
Durch Differentiation ⟨der⟩ Gleichung[56]

$$v \cdot v = -1$$

nach τ erhalten wir:

$$v \frac{dv}{d\tau} = 0$$

oder

$$vb = 0,$$

d. h. Der *Geschwindigkeitsvektor v steht senkrecht auf dem Beschleunigungsvektor b.*
Damit umgekehrt ein Vektor b Beschleunigungsvektor | sein kann, muss er der 64
Bedingung genügen:

$$v \cdot b = v_1 \frac{dv_1}{d\tau} + v_2 \frac{dv_2}{d\tau} + \frac{dv_3}{d\tau} + \frac{dv_4}{d\tau} = 0.$$

Ferner gilt die Beziehung:

$$b \cdot b \geqq 0.$$

Um sie zu beweisen, machen wir folgende Ueberlegung: Ist E ein Punkt einer Weltlinie, so können wir ein Bezugssystem wählen, von dem aus betrachtet E für den Augenblick sich in Ruhe befindet, so dass gilt

$$v_x = v_y = v_z = 0.$$

Geometrisch heisst dies: die neue t-Achse, also die t'-Achse, ist Tangente der Weltlinie. Der Punkt ist im ursprünglichen System in Ruhe, wenn die t'⟨-Achse⟩ parallel der t-Achse ist. Jeder Punkt E der Weltlinie ist also von einem geeignet gewählten Bezugssystem aus betrachtet für einen Augenblick in Ruhe, und es folgt dann aus der Beziehung

$$v \cdot b = v_x b_x + v_y b_y + v_z b_z + v_t b_t = 0$$

$$v_t b_t = 0,$$

und da v_t sicher $\neq 0$ ist, vielmehr $v_t = \frac{1}{\sqrt{1-\mathfrak{v}^2}} = 1$, so wird

$$b_t = 0.$$

[56]"Gleichung" was corrected from "der Definitionsgleichung der Eigenzeit".

Daraus ergibt sich:

$$b \cdot b = b_x^2 + b_y^2 + b_z^2 \geqq 0, \qquad \text{q. e. d.}$$

Wir wollen jetzt zwei Arten von Vektoren definieren. Man nennt einen Vierervektor f *zeitartig*, wenn das Produkt

$$f \cdot f < 0$$

65 ⟨ist,⟩ *raumartig*, wenn ⟨das Produkt⟩

$$f \cdot f > 0$$

ist. Ein Beispiel für den zeitartigen Vektor ist die Vierergeschwindigkeit v; die Beschleunigung b hingegen stellt, wie eben bewiesen, einen raumartigen Vektor dar. $f \cdot f = 0$ sind die Lichtstrahlvektoren.[57]
Unsere bisherigen Ueberlegungen beziehen sich auf die Bewegung eines Punktes, eine Weltlinie. Was im Dreidimensionalem für die Bahnkurve gilt, lässt sich auf die Weltlinie übertragen, nämlich auch[58] hier wird die Geschwindigkeit v durch die Tangente, die Beschleunigung b durch die Krümmung der Kurve bestimmt.

§ 21. Definition von Volumen, Masse und Dichte

Volumen. Zunächst soll jetzt der *Begriff des Volumens* in die Vierersprache eingeführt werden. In der gewöhnlichen Mechanik ist das Volumen eine skalare Grösse, also eine Invariante; denn es ist definiert durch

$$\iiint dxdydy.$$

Im vierdimensionalen Raum ist dies aber keine Invariante, vielmehr gilt dieses erst von dem Weltstück I, das definiert ist durch

$$I = \iiiint dxdydzdt.$$

Bilden wir also

$$V = \frac{\partial I}{\partial t} = \frac{\partial I}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{\frac{\partial I}{\partial \tau}}{\frac{\partial t}{\partial \tau}},$$
$$= \sqrt{1 - \mathfrak{v}^2}\,\frac{\partial I}{\partial \tau},$$

66 so sehen wir, dass zwar nicht V selbst, wohl aber

[57] The preceding sentence was interlineated.

[58] The first part of this sentence was corrected from “Wir sind somit zum Begriff der Kurve im vierdimensionalen Raum gelangt. Auch”.

$$\frac{v}{\frac{\partial\tau}{\partial t}} = \frac{V}{\sqrt{1-\mathfrak{v}^2}}$$

eine *Invariante* ist.

Masse und Dichte. Um nun zum *Begriff der Dichte* zu gelangen, müssen wir von dem der Masse ausgehen. Wir treffen die Festsetzung, dass die Masse m eine Invariante sein soll. Dann ist in der gewöhnlichen Mechanik die Dichte ρ der Grenzwert des Quotienten $\frac{\text{Masse}}{\text{Volumen}}$. Wir bilden

$$\rho = \lim \frac{m}{V} = \frac{dt}{d\tau} \lim \frac{m}{\frac{\partial I}{\partial \tau}} = \frac{dt}{d\tau}\tilde{\tilde{\rho}},$$

wo $\tilde{\tilde{\rho}} = \lim \frac{m}{\frac{\partial I}{\partial\tau}}$ gesetzt ist. Dieser der gewöhnlichen Dichte analog gebildete Ausdruck,

$$\frac{dt}{d\tau}\tilde{\tilde{\rho}} = v_t\tilde{\tilde{\rho}},$$

hat also den Charakter der vierten Komponente eines Vierervektors, ist folglich keine Invariante. Daher liegt es nahe, nicht diese Komponente, sondern direkt eine *Viererdichte* r einzuführen durch

$$r = v\tilde{\tilde{\rho}} = (v_x\tilde{\tilde{\rho}}, v_y\tilde{\tilde{\rho}}, v_z\tilde{\tilde{\rho}}v_t\tilde{\tilde{\rho}}).$$

Befindet sich der Körper in Ruhe, so ist

$$\begin{aligned} v_x &= v_y = v_z = 0, \\ v_t &= 1, \end{aligned}$$

r geht also über in $\tilde{\tilde{\rho}}$. Dies hat Anlass dazu gegeben, | $\tilde{\tilde{\rho}} = \lim \frac{m}{\frac{\partial I}{\partial\tau}}$ als die 67
Ruhdichte zu bezeichnen. [59] $\tilde{\tilde{\rho}}$ *und* τ *sind Invarianten.*

Damit eine Funktion Viererdichte sein kann, muss sie einer Differentialgleichung genügen. In der gewöhnlichen Mechanik ist diese Gleichung, die die Dichte ρ erfüllen muss, die Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathfrak{v}) = 0.$$

Wie lautet die analoge Gleichung in unserer Mechanik?

Um die Viererdichte in die Kontinuitätsgleichung einzuführen, berücksichtigen wir die ⟨in⟩ § 20 abgeleiteten Beziehungen:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{\mathfrak{v}_x}{\sqrt{1-\mathfrak{v}^2}}, \\ v_y &= \frac{\mathfrak{v}_y}{\sqrt{1-\mathfrak{v}^2}}, \\ v_z &= \frac{\mathfrak{v}_z}{\sqrt{1-\mathfrak{v}^2}}, \\ v_t &= \frac{1}{\sqrt{1-\mathfrak{v}^2}}, \end{aligned}$$

[59] Added in an unknown hand: “In der Tat wird für $t = \tau$ $\rho = \tilde{\rho}$”.

woraus folgt:

$$\begin{aligned} r_x &= \frac{\overline{\rho}\mathfrak{v}_x}{\sqrt{1-\mathfrak{v}^2}} = \rho\mathfrak{v}_x, \\ r_y &= \frac{\overline{\rho}\mathfrak{v}_y}{\sqrt{1-\mathfrak{v}^2}} = \rho\mathfrak{v}_y, \\ r_z &= \frac{\overline{\rho}\mathfrak{v}_z}{\sqrt{1-\mathfrak{v}^2}} = \rho\mathfrak{v}_z, \\ r_t &= \frac{\overline{\rho}}{\sqrt{1-\mathfrak{v}^2}} = \rho. \end{aligned}$$

68 Setzen wir dieses ein, so erhalten wir:

$$\frac{\partial r_x}{\partial x} + \frac{\partial r_y}{\partial y} + \frac{\partial r_z}{\partial z} + \frac{\partial r_t}{\partial t} = \mathrm{Div}\, r = 0.$$

Die Kontinuitätsgleichung sagt also aus: *die Weltdivergenz der Viererdichte r ist gleich* 0.

§ 22. Kraft und Energie

Kraft. Jetzt können wir auch den *Begriff der Kraft* einführen. Sie ist definiert durch

$$\begin{aligned} &\text{Kraft} = \text{Masse} \cdot \text{Beschleunigung}, \\ &k \quad = \quad m \quad \cdot \quad b. \end{aligned}$$

Da m ein Skalar ist, gilt

$$v \cdot k = 0, \quad \text{da ja} \quad v \cdot b = 0 \quad \text{ist,}$$

d. h. *auch die Kraft steht auf der Geschwindigkeit senkrecht*. Ausführlich geschrieben lauten ihre Komponenten:

$$\begin{aligned} k_x &= mb_x = m\frac{d^2x}{d\tau^2}, \\ k_y &= mb_y = m\frac{d^2y}{d\tau^2}, \\ k_z &= mb_z = m\frac{d^2z}{d\tau^2}, \\ k_t &= mb_t = m\frac{d^2t}{d\tau^2}. \end{aligned}$$

Energie. An die letzte Gleichung,

$$k_t = mb_t = m\frac{d^2t}{d\tau^2},$$

wollen wir noch eine Betrachtung knüpfen. Die Gleichung

$$v \cdot k = 0$$

oder:

$$v_x k_x + v_y k_y + v_z k_z + v_l k_l = 0$$

oder reell geschrieben: 69

$$v_x k_x + v_y k_y + v_z k_z - v_t k_t = 0$$

lässt sich, wenn wir die gewöhnliche Geschwindigkeit einführen, schreiben:

$$\mathfrak{v}_x k_x + \mathfrak{v}_y k_y + \mathfrak{v}_z k_z = k_t = m\frac{dv_t}{d\tau}.$$

Fassen wir links die drei Viererkomponenten von k als Dreierkraft $\mathfrak{k}$ auf, und multiplizieren die Gleichung mit $d\tau$, so stellt die linke Seite im Sinne der alten Mechanik die während der Zeit $d\tau$ geleistete Arbeit dar:

$$d\tau\{\mathfrak{v}_x \mathfrak{k}_x + \mathfrak{v}_y \mathfrak{k}_y + \mathfrak{v}_z \mathfrak{k}_z\} = m dV_t.$$

Hieraus folgt: Die linke Seite hat die Dimension einer Arbeit[60] In diesem Sinne dürfen wir

$$mv_t - m = k$$

als die *kinetische Energie* des Massenpunktes ansprechen. Die Integrationskonstante m ist so normiert, daß für $\mathfrak{v}_t = 0$ auch $k = 0$ wird.[61] Unsere obige Gleichung lautet dann

$$dk = d\tau\{\mathfrak{v}_x \mathfrak{k}_x + \mathfrak{v}_y \mathfrak{k}_y + \mathfrak{v}_z \mathfrak{k}_z\},$$

d. h. die geleistete Arbeit ist gleich der Energieänderung.

Dies ist der Satz von der Erhaltung der Energie.

Wir können ihn auch in der Form schreiben

$$\mathfrak{v}\mathfrak{k} = \frac{dk}{d\tau}.$$

Die Energie k ist keine Invariante.

Aus unserer Definition von k:

$$k = mv_t - m$$

folgt: 70

$$k = m(\frac{dt}{d\tau} - 1),$$

[60] The preceding sentence was corrected in an unknown hand from: "wo die Integrationskonstante gesetzt ist."

[61] The preceding sentence was interlineated.

d. h. das Zurückbleiben der Zeit gegen die Eigenzeit ist ein Mass für die Energie. Setzen wir wieder

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\mathfrak{v}^2}},$$

d. h.

$$k = m(\frac{1}{\sqrt{1-\mathfrak{v}^2}} - 1)$$

und entwickeln nach $\mathfrak{v}$, so wird

$$\begin{aligned} k &= m(1 + \frac{1}{2}|\mathfrak{v}|^2 + \frac{3}{8}|\mathfrak{v}|^4 + \cdots - 1) \\ &= \frac{1}{2}m|\mathfrak{v}|^2 + \cdots . \end{aligned}$$

Der Begriff stimmt also in erster Näherung (für kleine Geschwindigkeiten) mit dem der kinetischen Energie aus der gewöhnlichen Mechanik überein.

Es sei hier nochmals ausdrücklich bemerkt, dass unsere bisherigen Untersuchungen nur dazu dienten, unsere aus der Dreiersprache bekannten Grundbegriffe der Mechanik so zu erweitern, dass sie auf die Vierersprache passen. Wir haben also nur Definitionen aufgestellt, keine physikalischen Gesetze. Wir verfahren nun analog mit den Begriffen der Elektrodynamik.

§ 23. Grundbegriffe der Elektrodynamik; Viererpotential, elektrische Viererdichte

Im Mittelpunkt der Mechanik der Kontinua steht der Begriff der Dichte. Die Dichte ist dort eine skalare Grösse. Ihr Analogon in der Elektrodynamik ist die elektrische Dichte. Während wir nun § 21 den Begriff der Dichte direkt auf die
71 Vie|reranalysis übertrugen, wobei wir zu einem Vierervektor der Viererdichte r gelangten, ist es zweckmässig, beim Ausbau der Elektrodynamik von einem tiefer liegenden Begriff auszugehen; die elektrische Dichte werden wir dann später daraus ableiten. Mit Rücksicht auf die gewöhnliche Elektrostatik liegt es nahe, vom Begriff des Potentials auszugehen. Dieses ist dort eine skalare Grösse φ. Wie wir aber in der Mechanik die Dichte ρ zur Viererdichte r erweiterten, wollen wir auch hier einen Vierervektor q,

$$q = (q_x, q_y, q_z, q_l),$$

das Viererpotential, einführen und aus ihm die wichtigsten elektrischen Grundbegriffe ableiten. Durch Differentiation des Potentials φ nach den Koordinaten, bekommen wir dort den elektrischen Vektor

$$\begin{aligned}\mathfrak{E}_x &= -\frac{\partial\varphi}{\partial x},\\ \mathfrak{E}_y &= -\frac{\partial\varphi}{\partial y},\\ \mathfrak{E}_z &= -\frac{\partial\varphi}{\partial z}.\end{aligned}$$

Wir können also erwarten, dass wir hier den elektrischen Vektor durch Differenzieren von q erhalten. Daher bilden wir $\operatorname{Rot} q$. (Dies ist die einzige Differentaloperation, die in Betracht kommt, da die Divergenz eines Vierervektors bekanntlich ein Skalar ist) und erhalten

$$\operatorname{Rot} q = M,$$

wo M ein Sechservektor ist mit den Komponenten | 72

$$\begin{aligned}&(M_{yz}, M_{zx}, M_{xy}, M_{xl}, M_{yl}, M_{zl})\\ &= \left(\frac{\partial q_y}{\partial z} - \frac{\partial q_z}{\partial y}, \frac{\partial q_z}{\partial x} - \frac{\partial q_x}{\partial z}, \frac{\partial q_x}{\partial y} - \frac{\partial q_y}{\partial x}, \frac{\partial q_x}{\partial l} - \frac{\partial q_l}{\partial x}, \frac{\partial q_y}{\partial l} - \frac{\partial_l}{\partial y}, \frac{\partial q_z}{\partial l} - \frac{\partial q_l}{\partial z}\right).\end{aligned}$$

Nun setzen wir

$$M = (\mathfrak{M}, -i\mathfrak{E}),$$

wo $\mathfrak{M}$ der magnetische, $\mathfrak{E}$ der elektrische Vektor ist. D. h.

$$M = (\mathfrak{M}_x, \mathfrak{M}_y, \mathfrak{M}_z, -i\mathfrak{E}_x, -i\mathfrak{E}_y, -i\mathfrak{E}_z).$$

Dies ist der entscheidende Schritt, den die neue Theorie gemacht hat und der krasseste Ausdruck des Örstedtschen Versuches. Haben wir so die 6 Komponenten von $\operatorname{Rot} q$ zusammengefasst, so ist die weitere Entwicklung selbstverständlich, wenn man das für die Viereranalysis geltende Formelsystem beherrscht. Von hier aus ergibt sich die ganze Elektrodynamik fast zwangsläufig. M ist ein Sechservektor, entstanden aus $\operatorname{Rot} q$. Darum gelten für ihn die Identitäten

$$\begin{aligned}&\operatorname{Div} M^* = 0,\\ \text{und}\qquad &\operatorname{Div}\operatorname{Div} M = 0.\end{aligned}$$

Wir wollen zunächst die erste dieser beiden Identitäten durch die Dreiergrössen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{E}$ ausdrücken.

$$\mathfrak{M}^* = (-i\mathfrak{E}_x, -i\mathfrak{E}_y, -i\mathfrak{E}_z, \mathfrak{M}_x, \mathfrak{M}_y, \mathfrak{M}_z).$$

Aus

$$\operatorname{Div} F_k = f_k = \frac{\partial F_{xk}}{\partial x} + \frac{\partial F_{yk}}{\partial y} + \frac{\partial F_{zk}}{\partial z} + \frac{\partial F_{lk}}{\partial l}$$

folgt für $\operatorname{Div} M^* = 0$ 73

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathfrak{E} + \frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial t} &= 0, \qquad \text{(1. Satz der Maxwellschen} \\ \operatorname{div}\mathfrak{M} &= 0. \qquad \text{Gleichungen)} \end{aligned}$$

Nunmehr gelangen wir zur Deutung der Identität

$$\operatorname{Div}\operatorname{Div} M = \operatorname{Div}\operatorname{Div}\operatorname{Rot} q = 0.$$

Wir sind ausgegangen von dem Potential und müssen nun einen Begriff einführen, der der Dichte entspricht. In unserer Weltsprache ist diese ein Vierervektor. Aber ein Vierervektor kann nur dann als Dichte r angesprochen werden, wenn er der Kontinuitätsgleichung

$$\operatorname{Div} r = 0$$

genügt. Ein solcher Vierervektor liegt nun gerade hier vor, denn die Divergenz eines Sechservektors M ist ein Vierervektor, und da

$$\operatorname{Div}\operatorname{Div} M = 0$$

ist, so können wir $\operatorname{Div} M$ als elektrische Dichte auffassen. Es ist zweckmässig,

$$\mathrm{M} = -r$$

zu setzen, wo r *die elektrische Viererdichte* ist.
Setzen wir

$$\operatorname{Div} M = -r$$

in die Dreiersprache um, so finden wir:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathfrak{M} - \frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial t} &= \rho\mathfrak{v} \qquad \text{(2. Satz der Maxwellschen} \\ \operatorname{div}\mathfrak{E} &= \rho \qquad \text{Gleichungen)} \end{aligned}$$

74 Wir sehen also: die Maxwellschen Gleichungen sind eine unmittelbare Folge unserer Definition. Sie passen überaus einfach auf unsere Weltsprache. Historisch haben sie gerade diese Vierersprache veranlasst.[62]
Wie verhält sich das zweite Paar der Maxwellschen Gleichungen, wenn man statt M $\operatorname{Rot} q$ einsetzt? Wir erhalten

$$\operatorname{Div}\operatorname{Rot} q = -r,$$

was, wie sich aus unserem Formelsystem (Seite 52) ergibt, identisch ist mit

$$-\operatorname{Div}\operatorname{Grad} q - \operatorname{Grad}\operatorname{Div} q = -r,$$

[62] For historical accounts of four-dimensional vector calculus, see the references in note 42.

und da

$$\operatorname{Div}\operatorname{Grad} q = -\Box q \quad \text{ist,}$$

folgt hieraus:

$$-\Box q - \operatorname{Grad}\operatorname{Div} q = -r$$

oder

$$\Box q + \operatorname{Grad}\operatorname{Div} q = r.$$

Diese Formel drückt die elektrische Viererdichte aus durch das elektrische Viererpotential. Ihr entspricht in der gewöhnlichen Elektrostatik

$$\Delta\varphi = -\rho.$$

Durch Integration erhalten wir das Viererpotential.

§ 24. Definition der elektromagnetischen Energie und Kraft

In der gewöhnlichen Elektrodynamik definiert man die Energie E folgendermaßen:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}(\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{M}^2) \\ &= \frac{1}{2}(\mathfrak{E}_x^2 + \mathfrak{E}_y^2 + \mathfrak{E}_z^2 + \mathfrak{M}_x^2 + \mathfrak{M}_y^2 + \mathfrak{M}_z^2). \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist in unserer Weltsprache natürlich nicht invariant. Um wieder etwas Invariantes zu erhalten, müssen wir | zu der einen Grösse 15 ande- 75
re hinzufügen. Den so entstehenden 16er Tensor σ bezeichnen wir als die Energie[63]

$$\sigma_{sk} = -\frac{1}{2} M \cdot M \delta_{sk} - M \times M.$$

In dieser Formel bedeutet δ_{sk} den speziellen symmetrischen 16er Tensor, für den gilt:

$$\delta_{sk} = \begin{cases} 1 & \text{für } s = k, \\ 0 & \text{für } s \neq k. \end{cases}$$

Ausführlich geschrieben lautet die obige Formel

$$\sigma_{sk} = -\frac{1}{2} M \cdot M \delta_{sk} + \sum_m M_{sm} M_{km}.$$

Damit ist die Energie definiert. σ stellt sich dar als ein 16er Tensor, dessen Komponenten quadratische Funktionen in den Komponenten von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{M}$ sind. Er ist ausserdem symmetrisch,

$$\sigma_{ik} = \sigma_{ki},$$

[63] Klein remarked in his excerpts (see note 2): "Wenn nur H. statt Energie wenigstens Zehnerenergie sagen würde."

so dass er nur wesentlich aus 10 Komponenten besteht. Wir wollen die einzelnen Komponenten näher betrachten. Zunächst ergibt sich

$$\sigma_{44} = \frac{1}{2}(\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{M}^2).$$

Das ist das, was man in der gewöhnlichen Elektrodynamik Energie nennt. Für die Grössen σ_{11}, σ_{22}, σ_{33} erhalten wir

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= -\frac{1}{2}(\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{M}^2) + \mathfrak{E}_x^2 + \mathfrak{M}_x^2,\\ \sigma_{22} &= -\frac{1}{2}(\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{M}^2) + \mathfrak{E}_y^2 + \mathfrak{M}_y^2,\\ \sigma_{33} &= -\frac{1}{2}(\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{M}^2) + \mathfrak{E}_z^2 + \mathfrak{M}_z^2,\end{aligned}$$

76 ferner ist[64]

$$\begin{aligned}\sigma_{12} =&\sigma_{21} =\mathfrak{E}_x\mathfrak{E}_y + \mathfrak{M}_x\mathfrak{M}_y,\\ \sigma_{23} =&\sigma_{32} =\mathfrak{E}_y\mathfrak{E}_z + \mathfrak{M}_y\mathfrak{M}_z,\\ \sigma_{13} =&\sigma_{31} =\mathfrak{E}_z\mathfrak{E}_x + \mathfrak{M}_z\mathfrak{M}_x.\end{aligned}$$

Diese 9 Ausdrücke, die also quadratische Funktionen in $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{M}$ sind, sind die Komponenten eines symmetrischen 9er Tensors, der in der gewöhnlichen Elektrodynamik eine Rolle spielt und dort als elektromagnetischer oder Maxwellscher Spannungstensor[65] bekannt ist.

Von den Komponenten des Energietensors haben wir jetzt nur noch σ_{14}, σ_{24}, σ_{34} zu betrachten. Auch diese begegnen uns in der gewöhnlichen Elektrodynamik. Machen wir sie durch Multiplikation mit $-\frac{1}{i}$ reell, so sind sie die Komponenten von

$$\mathfrak{E} \times \mathfrak{M},$$

und diesen Vektor bezeichnet man dort als Energiefluss oder Poyntingschen Strahlungsvektor. Unser symmetrischer Welttensor σ, den wir als Energie definiert haben, enthält somit in der Sprache der gewöhnlichen Elektrodynamik gesprochen, die Energie[66], den Maxwellschen Spannungstensor und den Poyntingschen Strahlungsvektor oder Energiefluss.[67] Während also in der Dreieranalysis alles unzusammenhängend ist, haben wir hier ein System von 16 (resp. 10 verschiedenen) Grössen, das zusammenhängt und invariant ist.

Definition der Kraft

77 Wir wollen jetzt noch die Divergenz des Energieten|sors[68] berechnen. Dazu

[64] Added by Hilbert in pencil: "Es folgt hieraus noch die Invariante: $\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}+\sigma_{44} = 0$."

[65] Interlineated by Hilbert in pencil: "6 verschiedene wegen der Symmetrie".

[66] "die Energie" was corrected from "den Energiesatz".

[67] On top of the words "Energie", "Maxwellschen", and Poytingschen" the numbers "1", "+6", resp., "+3" were written in pencil.

benutzen wir die Identität:

$$\underset{h}{\mathrm{Div}}\Big(-\frac{1}{2}M\cdot M\delta_{sk}+\sum_m M_{km}M_{sm}\Big)\equiv\sum_h\Big(M_{hs}\underset{m}{\mathrm{Div}}M_{hm}-M^*\underset{m}{\mathrm{Div}}M^*_{hm}\Big).$$

Die rechte Seite dieser Identität ist, da nach den Maxwellschen Gleichungen $\mathrm{Div}\,M^*=0$ ist, und wir $\mathrm{Div}\,M=-r$ gesetzt haben

$$=-Mr.$$

Wir erhalten also die überaus einfache Gleichung:

$$\mathrm{Div}\,\sigma=-Mr.$$

Nun war aber

$$r=\tilde\rho v,\qquad \begin{aligned}&\tilde\rho=\text{Ruhdichte},\\ &v=\frac{dx_i}{d\tau},\qquad i=1,\cdots,4.\end{aligned}$$

Setzen wir dieses ein und multiplizieren noch skalar mit v, so verschwindet die rechte Seite, wie aus den Formeln § 18[69] ersichtlich ist. Die Divergenz von σ hat also die Eigenschaft, skalar mit v multipliziert, 0 zu ergeben. Einen solchen Vierervektor aber brauchen wir gerade noch, und da in der Mechanik

$$v\cdot k=0$$

galt, wo k die Viererkraft war, so definieren wir auch jetzt

$$-Mr$$

als die *elektrische Kraft* und bezeichnen sie mit f.

$$f=-Mr$$

ist die elektromagnetische oder Lorentzkraft. Die Beziehung

$$v\cdot f=0,$$

die sich in der Mechanik unmittelbar aus der Definition von v | und f ergab, 78
ist bei dieser Definition der elektromagnetischen Kraft stets erfüllt.

---

[68] Added in a different hand at the top of the page:

$$\begin{aligned}\text{Wenn}\quad \sigma&=F\times F+\frac{1}{4}F\cdot F(\delta)\\ &=\frac{1}{2}\{F\times F-F^*\times F^*\}\\ \text{Dann}\quad \mathrm{Div}\,\sigma&=-(\mathrm{Div}\,F)\cdot F+(\mathrm{Div}\,F^*)\cdot F^*\end{aligned}$$

[69] Interlineated by Hilbert in pencil: “S. 50”; cf. p. 114 above.

Zu bemerken ist noch, dass mit der elektrischen Dichte r die Geschwindigkeit v schon gegeben ist, denn es gilt:[70] $r_i = \tilde{\rho}\frac{dx_i}{d\tau}$, $\sum(\frac{dx_i}{d\tau})^2 = -1$, d. h. $\sum r_i^2 = -\tilde{\rho}^2$ und es wird $v_i = \frac{dx_i}{d\tau} = \frac{1}{\tilde{\rho}}r_i = \frac{r_i}{\sqrt{-\sum r_i^2}} = \frac{r_i}{i\sqrt{r\cdot r}}$.
Damit sind wir mit den Definitionen fertig und können nun dazu übergehen, Naturgesetze aufzustellen. Mit Definitionen allein kann man keine Naturgesetze erklären, es müssen noch Gesetze und Axiome hinzukommen, die man dann durch das Experiment prüft. Das einzige Axiom, das wir bis jetzt aufgestellt haben, ist: die Naturgesetze sollen vom Bezugssystem unabhängig sein. Die übrigen werden wir ableiten. Diese Gesetze werden natürlich im Vergleich zu denen der alten Physik entsprechend komplizierter ausfallen. Wir geben zunächst ein Beispiel aus der Mechanik für den Unterschied zwischen einer Definition und einem Gesetz.

§ 25. Die Bewegungsgleichung eines Massenpunktes unter dem Einfluss einer Kraft; der Bornsche Starrheitsbegriff

Vorerst ist die Kraft nur definiert als Masse mal Beschleunigung. Wenn man aber noch verlangt, dass diese Kraft noch die andere Bedeutung hat, eine konstante Grösse zu sein, so erhält man eine Differentialgleichung und damit ein Naturgesetz. Man muss eben, um ein Gesetz zu erhalten, in der Definitionsgleichung
79 $m \cdot b_i = k_i$ der rechten Seite noch eine Bedeu|tung geben. Ein solches Gesetz ist dann an der Erfahrung prüfbar. In der gewöhnlichen Mechanik lautet die entsprechende Aufgabe: Gegeben ist ein Massenpunkt, der sich unter dem Einfluss einer konstanten Kraft bewegt. Nach welchem Gesetz erfolgt die Bewegung?
Nun gilt in der gewöhnlichen Mechanik

$$\mathfrak{k} = m \cdot b.$$

Die gesuchte Differentialgleichung lautet also

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \text{const}\,.$$

Das ist bekanntlich das Gesetz der Schwerkraft. Wir bekommen dieses Gesetz erst durch die Voraussetzung $\mathfrak{k} = \text{const}$, eine Voraussetzung, die wir durch das Experiment bestätigen können.
Dieses Beispiel wollen wir jetzt in der Vtereranalysis durchführen. Hier ist die Kraft ein Vierervektor, der stets der Gleichung

$$v \cdot k = 0$$

genügen muss. k kann nicht konstant sein, denn wäre $k = \text{const}$ und $\neq 0$, so müsste $v = 0$ sein, was wegen $v \cdot v = -1$ nicht möglich ist. Wir beschränken

[70] In the following formulas, $\tilde{\rho}$ was corrected from $\bar{\rho}$.

uns bei der Ableitung der Bewegungsgleichung der Einfachheit halber wieder auf eine xt-Ebene, setzen also

$$v_y = v_z = 0,$$

ebenso

$$k_y = k_z = 0.$$

Die Gleichung

$$v \cdot k = 0$$

geht dann über in 80

$$v_x k_x - v_t k_t = 0.$$

Das einfachste Naturgesetz ist nun:[71]

$$\begin{aligned} k_x &= A v_t, \\ k_t &= A v_x, \end{aligned}$$

wo A die gegebene Konstante des Naturgesetzes, etwa die Schwerebeschleunigung g ist. Mit diesem Ansatz gehen wir in die Differentialgleichung

$$m \cdot b = k$$

hinein und erhalten:

$$\begin{aligned} m\frac{d^2x}{d\tau^2} &= k_x = A v_t, \\ m\frac{d^2t}{d\tau^2} &= k_t = A v_x, \end{aligned}$$

Gleichungen, die sich leicht[72] mit Hilfe der Dreiergeschwindigkeit ausdrücken lassen. Es ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{v}_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} &= \frac{\frac{dx}{d\tau}}{\frac{dt}{d\tau}} \\ &= \frac{v_x}{v_t}, \end{aligned}$$

woraus folgt

$$\frac{d\mathfrak{v}_x}{d\tau} = \frac{v_t \frac{d^2x}{d\tau^2} - v_x \frac{d^2t}{d\tau^2}}{v_t^2},$$

oder wenn wir für $\frac{d^2x}{d\tau^2}$ u. $\frac{d^2t}{d\tau^2}$ bezw. $\frac{Av_t}{m}$ u. $\frac{Av_x}{m}$ einsetzen:

$$\begin{aligned} m\frac{d\mathfrak{v}_x}{d\tau} &= \frac{v_t A v_t - v_x A v_x}{v_t^2} \\ &= A\frac{v_t^2 - v_x^2}{v_t^2}. \end{aligned}$$

Nun ist aber wegen 81

$$v \cdot v = -1,$$
$$v_t^2 - v_x^2 = +1,$$

also

$$m\frac{d\mathfrak{v}_x}{d\tau} = \frac{A}{v_t^2}.$$

Diese Gleichung dividieren wir noch durch $\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\mathfrak{v}^2}} = v_t$ und erhalten

$$m\frac{\frac{d\mathfrak{v}_x}{d\tau}}{\frac{dt}{d\tau}} = m\frac{d\mathfrak{v}_x}{dt} = \frac{A}{v_t^2} = \frac{A}{(1-\mathfrak{v}^2)^{\frac{3}{2}}},$$

oder schliesslich[73]

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = A\left(1 - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}},$$
$$A = m\left(1 - \left(\frac{dx}{dt}\right)\right)^{-\frac{3}{2}}\frac{d^2x}{dt^2}.$$

Dies ist die Bewegungsgleichung für einen Massenpunkt, der sich in der x, t-Ebene bewegt. Die Gleichung ist eine direkte Folge der Relativitätstheorie. Ihr entspricht in der gewöhnlichen Mechanik

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \text{const.}$$

Eine formelle Uebereinstimmung der beiden Gleichungen wird erzielt, wenn man

$$m\left(1 - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right)^{-\frac{3}{2}} = M$$

setzt, und M die Masse nennt. Ist nun

$$\frac{dx}{dt} = \mathfrak{v}$$

82 sehr klein, so dass man es gegenüber 1 (Lichtgeschwindigkeit) vernachlässigen kann, so sind die Gleichungen tatsächlich identisch. M wird in der Grenze

$$\lim_{\frac{dx}{dt}=0} M = m,$$

[71]"ist nun" was corrected from "würde nun sein".

[72]"leicht" was corrected from "nicht".

[73]In the original, the following formula was erroneously written with A being divided rather than multiplied by the factor $(1 - (dx/dt)^2)^{(3/2)}$. The error was indicated, and in the following equations on this and the next page, the minus signs for the exponent (3/2) were interlineated.

ein Umstand, der dazu geführt hat, m als die Ruhmasse des Punktes zu bezeichnen. Für kleine Geschwindigkeiten ist also das alte Gesetz richtig, aber nicht für grosse. Für grosse Geschwindigkeiten ist die Masse der alten Mechanik keine Konstante, sondern sie hängt von der Geschwindigkeit ab, wie dies durch die Formel

$$M = m\left(1 - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right)^{-\frac{3}{2}}$$

zum Ausdruck kommt.

Das so erhaltene Gesetz der Bewegung eines Massenpunktes kann man experimentell prüfen, und zwar muss man dazu Körper mit grosser Geschwindigkeit nehmen. Besonders geeignet sind also die Kathodenstrahlen (1/3 Lichtgeschwindigkeit) und die β-Strahlen (9/10 Lichtgeschwindigkeit). Das Experiment hat zu Gunsten der neuen Theorie entschieden.[74] —

Man könnte so die ganze Mechanik aufbauen. Wir wollen hiervon indessen absehen und zwar um so mehr, als man heute die ganze Mechanik nur als ein spezielles Gebiet, einen Spezialfall eines viel allgemeineren und umfassenderen Problems ansieht. Sind auch die Untersuchungen im einzelnen noch nicht vollends abgeschlossen, so kann man heute doch nicht mehr daran zweifeln, dass das Problem der Physik überhaupt mit dem der | Elektrodynamik im 83
letzten Grunde identisch ist.[75] Wir wenden uns daher gleich zu diesem allgemeineren Problem, der Elektrodynamik.

Wir werden dort den Begriff des starren Körpers brauchen und wollen daher jetzt erklären, was man in der neuen Mechanik darunter versteht. Wir erinnern uns an die allgemeine *imaginäre* Darstellung der Weltlinie durch 4 Funktionen x, y, z, l von τ. Stellen wir uns hier alles (auch l) als reell vor, so haben wir in der Eigenzeit τ das vollständige Analogon zur Bogenlänge s im dreidimensionalen Raum. Bei dieser imaginären Darstellung können wir eine beliebige Kurve, deren Neigung gegen die l-Axe kleiner als 45° ist,[76] als Weltlinie ansehen. Bei der Bewegung beschreibt jeder Punkt eines Körpers eine Weltlinie. Sind nun diese von den einzelnen Punkten des Körpers bei der Bewegung beschriebenen Weltlinien äquidistant, so nennen wir mit Born den

[74] Initially, the experimental data on the velocity dependence of the electron’s mass, as discussed e.g. by Einstein in his review article *Einstein 1907b*, did not support the special theory of relativity. As admitted by Einstein, these data actually favored alternative theories by Max Abraham and Alfred H. Bucherer. The experimental data remained inconclusive for some years, see *Laub 1910* and *Laue 1911*, pp. 16–18, for contemporary reviews, and were only settled with data reported in *Guye and Lavanchy 1916*, see *CPAE2 1989*, pp. 270–272, for a discussion and further references.

[75] Klein in his excerpts (see note 2 above) remarked: “Glaube, dass die Elektrodynamik die wahre Grundlage der Physik sei.” (SUB *Cod. Ms. Klein 22A*, sheet 31). For a historical discussion of Hilbert’s position toward the mechanical and electromagnetic worldviews, prevalent at the time, see *Corry 1999b* and *Corry 2004*, ch. 5.

[76] The preceding half-sentence was interlineated.

Körper starr.[77] Da die Weltlinien durch 3 willkürliche Funktionen bestimmt sind, hat der so definierte starre Körper nicht 6 Freiheitsgrade. Die Definition des starren Körpers lässt sich auch folgendermassen fassen: Ein Körper heisst starr, wenn sich in bezug auf ein mitbewegtes System alle seine Punkte gleichzeitig in Ruhe befinden.[78] Hat umgekehrt die Transformation eines beliebigen Punktes eines Körpers auf Ruhe von selbst die Transformation aller Punkte auf Ruhe zur Folge, so haben wir einen starren Körper. In der Tat: Errichtet man eine neue x'-Achse senkrecht zu einem Punkt irgend einer Weltlinie, so stehen alle Weltlinien des starren Körpers senkrecht auf dieser Geraden.

84 § 26. Elektrodynamik auf Grund der atomistischen Hypothese.

Wir wollen nun das Gesetz, von dem die gegenwärtige Elektrodynamik beherrscht wird, aufstellen. Dieses gründet sich im wesentlichen auf zwei Sätze:
1) *Gesetz der Atomistik.*
Man nimmt an, die Elektrizität kommt nur in der Form von Elektronen vor, deren es nur endlich viele gibt, und die sich nur als starre Körper im Bornschen Sinne bewegen können.[79] Transformieren wir ein Elektron auf Ruhe, so hat es die Gestalt einer Kugel, und seine Ruhdichte ist konstant $= \tilde{\tilde{\rho}}$. Das ist eine ungeheure Einschränkung für die Dichteverteilung r, und zwar ist diese Forderung der krasseste Ausdruck des Prinzips der Atomistik. Der Bornsche Begriff des starren Körpers ist der strengste dieser Art. Danach hat ein starrer Körper nur 3 Freiheitsgrade. Seine Bewegung ist also bestimmt, wenn x, y, z als Funktionen von t bekannt sind. Wie gross diese Einschränkung für r ist, erkennt man daraus, dass die Bewegung aller n Elektronen charakterisiert ist durch

$$\begin{aligned} x &= x_h(t), \\ y &= y_h(t), \qquad h = 1, \cdots n \\ z &= z_h(t), \end{aligned}$$

also durch $3n$ Funktionen einer einzigen Variablen, während wir für beliebiges r 4 Funktionen von 4 Veränderlichen haben. Gleichzeitig mit r ist auch das Viererpotential q eingeschränkt. So einschneidend aber dieses Weltgesetz

[77] "Born" was corrected from "Vorer". The definition of a rigid body given here is, in fact, due to *Herglotz 1910*. Klein, in his excerpts, remarked: "Born'scher Starrheitsbegriff, der nur 3 Grade d. Fr. läßt. (Bloß erzählt, ohne Bezugnahme auf Herglotz)." (SUB *Cod. Ms. Klein 22A*, sheet 29). For Born's original relativistically invariant definition of a rigid body, see *Born 1909a*. For historical discussions of the debate around the concept of a rigid body in the special theory of relativity, see *Klein 1970*, pp. 152–154, *Stachel 1980*, *Maltese and Orlando 1995*, and *CPAE3 1993*, pp. 478–480.

[78] This is the original definition put forward in *Born 1909a*, see the previous note.

[79] For a historical discussion of different electron models at the time, see *Janssen and Mecklenburg 2007*.

ist, so reicht es doch nicht hin, um als Grundlage der Physik zu dienen. Es ermöglicht uns nicht, Naturgesetze zu postulieren, da | es zur Aufstellung von 85
Gleichungen nicht ausreicht. Dies leistet der zweite Satz:

2) *Das Kraftgesetz.*

Wenn wir r haben, können wir M finden, denn die Integrationstheorie von

$$\begin{aligned}\operatorname{Div} M &= -r,\\ \operatorname{Div} M^* &= 0\end{aligned}$$

lässt sich vollständig durchführen, da die Differentialgleichungen linear sind. Haben wir aber M und r, so können wir auch f berechnen.[80] Wir wollen nun eine Aussage in bezug auf f machen. Wir fassen den Mittelpunkt eines Elektrons ins Auge und transformieren auf Ruhe. Dann integrieren wir die Kraft über dieses auf Ruhe transformierte Elektron und setzen

$$\int f d\overline{V} = 0,$$

wo $d\overline{V} = \frac{dV}{\sqrt{1-\mathfrak{v}^2}}$ ist.[81]

Die Kraft, über das Ruhvolumen integriert, soll also gleich Null sein; diese Forderung ist ein Analogon der Forderung der gewöhnlichen Mechanik, dass die Summe aller Kräfte $= 0$ sein soll.[82]

Stimmt nun die Zahl der Gleichungen mit der der Unbekannten überein? Das ist tatsächlich der Fall. f ist nämlich Viererkraft, und für diese gilt

$$v \cdot f = 0,$$

d. h.

$$v_x f_x + v_y f_y + v_z f_z = v_t f_t,$$

|[83] eine Gleichung, die sich für $r_i = \text{const.}$[84] innerhalb $\overline{V}$ auch schreibt[85] 86

$$r_t \int f_t d\overline{V} = \sum_{i=1}^{3} r_i d\overline{V}.$$

[80] The quantity $f = -M \cdot r$ had been introduced in § 24 above.

[81] Added by an unknown writer: „ist eine invariante Gl system 4 Gl.!".

[82] Added by Hilbert with pencil: "— genau, wie in der Mechanik starrer Körper".

[83] Deleted: "oder wegen $r = \overline{\rho} v$

$$r_x f_x + r_y f_y + r_z f_z = r_t f_t \quad "$$

[84] "für $r_i = \text{const.}$" was corrected from: "unter Benutzung der Relation für die Gesamtkraft $\int f d\overline{V} = v$"; added by Hilbert with pencil: "wegen $v_i = \text{const}$".

[85] In the following formulas, r was corrected by Hilbert to v with pencil, and the summation index was changed from i to h.

Ist nun

$$\int f_i d\overline{V} = 0 \quad \text{für } i = 1, 2, 3,$$

so folgt

$$v_i \int f_i d\overline{V} = 0 \quad \text{für } i = 1, 2, 3.$$

Also ist

$$v_t \int f_t d\overline{V} = 0,$$

und da $v_t \neq 0$ ist[86], wird

$$\int f_t d\overline{V} = 0,$$

d. h. die vierte Gleichung ist eine Folge der drei anderen. Somit haben wir in der Tat $3n$ Gleichungen für die $3n$ Funktionen der einen Veränderlichen t. Die Gleichungen sind jedoch ausserordentlich kompliziert; sie sind ein Gemisch von Differential-, Integral- und Funktionalgleichungen, weil die Funktionen $x_i(t)$ in M in komplizierter Weise auftreten und $f = -rM$ über das Ruhvolumen integriert wird.

87 Wir wollen nun zeigen, dass dieses Gesetz eine auffällige Analogie zur gewöhnlichen Mechanik enthält. Wir betrachten das $k$te Elektron mit dem Ruhvolumen $\overline{V}_k$. Dann gilt also

$$\int f d\overline{V}_k = 0,$$

integriert über das Ruhvolumen des Elektrons. Nun[87] setzen wir

$$r = r_1 + r_2 + \cdots + r_n,$$

wobei r_i nur im i-ten Elektron $\neq 0$ sein soll. Dabei brauchen für die gegenseitige Bewegung der einzelnen Elektronen noch keinerlei Einschränkungen zu bestehen, die Elektronen können einander vielmehr beliebig durchdringen, d. h. es können am selben Ort mehrere r_i gleichzeitig $\neq 0$ sein.[88] Durch diese Zerlegung geht unser obiges Integral

$$\int r \cdot M d\overline{V}$$

unter Berücksichtigung von

$$f_h = -r_h M$$

über in

$$\int f_i d\overline{V}_k + \cdots + \int f_n d\overline{V}_k = 0.$$

[86] "wegen $v_t = \frac{1}{\sqrt{1-\mathfrak{v}^2}}$." Added by an unknown writer.

[87] "Nun" was corrected from "Dazu".

[88] In the preceding sentence, the words "Dabei brauchen" were corrected from "Es sollen", and the words "noch", "zu", and "vielmehr", as well as the final half-sentence starting with "d. h." were interlineated.

$\int f_k d\overline{V}_k$ ist also die Kraft, die von dem $k$ten Elektron auf sich selbst ausgeübt wird. Auf das $k$te Elektron wirken somit als äussere Kräfte:

$$\sum_h \int f_h d\overline{V}_k, \qquad h \neq k,$$

und als Trägheitskraft:

$$\int f_k d\overline{V}_k.$$

Da das Elektron auf Ruhe transformiert ist, ist die Trägheitskraft gleich der Ruhmasse mal Beschleunigung. Das Gesetz

$$\int f d\overline{V} = 0$$

besagt also, dass die Summe der äusseren Kräfte + Trägheitskraft für jedes 88
Elektron zu jeder Zeit gleich Null sein soll. Dies ist eine wunderbare Beziehung zur gewöhnlichen Mechanik. Sie gilt jedoch nur angenähert und zwar für sehr kleine und sehr weit voneinander entfernte Elektronen. Die Trennung in innere und äussere Kräfte ist nur möglich durch die atomistische Hypothese. — Dass man $\int f_k d\overline{V}_k$ aus der Summe herausgreifen kann, erkannte zuerst Abraham. Aber er hatte den gewöhnlichen Starrheitsbegriff, daher fügte sich die Rechnung nicht so bequem. Sie ist zuerst von Hecke und Behrens durchgeführt worden.[89]

Wir müssen nun noch etwas über die Energie sagen. Das Energiegesetz muss eine Folge unseres Kraftgesetzes sein, das ist auch der Fall, doch gilt der Energiesatz für Elektronen nur in gewisser Annäherung.[90] Wir verschaffen uns eine Impulsenergiegleichung aus dem 16er Tensor σ, indem wir bilden

$$\begin{aligned} 0 = \int f dV &= \int \operatorname{Div} \sigma dV \\ &= \int (\frac{\partial \sigma_{1p}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{2p}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{3p}}{\partial x_3}) d\overline{V} + \int \frac{\partial \sigma_{4p}}{\partial x_4} dV. \end{aligned}$$

Nach dem Gauss'schen Satz bekommen wir für den ersten Ausdruck ein Oberflächenintegral. Wir nehmen an, dass auf der Oberfläche $\sigma = 0$ ist, dass also

[89] For Abraham's theory of the dynamics of the electron, see *Abraham 1902a*, *Abraham 1902b*, *Abraham 1903*, and *Abraham 1908*. For Behrens's and Hecke's work, see *Behrens and Hecke 1912*. The latter paper was presented for publication in the Göttingen Academy proceedings by Hilbert, and in the introduction the authors mention that the paper was written following Hilbert's lecture on radiation theory of summer 1912 (*Hilbert 1911/12**, this Volume). All three physicists had strong ties to Göttingen. Max Abraham (1875–1922) was *Privatdozent* there from 1900–1909. Wilhelm Behrens (1885–1917) took his Ph.D. with Felix Klein in 1909 (*Behrens 1911*) and obtained his *venia legendi* in Göttingen 1913 (*Behrens 1915*). Erich Hecke (1887–1947) was *Privatdozent* in Göttingen 1912–1915 and Professor 1918–1919.

[90] Klein in his excerpts (cf. note 2 above), remarked: "Wie steht es mit dem Energiesatz? Mangelhaft." (SUB *Cod. Ms. Klein 22a*, sheet 29).

keine Energie aus- und einströmt; dann bleibt also nur das letzte Glied übrig. Wäre nun

$$\int f dV = 0,$$

so würde folgen:

$$\frac{\partial}{\partial x_4} \int \sigma_{4p} dV = 0.$$

89 Unser Weltgesetz gilt nur für das Ruhvolumen[91] $\int f d\overline{V} = 0$ und für jedes einzelne Elektron. Ersetzen wir also das Volumen V eines Elektrons durch das zugehörige Ruhvolumen $\overline{V}$, (und $V = \overline{V}$ gilt angenähert für kleine Geschwindigkeiten), so wird

$$\int \sigma_{4p} dV = \text{const}$$

oder für $p = 4$

$$\int \{\frac{1}{2}(\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{M}^2)\} dV = \text{const}\,.$$

Die totale Energie würde damit von der Zeit unabhängig sein. Der Energiesatz für Elektronen verlangt also, dass wir eine Vernachlässigung begehen, die darauf hinauskommt, dass wir nur kleine Geschwindigkeiten zulassen.

Damit haben wir die bis heute[92] acceptierte Elektrodynamik kurz skizziert. Ein grosser Vorzug dieser Theorie ist, dass sie keinen logischen Widerspruch enthält. Andrerseits wäre aber das Causalitätsgesetz unmöglich, da das absolut starre Elektron unendlich-grosse Geschwindigkeiten über die Länge eines Elektronendurchmessers zulässt. Es gäbe also ein Bezugssystem, in dem Ursache und Wirkung vertauscht wären. Die Starrheit erscheint zunächst als eine besonders einfache und natürliche mathematische Vorstellung, indessen ist es etwas sehr künstliches, wie wir noch erkennen werden,[93] diesen Begriff an die Spitze der Theorie[94] zu stellen.

90 Ein weiterer Nachteil dieser Theorie ist, dass der | Energiesatz nur für kleine Geschwindigkeiten gilt. Der tiefere Grund hierfür ist, dass unser Weltgesetz ein Integralgesetz ist, ein Umstand, der es so kompliziert macht, wenn auch andererseits grosse Vorteile entspringen.

Auch physikalisch sind verschiedene Einwände gegen die Theorie zu erheben. Die oben abgeleiteten Gesetze sind nicht richtig, wenn wir in das Innere der Materie eindringen. Die Gesetze der Strahlung stimmen nicht mit unserer Theorie[95], und sowohl Quantentheorie als auch Gravitation fehlen gänzlich und sind auch äusserst schwer diesem System einzuordnen. Wir müssen also

[91] "gilt nur für das Ruhvolumen" was corrected from: "lautet aber".

[92] "bis heute" was corrected from "bisher".

[93] In the following paragraph, Hilbert discusses Gustav Mie's electron theory as an alternative to the rigid electron theory.

[94] "der Theorie" was interlineated.

[95] "mit unserer Theorie" was interlineated.

aus logischen und physikalischen Gründen annehmen, dass es nicht das richtige Weltgesetz ist, und sind so gezwungen, es durch ein anderes zu ersetzen.[96]

§ 27. Die Mie'sche Theorie

In dieser Richtung sind nun in den letzten Jahren grosse Fortschritte gemacht worden, aber die Untersuchungen sind noch nicht abgeschlossen, so dass wir heute noch nicht den Erfolg derselben vollständig übersehen können. Indessen können wir die leitenden Gedanken, die diesen Forschungen zu Grunde liegen, angeben. Wir hatten definiert:

$$\begin{aligned} M &= \mathrm{Rot}\, q, \\ \mathrm{Div}\, M &= -r, \\ \sigma_{hk} &= -\frac{1}{2} M \cdot M \delta_{hk} + \sum_s M_{hs} M_{ks}, \\ \mathrm{Div}\, \sigma &= -Mr = f. \end{aligned}$$

Diese Definitionen sollen nun auch im folgenden bestehen bleiben, dagegen soll unser Kraftgesetz durch ein anderes ersetzt | werden. Auch die im vorigen 91
Paragraphen behandelte atomistische Hypothese wollen wir jetzt fallen lassen, wollen also diese beiden Gesetze durch ein einziges ersetzen. Natürlich wird dieses neue Gesetz von sehr einschneidendem Charakter sein müssen, wenn es der möglichen Dichteverteilung dieselben einschneidenden Beschränkungen auferlegen soll wie die Starrheit. Um nun zu diesem Gesetz zu gelangen, einnern wir uns eines Prinzips, das in der gewöhnlichen Mechanik und auch in der Elektrodynamik eine grosse Rolle spielt, nämlich des Minimalprinzips. Können wir nicht auch hier von einem Minimalprinzip ausgehen, und durch dasselbe der Viererdichte r Einschränkungen auferlegen, die den durch die Starrheit entsprechen? Diese Frage hat sich Mie vorgelegt.[97] Es wird sich also darum handeln, ein Variationsproblem aufzustellen, das dem bekannten Hamiltonschen Prinzip nachgebildet ist. Wir werden in der Tat erkennen, dass die von uns angeführten Begriffe für die Aufstellung eines solchen Prinzips geeignet sind, ja geradezu dazu herausfordern. In unserer Sprache würde das Hamiltonsche Prinzip lauten:

$$\iiiint H dx dy dz dt = \int H dW = \text{Minimum}.$$

H müssen wir dabei so einführen, dass unsere alten Definitionen darin vorkommen. Dazu wird es genügen, dass H eine Funktion von q ist, da wir alle

[96] Cp. similar remarks in Hilbert's notes on the foundations of physics, this Volume pp. 331–333.

[97] *Mie 1912a*, *Mie 1912b*, *Mie 1913*. For historical discussion of Mie's theory and Hilbert's reception of it, see *Vizgin 1994*, pp. 26–38, *Kohl 2000*, *Corry 2004*, ch. 6, *Smeenk and Martin 2007*, and the introduction to this Volume, sec. 3.

übrigen Grössen M, r u. s. w. aus q abgeleitet hatten.[98] Wir setzen also

$$H = Q - f(q \cdot q),$$

wobei

$$Q = M \cdot M = \frac{1}{2} \sum_{kh} M_{kh}^2 = \frac{1}{2} \sum_{kh} (\frac{\partial q_h}{\partial x_k} - \frac{\partial q_k}{\partial x_h})^2$$

92 ist. Dabei wählen wir[99]

$$f(q \cdot q) = (q \cdot q)^3$$

und erhalten speziell für die Hamiltonsche Funktion:

$$H = Q - (q \cdot q)^3.$$

Sie ist also zusammengesetzt aus den beiden Invarianten $\sum_{kh} M_{kh}^2$ und $(q \cdot q)^3$ und ist selbst eine orthogonale Invariante dieser Grössen. Das Hamiltonsche Prinzip lautet somit

$$\int \{Q - (q \cdot q)^3\} dW = \text{Minimum},$$

wo dW das Element eines Weltstückes ist. Wir bilden die Lagrange'schen Ableitungen und erhalten:

$$\sum_l \frac{\partial}{\partial x_l} \frac{\partial H}{\partial q_{kl}} - \frac{\partial H}{\partial q_k} = 0,$$

wobei q_{kl} zur Abkürzung gesetzt ist für

$$\frac{\partial q_k}{\partial x_l}.$$

Das sind 4 Gleichungen für die 4 unbekannten Funktionen q_i von x_1, x_2, x_3, x_4, so dass also unser System bestimmt ist. q_{kl} kommt nun nur in Q vor, also ist

$$\frac{\partial H}{\partial q_{kl}} = \frac{\partial Q}{\partial q_{kl}},$$

und dies ist wieder

$$= M_{lk};$$

denn es ist

$$M_{hk} = q_{hk} - q_{kh}.$$

Unsere Weltgleichungen gehen also über in

$$\operatorname{Div} M = \frac{\partial H}{\partial q_k} = \frac{\partial f}{\partial q_k}$$

93 denn q_k kommt nur in f vor.

Nun ist aber nach Definition Div $M = -r$, also haben wir

$$r_k = \frac{\partial f}{\partial q_k} = b(q \cdot q)^2 q_k \qquad k = 1, 2, 3, 4$$

Die Viererdichte ist also proportional dem Viererpotential:

$$r_1 : r_2 : r_3 : r_4 = q_1 : q_2 : q_3 : q_4$$

Dieses ist nun eine ungeheure und ganz neue Forderung, durch sie wird die Viererdichte mit dem Potential selbst in Beziehung gesetzt u. nicht mit den Ableitungen.[100] Bei der Aufstellung dieses Weltgesetzes haben wir die früheren Definitionen im wesentlichen beibehalten. Die prinzipielle Aenderung der Theorie besteht darin, dass wir an Stelle des früheren Kraftgesetzes, das ein kompliziertes Gemisch von Differential-, Integral- und Funktionalbeziehungen enthielt, ein reines[101] Differentialgesetz an die Spitze der ganzen Elektrodynamik gestellt haben, wie es eleganter und schöner nicht zu denken ist. Es ist abgeleitet aus dem Hamiltonschen Prinzip, befolgt also das Minimalgesetz. Wir haben 4 Gleichungen mit 4 unbekannten Funktionen, so dass alles bestimmt ist bis auf die willkürlichen Funktionen. Mehr aber können wir auch nicht verlangen.[102]

§ 28. Ableitung der Elektronentheorie aus der Mie'schen Hypothese

Das Bewegungsgesetz der Elektronen muss eine Folge unseres Weltgesetzes sein. Ist es nun möglich, die Elektronentheorie aus letzterem abzuleiten? Charakteristisch für die Elektronentheorie war, dass nur in einzelnen Punkten des Rau|mes, den Elektronen, elektrische Dichte vorhanden war. Nach unserer jet- 94
zigen Auffassung werden wir einen Punkt als ein Elektron bezeichnen, wenn in ihm die Dichte sehr gross ist und ausserhalb desselben sehr schnell abfällt. Im Viererraum wird dann die Dichte auf einer Weltlinie sehr gross und nimmt auf den benachbarten rasch gegen Null ab. Wenn wir einen Grenzübergang

[98] In standard electrodynamics the Lagrangian is taken to be a function of the field variables only. A general dependence on the potential q would allow for theories violating gauge invariance which is the most serious objection against Mie's theory, see, e.g., *Pauli 1921*, pp. 754f.

[99] The following choice of f is the example discussed in *Mie 1912b*, pp. 18–38, and taken up by Hilbert in *Hilbert 1915*, p. 407, (this Volume, p. 44 and note 54 above).

[100] See note 98 above.

[101] "reines" was corrected from "reinstes".

[102] The sentence "Mehr aber können wir auch nicht verlangen." was initially placed before the preceding sentence.

machen, nämlich das Elektron als punktförmig ansehen, so muss die Weltlinie streng in eine singuläre Linie[103] übergehen, so dass die Dichte längs der ganzen Linie unendlich und ausserhalb derselben streng $= 0$ ist. Nun stellte sich Mie die Frage: Ist bei unseren Differentialgleichungen ein solches Integral möglich? d. h. gibt es ein einsames, etwa dauernd ruhendes Elektron?[104] Die Frage ist vollständig zu bejahen. Da das Elektron ruht, ist

$$v_1 = v_2 = v_3 = 0$$

d. h.

$$r_1 = r_2 = r_3 = 0$$

also

$$q_1 = q_2 = q_3 = 0$$

ferner hängt q_4 von t nicht ab. Nun nehmen wir auch noch an, dass das Elektron Kugelgestalt hat. Wir können zwar streng genommen von einer Gestalt des Elektrons überhaupt nicht sprechen, da es ja den ganzen Raum erfüllt. Es hat „Kugelgestalt", soll daher nur heissen: x, y, z sollen in q_4 nur in der Verbindung $\sqrt{x^2+y^2+z^2} = r$ vorkommen. Ist es möglich, die Differentialgleichungen durch eine Funktion zu befriedigen, die nur von r abhängt? Um das zu untersuchen, gehen wir direkt auf das Hamiltonsche Prinzip zurück. Hier lernen wir das Hamiltonsche Prinzip als Weltgesetz schätzen, denn wir
95 müssen nicht die Lagrangeschen Gleichungen auf unser spezielles Pro|blem transformieren, sondern können vielmehr die Gleichungen selber direkt aus dem Hamiltonschen Prinzip aufs neue ablesen. Dieses nimmt jetzt die einfache Gestalt an

$$\delta \iiint \left\{ \left(q_{41}^2 + q_{42}^2 + q_{43}^2\right) - q_4^6 \right\} dx_1 dx_2 dx_3 = 0$$

oder

$$\delta \iiint \left\{ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 - \varphi^6 \right\} dx dy dz = 0,$$

wo $q_4 = \varphi(r)$ eingesetzt ist,
oder, da φ nur von r abhängt:

$$\begin{aligned}
0 &= \delta \iiint \left\{ \varphi'^2 \left[\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)^2 \right] - \varphi^6 \right\} r^2 dr \\
&= \delta \iiint \left\{ \varphi'^2 \left(\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} + \frac{z^2}{r^2} \right) - \varphi^6 \right\} r^2 dr \\
&= \delta \iiint \left\{ \varphi'^2 - \varphi^6 \right\} r^2 dr
\end{aligned}$$

[103] "streng in eine singuläre Linie" was corrected from "in eine streng singuläre Linie".

[104] See the references in note 97.

Dann lautet die Lagrangesche Gleichung

$$\frac{d}{dr}(\varphi' r^2) + 3r^2\varphi^5 = 0.$$

Dies ist die Differentialgleichung, der das einsame, ruhende Elektron genügen muss. Sie ist nicht linear, darf es auch gar nicht sein, damit eine Knotenstelle im Aether möglich ist.[105] Ihr allgemeines Integral kann man mit Hilfe von elliptischen Funktionen berechnen. Wir wollen hier nur eine einparametrige Schar von Lösungen angeben und zeigen, dass sie unser Problem erfüllt, nämlich

$$\varphi = \frac{\gamma}{\sqrt{r^2+\gamma^4}}$$

wo γ einen Parameter bezeichnet. φ genügt der Differentialgleichung, denn 96

$$\begin{aligned} 3\varphi^5 &= 3\gamma^5\left(r^2+\gamma^4\right)^{-\frac{5}{2}} \\ \frac{2}{r}\varphi' &= -2\gamma\left(r^2+\gamma^4\right)^{-\frac{3}{2}} \\ \varphi'' &= -\frac{\gamma\left(\gamma^4-2r^2\right)}{(r^2+\gamma^4)^{\frac{5}{2}}} \\ &\text{-- -- -- -- -- -- -- -- -- -- --} \\ 3\gamma^5 &- 2\gamma^5 - 2\gamma r^2 - \gamma^5 + 2\gamma r^2 = 0 \end{aligned}$$

Dies gibt in der Tat die Summe σ.

Andererseits ist φ im Endlichen überall endlich für $\gamma \neq 0$ d. h. die Dichte ist überall endlich. Für $\gamma = 0$ ist $\varphi = 0$, ausser fuer $r = 0$. Für grosses r ist

$$\varphi = \frac{\gamma}{\sqrt{r^2+\gamma^4}} = \frac{\gamma}{r}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\gamma^4}{r^2}}} = \frac{\gamma}{r}\left\{1 - \frac{1}{2}\frac{\gamma^4}{r^2} + \cdots\right\}$$

Für $\lim r = \infty$ ist $\varphi = \frac{\gamma}{r}$, geht also über in das gewöhnliche elektrostatische Potential. Es gibt aber auch, wie die vollständige Integration der Differentialgleichung zeigt, keine andere Lösung, die diese Bedingungen erfüllt, was besagt, dass das Elektron durch die Differentialgleichung festgelegt ist.

§ 29. Der Energiesatz in der Mie'schen Theorie

Dadurch, dass wir die Forderung: die Elektronen sollen sich nur als starre Körper bewegen, haben fallen lassen, haben wir den Vorteil, dass wir die ganze Energie, (also auch die, die den Kräften entspricht, die das Elektron zusammenhalten, d. h. bewirken, dass es sich nur als starrer Körper bewegen kann)

[105] The preceding half-sentence was interlineated.

gleichzeitig berücksichtigen können. Wir machen daher für die Totalenergie τ den Ansatz

$$\tau_{hk} = \sigma_{hk} + \rho_{hk}$$

97 wo σ_{hk} wie oben definiert ist, während ρ_{hk} ebenfalls einen symmetrischen 16er Tensor bezeichnet, der sich aus $f(q \cdot q) = (q \cdot q)^3$ wie folgt berechnet:

$$\rho_{hk} = \delta_{hk} f - \frac{\partial f}{\partial q_h} q_k$$

ρ_{hk} ist so gewählt, dass die Gesamtenergie die Form hat

$$\tau_{hk} = \delta_{hk} H + \sum_s \frac{\partial H}{\partial M_{hs}} M_{ks} + \frac{\partial H}{\partial q_h} q_k.$$

Dieser zweite Teil ρ der Energie konnte in der alten Theorie nicht berücksichtigt werden, da wir dort die Starrheit als Nebenbedingung hatten. τ_{hk} ist wieder ein symmetrischer 16er Tensor, und es gilt

$$\mathrm{Div}\, \tau = 0$$

Beweis: (skizziert)[106]

$$\sum_{kl} \frac{\partial H}{\partial q_{kl}} \frac{\partial^2 q_s}{\partial x_k \partial x_l} = 0 \; s = 1 \text{ weil } \frac{\partial H}{\partial q_{kl}} = -\frac{\partial H}{\partial q_{lk}} \tag{1}$$

$$\sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} = 0 \text{ weil } \mathrm{Div}\,\mathrm{Div} = 0 \tag{2}$$

$$\sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial H}{\partial q_{ks}} = \frac{\partial H}{\partial q_k} \text{ was aus } \delta \int H dw = 0 \text{ folgt} \tag{3}$$

Dann wird

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial x_s} &= \sum_{kl} \frac{\partial H}{\partial q_{kl}} \frac{\partial (q_{ks} - q_{sk})}{\partial x_l} + \sum_k \frac{\partial H}{\partial q_k} (q_{ks} - q_{sk}) + \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(q_s \frac{\partial H}{\partial q_k} \right) \\ &= \sum_{kl} \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \frac{\partial H}{\partial q_{kl}} (q_{ks} - q_{sk}) \right\} + \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(q_s \frac{\partial H}{\partial d q_k} \right)\end{aligned}$$

oder

$$\mathrm{Div} \left\{ \delta_{hk} H + \sum_s \frac{\partial H}{\partial M_{hs}} dM_{ks} + \frac{\partial H}{\partial q_h} q_k \right\} = 0 \qquad q.\,e.\,d.$$

98 Dadurch haben wir aber 4 neue Gleichungen gefunden, die den Lagrangeschen Gleichungen äquivalent sind. Es ist übrigens ein altes Prinzip, dass die aus dem Hamiltonschen Prinzip entspringenden Lagrangeschen Gleichungen sich stets auf die Form Div( ) = 0 bringen lassen, wenn H die x_i nicht explizit

[106] The rest of the page is written in pencil.

enthält.[107] Umgekehrt ist aber dann auch ersichtlich, dass es so etwas wie Energie geben muss. Der Energiebegriff kommt eben daher, dass man die Lagrangeschen Gleichungen in Divergenzform schreibt, und das, was unter der Divergenz steht, als Energie definiert.
Aus der Bedingung

$$\mathrm{Div}\, \tau = 0$$

wollen wir nun die Folgerung ziehen. Wir betrachten, um die Vorstellung möglichst einfach zu gestalten, die Bewegung eines einzelnen Elektrons und zeichnen die Weltlinie eines in ihm ausgezeichneten Punktes (z. B. des Mittelpunktes, wenn es einen solchen gibt). Alle anderen Punkte des Elektrons beschreiben dann ihrerseits wieder Weltlinien, die jedoch nicht äquidistant zu sein brauchen, da das Elektron ja kein starrer Körper ist. In der so entstehenden dreiparametrigen Schar von Weltlinien hat eine Weltlinie die Eigenschaft, dass die Dichte auf ihr ein Maximum wird, während sie auf den benachbarten sehr schnell gegen Null abfällt. τ sei die Eigenzeit dieses ausgezeichneten Punktes.
Wir begrenzen ein Weltstück W_{12}, in dem die Weltlinie des Elektrons verläuft, nach aussen durch einen Mantel von Weltlinien, die so gewählt sind, dass auf den äussersten Weltlinien mit genügender Annäherung die Dichte als identisch Null | angesehen werden kann. Um ein endliches Weltstück zu erhalten, 99
schneiden wir diese Weltröhre durch zwei zu der ausgezeichneten Weltlinie orthogonale ebene Räume[108] V_1 und V_2 und wenden hierauf den Gauss'schen Satz an, der in unser Vierersprache lautet:[109]

$$\int \mathrm{Div}\, v dW = \int \overline{v}_u dV$$

wo u die äussere Normale bezeichnet, und erhalten

$$\iiiint \mathrm{Div}\, \rho dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 = \int \mathrm{Div}\, \rho dW = \int (\rho)_N dG$$

wo G die ganze Begrenzung des Weltstückes bedeutet.
Auf der Mantelfläche verschwindet $(\rho)_N$ identisch, da nach unserer Voraussetzung $q = 0$ sein soll. Auf den beiden orthogonalen Räumen ist

$$(\rho)_N = \text{ bezw. } \begin{cases} + \sum_h \rho_{kh} \frac{dx_h}{d\tau} = \sum_h \rho_{kh} v_h \\ - \sum_h \rho_{kh} \frac{dx_h}{d\tau} = \sum_h \rho_{kh} v_h \end{cases}$$

Dieser Ausdruck ist aber auf den Weltlinien gleich Null, denn bei der Transformation auf Ruhe wird

$$v_1 = v_2 = v_3 = 0$$
$$v_4 = 1$$

[107] The preceding half-sentence was interlineated.
[108] Corrected by Hilbert from: "durch zwei zu den Weltlinien orthogonale Räume".
[109] From this point on, all formulas were written in a different hand.

Die Summe wird also 0 für v_1, v_2, v_3. Nimmt v den Wert $v_4 = 1$ an, so ist aber $\rho_{kh} = 0$, da es ja nicht von τ abhängt. Also haben wir rechts nur noch über V_1 und V_2 zu intergrieren. Wir erhalten

$$\int \operatorname{Div} \rho_{hk} dW = \int (\rho)_N dV = \int (\rho)_N d\overline{V}_2 - \int (\rho)_N d\overline{V}_1$$

100 Setzen wir hierin

$$\begin{aligned}(\rho)_N &= \sum_h \delta_{hk} f v_h - \frac{\partial f}{\partial q_h} q_k v_h \\ &= f v_k - 6 f v_k = -5 f v_k\end{aligned}$$

ein, (denn $q_k v_h = q_h v_k$)
so folgt:

$$\operatorname{Div} \rho_{hk} dW = -5 \left\{ \int f v_k d\overline{V}_2 - \int f v_k d\overline{V}_1 \right\}$$

Wegen

$$\operatorname{Div} \tau = 0$$

ist nun

$$\operatorname{Div} \rho = -\operatorname{Div} \sigma = rM$$

so dass wir haben

$$\int rM dW = \int (-5f) v_k d\overline{V}_2 - \int (-5f) v_k d\overline{V}_1$$

Wir haben also das Resultat:
$(-5f)v_k$ (wo v_k die Vierergeschwindigkeit bezeichnet) integriert über das Ruhvolumen ist eine Funktion von τ

$$p_k(\tau) = \int (-5f) v_k d\overline{V}$$

Bezeichnen wir noch den Mittelpunkt von V_1 mit τ_1, den von V_2 und τ_2, so lautet unsere Gleichung

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} rM dW = p(\tau_2) - p(\tau_1)$$

Das ist der Impulsenergiesatz. Er ist hier ganz streng und allgemein gültig.
101 Ist v wesentlich konstant, so können wir es vor | das Integral ziehen. Die Formel für p geht dann über in

$$p_k(\tau) = v_k \int (-5f) d\overline{V} = v_k \cdot m$$

$m = \int (-5f) d\overline{V}$ nennt man die elektromagnetische Ruhmasse. Unser Ausdruck geht dadurch in die Impulsgleichung der gewöhnlichen Mechanik über. Wir erhalten

$$(\tau_2 - \tau_1) rM = (m v_k)_2 - (m v_k)_1$$

oder, wenn wir durch $\tau_2 - \tau_1$ dividieren und zur Grenze $\tau_2 = \tau_1$ übergehen

$$rM = \frac{dmv}{d\tau}$$

also

$$\text{Impuls} = \frac{\text{Masse} \cdot \text{Geschwindigkeit}}{\text{Zeit}}$$

Für kleine Geschwindigkeiten $h \cdot m\tau = t$ bekommen wir

$$\text{Kraft} = \text{Masse} \cdot \text{Beschleunigung}.$$

§ 30. Vorzüge und Mängel der Mie'schen Theorie

Der Erfolg allein muss und wird zeigen, ob die Mie'sche Theorie richtig ist.[110] Ihre grossen Vorzüge gegenüber der Elektronentheorie wollen wir folgendermassen zusammenfassen.

1. Die Theorie liefert für die Gesetze des physikalischen Geschehens ein System von vier Lagrange'schen *Differentialgleichungen* für die vier unbekannten elektrodynamischen Potentiale, während die Elektronentheorie ein Gemisch von Funktional-, Differential- und Integralgleichungen liefert. In diesem Umstand, dass die Theorie Differentialgleichungen | liefert, kommt (bis auf eine unten zu 102
behandelnde, wesentliche Einschränkung) schon der Verzicht auf jedes Fernwirkungsgesetz in der Physik zum Ausdruck.

2. Da die vier elektrodynamischen Potentiale durch die Differentialgleichungen und durch Rand-(Anfangs-)Bedingungen eindeutig bestimmt sind, ist der Zustand der Welt in jedem künftigen Zeitmoment durch die Angabe der Potentialwerte für irgend einen vorhergehenden Zeitpunkt eindeutig festgelegt, m.a.W. *es gilt das Kausalitätsprinzip*.

3. Es ist in dieser Theorie eine prachtvolle Harmonie vorhanden.

Trotz dieser vielen Vorzüge können wir der Mie'schen Theorie keine Vollkommenheit zusprechen, haften ihr doch noch drei wesentliche Mängel an, die wir erst hervorheben und dann in einer abgeänderten Theorie beseitigen wollen.

1. Bei Mie hat die Lichtgeschwindigkeit noch eine ausgezeichnete, ihr nicht zukommende Bedeutung. In der Tat stellten wir im Vorhergehenden das Axiom an die Spitze: Die Naturgesetze sollen bei allen Transformationen, die die Form

$$x^2 + y^2 + z^2 - t^2$$

in sich überführen, invariant bleiben. Hierin ist aber die Lichtgeschwindigkeit konstant $= 1$ angenommen worden.

[110] See notes 97 and 98 above.

2. In dieser Theorie fehlt noch jede Andeutung von Gravitation, ohne welche wir die Physik nicht aufbauen können.[111]

3. Schliesslich müssen wir bemerken, dass wir implizite immer noch Fernwir-
103 kungsgesetze in unseren Ansätzen stecken | haben. In der Form

$$x^2 + y^2 + z^2 - t^2$$

haben nämlich auch x, y und z denselben, konstanten Koeffizienten $+1$, d. h. die Koordinatenachsen sind starre Gerade, wir haben die Axiome der Euklidischen Geometrie von vornherein zugrunde gelegt. Das dürfen wir aber nicht: denn die Geometrie ist nach unserer Ansicht eine Wissenschaft von Charakter der Physik und das Gauss'sche Experiment, zu prüfen, ob die Winkelsumme im Dreieck 180° beträgt, ein physikalisches Experiment wie jedes andere.

§ 31. Allgemeine Relativitätstheorie[112]

Bei der Aenderung und Erweiterung dieser Theorie der Materie dürfen wir also die Geometrie nicht mehr für endliche Entfernungen, sondern nurmehr im infinitesimalen benutzen. Dies gelingt uns auf Grund des *Einstein*'schen Gedankens von der allgemeinen Relativität des Geschehens. Die Mie'sche Theorie wird dann nur noch asymptotisch gelten, wenn alle Dimensionen unendlich klein sind, gerade so wie auf einer beliebigen Fläche die Gesetze der Ebene nur asymptotisch für sehr kleine Entfernungen gelten. Dann aber werden wir ein reines Differentialgesetz erhalten.

Der Weg, den wir einzuschlagen haben, ist nun ziemlich naheliegend. Wir müssen allgemeine krummlinige Koordinaten einführen, so wie man das schon auf im dreidimensionalen Raum liegenden Flächen zu tun gewohnt ist. Dann haben wir solche Beziehungen aufzusuchen, die von der Wahl des Koordina-
104 tensystems unabhängig sind. Dies sind dann allgemeine Invarianten. Aussagen aber, die bei beliebiger Koordinatentransformation nicht invariant bleiben, sind sinnlos; sie könnten ja durch eine Aenderung des Bezugssystems zerstört werden.

Wir werden also unserer Theorie wiederum eine quadratische Form mit vier Variablen zugrunde legen, die aber so verallgemeinert sein muss, dass nur im Grenzfall der infinitesimalen Entfernungen die neue Form auf die ursprüngliche Lorentz-Form reduziert werden kann. Ganz allgemein schreiben wir diese

[111] Mie discussed the problem of gravitation in the third of his trilogy on the foundations of a theory of matter, see *Mie 1913*, ch. 5, pp. 25–65.

[112] For this section, cf. *Hilbert 1915* (this Volume, pp. 28–46).

neue quadratische Form als[113]

$$\sum_{\mu=1,\nu=1}^{4} g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu, \quad g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$$

wobei die 10 Grössen $g_{\mu\nu}$ Funktionen von x_1 bis x_4 sein sollen. In der Tat sind dann für unendlich kleine Strecken die $g_{\mu\nu}$ Konstante und die Form lässt sich dann und nur dann nach bekannten Sätzen der Theorie quadratischer Formen auf die Gestalt[114]

$$\sum_{\nu=1}^{4} dx_\nu^2$$

bringen, so dass für diesen Grenzfall die oben entwickelte Theorie richtig bleibt.

Für endliche Entfernungen, d. h. wenn die $g_{\mu\nu}$ nicht als Konstante angesehen werden dürfen, lässt sich die Form wahrscheinlich als Summe von neun Quadraten schreiben und die Welt liesse sich als Gebilde im 9 dimensionalen Raum deuten.

Die Funktionen $g_{\mu\nu}$ nennt man die Gravitationspotentiale. Sie wurden von uns
eingeführt,[115] um den unter 3 er|wähnten Mangel (Vorwegnahme der Geome- 105
trie und Fernwirkungsgesetz) zu beseitigen. Gleichzeitig sind aber auch die Mängel 1 (ausgezeichnete Rolle der Lichtgeschwindigkeit) und 2 (Fehlen der Gravitation) behoben.

Darüber können wir nur einige Andeutungen machen.

An die Spitze stellen wir jetzt das Axiom: *Die physikalischen Gesetze sollen gegenüber allen beliebigen Transformationen invariant bleiben.*

Die alten Koordinaten seien x_1, x_2, x_3, x_4. Dann gehen wir zu neuen über durch

$$\begin{array}{l} x_1 = x_1\,(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_4 = x_4\,(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) \end{array}$$

Setzen wir voraus, dass die ungestrichenen Koordinaten nach den gestrichenen differentiiert werden können (die Differentiierbarkeit wird in der Physik im allgemeinen immer vorausgesetzt) und dass die Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(x_1 \cdots x_4)}{\partial(x'_1 \ldots x'_4)} \neq 0$$

[113] In Einstein's papers on the subject of the same time, coordinate differentials were written consistently with subscript indices. In the remainder of these course notes, Hilbert reverted to a notation with superscript indices, cf. the discussion below on p. 106 (i.e. p. 156 below).

[114] The following equation should have a minus sign for the term dx_4^2.

[115] In *Hilbert 1915*, p. 395, Hilbert explicitly noted that the gravitational potential $g_{\mu\nu}$ were introduced by Einstein, cf. p. 29 and note 10 above.

ist, so können wir auflösen:

$$\begin{array}{l} x_1' = x_1' \, (x_1, x_2, x_3, \, x_4) \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ x_4' = x_4' \, (x_1, x_2, x_3, x_4). \end{array}$$

Da die Weltgesetze invarianten Charakter haben sollen, so müssen wir nach Ausdrücken suchen, die bei beliebiger Transformation invariant bleiben. Dazu müssen wir uns die Grundbegriffe der Invariantentheorie aneignen:

106 Wir bezeichnen x^1 bis x^4 als *kontravariant*, | wenn

$$dx^\nu = \sum_{\alpha=1}^{4} \left(\frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\alpha'}} \right) dx^{\alpha'} \quad (\alpha = 1 \cdots 4)$$

gilt und nennen weiter einen Vektor, dessen Komponenten p^1 bis p^4 sich transformieren nach der Formel

$$p^\nu = \sum_\alpha \left(\frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\alpha'}} \right) p^{\alpha'}$$

einen *kontragredienten Vektor*. Die Auflösungen der p^ν nach den $p^{\nu\prime}$ ergibt

$$p^{\nu\prime} = \sum_\beta \left(\frac{\partial x^{\nu\prime}}{\partial x^\beta} \right) p^\beta$$

Die Kontravarianz und Kontragredienz wird durch *oben* angehängte Indizes (z. B. x^1; p^4) bezeichnet. *Unten* angehängt (z. B. q_ν) werden die Indizes beim *kogredienten* Vektor q_1 bis q_r, dessen Komponenten sich transformieren wie

$$q_{\nu'} = \sum_\alpha (\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\nu'}}) q^\alpha$$

Das einfachste Beispiel eines solchen ist der Gradient $\frac{\partial \Phi}{\partial x^1} \cdots \frac{\partial \Phi}{\partial x^4}$. Als erste Invariante können wir nun das skalare Produkt eines kogredienten in einen kontragredienten Vektor bilden. In der Tat bleibt

$$p \cdot q = \sum_\nu p^\nu q_\nu = \sum_\nu p^{\nu'} q_{\nu'} = S$$

eine invariante Grösse.

Die Tensoren lassen sich nun einteilen in kogrediente $t_{\mu\nu}$, kontragrediente $t^{\mu\nu}$

107 u. gemischte t_μ^ν | je nachdem

$$\sum_{\mu\nu} t_{\mu\nu} p^\mu h^v = y$$

$$\sum_{\mu\nu} t^{\mu\nu} p_\mu k_v = y$$

$$\sum_{\mu\nu} t_\mu^\nu p^\mu q_\nu = y$$

eine Invariante ist.

Das totale Differential dy einer Invariante y lässt sich auffassen als skalares Produkt des kogredienten Vektors (Gradienten)

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x^1}\cdots\frac{\partial y}{\partial x^4}\right)$$

in den kontragredienten Vektor

$$dx^1\cdots dx^4$$

denn es gilt

$$dy=\sum_{\nu}\frac{\partial y}{\partial x^\nu}dx^\nu$$

Die $g_{\mu\nu}$ sind nun die Komponenten eines kogredienten, symmetrischen 16er Tensors; denn es ist

$$\sum_{\mu\nu}g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = \text{ Invariante.}$$

Die Eigenschaften der Symmetrie und Schiefsymmetrie erweisen sich – wie die Rechnung zeigt, als invariante. Auch der spezielle gemischte Tensor δ^ν_μ wo $\delta^\nu_\mu=\begin{cases}0 & \text{für} \quad \mu\neq\nu\\ 1 & \text{für} \quad \mu=\nu\end{cases}$ ist, bleibt invariant. Diese drei Eigenschaften reduzieren die Zahl der Tensorkomponenten auf bez. 10, 6 und 4.

Wir gehen nun an die Modifikation der Mie’schen | Theorie. Wir hatten als 108
Grundgesetz der Physik

$$\delta\int H dw=0 \qquad dw=dx^1dx^2dx^3dx^4.$$

Hierbei muss H eine allgemeine Invariante sein, die freilich nun ausser den elektrodynamischen Potentialen auch noch die $g_{\mu\nu}$ und ihre Ableitungen zweiter Ordnung enthalten muss. Dass auch diese Ableitungen der $g_{\mu\nu}$ in der Weltfunktion H vorkommen müssen, lehrt die Invariantentheorie. Dort wird nämlich gezeigt, dass es eine Invariante der ersten Ableitungen der $g_{\mu\nu}$ nicht gibt. Wir geben also als logische Erweiterung der Mie’schen Theorie der Hamiltonschen Funktion H die Gestalt

$$H=K+Q-t^3$$

Hierin soll K nur die $g_{\mu\nu}$ und ihre Ableitungen enthalten, während Q und t^3 den früheren Ausdrücken Q und $(qq)^3$ entsprechen, aber nun sämtlich allgemeine Invarianten sein sollen. Dies ist wohl die einfachste Aenderung der Mie’schen Theorie. Wir wollen noch die merkwürdige Tatsache verzeichnen, dass es nur *eine einzige* Invariante gibt, die nur die zweiten Ableitungen der

$g_{\mu\nu}$ enthält. Dies ist die berühmte Riemannsche Invariante, die Krümmung der 4-dimensionalen Welt.[116]

Statt des kogredienten Tensors $g_{\mu\nu}$ führen wir den *kontragredienten Tensor* $g^{\mu\nu}$ ein, den wir erhalten, wenn wir die durch die Determinante $|g_{\mu\nu}|$ dividierten Unterdeterminanten der $g_{\mu\nu}$ nehmen. Dann wird also

$$K = \quad \text{Ausdruck in} \quad g^{\mu\nu}, g_k^{\mu\nu}, g_{kl}^{\mu\nu}$$

wo die unteren Indizes die bez. 1 und 2-malige Differentiation nach x^k bez.
109 x^k; x^l bezeichnen.

Eine weitere merkwürdige Tatsache ist nun, dass der 6er Vektor M der früheren Theorie eine allgemeine, nicht nur eine orthogonale Invariante ist. Wir wollen die elektrodynamischen Potentiale q als Komponenten eines *kogredienten* Vektors auffassen. Dann wird

$$M_{\mu\nu} = \mathrm{Rot}\, q$$

ein kogredienter 6er Vektor. Ferner wird

$$M^{\mu\nu} = \sum_{\mu\nu} g^{\mu m} g^{\nu n} M_{\mu\nu}$$

ein kontragedienter 6er Vektor (der Vektor M^* der alten Theorie). Die sinngemäss erweiterte Definition für Q und t ist

$$Q = \sum_{k,l,m,n} M_{mn} M_{lk} g^{mk} g^{nl}$$

$$t = \sum_{kl} q_k q_l g^{kl}$$

Da $dw = dx^1 \dots dx^4$ keine Invariante ist, wohl aber $\sqrt{g}dw$, wobei $g = |g_{\mu\nu}|$ ist, so erhalten wir die Gleichungen des physikalischen Geschehens, wenn wir

$$\int H\sqrt{g}dw$$

zu einem Minimum machen, und zwar ergeben sich die 10 Lagrangeschen Differentialgleichungen der Gravitation durch Variation nach $g_{\mu\nu}$ zu

$$\sum_{kl} \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^l} \frac{\partial \sqrt{g}H}{\partial g_{kl}^{\mu\nu}} - \sum_k \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\partial \sqrt{g}H}{\partial g_k^{\mu\nu}} + \frac{\partial \sqrt{g}H}{\partial g^{\mu\nu}} = 0$$

und die 4 Differentialgleichungen der Elektrodynamik (Maxwellsche Gleichungen) zu

$$\sum_k \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\partial \sqrt{g}H}{\partial q_{hk}} - \frac{\partial \sqrt{g}H}{\partial q_h} = 0$$

110 Dies sind 14 Gleichungen für die 14 unbekannten Funktionen $g^{\mu\nu}$ und q_h $(\mu, \nu, h = 1 \dots 4)$. Das Kausalitätsprinzip kann erfüllt sein, oder nicht (Die Theorie hat diesen Punkt noch nicht aufgeklärt). Jedenfalls lässt sich auf die Gültigkeit dieses Prinzips nicht wie im Falle der Mie'schen Theorie durch einfache Ueberlegungen schliessen. Von diesen 14 Gleichungen sind nämlich 4 (z. B. die 4 Maxwellschen) eine Folge der 10 übrigen (z. B. der Gravitationsgleichungen). Es gilt nämlich der merkwürdige Satz, dass die Zahl der aus dem Hamiltonschen Prinzip fliessenden Gleichungen immer mit der Zahl der unbekannten Funktionen übereinstimmt, ausser in dem hier eintretenden Fall, dass unter dem Integral eine allgemeine[117] Invariante steht.[118]

Zum Schluss machen wir noch ein paar Bemerkungen über die Energie. Sei

$$L = Q - t^3$$

Lassen wir nun das Glied K in H bei Seite, so haben wir als Energietensor

$$-L\delta_k^l + \sum_t \frac{\partial L}{\partial M_{lt}} M_{kt} + \frac{\partial L}{\partial q_l} q_k$$

Die Gravitationsgleichungen heissen in diesem Fall

$$\frac{\partial \sqrt{g} L}{\partial g^{tk}} = 0.$$

Führen wir die Differentiation aus, so erhalten wir obigen Ausdruck, der genau die Form der Energie in der Mie'schen Theorie hat. Wir sagen also:

Lässt man K unberücksichtigt, so liefert die | Hamiltonsche Funktion, nach 111
g^{tk} differentiiert, den Energietensor der Mie'schen Theorie.

Diese Theorie muss nun fortentwickelt werden. Wir haben wieder zunächst die einfachsten Lösungen dieser Gleichungen aufzustellen. Das Mie'sche ruhende Elektron ist eine solche, dazu muss man nur

$$g^{\mu\nu} \quad = \quad \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \quad \text{für} \quad \begin{matrix} \mu \neq \nu \\ \mu = \nu \end{matrix} \quad \text{setzen.}$$

Dann erhalten wir die ursprünglichen Gleichungen wieder. Bisher wurde nur das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach dieser Theorie berechnet und zwar zuerst genähert von Einstein und dann streng von dem zu früh verstorbenen Schwarzschild.[119]

---

[116]This uniqueness theorem for the Riemann curvature scalar holds only if one also postulates that the invariant contains second derivatives of the metric only linearly. The theorem was first proven by Hermann Vermeil, at the instigation of Felix Klein, in *Vermeil 1917*. See *Rowe 2001*, pp. 416–418, and *Sauer 2005*, pp. 587–588, for a historical discussion.

[117]"allgemeine" was interlineated.

[118]For further discussion of this point, see *Hilbert 1915*, p. 397, (this Volume, p. 30 and note 19) and the discussion in the Introduction to this Volume, sec. 3.

[119]See *Einstein 1915c*, *Schwarzschild 1916a*, and *Schwarzschild 1916b*. Karl Schwarzschild (1873–1916) was professor and director of the observatory in Göttingen from

1901–1909 before being appointed director of the astrophysical observatory in Potsdam. *Schwarzschild 1916a* was presented to the Prussian Academy on 16 January 1916, and issued on 10 February; *Schwarzschild 1916b* was presented on 24 February, and issued on 4 April. Schwarzschild died on 11 May 1916, at the age of 43, of pemphigus, a metabolic disease of the skin, that he contracted while serving at the Russian front (see *Blumenthal 1918*).

Description of the Text

Collection: Georg-August-Universität Göttingen, Mathematisches Institut, Inv. Nr. 16206 i.

Size: Cover size 22.8 cm ×28.3 cm; page size approx. 22.2 cm ×27.6 cm.

Cover Annotations: On the spine, in gold lettering, is the notation, 'Hilbert, // Grundl. // der // Physik // 1916'.

Composition: 6 signatures of 8 to 26 double pages each; in all 116 sheets, inclusive of front- and end-papers.

Pagination: The title page is not numbered. The following pages are continuously numbered from 1 to 111. The table of contents follows page 111. Its first page is not paginated, its second page is paginated with Roman numeral II.

Original Title: On the title page: 'DIE GRUNDLAGEN DER PHYSIK // Vorlesung // von // D. HILBERT // Göttingen // Sommersemester 1916'.

Text: Typewritten text with equations and occasional additions and emendations in ink. The handwritten material on pp. 1-98 was entered by the person who arranged the script, in all probability R. Bär, since it is the same handwriting as for the handwritten material in *Hilbert 1916/17**, cf. its title page. Handwritten equations and corrections on pp. 98–111 are in ink in a different hand (possibly written by Erich Hecke). Throughout the typescript additional corrections were occasionally made in pencil, some are in Hilbert's hand. If a correction was not made in ink in the hand of the composer of the manuscript, and, in particular, if the handwriting is obviously Hilbert's, these features are pointed out in the annotation.

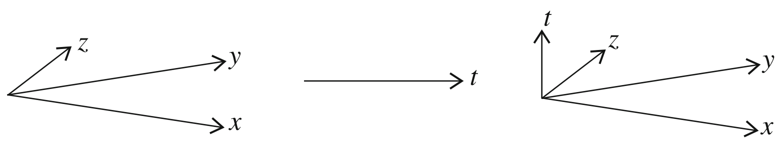
‘Die Grundlagen der Physik II’

Inhaltsverzeichnis

Erster Abschnitt

§ 1. Einleitung

Alle physikalischen Vorgänge spielen sich in Raum und Zeit ab, daher müssen wir auch Raum und Zeit als die fundamentalsten Begriffe der Physik ansprechen. Schon seit langem haben die Philosophen ihre Zusammengehörigkeit erkannt, aber erst der modernsten Physik blieb die Erkenntnis vorbehalten, dass Raum ohne Zeit und Zeit ohne Raum gar nicht in Wirklichkeit vorhanden[1] ist. Dies findet darin seinen Ausdruck, dass wir zu den drei Raumdimensionen die eine Zeitdimension addieren und nun von einer vierdimensionalen Mannigfaltigkeit, der Welt des physikalischen Geschehens, sprechen.



In der Mathematik gibt es eine Lehre der vier, ja allgemein der n dimensionalen Mannigfaltigkeiten und zwar die Geometrie des n dimensionalen Raumes. Früher übernahm die Physik die Lehren der Geometrie ohne weiteres. Dies war berechtigt, solange nicht nur die groben, sondern auch die feinsten physikalischen Tatsachen die Lehren der Geometrie bestätigten. Dies war noch der Fall, als Gauss die Winkelsumme im Dreieck experimentell mass und fand, dass sie zwei Rechte beträgt. Dies gilt aber nicht mehr von der neuesten Physik. *Die heutige Physik muss vielmehr die Geometrie mit in den Bereich ihrer Untersuchungen ziehen.* Das ist logisch und natur|gemäss: jede Wissenschaft 2
wächst wie ein Baum, nicht nur die Zweige greifen weiter aus, sondern auch die Wurzeln dringen tiefer.

Vor einigen Jahrzehnten konnte man in der Mathematik eine analoge Entwicklung verfolgen; einen Satz hielt man damals nach Weierstrass dann für bewiesen, wenn er auf Beziehungen zwischen ganzen Zahlen zurückführbar war, deren Gesetze man als gegeben hinnahm. Sich mit diesen zu beschäftigen, wurde abgelehnt und den Philosophen überlassen. Kronecker sagte einmal: „Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott geschaffen“.[2] Diese waren damals noch ein noli me tangere der Mathematik. Das ging so fort, bis die logischen Fundamente dieser Wissenschaft selbst zu wanken begannnen. Nun wurden die ganzen Zahlen eines der fruchtbarsten Arbeitsfelder der Mathematik und

[1]“in Wirklichkeit vorhanden” was corrected by Hilbert in pencil from “denkbar”.

[2]In his obituary of Leopold Kronecker (1823–1891), Heinrich Weber wrote: “Manche von Ihnen werden sich des Ausspruchs erinnern, den er in einem Vortrag bei der Berliner Naturforscher-Versammlung im Jahre 1886 that: „Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk“.” *Weber 1893*, p. 19.

speziell der Mengenlehre (Dedekind). Der Mathematiker wurde also gezwungen, Philosoph zu werden, weil er sonst aufhörte, Mathematiker zu sein.

§ 2. Geometrie und Physik; Axiome

So ist es auch jetzt wieder: *der Physiker muss Geometer werden*, weil er sonst Gefahr läuft, aufzuhören, Physiker zu sein und umgekehrt. Die Trennung der Wissenschaften in Fächer und Fakultäten ist eben etwas Anthropologisches, und der Wirklichkeit Fremdes; denn eine Naturerscheinung frägt nicht danach, ob sie es mit einem Physiker oder mit einem Mathematiker zu tun hat. Aus diesem Grunde dürfen wir die Axiome der Geometrie nicht übernehmen. Darin könnten ja Erfahrungen zum Ausdruck kommen, die den ferneren Experimen-
3 ten widersprä|chen. Wenn wir die Elemente der Geometrie danach durchsehen, was wir von ihnen brauchen können, so werden wir zwar prinzipiell vier Dimensionen nötig haben; wir beschränken uns zuerst aber der Einfachheit halber und auch aus pädagogischen Gründen auf nur zwei Dimensionen, *wir haben uns also mit der zweidimensionalen Geometrie zu befassen.*

Diese lässt sich sehr anschaulich auf der Fläche im dreidimensionalen Raume deuten. Daher müssen wir als mathematisch wichtigstes Hilfsmittel die Prinzipien der

I. Flächentheorie

studieren. Man lese das Buch: Hilbert, Grundlagen der Geometrie, 4. Auflage[3] und man wird gewahr werden, wie mannigfaltig die Geometrie begründet werden kann. Im Anhang 4 wird dort die Stetigkeit zur Begründung der Geometrie an die Spitze gestellt.[4] Um die Bedürfnisse und Interessen der Physik wahrzunehmen, werden auch wir, soweit es irgend wünschenswert ist, die *Stetigkeit und Differentiierbarkeit* voraussetzen. Die Atomistik und Quantentheorie in der Physik wird uns davon nicht abschrecken, die *Stetigkeitsaxiome* speziell von Raum und Zeit vorauszusetzen, dies sind fundamentale Forderungen der Physik. Wir akzeptieren auch die in diesem Buche gegebene *Definition der Ebene*: diese ist gegeben als Mannigfaltigkeit von Dingen (Punkten), die wir durch Zahlenpaare charakterisieren (zweidimensionale Zahlenmannigfaltigkeit). Ebenso übernehmen wir die *Definition der Deckung*[5]: die Deckung[6] ist eine Decktransformation[7] dieser Zahlenpaare in sich.

$$x' = f(x, y), \qquad y' = h(x, y).$$

4 Diese Gleichungen seien auflösbar

[3] *Hilbert 1913c*.

[4] *Hilbert 1913c*, Anhang 4.

[5] "Deckung" was corrected by Hilbert in pencil from "Bewegung".

[6] "Deckung" was corrected by Hilbert in pencil from "Bewegung".

[7] "Decktransformation" was corrected by Hilbert in pencil from "Transformation".

$$x = f'(x'y'), \qquad y = h'(x'y'),$$

d. h. es muss

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0$$

sein oder

$$\frac{\partial(x'y')}{\partial(x\ y)} = \frac{1}{\frac{\partial(x\ y)}{\partial(x'y')}} \neq 0.$$

Gehen wir die in dem erwähnten Buch gegebene Begründung der Geometrie weiter durch, so stossen wir auf das *erste Axiom*: die Decktransformationen[8] bilden eine Gruppe, d. h. zwei Transformationen nacheinander angewendet, geben wieder eine Transformation. Dies läuft bei den anderen Begründungen der Geometrie auf die bekannten Kongruenzsätze hinaus, das Axiom ist also ein sehr einschneidendes. Für uns ist es sogar eine viel zu tief eingreifende Massnahme, wir behaupten vielmehr, dieses Axiom (d.h. die Kongruenzsätze) gelten in der Wirklichkeit nicht! Hätten wir Kongruenzsätze, so würden wir mit einem Vorurteil an die Natur herantreten. Wir lehnen sie also ab, d. h. die sogenannten Euklidischen oder Nichteuklidischen Geometrien sind für unsere Zwecke nicht allgemein genug. *Diese Kongruenzsätze sind nämlich etwas ganz Unphysikalisches*. Sie sind Fernbeziehungen, setzen also Fernwirkungsgesetze voraus; denn sie lassen sich nur durch starre Gebilde realisieren, während wir *Stetigkeit* und *Differentialbeziehungen* haben wollen. Wir können nicht annehmen, dass es in der Natur starre x und y Achsen gäbe. Denken wir uns die zweidimensionale Mannigfaltigkeit als Fläche im dreidimensionalen Raum,
so gelten | die Kongruenzsätze nur dann, wenn die Fläche überall dasselbe 5
konstante Krümmungsmass hat. Hieraus sieht man wohl, wie einschneidend die durch das oben erwähnte Axiom gestellte Forderung für die Physik wäre.

§ 3. Axiom von der Existenz einer Länge

Was für Axiome werden wir nun brauchen? Auf unendlich viele Weisen können wir in unserer zweidimenisonalen Mannigfaltigkeit eine eindimensionale konstruieren. Diese nennen wir *Kurve*, gegeben durch

$$x = x(p), \qquad y = y(p)$$

(x und y sind hier also auch als Symbole für Funktionen gebraucht). Jeder Kurve und zwar zwei beliebigen Punkten auf der Kurve ordnen wir nun den Begriff der

Kurvenlänge

[8] “Decktransformationen” was corrected by Hilbert in pencil from “Bewegungen”.

zu, definiert durch

$$
\begin{aligned}
s &= \int_{p_1}^{p_2} \sqrt{g_{11}\left(\frac{dx_1}{dp}\right)^2 + 2g_{12}\frac{dx_1}{dp}\frac{dx_2}{dp} + g_{22}\left(\frac{dx_2}{dp}\right)^2}\, dp \\
&= \int_{p_1}^{p_2} \sqrt{\sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu}\frac{dx_\mu}{dp}\frac{dx_\nu}{dp}}\, dp \\
&= \int_1^2 \sqrt{g_{11}dx_1^2 + 2g_{12}dx_1 dx_2 + g_{22}dx_2^2} \\
&= \int_1^2 \sqrt{\sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu}; \qquad \begin{matrix} g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} \\ \mu, \nu = 1, 2 \end{matrix}
\end{aligned} \tag{1}
$$

wobei $g_{\mu\nu}$ gegebene Funktionen von x und y sind. Dabei ist statt x x_1 und statt y x_2 geschrieben. Auf der zweidimensionalen Mannigfaltigkeit liegen also drei Funktionen g_{11}, g_{12}, g_{22} ausgebreitet. In der Euklidischen Geometrie ist

$$
s = \int_{p_1}^{p_2} \sqrt{\left(\frac{dx_1}{dp}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dp}\right)^2}\, dp,
$$

d. h.

$$
g_{11} = 1, \qquad g_{12} = 0, \qquad g_{22} = 1.
$$

Jedem Punkt der Mannigfaltigkeit kommen also drei Koeffizienten einer quadratischen, homogenen Differentialform zu.[9] Diese Koeffizienten sind aber
6 noch so allgemein, dass | weder die Euklidische noch die Nichteuklidische Geometrie gelten kann. Wir setzen also das

Axiom von der Existenz einer Länge

voraus: es soll drei Funktionen g_{11}, g_{12}, g_{22} geben, die die *Länge* einer eindimensionalen Mannigfaltigkeit durch das Integral (1) definieren. Um in einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit Geometrie treiben zu können, müssen diese drei Funktionen $g_{\mu\nu}$ gegeben sein. Eine spezielle Form des Linienelements ist dann notwendig, dass die Kongruenzsätze gelten, z. B. $g_{11} = 1$, $g_{12} = 0$, $g_{22} = 1$. Das Quadrat des Linienelementes

$$
ds^2 = g_{11}dx_1^2 + 2g_{12}dx_1dx_2 + g_{22}dx_2^2
$$

ist[10] eine homogene, quadratische Differentialform.

Wir fragen uns: *sind diese $g_{\mu\nu}$ völlig willkürlich?* Sie sind natürlich stetig differentiierbar; weiter stellen wir vor der Hand die Forderung, die wir später in der Physik fallen lassen müssen: jede Kurve hat eine *reelle* Länge. Dazu muss die quadratische Form *positiv definit* sein, sie darf also nicht verschwinden,

[9] Added by Hilbert in pencil: "die sich also zuerst als die einfachsten u. wichtigsten Potentiale, P, einstellen".

[10] "ist" was corrected from "ist dann".

d. h. es darf keine Kurve von der Länge Null auf der Fläche vorkommen. Dies sind lauter Einschränkungen für unsere $g_{\mu\nu}$. Um diesen Forderungen gerecht zu werden, ist notwendig und hinreichend, daß[11]

$$g_{11}g_{22} - g_{12}^2 > 0, \qquad g_{11} > 0 \qquad \text{wird.}$$

Dies sind aber nur Ungleichungen. Die $g_{\mu\nu}$ sind also im wesentlichen doch noch willkürlich, während die Kongruenzsätze den $g_{\mu\nu}$ sehr einschneidende Beschränkungen auferlegten.

§ 4. Zusammenhang mit der Flächentheorie

Nun untersuchen wir den *Zusammenhang mit der Flä|chentheorie*: 7
Gegeben sei eine Fläche im dreidimensionalen Raum durch

$$x = x(x_1, x_2), \qquad y = y(x_1, x_2), \qquad z = z(x_1, x_2).$$

Durch Elimination erhalten wir die Flächengleichung auch in der Form $f(x, y, z) = 0$. Die Länge der Kurve auf dieser Fläche wird

$$\int \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

wobei

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial x}{\partial x_2} dx_2, \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} dx_2, \\ dz &= \frac{\partial z}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2} dx_2, \end{aligned}$$

$$ds^2 = g_{11} dx_1^2 + 2 g_{12} dx_1 dx_2 + g_{22} dx_2^2.$$

Hierin bedeutet

$$\begin{aligned} g_{11} &= \left(\frac{\partial x}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right)^2, \\ g_{12} &= \frac{\partial x}{\partial x_1}\frac{\partial x}{\partial x_2} + \frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{\partial y}{\partial x_2} + \frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{\partial z}{\partial x_2}, \\ g_{22} &= \left(\frac{\partial x}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right)^2. \end{aligned}$$

Auf der Fläche ist die von uns definierte Länge die Kurvenlänge im Sinne der Euklidischen Geometrie. Auf dieser Fläche sind dann auch die obigen

[11] Added by Hilbert in the page margin with pencil: "Zudem werden wir später untersuchen, was es bedeutet, wenn diese Ungl. nicht statthaben".

Ungleichungen erfüllt und es gibt keine Nulllinien. Ist die Fläche z. B. eine *Kugel*, so wird

$$\begin{aligned} x &= \cos\vartheta, & dx &= -\sin\vartheta d\vartheta, \\ y &= \sin\vartheta\cos\varphi, & dy &= \cos\vartheta\cos\varphi d\vartheta - \sin\vartheta\sin\varphi d\varphi, \\ z &= \sin\vartheta\sin\varphi, & dz &= \cos\vartheta\sin\varphi d\vartheta + \sin\vartheta\cos\varphi d\varphi. \end{aligned}$$

Das Quadrat des Linienelementes wird

$$ds^2 = d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2.$$

Dies ist die Riemann-Helmholtzsche (elliptische) Geomeotrie, in welcher die Kongruenzsätze natürlich gelten. Es ist

$$g_{11} = 1, \qquad g_{12} = 0, \qquad g_{22} = \sin^2\vartheta.$$

8 § 5. Die wichtigsten Begriffe der Invariantentheorie

Ein weiteres wichtiges technisches Hilfsmittel ist die Transformations- oder

II. Invariantentheorie.

Es sei

$$x_1' = f_1(x_1, x_2), \qquad x_2' = f_2(x_1, x_2)$$

oder

$$x_1 = f_1'(x_1', x_2'), \qquad x_2 = f_2'(x_1', x_2').$$

Die Transformation spielt eine fundamentale Rolle in der Physik; denn *die Koordinaten sind nichts der Natur Eigentümliches, sie sind vielmehr die Namen, die wir den Dingen geben.*[12] Daher werden wir uns davon frei machen müssen. *Die Naturgesetze müssen eben ungeändert bleiben, wenn wir diese Benennungen der Dinge ändern.* Durch diese Ueberlegung werden wir auf das Hilfsmittel der Transformationen geführt. Wir fragen: wie drückt sich die Kurvenlänge in dem neuen System aus? Wir transformieren

$$\begin{aligned} ds^2 = g_{11}&\left(\frac{\partial x_1}{\partial x_1'}dx_1' + \frac{\partial x_1}{\partial x_2'}dx_2'\right)^2 \\ &+ 2g_{12}\left(\frac{\partial x_1}{\partial x_1'}dx_1' + \frac{\partial x_1}{\partial x_2'}dx_2'\right)\left(\frac{\partial x_2}{\partial x_1'}dx_1' + \frac{\partial x_2}{\partial x_2'}dx_2'\right) \\ &+ g_{22}\left(\frac{\partial x_2}{\partial x_1'}dx_1' + \frac{\partial x_2}{\partial x_2'}dx_2'\right)^2 \\ = \quad & g_{11}'dx_1'^2 + 2g_{12}'dx_1'dx_2' + g_{22}'dx_2'^2, \end{aligned}$$

[12] Added by Hilbert in the left margin in pencil: "Vielmehr Prinzip der Objektivität".

wobei also

$$\begin{aligned}
g'_{11} &= g_{11}\left(\frac{\partial x_1}{\partial x'_1}\right)^2 + 2g_{12}\frac{\partial x_1}{\partial x'_1}\frac{\partial x_2}{\partial x'_1} + g_{22}\left(\frac{\partial x_2}{\partial x'_1}\right)^2,\\
g'_{12} &= g_{11}\frac{\partial x_1}{\partial x'_1}\frac{\partial x_1}{\partial x'_2} + g_{12}\left(\frac{\partial x_1}{\partial x'_1}\frac{\partial x_2}{\partial x'_2} + \frac{\partial x_1}{\partial x'_2}\frac{\partial x_2}{\partial x'_1}\right) + g_{22}\frac{\partial x_2}{\partial x'_1}\frac{\partial x_2}{\partial x'_2},\\
g'_{22} &= g_{11}\left(\frac{\partial x_1}{\partial x'_2}\right)^2 + 2g_{12}\frac{\partial x_1}{\partial x'_2}\frac{\partial x_2}{\partial x'_2} + g_{22}\left(\frac{\partial x_2}{\partial x'_2}\right)^2.
\end{aligned}$$

Wir erhalten dann

$$s = \int_1^2 \sqrt{g'_{11}dx_1'^2 + 2g'_{12}dx'_1dx'_2 + g_{22}dx_2'^2}.\langle 13\rangle$$

Wir können auch schreiben

$$g'_{\mu\nu} = \sum_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu}.$$

Weiter setzen wir

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12}\\ g_{21} & g_{22}\end{vmatrix}, \qquad g^{11} = \frac{g_{22}}{g}, \quad g^{12} = -\frac{g_{21}}{g}, \quad g^{22} = \frac{g_{11}}{g}.$$

Diese Ausdrücke werden wir später nötig haben. 9

Die Koeffizienten $g'_{\mu\nu}$ der transformierten quadratischen Form haben wir so definiert, dass

$$\sum_{\mu\nu} g'_{\mu\nu}dx'_\mu dx'_\nu = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu}dx_\mu dx_\nu$$

wird. Wir sagen daher, die quadratische Differentialform $\sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu}dx_\mu dx_\nu$ ist eine *Kovariante* der Transformation. Das Koeffizientensystem $g_{\mu\nu}$ derselben nennt man deswegen einen *kovarianten Tensor*.[14] Die Transformationsformeln eines solchen sind also

$$g'_{\mu\nu} = \sum_{\alpha\beta}\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu}g_{\alpha\beta}.$$

Die eben definierten Grössen $g^{\mu\nu}$, die sich gemäss[15]

$$g'^{\mu\nu} = \sum_{\alpha\beta}\frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\mu}\frac{\partial x'_\beta}{\partial x_\nu}g^{\alpha\beta}$$

transformieren, nennen wir einen *kontravarianten Tensor*. Die Kovarianz und Kontravarianz deuten wir dadurch an, dass wir die Indizes unten bezw. oben

[13]"g_{22}" should be "g'_{22}".

[14]Added by Hilbert in the left margin in pencil: "Das erste Potential ist also ein Tensor, nicht ein Skalar! $A'_{\mu\nu} = \sum \frac{\partial x_\alpha}{\partial \ldots}\frac{\partial x_\beta}{\ldots}A_{\mu\nu}$".

[15]In the left margin in pencil: "$A^{\mu\nu\prime}$".

an den Koeffizeienten anbringen.[16] Wir wollen noch den *gemischten Tensor* g^μ_ν defineren, dessen Koeffizienten sich nach der Formel[17]

$$g'^\mu_\nu = \sum_{\alpha\beta} \frac{\partial x'_\mu}{\partial x'_\alpha} \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu} g^\alpha_\beta$$

transformieren. Durch unsere Betrachtungen wurden wir gleich auf eine *quadratische* kovariante Differentialform geführt. Wenden wir uns nun dem einfacheren Fall der *linearen* Kovarianten zu, so gelangen wir zum Begriff des *kovarianten Vektors*. Die lineare Differentialform sei $\sum_\mu q_\mu dx_\mu$, wobei die q_μ Funktionen von x_1 und x_2 sind. Unterwerfen wir diese Form der Transformation

$$x_1 = x_1(x'_1 x'_2), \qquad x_2 = x_2(x'_1 x'_2),$$

so erhalten wir

$$\sum_\mu q_\mu dx_\mu = \sum_{\mu\nu} q_\mu \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\nu} dx'_\nu = \sum_\mu q'_\mu dx'_\mu,$$

wenn

$$q'_\mu = \sum_\alpha \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu} q_\alpha$$

gesetzt wird. Transformieren die Koeffizienten der linearen Differentialform sich so, dann ist also $\sum_\mu q_\mu dx_\mu$ eine Kovariante und das Koeffizientensystem q_μ wird deswegen ein kovarianter Vektor genannt. Das einfachste Beispiel eines solchen ist der *Gradient* $\frac{\partial \Phi}{\partial x_\mu}$ der skalaren Funktion $\Phi(x_1, x_2)$. Analog der obigen Betrachtung nennen wir einen Vektor q^μ dann einen *kontravarianten Vektor*, wenn er sich transformiert gemäss

$$q'^\mu = \sum_\alpha \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\alpha} q^\alpha.$$

Bemerkung: Für die Differentiale der Variabeln gelten die Transformationsformeln

$$dx'_\nu = \sum_\alpha \frac{\partial x'_\nu}{\partial x_\alpha} dx_\alpha,$$

d. h. *die Differentiale sind die Komponenten eines kontravarianten Vektors*[18] und wir sollten sie folgerichtig mit dx^ν bezeichnen. Das totale Differential $d\Phi$ der skalaren Funktion Φ

$$d\Phi = \sum_\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial x_\alpha} dx_\alpha$$

[16] However, Hilbert denotes coordinate differentials with subscript indices, see the following note.

[17] In the left margin in pencil: "A'^μ_ν". Subscript indices for coordinate differentials were used by Einstein, see, e.g. *Einstein 1916a*.

[18] In the left margin Hilbert wrote with pencil, and then deleted it: "man müsste also die Indices oben anbringen!"

kann also aufgefasst werden als skalares Produkt des kovarianten Vektors $\frac{\partial\Phi}{\partial x_\alpha}$ (Gradient) in den kontravarianten Vektor dx_α. Dies Produkt ist eine Kovariante. In der projektiven Geometrie entsprechen den Kovarianten und Kontravarianten die bezw. Punkt = und Linien = (Ebenen) Koordinaten.

§ 6. Geodätische Linien

Nun kommen wir zu einer neuen Fragestellung. Wir haben die Elemente der Geometrie daraufhin durchzusehen, was | wir von ihnen brauchen können. Da 11
suchen wir nun zu einem Begriff zu gelangen, der demjenigen der geraden Linie in der ebenen Geometrie entspricht. Wir hatten gefordert, dass jedem beliebigen Kurvenstück unserer Mannigfaltigkeit eine Länge entsprechen soll. Die Gerade ist die kürzeste Linie, die zwei gegebene Punkte verbindet, *also fragen wir jetzt nach der kürzesten Verbindungslinie zweier Punkte*. Dies ist ein Problem der

III. Variationsrechnung,

des dritten wichtigen mathematischen Hilfsmittels, das wir benötigen.

Während die Differentialrechnung nur Zahlen variiert und daher die Hilfsmittel liefert, um einen Funktionswert gegenüber den benachbarten Werten zu einem Minimum zu machen, variiert die Variationsrechnung die Funktionen selber. Diese Disziplin ermöglicht es also, Funktionen von Funktionen zum Minimum zu machen, indem die Funktionen, die als Argument stehen, variiert werden. Die kürzeste Verbindungslinie zweier Punkte zu finden, ist also eine solche Aufgabe. In der Tat ist die Länge einer Kurve eine Funktion von zwei Funktionen $x_i(p)$, wir haben nämlich

$$s = \int_{p_1}^{p_2} \sqrt{g_{11}\left(\frac{dx_1}{dp}\right)^2 + 2g_{12}\frac{dx_1}{dp}\frac{dx_2}{dp} + g_{22}\left(\frac{dx_2}{dp}\right)^2}\, dp$$

zum Minimum zu machen. Unter dem Integral kommen die zwei unbekannten Funktionen $x_1(p)$ und $x_2(p)$ vor. Wir erhalten entsprechend auch zwei Gleichungen zu deren Bestimmung. Wir schreiben abgekürzt

$$s = \int_{p_1}^{p_2} \sqrt{\varphi} dp,$$

wobei $\varphi = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu}\dot{x}_\mu \dot{x}_\nu$, $\dot{x}_\mu = \frac{dx_\mu}{dp}$ bedeutet. Unser Problem ist 12

$$\int_{p_1}^{p_2} \sqrt{\varphi} dp = \text{ Minimum}$$

zu machen. Gesucht sind $x_1(p)$ und $x_2(p)$. Dies ist ein Spezialfall des allgemeineren Problems

$$\int_{p_1}^{p_2} F(x_1 x_2 \dot{x}_1 \dot{x}_2 p) dp = \text{ Minimum}$$

zu machen. Die Variationsrechnung lehrt, dass die beiden *Lagrangeschen Gleichungen* erfüllt sein müssen:

$$\frac{d}{dp}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_1} - \frac{\partial F}{\partial x_1} = 0, \qquad \frac{d}{dp}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_2} - \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0.$$

In unserem Falle wird[19]

$$\frac{d}{dp}\frac{\partial\sqrt{\varphi}}{\partial \dot{x}_\kappa} - \frac{\partial\sqrt{\varphi}}{\partial x_\kappa} = 0, \qquad \kappa = 1, 2.$$

Hierin ist

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\sqrt{\varphi}}{\partial \dot{x}_\kappa} &= \varphi^{-\frac{1}{2}} \sum_\nu g_{\kappa\nu}\dot{x}_\nu, \\
\frac{d}{dp}\frac{\partial\sqrt{\varphi}}{\partial \dot{x}_\kappa} &= -\frac{1}{2}\varphi^{-\frac{1}{2}}\frac{d\varphi}{dp}\sum g_{\kappa\nu}\dot{x}_\nu + \varphi^{-\frac{1}{2}}\frac{d}{dp}\left(\sum g_{\kappa\nu}\dot{x}_\nu\right), \\
\frac{\partial\sqrt{\varphi}}{\partial x_\kappa} &= \frac{1}{2}\varphi^{-\frac{1}{2}}\sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu\kappa}\dot{x}_\mu\dot{x}_\nu,
\end{aligned}$$

wobei zur Abkürzung $g_{\mu\nu\kappa} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\kappa}$ gesetzt ist. Die Langrangeschen Gleichungen werden dann zu

$$\frac{1}{2}\varphi^{-\frac{1}{2}}\left\{-\frac{d\varphi}{dp}\sum_\nu g_{\kappa\nu}\dot{x}_\nu + 2\varphi\frac{d}{dp}\left(\sum_\nu g_{\kappa\nu}\dot{x}_\nu\right) - \varphi\sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu\kappa}\dot{x}_\mu\dot{x}_\nu\right\} = 0, \ \kappa = 1, 2. \tag{2}$$

Diese beiden Differentialgleichungen sind nun aufzulösen, um die kürzeste Linie zu finden. *Das Problem lässt sich aber erheblich vereinfachen*, wobei uns folgender Umstand von Nutzen ist: Wenn man nämlich p durch eine beliebige Funktion von p' ersetzt, so müssen die Gleichungen (2) für diesen neuen Parameter p' wieder erfüllt sein; in der Tat wird dann

$$dp = \frac{dp}{dp'}dp', \qquad x_i' = \frac{dx_i}{dp'}\frac{dp'}{dp},$$

also wird

$$\int_{p_1}^{p_2}\sqrt{\varphi(p)}dp = \int_{p_1'}^{p_2'}\sqrt{\varphi(p')}\frac{dp'}{dp}\frac{dp}{dp'}dp' = \int_{p_1'}^{p_2'}\sqrt{\varphi(p')}dp',$$

13 d. h. das Variationsproblem bleibt ganz ungeändert, und daher auch die Lagrangeschen Gleichungen. Nun werde der Parameter p so normiert, dass p *im wesentlichen die Bogenlänge s darstellt*. Die Bogenlänge ist definiert durch

$$\left(\frac{ds}{dp}\right)^2 = \varphi.$$

[19] To the left of the following equation, Hilbert wrote in pencil: "$\frac{1}{2}\varphi^{-\frac{1}{2}}\frac{d}{dp}\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{x}_k} - \frac{\partial\varphi}{\partial x_k}$".

Ist $p = s$, so wird $\varphi = 1$.

Umgekehrt: Wird der Parameter so gewählt, dass $\varphi = 1$ wird, so ist p die Bogenlänge. Wir wollen hier p so wählen, dass $\varphi = c$ wird. Wollen wir später doch noch die Bogenlänge als Parameter haben, so müssen wir nur

$$p = \frac{p'}{\sqrt{c}}$$

setzen. Dann ist der neue Parameter p' die Bogenlänge s. Jetzt ist die Parameterdarstellung der Kurve nicht mehr willkürlich. Andererseits hat der von uns gewählte Parameter mit Bezug auf die Bogenlänge die Bedeutung

$$p = \frac{s}{\sqrt{c}}.$$

§ 7. Einführung der Bogenlänge als Parameter

Wie vereinfachen sich nun unsere Gleichungen? Wir schliessen den Fall $\varphi = 0$ vorerst aus. Im zweidimensionalen Raum haben wir φ noch definit > 0 angenommen. Wir können also auch keine reellen Lösungen $x_i(p)$ erwarten, die $\varphi = 0$ machen. Im vierdimensionalen Raum dagegen und diesen werden wir später nötig haben, ist φ gar nicht mehr positiv definit. Aber auch in der zweidimensionalen Geometrie werden wir für $\varphi = 0$ Kurven erhalten; nur sind es imaginäre Linien von der Länge Null. Ist also

$$\varphi = c \neq 0,$$

so fällt in der Differentialgleichung (2) der Faktor $\frac{1}{2}\varphi^{-\frac{1}{2}}$ | weg, und wir erhalten 14

$$2\frac{d}{dp}\sum_{v} g_{k\nu}\dot{x}_\nu - \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu k}\dot{x}_\mu\dot{x}_\nu = 0, \qquad k = 1, 2 \tag{3}$$

$$\varphi = c \tag{4}$$

zur Berechnung der zwei Funktionen $x_i(p)$. Hier haben wir also *den paradoxen Fall, drei Gleichungen zu haben zur Bestimmung von nur zwei Funktionen* x_1(p) und $x_2(p)$. Da wir nichts Unerlaubtes getan haben, müssen diese Gleichungen miteinander verträglich sein. In der Tat können wir zeigen, dass aus den zwei Gleichungen (3) die dritte Gleichung (4) folgt. Hierzu multiplizieren wir (3) mit bezw. $\dot{x}_k$ und addieren:

$$2\frac{d}{dp}\left(\sum_{k\nu} g_{k\nu}\dot{x}_k\dot{x}_\nu\right) - 2\sum_{k\nu} g_{k\nu}\ddot{x}_k\dot{x}_v - \sum_{\mu\nu k} g_{\mu\nu k}\dot{x}_\mu\dot{x}_\nu\dot{x}_k = 0,$$

oder

$$2\frac{d\varphi}{dp} - \frac{d\varphi}{dp} = 0, \quad \varphi = \text{const.} \quad \text{q. e. d.}$$

$\varphi = \text{const}$ *ist also ein Integral* dieser beiden Differentialgleichungen und gar kein Widerspruch zu diesen, wie wir befürchten mussten. Damit haben die Differentialgleichungen der geodätischen Linie schon die einfache Form (3) erhalten:

$$2\frac{d}{dp}\sum_{\nu} g_{k\nu}\dot{x}_\nu - \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu k}\dot{x}_\mu\dot{x}_\nu = 0, \qquad k = 1, 2.$$

Diese beiden Gleichungen haben zunächst den Charakter von Lagrangeschen Gleichungen verloren. Ein ganz merkwürdiger Umstand ist es nun, dass auch *diese Gleichungen wieder Lagrangesche sind* und zwar des viel einfacheren, aber vom vorhergehenden ganz verschiedenen Variationsproblems

$$\int_{p_1}^{p_2} \varphi dp = \text{Minimum}. \tag{5}$$

In der Tat sind dessen Lagrangesche Gleichungen

$$\frac{d}{dp}\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{x}_k} - \frac{\partial\varphi}{\partial x_k} = 0, \qquad k = 1, 2.$$

Dies sind aber unsere Gleichungen (3)! Wir können also unser[20] | Variationsproblem ersetzen durch das Problem (5). Dann ist aber der Parameter so festgelegt, dass $\varphi = 0$ wird. Dieses letztere Problem ist nun nicht mehr invariant, bei beliebiger Wahl des Parameters. Wir haben also den *Satz: wenn man* $\int_{p_1}^{p_2}\sqrt{\varphi}dp = \text{Min}$ *machen will und gleichzeitig die einschränkende Nebenbedingung* $\varphi = c$ *stellt, die den Parameter festlegt, hat dies Variationsproblem dieselben Lösungen wie das andere* $\int_{p_1}^{p_2}\varphi dp = \text{Min}$.

§ 8. Normalform der Differentialgleichungen der geodätischen Linien

Wir wollen nun die Differentialgleichungen (3) der geodätischen Linien auf ihre *Normalform* bringen. Führen wir die Differentiation nach p aus, so erhalten wir

$$\sum_{\nu} g_{\kappa\nu}\ddot{x}_\nu + \sum_{\nu h} g_{\kappa\nu h}\dot{x}_\nu\dot{x}_h - \frac{1}{2}\sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu\kappa}\dot{x}_\mu\dot{x}_\nu \langle = 0. \rangle$$

Nun ist

$$\sum_{\nu h} g_{\kappa\nu h}\dot{x}_\nu\dot{x}_h = \sum_{\nu h} g_{\kappa h\nu}\dot{x}_\nu\dot{x}_h,$$

weil ja über ν und h summiert wird, also auch

$$\sum_{\nu h} g_{\kappa\nu h}\dot{x}_\nu\dot{x}_h = \frac{1}{2}\sum_{\nu h}(g_{\kappa\nu h} + g_{\kappa h\nu})\dot{x}_\nu\dot{x}_h.$$

[20] At the bottom of the page, Hilbert wrote in pencil: "$\sum_k \dot{x}_k \frac{d}{dp}\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{x}_k} - \sum_k \dot{x}_k \frac{\partial\varphi}{\partial x_k} = 0$ d. h. $\left(\frac{d}{dp}\sum_k \dot{x}_k \frac{\partial\varphi}{\partial\dot{x}_k} - \sum_k \ddot{x}_k \frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\right) - \sum_k \dot{x}_k \frac{\partial\varphi}{\partial x_k} = 0$ d. h. $2\frac{d\varphi}{dp} - \frac{d\varphi}{dp} - \frac{d\varphi}{dp} = 0$".

Diesen Ausdruck setzen wir ein:

$$\sum_{\nu h} g_{\kappa\nu}\ddot{x}_\nu + \frac{1}{2}\sum_{\mu\nu}(g_{\kappa\nu\mu} + g_{\mu\kappa\nu} - g_{\nu\mu\kappa})\dot{x}_\mu\dot{x}_\nu = 0. \tag{6}$$

Um $\ddot{x}_\nu$ frei von Faktoren zu machen, multiplizieren wir diese Gleichungen mit bezw. $g^{h\kappa}$ und summieren über κ. Wir benutzen die Relationen

$$\sum_{\mu} g^{h\kappa}g_{\kappa\nu} = \begin{cases} 0, & h \neq \nu \\ 1, & h = \nu \end{cases}$$

die aus Definitionsgleichungen der $g^{h\kappa}$ folgen, und die nichts anderes aussagen, als dass die ersten Unterdeterminanten der i-ten Zeile einer Determinante multipliziert mit den entsprechenden Elementen der κ-ten Zeile 0 oder den Wert der Determinante selbst ergeben, je nachdem $i \neq k$ bezw. $i = k$ ist. 16
Dann wird aus (6)

$$\ddot{x}_h + \frac{1}{2}\sum_{\mu\nu k} g^{hk}\left(g_{k\nu\mu} + g_{\mu k\nu} - g_{\nu\mu k}\right)\dot{x}_\mu\dot{x}_\nu = 0 \qquad h = 1, 2$$

oder als *definitive Form der Differentialgleichungen der geodätischen Linie*

$$\ddot{x}_h + \sum_{\mu\nu}\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ h\end{Bmatrix}\dot{x}_\mu\dot{x}_\nu = 0, \tag{7}$$

wobei die $\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ h\end{Bmatrix}$ die berühmten Ausdrücke sind:

$$\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ h\end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\sum_{k} g^{hk}\left(g_{k\nu\mu} + g_{\mu k\nu} - g_{\nu\mu k}\right),$$

die wir die *g-Klammern* nennen wollen. Sie wurden zuerst von Christoffel[21] eingeführt. Es sind homogene, lineare[22] Ausdrücke in den ersten Ableitungen der $g_{\mu\nu}$. Sie sind in den beiden oberen Indizes symmetrisch, weil $g_{k\nu\mu} = g_{\nu k\mu}$ ist. Wir werden später noch von ihnen Gebrauch zu machen haben, da sie in der Gravitationstheorie eine grosse Rolle spielen.

§ 9. Geodätische Linien auf der Kugel (als Beispiel)

Aus den Gleichungen (7) wollen wir jetzt die geodätischen Linien in zwei Fällen berechnen.

[21] See *Christoffel 1869*.

[22] "lineare" was corrected from "quadratische".

1) Man sieht sofort, dass in der *Euklidischen Geometrie die gerade Linie auch die geodätische ist*. Dann ist nämlich $g_{\mu\nu} = \text{const}$, also verschwinden sämtliche g-Klammern und die allgemeinen Integrale von (6) werden zu

$$x_h = a_h p + b_h,$$

woraus wir durch Elimination von p eine *lineare* Gleichung zwischen den x_h erhalten.[23]

2) Wir hatten oben (S. 7) als Beispiel einer Fläche, auf der wir Geometrie treiben wollten, die *Kugel* herangezogen. Wir wollen also im Euklidischen
17 Raum eine Kugel vom Radius Eins | gegeben annehmen durch die Gleichungen

$$x = \cos\vartheta, \qquad y = \cos\varphi\sin\vartheta, \qquad z = \sin\varphi\sin\vartheta. \tag{8}$$

Dann sind $x_1 = \vartheta$ $x_2 = \varphi$ die Koordinaten, die einen Punkt auf der Kugeloberfläche festlegen. Das Linienelement hatten wir zu

$$ds^2 = d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2$$

gefunden, also $g_{11} = 1$ $g_{12} = 0$ $g_{22} = \sin^2\vartheta$. Hier wollen wir Folgendes bemerken: Um in der Praxis die g-Klammern zu finden, wird man sie nicht aus den eben bestimmten $g_{\mu\nu}$ berechnen, sondern vielmehr vom Variationsproblem $\int_{p_1}^{p_2}\varphi dp = \text{Min.}$ ausgehen und die Lagrangeschen Gleichungen in der Form

$$\ddot{x}_\nu + \text{homogene quadratische Form der } \dot{x}_\mu = 0$$

anschreiben. Dann sind *die Koeffizienten dieser quadratischen Form die gesuchten g-Klammern*, z. B. $\frac{1}{2}\begin{Bmatrix}\lambda\mu\\ \nu\end{Bmatrix}$ der Koeffizient von $\dot{x}_\lambda\dot{x}_\mu$. Dies wollen wir am Beispiel der Kugel auch durchführen, trotzdem wir es zur Lösung der Aufgabe, die geodätischen Linien auf der Kugel zu bestimmen, gar nicht nötig haben. Wir erhalten die g-Klammern nämlich als ein Zwischenresultat dieser Aufgabe. Das Problem lautet also

$$\int_{p_1}^{p_2}(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2\vartheta\dot{\varphi}^2)dp = \text{Min.}$$

Gesucht sind dabei ϑ und φ als Funktionen des Parameters p. Die Lagrangeschen Gleichungen werden hier zu:

$$\begin{cases} \frac{d}{dp}(2\dot{\vartheta}) - 2\sin\vartheta\cos\vartheta\dot{\varphi}^2 = 0,\\ \frac{d}{dp}(2\sin^2\vartheta\dot{\varphi}) = 0. \end{cases} \tag{9}$$

18 Führen wir die Differentiation nach p aus, so erhalten wir

$$\ddot{\vartheta} - \sin\vartheta\cos\vartheta\dot{\varphi}^2 = 0,$$
$$\ddot{\varphi} + 2\,\text{cotg}\,\vartheta\dot{\vartheta}\dot{\varphi} = 0.$$

[23] In the left margin, there is a reader's mark (⊥).

Hieraus lassen sich die g-Klammern ablesen:

$$\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}=0,\qquad \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}=0,\qquad \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}=-\sin\vartheta\cos\vartheta,$$
$$\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}=0,\qquad \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}=+\operatorname{cotg}\vartheta,\qquad \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}=0.$$

Da wir diese g-Klammern aber augenblicklich gar nicht brauchen, wenden wir uns wieder unserer eigentlichen Aufgabe zu und lösen die Gleichungen (9). Die zweite Gleichung lässt sich sofort einmal integrieren:

$$\sin^2\vartheta\dot\varphi=\text{const}=a. \tag{10}$$

Die erste Gleichung multiplizieren wir mit $\dot\vartheta$ und ersetzen $\dot\varphi^2$ durch seinen aus (10) zu berechnenden Wert $\frac{a^2}{\sin^4\vartheta}$. Dann erhalten wir durch Integration

$$\dot\vartheta^2+\frac{a^2}{\sin^2\vartheta}=b.$$

Dieses Integral hätten wir nun auch ohne Rechnung finden können; denn nach unserer allgemeinen Theorie muss $\varphi=\text{const}$ ein Integral sein, dies gibt aber wegen (10)

$$\varphi=\dot\vartheta^2+\sin^2\vartheta\dot\varphi^2=\dot\vartheta^2+\frac{a^2}{\sin^2\vartheta}=\text{const}.$$

Nun können wir auch $\frac{d\vartheta}{d\varphi}$ berechnen. Es ist nämlich

$$\left(\frac{d\vartheta}{d\varphi}\right)^2=\frac{\dot\vartheta^2}{\dot\varphi^2}=\frac{b-\frac{a^2}{\sin^2\vartheta}}{\frac{a^2}{\sin^4\vartheta}}=\sin^2\vartheta(A\sin^2\vartheta-1).$$

Diese Differentialgleichung ist zu integrieren. Es ist[24]

$$\frac{d}{d\varphi}\operatorname{cotg}\vartheta=-\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{d\vartheta}{d\varphi}.$$

Sei also $\operatorname{cotg}\vartheta=\Theta$ so wird

$$\left(\frac{d\Theta}{d\varphi}\right)^2=A-\frac{1}{\sin^2\vartheta}=A-1-\frac{cos^2\vartheta}{\sin^2\vartheta}=A-1-\Theta.$$

Diese Gleichung kann man allgemein integrieren und erhält

$$\Theta=\alpha(\sin\varphi+\beta)=\operatorname{cotg}\vartheta,\qquad \alpha,\beta=\text{Integrationskonstanten}.$$

Damit haben wir als Lösung unserer Aufgabe 19

$$\cos\vartheta=\sin\vartheta(C\sin\varphi+D\cos\varphi)$$

erhalten. Dies ist in unserem Euklidischen Raum gedeutet, zufolge der Gleichungen (8), $x=Cz=Dy=$ Ebene durch den Mittelpunkt der Kugel. Wir erhalten das bekannte Resultat: *die geodätischen Linien auf der Kugel sind grösste Kreise.*

[24]"Es ist" was corrected from "Wir erhalten".

§ 10. Riemannsche Koordinaten

Die geodätischen Linien werden das Fundament der Geometrie auf beliebigen Flächen sein, so wie die Gerade das Fundament der ebenen Geometrie ist. Dies müssen wir nun noch mehr herausarbeiten. *Die gerade Linie ist analytisch in geignet gewählten Koordinaten ihrer ganzen Ausdehnung nach als eine lineare Gleichung* zwischen diesen Koordinaten gegeben und nicht nur im *Infinitesimalen*, wie dies bei Kurven der Fall ist. Hat man einmal dieses Resultat gewonnen, so lassen sich alle Sätze über gerade Linien sofort beweisen. Wir fragen jetzt: gibt es in der allgemeinen Geometrie einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit ein Analogon? Aus der Theorie der Grundlagen der Geometrie wissen wir, dass nur in der Euklidischen und in den beiden Nichteuklidischen Geometrien die Geraden oder kürzesten Linien durch *lineare* Beziehungen zwischen zwei geeigneten Parametern ausgedrückt werden können. In der Flächentheorie drückt man dies dadurch aus, dass man sagt: man kann nur auf einer Fläche konstanter Gauss'scher Krümmung krummlinige Koordinaten derart einführen, dass die geodätischen Linien durch lineare
20 Beziehungen zwischen den beiden Parametern ausgedrückt werden. Dabei sind natürlich *Flächen, die durch Verbiegung auseinander hervorgehen, einander äquivalent;* wir treiben ja nur auf der Fläche selbst Geometrie und brauchen uns daher um die Lage dieser Fläche im Raum gar nicht zu kümmern. Auf der Kugel speziell ist das Gauss'sche Krümmungsmass konstant und positiv, auf ihr gilt die Riemann-Helmholtzsche Geometrie. Aequivalent mit der Kugel sind dann alle diejenigen Flächen, die durch Verbiegung aus ihr hervorgehen. Die Kugel lässt sich übrigens nur dann verbiegen, wenn Teile aus ihr herausgeschnitten sind. Auch für die Lobatscheffsky-Boljay'sche Geometrie konstanter negativer Krümmung gilt wieder, dass die geodätischen Linien durch lineare Beziehungen passend gewählter Parameter ausgedrückt werden können.

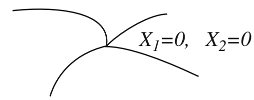
Von diesen Beziehungen ist bei unserer allgemeinen Geometrie keine Rede mehr. Die geodätischen Linien können sicher *nicht* durch lineare Beziehungen zwischen den Parametern ausgedrückt werden. Und doch besteht ein tiefgreifendes Analogon, das auch für die spätere physikalische Anwendung von grosser Bedeutung sein wird. Unser Programm ist es, dieses Analogon aufzudecken.

Auch bei uns gilt die Euklidische Geometrie im Infinitesimalen, d. h. in der Umgebung eines Punktes, und auf die von einem Punkt ausgehenden geodätischen Linien werden wir unsere Betrachtungen übertragen können. Es werden
21 sich in der Tat Parameter so einführen lassen, dass *die von einem* | *Punkt*[25] *ausgehenden geodätischen Linien* durch geeignete Parameter ausgedrückt, *sich als lineare Beziehungen* derselben *darstellen.* Diese geeigneten Parameter heissen wir

die Riemannschen Koordinaten.

[25]"die von einem Punkt" was corrected from "in der Umgebung eines Punktes".

Ein beliebiger Punkt unserer Mannigfaltigkeit sei $x_1 = 0 \quad x_2 = 0$. Wir können ihn auch als Punkt auf unserer Fläche deuten. Die geodätischen Linien, die von ihm ausgehen, müssen dann eine einparametrige Schar sein, die die Fläche lückenlos überdeckt. Die Gleichungen (7)



$$\ddot{x}_h + \sum_{\mu\nu} \begin{Bmatrix} \mu\nu \\ h \end{Bmatrix} \dot{x}_\mu \dot{x}_\nu = 0, \qquad h = 1, 2$$

sind also in der Umgebung des Punktes $x_i = 0$ zu integrieren. Wir zählen auch p vom Punkte $x_i = 0$ aus. Nach der allgemeinen Theorie der Differentialgleichungen zweiter Ordnung dürfen wir in diesem Punkte noch die Werte von $\dot{x}_i = \xi_i$ beliebig vorschreiben und haben also Randbedingungen zu erfüllen

$$(x_1)_{p=0} = 0, \quad (x_2)_{p=0} = 0, \quad (\dot{x}_1)_{p=0} = \xi_1, \quad (\dot{x}_2)_{p=0} = \xi_2. \tag{11}$$

Nun sind die vier willkürlichen Integrationskonstanten des Systems von Differentialgleichungen als 0, 0, ξ_1, ξ_2 festgelegt. Also müssen jetzt die x_h völlig bestimmt sein:

$$x_h = x_h(p, \xi_1, \xi_2).$$

Die Funktionen x_h lassen sich in Reihenform explizit anschreiben, es wird in der Umgebung der Stelle $p = 0$

$$x_h = (x_h)_{p=0} + (\dot{x}_h)_{p=0} p + \frac{1}{2} (\ddot{x}_h)_{p=0} p^2 + \cdots, \qquad h = 1, 2,$$

also wegen (7) und (11)

$$x_h = 0 + \xi_h p - \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} \begin{Bmatrix} \mu\nu \\ h \end{Bmatrix} \xi_\mu \xi_\nu p^2 + \cdots, \qquad h = 1, 2. \tag{12}$$

Scheinbar gehen entsprechend den zwei in x_i vorkommenden willkürlichen 22
Konstanten ∞^2 geodätische Linien[26] durch einen festen Punkt. Das ist aber unmöglich, denn dann würden ja zwei beliebige Punkte unserer Mannigfaltigkeit noch durch ∞^1 geodätische Linien verbunden werden. Dieser Widerspruch ist leicht zu lösen. Wir gingen aus vom Problem

$$\delta \int_{p_1}^{p_2} \sqrt{\varphi} dp = 0, \qquad \varphi = c.$$

Dabei hatte p die Bedeutung $p = \frac{s}{\sqrt{c}}$ (s = Bogenlänge). Nun ist diese Konstante aber noch ganz willkürlich, d. h. ein Parameter p', der φ den konstanten Wert c' erteilt, ist ebenfalls zulässig. Dann wird $p' = \frac{s}{\sqrt{c'}}$ oder $p' = p\sqrt{\frac{c}{c'}}$. Der Parameter p ist also nur bis auf eine multiplikative Konstante μ bestimmt. Setzen wir $p' = \mu p$ in $x_h(p, \xi_1, \xi_2)$ ein, so muss x_h immer noch eine geodätische

[26] "∞^2" was interlineated between "willkürlichen" and "Konstanten".

Linie durch den Punkt $x_h = 0$ darstellen, aber freilich nicht mehr dieselbe. Dazu müssen wir viel mehr die Anfangsbedingungen verändern. Diese sind für den Parameter p': $(x_i)_{p'=0} = 0$ $(\dot{x}_i)_{p'=0} = \xi_i'$. Durch den Parameter p ausgedrückt werden sie zu

$$(x_i)_{p=0} = 0, \qquad (\dot{x}_i)_{p=0} = \frac{1}{\mu}\left(\frac{dx_i}{dp}\right)_{p=0} = \frac{1}{\mu}\xi_i.$$

Setzen wir auch diese abgeänderten Anfangsbedingungen ein, so müssen wir wieder die nämliche geodätische Linie erhalten, d. h.

$$x_h(p, \xi_1, \xi_2) = x_h\left(\mu p, \frac{\xi_1}{\mu}, \frac{\xi_2}{\mu}\right). \tag{13}$$

Die Richtigkeit dieser Gleichung kann man übrigens an (12) leicht verifizieren. Wir können also sagen:

Aendert man ξ_1 und ξ_2 so, dass ihr Quotient denselben Wert beibehält, so
23 stellen die Funktionen x_h noch die | nämliche geodätische Linie dar; doch entsprechen den gleichen Parameterwerten nicht mehr dieselben Punkte auf der Kurve. Die Gleichungen der geodätischen Linie $x_h = x_h(p, \xi_1, \xi_2)$ sind also nur vom Verhältnis $\frac{\xi_1}{\xi_2}$ der Konstanten abhängig, und es gehen, wie es auch sein muss, nur ∞^1 solcher Kurven durch einen Punkt.

Nun wollen wir die Riemannschen Koordinaten definieren. Wir führen folgende neuen Funktionen f_1 f_2 von ξ_1 und ξ_2 ein, indem wir in $x_h(p\xi_1\xi_2)$ dem Parameter p den Wert eins erteilen:

$$x_h(1\xi_1\xi_2) = f_h(\xi_1\xi_2) = \xi_h - \frac{1}{2}\sum_{\mu\nu}\left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ h\end{matrix}\right\}\xi_\mu\xi_\nu + \cdots. \tag{14}$$

Diese Gleichungen denken wir uns nach ξ_1 und ξ_2 aufgelöst. Die hierbei als Funktionen von x_1 und x_2 bestimmten ξ_1 und ξ_2 nennen wir die *Riemannschen Koordinaten* des Punktes x_1, x_2 unserer Mannigfaltigkeit. *Damit haben wir die Koordinaten*, die doch bis jetzt ganz willkürliche Namen waren, die wir den Punkten gaben, wenigstens *in Bezug auf einen ausgezeichneten* 0 *Punkt auf eine Normalform gebracht*. Wir haben also den *Punkten* der Menge gewissermassen „Normalnamen“ gegeben, allerdings nur Normalnamen relativ zu einem ausgezeichneten Punkt. Wir wollen nun untersuchen, inwiefern diese neuen Koordinaten ausgezeichnete sind. Wir betrachten dabei nur die geodätischen Linien durch den 0-Punkt und behaupten:

§ 11. Gleichungen der geodätischen Linie in Riemannschen Koordinaten

Die Gleichungen der geodätischen Linien durch den 0-Punkt sind in diesen neuen Koordinaten

$$\xi_1 = c_1 p, \quad \xi_2 = c_2 p, \tag{15}$$
$$c_1, c_2 = \text{Integrationskonstanten.}$$

Dann stellt jede lineare Beziehung zwischen den ξ_i z. B. $c_2\xi_1 - c_1\xi_2 = 0$ *geo-* 24
dätische Linien durch den 0*-Punkt dar* und umgekehrt. Zum Beweise müssen wir nur die Werte von ξ_i aus (15) in (14) einsetzen und zeigen, dass die so bestimmten x_h als Funktionen von p den Differentialgleichungen der geodätischen Linie genügen. Dann wird

$$x_i = f_i(c_1 p, c_2 p) = x_i(1, c_1 p, c_2 p)$$

und wegen (13)

$$x_i = x_i(p, c_1, c_2).$$

Dies ist aber die Gleichung einer geodätischen linie durch den 0-Punkt. Wir können die durch (15) ausgedrückte Tatsache auch folgendermassen ausdrükken: Legt man statt der x_i die Riemannschen Koordinaten ξ_i zugrunde, so bricht die Potenzreihe (12) der geodätischen Linie mit dem ersten Gliede ab. Für die nicht durch den Nullpunkt gehenden geodätischen Linien gilt der Satz, dass längs ihr eine lineare Beziehung zwischen geeigneten Parametern besteht, aber nicht, und kann auch gar nicht gelten, wie wir oben erläutert haben. Wir haben damit unsere Analogie zur Geometrie auf einer Fläche konstanten Gaussschen Krümmungsmasses soweit, als dies überhaupt möglich ist, getrieben.

§ 12. Die noch vorhandene Willkür in der Definition der Riemannschen Koordinaten

Die Riemannschen Koordinaten haben nun immer noch eine gewissse Willkür. Setzt man nämlich

$$\xi_i' = \text{lineare, homogene Funktion der } \xi_i,$$

so stellt dies wieder eine geodätische Linie durch den 0-Punkt dar. Wir hät-
ten die Riemannschen Koordinaten also ebenso gut | als lineare, homogene 25
Funktionen der ξ_i definieren können. Wir wollen aber zeigen, dass von diesen projektiven Transformationen oder von dieser *projektiven Willkür* abgesehen,

die Riemannschen Koordinaten eindeutig festgelegt sind. Wir führen irgend welche andere Koordinaten ein durch

$$x_i' = x_i'(x_1, x_2)$$

und suchen für diese x_i'-Koordinaten die zugehörigen Riemannschen Koordinaten ξ_i' in Bezug auf den dem Punkte $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ entsprechenden ausgezeichneten Punkt $x_1' = a$, $x_2' = b$. Es ist keine Einschränkung, wenn wir annehmen, dass dies der Punkt $x_1' = 0$, $x_2' = 0$ sei, da dies nur einer Parallelverschiebung unserer Punktmannigfaltigkeit entspricht. Die ξ_i' sind dann wieder Funktionen der ξ_i, und wir wollen beweisen, dass es *lineare Funktionen* derselben sind. Diese Willkür freilich muss bleiben. Zum Beweise gehen wir auf unsere Regel zurück: Man erhält die ξ_i, indem man die Gleichungen (7) der geodätischen Linie mit den Randbedingungen $(x_i)_{p=0} = 0$, $(\dot{x}_i)_{p=0} = \xi_i$ integriert und hierauf $p = 1$ setzt. Wir machen dasselbe mit den gestrichenen Koordinaten x_i', die Funktionen des Parameters p' sein sollen. Das System von Differentialgleichungen bleibt nun nach der Transformation $x_i' = x_i'(x_1, x_2)$ in Bezug auf die gestrichenen Koordinaten dasselbe; denn geodätische Linien bleiben auch nach der Transformation solche. Wir müssen also nur überall in den Differentialgleichungen einen $'$ zufügen. Die Striche kann man aber auch weglassen. Nur müssen dann die Anfangsbedingungen auf die ungestrichenen Koordinaten transformiert werden. Diese Bedingungen sind

$$(x_i')_{p'=0} = 0 \qquad (\dot{x}_i')_{p'=0} = \xi_i'.$$

26 Nun sind die x_i' festgelegt. Wie drücken sich diese Bedingungen in den ungestrichenen Koordinaten aus?

Es ist keine Einschränkung anzunehmen, dass dem Parameterwert $p' = 0$ der Wert $p = 0$ entspricht; dann wird

$$\left(\frac{dx_i'}{dp'}\right)_{p'=0} = \left(\frac{\partial x_i'}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dp}\frac{dp}{dp'} + \frac{\partial x_i'}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dp}\frac{dp}{dp'}\right)_{p'=0} = a_{i1}\xi_1 + a_{i2}\xi_2,$$

d. h. $\xi_i' = a_{i1}\xi_1 + a_{i2}\xi_2$. Setzt man also $x_i' = f_i'(\xi_1'\xi_2')$, so ist dies dasselbe, als ob man die ursprünglichen Differentialgleichungen mit den Randbedingungen

$$(x_i)_{p=0} = 0, \qquad (\dot{x}_i)_{p=0} = a_{i1}\xi_1 + a_{i2}\xi_2$$

integriert hätte. Wir haben also den Satz:

Ersetzt man die x_i-Koordinaten durch willkürliche andere Funktionen $x_i' = x_i'(x_1, x_2)$, so erhält man als Riemannsche Koordinaten ξ_i' lineare homogene Funktionen der ξ_i.

§ 13. Zurückführung der allgemeinen Invarianten auf projektive; Darstellung der $g_{\mu\nu}$ als Potenzreihen Riemannscher Koordinaten

Die Riemannschen Koordinaten entsprechen den rechtwinkligen Koordinaten in der Euklidischen Geometrie. Sie beziehen sich aber nur auf *einen* Punkt. Geht man zu einem *anderen* Punkt über, so sind diese neuen Riemannschen Koordinaten komplizierte, sicher aber *nicht* lineare Funktionen der ursprünglichen ξ_i; denn sonst hätten wir ja die Flächen konstanten Krümmungsmasses vor uns. Wir sehen jetzt schon den enormen Vorteil dieser Koordinaten. Die Riemannschen Koordinaten sind schon so stabil oder invariant, dass sie bei willkürlichen Transformationen der x_i, die nur einen Punkt in sich überführen, sich | nur noch projektiv verändern. Damit ist der Hauptschritt zu unserem 27
Ziel, *allgemeine Invarianten* aufzufinden, schon getan. *Alle projektiven Invarianten der ξ_i sind nämlich allgemeine Invarianten der x_i*. Solche sind z. B., wie die Invariantentheorie lehrt

$$\sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu}\xi_\mu\xi_\nu$$

$$\text{kogredient zu} \quad \xi_k \begin{cases} \sum_{\mu\nu\kappa} g_{\mu\nu\kappa}\xi_\mu\xi_\nu\eta_\kappa & \text{wobei } g_{\mu\nu\kappa} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial \xi_\kappa} \\ \sum_{\mu\nu\kappa l} g_{\mu\nu\kappa l}\xi_\mu\xi_\nu\eta_\kappa\eta_l & \quad \text{"} \quad g_{\mu\nu\kappa l} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial \xi_\kappa \partial \xi_l}. \end{cases}$$

Die ξ_i entsprechen, wie wir schon sagten, den rechtwinkligen Koordinaten in der Euklidischen Geometrie. Wir wollen dies zum Ausdruck bringen, indem wir die $g_{\mu\nu}$ nun für die ξ_i-Koordinaten bilden und untersuchen, wie und ob wir den $g_{\mu\nu}$ anmerken können, dass sie sich auf die Normalkoordinaten beziehen. Wir legen unserer Betrachtung also Riemannsche Koordinaten zugrunde. Die Gleichungen der geodätischen Linie sind dann

$$x_h = \xi_h = c_h p, \qquad h = 1, 2.$$

Setzen wir diese Ausdrücke in die Differentialgleichungen (3) der geodätischen Linie ein, so müssen diese also identisch erfüllt sein und zwar in den c_h und in p. Diese Gleichungen lauten in Riemannschen Koordinaten

$$2\frac{d}{dp}\left(\sum_\nu g_{\kappa\nu}\dot{\xi}_\nu\right) - \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu\kappa}\dot{\xi}_\mu\dot{\xi}_\nu = 0.$$

Für $\xi_\kappa = c_\kappa p$ erhalten wir $2\frac{d}{dp}\sum_\nu g_{\kappa\nu}c_\nu - \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu\kappa}c_\mu c_\nu = 0$, und da $\frac{d}{dp}\left(\sum_\nu g_{\kappa\nu}c_\nu\right) = \sum_{\mu\nu} g_{\kappa\nu\mu}c_\mu c_\nu$ ist, so wird

$$\sum_{\mu\nu}\left(2g_{\kappa\nu\mu} - g_{\mu\nu\kappa}\right)c_\mu c_\nu = 0.$$

Die $g_{\mu\nu}$ sind jetzt Funktionen der ξ_i, die wir nach steigenden Potenzen der ξ_i entwickeln,

28 $$g_{\mu\nu} = a_{\mu\nu} + \sum_{\kappa} a_{\mu\nu\kappa}\xi_\kappa + \frac{1}{2}\sum_{\kappa\rho} a_{\mu\nu\kappa\rho}\xi_\kappa\xi_\rho + \cdots; \qquad a_{\mu\nu\kappa} = a_{\nu\mu\kappa} \quad \text{etc.}$$

Diese Entwicklung gilt in der Umgebung der Stelle $\xi_i = 0$. Wir setzen $\xi_\mu = c_\mu p$ ein und erhalten aus $\sum_{\mu\nu}(2g_{\kappa\nu\mu} - g_{\mu\nu\kappa})c_\mu c_\nu = 0$

$$\sum_{\mu\nu}\left(2\left[a_{\kappa\nu\mu} + \sum_\rho a_{\kappa\nu\mu\rho}c_\rho p + \cdot\right] - \left[a_{\mu\nu\kappa} + \sum_\rho a_{\mu\nu\kappa\rho}c_\rho p + \cdot\right]\right)c_\mu c_\nu = 0.$$

Für $p = 0$ folgt dann $\sum_{\mu\nu}(2a_{\kappa\nu\mu} - a_{\mu\nu\kappa})c_\mu c_\nu = 0$. Da die Gleichungen der geodätischen Linie in c_μ und p identisch erfüllt sein sollen, so muss der Koeffizient von $c_\mu c_\nu$ verschwinden, also $2(a_{\kappa\nu\mu} + a_{\kappa\mu\nu}) - (a_{\mu\nu\kappa} + a_{\nu\mu\kappa}) = 0$, d. h.

$$2(a_{\mu\nu\kappa} + a_{\kappa\mu\nu} + a_{\nu\kappa\mu}) = 4a_{\mu\nu\kappa}.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist in den drei Indizes symmetrisch, also muss es auch die rechte Seite sein, d.h. die $a_{\mu\nu\kappa}$ sind einander gleich und wir erhalten $6a_{\mu\nu\kappa} = 4a_{\mu\nu\kappa}$ oder

$$a_{\mu\nu\kappa} = 0.$$

Wir haben *das merkwürdige Resultat*: Führen wir solche Koordinaten ein, dass die durch einen Punkt gehenden geodätischen Linien durch lineare Beziehungen zwischen diesen Koordinaten dargestellt werden, so haben die $g_{\mu\nu}$ in der Umgebung dieses Punktes die Form: $g_{\mu\nu} = a_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\sum_{\kappa\rho} a_{\mu\nu\kappa\rho}\xi_\kappa\xi_\rho + \cdots$. Diese Koordinaten sind, wie wir sahen, nur bis auf eine projektive Transformation bestimmt; diese kann man dazu verwenden, dass $a_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ wird. In der Umgebung des 0-Punktes haben wir also erreicht, dass *in den neuen Koordinaten die Euklidische Geometrie*, soweit dies möglich ist, nämlich *in den Gliedern nullter und erster Näherung, Geltung hat*. Die oben eingeführten g-Klammern[27] waren lineare, homogene Funktionen der ersten Ableitungen der $g_{\mu\nu}$. Sie müssen daher für die neuen Koordinaten sämtlich verschwinden. Dann wird die
29 Gleichung (7) | der geodätischen Linie zu $\ddot{\xi}_h = 0$, und dies stimmt wieder damit überein, dass die geodätischen Linien nun durch $\xi_h = c_h \cdot p$ dargestellt werden.

Erst *in den Gliedern zweiter Ordnung zeigt sich die Abweichung von der Euklidischen Geometrie*. Diese Glieder sind nämlich nicht mehr Null, doch bestehen auch zwischen ihnen noch Relationen. Wir haben als Gleichung dafür, dass der Koeffizient von p verschwindet

$$\sum_{\mu\nu\rho}(2a_{\kappa\nu\rho\mu} - a_{\mu\nu\kappa\rho})c_\mu c_\nu c_\rho = 0.$$

---

[27] See [p. 16] above.

Hierin ist $\frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial\xi_\kappa \partial\xi_\rho} = a_{\mu\nu\kappa\rho} = a_{\mu\nu\rho\kappa}$. Wir müssen wieder den Faktor von $c_\mu c_\nu c_\rho$ berechnen und gleich Null setzen. Wir berücksichtigen, dass die Grössen $a_{\mu\nu\kappa\rho}$ in dem ersten und zweiten Paar von Indizes symmetrisch sind und erhalten

$$2(a_{\kappa\mu\nu\rho} + a_{\kappa\rho\mu\nu} + a_{\kappa\nu\rho\mu}) = a_{\mu\nu\rho\kappa} + a_{\rho\mu\nu\kappa} + a_{\nu\rho\mu\kappa}.$$

Dies ist die einzige Bedingung, die die $a_{\mu\nu\rho\kappa}$ erfüllen müssen. Sie ist notwendig und hinreichend dafür, dass die Differentialgleichungen durch unseren Ansatz noch in zweiter Näherung[28] erfüllt werden. Wir schreiben diese Gleichung in leicht verständlicher Abkürzung in der Form $2 \cdot \mathrm{I} = \mathrm{II}$. Dann wird $2(\mathrm{I} + \mathrm{II}) = 3\mathrm{II}$, und da $\mathrm{I} + \mathrm{II}$ ungeändert bleibt, wenn man das erste Indizespaar mit dem zweiten vertauscht,[29] so folgt auch $2(\mathrm{I} + \mathrm{II}) = 3\mathrm{I}$, d. h. $\mathrm{I} = \mathrm{II} = 0$ oder

$$a_{\kappa\mu\nu\rho} + a_{\kappa\rho\mu\nu} + a_{\kappa\nu\rho\mu} = 0. \tag{15}$$

Wir schreiben diesselbe Relation nochmals hin, indem wir κ mit ν vertauschen und addieren diese beiden Gleichungen. Dann wird $a_{\kappa\mu\nu\rho} + a_{\kappa\rho\mu\nu} + a_{\kappa\nu\rho\mu} + a_{\nu\mu\kappa\rho} + a_{\nu\rho\mu\kappa} + a_{\nu\kappa\rho\mu} = 0$ oder

$$a_{\kappa\mu\nu\rho} + a_{\kappa\rho\mu\nu} + a_{\kappa\nu\rho\mu} + a_{\nu\mu\kappa\rho} + a_{\nu\rho\mu\kappa} + a_{\mu\rho\kappa\nu} = a_{\mu\rho\kappa\nu} - a_{\kappa\nu\mu\rho}.$$

Linker Hand steht ein in den vier Indizes symmetrischer Ausdruck, also muss 30
auch der rechtsstehende Ausdruck symmetrisch sein, und da er sein Vorzeichen[30] bei Vertauschung der Indizespaare ändert, muss er verschwinden, d. h.

$$a_{\mu\nu\kappa\rho} = a_{\kappa\rho\mu\nu}.$$

Damit haben wir eine dritte wichtige Symmetrieeigenschaft der $a_{\mu\nu\kappa\rho}$ gefunden. Sie ist eine Folge der Differentialgleichung und auch wieder für sich notwendig und *hinreichend*[31] dafür, dass die Gleichung in zweiter[32] Annäherung erfüllt wird. Zu diesen Resultaten ist im wesentlichen schon Riemann gelangt.

§ 14. Aufsuchen neuer Invarianten; die Krümmung

Wir haben nun die Aufgabe, diejenigen Eigenschaften der zweidimensionalen Punktmannigfaltigkeit aufzusuchen, die von der Benennung der Punkte unabhängig sind. Solche Eigenschaften können nur durch Invarianten ausgedrückt

[28]“noch in zweiter Näherung” is a typed interlineation.

[29]“das erste Indizespaar mit dem zweiten vertauscht” was corrected from “die Indizes paarweise vertauscht”.

[30]“sein Vorzeichen” was corrected by Hilbert from “seinen Wert”.

[31]“hinreichend” was underlined in pencil. On the left hand page, Hilbert wrote in pencil: “nicht hinreichend!”

[32]“zweiter” was corrected from “erster”.

werden. Darum müssen wir uns noch kurz mit der Frage befassen, wie man zu solchen Invarianten gelangt. Wir wissen schon, dass die quadratische Form

$$\sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu = \sum_{\mu\nu} g'_{\mu\nu} dx'_\mu dx'_\nu \left(= \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} \dot{x}_\mu \dot{x}_\nu dp^2 \right)$$

eine Invariante, oder besser eine Kovariante ist, ebenso, wenn q_μ einen kovarianten Vektor bedeutet, die Linearform

$$\sum_\mu q_\mu dx_\mu = \sum_\mu q'_\mu dx'_\mu .$$

Die allgemeinste Definition einer Invariante sind wir aber oben schuldig geblieben und wollen sie nun nachholen. Die allgemeine Invariante ist, wenn sie keine höheren als zweite Ableitungen enthalten soll, eine solche Funktion I der Argumente

$$g_{\mu\nu}, g_{\mu\nu\kappa}, g_{\mu\nu\kappa\rho}, q_\mu, q_{\mu\rho},$$

31 dass sie ungeändert bleibt, wenn man statt derselben die gestrichenen Grössen $g'_{\mu\nu}$ etc. in Bezug auf neue Veränderliche $x'_i(x_1, x_2)$ einführt, d. h. dass

$$I\left(g_{\mu\nu}, g_{\mu\nu\kappa}, g_{\mu\nu\kappa\rho}, q_\mu, q_{\mu\rho}\right) = I\left(g'_{\mu\nu}, g'_{\mu\nu\kappa}, g'_{\mu\nu\kappa\rho}, q'_\mu, q'_{\mu\rho}\right)$$

wird. Man muss die analytische Technik der Invariantentheorie beherrschen, um Invarianten bilden zu können, speziell in unserem Fall, um die Tatsachen der Geometrie und später diejenigen der Physik überhaupt ausdrücken zu können; Gesetze und Tatsachen nämlich, die nur für ein spezielles Koordinatensystem gelten, interessieren uns gar nicht.

Wir haben übrigens alle Hilfsmittel bereitgestellt, um *allgemeine Invarianten zu bilden*. Der wichtigste, aber auch der schwierigste Schritt war derjenige der Einführung der Riemannschen Koordinaten, *da er unser Problem* auf das viel einfachere *zurückführte, projektive Invarianten aufzufinden. Nun wollen wir aus der wichtigsten uns bekannten Invariante, nämlich* $\sum g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu$ *neue Invarianten ableiten*. Zu diesem Zweck führen wir Riemannsche Koordinaten ξ_1, ξ_2 ein. Dann wird unsere Invariante zu $\sum a_{\mu\nu} d\eta_\mu d\eta_\nu$, wobei $a_{\mu\nu} = \sum_{\alpha\beta} \frac{\partial x_\alpha}{\partial \xi_\mu} \frac{\partial x_\beta}{\partial \xi_\nu} g^*_{\alpha\beta}$ und $g^*_{\alpha\beta}(\xi_1, \xi_2) = g_{\alpha\beta}(x_1, x_2)$ ist, und η_μ kogredient zu ξ_μ sein soll. Nun entwickeln wir nach steigenden Potenzen der ξ_μ und erhalten

$$\sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu = \sum_{\mu\nu} \left(a_{\mu\nu} + \sum_\kappa a_{\mu\nu\kappa} \xi_\kappa + \frac{1}{2} \sum_{\kappa\rho} a_{\mu\nu\kappa\rho} \xi_\kappa \xi_\rho + \cdots \right) d\eta_\mu d\eta_\nu . \tag{15*}$$

Dieser ganze Ausdruck ist eine projektive Invariante, also muss, da die einzelnen Glieder rechter Hand sich bei projektiver Transformation nicht gegenseitig vermischen können, weil sie in den Variabeln von verschiedenem Grad sind,
32 jeder Summand für sich eine | Invariante sein. *Somit haben wir eine unendliche*

Reihe projektiver Invarianten erhalten. Die erste derselben erkennen wir wieder als diejenige, von der wir ausgingen; die zweite Invariante ist die Null. Sie ist in der Tat eine Invariante, freilich keine, die neue Tatsachen über unsere zweidimensionale Mannigfaltigkeit aussagt. Die dritte Invariante dagegen ist *die berühmte Riemannsche Invariante, die Krümmung*:

$$K = \sum_{\mu\nu\kappa\rho} a_{\mu\nu\kappa\rho} \xi_\mu \xi_\nu d\eta_\kappa d\eta_\rho. \tag{16}$$

Die hierdurch ausgedrückte Tatsache können wir auch so in Worte fassen, dass wir sagen: Die $a_{\mu\nu\kappa\rho}$ bilden in den μ, ν bezw. κ, ρ einen quadrato-quadratischen, d. h. einen 4×4-er[33] Tensor. Derselbe steht *in engstem Zusammenhang* mit dem Begriffe, den man in der Flächentheorie die *Gaußische*[34] *Krümmung* nennt, und die bekanntlich bei Verbiegungen der Fläche ungeändert bleibt.

Wir können nun im Folgenden nicht mehr alle Ueberlegungen explizit durchführen, sondern müssen uns mit einer Skizzierung des Gedankenganges begnügen. Wir wollen in (16) als Variabeln statt der willkürlichen $\xi_\mu \xi_\nu$ die wegen (15^*)[35] zu denselben kogredienten $(g^{\mu\nu}) = a^{\mu\nu}$ setzen. Durch Summation über $\kappa\rho$ erhalten wir aus dem 4×4-er Tensor den gewöhnlichen 4-Tensor

$$K_{\mu\nu} = \sum_{\kappa\rho} a_{\mu\nu\kappa\rho} (g^{\kappa\rho})_{\xi_i = 0}.$$

Durch abermalige Summation über $\mu\nu$ erhalten wir dann die Invariante

$$K = \sum_{\mu\nu\kappa\rho} a_{\mu\nu\kappa\rho} \left(g^{\mu\nu}\right)_{\xi_i=0} \left(g^{\kappa\rho}\right)_{\xi_i=0} \;\; = \left(K_{\mu\nu} g^{\mu\nu}\right)_{\xi_i=0}. ^{\langle 36\rangle}$$

Wir wollen folgende Terminologie festsetzen. Es heisse

$$\begin{aligned} a_{\mu\nu\kappa\rho} &= \text{Riemannscher Tensor} \\ K_{\mu\nu} &= \text{Krümmungstensor} \\ K &= \text{Krümmung} \end{aligned}$$

33

Jetzt haben wir zwar eine, ja sogar, wie die Invariantentheorie lehrt,[37] die *einzige Invariante* aufgefunden, *die keine höheren, als zweite Ableitungen und diese nur linear enthält*, aber wir sind immer noch nicht am Ziel. Wir wollen nämlich diese *projektive Invariante* in den Riemannschen Koordinaten als *allgemeine Invariante* in den ursprünglichen Korrdinaten ausdrücken, d. h. wir wollen die Krümmung K als Funktion der $g_{\mu\nu}(x_1, x_2)$ und deren Ableitungen

[33]"4×4-er" was corrected from "16×16-er".

[34]"Gaußische" was corrected from "totale".

[35]"wegen (15^*)" was interlineated.

[36]The last term was added by Hilbert in pencil.

[37]*Rowe 2001*, p. 417, points out that this result was, in fact, only published in *Vermeil 1917*, see also note 40 below.

nach den ursprünglichen Variabeln x_1, x_2 darstellen. Die Riemannschen Koordinaten selbst sollen uns nur ein Hilfsmittel zur Auffindung dieser allgemeinen Invarianten sein. Wir hatten K definiert als[38]

$$\sum_{\mu\nu\kappa\rho}\left(\frac{\partial^2 a_{\mu\nu}}{\partial\xi_\kappa\partial\xi_\rho}g^{\mu\nu}g^{\kappa\rho}\right)_{\xi_i=0}.$$

Hierin ist $a_{\mu\nu}=\sum_{\alpha\beta}g^*_{\alpha\beta}(\xi_i)\frac{\partial x_\alpha}{\partial\xi_\mu}\frac{\partial x_\beta}{\partial\xi_\nu}$. Nun benutzen wir die Gleichung (14):

$$x_\kappa=\xi_\kappa-\frac{1}{2}\sum_{\mu\nu}\left(\left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ \kappa\end{matrix}\right\}\right)_0\xi_\mu\xi_\nu-\frac{1}{6}\sum_{\mu\nu\lambda}\left(\frac{\partial}{\partial x_\lambda}\left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ \kappa\end{matrix}\right\}\right.$$
$$\left.-2\sum_\sigma\left\{\begin{matrix}\sigma\nu\\ \kappa\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}\mu\lambda\\ \sigma\end{matrix}\right\}\right)_0\xi_\mu\xi_\nu\xi_\lambda+\cdots.$$

Also wird

$$\frac{\partial x_\alpha}{\partial\xi_\mu}=\delta_{\alpha\mu}-\sum_\rho\left(\left\{\begin{matrix}\rho\mu\\ \alpha\end{matrix}\right\}\right)_0\xi_\rho+\frac{1}{3}\sum_{\rho\sigma}\left(-\frac{\partial}{\partial x_\sigma}\left\{\begin{matrix}\rho\mu\\ \alpha\end{matrix}\right\}-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left\{\begin{matrix}\rho\sigma\\ \alpha\end{matrix}\right\}\right.$$
$$\left.+\sum_\lambda\left[\left\{\begin{matrix}\lambda\mu\\ \alpha\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}\rho\sigma\\ \lambda\end{matrix}\right\}+2\left\{\begin{matrix}\lambda\sigma\\ \alpha\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}\mu\rho\\ \lambda\end{matrix}\right\}\right]_0\right)\xi_\rho\xi_\sigma+\cdots.$$

Diesen Ausdruck setzen wir ein in

$$\frac{\partial^2 g^*_{\alpha\beta}(\xi_1,\xi_2)}{\partial\xi_\rho}=\sum_l\frac{\partial g_{\alpha\beta}(x_1,x_2)}{\partial x_l}\frac{\partial x_l}{\partial x_\rho}$$

und finden

$$\frac{\partial g^*_{\alpha\beta}(\xi)}{\partial\xi_\rho}\equiv\left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}(x)}{\partial x_\rho}\right)_0-\sum_{\lambda\mu}\left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}(x)}{\partial x_\lambda}\left\{\begin{matrix}\mu\rho\\ \lambda\end{matrix}\right\}\right)_0\xi_\mu\,,\ (\xi^2),\qquad(16')$$

wobei $\equiv,(\xi^2)$ bedeutet, daß nur Glieder ersten Grades in ξ_i berücksichtigt
33a. wurden.[39] | Hieraus folgt für[40]

$$\frac{\partial^2 g^*_{\alpha\beta}(\xi)}{\partial\xi_\rho\partial\xi_\sigma}\equiv-\sum_\iota\left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\iota}\left\{\begin{matrix}\rho\sigma\\ \iota\end{matrix}\right\}\right)_0+\left(\frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial x_\rho\partial x_\sigma}\right)_0,\ (\xi).\qquad(16'')$$

Nun entwickeln wir $g_{\alpha\beta}(x)=g^*_{\alpha\beta}(\xi)$ nach steigenden Potenzen der ξ_i und erhalten aus

$$g^*_{\alpha\beta}(\xi)=\left(g^*_{\alpha\beta}\right)_0+\sum_\rho\left(\frac{\partial g^*_{\alpha\beta}}{\partial\xi_\rho}\right)_0\xi_\rho+\frac{1}{2}\sum_{\rho\sigma}\left(\frac{\partial^2 g^*_{\alpha\beta}}{\partial\xi_\rho\partial\xi_\sigma}\right)_0\xi_\rho\xi_\rho+\cdots$$

[38] In the following formula "$a_{\mu\nu}$" was corrected to "$\gamma_{\mu\nu}$" in pencil.

[39] The preceding half-sentence was interlineated.

[40] At the top of the page, Hilbert wrote in pencil: "Diese Rechnung ist durch Ueberlegungen zu ersetzen vgl. Vermeil Annalen", see *Vermeil 1917*, *Vermeil 1918*, and *Rowe 2001*, pp. 417–418.

wegen (16') und (16")

$$g^*_{\alpha\beta}(\xi) = \left(g^*_{\alpha\beta}\right)_0 + \sum_\rho \left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\rho}\right)_0 \xi_\rho \tag{16"'}$$

$$+ \sum_{\rho\sigma} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial x_\rho \partial x_\sigma}\right)_0 - \cdot \frac{3}{2} \sum_\lambda \left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\lambda} \left\{ \begin{matrix} \rho\sigma \\ \lambda \end{matrix} \right\} \right) \right)_0 \xi_\rho \xi_\sigma + \cdots .$$

Jetzt können wir aus (16'), (16") und (16"')

$$a_{\alpha\beta} = \sum_{\mu\nu} g^*_{\mu\nu}(\xi) \frac{\partial x_\mu}{\partial \xi_\alpha} \frac{\partial x_\nu}{\partial \xi_\beta}$$

als Potenzreihe in den ξ_i-Koordinaten berechnen. Dann finden wir in der Tat, dass die Koeffizienten der ersten Potenzen verschwinden. Die Koeffizienten der zweiten Potenzen sind die gesuchten Grössen

$$a_{\alpha\beta\rho\sigma} = \frac{\partial^2 a_{\alpha\beta}}{\partial \xi_\rho \partial \xi_\sigma},$$

und zwar sind es komplizierte Ausdrücke, welche die zweiten Ableitungen $\frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x_\kappa \partial x_\lambda}$ nur linear und die ersten Ableitungen nur quadratisch enthalten. Aus denselben bilden wir den Krümmungstensor $K_{\mu\nu} = \sum_{\rho\sigma} a_{\mu\nu\rho\sigma} g^{\rho\sigma}$ und finden

$$K_{\mu\nu} = \sum_\kappa \left(\frac{\partial}{\partial x_\nu} \left\{ \begin{matrix} \mu\kappa \\ \kappa \end{matrix} \right\} - \frac{\partial}{\partial x_\kappa} \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \kappa \end{matrix} \right\} \right) \tag{16*}$$

$$+ \sum_{\kappa\lambda} \left(\left\{ \begin{matrix} \mu\kappa \\ \lambda \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \lambda\nu \\ \kappa \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \kappa \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \kappa\lambda \\ \lambda \end{matrix} \right\} \right), \tag{2}$$

und schliesslich erhalten wir

$$K = \sum_{\mu\nu} K_{\mu\nu} g^{\mu\nu}$$

als *allgemeine Invariante*.

Diese Invariante nimmt, weil sie die einfachste ist, die wir aus der bekann- 34
ten Invariante $\sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu$ als neue ableiteten, sowohl hier in der zweidimensionalen Geometrie, als auch später in der vierdimensionalen Physik eine ausgezeichnete Stellung ein.

Ueber ihre Bauart ist zu bemerken, dass die erste in ihr auftretende Summe linear ist in den zweiten Ableitungen der $g_{\mu\nu}$, und dass sie keine ersten Ableitungen enthält. Die zweite Summe dagegen ist quadratisch in den ersten Ableitungen. Sie enthält wiederum keine zweiten Ableitungen.

Der Gedankengang, der uns zu dieser neuen Invariante führte, war verhältnismässig einfach. Der gewaltige Formalismus und Rechenapparat entsteht erst dadurch, dass man die Riemannschen Koordinaten wieder eliminieren muss, weil sie eben nur ein Hilfsmittel sind, um diese Invariante aufzufinden. Gauss hat in seiner „curvatura integra“ auf ganz anderem Wege, aber nur für den Fall der Fläche, d. h. der zweidimensionalen Mannigfaltigkeit die Krümmung schon berechnet.[41] Die Riemannsche Rechnungsweise dagegen, welcher wir uns angeschlossen haben, lässt sich für eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit durchführen. Sie findet sich in Riemanns „ungekrönter Preisarbeit“: „Commentatio nova etc.“.[42]

§ 15. Beispiel: Berechnung der Krümmung der Kugel

Die allgemeine Theorie wollen wir uns nun an einem Beispiel klar machen. Die Euklidische Geometrie ist hierzu nicht geeignet; denn für sie wird alles trivial einfach. Dann | sind nämlich alle g-Klammern Null, also werden auch alle $K_{\mu\nu} = 0$ und daher verschwindet die Invariante K ebenfalls identisch. Ein anderes Beispiel, das wir oben oft herangezogen haben, war
die Kugel: Für sie ist, wenn wir wieder $x_1 = \vartheta, x_2 = \varphi$ setzen

$$\begin{aligned} &g_{11} = 1; \quad g_{12} = 0; \quad g_{22} = \sin^2\vartheta; \quad g = \sin^2\vartheta, \\ &g^{11} = 1; \quad g^{12} = 0; \quad g^{22} = \tfrac{1}{\sin^2\vartheta}. \end{aligned}$$

Die von Null verschiedenen g-Klammern sind

$$\left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} = -\sin\vartheta\cos\vartheta, \qquad \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 21 \\ 2 \end{matrix} \right\} = \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}.$$

Hieraus berechnen wir

$$\begin{aligned} K_{11} &= \frac{\partial}{\partial\vartheta}\left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\}\left\{ \begin{matrix} 21 \\ 2 \end{matrix} \right\} = \frac{\partial}{\partial\vartheta}\frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta} + \frac{\cos^2\vartheta}{\sin^2\vartheta} = 1, \\ K_{12} &= 0, \\ K_{22} &= -\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 21 \\ 2 \end{matrix} \right\}\left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\}\left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\}\left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} \\ &= \frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta\cos\vartheta) - \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\sin\vartheta\cos\vartheta = -\sin^2\vartheta. \end{aligned}$$

Hiermit sind alle Komponenten des Krümmungstensors aufgefunden, und wir erhalten für die Invariante K den Wert

$$K = -1\cdot 1 - \sin^2\vartheta \cdot \frac{1}{\sin^2\vartheta} = -2.$$

[41] See *Gauss 1828*.

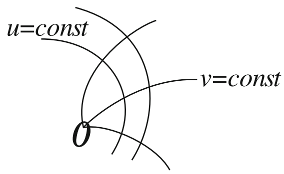
[42] *Riemann 1861* was submitted to the Academy in 1861 in response to a prize question concerning heat conduction. It did not win the prize which was withdrawn in 1868. Riemann's submission was only published posthumously in his *Collected Works*. For historical discussion and an English translation, see *Farwell and Knee 1990*.

Im geometrischen Sinne hat die Krümmung der Kugel vom Radius eins den Wert $+1$. Man hätte also, um die geometrische Krümmung zu finden, an dem K unserer Theorie den Faktor $-\frac{1}{2}$ anzubringen. Da dieser Faktor aber für unsere späteren Zwecke bedeutungslos ist, lassen wir ihn weg. Das Wesentliche, dass nämlich $K = \text{const.}$ wird, dass also auf der Kugel die Kongruenzsätze gelten, ist auch so zu erkennen.

§ 16. Gaussische Koordinaten 36

Nun wenden wir uns wieder der allgemeinen Theorie zu. Wir sind nämlich in der glücklichen Lage, im Falle der zweidimensionalen Mannigfaltigkeit die Formeln ganz *allgemein* noch wesentlich durchsichtiger gestalten zu können, und zwar greifen wir wieder zu dem bewährten Hilfsmittel der *Einführung neuer Koordinaten*. Schon eine flüchtige Ueberlegung lehrt, dass wir wahrscheinlich eine beträchtliche Vereinfachung werden erzielen können. Es sind uns doch drei willkürliche Funktionen $g_{\mu\nu}$ von x_1 und x_2 gegeben, die sich bei einer Transformation $u = u(x_1, x_2)$ und $v = v(x_1, x_2)$ wie ein kovarianter Tensor verhalten. An der Allgemeinheit der $g_{\mu\nu}$ dürfen wir natürlich vorerst nicht rütteln, ohne unerlaubte Spezialisierungen zu machen; wohl aber stehen uns noch die zwei Funktionen u und v von x_1 und x_2 zur freien Verfügung. Wir fragen also, wie sind dieselben zu wählen, damit die $g'_{\mu\nu}$ möglichst einfache Werte annehmen? Wir dürfen wohl schliessen, und die Rechnung wird die Richtigkeit dieser Ueberlegung alsbald bestätigen, *dass wir zwei Funktionen $g'_{\mu\nu}$ durch geeignete Wahl der frei verfügbaren Funktionen u und v ganz spezielle Werte erteilen können*: und zwar versuchen wir $g'_{11} = 1$, $g'_{12} = 0$ zu machen, worauf $g'_{22} = g'_{22}(u, v)$ immer noch eine ganz willkürliche Funktion von u und v bleibt. Der wesentliche Unterschied dieser Transformation gegenüber derjenigen der Einführung Riemannscher Koordinaten ist also der, dass wir jetzt versuchen, zwei Funktionen $g'_{\mu\nu}$ besonders einfach zu gestalten, während wir damals die Gleichungen der geodätischen Linie auf eine besonders ein|fache Form zu bringen trachteten. Dies sind zwei ganz verschiedene 37
Probleme. Trotzdem werden die jetzt einzuführenden Koordinaten mit den Riemannschen eine gewisse Aehnlichkeit haben.

Um die Rechnung durchzuführen, greifen wir aus unserer Geometrie einen beliebigen Punkt als 0-Punkt heraus und ziehen durch ihn alle geodätischen Linien. Solange die Punkte der Mannigfaltigkeit noch ihre alten Namen x_1, x_2 haben, sei die Gleichung der durch den 0-Punkt gehenden geodätischen Linie von der Form $f_2(x_1, x_2) = \text{const.}$ Führen wir also diese Funktion $f_2 = v$ als die eine neue Koordinate ein, so stellt $v = \text{const.} = a$, wenn wir die Konstante a noch willkürlich lassen, die Schar der durch den 0-Punkt gehenden geodätischen Linien dar. Wir werden sehen, dass durch diese Wahl der einen Koordinate $g'_{11} = \text{const.}$ gemacht wird. Die zweite Veränderliche $u = f_1(x_1, x_2)$ oder — wenn wir aus $v = f_2(x_1, x_2)$ die Funktion $x_2 = \varphi(v, x_1)$ berechnen und in u einsetzen — die unbekannte Funktion $u = U(x_1, v)$ bezw. $x_1 = \Phi(u, v)$ bestimmen wir dann aus der partiellen Differentialgleichung $g'_{12} = (u, v) = 0$. Die hierbei auftretende willkürliche Funktion legt die Kurve in der zweidimensionalen Mannigfaltigkeit fest.



Wir werden zeigen, dass $g'_{12}(u, v) = 0$ darauf hinauskommt, dass die Kurven $u =$ const. die orthogonalen Trajektorien der Kurven $v =$ const. sind. Doch müssen wir hierzu erst den *Begriff des*
38 *Winkels* definieren. | Hiermit haben wir *ein Koordinatensystem* eingeführt, *das dem der Polarkoordinaten* $r(= u)$, $\varphi(= v)$ in der Euklidischen Geometrie *analog ist*. Wir müssen noch beweisen, dass für dieses Bezugssystem in der Tat $g'_{11}(u, v) =$ const. wird:

Die Gleichung der geodätischen Linie bestimmt sich in der Form $v = f(u)$ aus dem Variationsproblem

$$\int_{u_1}^{u_2} \sqrt{g'_{11}(u, f(u)) + g'_{22}(u, f(u)) \left(\frac{dv}{du}\right)^2}\, du = \text{Min.}$$

Hierbei sind also g'_{11} und g'_{22} Funktionen von u allein.[43] Geodätische Linien, für welche $u =$ const. wird, können wir freilich auf diese Weise nicht erhalten. Ein Integral der zu diesem Problem gehörigen Lagrangeschen Differentialgleichung muss aber $v =$ const. sein, da dies geodätische Linien durch den 0-Punkt darstellt. Wir bilden also die Lagrangesche Ableitung und erhalten so als Differentialgleichung der geodätischen Linie

$$\frac{d}{du}\left(\frac{\partial}{\partial \frac{dv}{du}} \sqrt{g'_{11} + g'_{22}\left(\frac{dv}{du}\right)^2}\right) - \frac{\partial}{\partial f}\sqrt{g'_{11} + g'_{22}\left(\frac{dv}{du}\right)^2} = 0.$$

Führen wir die Differentiation aus, so ergibt sich

$$\begin{aligned} &\frac{d}{du}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{g'_{11} + g'_{22}\left(\frac{dv}{du}\right)^2}} 2g'_{22}\frac{dv}{du}\right) \\ &\qquad - \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{g'_{11} + g'_{22}\left(\frac{dv}{du}\right)^2}}\left(\frac{\partial g'_{11}}{\partial f} + \left(\frac{dv}{vu}\right)^2 \frac{\partial g'_{22}}{\partial f}\right) = 0. \end{aligned}$$

Hierin setzen wir die Lösung $v =$ const., d.h. $\frac{dv}{du} = 0$ ein und erhalten $\frac{\partial g'_{11}}{\partial f} = 0$, d. h. $g'_{11} = \varphi(U)$. Nun hat also das Linienelement die gewünschte Gestalt, wobei $\int^u \sqrt{\varphi(u)}du = U$ ist,

$$ds^2 = \left\{1 + \hat{g}_{22}(U, \hat{f}(U))\left(\frac{dv}{dU}\right)^2\right\} dU^2$$

[43] In the left margin, Hilbert wrote in pencil: "' ' überall weglassen der Einfachheit halber".

oder, wenn die Kurve wieder in der Parameterdarstellung $u = u(p)$, $v = v(p)$ gegeben ist,

$$ds^2 = \left\{u^2 + g'_{22}(u,v)\dot{v}^2\right\} dp^2,$$

worin g'_{22} wieder Funktion von u und v ist. Trotzdem das | Linienelement 39
nun eine ganz spezielle Form hat, haben wir also, um das nochmals zu betonen, keine Spezialisierung unserer Geometrie vorgenommen. Die hier skizzierte Rechnung wurde schon von *Gauss* durchgeführt.[44] Derselben Schlussweise bedient man sich übrigens auch in der projektiven Geometrie, um eine Form auf ihre einfachste Gestalt zu bringen. Setzen wir hier speziell $g_{22} = \sin^2 u$, so erhalten wir wieder die Geometrie auf der Kugel.

In der Physik werden zwar ähnliche Ueberlegungen wie die hier angestellten auch möglich sein, doch kann man dort leider durch spezielle Wahl des Koordinatensystems nicht entfernt dieselbe Vereinfachung erzielen. In der Tat haben wir dort entsprechend den vier Dimensionen 10 willkürliche Funktionen $g_{\mu\nu}$ und nur 4 Funktionen $x'_i(x_1, x_2, x_3, x_4)$ zu unserer freien Verfügung.

Nun werden sich *die Komponenten $K_{\mu\nu}$ des Krümmungstensors* besonders *einfach berechnen* lassen, so dass wir den Wert dieser Transformation, die die Rechnung so sehr vereinfacht, zu ermessen vermögen. Wir haben also $ds^2 = du^2 + g_{22}dv^2$ und müssen hieraus zunächst wieder die g-Klammern bilden, in denen wir sozusagen die Bausteine des Krümmungstensors erkannt haben. Dieselben müssen sich nun durch g_{22} und dessen beide Ableitungen nach u und v ausdrücken lassen. Wir benutzen wieder die Methode, die Gleichungen der geodätischen Linie in ihre Normalform

$$\left.\begin{matrix}\ddot{u}\\ \ddot{v}\end{matrix}\right\} + \text{homogene quadratische Form in } \dot{u} \text{ und } \dot{v} = 0 \text{ zu bringen.}$$

Aus

$$\int_{p_1}^{p_2} \left(\dot{u}^2 + g_{22}\dot{v}^2\right) dp = \text{Minimum}$$

erhalten wir als Lagrangesche Ableitungen 40

$$\ddot{u} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial u}\dot{v}^2 = 0,$$
$$\frac{d}{dp}\left(2g_{22}\dot{v}\right) - \frac{\partial g_{22}}{\partial v}\dot{v}^2 = 0$$

oder $(u = x_1, v = x_2)$

$$\ddot{u} - \frac{1}{2}g_{221}\dot{v}^2 = 0, \qquad \ddot{v} + \frac{1}{g_{22}}g_{221}\dot{u}\dot{v} - \frac{1}{2g_{22}}g_{222}\dot{v}^2 = 0.$$

[44]See *Gauss 1828*.

Hieraus kann man die g-Klammern ablesen:

$$\left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} = -\frac{1}{2} g_{221},$$
$$\left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 21 \\ 2 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2g_{22}} g_{221}; \qquad \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2g_{22}} g_{222}$$

Damit haben wir alle Stücke, aus denen die $K_{\mu\nu}$ aufgebaut sind. Wir finden

$$K_{11} = \frac{\partial}{\partial u} \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 21 \\ 2 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \frac{g_{22} g_{2211} - g_{221}^2}{g_{22}^2} + \frac{1}{4} \frac{g_{221}^2}{g_{22}^2},$$
$$K_{11} = \frac{1}{2g_{22}} \left\{ g_{2211} - \frac{1}{2g_{22}} g_{221}^2 \right\}.$$

K_{12} braucht zwar gar nicht berechnet zu werden, weil $g^{12} = 0$ ist, so dass K_{12} in der Formel für die Krümmung nicht auftritt. Tun wir es trotzdem, so finden wir

$$K_{12} = 0.$$

Schliesslich wird

$$\begin{aligned} K_{22} = {} & \frac{\partial}{\partial v} \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix} \right\} - \frac{\partial}{\partial u} \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} - \frac{\partial}{\partial v} \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 21 \\ 2 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} \\ & + \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} \\ & - \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g_{2211} - \frac{1}{4g_{22}} g_{221}^2 = g_{22} K_{11}, \end{aligned}$$

so dass wir für

$$K = K_{11} \cdot 1 + K_{22} \cdot \frac{1}{g_{22}} = 2K_{11} = \frac{1}{g_{22}} \left\{ g_{2211} - \frac{1}{2g_{22}} g_{221}^2 \right\}$$

erhalten. Nun kann K_{11} noch auf eine einfachere Form gebracht werden. Wir setzen $g_{22} = \gamma^2$ dann wird $g_{221} = 2\gamma\gamma_u$ $g_{2211} = 2\gamma_v^2 + 2\gamma\gamma_{uu}$ dann wird

$$K_{11} = \frac{1}{2} \frac{2\gamma_u^2 + 2\gamma\gamma_{uu}}{\gamma^2} - \frac{1}{4} \frac{4\gamma^2\gamma_u^2}{\gamma^2} = \frac{1}{\gamma} \gamma_{uu}$$

und wir erhalten als *Schlussresultat*

$$K = \frac{2}{\gamma} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial u^2}. \tag{17}$$

41 Setzen wir statt $\frac{1}{\gamma}\gamma_{uu}$ seinen Wert $\frac{1}{2}K$ in die Ausdrücke | für die Komponenten des Krümmungstensors ein, so verifizieren wir die Formel

$$K_{\mu\nu} = \frac{1}{2} K g_{\mu\nu},$$

d. h. der Krümmungstensor ist dem Tensor $g_{\mu\nu}$ selbst proportional. Dies ist aber nur im binären Gebiet der Fall!

§ 18. Zusammenhang der Invariante K mit der Gaussischen Krümmung der Fläche

Dier hiermit abgeleitete einfachste Ausdruck für K setzt uns in den Stand, den innigen

Zusammmenhang zwischen der Gauss'schen Krümmung und der Invariante K

aufzuklären. Wir können nämlich nachweisen, dass der Wert von K *für irgend einen Punkt der Fläche*, auf welcher wir Geometrie treiben, bis auf den konstanten Faktor -2 *identisch* ist *mit dem* Wert des *Gauss'schen Krümmungsmasses* auf dieser Fläche. Damit sehen wir ein, dass wir berechtigt sind, die Invariante K als Krümmung unserer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit anzusprechen. Ein gewisser Zusammenhang zwischen den beiden Begriffen wurde uns schon oben dadurch nahegelegt, dass wir für die Kugel, von der wir wissen, dass ihre Gauss'sche Krümmung konstant ist, auch die Konstanz der Invariante K nachgewiesen haben.

Wir denken uns also eine beliebige Fläche in ihrer einfachsten Form $Z = Z(x, y)$ im Euklidischen Raum gegeben. Die Länge S der Verbindunglinie zweier Flächenpunkte ist dann definiert als das Integral ($u, v =$ Koordinaten auf der Fläche)

$$S = \int \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \int \sqrt{g_{11} + 2g_{12}\frac{dv}{du} + g_{22}\left(\frac{dv}{du}\right)^2}\, du.$$

Die Fläche selber denken wir uns nun im Raum in solcher Lage, dass der Punkt, in dem die Krümmung berechnet werden soll, in | den 0-Punkt des 42
räumlichen x, y, z-Koordinatensystems fällt, und dass die x, y-Ebene in jenem Punkt die Tangentialebene der Fläche ist. Um die z-Achse, d. h. die Flächennormale im Punkt als Achse werde die Fläche dann noch so gedreht, dass in der Gleichung der Fläche, entwickelt nach steigenden Potenzen von x und y für die Umgebung des Punktes das Glied mit $x \cdot y$ verschwindet. Dann hat die Gleichung der Fläche, sofern sie keine Ebene ist, immer die Gestalt $Z = \frac{a}{2}(x^2 \pm y^2) + \cdots$, so dass *die einzigen, eine beliebige Fläche in irgend einem ihrer Punkte beschreibenden Grössen die Konstante a* und *das Vorzeichen von y^2* sind. Setzen wir noch

$$x = u, \qquad y = v, \qquad Z = \frac{a}{2}(u^2 \pm v^2) + \cdots, \tag{18}$$

so haben wir in der Umgebung dieses Punktes die Fläche in der Parameterdarstellung $x_i = x_i(u, v)$. Dann wird gemäss unseren allgemeinen Formeln

$$g_{11} = \sum \left(\frac{\partial x_i}{\partial u}\right)^2 = 1 + a^2u^2 + \cdots, \qquad g_{12} = \sum \frac{\partial x_i}{\partial u}\frac{\partial x_i}{\partial v} = \pm a^2uv + \cdots,$$

$$g_{22} = \sum \left(\frac{\partial x_i}{\partial v}\right)^2 = 1 + a^2v^2 + \cdots,$$

und wir erhalten

$$g_{11} + 2g_{12}\frac{dv}{du} + g_{22}\left(\frac{dv}{du}\right)^2 = 1 + a^2\left(u \pm v\frac{dv}{du}\right)^2 + \left(\frac{dv}{du}\right)^2 .$$

Von diesem Ausdruck bildet man die Lagrangesche Ableitung und kommt so zu den g-Klammern. Aus diesen und aus ihren Ableitungen kann man dann in bekannter Weise die Tensorkomponenten $K_{\mu\nu}$ aufbauen. Wir sehen übrigens, dass im 0-Punkt selber die sämtlichen Ableitungen der $g_{\mu\nu}$ und daher auch alle g-Klammern verschwinden, so dass nur die Ableitungen der g-Klammern Beiträge zum Krümmungstensor liefern. Ferner ersieht man, dass
43 der Wert der Invariante K im willkürlichen 0-Punkt | allein eine Funktion von
a und dem Vorzeichen von $a^2uv\frac{dv}{du}$ ist, also vollkommen unabhängig davon, wie die Fläche ausserhalb der Umgebung des Punktes beschaffen sein mag. Um herauszufinden, *was für eine Funktion* von a und diesem Vorzeichen sie ist, werden wir daher eine ganz spezielle, möglichst einfache Fläche auswählen. Die Ebene hatten wir schon oben ausgeschlossen, und so ziehen wir wieder *die Kugel* in unsere Betrachtung.

Für die Kugel vom Radius eins hat K, wie wir schon wissen, den Wert $K = -2$. Für die Kugel vom Radius r wollen wir K von neuem berechnen, indem wir den einfachen Ausdruck (17) benutzen, um zu zeigen, wie sehr wir uns die Rechnung nun gegen früher erleichtert haben. Das allgemeine räumliche Linienelement hat in Polarkoordinaten die Form

$$ds^2 = dr^2 + r^2 dv^2 + r^2 \sin^2\vartheta d\varphi^2,$$

also ist auf der Kugel vom Radius r $ds^2 = r^2 d\vartheta^2 + r^2\sin^2\vartheta d\varphi^2$. Damit K durch (17) dargestellt wird, muss $g_{11} = 1$ werden. Wir setzen also $r\vartheta = u$, $\varphi = v$ und erhalten

$$ds^2 = du^2 + r^2 \sin^2\frac{u}{r} dv^2.$$

Hierin ist $\gamma = \sqrt{g_{22}} = r\sin\frac{u}{r}$ und es wird

$$K = \frac{2}{r\sin\frac{u}{r}} r \frac{\partial^2}{\partial u^2}\left(\sin\frac{u}{r}\right) = -\frac{2}{r^2}.$$

Nun ist noch der *Zusammenhang zwischen dem a der allgemeinen Fläche und dem r der Kugel* festzustellen. Dies geschieht, indem wir die Gleichung der Kugel in der Umgebung eines Punktes auf die Gestalt (18) bringen. Die Kugel, die im 0-Punkt die x, y-Ebene zur Tangentialebene hat, wird durch die Gleichung

$$x^2 + y^2 + (z - r)^2 = r^2$$

44 dargestellt. Hieraus folgt $x^2 + y^2 + z^2 - 2rz = 0$. | Dies ist eine quadratische
Gleichung für z. Ihre Wurzeln sind $z = r - \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$. Für $x = 0$, $y = 0$

soll $z = 0$ sein, also gilt nur das negative Zeichen vor der Wurzel, und wir erhalten, wenn wir nach steigenden Potenzen von x und y entwickeln

$$Z = r \pm r \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\frac{x^2 + y^2}{r^2}.$$

Durch den Vergleich mit (18) finden wir $a = \frac{1}{r}$ und wir erhalten

$$K = -2 \cdot a^2$$

als die gesuchte Funktion $K(a)$ in einem beliebigen Punkt einer willkürlichen Fläche, in dem in (18) das positive Vorzeichen gilt. Ohne Beweis teilen wir mit, dass

$$K = -2(-a^2)$$

wird in einem Flächenpunkt mit negativem Vorzeichen von y^2.

§ 19. Die Hauptkrümmungsradien einer Fläche

Der Grösse $\pm a^2$ kann man eine anschauliche *geometrische Bedeutung* geben, wenn man den Begriff der *Hauptkrümmungsradien* in einem Flächenpunkte einführt, den wir folgendermassen erläutern wollen. Wir denken uns wieder die x, y-Ebene als Tangentialebene der Fläche in dem betrachteten Punkt und die Z-Achse wieder als Normale in dem selben. Dann schneidet jede Ebene des durch die Z-Achse gehenden Bündels die Fläche in einer Kurve. Der die Kurve in diesem Punkte oskulierende Kreis habe den Radius ρ, dessen Grösse eine Funktion des Winkels ist, welchen die betreffende Schnittebene mit der x-Achse bildet. Das Produkt seiner beiden Extremwerte[45] $\rho_1 \cdot \rho_2$ findet man, wenn die Fläche in der Form $z = z(x, y)$ gegeben ist, nach einem Satze der Flächentheorie zu 45

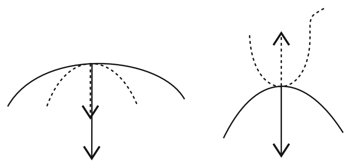
$$\rho_1\rho_2 = \frac{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}}.$$

Den Ausdruck rechter Hand können wir in der Umgebung eines Punktes (18) berechnen und erhalten $\rho_1\rho_2 = \pm\frac{1}{a^2}$ also ergibt sich das wichtige Endresultat

$$K = -2\frac{1}{\rho_1\rho_2}. \tag{19}$$

Der Wert des Produktes $\rho_1\rho_2$ ist positiv oder negativ, je nachdem

[45] "Das Produkt seiner beiden Extremwerte" was corrected from "Seine beiden Extremwerte".



die beide Hauptkrümmungradien in dem Flächenpunkt nach derselben oder nach verschiedenen Seiten der Fläche wiesen. Im ersten Fall gilt in (18) das positive, im zweiten das negative Vorzeichen. *Die Fläche heisst* in diesem Punkte bezw. *elliptisch* und *hyperbolisch gekrümmt*. Bezeichnen wir die Krümmung im Gauss'schen Sinne mit $G = \frac{1}{\rho_1 \rho_2}$, so hat die Riemannsche Invariante K den Wert $K = -2G$. Damit haben wir ein ganz *merkwürdiges Resultat* erhalten:

Die Gauss'sche Krümmung G hat die geometrische Bedeutung: $\frac{1}{\rho_1 \cdot \rho_2}$; sie ist also ein Begriff, den man mit der Fläche erst dann verbinden kann, wenn man sie sich im dreidimensionalen Euklidischen Raum gegeben denkt. Diese Krümmung haben wir nun, und dies ist ein höchst *überraschendes Ergebnis*, durch den Tensor der $g_{\mu\nu}$ und deren Ableitungen nach den beiden Parametern u, v der Fläche darstellen können. Dies sind aber lauter Grössen, die mit der *Lage* der Fläche im Raum nicht das Mindeste zu tun haben, die vielmehr der „geo-
46 metria intrinsica“ angehören, d. h. der Geometrie der Fläche, wenn wir sie als zweidimensionale Punktmannigfaltigkeit deuten, in welcher jedem Punkt u, v drei Funktionswerte $g_{\mu\nu}$ zugeordnet sind. Durch diese drei Funktionen wird der Begriff der Länge einer zwei Punkte der Mannigfaltigkeit verbindenden Kurve definiert. Nun wird es klar dass *die Gauss'sche Krümmung bei Verbiegungen der Fläche invariant* bleibt. Verbiegung einer Fläche nennt man nämlich jede solche Lagenänderung der Fläche im Raum, dass eine zwei Flächenpunkte verbindende Kurve ihre Länge beibehält. Zwei Flächen sind dann und nur dann ineinander verbiegbar, wenn es durch Einführung geeigneter Parameter gelingt, dass die Funktionen $g_{\mu\nu}$ in entsprechenden Flächenpunkten dieselben Werte erhalten. *Vom Standpunkt der Geometrie auf zweidimensionalen Punktmannigfaltigkeiten sind aber zwei Flächen*, denen dieselben Funktionen $g_{\mu\nu}$ eigen und *die* daher *ineinander verbiegbar sind, einander vollkommen identisch*. Für sie hat natürlich die Riemannsche Invariante K denselben Wert. Vom Standpunkt desjenigen aber, der Flächentheorie treibt, der in der Fläche also ein im dreidimensionalen Raum liegendes zweidimensionales Gebilde sieht, sind zwei Flächen, die durch Verbiegung auseinander hervorgehen, ganz verschieden. Auch die Hauptkrümmungsradien haben in entsprechenden Punkten jeder einzeln durchaus nicht denselben Wert, ihr Produkt aber bleibt bei Verbiegungen ungeändert; denn es ist allein eine Funktion von Grössen der geometria intrinsica. Von deren Standpunkt betrachtet bedeutet aber eine Verbiegung überhaupt nichts, da die $g_{\mu\nu}$ ja ungeändert bleiben. Sie ist
47 nicht einmal eine Koordinatentransformation, | da sogar die Koordinaten eines Punktes auf der Fläche dieselben bleiben. — Der Beweis der Invarianz der

Krümmung bei Verbiegung einer Fläche ist der Hauptsatz der schon zitierten „curvatura integra" von Gauss.[46]

In der Flächentheorie ist es von Wichtigkeit zu wissen, ob man jede durch drei willkürlich vorgegebene Funktionen $g_{\mu\nu}$ bestimmte zweidimensionale Geometrie als Geometrie auf einer Fläche im Euklidischen Raum deuten kann. Diese Frage ist in der Tat, aber nur für den Fall der zweidimensionalen Punktmannigfaltigkeit (drei Funktionen $g_{\mu\nu}$), zu bejahen. D. h. also, man kann die Fundamentalgrössen $g_{\mu\nu}$ der Fläche beliebig vorgeben, und es wird *die Theorie der Geometrie der zweidimensionalen Punktmannigfaltigkeit identisch mit der Flächentheorie* im dreidimensionalen Raum. Für uns ist das aber ganz gleichgültig, da wir die Fläche nur zur Veranschaulichung herangezogen haben.

§ 20. Die Flächen konstanter Krümmung

Wir machen eine weitere Anwendung von der einfachen Form, auf die wir die Krümmung gebracht haben und fragen: Welches sind *die allgemeinsten Geometrien, bei denen*[47]

$$K = \text{const} = 2k^2$$

wird? Dann muss $\frac{1}{\gamma}\frac{\partial^2\gamma}{\partial u^2} = k^2$ sein. Für $k^2 \neq 0$ unterscheiden wir die zwei wesentlichen Fälle:

1) Für $k^2 = -1$ wird $\gamma = \sin u$. Dies gibt das Linienelement der *Kugel* und aller duch Verbiegung aus ihr hervorgehenden Flächen.

2) Für $k^2 = +1$ wird $\gamma = e^u$ bezw. $= \sinh u$. | In diesem Fall, den wir noch nicht 48
betrachtet haben, ist die Gauss'sche Krümmung der Fläche negativ konstant. Flächen, die diese Geometrie realisieren, sind sattelförmig. *Die Rotationsfläche der Traktrix*, auf der diese Geometrie auch gilt, nennt man wegen ihres negativen konstanten Krümmungsmasses wohl auch *Pseudosphäre*.[48]

Dass die Krümmung auf der Kugel konstant sein muss, wissen wir; denn die Kugel ist ja in sich transformierbar. Es frägt sich nun, ob bei der Pseudosphäre ebenfalls eine solche Transformation in sich möglich ist, worauf es selbstverständlich wird, dass die Krümmung derselben konstant ist. Diese Frage ist zu bejahen. In der Tat ist deren Linienelement $ds^2 = du^2 + \sinh^2 u dv^2$ das Linienelement der berühmten Bolyai-Lobatscheffskyschen Geometrie, auf die wir noch zu sprechen kommen werden.[49]

[46] Cf. Gauss's *theorema egregium*: "Si superficies curva in quamcunque aliam superficiem explicatur, mensura curvaturae in singulis punctis invariata manet." ("If a curved surface is developed upon any other surface whatever, the measure of curvature in each point remains unchanged.") *Gauss 1828*, § 12, *Gauss 1965*, p. 20.

[47] In the following formula, $K = \text{const}$ is underlined.

[48] See § 23 below.

[49] See § 22 below.

§ 21. Definition des Winkels

In jeder Geometrie spielt neben der Geraden oder kürzesten Linie der Begriff des *Winkels* die wichtigste Rolle, und so müssen wir erst noch definieren, was wir darunter verstehen wollen. Als wir oben (S. 36 ff.) solche Koordinaten auf der Fläche einführten, dass $g_{12} = 0$ wurde, hätten wir zur geometrischen Interpretation dieser Differentialgleichung diesen Begriff schon kennen sollen. Wir wollen nun zeigen, dass der *Winkel um einen Punkt herum* trotz der wenigen Voraussetzungen, die wir zur Begründung der Geometrie nötig hatten, einwandfrei definiert werden kann. Zu diesem Zwecke greifen wir den willkür-
49 lichen Punkt $x_i = 0$ unserer Mannigfaltigkeit heraus. | Das Linienelement hat, in der Ausdrucksweise der Zahlentheorie geschrieben, in der Umgebung dieses Punktes die Form

$$ds^2 \equiv (g_{11})_0 dx_1^2 + 2(g_{12})_0 dx_1 dx_2 + (g_{22})_0 dx_2^2 + (x_\lambda dx_\mu dx_\nu).$$

Es ist also im wesentlichen Euklidisch. Durch eine homogene, lineare Transformation erteilen wir $g_{\mu\nu}$ den Wert $\delta_{\mu\nu}$, so dass

$$ds^2 \equiv dx_1^2 + dx_2^2 + (x_\lambda dx_\mu dx_\nu) \tag{20}$$

wird. Dabei ist von der Voraussetzung, dass die quadratische Form $\sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu}$ $dx_\mu dx_\nu$ positiv definit ist, d. h. dass $g_{11} > 0 \quad g_{11}g_{22} - g_{12}^2 > 0$ ist, Gebrauch gemacht. Wir behaupten, dass *durch Substitution* $x_1 = 2\cos\varphi \quad x_2 = 2\sin\varphi$ der *Winkel* φ *eindeutig*, d. h. unabhängig von dem zugrundegelegten Koordinatensystem x_i *definiert* ist. Für kleine Werte von r geht (20) nun über in

$$ds^2 \equiv dr^2 + r^2 d\varphi^2 + (rdr^2, r^2 dr d\varphi, r^3 d\varphi^2).$$

Um unsere Behauptung zu beweisen, müssen wir eine beliebige Transformation der $x_i = x_i(x_1' x_2')$ durchführen, bei der der 0-Punkt ungeändert bleibt, und zeigen, dass sich dabei φ nicht verändert. Durch eine solche Transformation wird

$$r = r(r', \varphi'), \qquad \varphi = \varphi(r', \varphi')$$

und wir haben nachzuweisen, dass $\varphi' = \varphi$ ist. Da die Transformation nur für kleine r' ausgeführt wird, entwickeln wir r und φ nach Potenzen von r'.

$$\begin{aligned} r &= f_1(\varphi')r' + f_2(\varphi')r'^2 + \cdots , \\ \varphi &= \varphi_0(\varphi') + \varphi_1(\varphi')r' + \varphi_2(\varphi')r'^2 + \cdots , \end{aligned}$$

wobei also f_i und φ_i Funktionen von φ' allein sind. Wir bilden

$$\begin{aligned} dr^2 &= \left\{ (f_1 + 2f_2 r' + \cdots)\, dr' + \left(\frac{\partial f_1}{\partial \varphi'} r' + \frac{\partial f_2}{\partial \varphi'} \partial\varphi' r'^2 + \cdots \right) d\varphi' \right\}^2 , \\ d\varphi^2 &= \left\{ (\varphi_1 + 2\varphi_2 r' + \cdots)\, dr' + \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial \varphi'} + r' \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi'} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \varphi'} r'^2 + \cdots \right) d\varphi \right\}^2 . \end{aligned}$$

50 Die zweite Gleichung wird mit r^2 multipliziert, rechter Hand für r^2 der Ausdruck in r' und φ' eingesetzt und zur ersten addiert. Dann sammeln wir, was mit dr'^2 multipliziert ist, und dies muss $\equiv 1 \cdot dr'^2 + (r'dr'^2, r'^2dr'd\varphi', r'^3d\varphi'^2)$ ⟨sein⟩. Diese Gleichung liefert für $r' = 0$: $f_1^2(\varphi') = 1$, d. h. $f_1 = +1$, weil ja $r' > 0$ ist. Nun sammeln wir noch, was mit $d\varphi'^2$ mulitpliziert ist. Dies muss $\equiv r'^2d\varphi'^2 + (r'dr'^2, r'^2dr'd\varphi', r'^3d\varphi'^2)$ ⟨sein.⟩ Die erste Gleichung liefert wegen $\frac{\partial f_1}{\partial \varphi'} = 0$ keinen Beitrag. Wir erhalten also nur $r'^2 \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial \varphi'}\right)^2 = r'^2$, d. h. $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \varphi'}\right)^2_{r'=0} = 1, \quad \varphi' = \pm\varphi$. Der Winkel φ ist also *eindeutig festgelegt bis auf den Richtungssinn* und seine Definition ist invariant, w.z.b.w. Nun kann man auch rechte Winkel definieren. Ferner kann man jetzt zeigen, dass *für* $g_{12} = 0$ die Koordinatenkurven *orthogonale Trajektorien* zueinander sind.

Wir wollen noch beweisen, dass die hier gegebene Definition des Winkels, wenn wir unsere Geometrie durch eine Fläche im Raum gewinnen, mit der *Euklidischen Definition des Winkels* auf der Fläche übereinstimmt: die Flächengleichung sei wieder in der Umgebung des betrachteten Punktes $z = \frac{a}{2}(x^2 + y^2) + \cdots$. Wir setzen $x = u$, $y = v$, $z = \frac{a}{2}(u^2 \pm v^2) + \cdots$, dann wird $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \equiv du^2 + dv^2 + (udu^2, \cdots)$. Dies ist aber die Gleichung (20), aus der wir den Winkel gewannen. Man sieht also, dass durch die drei Funktionen $g_{\mu\nu}$ mit einem Schlage Länge und Winkel um einen Punkt herum festgelegt sind. φ hat, dies liegt in seiner Definition, die | Periode 2π. Nun sind 51
wir mit der Begründung der Geometrie zu Ende. Wir haben eine Wissenschaft aufgebaut, die an der Erfahrung prüfbar ist. Die Experimente, die das Kind von Anfang an macht, sind schon eine solche Prüfung. Sie sind vom selben Charakter wie diejenigen des Physikers, nur lassen sie sich ohne komplizierte Apparate ausführen, und man bezeichnet sie daher als „Anschauung". Wir haben freilich nicht die Anschauung herangezogen, wir sind vielmehr axiomatisch vorgegangen, haben uns auch über alle Schwierigkeiten hinweggesetzt, dadurch, dass wir einerseits absolute Stetigkeit und Differenzierbarkeit aller Funktionen vorausgesetzt haben und andererseits die ganze Analysis als gegeben hinnahmen.

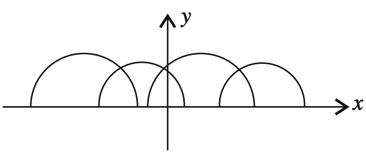
§ 22. Deutung der Bolyai-Lobatscheffsky'schen Geometrie in der Gaussischen Zahlenebene

Einzig in der Euklidischen ($G = 0$) und in den beiden Nichteuklidischen ($G = \pm 1$) Geometrien hat man die Möglichkeit, die zweidimensionalen Punktmannigfaltigkeiten in sich zu transformieren. Dann gehen geometrische Figuren von endlicher Ausdehnung in sich über. Auf einer Fläche, die eine solche Geometrie realisiert, kann man also ein biegbares Blechstück überall verschieben, ohne dass es verzehrt wird. Für die Kugel ($G = \pm 1$) ist dies unmittelbar klar. Wir wollen nun noch *analytisch* zeigen, dass auch

auf der *die Bolyai-Lobatscheffskysche Geometrie* darstellenden Pseudosphäre ($G=-1; ds^2 = du^2 + e^{2u}dv^2$) *Transformationen in sich möglich sind*, besonders, da dies auch in der Funktionentheorie von Interesse ist. Wir setzen $x = v$,
52 $y = e^{-u}$ und setzen nachher $z = x + iy$. | Dann wird $dx = dv$, $dy = -e^{-u}du$; $dx^2 + dy^2 = dv^2 + e^{-2u}du^2$, also ist $du^2 + e^{2u}dv^2 = (dx^2+dy^2)e^{2u} = \frac{dx^2+dy^2}{y^2}$. Die Länge eines endlichen Kurvenstückes wird zu

$$\int ds = \int \frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{y} = \int \frac{|dz|}{y}.$$

Das ist die bekannte Form des Nichteuklidischen Linienelementes bei einer Interpretation in der oberen Hälfte der Gauss'schen Zahlenebene.



Die Winkel, unter denen sich zwei Kurven auf der Pseudosphäre schneiden, stimmen mit denen der entsprechenden Bildkurven in der Ebene überein. Dagegen ist die Länge der Kurven nicht die wirkliche. Hier repräsentiert die x-Achse ($y = 0$) das Unendlichferne. Auf ihr liegen also die Enden aller ins Unendliche laufenden Kurven. Die x-Achse selber gehört daher nicht mehr zur Geometrie. Diese Deutung der Nichteuklidischen Geometrie verdankt ihre Berühmtheit dem Umstand, dass sich die *geodätischen Linien* in der komplexen Zahlenebene besonders einfach darstellen. Um ihre Gleichung aufzufinden, haben wir $\int \frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{y^2}dp =$ Minimum zu machen. Zwei Integrale der zugehörigen Lagrangeschen Differentialgleichungen sind

$$\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{y^2} = c, \qquad \frac{\dot{x}}{y^2} = C.$$

Hieraus erhalten wir $1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{a}{y^2}$ oder

$$y^2 = -x^2 + \alpha x + \beta.$$

Dies sind die geodätischen Linien und zwar stellt diese Gleichung die zweifach
53 unendliche Mannigfaltigkeit der zur | *x-Achse orthogonalen Kreise* dar. Zwei Punkte der Mannigfaltigkeit sind also durch eine und nur eine gerade Linie zu verbinden.

Setzt man $x^2 + y^2 = u$, $x = v$, so ist die Gleichung aller zur x-Achse orthogonalen Kreise in diesen Koordinaten $u = \alpha v + \beta$ eine *lineare*, d. h. *sämtliche* geodätischen Linien der Geometrie, und nicht nur die durch einen Punkt gehenden werden durch eine *lineare Gleichung* zwischen *denselben* geeignet gewählten Parametern dargestellt.

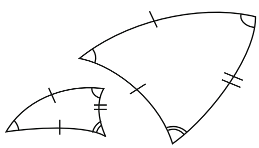
Die Geraden dieser Geometrie haben eine unendliche Länge, weil sie bis an die x-Achse heranreichen; ganz im Gegensatz zur Riemann-Helmholtzschen

Geometrie, deren Gerade als grösste Kreise auf der Kugel in sich zurücklaufen und eine endliche Länge haben. Die *Kongruenzsätze* gelten hier, weil die Transformation in sich

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

möglich ist. Trennen wir Real- und Imaginärteil, so folgt

$$x' = \frac{1}{(\gamma x + \delta)^2 + \gamma^2 y^2} \left\{ \alpha\gamma(x^2 + y^2) + (\alpha\delta + \beta\lambda)x + \alpha\delta \right\}, \tag{21}$$
$$y' = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\lambda x + \delta)^2 + \lambda^2 y^2} y.$$



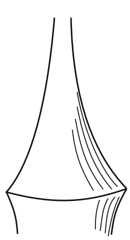
Die neue x'-Achse hat die Gleichung $y' = 0$, d. h. $y = 0$, wobei $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ vorausgesetzt ist. Die y'-Achse ist in der z-Ebene der Kreis $\alpha\gamma(x^2 + y^2) + (\alpha\delta + \beta\gamma)x + \alpha\delta = 0$. Kreise, die vor der Transformation die x-Achse orthogonal | schnitten, behalten 54
die Eigenschaft bei, d. h. Gerade bleiben Gerade. Die Transformation kann durch geeignete Wahl von α, β, γ, δ so eigerichtet werden, dass zwei Seiten eines beliebigen Dreiecks und der von ihnen eingeschlossene Winkel zur Deckung kommen mit gleich großen entsprechenden Stücken eines andern Dreiecks.[50] Dann stimmen auch die beiden anderen Winkel und die dritte Seite überein. Dies folgt aus der Invarianz des Integrals $\int_{p_1}^{p_2} ds$ bei dieser Transformation. Diese Invarianz ist leicht zu beweisen. Es ist nämlich

$$\frac{|dz'|}{|dz|} = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{|(\gamma z + \delta)^2|} = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\gamma x + \delta)^2 + \gamma^2 y^2} = \frac{y'}{y'},$$

also folgt

$$\frac{|dz'|}{y'} = \frac{|dz|}{y}.$$

§ 23. Deutung dieser Geometrie auf der Pseudosphäre



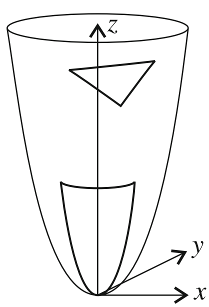
Die *Darstellung der Nichteuklidischen Geometrie auf der Pseudosphäre*, d. h. auf der Rotationsfläche der Traktrix hat gegenüber der funktionentheoretischen Darstellung in der komplexen Zahlenhalbebene den Nachteil, dass auf der Fläche nur ein Teil der in der Halbebene liegenden Punktmannigfaltigkeit abgebildet werden kann, der durch die Singularitäten der Fläche (Kante und im Unendlichen Spitze) begrenzt wird. Man wird so auf die Frage geführt, ob es im Raum eine singularitätenfreie

[50]"mit gleich großen entsprechenden Stücken eines andern Dreiecks" was corrected from "mit den entsprechenden Stücken eines kongruenten Dreiecks".

Fläche gibt, die die ganze Nichteuklidische Geometrie realisiert. Diese Frage muss, wie ohne Beweis erwähnt werden möge, verneint werden. Man kann die Fläche zwar so verbiegen, dass die ursprünglichen Singularitäten aufhören, solche zu sein, doch treten dann notwendigerweise neue auf.

55 § 24. Die Geometrie auf dem Rotationsparaboloid

Wir haben jetzt alle drei Typen von Geometrien mit konstanter Krümmung diskutiert, und wollen nun noch ein einfaches Beispiel einer *Fläche* geben, *deren Krümmung nicht konstant ist*, auf der also die Kongruenzsätze nicht gelten.



Als solche wählen wir das *Rotationsparaboloid*, dessen Scheitelpunkt im Ursprung des Koordinatensystems liegen und dessen Rotationsachse die z-Achse sein möge. Seine Gleichung ist $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ Das Quadrat des Linienelementes wird

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dx^2 + dy^2 + (xdy + ydy)^2,$$

d. h. es ist $g_{11} = 1 + x^2$, $g_{12} = xy$, $g_{22} = 1 + y^2$. Um das Linienelement auf die Form $du^2 + \gamma^2(u, v)dv^2$ zu bringen, müssen wir wieder verallgemeinerte Gauss'sche Polarkoordinaten (geodätische Linien durch irgend einen Punkt und deren orthogonale Trajektorien) einführen. Besonders einfach gestaltet sich die Rechnung, wenn wir als diesen Punkt den Scheitel des Paraboloids wählen. Die *geodätischen Linien* sind dann nämlich die Meridiankurven, deren Gleichung $\frac{x}{y} = \text{const}$ ist, und die orthogonalen Trajektorien sind die Schnittkreise der Ebenen $z = \text{const}$ mit dem Paraboloid. Wir setzen also $u = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, $v = \frac{x}{y}$ und erhalten

$$\begin{aligned} du &= xdx + ydy, \\ y^2| \quad dv &= \frac{ydx - xdy}{y^2}. \end{aligned}$$

Die zweite Gleichung multiplizieren wir mit y^2, dann quadrieren wir die beiden Gleichungen, addieren sie zueinander und erhalten

$$du^2 + y^4 dv^2 = (x^2 + y^2)(dx^2 + dy^2).$$

56 Hieraus folgt

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \frac{du^2 + y^4 dv^2}{x^2 + y^2} + du^2 = (1 + \frac{1}{2u})du^2 + \frac{y^4}{2u}dv^2.$$

Setzen wir noch $u' = \int \sqrt{1 + \frac{1}{2u}} du$, so erhält ds^2 die gewünschte Form $du' + \gamma^2(u', v)dv^2$. Wenn man hieraus K berechnet, so folgt in der Tat $K \neq \text{const}$. Dass *von Kongruenzsätzen* nun *keine Rede* mehr ist, kann man sich leicht plausibel machen. Man denke sich nur ein rechtwinkliges Dreieck, dessen rechter Winkel im Scheitel des Paraboloid liegt, und desssen Schenkel sehr lang sein mögen. Dann wird die Hypothenuse, bei hinreichender Länge der Schenkel des rechten Winkels kleiner sein als eine Kathete. Denkt man sich dagegen einen rechten Winkel irgendwo auf dem Paraboloid weit entfernt vom Scheitel aufgetragen, so hat man wenigstens angenähert die Massverhältnisse der Euklidischen Geometrie, d. h. die Hypothenuse wird länger sein als eine Kathete.

§ 25. Das indefinite Linienelement der Pseudogeometrie

Wir haben nun die Geometrie der zweidimensionalen Punktmannigfaltigkeit unter der Voraussetzung, dass das Quadrat des Linienelements positiv definit ist, zu einem gewissen Abschluss gebracht. Da uns die zweidimensionale Geometrie aber nur ein Hilfsmittel sein soll, um später Physik oder die vierdimensionale Geometrie um so leichter diskutieren zu können, so müssen wir dieses Hilfsmittel unseren späteren Bedürfnissen möglichst anpassen. In der alten Physik hat nun das Linienelement die Form $dx^2 + dy^2 + dz^2 - dt^2$ und da auch in der neuen Physik | die alte als ein besonders einfacher Spezialfall, der 57
in der Wirklichkeit nur mit einer gewissen Annäherung realisiert sein wird, enthalten ist, wollen wir nun eine zweidimensionale Geometrie, die der vierdimensionalen im Falle, dass $g_{11} = 1$, $g_{22} = 1$, $g_{33} = 1$, $g_{44} = -1$ ist, möglichst ähnlich ist⟨,⟩ untersuchen. Bevor wir also von zwei Dimensionen zu drei und vier hinaufsteigen, müssen wir unsere Voraussetzung, dass $g_{11}g_{22} - g_{12}^2 > 0$ ist, fallen lassen, bezw. durch die andere $g_{11}g_{22} - g_{12}^2 > 0$ $g_{11} < 0$[51] ersetzen. Wir stellen uns daher das Problem, zu untersuchen, wie sich die zweidimensionale Geometrie modifiziert, wenn

das Quadrat des Linienelements indefinit[52]

ist. Wir kommen so zu ganz wesentlichen Aenderungen gegenüber früher, insbesondere müssen wir unsere Vorstellung von der Massbestimmung der Länge in dieser Pseudogeometrie[53] vollkommen ändern. Die *Kurvenlänge* definieren wir zwar wieder durch das Integral $\int_{p_1}^{p_2} \sqrt{\sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu}$. Die Wurzel wird nun aber nicht immer reell zu ziehen sein, das Vorzeichen der quadratischen Form in einem Kurvenpunkt $x_1(p)$, $x_2(p)$ hängt vielmehr von $\dot{x}_1(p)$, $\dot{x}_2(p)$ ab. Vor allen Dingen kann es jetzt auch *Kurven von der Länge Null*

[51] Should be "$g_{11}g_{22} - g_{12}^2 < 0$" and "$g_{11} > 0$".

[52] "indefinit" was corrected from "negativ".

[53] "in dieser Pseudogeometrie" was interlineated.

geben, während das früher nicht möglich war, ausser für $\dot{x}_1 = 0$, $\dot{x}_2 = 0$, und dies kann nur für diskrete Punkte eintreten. Jetzt erhält man diese Kurven, wenn man die Differentialgleichung $\sum_{\mu\nu} g_{\mu x} \dot{x}_\mu \dot{x}_\nu = 0$[54] integriert. Sind also $\sigma_1(x_1, x_2)$ und $\sigma_2(x_1, x_2)$ die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung $g_{11}\sigma^2 + 2g_{12}\sigma + g_{22} = \sigma$, so hat man die beiden Differentialgleichungen erster Ordnung

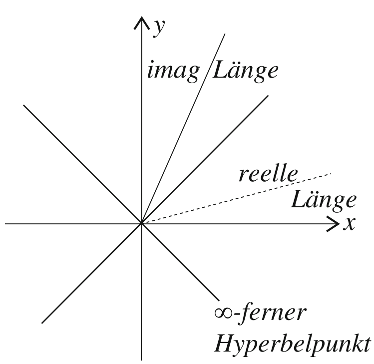
$$\dot{x}_1 - \sigma_i(x_1, x_2)\dot{x}_2 = 0 \qquad i = 1, 2 \tag{22}$$

58 zu lösen. Zu jedem Punkt x_1, x_2 unserer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit gehören zwei bestimmte *reelle* Werte $\sigma_1(x_1, x_2)$ und $\sigma_2(x_1, x_2)$. Durch jeden Punkt der Mannigfaltigkeit gehen also zwei bestimmte Kurven $x_1^{(\sigma_1)}(p)$, $x_2^{(\sigma_1)}(p)$; $x_1^{(\sigma_2)}(p)$, $x_2^{(\sigma_2)}(p)$, die man aus (22) erhält, wenn man den beiden dort auftretenden Integrationskonstanten feste Werte erteilt. Entsprechend diesen beiden Integrationskonstanten gibt es zwei Scharen von Kurven, die (22) erfüllen. Es sind dies *reelle* Linien von der Länge Null, die wir daher *Nulllinien* nennen wollen. Wir haben also in unserer Geometrie gegenüber früher ein *total verändertes Bild*, da diese Nulllinien für den Fall des positiv definiten Linienelementes imaginär werden, ein Fall, der den uns von der Euklidischen Geometrie her geläufigen Anschauungen viel näher kommt.

§ 26. Die Pseudoeuklidische Geometrie

Wir wollen uns nun nur beim einfachsten Fall aufhalten und setzen $g_{11} = 1$, $g_{12} = 0$, $g_{22} = -1$. Dieser Fall ist auch insofern der einfachste, als für ihn wieder die Riemannsche *Invariante K verschwindet*. Insofern kommen wir hiermit der Euklidischen Geometrie am nächsten und nennen deswegen diese Geometrie die *pseudoeuklidische*. Dann wird die Kurvenlänge

$$s = \int_{p_1}^{p_2} \sqrt{dx^2 - dy^2}. \tag{23}$$



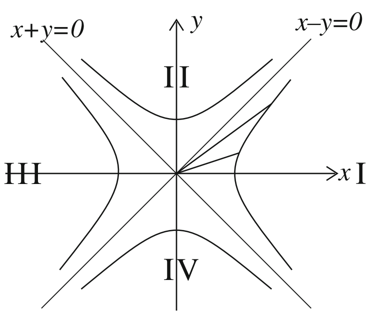
Die quadratische Gleichung zur Bestimmung von σ_1 und σ_2 lautet jetzt $\sigma^2 - 1 = 0$ und liefert als Wurzeln statt Funktionen von x_1, x_2 die Konstanten $\sigma_1 = +1$, $\sigma_2 = -1$.

Die Differentialgleichungen (22) werden zu $\frac{dx}{dp} \pm \frac{dy}{dp} = 0$ oder $x \pm y =$ const. Dies sind *zwei Scharen von Geraden*, die aufeinander senkrecht stehen und die x-Achse un-
59 ter dem Winkel $\frac{\pi}{4}$ bezw. $\frac{3\pi}{4}$ | schneiden. Die *Länge* irgend einer anderen Kurve ist in einem ihrer Punkte nach (23) *reell oder imaginär*, je nachdem $\frac{dy}{dx} < 1$

[54] "$g_{\mu x}$" should be "$g_{\mu\nu}$".

bezw. $\frac{dy}{dx} > 1$ ist, d. h. je nachdem die Kurve in dem betrachteten Punkte *flacher oder steiler als* 45° *gegen die x-Achse* ansteigt.

Wir fragen nun, welches sind die Kurven, die vom 0-Punkt eine konstante Entfernung haben? Es sei irgend ein Punkt $x = \xi$, $y = \eta$ gegeben. Durch denselben legen wir vom 0-Punkt aus eine Gerade, & berechnen die Länge der Strecke vom Ursprung bis zu diesem Punkt. Die Bedingung dafür, dass diese Länge eine (reelle oder imaginäre) Konstante ist, liefert die gesuchte Kurve. Die Gerade durch den 0-Punkt und den Punkt ξ, η hat die Gleichung $x\eta - y\xi = 0$. Also muss $\int_0^\xi \sqrt{1 - (\frac{dy}{dx})^2} dx = \text{const.}$ sein und wegen $\frac{dy}{dx} = \frac{\eta}{\xi}$ erhalten wir $\sqrt{1 - \frac{\eta^2}{\xi^2}} \int_0^\xi dx = \text{const.}$ oder $\xi^2 - \eta^2 = \pm r^2$. Diese Gleichung stellt *die Schar der gleichseitigen Hyperbeln* dar mit den gemeinsamen Asymptoten $\xi - \eta = 0$ und $\xi + \eta = 0$. Der Hyperbelschar entsprechen in der Euklidischen Geometrie die *konzentrischen Kreise* um den 0-Punkt. Den gemeinsamen Asymptotenrichtungen entsprechen dort die imaginären Kreispunkte.



([55] In der Euklidischen Geometrie hatten wir als Winkel φ unter dem sich zwei durch den 0-Punkt gehende Gerade schneiden, das Stück des Einheitskreises | definiert, 60
das zwischen diesen Geraden lag.[56] Analog werden wir hier als *Winkel* die *Länge des Stückes*, das von zwei Geraden aus den beiden *Einheitshyperbeln* $x^2 - y^2 = \pm 1$ herausgeschnitten wird, ansprechen. Da die Einheitshyperbel $x^2 - y^2 = +1$, die im ersten und dritten Quadranten liegt, gegen die x-Achse eine Neigung von mehr als 45° hat, so ist ihre Länge imaginär, und wir bezeichnen in diesem Quadranten daher als Winkel den Faktor von $\sqrt{-1}$. Der Winkel φ wird also im ersten und dritten Quadranten definiert durch $x = r\cosh\varphi$, $y = r\sinh\varphi$, weil wegen $\cosh^2\varphi - \sin^2\varphi = 1$, dann $x^2 - y^2 = +1$ ist. Bekanntlich ist $\sinh\varphi = \frac{e^\varphi - e^{-\varphi}}{2}$, $\cosh\varphi = \frac{e^\varphi + e^{-\varphi}}{2}$. Die Gleichung der x-Achse ist $y = 0$ oder $e^\varphi = e^{-\varphi}$, d. h. $e^{2\varphi} = 1$, woraus $\varphi = 0$ folgt. Der Winkel φ wird also von der x-Achse aus gezählt. Er wird $-\infty$ für $x + y = 0$, weil dann $e^\varphi = 0$ sein muss und $+\infty$ für $x - y = 0$ wegen $e^{-\varphi} = 0$. Im zweiten und vierten Quadranten setzt man $x = r\sinh\psi$, $y = r\cosh\psi$, dann ist $x^2 - y^2 = -r^2$. Der Winkel wird von der y-Achse ausgezählt. In der Tat muss für $x = 0$ $e^\psi = e^{-\psi}$ also $\psi = 0$ sein.

In der Euklidischen Geometrie stehen zwei Gerade $Ax + By + C = 0$ und $A_1x + B_1x + C_1 = 0$ aufeinander senkrecht, wenn $AA_1 + BB_1 = 0$ ist. Hier

[55] Opening bracket added in pencil. There is no closing bracket.

[56] At the top of the page, Hilbert wrote in pencil: "$\cos\phi = \cos i\phi$, $\sin\phi = \frac{\sin i\phi}{i}$." On the left hand page, Hilbert wrote in pencil: "$\varphi = \frac{1}{2}\log\frac{x+y}{x-y}$".

definieren wir die *Orthogonalität* durch

$$AA_1 - BB_1 = 0. \tag{24}$$

Diese Gleichung bedeutet, dass Radius-Vektor und Tangente oder dass zwei *konjugierte Durchmesser* bei unseren gleichzeitigen Hyperbeln aufeinander
61 senkrecht stehen, so wie das in der Eu|klidischen Geometrie für Kreise der Fall ist. In der Tat hat die durch den Koordinatennullpunkt gehende, zur Tangente im Punkte $\xi\eta$ an die Hyperbel $x^2 - y^2 = \pm r^2$ parallele Gerade die Gleichung $x\xi - y\eta = 0$. Die durch den 0-Punkt und den Punkt $\xi\eta$ gehende Gerade wird durch $x\eta - y\xi = 0$ dargestellt. Für diese beiden Geraden ist (24) in der Tat erfüllt. Da diese beiden konjugierten Durchmesser also aufeinander senkrecht stehen und da daher dasselbe von irgend einem Durchmesser einer Hyperbel und den Tangenten in den beiden Schnittpunkten gilt, so stehen auch die beiden Tangenten in den Punkten,[57] in den konjugierte Durchmesser irgend zwei Hyperbeln in zwei nebeneinanderliegenden Quadranten schneiden, aufeinander senkrecht.

Der durch (24) ausgedrückten Bedingung, dass die durch den 0-Punkt und die beiden Punkte A, B und A_1, B_1 gehenden Geraden *aufeinander senkrecht stehen* kann man noch eine andere, *anschaulichere Form* geben. Da die beiden Punkte in verschiedenen Quadranten liegen müssen, ist

$$\begin{aligned} A &= r\cosh\varphi, \qquad & B &= r\sinh\varphi, \\ A_1 &= r\sinh\psi, \qquad & B_1 &= r\cosh\psi. \end{aligned}$$ ⟨58⟩

Damit (24) erfüllt ist, muss also $\varphi = \psi$ sein.

Eine beliebige Transformation unserer Punktmannigfaltigkeit in sich ist neben der Parallelverschiebung die Drehung

$$x' = r\cosh(\varphi + \psi), \qquad y' = r\sinh(\varphi + \psi),$$

und da

$$\begin{aligned} \cosh(\varphi + \psi) &= \cosh\varphi\cosh\psi + \sinh\varphi\sinh\psi, \\ \sinh(\varphi + \psi) &= \sinh\varphi\cosh\psi + \cosh\varphi\sinh\psi \end{aligned}$$

ist, so haben wir[59]

$$\begin{aligned} x' &= x\cosh\psi + y\sinh\psi, \\ y' &= x\sinh\psi + y\cosh\psi. \end{aligned}$$

62 Dies sind sämtliche (lineare) Transformationen, die die Form $x^2 - y^2$ d. h. die

[57] "in den Punkten" was interlineated.

[58] Added by Hilbert in pencil: "φ = Länge auf der Hyperbel/Abstand".

[59] At the bottom of the page, Hilbert added with pencil: "Entf^2 =Differenz der Quadrate/Alle Entfern⟨ungen⟩ invariant. Dass φ proportional der Länge folgt. Dies Beispiel ist prinzipiell wegen der infin. genommen Euklid."

Entfernung $\pm r^2$ des Punktes x, y vom Ursprung in $x'^2 - y'^2$ überführen. Diese *Gruppe der Drehungen* in der pseudoeuklidischen Geometrie spielt bekanntlich in der alten Elektrodynamik und in der kleinen Relativitätstheorie eine fundamentale Rolle.

§ 27. Von der allgemeinen zweidimensionalen Pseudogeometrie

Wie diese Untersuchungen für eine *allgemeine Pseudogeometrie* $g_{11} > 0$, $\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} < 0$ zu verallgemeinern sind, ist eigentlich vorgeschrieben. Wir haben schon erwähnt, wie die Länge einer Kurve und wie die Nulllinien dann zu definieren sind, wir wollen nur noch bemerken, dass für die zweidimensionale Mannigfaltigkeit *alle Nulllinien zugleich geodätische Linien* sind, während das für alle höheren Mannigfaltigkeiten nicht mehr der Fall ist. Im binären Gebiet wird die geodätische Linie in der Form $y = y(x)$ aus einer Lagrangeschen Differentialgleichung gefunden. Die Bedingung für die Nulllinie ist $\sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu}\dot{x}_\mu \dot{x}_\nu = 0$. Diese Gleichung ist ein Integral der Lagrangeschen Differentialgleichung, aus ihr lässt sich die Funktion $y^{(0)} = y^{(0)}(x)$, welche die geodätische Nullinie darstellt, berechnen. Für drei- und mehrdimensionale Mannigfaltigkeiten erhält man aber mehrere Lagrangesche Differentialgleichungen, während man immer nur eine Bedingungsgleichung für die Nullinie erhält. Die Funktionen $y^{(0)}(x)$, $z^{(0)}(x) \cdots$ u. s. w., welche diese eine Differentialgleichung erfüllen, brauchen dann nicht auch Lösungen aller Lagrangeschen Gleichungen sein.
Auch die *Winkel* um einen Punkt herum sind in der | allgemeinen Pseudo- 63
geometrie wie oben zu definieren, da ja im Infinitesimalen die $g_{\mu\nu}$ Konstante sind, mithin dort die pseudoeuklidische Geometrie gilt.

§ 28. Die Invarianten der dreidimensionalen Geometrie

Den Fall der

dreidimensionalen Geometrie

wollen wir ausführlich behandeln.[60] In der Tat treten hier schon alle Schwierigkeiten auf, die wir bei vier Dimensionen antreffen werden; die vierdimensionale Punktmannigfaltigkeit, die wir in der Physik vor uns haben, können wir dann um so kürzer erledigen.[61] Der einzelne Punkt oder das einzelne Ding der Menge wird hier durch ein Zahlentripel x_1, x_2, x_3 bezw. x, y, z charakterisiert. Um Geometrie treiben zu können, muss man nun 6 Funktionen $g_{\mu\nu}$ kennen,

[60] "ausführlich behandeln" was corrected from "in Kürze erledigen".

[61] The preceding half-sentence was corrected from: "ist aber gerade diejenige, die wir in der Physik vor uns haben."

von denen wir wieder absolute Stetigkeit und Differenzierbarkeit beliebig hoher Ordnung voraussetzen, wie wir dies auch später in der Physik annehmen werden. Nach unserer Auffassung sind ja alle Unstetigkeiten, die man in der Natur antrifft, nur scheinbare, d. h. ein Grenzfall der Stetigkeit, also etwas Sekundäres.

Wir legen unserer Betrachtung die homogene quadratische Form

$$G(X_1, X_2, X_3) = g_{11}X_1^2 + g_{22}X_2^2 + g_{33}X_3^2 + 2g_{12}X_1^2X_2^2 + 2g_{23}X_2X_3 + 2g_{31}X_3X_1.$$

zugrunde, in der die $g_{\mu\nu}$ Funktionen von x_1, x_2, x_3 sind. Die Länge einer Kurve $x_i(p)$ definieren wir wie früher durch $s = \int_{p_1}^{p_2} \sqrt{\sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu}\dot{x}_\mu\dot{x}_\nu}dp$. Es sind wieder zwei Fälle zu unterscheiden, die *eigentliche Geometrie*, in der G
64 *positiv definit* ist und in welcher daher alle reellen Kurven eine reelle, von | Null verschiedene Länge besitzen, und die *Pseudogeometrie* mit *indefinitem* G, in der eine reelle Kurve im allgemeinen eine komplexe Länge, im besonderen auch die Länge Null haben kann.

I) Die *analytische Bedingung* für den ersten Fall ist

$$g_{11} > 0, \qquad g_{11}g_{22} - g_{12}^2 > 0, \qquad \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} > 0.$$

Die Definition des Winkels um einen Punkt herum geschieht wie oben. In diesem Punkt, den wir zum 0-Punkt machen, wird nämlich $G = (g_{11})_0X_1^2 + \cdots + 2(g_{23})_0X_2X_3$ durch eine lineare Substitution auf die Form $X_1'^2 + X_2'^2 + X_3'^2$ gebracht. Setzen wir $X_1' = r\cos\varphi$, $X_2' = r\sin\varphi$, $X_3' = 0$, so ist φ der Winkel, den die Projektion der Geraden durch den 0-Punkt und den Punkt X_1', X_2', X_3' auf die X_1', X_2'-Ebene mit der X_1'-Achse bildet.

Genau wie im binären Gebiet, fragen wir wieder, welche *Eigenschaften* der Geometrie *von der Koordinatenwahl unabhängig* sind. Setzen wir $x_i = x_i(x_1', x_2', x_3')$, so finden wir, dass die quadratische Form $\sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu}dx_\mu dx_\nu$ dann eine Invariante ist, wenn die $g_{\mu\nu}$ einen kovarianten Tensor $g'_{\mu\nu} = \sum_{\alpha\beta} \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu}g_{\alpha\beta}$ bilden. So treten hier wieder dieselben Begriffe auf, nämlich ausser dem erwähnten noch der kontravariante Tensor $h'^{\mu\nu} = \sum_{\alpha\beta} \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\alpha}\frac{\partial x'_\nu}{\partial x_\beta}h^{\alpha\beta}$ und der gemischte Tensor $k'_\mu{}^\nu = \sum_{\alpha\beta} \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu}\frac{\partial x'_\nu}{\partial x_\beta}k_\alpha^\beta$. Diese drei Tensoren brauchen natürlich in den beiden Indizes durchaus nicht symmetrisch zu sein. Die Symmetrie reduziert die Zahl der Tensorkomponenten auf sechs, die Antisymmetrie auf drei. Als Gebilde erster Stufe oder Vektoren haben wir den kovarianten Vektor $q'_\mu = \sum_\alpha \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu}q_\alpha$ und den kontravarianten $p'^\nu = \sum_\beta \frac{\partial x'_\nu}{\partial x_\beta}p^\beta$ zu erwähnen.

65 Da die *Länge* einer Kurve die einfachste Invariante ist, so spielen die *geodätischen Linien* und die mit ihnen zusammenhängenden Riemannschen Koordinaten hier dieselbe ausgezeichnete Rolle wie in der zweidimensionalen Geometrie. Die ganze Theorie der geodätischen Linien ist übrigens wörtlich

aus dem binären Gebiet zu übertragen. Man kann die kürzesten Linien wieder aus dem Variationsproblem[62] $\int_{p_1}^{p_2} G(x_i(p)dp = \text{Min}$ finden. Ein Integral der zugehörigen Lagrangeschen Differentialgleichungen

$$\ddot{x}_h + \sum_{\mu\nu} \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \alpha \end{matrix} \right\} \dot{x}_\mu \dot{x}_\nu = 0$$

ist $G = c$,[63] und der Parameter p hat dann die Bedeutung $p = \frac{\text{Kurvenlänge}}{\sqrt{c}}$. Die einzige Abänderung ist, dass nun durch jeden Punkt ∞^2 geodätische Linien gehen. Man erhält zwar drei Differentialgleichungen für drei Funktionen $x_i(p)$, doch bleibt die geodätische Linie unverändert, wenn man p durch eine Funktion $\varphi(p)$ ersetzt, so dass also die geodätische Linie durch zwei Funktionen bestimmt ist, z. B., wenn x_1 als Parameter gewählt wird, durch $x_2(x_1)$ und $x_3(x_1)$. Diese beiden Funktionen werden aus zwei[64] gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung gewonnen. Mithin treten vier Integrationskonstanten auf. Soll die Kurve durch den Punkt $\hat{\xi}_1$, $\hat{\xi}_2$, $\hat{\xi}_3$ gehen, so bestimmen sich zwei Konstanten aus $x_2(\hat{\xi}_1) = \hat{\xi}_2$ und $x_3(\hat{\xi}_1) = \hat{\xi}_3$, so dass noch zwei Konstanten willkürlich bleiben, entsprechend den ∞^2 geodätischen Linien.

§ 29. Riemannsche Koordinaten

Die *Riemannschen Koordinaten* ξ_i in Bezug auf einen festen Punkt werden wieder so eingeführt, dass $\xi_i = ap$ die | Gleichungen der durch diesen Punkt 66
gehenden geodätischen Linien darstellt. Eliminiert man p aus ihnen, so findet man: *zwei lineare Gleichungen* zwischen den ξ_i *bestimmen eine geodätische Linie* durch den Punkt. Führt man die Riemannschen Koordinaten anstelle der ursprünglichen ein, so werden die ξ_i Funktionen von x_1, x_2, x_3 bezw. $x_i = x_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$. Das Quadrat des Linienelementes geht dann in $\sum_{\mu\nu} a_{\mu\nu}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) d\xi_\mu d\xi_\nu$ über, wobei man die $a_{\mu\nu}$ erhält, indem man erstens die neuen $g_{\mu\nu}$ gemäss ihren Transformationsformeln berechnet und in denselben dann die x_i durch ihre Funktionen in den ξ_i ersetzt. Bezeichnet man $g_{\mu\nu}$ als Funktion der ξ_i mit $g^*_{\mu\nu}$, so ist also

$$a_{\mu\nu}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sum_{\alpha\beta} \frac{\partial x_\alpha}{\partial \xi_\mu} \frac{\partial x_\beta}{\partial \xi_\nu} g^*_{\alpha\beta}(\xi_1, \xi_2, \xi_3).$$

Es verschwinden wieder alle ersten Ableitungen $a_{\mu\nu h}$ der $a_{\mu\nu}$ nach den ξ_h, und man erhält

$$a_{\mu\nu} = (a_{\mu\nu})_0 + \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} (a_{\mu\nu hk})_0 \xi_h \xi_k + \cdots .$$

[62] In the following equations "G" was corrected in pencil to "φ".

[63] "G" was corrected in pencil to "φ".

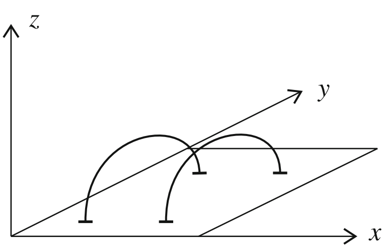
[64] "zwei" was corrected from "einer".

Das Linienelement ist jetzt wieder so euklidisch wie möglich, d. h. in den Gliedern nullter und erster Näherung während dies in gewöhnlichen Koordinaten nur in den Gliedern nullter Näherung der Fall ist. Aus den zweiten Ableitungen $a_{\mu\nu hk}$ kann man sich dann eine neue Invariante bilden, die *Krümmung* der dreidimensionalen Geometrie und zwar ist wieder

$$K_{\mu\nu} = \sum_{hk} a_{\mu\nu hk} a^{hk}, \qquad K = \sum_{\mu\nu} K_{\mu\nu} a^{\mu\nu}.$$

§ 30. Die drei Geometrien konstanter Krümmung

In den ξ_i-Koordinaten für einen festen Punkt der Mannigfaltigkeit drücken sich wiederum nur dann *alle* geodätischen Linien und nicht nur die durch den betreffenden Punkt gehenden durch lineare Gleichungen aus, wenn Transfor-
67 mationen | der Mannigfaltigkeit in sich möglich sind, oder, was damit völlig äquivalent ist, wenn die Kongruenzsätze gelten. Dieselben gelten nur in drei Fällen, nämlich in der *Euklid*ischen und in den beiden Nichteuklidischen Geometrien, der *Riemann-Helmholtz*schen und der *Bolyai-Lobatscheffky*schen. Die erstere kann man als diejenige deuten, die auf einer dreidimensionalen Overfläche einer im vierdimensionalen Euklidischen Raum liegenden vierdimensionalen Kugel gilt. Der letzteren kann man wieder eine *anschauliche Deutung* geben, wenn man das Linienelement auf die Form $ds^2 = \frac{dx^2+dy^2+dz^2}{z^2}$ bringt, wo x, y, z rechtwinklige, räumliche Koordinaten darstellen.



Dann werden nämlich die kürzesten Linien durch die Gesamtheit der Kreise gebildet, die im oberen Halbraum ($z > 0$) liegen und die auf der (x, y)-Ebene ($z = 0$) senkrecht stehen. Diese Ebene stellt das Unendlichferne der dreidimensionalen Geometrie dar. Durch einen Punkt der Mannigfaltigkeit gehen, wie es sein muss, ∞^2 Kreise, die auf der Ebene senkrecht stehen, durch zwei Punkte nur ein einziger.

Als einfachstes Beispiel einer Geometrie, in der die Kongruenzsätze nicht gelten, ist wieder die dreidimensionale Oberfläche des vierdiimensionalen Paraboloids zu nennen:

x_4 = homogene quadratische Funktion von x_1, x_2, x_3.

§ 31. Gaussische Koordinaten

Die *Einführung der Gauss'schen Koordinaten* u, v, welche $g_{11} = 1$, $g_{12} = 0$, $g_{22} = \gamma^2(u, v)$ machten, brachte im binären Gebiet den enormen Vorteil, dass

68 nur noch die eine willkürliche | Funktion $\gamma^2(u,v)$ stehen blieb. Jetzt haben wir *sechs willkürliche Funktionen* $g_{\mu\nu}$ und nur *drei Funktionen* $x_i(u,v,w)$ *zur freien Verfügung*, welche wir dazu verwenden wollen $g_{11}=1$ $g_{12}=0$, $g_{13}=0$ zu machen. Dann werden zwar immer noch drei willkürliche Funktionen übrig bleiben, und wir können somit die Krümmung nicht mehr auf die einfache Form (17) bringen. Wir führen also neue Koordinaten u, v, w so ein, dass $v = e_1$, $w = e_2$ die Schar der durch einen beliebigen Punkt gehenden geodätischen Linien darstellt und $u =$ const. die dazu orthogonale Flächenschar. Damit die letzte Bedingung erfüllt ist, muss das Linienelement die Form $ds^2 = \gamma du^2 + \gamma_{11}dv^2 + \gamma_{22}dw^2 + 2\gamma_{12}dvdw$ annehmen, wobei γ und $\gamma_{\mu\nu}$ noch Funktionen von u, v, w sein werden. Führen wir als Kurvenparameter u selber ein, so wird irgend eine Linie durch $v = v(u)$, $w = w(u)$ dargestellt. Um die geodätischen Linien zu finden, hat man

$$\delta \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{G^*}du = \delta \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{\gamma + \gamma_{11}\left(\frac{dv}{du}\right)^2 + \gamma_{22}\left(\frac{dw}{du}\right)^2 + 2\gamma_{12}\frac{dv}{du}\frac{dw}{du}}du = 0$$

zu machen. Man erhält die beiden Lagrangeschen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}
0 = \frac{d}{du}&\left\{\frac{1}{\sqrt{G^*}}\left(\gamma_{11}\frac{dv}{du} + \gamma_{12}\frac{dw}{du}\right)\right\}\\
&- \frac{1}{\sqrt{G^*}}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial v} + \frac{\partial\gamma_{11}}{\partial v}\left(\frac{dv}{du}\right)^2 + \frac{\partial\gamma_{22}}{\partial v}\left(\frac{dw}{du}\right)^2 + 2\frac{\partial\gamma_{12}}{\partial v}\frac{dv}{du}\frac{dw}{du}\right),\\
0 = \frac{d}{du}&\left\{\frac{1}{\sqrt{G^*}}\left(\gamma_{22}\frac{dw}{du} + \gamma_{12}\frac{dv}{du}\right)\right\}\\
&- \frac{1}{\sqrt{G^*}}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial w} + \frac{\partial\gamma_{11}}{\partial w}\left(\frac{dv}{du}\right)^2 + \frac{\partial\gamma_{22}}{\partial w}\left(\frac{dw}{du}\right)^2 + 2\frac{\partial\gamma_{12}}{\partial w}\frac{dv}{du}\frac{dw}{du}\right).
\end{aligned}$$

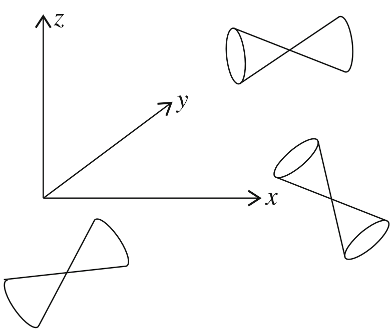
Diese Gleichungen müssen für $v = c_1$, $w = c_2$ erfüllt sein, da dies geodätische Linien darstellt. Setzt man dies ein, so folgt aus der ersten Gleichung $\frac{\partial\gamma}{\partial v} = 0$, aus der zweiten $\frac{\partial\gamma}{\partial w} = 0$, so dass $\gamma = \varphi(u)$ wird. Führt man schliesslich noch u' durch $\frac{du'}{du} = \sqrt{\varphi(u)}$ ein, so hat man es erreicht, dass $g_{11} = 1$ wird. Es gilt auch die Umkehrung: Hat man solche Koordinaten eingeführt, dass 69
$g_{11} = \varphi(u)$, $g_{12} = 0$, $g_{13} = 0$ wird, so sind $v = c_1$, $w = c_2$ Integrale der Lagrangeschen Differentialgleichung, also geodätische Linien, und es stellt $u =$ const. die zu denselben orthogonale Flächenschar dar. *Das Linienelement ist* hiermit *auf eine Normalform gebracht*, und es sind jetzt diese Funktionen $\gamma_{\mu\nu}$ *transzendente Invarianten* der $g_{\mu\nu}$ und ihrer Ableitungen, im Gegensatz zur Invariante K, die eine rationale Invariante dieser Funktion ist.

§ 32. Mongesche Differentialgleichung

II) Um die *Pseudogeometrie* des ternären Gebietes zu studieren, ersetzen wir unsere Voraussetzungen über die $g_{\mu\nu}$ durch[65]

$$g_{11} > 0, \qquad g_{11}g_{22} - g_{12}^2 \gtreqless 0, \qquad \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} < 0.$$

Dann wird $G(X_1, X_2, X_3)$ indefinit. Es existieren jetzt reelle[66] Kurven, die die Länge Null haben. $G(X_1 - x_1, X_2 - x_2, X_3 - x_3) = 0$ *stellt einen reellen Kegel* mit der Spitze im Punkte x_1, x_2, x_3 *dar*. Bei veränderlichen x_1, x_2, x_3 definiert diese Gleichung in jedem Punkte der Mannigfaltigkeit einen solchen Kegel.



Sie stellt, wie wir sagen wollen, ein *Kegelfeld* dar. Da die $g_{\mu\nu}$ Funktionen von x_1, x_2, x_3 sind, hat die Achse des Kegels in jedem Punkte der Mannigfaltigkeit eine andere Richtung. Eine Kurve in unserer Geometrie ist durch $x_i = x_i(p)$ gegeben. Die darunter befindlichen *Nulllinien* erhalten wir als Lösungen der Differentialgleichung $G(\dot{x}_1(p), \dot{x}_2(p), \dot{x}_3(p)) = 0$. Dies ist
70 eine Differen|tialgleichung zur Bestimmung von zwei und nicht von drei Funktionen, da dieselbe Kurve dargestellt wird, wenn man p durch eine Funktion $\varphi(p)$ ersetzt. Diese eine Differentialgleichung für zwei unbekannte Funktionen einer Veränderlichen ist eine sogenannte *Monge'sche* (diophantische) *Gleichung*. Man kann daher eine der beiden Funktionen willkürlich wählen und hat dann eine gewöhnliche Differentialgleichung zur Bestimmung der anderen Funktion. Ein System von Differentialgleichungen, in dem die Zahl der unbekannten Funktionen grösser ist als die Zahl der Gleichungen, heisst ein *unterbestimmtes System*. Ein solches haben wir hier vor uns. Wegen der auftretenden willkürlichen Funktion gibt es durch einen beliebigen Punkt der Geometrie nun eine viel grössere Mannigfaltigkeit von Nulllinien als im binären Gebiet. Während diese Nulllinien aber dort alle zugleich geodätische waren, ist dies hier nicht der Fall; denn zur Bestimmung der geodätischen Linien erhält man ja auch hier wieder aus dem Variationsprinzip ein *bestimmtes System*, nämlich zwei Differentialgleichungen für die beiden unbekannten Funktionen $y(x)$ und $z(x)$. Hier sind vielmehr *nur diejenigen Nulllinien* auch *geodätische, die die beiden Lagrangeschen Differentialgleichungen und die Nebenbedingung* $G(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = 0$ *erfüllen.*

[65] Added by Hilbert in the left margin in pencil: "statt $G = \varphi$!".

[66] "reelle" was interlineated.

Der letzteren kann man wieder eine geometrische Interpretation geben. Seien nämlich α_1, α_2, α_3 drei Werte, die $G(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0$ erfüllen, so stellt $X_1 - x_1 : X_2 - x_2 : X_3 - x_3 = \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3$ diejenige Erzeugende des Kegels $G(X_1 - x_1, X_2, x_2, X_3 - x_3) = 0$ im Punkte x_1, x_2, x_3 dar, welche | mit den drei 71
Koordinatenachsen die durch die Richtungskosinusse α_1, α_2, α_3 bestimmten Winkel bildet. $G(\dot{x}_i(p)) = 0$ bedeutet also, dass die Kurve $x_i(p)$ im Punkte x_i die Erzeugende $X_1 - x_1 : X_2 - x_2 : X_3 : x_3 = \dot{x}_1(p) : \dot{x}_2(p) : \dot{x}_3(p)$ des Kegels zur Tangente haben soll. Die Differentialgleichung $G(\dot{x}_i(p)) = 0$ lösen, heisst daher, man soll eine solche Kurve (Nulllinie) $x_i(p)$ finden, die in jedem ihrer Punkte den zu demselben gehörigen Kegel des Kegelfeldes tangiert. Wir drücken dies kürzer aus, indem wir sagen: *eine Nulllinie „passt“ auf das Kegelfeld.*

Man kann wi⟨e⟩der wie im R_2 schliessen: suche die Lösung der Differentialgl. der geodät. die in Richt⟨un⟩g einer Erzeugenden laufen. Dann ist für diese im Anfangsp. $\varphi = 0$ und also überall $\varphi = 0$, d. h. sie ist Nulllinie.[67]

§ 33. Die Hamiltonsche partielle Differentialgleichung

In der Ebene war das entsprechende Problem bedeutend einfacher. Dort waren die Nulllinien in jedem Punkte x, y durch zwei Richtungen $(\frac{dy}{dx})_i$ gegeben. Wir hatten ein Richtungenfeld und mussten eine Kurve suchen, die auf dies Richtungsfeld passt. Dies führte sofort auf eine gewöhnliche Differentialgleichung $(\frac{dy}{dx})_i = f_i(x, y)$. Im Raume gibt es nun noch eine ganz andere Aufgabe, die sich in der Ebene auf dieses nämliche Problem reduziert: *Gesucht seien alle Flächen, die* in jedem ihrer Punkte *den zugehörigen Kegel berühren*, die, wie wir wieder sagen wollen, auf das Kegelfeld passen. Um die Aufgabe analytisch zu formulieren, müssen wir *Ebenenkoordinaten* einführen. Ist die Fläche in der Form $z = z(x, y)$ gegeben, so hat ihre Tangentialebene im Punkte x, y, z die Gleichung

$$(X - x)\,\frac{\partial z}{\partial x} + (Y - y)\,\frac{\partial z}{\partial y} - (Z - z) = 0.$$

Diese Ebene soll nun Tangentialebene an den Kegel $G(X_i - x_i) = 0$ sein. Bezeichnen wir die Ebenenkoordinaten mit U_i, so ist die | *Bedingung dafür*, 72
dass die Ebene U_i *Tangentialebene des Kegels* ist,

$$\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & U_1 \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & U_2 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & U_3 \\ U_1 & U_2 & U_3 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

[67] The preceding paragraph was interlineated by Hilbert in pencil.

oder

$$H(x_1, x_2, x_3, U_1, U_2, U_3) = \sum_{\mu\nu} g^{\mu\nu}(x_1, x_2, x_3) U_\mu U_\nu = 0.$$

Da die Ebenenkoordinaten der Tangentialebene der Fläche proportional mit[68] $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, -1 sind, so ist

$$H\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, -1\right) = 0$$

identisch in x und y die Bedingung dafür, dass die Fläche auf das Kegelfeld passt. *Die Funktion* $z(x, y)$ *muss* also einer *partiellen Differentialgleichung erster Ordnung*, der sogenannten *Hamiltonschen* Differentialgleichung *genügen.*

Diese Gleichung ist das *duale Gegenstück* zur Mongeschen und dieser letzteren durchaus gleichwertig. In der Tat bestimmen die Grössen $g^{\mu\nu}$, die in ihr auftreten, und die natürlich Funktionen von x, y, z sind, die Geometrie der dreidimensionalen Mannigfaltigkeit ebenso gut wie die $g_{\mu\nu}$. Ferner definiert auch diese Gleichung das Kegelfeld. Sie setzt nämlich zwischen den Richtungscosinussen $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, -1 der Normalen zur Tangentialebene in jedem Punkte eine Beziehung fest. Die Gesamtheit der Ebenen, deren Normalen dieser Beziehung in einem Punkte genügen, umhüllt dann einen Kegel dessen Spitze in diesem Punkte liegt.[69] Das Abbild dieser Differentialgleichung ist also wieder ein Kegelfeld.

Eine Funktion $z = z(x, y)$, die der partiellen Differentialgleichung genügt,
73 heisst eine *Integralfläche.* So wie bei | der gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung die Integralkurve festgelegt ist, wenn ein Punkt derselben vorgegeben ist, ist bei der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung die Integralfläche im allgemeinen festgelegt, wenn eine Raumkurve vorgegeben wird, durch welche die Fläche gehen soll. Die Aufgabe, eine Fläche $z = z(x, y)$ zu finden, die der Differentialgleichung genügt und durch eine vorgegebene Kurve geht, heisst das *Cauchysche Problem.*

§ 34. Charakteristikentheorie

Wir wollen nun die *Hauptresultate der Integrationstheorie* dieser partiellen Differentialgleichung mitteilen. Auf alle Beweise müssen wir verzichten, da uns dies zu weit führen würde. Der fundamentale Begriff, der in dieser Theorie auftritt, ist derjenige der *Charakteristik.* Er entspricht demjenigen der Determinante der Algebra und dem der determinierenden Fundamentalgleichung in der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen. Wir sagten schon, dass *im allgemeinen* die Integralfläche der Differentialgleichung $H(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, -1) = 0$

[68]"proportional mit" was interlineated by Hilbert with pencil.

[69]The preceding half-sentence was corrected from: "umhüllt dann den Kegel des Feldes, der zu diesem Punkte gehört."

durch eine willkürlich vorgegebene Kurve festgelegt ist⟨,⟩ und fragen nun, ob es gewisse *ausgezeichnete Kurven* gibt, *welche die Integralfläche nicht bestimmen.* Solche Kurven, die tatsächlich vorhanden sind, heissen *Charakteristiken.* Sie sind die *Unbestimmtheitscurven*[70] *des Cauchyschen Problems.* Um sie zu finden, versucht man, den Beweis für die Eindeutigkeit einer Lösung der partiellen Differentialgleichung zu geben, welche eine vorgegebene Kurve enthält. Man findet, dass dieser Beweis sich gerade dann nicht erbringen lässt, wenn diese Raumkurve selber das Integral | einer gewissen gewöhnlichen Differenti- 74
algleichung ist. Diese Differentialgleichung hat eine einparametrige Schar von Kurven auf der Integralfläche zu Lösungen. Durch diese Schar kann sogar, wie die Theorie zeigt, die Integralfläche selber erzeugt werden. Durch jeden Punkt der Fläche geht nur eine solche Kurve.

Der springende Punkt der Theorie ist es nun, diese *Charakteristiken* allein *aus der Differentialgleichung zu finden*, also ohne dass die Integralfläche bekannt ist. Dies gelingt in der Tat und zwar sind diese Kurven dann Integrale eines Systems von gewöhnlichen Differentialgleichungen. Diese letzeren fliessen, wie wir ohne Beweis mitteilen müssen, auch aus folgendem *Variationsproblem*: gesucht sind in unserer dreidimensionalen Mannigfaltigkeit die Kurven kürzesten Falles in der Richtung der z-Achse, die zugleich Nulllinien sind, die also $\delta\int_{p_1}^{p_2}\dot{z}dp=0$ mit der Nebenbedingung $G(\dot{x},\dot{y},\dot{z})=0$ erfüllen. Dieses Variationsproblem ist nach einer bekannten Regel der Variationsrechnung äquivalent mit

$$\delta\int_{p_1}^{p_2}(\dot{z}+\lambda G)dp=0,$$

wobei λ als Funktion von x, y, z so zu bestimmen ist, dass die Nebenbedingung $G(\dot{x},\dot{y},\dot{z})=0$ erfüllt wird. Die zugehörigen Lagrangeschen Gleichungen sind

$$\frac{d}{dp}\left(1+\frac{\partial\lambda G}{\partial\dot{z}}\right)-\frac{\partial\lambda G}{\partial z}=0;\quad \frac{d}{dp}\frac{\partial\lambda G}{\partial\dot{x}_i}-\frac{\partial\lambda G}{\partial x_i}=0,\qquad i=1,2,\text{ also}$$

$$\frac{d}{dp}\frac{\partial\lambda G}{\partial\dot{x}_i}-\frac{\partial\lambda G}{\partial x_i}=0,\qquad i=1,2,3.$$

Diese nämlichen Lagrangeschen Gleichungen erhält man aber auch aus dem Problem $\delta\int_{p_1}^{p_2}\lambda Gdp=0$, wobei λ immer noch durch $G=0$ festgelegt ist. Da die Kurve $x_i=x_i(p)$ | die dieses Problem löst, invariant bleibt, wenn p 75
durch eine Funktion $\varphi(p)$ ersetzt wird, so bestimmen wir $\varphi(p)$ noch so, dass $\lambda(x(p),y(p),z(p))\equiv 1$ wird für jeden Wert von p. Damit ist das ursprüngliche Variationsproblem übergeführt in das folgende

$$\delta\int_{p_1}^{p_2}G(\dot{x},\dot{y},\dot{z})\,dp=0 \text{ mit der Nebenbedingung } G(\dot{x},\dot{y},\dot{z})=0.$$

Dies ist aber das Variationsproblem der geodätischen Nulllinien. Wir haben also den

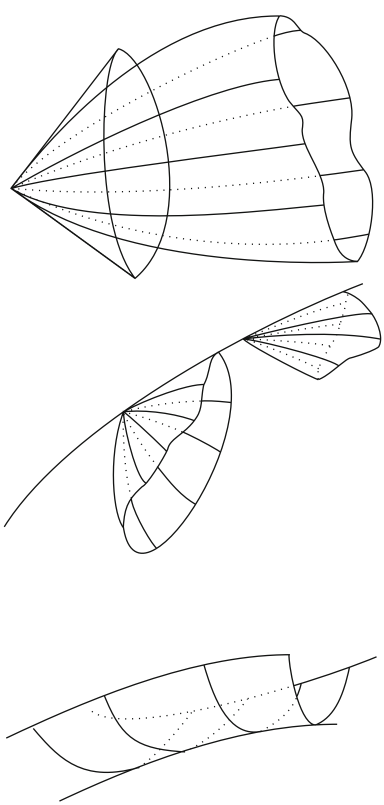
[70]"Unbestimmtheitsstellen" was corrected in pencil to "Unbestimmtheitscurven".

Satz: *Die Charakteristiken sind die geodätischen Nulllinien der Pseudogeometrie.*

Damit haben wir unsere Aufgabe gelöst, die Charakteristiken direkt aus der vorgelegten partiellen Differentialgleichung $H = 0$ zu berechnen, ohne deren Integralflächen zu kennen; und zwar findet man sie, wie wir sehen, als Integrale eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen.

Es ergibt sich jetzt das andere Problem, durch eine vorgegebene Kurve die Integralfläche der Differentialgleichung zu finden, wenn die Charakteristiken bekannt sind; anders formuliert: *wie kann man sich aus den Charakteristiken*, die ja in jedem Punkt als geodätische Nulllinien die Kegel des Feldes berühren, *eine Integralfläche* (die auch diese Eigenschaft haben muss) *zusammensetzen*? Wir wollen nun nur zwei besonders wichtige und interessante Spezialfälle dieser Aufgabe erwähnen. Ohne den Beweis dafür zu erbringen, bemerken wir nämlich

1) Die einparametrige Schar der durch einen beliebigen Punkt x_i gehenden
76 Charakteristiken bildet eine solche In|tegralfläche.



Man kann diese Fläche als eine *transzendente Kegelfläche* bezeichnen. Errichtet man nämlich in dem Punkte x_i den durch die Differentialgleichung definierten Kegel, so sind dessen Erzeugende Tangenten dieser Integralfläche. Jetzt lässt sich der Grund, warum gerade die geodätischen Nulllinien die Unbestimmtheitsstellen des Cauchyschen Problems sind, klar erkennen. Ist nämlich die vorgegebene Kurve, die die Integralfläche bestimmen sollte, eine Charakteristik, so kann man durch jeden ihrer Punkte eine solche transzendente Kegelfläche legen. Eine Erzeugende dieser Fläche ist dann immer die vorgegebene Kurve, liegt also tatsächlich in der Fläche. Andererseits gehört *zu jedem Punkt der Charakteristik* ein anderer *transzendenter Kegel*.

2) Statt eine beliebige Raumkurve zu wählen, wie es das allgemeine Cauchysche Problem verlangt, nehmen wir eine *gewöhnliche* Nulllinie. Dann ist die durch die Enveloppe der diese Nulllinie tangierenden *geodätischen* Nulllinien gebildete Fläche eine Integralfläche der Differentialgleichung.

Integralfläche und Nulllinie stehen im allgemeinen in einem *umkehrbar eindeutigen Verhältnis* zueinander. Hat man nämlich eine Integralfläche, so konstruiere man auf ihr die geodä|tischen Nulllinien. Gehen dieselben nicht, wie 77
im Falle 1 alle durch einen Punkt, so haben sie eine Enveloppe. Diese ist dann eine gewöhnliche Nulllinie, also ein Integral der Mongeschen Gleichung. Die *Lösungen von* $G = 0$ *und* $H = 0$ *gehen* also eindeutig *Hand in Hand* und zwar lösen die *geodätischen Nulllinien* beide Probleme. Es besteht eine vollständige Reziprozität zwischen den beiden Differentialgleichungen.

§ 35. Die Hamilton-Jacobische Theorie

Dieser Dualismus hat zur Folge, dass wir die Charakteristiken noch aus einem anderen Variationsproblem erhalten können. Das von uns schon genannte Problem $\int_{p_1}^{p_2} \dot{z}dp = \text{Min.}$ hatte nämlich die Nebenbedingung $G = 0$ (Mongesche Gleichung). Wir dürfen erwarten, dass die geodätischen Nulllinien auch aus einem *Variationsproblem* fliessen, *das die Hamiltonsche Differentialgleichung zur Nebenbedingung* hat. Dies ist in der Tat der Fall, und zwar lautet dieses Problem

$$\int_{p_1}^{p_2} (u_1\dot{x}_1 + u_2\dot{x}_2 + u_3\dot{x}_3)dp = \text{Min},$$

wenn zugleich $H(u_1, u_2, u_3) = 0$ erfüllt ist. Hierin sind $x_i(p)$ und $u_i(p)$ sechs unbekannte Funktionen, die aus sechs Lagrangeschen Differentialgleichungen zu bestimmen sind. Natürlich kommen die Funktionen $x_i(p)$ auch in H vor, weil ja die $g^{\mu\nu}$ Funktionen der x_i sind. Dieses Variationsproblem ist von grösster Wichtigkeit, weil es die Differentialgleichungen der Charakteristiken in ihrer *kanonischen Gestalt*, in der sie in der Mechanik gebraucht werden, liefert. Man wird so auf die *Hamilton-Jacobische Theorie* geführt, die sich mit der Herleitung dieser kanonischen Differentialgleichungen aus den Prinzipien der Mechanik und ihrer Integration beschäftigt.

Wir verfahren wieder nach den Regeln der Variationsrechnung und bilden die 78
Lagrangeschen Differentialgleichungen des Problems

$$\delta \int_{p_1}^{p_2} (u_1\dot{x}_1 + u_2\dot{x}_2 + u_3\dot{x}_3 + \lambda H)dp = 0,$$

wobei λ durch $H = 0$ bestimmt wird. Wir denken uns noch p durch eine solche Funktion $\varphi(p)$ ersetzt, dass $\lambda = -1$ wird und erhalten dann durch Lagrangesche Differentiation

$$\left.\begin{array}{ll} \text{nach } x_i: & \dot{u}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial x_i} \\ & \\ \text{nach } u_i: & \dot{x}_i = +\dfrac{\partial H}{\partial u_i} \end{array} \quad i = 1, 2, 3. \right\} \quad \begin{array}{c} \textit{kanonische Gestalt der} \\ \textit{Gleichungen der Mechanik!} \end{array}$$

Unter den Lösungen greifen wir wieder nur diejenigen heraus, die $H = 0$ erfüllen und zeigen, dass dieselben wieder die geodätischen Nulllinien oder Charakteristiken sind.

Zum Beweise müssen wir nochmals auf die *Entstehung der Gleichung* $H = 0$ *aus* $G = 0$ zurückkommen. Die Ebene mit den Koordinaten $\langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ ist Tangentialebene an den Kegel $G \equiv \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu}\dot{x}_\mu \dot{x}_\nu = 0$, wenn $\frac{\partial G}{\partial \dot{x}_1} = u_1$, $\frac{\partial G}{\partial \dot{x}_2} = u_2$, $\frac{\partial G}{\partial \dot{x}_3} = u_3$ erfüllt ist. Hierzu kommt noch die Gleichung des Ineinanderliegens $\dot{x}_1 u_1 + \dot{x}_2 u_2 + \dot{x}_3 u_3 = 0$. Da G in den $\dot{x}_\mu$ homogen vom zweiten Grade ist, wird $\frac{\partial G}{\partial \dot{x}_\mu}$ in den $\dot{x}_\mu$ linear. Wir haben also vier in $\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$, $\dot{x}_3$, $+1$ lineare Gleichungen aufzulösen. Das Eliminationsresultat ergibt die oben erwähnte Determinante $H = 0$. Aus den drei in $\dot{x}_\mu$ linearen Gleichungen $\frac{\partial G}{\partial \dot{x}_\mu} = u_\mu$ kann man umgekehrt die

$$\dot{x}_\mu = \text{Funktion der } u_\nu \text{ und } x_\lambda$$

berechnen. Diese Funktionen werden sogar in den u_ν linear sein. Setzt man diese Ausdrücke für $\dot{x}_\mu$ in $G = 0$ ein, so erhält man ebenfalls $H = 0$. Da
79 G in den $\dot{x}_\mu$ homogen quadratisch ist, | wird $\sum_\mu \dot{x}_\mu \frac{\partial G}{\partial \dot{x}_\mu} = 2G$ oder $G = \sum_\mu \dot{x}_\mu \frac{\partial G}{\partial \dot{x}_\mu} - G$. Will man hieraus die Funktion H erhalten, so hat man rechter Hand für $\dot{x}_\mu$ die Funktionen der u_ν und x_λ zu setzen und ausserdem $\frac{\partial G}{\partial \dot{x}_\mu} = u_\mu$ einzusetzen. Dann erhält man

$$H = \left(\sum_\mu \dot{x}_\mu u_\mu - G \right)_{\dot{x}_\mu = \text{ Funktion von } u_\nu \text{ und } x_\lambda} .$$

Hieraus ergibt sich

$$\frac{\partial H}{\partial X_i} = \sum_\mu u_\mu \frac{\partial \dot{x}_\mu}{\partial x_i} - \frac{\partial G}{\partial x_i} - \sum_\mu \frac{\partial G}{\partial \dot{x}_\mu} \frac{\partial \dot{x}_\mu}{\partial x_i},$$

und wegen $\frac{\partial G}{\partial \dot{x}_\mu} = u_\mu$ wird $\frac{\partial H}{\partial x_i} = -\frac{\partial G}{\partial x_i}$. Nun machen wir von den Gleichungen Gebrauch, denen die u_i genügen müssen und erhalten

$$\dot{u}_i = \frac{d}{dp} u_i = \frac{d}{dp} \frac{\partial G}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial G}{\partial x_i}$$

oder

$$\frac{d}{dp} \frac{\partial G}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial G}{\partial x_i} = 0,$$

wobei wegen $H = 0$ nur diejenigen Lösungen genommen werden dürfen, die $G = 0$ erfüllen. Damit ist gezeigt, dass auch das Variationsproblem

$$\delta \int_{p_1}^{p_2} (u_1 \dot{x}_1 + u_2 \dot{x}_2 + u_3 \dot{x}_3) dp = 0, \qquad H = 0$$

auf die geodätischen Nulllinien führt und die *vollkommene Aequivalenz von Mongescher und Hamiltonscher Gleichung* ist klargelegt.

Machen wir uns die Verhältnisse am *Beispiel der Pseudoeuklidischen Geometrie* klar. Hier ist $G = \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 - \dot{x}_3^2$, also $u_i = \frac{\partial G}{\partial \dot{x}_i} = \begin{matrix} +2\dot{x}_i & i = 1, 2 \\ -2\dot{x}_i & i = 3 \end{matrix}$. Hieraus folgt $H = \frac{1}{4}(u_1^2 + u_2^2 - u_3^2)$. Die Lagrangeschen kanonischen Gleichungen liefern $\dot{u}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i} = 0$, also wird $\ddot{x}_i = \frac{1}{2}\dot{u}_i = 0$, d. h. die geodätischen Linien[71] sind Gerade. Als geodätische Nulllinien findet man aus $G = 0$ oder $H = 0$ diejenigen, welche mit der x_3-Achse einen | Winkel von 45° bilden. 80

§ 36. Die vierdimensionale eigentliche u. Pseudogeometrie

Die vierdimensionale Geometrie

und die vierdimensionale Pseudogeometrie, mit der wir es in der Physik zu tun haben, unterscheiden sich in allem Wesentlichen von der eben behandelten dreidimensionalen so wenig, dass wir uns nun ganz kurz fassen können. In der Tat haben alle Betrachtungen, die wir im binären und ternären Gebiet angestellt hatten, die Eigenschaft, dass sie sich dem Inhalt und der Form nach ohne weiteres auf vier Dimensionen übertragen lassen. Um in der vierdimensionalen Mannigfaltigkeit x_1, x_2, x_3, x_4 Geometrie treiben zu können, benötigt man zehn Funktionen $g_{\mu\nu}$. Als *eigentliche* Geometrie bezeichnen wir wieder eine solche, in der $G(X_1, X_2, X_3, X_4)$ positiv definit ist, und haben als *analytische Bedingung* dafür

$$g_{11} > 0; \qquad \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} > 0; \qquad \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} > 0; \qquad g > 0;$$

wobei unter g die Determinante der $g_{\mu\nu}$ verstanden wird. In einem festen Punkt der Mannigfaltigkeit lässt sich dann G auf eine Summe von vier positiven Quadraten bringen.

Der einzig *wesentliche Unterschied gegen früher* ist, dass es nun *zwei verschiedene Pseudogeometrien* gibt: die in der Physik vorliegende, in welcher das Linienelement in einem Punkt der Mannigfaltigkeit auf die Form $\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2+\dot{x}_3^3-\dot{x}_2^4$[72] gebracht werden kann (dies ist bekanntlich das Linienelement der kleinen Relativitätstheorie) und die uns nicht weiter in|teressierende Geometrie, in 81
welcher zwei negative Vorzeichen auftreten $\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 - \dot{x}_3^2 + \dot{x}_4^2$. Dieser Unterschied gegenüber der dreidimensionalen Mannigfaltigkeit kommt daher, dass die Zahl 3 eben nur auf eine Weise in zwei Summanden zerlegt werden kann $3 = 2 + 1$, während 4 aus $3 + 1$ und $2 + 2$ entsteht. Um die Pseudogeometrie der Physik $4 = 3 + 1$ zu erhalten, muss man nur zur dreidimensionalen Pseudogeometrie eine solche Dimension hinzufügen, dass das hinzukommende Glied im Linienelement das positive Vorzeichen hat. Deswegen lassen sich

[71] "Linien" was corrected from "Nulllinien".

[72] Should read: "$\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2 - \dot{x}_4^2$"

auch alle Resultate des ternären Gebietes ohne weiteres auf die Physik übertragen, insbesondere auch die Hamilton-Jacobische Theorie. In der Mongeschen Differentialgleichung stehen nun drei unbekannte Funktionen $x_2(x_1)$, $x_3(x_1)$, $x_4(x_1)$; in der Hamiltonschen Gleichung eine Funktion von drei unabhängigen Veränderlichen $x_4(x_1, x_2, x_3)$. Eine Integralfläche derselben ist also noch eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit.

Die Theorie der quadratischen Formen lehrt, dass das *Kriterium dafür*, dass wir die *eigentliche Geometrie* bezw. die eine oder die andere *Pseudogeometrie* vor uns haben, die Differenz s der Zahl der Vorzeichenfolgen und der Zahl der Vorzeichenwechsel in der Reihe der Determinanten

$$\begin{array}{ccccc} I & II & III & IV & V \\ 1, & g_{11}, & \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix}, & \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}, & g \end{array}$$

ist. Der Fall von vier Vorzeichenfolgen liefert die eben genannte Bedingung für die eigentliche Geometrie. Dasselbe erhalten wir noch, wenn nur II und IV negativ sind. In der Tat werden dann alle Vorzeichen positiv, wenn nur $g_{\mu\nu}$
82 durch $-g_{\mu\nu}$ | ersetzt wird. Die in der Physik vorliegende Geometrie (Differenz $s = \pm 2$) wird realisiert, wenn nur V negativ ist, ferner wenn IV und V, endlich wenn III und V negativ sind und in den drei weiteren Fällen, die man erhält, wenn $g_{\mu\nu}$ durch $-g_{\mu\nu}$ ersetzt wird. Wir wollen als *Bedingung für die physikalische Pseudogeometrie*

$$g_{11} > 0, \qquad \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} > 0, \qquad \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} > 0, \qquad g < 0$$

festhalten.

§ 37. Zusammenhang der Theorie mit der Wirklichkeit

Wir haben nun alle Fragen erledigt, die sich auf die in der Physik herrschende Pseudogeometrie beziehen. Wir haben alle Sorgfalt aufgewendet auf die Konstruktion eines wunderbaren Fachwerks der Begriffe,[73] aber wir haben noch eine fundamentale Frage unbeantwortet gelassen, die den Physiker vor allem interessiert und die wir daher jetzt behandeln wollen, nämlich den

Zusammenhang unserer Theorie mit der Wirklichkeit,

[73] For a similar use of the phrase "Fachwerk der Begriffe", see Hilbert's lecture on *Epistemological Questions of Physics*, this Volume, p. 419 and passim.

mit den zu beobachtenden Erscheinungen. In der Tat soll sich die Summe alles physikalischen Geschehens in unserer Geometrie darstellen lassen. Jedes Ereignis und jeder Zusammenhang zwischen den Ereignissen soll sein Abbild in dieser vierdimensionalen Mannigfaltigkeit haben; jede physikalische Erscheinung muss hier Platz finden.

Da die physikalischen Ereignisse durch die zehn Funktionen $g_{\mu\nu}$, die sogenann- 83
ten Gravitationspotentiale, beschrieben werden, so muss sich der Physiker vor allem fragen, wie er *diese zehn Funktionen durch Experimente finden* kann. Erst wenn diese Frage gelöst ist, ist unsere Theorie nicht nur eine den Mathematiker durch ihre Einfachheit erfreuende Gedankenkonstruktion, sondern das, was sie sein will, eine die physikalischen Erscheinungen beschreibende Theorie. Erst dann haben wir den Zusammenhang mit der Wirklichkeit hergestellt; denn erst dann kann die Theorie an der Erfahrung geprüft werden.[74]

Unsere Theorie zeigt die *Welt als ein starres Gebilde*, in dem der Ablauf des Geschehens vorgeschrieben ist. Wir müssen uns also einen Geist denken, der, ohne die Welt der Physik zu beeinflussen, sich doch an jede beliebige Stelle derselben, d. h. an jeden Ort und zu jeder Zeit hinbegeben kann, insbesondere an solche Stellen, wo gerade einfache, der Messung und dem Experiment zugängliche Verhältnisse vorliegen.

Bevor wir die Frage beantworten, welche Apparate der Physiker besitzen muss, um die $g_{\mu\nu}$ in seiner vierdimensionalen Pseudogeometrie messen zu können, fragen wir, wie *diese Funktionen in einer zweidimensionalen Geometrie zu finden* sind. Erst die Kenntnis derselben setzt uns in Stand, Längen und Winkel zu messen, d. h. in unserer Ebene *Kilometersteine* anbringen zu können. Der einfachste Fall ist wieder der, dass $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ ist. Der Physiker kann freilich erst durch Messung entscheiden, ob dieser Fall wirklich realisiert wird. Da er aber, wie wir behaupten, immer wenigstens angenähert dieses Resul-
tat finden wird, | und da in der alten Physik die Gültigkeit der Euklidischen 84
Geometrie vorausgesetzt wird, so wollen wir, um an Bekanntes anzuknüpfen, diesen Fall als Beispiel behandeln. Dann gelten die *Kongruenzsätze* als Folgen der Transformierbarkeit der Geometrie in sich. Ein Instrument, das diese Transformation realisiert, ist *der starre Körper*. Wir stellen also das Axiom auf: es gibt Körper in der Physik, die die Transformation der Ebene in sich durch einen einfachen Vorgang realisieren.[75] Diese Körper nennen wir starr und den Vorgang nennen wir Bewegung des Körpers. Dieser axiomatisch postulierte starre Körper setzt erst den Physiker in Stand, Längen und Winkel zu messen. Der starre Körper ist also der *Apparat*, den der Physiker *in einer Euklidischen Welt* benutzen müsste, *um die Theorie an der Erfahrung zu prüfen*, indem er zeigt, das dieser Körper bewegt werden kann. Die Möglichkeit des Vorhandenseins desselben beruht aber allein auf der Transformierbarkeit der Mannigfaltigkeit in sich. Ist die Transformation in sich in einer Geometrie

[74]In the left margin, Hilbert wrote in pencil: “von Ewigkeit zu Ewigkeit”.

[75]For another discussion of the concept of a rigid measuring rod, see *Hilbert 1916a**, p. 3, (this Volume, p. 83).

unmöglich, so gibt es auch keine starren Körper mehr, und man kann gar nicht sagen, was man überhaupt unter Bewegung verstehen soll. Als anschauliches Beispiel einer solchen Geometrie hatten wir die Oberfläche des Paraboloids $Z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ im Euklidischen Raum herangezogen. Auf dieser Fläche gelten die Kongruenzsätze bekanntlich nicht, und ein starres Centimetermass kann man nicht mehr anlegen; denn die Fläche ist ja krumm. Der Apparat, der in der Euklidischen Geometrie zum Messen diente, ist hier also unbrauchbar. Hierfür müssen wir Ersatz schaffen.

85 § 38. Axiomatische Begründung der eigentlichen Geometrie; der Massfaden

Zwei Gedanken weisen uns auf den richtigen Weg. Einmal bemerken wir, dass auch jetzt noch, d. h. im Falle der allgemeinen eigentlichen Geometrie, in der die Transformation in sich unmöglich ist, doch noch eine eindimensionale Mannigfaltigkeit, eine Kurve in sich transformiert, d. h. in sich bewegt werden kann. Ebenso kann eine Kurve in eine beliebige andere von gleicher Länge transformiert werden. Wir werden unserem *Massstab* also, damit er in der Punktmannigfaltigkeit — d. h. im Raum, in dem wir Physik treiben — frei beweglich ist, die *Gestalt eines Fadens* geben müssen. Die andere Bemerkung ist die, dass auch jetzt noch *im Infinitesimalen*, wo die $g_{\mu\nu}$ konstant sind, die *Euklidische Geometrie* gilt. Anders ausgedrückt: je kleiner ein Körper ist, desto eher kann er starr sein. Diese beiden Gedanken müssen wir verwerten, um einem Physiker, der in dieser eigentlichen Geometrie experimentiert, durch axiomatische Postulate ein Instrument in die Hand zu geben, mit dem er zunächst die Möglichkeit hat, festzustellen, dass die Massbestimmung festlegende Funktionen $g_{\mu\nu}$ vorhanden sind und mit dem er weiter diese $g_{\mu\nu}$ auch messen kann, um nachzuweisen, dass diese Funktionen wirklich gewisse Differentialgleichungen erfüllen, die wir erst weiter unten aus unserer Theorie der Materie ableiten wollen.

Wir führen folgende *Definitionen* ein:

Einen zwei-(drei-)dimensionalen Raum, in dem das Linienelement positiv definit ist, nennen wir einen *Streckenraum*.[76]

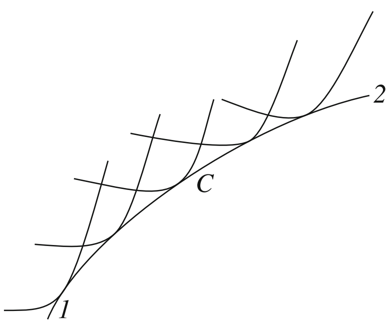
Der Apparat, mit dem der Physiker in diesem Raume die $g_{\mu\nu}$ messen kann,
86 und den wir nun durch seine Eigenschaften | axiomatisch definieren, heisse ein *Massfaden*. Der Zweck unserer Ueberlegungen ist nun der, durch Postulierung einfacher Axiome — wir werden mit zweien auskommen — es zu erreichen, dass die Funktionen $g_{\mu\nu}$ und ein Apparat, der längs irgend einer Kurve angelegt, die Zahl $\int_{p_1}^{p_2} \sqrt{\sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} \frac{dx_\mu}{dp} \frac{dx_\nu}{dp}} dp$ angibt, existieren. Wir wollen also

[76] For another definition of the concept of a "Streckenraum", see *Hilbert 1917*, p. 58, (this Volume, p. 52).

eine *axiomatische Begründung* sowohl *unserer Geometrie* als auch des Messapparates geben. *Ein Physiker*, der nur diesen Massstab besitzt, *kennt von vornherein von seinem Streckenraum noch gar nichts*, weder die Zahl der Dimensionen desselben, noch die Koordinaten der Punkte, noch die Winkel, unter denen sich zwei Kurven schneiden. *Dies alles kann er* aber, wie wir zeigen werden, *experimentell finden.* Wir machen noch die Annahme, dass der Streckenraum[77] ruhen soll, und definieren diesen letzteren nun durch zwei Eigenschaften eindeutig auf folgende Weise.

§ 39. Die Enveloppeneigenschaft

1) Die *Enveloppeneigenschaft*: Gegeben sei eine beliebige, zwei Punkte 1 und 2 verbindende Kurve C des zweidimensionalen Streckenraums und eine Kurvenschar, deren Enveloppe die Kurve C ist.



Längs der Kurve werde der Massfaden angelegt und zeige eine bestimmte Zahl S. Ist die Kurve C in der Form $x = x(p)$, $y = y(p)$ gegeben, so wird also

$$S = \int_{p_1}^{p_2} F(x, y, \dot{x}, \dot{y}, \ddot{x}, \ddot{y}, \cdots, p)dp,$$

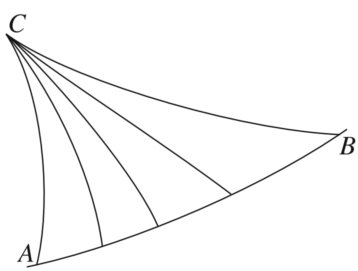
wobei F von vornherein beliebig hohe Ableitungen von x und y enthalten kann. Nun fordern wir aber *axiomatisch*, dass
der | Massfaden dieselbe Zahl S anzeigt, 87
wenn er statt längs der gegebenen Kurve angelegt zu werden, längs aller infinitesimalen, die Kurve C berührenden Kurvenstücke ds der Kurvenschar angelegt wird. Diese Eigenschaft kann man auch als die Möglichkeit des Abrollens, als die *Abrollbarkeit des Massfadens* bezeichnen. Wir teilen ohne Beweis mit, dass dies darauf hinausläuft, dass die Funktion F ausser p, x und y selbst nur die ersten Ableitungen x und y[78] als Argumente enthält, oder, wie wir uns auch ausdrücken können: *F hängt* in jedem Kurvenpunkt *nur von der Richtung der Kurve*, nicht aber von ihrer Krümmung *ab*; denn die Krümmung enthält ja schon zweite Ableitungen. Wir können sogar sagen, dass F *eine in $\dot{x}$ und $\dot{y}$ homogene Funktion vom ersten Grad* sein muss und p nicht explizit enthalten darf. Diese Forderung ist notwendig, weil die Kurve von ihrer Parameterdarstellung unabhängig ist und also die Zahl S nicht geändert werden darf, wenn p durch eine Funktion $\varphi(p)$ ersetzt wird.

[77]"Streckenraum" was corrected from "Streckenraum in Bezug auf den Massfaden".
[78]Should be "$\dot{x}$ und $\dot{y}$".

§ 40. Gültigkeit des Pythagoräischen Lehrsatzes im Infinitesimalen

2) Wird der Apparat an ein *infinitesimales rechtwinkliges Dreieck* (wie wir ein solches definieren und konstruieren können, werden wir gleich zeigen) angelegt, so soll er die *Gültigkeit des Pythagoräischen Lehrsatzes* anzeigen. Diese Eigenschaft ist, um es nochmals zu betonen, ebenso wie die erste, insofern auch eine Eigenschaft des Streckenraumes, als dieser eben von einer bestimmten Beschaffenheit sein muss, damit er die Möglichkeit der Existenz eines solchen Apparates zulässt. Die Eigenschaft 2) ist äquivalent damit, dass im Infinitesimalen die Euklidische Geometrie gilt.

88 Bevor wir zeigen, dass diese beiden Eigenschaften | die Funktion F eindeutig explizit bestimmen, wollen wir erklären, wie mit *Hilfe des Apparates ein rechtwinkliges Dreieck konstruiert* werden kann. Wir greifen aus unserer Mannigfaltigkeit zwei beliebige Punkte A und B heraus. Dann spannen wir den Massfaden zwischen diesen beiden Punkten straff an. An demselben können wir nun eine Zahl ablesen, nämlich die Länge der durch den Faden selbst gebildeten Verbindungskurve AB. Da der Massfaden aber straff angezogen wurde, d. h. so, dass diese Zahl ein Minimum wird, so ist die Kurve, an die der Faden sich anschmiegt und deren Länge er misst, gerade die *geodätische Linie* AB.

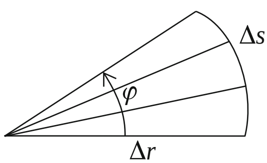


Durch den Punkt A legen wir nun mit Hilfe derselben Konstruktion eine beliebige andere geodätische Linie AC. Wann steht diese Linie auf AB senkrecht? Um dies festzustellen, greifen wir einen beliebigen Punkt der Kurve AC heraus, legen durch ihn alle geodätischen Linien nach den Punkten von AB und lesen auf dem Massfaden die zugehörigen Zahlen ab. Ist unter allen diesen Zahlen die längs der Kurve AC selber gemessene die kleinste, so sagen wir, *die geodätische Linie* AC *steht senkrecht* auf AB.

§ 41. Axiom von der reziproken Orthogonalität

Die *analytische Bedingung* für das Aufeinandersenkrechtstehen müssen wir ohne Beweis aus der Variationsrechnung übernehmen. Dort wird gezeigt, dass das Integral $\int_A^C F(x, y, \dot{x}, \dot{y})\, dp$ erstreckt über eine Kurve, die den festen Punkt C mit dem auf der Kurve $X = X(p)$, $Y = Y(p)$ liegenden beweglichen Punkt
89 A verbindet, dann ein Minimum wird, wenn die Orthogonalitätsbedin|gung (dort: Transversalitätsbedingung) $\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\dot{X} + \frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\dot{Y} = 0$ erfüllt ist. Diese Bedingung ist in den beiden Richtungen $\dot{x}_i$ und $\dot{X}_i$ im allgemeinen unsymmetrisch.

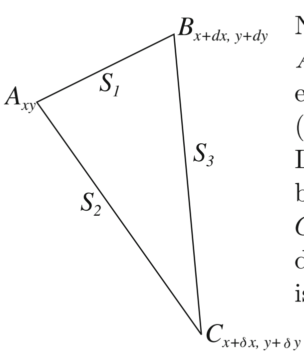
Es folgt also im allgemeinen aus $AB \perp AC$ nicht auch $AC \perp AB$. Damit dies im 3 oder mehrdimensionalen Raum[79] der Fall ist, muss vielmehr F eine bestimmte Gestalt haben und zwar gerade $F = \sqrt{\sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu}\dot{x}_\mu \dot{x}_\nu}$ (siehe W. Blaschke, Ueber räumliche Variationsprobleme mit symmetrischer Transversalitätsbedingung, Leipziger Berichte, Math. phys. Kl. 27, (1916) S. 50).[80] Wir könnten also durch die *axiomatische Forderung*, dass die *Orthogonalität* zweier Kurven immer *eine gegenseitige* sein soll, die gewünschte Form von F, nämlich $\sqrt{\sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu}\dot{x}_\mu \dot{x}_\nu}$ folgern. Wenn wir hier dasselbe aus der Forderung des Pythagoräischen Lehrsatzes im Unendlichkleinen folgern, so geschieht es nur, weil dieser Beweis kürzer zu führen ist.



Nachdem wir wissen, was ein rechter Winkel ist, können wir auch einen beliebigen Winkel mit dem Massfaden definieren und messen. Gegeben seien nämlich zwei geodätische Linien, die sich schneiden. Dann ziehen wir durch den Schnittpunkt nach allen Richtungen geodätische Linien von der Länge Δr und konstruieren die zu denselben orthogonalen Trajektorien. Deren Länge bestimmen wir mit dem Massfaden als Δs. Dann bezeichnen wir als Winkel

$$\varphi = \lim_{\Delta r} \frac{\Delta S}{\Delta r}.$$

§ 42. Bestimmung der Funktion $F^2 = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu}\dot{x}_\mu \dot{x}_\nu$ aus 2 Axiomen



Nun wollen wir die *Funktion F aus* den beiden
Axiomen 1) und 2) bestimmen. Wir konstruieren
ein beliebiges infinitesimales rechtwinkliges Dreieck
(dessen Seiten sind als |unendlich kleine geodätische 90
Linien einfach Gerade). Die drei Eckpunkte mögen
bezw. die Koordinaten $A(x, y), B(x+dx, y+dy)$ und
$C(x+\delta x, y+\delta y)$ haben. Jetzt legen wir den Massfa-
den an die Seite AB an. Die Gleichung dieser Seite
ist in Parameterdarstellung

$$\begin{aligned} x(p) &= x + pdx, \qquad &&\text{also} \quad \dot{x} = dx \\ y(p) &= y + pdx, \qquad &&\text{"} \quad \dot{y} = dy. \end{aligned}$$

[79]“im 3 oder mehrdimensionalen Raum” was interlineated.

[80]*Blaschke 1916*.

Dabei durchläuft p die Werte von 0 bis 1. Statt $F(x(p), y(p), \dot{x}(p), \dot{y}(p))$ wird der Wert im Punkte A: $F(x, y, dx, dy)$ genommen. Dann liefert der erste Mittelwertsatz:

$$S_1 = \int_A^B F(x(p), y(p), \dot{x}(p), \dot{y}(p))\, dp = F(x, y, dx, dy).$$

Für die Seite AC ergibt sich ebenso

$$S_2 = \int_A^C F(x(p), y(p), \dot{x}(p), \dot{y}(p)) = F(x, y, \delta x, \delta y).$$

Die Gleichung der dritten Seite ist

$$\begin{aligned} x(p) &= x + dx + p(\delta x - dx), \\ y(p) &= y + dy + p(\delta y - dy), \end{aligned}$$

also wird

$$S_3 = \int_B^C F(x(p), y(p), \dot{x}(p), \dot{y}(p))dp = F(x, y, \delta x - dx, \delta y - dy).$$

Nun wenden wir den Pythagoräischen Lehrsatz an

$$F^2(dx, dy) + F^2(\delta x, \delta y) = F^2(\delta x - dx, \delta y - dy).$$

Dies ist eine *Funktionalgleichung für* F^2, die wir leicht auflösen können, wenn wir die Taylorentwicklung nach dx und dy anwenden. Wir erhalten

$$\begin{aligned} F^2(\delta x - dx, \delta y - dy) &= F^2(\delta x, \delta y) - \left(\frac{\partial F}{\partial \delta x} dx + \frac{\partial F}{\partial \delta y} dy\right) \\ &+ \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2 F}{\partial (\delta x)^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial \delta x \partial \delta y} dx dy + \frac{\partial^2 F}{\partial (\delta y)^2} dy^2\right\} + \cdots . \end{aligned}$$

---

91 Wegen der Orthogonalitätsbedingung wird $\frac{\partial F}{\partial \delta x} dx + \frac{\partial F}{\partial \delta y} dy = 0$. Ferner ist F homogen vom ersten Grade in dx und dy, also fallen alle Glieder mit dx^3, $dx^2 dy, \cdots$ usw. weg. Setzen wir den so gefundenen Ausdruck in die Funktionalgleichung ein, so wird $F^2 = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2 F}{\partial (\delta x)^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial \delta x \partial \delta y} dx dy + \frac{\partial^2 F}{\partial (\delta y)^2} dy^2\right\} = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu$. Wir erhalten $S = \int_{p_1}^{p_2} \sqrt{\sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} \frac{dx_\mu}{dp}\frac{dx_\nu}{dp}}\, dp$ q.e.d.

§ 43. Uebertragung der Resultate auf die Pseudogeometrie

Diese Resultate haben wir nun auf den vierdimensionalen physikalischen Raum, die Welt, in welcher das Linienelement nicht mehr positiv definit ist, und die also in unserer Ausdrucksweise keinen Streckenraum darstellt,

zu übertragen. Wir haben bei der Definition des Massfadens gefordert, dass der Streckenraum ruhe. Der Begriff der Ruhe ist aber etwas relatives, vom zu Grunde gelegten Koordinatensystem abhängiges. Wir wollen aber gerade allgemein invariante Eigenschaften der Pseudogeometrie messen können. Daher müssen wir den Apparat ganz allgemein anwenden können. Wir fordern also wieder axiomatisch: *Der Massfaden soll sich über irgend eine Weltkurve spannen lassen*, d. h. über eine Kurve, deren einzelne Punkte zu verschiedenen Zeiten existieren. *Da die Welt eine Pseudogeometrie* der Form $3+1$ darstellt, *steht dem Physiker* neben dem Massfaden *noch ein anderer Apparat* gleichberechtigt *zur Verfügung*;[81] denn in einer x, t-Ebene gilt ja im Infinitesimalen gar nicht Euklidische, sondern die Pseudoeuklidische Geometrie. Es muss also in der Welt auch solche Kurven geben, dass der Massfaden, wenn er längs derselben angelegt wird, keine Zahl angibt, dass | also der physikalischen 92
Apparat in diesem Falle versagt. Ganz allgemein wird der Physiker *folgende Verhältnisse realisiert* finden:

Sind mit Hilfe des Massfadens in einem Weltpunkt drei zueinander senkrecht stehende Richtungen aufgefunden, so kann mit diesem Instrument, trotzdem die Welt noch eine vierte Dimension hat, keine neue Richtung aufgefunden werden, die auf diesen drei Richtungen senkrecht steht. Wir sagen weiter: Werden ⟨wir⟩ *zwei Ereignisse* durch eine geodätische Weltlinie verbinden, die mit dem Massfaden gemessen werden kann, so sind dieselben *voneinander unabhängig*. Kann diese geodätische Linie aber nicht mehr mit dem Massfaden gemessen werden, so könnnen die Ereignisse *im Verhältnis von Ursache und Wirkung* zueinander stehen. Die Richtungen der durch einen Punkt gehenden geodätischen Linien, auf welchen der Massfaden anwendbar ist, kann man auch durch Rechnung finden. In diesem Punkt habe das Linienelement die Form $\sum_{\mu\nu}(g_{\mu\nu})_0 dx_\mu dx_\nu$. Dann lässt sich eine solche lineare Transformation (auf Hauptachsen) angeben, dass diese quadratische Form zu $dx^2 + dy^2 + dz^2 - dt^2$ wird. Alle geodätischen Linien durch den Nullpunkt nun, die mit der neuen t-Achse einen Winkel von mehr als 45° bilden, sind mit dem Massfaden zu messen. Beträgt der Winkel 45°, so zeigt der Faden die Länge Null und gehen wir darüber hinaus, so kommen wir in das Gebiet, in welchem dieser physikalische Apparat versagt.

Um auf diesen Weltlinien die Länge zu messen, muss der Physiker also ein anderes Instrument,

die *Lichtuhr* 93

benutzen, die wir wieder durch ihre Eigenschaften axiomatisch definieren.

Die *Länge der Weltlinie*, die mit der Lichtuhr gemessen wird, nennen wir die *Eigenzeit* τ. Die Weltlinie selber nennen wir dann eine *Zeitlinie*. Von der Lichtuhr verlangen wir wieder

[81] "Verfügung" was corrected from "Seite".

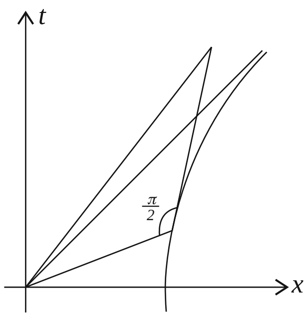
1) die Enveloppeneigenschaft.

Für Zeitlinien in einer x, t-Ebene folgt daraus

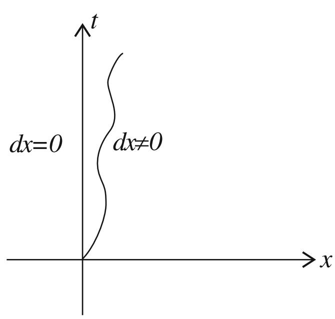
$$\tau = \int_{p_1}^{p_2} F(x, t, \dot{x}, \dot{t}) dp,$$

wo F eine *homogene Funktion ersten Grades* von $\dot{x}$ und $\dot{t}$ allein ist.

2) Da nun im Infinitesimalen die Pseudoeuklidische Geometrie, d. h. das kleine Relativitätsprinzip gilt, weil ja $x^2 - t^2$ eine Invariante der *Lorentztransformation* ist, so *fordern wir*:



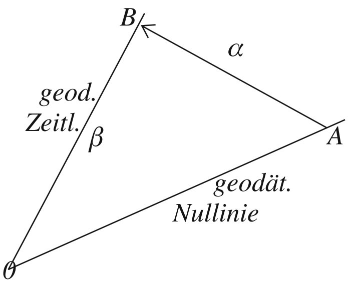
Wird die Lichtuhr an ein infinitesimales rechtwinkliges Dreieck angelegt, so soll der Pseudopythgoräische Lehrsatz (Differenz der Quadrate der Katheten=Quadrat der Hypotenuse) gelten. In der Pseudoeuklidischen Geometrie stehen zwei Gerade aufeinander senkrecht, wenn die eine Gerade ein Durchmesser der gleichseitigen Hyperbel $t^2 - x^2 =$ const. und die andere Gerade die konjugierte Tangente ist. Die eine Kathete muss also mit
94 dem Massfaden, die andere mit der | Lichtuhr gemessen werden. Die Hypotenuse wird bezw. mit dem Massfaden und mit der Lichtuhr gemessen, wenn sie einen Winkel von bezw. weniger als 45° und mehr als 45° mit der x-Achse bildet.



Geodätische Linien, die einen Winkel von 45° mit der x-Achse bilden, können wir eben noch mit dem Massfaden und eben noch mit der Lichtuhr messen.Ersteres Instrument zeigt $s = 0$, letzteres zeigt $\tau = 0$. Auch die *Orthogonalität* kann *festgestellt*, also können wieder Winkel d. h. Geschwindigkeiten[82] gemessen werden; und zwar steht eine Zeitlinie auf einer Weltlinie senkrecht, wenn die Zahl, die die Lichtuhr anzeigt, ein Maximum ist. In der Tat wird $d\tau = \sqrt{dt^2 - dx^2}$ für $dx = 0$, d. h. für die t-Achse ein Maximum.

Wir wollen dem zweiten Axiom noch eine *andre Deutung* geben, in der es physikalisch anschaulich wird und in der es durch das Experiment bewiesen wurde.

[82]"d. h. Geschwindigkeiten" was interlineated.



Wir konstruieren von einem Punkt aus eine solche geodätische Weltlinie, dass dieselbe mit der Lichtuhr gemessen werden kann und eine andere, auf der die Lichtuhr gerade versagt. Von einem beliebigen Punkt dieser zweiten geodätischen Linie konstruieren wir das Lot auf der erste. Seine Länge sei α. Den Fusspunkt des Lotes bezeichnen wir mit B und die mit der Lichtuhr gemessene Länge OB mit β. Nun fordern wir im Infinitesimalen axiomatisch $\lim\limits_{\alpha=0} \alpha = \beta$. Hieraus folgt dann wieder $F^2 = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} \frac{dx_\mu}{dp} \frac{dx_\nu}{dp}$.[83]

Dieses Axiom wird durch den Michelsonschen Versuch tatsächlich an der Er- 95
fahrung *bestätigt*. Es ist also eine aus der Physik stammende kontrollierte Tatsache, die darauf hinausläuft, dass sich das Licht von einem bewegten Körper mit einer nach allen Richtungen hin konstanten Gechwindigkeit ausbreitet.

Die beiden von uns skizzierten Apparate sind nun freilich in der Wirklichkeit nicht realisierbar, aber sie werden doch mit einer gewissen Annäherung durch den Physiker zu konstruieren sein, und die physikalischen Institute sind dazu da, um an den tatsächlich verwendeten Instrumenten diese Korrektionen anzubringen.

§ 46. Bestimmung der Gravitationspotentiale mit Massfaden und Lichtuhr

Jetzt können wir die $g_{\mu\nu}$ an jeder Stelle der Welt *finden*, und zwar zeigen wir, dass *jedes der beiden Instrumente* Massfaden und Lichtuhr *für sich ausreicht*, um mit seiner Hilfe die Werte der $g_{\mu\nu}$ als Funktionen von x_i zu berechnen, sobald nur ein bestimmtes Raum-Zeit-Koordinatensystem x_i eingeführt worden ist. In der Tat wählen wir irgend 10 Strecken aus, die sämtlich längs verschiedenen Richtungen in den nämlichen Weltpunkt x_s einlaufen, so dass diesem Endpunkt jedesmal derselbe Parameterwert p zukommt, dann ergibt sich für jede der 10 Strecken im Endpunkt die Gleichung

$$\left(\frac{ds^{(h)}}{dp}\right)^2 = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} \frac{dx_\mu^{(h)}}{dp} \frac{dx_\nu^{(h)}}{dp} \qquad (h = 1, 2, \cdots 10),$$

hier sind die linken Seiten bekannt, sobald wir die Längen s mittelst des *Massfadens* bestimmt haben: Setzen wir nun zur Abkürzung $\sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} X_\mu X_\nu =$
u und: | 96

[83]The preceding sentence was interlineated.

$$D(u) = \begin{vmatrix} \left(\frac{dx_1^{(1)}}{dp}\right)^2, & \frac{dx_1^{(1)}}{dp}\frac{dx_2^{(1)}}{dp}, & \cdots & \left(\frac{dx_4^{(1)}}{dp}\right)^2, & \left(\frac{ds^{(1)}}{dp}\right)^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \left(\frac{dx_1^{(10)}}{dp}\right)^2, & \frac{dx_1^{(10)}}{dp}\frac{dx_2^{(10)}}{dp}, & \cdots & \left(\frac{dx_4^{(10)}}{dp}\right)^2, & \left(\frac{ds^{(10)}}{dp}\right)^2 \\ X_1^2, & X_1 \cdot X_2, & \cdots & X_4^2, & u \end{vmatrix},$$

so wird $D(0) + u\frac{\partial D}{\partial u} = 0$, also

$$\sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} X_\mu X_\nu = -\frac{D(0)}{\frac{\partial D}{\partial u}}, \tag{25}$$

wodurch sich zugleich für die Richtungen der ausgewählten 10 Strecken im Punkte $x_i(p)$ die *Bedingung*

$$\frac{\partial D}{\partial u} \neq 0$$

als *notwendig* herausstellt, damit sich alle 10 Funktionen berechnen lassen.
Ist $\sum g_{\mu\nu} X_\mu X_\nu$ nach (25) berechnet, so würde die Anwendung des Verfahrens auf irgend eine 11te Strecke, die in $x_i(p)$ endigt, die Gleichung

$$\left(\frac{ds^{(11)}}{dp}\right)^2 = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} \frac{dx_\mu^{(11)}}{dp}\frac{dx_\nu^{(11)}}{dp}$$

liefern und diese Gleichung wäre dann sowohl eine Kontrolle für die Richtigkeit des Massfadens als auch eine experimentelle Bestätigung dafür, dass die Voraussetzungen der Theorie für die wirkliche Welt zutreffen.
Für die Lichtuhr gilt die entsprechende Ueberlegung.

97

§ 47. Ursache und Wirkung

Wir wenden uns nun zur Beantwortung einer anderen Frage, die ebenfalls für den Physiker von fundamentalster Wichtigkeit ist, wir wollen nämlich

das Kausalitätsprinzip in der Physik

behandeln. Dazu müssen wir an Betrachtungen anschliessen, die wir oben (S. 82) angestellt hatten. Dort wurden die Bedingungen dafür aufgestellt, dass die quadratische Form $\sum g_{\mu\nu} X_\mu X_\nu$, wenn sie in einem Punkt auf die Normalform einer Summe von vier Quadraten gebracht wird, drei positive und ein negatives Vorzeichen hat. Wir werden sehen, dass *obige Bedingungen*, die durch Ungleichungen ausgedrückt waren, *allein nicht hinreichen, um die vierdimensionale Mannigfaltigkeit* x_1, x_2, x_3, x_4 mit ihren 10 die Massbestimmungen festlegenden Funktionen $g_{\mu\nu}$ *zu einer physikalisch zulässigen zu machen.*

In der alten Physik wurde die Gültigkeit der Euklidischen Geometrie a priori angenommen. Die Zeit als vierte Dimension stand mit den drei Raumdimensionen in gar keinem Zusammenhang. Einen grossen Schritt weiter in der *Verschmelzung von Raum und Zeit* in vier gleichberechtigten Dimensionen ging die sogenannte "kleine Relativitätstheorie", welche bekanntlich lehrt, dass die Naturgesetze in einer dreifach unendlichen Mannigfaltigkeit von Bezugssystemen ihren einfachsten Ausdruck erhalten, die durch solche lineare Transformationen auseinander hervorgehen, dass die quadratische Form $x^2 + y^2 + z^2 - t^2$ dabei unverändert bleibt. Die allgemeine Relativitätstheorie
geht | nun noch viel weiter in der Vereinheitlichung von Raum und Zeit. Sie 98
sieht von vornherein alle Bezugssysteme, die durch beliebige Transformation aus einem gegebenen hervorgehen, als gleichberechtigt an. Dadurch wird der Zeit ihre Sonderstellung unter den vier Dimensionen der Welt des Physikers vollkommen genommen. Mit der Forderung dieser allgemeinsten Relativität sind wir aber, wie wir nun zeigen wollen, doch ein wenig zu weit gegangen. Auch jetzt noch bleibt eine *kleine Trennung zwischen Raum und Zeit* bestehen, eine Trennung freilich, die nur noch ein Schatten der früheren ist.

Wenn wir sagen, dass das physikalische Geschehen in einer vierdimensionalen Mannigfaltigkeit stattfindet, so meinen wir damit nur, dass es in einer solchen Mannigfaltigkeit gedeutet werden kann, dass uns *diese Mannigfaltigkeit* also *ein Bild der Wirklichkeit* liefert. Von diesem Bilde müssen wir dann aber verlangen, das es alle uns von der Welt des Physikers bekannten Eigenschaften ebenfalls aufweist. Eine solche ist in erster Linie die *Kausalität*, oder zeitliche Aufeinanderfolge von Ursache und Wirkung. Betrachten wir die physikalischen Ereignisse von einem bestimmten Bezugssystem aus, so können wir ein gewisses Punktereignis B nur dann als Folge eines anderen A ansprechen, wenn es durch Lichtsignale von A aus erreicht werden kann. Wir sind gewohnt, diese *kausale Folge* der Ereignisse als etwas *vom Bezugssystem Unabhängiges* anzusehen, und wir werden sie nicht ohne Not aufgeben, trotzdem sie keine
logische Forderung ist, d. h. eine Forderung, deren Auf|gabe zu Widersprüchen 99
des Denkens führen würde. Daher werden wir auch von unserem Bilde verlangen, dass das Verhältnis von Ursache und Wirkung zwischen zwei Ereignissen daselbst bestehen bleibt.

Als Zeitlinie haben wir oben eine solche Weltlinie bezeichnet, deren Länge mit der Lichtuhr gemessen werden muss. Die Bedingung dafür, dass $x_i = x_i(p)$ eine Zeitlinie darstellt ist $\sum g_{\mu\nu}\dot{x}_\mu(p)\dot{x}_\nu(p) < 0$. *Zwei Ereignisse* nun, *die im Verhältnis von Ursache und Wirkung stehen, können immer durch eine Zeitlinie verbunden werden.* Wir müssen also verlangen, dass zwei Punkte einer Zeitlinie, die in Bezug auf das gegebene Koordinatensystem verschiedene Zeiten hatten, durch keine Transformation auf Gleichzeitigkeit gebracht werden können. Würde man nun alle Transformationen als erlaubt ansehen, so könnte man aber unendlich viele angeben, für welche diese beiden Ereignisse gleichzeitig stattfinden. Wir kommen so dazu, dass wir den Koordinatensystemen, die wir als Raum und Zeit ansehen können, *gewisse Beschränkungen* auferlegen müssen. Im kleinen Relativitätsprinzip tritt diese Schwierigkeit nicht auf; dort sind wegen der grossen Beschränktheit der zulässigen Transformationen von selbst alle diejenigen ausgeschlossen, welche Ursache und Wirkung vertauschen können.

§ 48. Bedingungen für erlaubte (eigentliche) Raum-Zeit-transformationen

Wir wollen nun zeigen, dass auch in der allgemeinen Relativitätstheorie *zwei Punktereignisse einer Zeitlinie nicht auf Gleichzeitigkeit transformiert* werden können durch alle Transformationen, die den durch die *Ungleichungen* (S. 82)

$$g_{11} > 0, \qquad \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} > 0, \qquad \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} > 0, \qquad g < 0$$

100 ausgedrückten Beschränkungen genügen. Dieselben sind in der Tat eine Einschränkung der erlaubten Transformationen, denn wir haben auf S. 82 gesehen, dass es 6 Systeme von 4 Ungleichungen gibt, die alle die in der Physik herrschende Pseudogeometrie realisieren. Durch eine beliebige Transformation wird sich im allgemeinen unser System von Ungleichungen in ein anderes transformieren. Alle solchen Transformationen sind also unzulässig. Um zu beweisen, dass erlaubte Transformationen Ursache und Wirkung nicht auf Gleichzeitigkeit bringen können, haben wir nun zu bemerken, dass *für eine Zeitlinie* $\dot{x}_4(p) \neq 0$ sein muss. Für eine solche Linie gilt nämlich nach Definition $G = \sum g_{\mu\nu}\dot{x}_\mu\dot{x}_\nu < 0$. Wäre nun $\dot{x}_4(p) = 0$, so folgte aus unseren Ungleichungen $G > 0$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

Die Ungleichung $\dot{x}_4(p) \neq 0$ kann durch Einführung eines anderen Parameters $p = p(p')$ sofort zerstört werden. Dies ist nur scheinbar ein Widerspruch gegen den Satz, dass die Zeitlinie von der Parameterdarstellung unabhängig ist. In der Tat wird $\dot{x}_4(p') = \dot{x}_4(p)\frac{dp}{dp'} = 0$ nur, wenn $\frac{dp}{dp'} = 0$ ist. Dann wird aber auch $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = \dot{x}_3 = 0$. Während also p' eine Reihe von Werten durchläuft, bleiben sämtliche $x_i = \text{const}$. Eine solche Parameterdarstellung ist unzulässig.

Wir schliessen aus $\dot{x}_4(p) \neq 0$, dass auf einer Zeitlinie $x_4(p)$ entweder immer zunehmen oder immer abnehmen muss. Da aber der Begriff der Zeitlinie etwas Invariantes ist (die Ungleichung $G < 0$ ist unabhängig vom Bezugssystem), so muss auch für das neue Koordinatensystem $\dot{x}_4(p)$ entweder immer
101 zunehmen oder immer abnehmen, d. h. *zwei Punkte einer Zeitlinie können nicht auf Gleichzeitigkeit transformiert werden.*[84] Hieraus folgt weiter, dass

[84] At the bottom of the page, the composer of the manuscript added: “Ein anderer wichtiger Satz über Zeitlinien findet sich auf S. 140.”

das Verhältnis von Ursache und Wirkung zweier Ereignisse durch Transformation auch nicht umgekehrt werden kann. Es kann wohl vorkommen, dass $x_4(p)$ vor der Transformation auf der Zeitlinie bei wachsendem p immer zunimmt, während nach derselben das neue $x'_4(p)$ bei wachsenden p immer abnimmt. Da aber die Reihenfolge der Ereignisse auf der Zeitlinie durch die Transformation nicht geändert wird, wenn man den Parameter p beide Male dieselben Werte durchlaufen lässt, so bleibt die Kausalität doch erhalten. Man muss nur in diesem neuen Bezugssystem denjenigen von zwei Punkten einer Zeitlinie, welcher das grössere x'_4 hat, als Ursache und den mit kleinerem x'_4 als Wirkung ansprechen.

Beispiel: Wir wollen annehmen, dass in der x, t-Ebene die Pseudogeometrie $g_{11} = 1$, $g_{14} = 0$, $g_{44} = -1$ herrschen soll. Eine Gerade durch den Nullpunkt kann in Parameterdarstellung durch $x = \alpha p$, $t = p$ gegeben werden. Sie ist dann eine Zeitlinie, $G < 0$, oder Raumlinie (Strecke), $g > 0$, je nachdem $\alpha < 1$ oder $\alpha > 1$ ist. In der Tat wird für dieselbe

$$G = \alpha^2 - 1 \begin{array}{lll} < 0 & \text{für} & \alpha < 1, \\ > 0 & \text{für} & \alpha > 1. \end{array}$$

Wir versuchen die Punkte dieser Geraden auf Gleichzeitigkeit zu transformieren, indem wir sie zur neuen x'-Achse, d. h. $t' = 0$ machen. Wir setzen $x' = x$, $t' = x - \alpha t$ und erhalten

$$g'_{11} = 1 - \frac{1}{\alpha^2}, \quad g'_{14} = \frac{1}{\alpha^2}, \quad g'_{44} = -\frac{1}{\alpha^2}, \quad g' = -\frac{1}{\alpha^2}.$$

Die Transformation ist, wie wir sahen, erlaubt, wenn $g'_{11} > 0$ und $g' < 0$ ist. 102
Die erste Bedingung ist nun nur erfüllt, wenn $\alpha > 1$ ist, d. h. wenn die Gerade eine Strecke ist.

Aus der Tatsache, dass sich längs einer Zeitlinie x_4 unabhängig vom Bezugssystem nur in einer Richtung verändert, folgt weiter, dass es keine geschlossenen Zeitlinien geben kann. Wir haben ferner den

Satz: *Kann man die Punkte einer Weltlinie* alle *auf Gleichzeitigkeit transformieren, so ist diese Weltlinie eine Strecke*, d. h. eine Linie, die mit dem Massfaden gemessen werden kann, für welche also $G > 0$ ist. In der Tat gilt für Gleichzeitigkeit $\dot{x}_4(p) = 0$ also ist, wie es sein muss, $G > 0$. Durch diesen Satz wurde aber *nicht* bewiesen, dass man die Punkte einer Strecke *immer* auf Gleichzeitigkeit transformieren kann.

§ 49. Weitere Einschränkung: $g_{44} < 0$

Wir müssen nun, um mit der Wirklichkeit in Uebereinstimmung zu bleiben, noch *eine weitere einschränkende Forderung* an unser Koordinatensystem stellen, die bewirkt, *dass x_4 den Charakter der physikalischen Zeit hat*. Wir müssen nämlich fordern, dass zwei Punkte der *Zeitachse* selber auch nicht auf

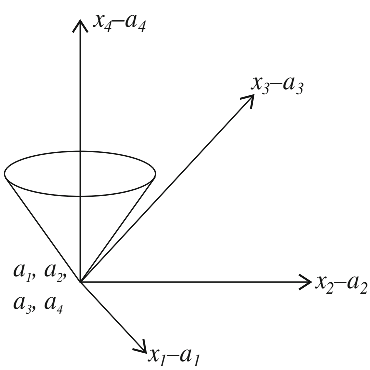
Gleichzeitigkeit transformiert werden können, d. h. dass die Zeitachse selbst ebenfalls eine Zeitlinie ist. Die Zeitachse hat die Gleichung $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, also wird $G = g_{44}\dot{x}_4(p)$ und damit $G < 0$ wird, muss auch $g_{44} < 0$ sein. Diese Ungleichung

$$g_{44} < 0$$

103 zusammen mit den vier Ungleichungen

$$g_{11} > 0, \qquad \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} > 0, \qquad \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} > 0, \qquad g < 0$$

charakterisiert erst *die physikalisch zulässigen Bezugssysteme*. Hiermit haben wir nun auch jene kleine, oben erwähnte Trennung der drei Raumdimensionen von der Zeitdimension erhalten; denn wir haben die vier Dimensionen x_1, x_2, x_3, x_4, von denen wir von vornherein keine auszeichnen können, so zu benennen, dass obige Ungleichungen erfüllt sind. Dann muss diejenige Veränderliche, deren Koeffizient g_{44} ist, als Zeit angesprochen werden. Diese Ungleichungen stellen eine Beschränkung der in der Physik durch die $g_{\mu\nu}$ a priori möglichen Massbestimmungen dar. Koordinatensysteme, die dieselben erfüllen, wollen wir *eigentliche Raumzeitkoordinaten* nennen. *Eine Transformation, bei der dieselben bestehen bleiben, heisse eine eigentliche Raumzeittransformation.*



Um uns die *Bedeutung* dieser Ungleichungen *geometrisch* klar zu machen, betrachten wir im Weltpunkt a_1, a_2, a_3, a_4 den zugehörigen Nullkegel

$$\sum g_{\mu\nu}(X_\mu - a_\mu)(X_\nu - a_\nu) = 0.$$

Für die Punkte des dreidimensionalen Raumes $X_4 = a_4$ wird infolge unserer Ungleichungen $\sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu}(X_\mu - a_\mu)(X_\nu - a_\nu) > 0$. *Dieser Raum liegt* also ganz *ausserhalb des Nullkegels. Die Gerade* $X_1 = a_1$, $X_2 = a_2$, $X_3 = a_3$ liegt dagegen ganz *innerhalb des Kegels*, weil $g_{44}(X_4 - a_4) < 0$
104 | wird. Die Zusatzbedingung $g_{44} < 0$ heisst geometrisch: die Zeitachse muss im Innern des zum 0-Punkt gehörigen Nullkegels liegen.[85]

---

[85] Added by Hilbert in pencil: "Gaussches Koordinatensystem ist ein eigentliches."

Zweiter Abschnitt

§ 50. Der Sinn der Frage: Gilt die Euklidische Geometrie?

Wir hatten schon mehrfach Gelegenheit, zu bemerken, dass es eine *unerlaubte Annahme der alten Physik war, von vornherein die Gültigkeit der Euklidischen Geometrie anzunehmen.* Auch die alte Physik verwarf schon alle Fernwirkungstheorien. Die Euklidische Geometrie ist aber eine solche. Die alte Physik perhorreszierte also die Euklidische Geometrie und legte sie trotzdem ihren Naturgesetzen zugrunde. Wenn wir jetzt wieder die alte Frage der Geometrie aufwerfen: *Gilt die Euklidische Geometrie oder gilt sie nicht*? so müssen wir uns klar sein, dass man dieser Frage zwei ganz verschiedene Bedeutungen beilegen kann. Hat die Frage den Sinn: ist die Euklidische Geometrie in sich widerspruchsfrei? so ist sie eine rein mathematische und von den Mathematikern schon längst bejahend beantwortet worden. Wenn der Mathematiker sagt, dass die Euklidische Geometrie existiere, so meint er damit auch nur, dass sie nicht zu logischen Widersprüchen führt. In der Tat kann jede mathematische Existenzbehauptung — z. B. jede algebraische Gleichung hat eine Wurzel — so formuliert werden: die Annahme, | dass jede algebraische 105
Gleichung eine Wurzel hat, führt nicht auf logische Widersprüche. Mit einer solchen Beantwortung der Frage können wir uns in der Physik nicht zufrieden geben. Was nützt uns das schönste, in sich widerspruchslose physikalische System, wenn es in der Natur nicht realisiert ist?

Für uns hat also die Frage der Gültigkeit der Euklidischen Geometrie einen ganz anderen Sinn wie für den Mathematiker. Wir fragen: *ist die Euklidische Geometrie in der Welt des Physikers realisiert*? Um diese Frage zu beantworten, müssen wir uns nun einem neuen Abschnitt unserer Vorlesung zuwenden, *indem wir wirkliche Physik treiben. Diese Frage kann* eben *durch blosses Nachdenken nicht entschieden werden*, mit ihr treten wir nämlich in das Gebiet der Physik hinein. Damit würde mir auch die neue Auffassung von der Welt des Physikers vollkommen Recht geben; denn hier gehört die Geometrie zur Physik im Gegensatz zur alten Auffassung.

Bis jetzt hatten wir uns im wesentlichen nur mit den geometrischen Sätzen der Massbestimmung beschäftigt und dabei nur das Vorhandensein gewisser Ungleichungen zwischen den $g_{\mu\nu}$ vorausgesetzt. *Nun müssen wir die Differentialgleichungen aufstellen*, *denen die $g_{\mu\nu}$ genügen sollen*, und haben dann zu entscheiden, ob und unter welchen Voraussetzungen diese Gleichungen die Lösungen $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ zulassen. Wir bemerken, dass wir im Folgenden statt der Zeit t als vierte Veränderliche $x_4 = it$ benutzen wollen. Dann haben wir ein positiv definites Linienelement, also die eigentliche und nicht die | Pseu- 106
dogeometrie vor uns. Diese homogenisierende, imaginäre Bezeichnungsweise ist bei allen Rechnungen der reellen Schreibweise vorzuziehen, während die

reelle bei prinzipiellen Fragen, wo es gerade auf den noch bestehenden kleinen Unterschied zwischen Raum und Zeit ankommt, besser anzuwenden ist.
Wir wollen das Resultat unserer Rechnung vorwegnehmen: *unsere physikalischen Grundgleichungen haben im allgemeinen keineswegs* $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ *zu Lösungen*. Dies ist meiner Meinung nach ein positives Resultat der Theorie; denn wir können der Natur die Euklidische Geometrie durch andere Deutung der Experimente durchaus nicht aufzwingen. Vorausgesetzt nämlich, dass meine zu entwickelnden physikalischen Grundgleichungen wirklich die richtigen sind, so ist auch keine andere Physik möglich, d. h. die Wirklichkeit kann nicht anders aufgefasst werden. Andererseits werden wir sehen, dass unter gewissen sehr spezialisierenden Voraussetzungen — vielleicht ist das Fehlen von Materie im ganzen Raum dazu schon hinreichend — die einzigen Lösungen der Differentialgleichungen $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ sind. Auch dies muss ich als eine Stütze meiner Theorie ansehen; denn das Gauss'sche Experiment der Messung der Winkelsumme im Dreieck hat gezeigt, dass *die Euklidische Geometrie in der Wirklichkeit* sicher *mit grosser Annäherung erfüllt* ist.[86]

§ 51. Die leitenden Gesichtspunkte bei der Herleitung der physikalischen Grundgleichungen

Wir wollen nun daran gehen, *die physikalischen Grundgleichungen* abzuleiten. Dazu muss ich Ihnen meine Anschauungen vom Wesen der Materie darlegen.
107 Ich bin der Ansicht, |[87] dass es in der physikalischen Welt *ausser Elektrizität keine weitere Materie gibt*⟨.⟩ Um nun den elektrischen Zustand in jedem Weltpunkt zu beschreiben, brauchen wir neue, unbekannte Funktionen, die den $g_{\mu\nu}$ der Pseudogeometrie gleichberechtigt an die Seite treten. Da die Weltgesetze invariant sein sollen, müssen sich auch diese Funktionen zu einer Invariante zusammensetzen lassen. Die einfachste Invariante, die wir haben, ist der Vierervektor. Daher führen wir *noch 4 unbekannte Funktionen* q_1, q_2, q_3, q_4 von x_1, x_2, x_3, x_4 ein, die den elektrischen Zustand der Welt in jedem Punkte beschreiben sollen. Dies ist sicher die einfachste Annahme, die man über das Wesen der Materie machen kann. Mit noch weniger neuen Funktionen lässt sich sicher nicht auskommen; dagegen wäre es von vornherein denkbar, dass man noch mehr Vektoren oder Tensoren einführen muss, um die Natur zu beschreiben. Ich habe aber die feste Ueberzeugung, dass die 4 Funktionen q_i zusammen mit den 10 Gravitationspotentialen $g_{\mu\nu}$ die Welt des Physikers

[86] For another mention of Gauß's experiment, see *Hilbert 1916a**, p. 5, (this Volume, p. 85 and its note 10).

[87] P. 107 is missing in the copy of *Hilbert 1916/17** deposited in Göttingen. The following text is taken from p. 107 of the copy extant in the Hückel papers in the Staatsbibliothek Berlin (Nachl. Hückel 2.11). This text is identical to the corresponding text of pp. 100–101 in the copy owned by the Archives of the California Institute of Technology, and to the corresponding text on the same pages of the copy extant in the Born papers in the Staatsbibliothek Berlin (Nachl. Born 1818), see also the Introduction to this Chapter, p. 77.

vollkommen darstellen. Ob diese Ueberzeugung berechtigt ist, kann nur der Erfolg lehren.
Nach welchen Gesichtspunkten sollen wir nun die Gleichungen aufstellen, denen diese 14 Funktionen zu genügen haben? Dass *diese Gleichungen allgemein invariant sein sollen*, muss unsere erste Sorge sein. Damit erhalten wir schon die Möglichkeit, dieselben aus einem Variationsprinzip abzuleiten, das eine allgemeine Invariante unter dem Integralzeichen stehen hat. Nun spielt schon in der alten Physik das *Hamiltonsche* | *Prinzip* eine hervorragende Rol- 108
le. In diese alte Physik soll aber die neue im Spezialfalle degenerieren. So bleibt uns gar keine Wahl, *wir werden vielmehr zwangsläufig auf ein Hamiltonsches Variationsprinzip geführt*, aus dem unsere Differentialgleichungen fliessen müssen. Unter dem Integralzeichen muss dabei, damit die Gleichungen invariant werden, eine allgemeine Invariante stehen. Dann folgt freilich aus rein mathematischen Gesetzen, dass — entsprechend den 4 unabhängigen Veränderlichen — von den 14 zur Bestimmung der $g_{\mu\nu}$ und q_i notwendigen Differentialgleichungen 4 eine Folge der 10 übrigen sind. Es sind also nur *10 Differentialgleichungen voneinander unabhängig.* Jede weitere Gleichung ist entweder eine Folge derselben oder sie steht mit ihnen im Widerspruch. Wir erhalten also im Lösungssystem noch *4 willkürliche Funktionen* von 4 Veränderlichen. Diese 4 willkürlichen Funktionen rühren daher, dass das den Gleichungen zugrunde gelegte Koordinatensystem willkürlich ist, da wir jederzeit x_i durch $x_i(x_1', x_2', x_3', x_4')$ ersetzen dürfen. *Die physikalischen Gesetze* selber, ja sogar jede physikalische Aussage,[88] muss freilich, um allgemein invariant zu sein, *von diesen 4 willkürlichen Funktionen unabhängig* sein, andernfalls ist sie *physikalisch sinnlos.*[89]
Bezeichnen wir jetzt mit

$$H(g_{\mu\nu}, g_{\mu\nu h}, \cdots, q_i, q_{ik} \cdots)$$

eine invariante Funktion der 14 Funktionen $g_{\mu\nu}$ und q_i und ihrer Ableitungen von zunächst beliebig hoher Ordnung, so lehrt die Invariantentheorie, dass das Integral $\iiiint H\sqrt{g}dx_1dx_2dx_3dx_4$ eine allgemeine Invariante ist. Wir haben also die 14 Grund|gleichungen der Physik abzuleiten aus dem *Hamiltonschen* 109
Prinzip

$$\delta \iiiint H\sqrt{g}dx_1dx_2dx_3dx_4 = \text{Minimum}, \tag{1}$$

— wobei das vierfache Integral über die ganze Welt zu erstrecken ist, — indem wir die Lagrangeschen Ableitungen nach den $g_{\mu\nu}$ und den q_i bilden. Es wird sich übrigens als praktisch erweisen, die Lagrangeschen Ableitungen nach den $g^{\mu\nu}$ statt nach den $g_{\mu\nu}$ zu nehmen. Mit der Integration dieser 14 allgemeinen Gleichungen werden wir uns später beschäftigen. Vorerst wollen wir nur einen Spezialfall derselben behandeln, der uns Auskunft gibt auf die oben gestellte Frage:

[88] The preceding five words are interlineated.

[89] The last half-sentence was added.

Gilt die Euklidische Geometrie in der Physik?

§ 52. Aufstellung der Grundgleichungen beim Fehlen von Materie

Wir suchen nämlich nach der *einfachsten Form, die die Invariante H annehmen kann*, d. h. wir fragen: welches sind die einfachsten Verhältnisse, die in der Wirklichkeit realisiert sein können? Nur dann dürfen wir hoffen, dass unsere Differentialgleichungen ein so einfaches Lösungssystem, wie es $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ darstellt, zulassen. Die einfachste Annahme, die wir machen können, ist *das vollständige Fehlen der Materie oder Elektrizität*. Wir nehmen also $q_i \equiv 0$ an. Dann haben wir eine Invariante H zu suchen, die nur von den $g_{\mu\nu}$ und deren Ableitungen abhängt. Unter diesen Invarianten wollen wir nun diejenige ausfindig machen, die die Ableitungen der $g_{\mu\nu}$ wieder nur in möglichst niederer Ordnung enthält. Nun lehrt die Invariantentheorie, dass es Invarianten, die nur die $g_{\mu\nu}$ und deren erste Ableitungen zu Argumenten haben, nicht gibt.
110 Also | müssen wir eine Invariante wählen, welche die $g_{\mu\nu}$ samt ihren ersten und zweiten Ableitungen linear[90] enthält, und da in der Invariantentheorie gezeigt wird, dass es nur eine einzige solche Invariante gibt,[91] nämlich *die Riemannsche Krümmung K der vierdimensionalen Welt*, so werden wir zwangläufig darauf geführt, *die physikalischen Grundgleichungen im einfachsten Falle* aus

$$\iiiint K\sqrt{g}dx_1dx_2dx_3dx_4 = \text{Minimum}$$

abzuleiten. Hierin ist, wie wir wissen,[92]

$$\begin{aligned}
K &= \sum_{\mu\nu} K_{\mu\nu} g^{\mu\nu}, \\
K_{\mu\nu} &= \sum_{\kappa} \left(\frac{\partial}{\partial x_\nu} \left\{ \begin{matrix} \mu\kappa \\ \kappa \end{matrix} \right\} - \frac{\partial}{\partial x_\kappa} \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \kappa \end{matrix} \right\} \right) \qquad (2) \\
&\quad + \sum_{\kappa\lambda} \left(\left\{ \begin{matrix} \mu\kappa \\ \lambda \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \lambda\nu \\ \kappa \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \kappa \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \kappa\lambda \\ \lambda \end{matrix} \right\} \right).
\end{aligned}$$

Durch Lagrangesche Differentiation erhalten wir die 10 Gravitationsgleichungen in allgemein invarianter Gestalt in der Form

$$[K\sqrt{g}]_{\mu\nu} = 0, \qquad (3)$$

[90] "linear" was interlineated.

[91] See notes 37 and 40 above.

[92] In the typescript, in eq. (2) the Christoffel symbol $\left\{ \begin{matrix} \lambda\nu \\ \kappa \end{matrix} \right\}$ erroneously was written as $\left\{ \begin{matrix} \lambda\kappa \\ \kappa \end{matrix} \right\}$.

wobei eben $\left[K\sqrt{g}\right]_{\mu\nu}$ die Bedeutung der Lagrangeschen Ableitung von $K\sqrt{g}$ nach $g^{\mu\nu}$ hat.
Aus invariantentheoretischen Ueberlegungen folgt, dass diese Gleichungen die Form[93]

$$K_{\mu\nu} - \frac{1}{2} K g_{\mu\nu} = 0$$

haben müssen. Multiplizieren wir diese Gleichungen mit $g^{\mu\nu}$ und summieren über μ und ν, so erhalten wir

$$\sum_{\mu\nu} g^{\mu\nu} K_{\mu\nu} - \frac{1}{2} K \sum_{\mu\nu} g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = 0$$

oder

$$K - \frac{1}{2} K \times 4 = 0, \qquad \text{d. h.} \quad K = 0.$$

Also haben wir *im Falle des Fehlens von Materie die einfachen physikalischen Grundgleichungen*

$$K_{\mu\nu} = 0 \tag{3'}$$

zu integrieren.
Um es nochmals übersichtlich darzustellen, so haben wir zur Aufstellung der Grundgleichungen für den einfachsten denkbaren Fall nur von *drei Prinzipien* Gebrauch gemacht: 111

1) das Hamiltonsche Prinzip,

2) das Prinzip der allgemeinen Invarianz,

3) das Prinzip, dass in der Natur von allen denkbaren Fällen gerade der einfachste realisiert ist.

§ 53. Zwei noch unbewiesene Sätze über die Gültigkeit der Pseudoeuklidischen Geometrie in der Physik

Von den zwei Gleichungen (3) sind, wie wir schon wissen, 4 eine Folge der 6 übrigen. Man verifiziert leicht, dass diese Gleichungen nun tatsächlich ein Lösungssystem $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ haben, d. h. aber, dass die pseudoeuklidische Massbestimmung den Differentialgleichungen genügt, oder dass das kleine Relativitätsprinzip $dx^2 + dy^2 + dz^2 - dt^2 =$ Invariante ein Spezialfall unserer allgemeinen Theorie ist. Dies dürfen wir mit gutem Grund als Bestätigung für die Richtigkeit unserer Theorie ansehen; denn schon das kleine Relativitätsprinzip

[93] For a similar comment on the derivation of the explicit equations from the variational formulation on general invariant-theoretic grounds, see *Hilbert 1915*, p. 405, (this Volume, p. 42 and its note 44).

gibt in vielen Fällen mit genügender Genauigkeit die in der Physik realisierten Verhältnisse wieder.

Wir wollen uns jetzt mit der Integration der 6 bezw. 10 Differentialgleichungen (3') beschäftigen. *Es ist möglich, dass folgender Satz richtig ist*:

Satz: Nimmt man alle Elektrizität aus der Welt hinweg (d. h. $q_i = 0$) und verlangt man absolute Regularität, — d. h. Möglichkeit der Entwicklung in eine Potenzreihe —, der Gravitationspotentiale $g_{\mu\nu}$ (eine Forderung, die nach
112 unserer | Auffassung auch im allgemeinen Fall immer erfüllt sein muss), so herrscht in der Welt die Euklidische Geometrie, d. h. die 10 Gleichungen (3) haben $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ als *einzige Lösung*.

Von einem Beweise dieses Satzes bin ich sehr weit entfernt. Ein solcher würde jedenfalls eine sehr weitschichtige Theorie erfordern, ja ich bin gar nicht sicher, ob dieser Satz überhaupt richtig ist. Die Funktionen $g_{\mu\nu}$, die die *Massbestimmung* der Geometrie festlegen, haben wir auch gelegentlich *Gravitationspotentiale* genannt. Es ist in der Tat der grosse Gedanke von Einstein, dass das, was man in der Geometrie die Massbestimmung nennt, in der Physik mit Gravitation bezeichnet wird (siehe z. B. A. Einstein, Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie, Ann. d. Physik (49) 1916 § 2).[94]

Für sehr wahrscheinlich richtig halte ich folgenden

Satz: Nimmt man alle Elektrizität aus der Welt fort und verlangt von den Gravitationspotentialen ausser der selbstverständlichen Forderung der Regularität noch, dass $g_{\mu\nu}$ von t unabhängig ist, d. h. dass die *Gravitation stille steht*, und schliesslich noch reguläres Verhalten im Unendlichen, so sind $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ *die einzigen Lösungen* der Gravitationsgleichungen (3).

Von diesem Satz kann ich schon jetzt so viel beweisen, dass *in der Nachbarschaft der Euklidischen Geometrie* sicher *keine Lösungen* dieser Gleichungen vorhanden sind.[95]

§ 54. Gültigkeit dieser Geometrie bei zentrischer Symmetrie

Der Beweis eines noch spezielleren Satzes dagegen lässt sich vollkommen durchführen und soll nun gegeben werden. Dazu machen wir über die $g_{\mu\nu}$
113 folgende drei Voraussetzungen: |

1) Es sei wieder $g_{\mu\nu}$ unabhängig von t.

2) Es sei $g_{\nu 4} = 0$, $\nu = 1, 2, 3$ d. h. Gauß'sches Koordinatensystem, das durch Transformation immer eingeführt werden kann.[96] (Orthogonalität der t-Achse auf dem x_1, x_2, x_3-Raum, dem sogenannten Steckenraum)

---

[94] *Einstein 1916a*, pp. 771–773.

[95] See *Hilbert 1917*, pp. 65–66, (this Volume, pp. 59–61).

[96] The words "d. h. . . . kann" are interlineated.

3) Es gebe einen ausgezeichneten Punkt in der Welt, in Bezug auf welchen *zentrische Symmetrie* vorhanden sein soll, d. h. die Drehung des Koordinatensystems um diesen Punkt ist eine Transformation der Welt in sich.

Nun gilt folgender
Satz: *Erfüllen die Gravitationspotentiale die Bedingungen 1-3, so ist die Euklidische Geometrie die einzige Lösung der physikalischen Grundgleichungen.* Wenn wir uns klar machen, dass der Euklidische Raum in Bezug auf jeden seiner Punkte zentrisch symmetrisch ist, so können wir diesen Satz auch so formulieren: Erfüllen die Funktionen $g_{\mu\nu}$ die Voraussetzungen 1 und 2 und gibt es ausserdem einen ausgezeichneten Weltpunkt, in Bezug auf welchen zentrische Symmetrie herrscht, so ist die Welt in jedem ihrer Punkte zentrisch symmetrisch. Der Beweis dieses Satzes erfordert einen gewissen Aufwand an Rechnung. Immerhin ist dieses Mass von Rechnung jetzt auf ein Minimum reduziert gegenüber den Arbeiten über den gleichen Gegenstand von Einstein (Erklärung der Perihelbewegung der Merkur, Sitzungsber. d. Preuss. Akad. d. Wiss. (47) S. 831 1915) und Schwarzschild (Ueber das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie, dieselbe Zeitschrift (7) S. 189 1916).[97]
Wir haben nun *die Gravitationsgleichungen* aus $\delta \iiiint K\sqrt{g}dx_1dx_2dx_3\,dx_4 = 0$ *abzuleiten*, wobei in K solche | Funktionen $g_{\mu\nu}$ einzuführen sind, die die Vor- 114
aussetzung 1–3 erfüllen. Eine gewaltige Vereinfachung der Rechnung lässt sich durch Einführung neuer Veränderlicher erzielen. Wir werden sehen, dass wir durch diesen Kunstgriff die Zahl der Differentialgleichungen von 10 auf 2 reduzieren und dass die Differentialgleichungen selbst von überraschender Einfachheit sein werden. Wir haben zuerst die Krümmung K für unseren Spezialfall zu berechnen und dies ist eine Rechnung, die sich auch im allgemeinen nie umgehen, sondern nur vereinfachen lässt. Dazu müssen wir das allgemeinste Linienelement $ds^2 = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu}dx_\mu dx_\nu$ aufstellen, das die Bedingungen 1–3 erfüllt. Dieses Linienelement können wir, da Gravitation und Massbestimmung ein und dasselbe sind, auch auffassen als *das Gravitationsfeld eines ruhenden Massenpunktes.*

§ 55. Das Linienelement bei zentrischer Massenverteilung

Wir verlegen den ausgezeichneten Punkt oder Massenpunkt in den 0-Punkt unseres Koordinatensystems. Dann muss nach Bedingung 3 $\sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu}\, dx_\mu dx_\nu$ *bei linearen Substitutionen*, die $x^2+y^2+z^2$ ungeändert lassen, *invariant* bleiben. Die *einzigen Invarianten* dieser Transformation sind nun

$$xdx + ydy + zdz, \qquad dx^2 + dy^2 + dz^2,$$
$$x^2 + y^2 + z^2, \qquad t, \qquad dt.$$

[97] *Einstein 1915c*, *Schwarzschild 1916a.*

Aus diesen haben wir eine, in den Differentialen homogene, quadratische Invariante zusammenzusetzen. Bezeichnet $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, so setzt sich diese Invariante also additiv zusammen aus

$$(xdx + ydy + zdz)^2, \qquad dx^2 + dy^2 + dz^2,$$
$$dt^2, \qquad (xdx + ydy + zdz)dt,$$

115 die alle noch mit willkürlichen Funktionen von R und t multipliziert sein können. Um jedoch der Bedingung 1 zu genügen, müssen diese willkürlichen Funktionen von t frei sein, und um die zweite Bedingung zu erfüllen, muss die zuletzt genannte Invariante wegfallen. Wir erhalten also⟨,⟩ $l = it$

$$ds^2 = F(R)(dx^2 + dy^2 + dz^2) + G(R)(xdx + ydy + zdz)^2 + H(R)dl^2$$

oder in Polarkoordinaten

$$\begin{aligned} ds^2 &= F(R)(dR^2 + R^2 d\vartheta^2 + R^2 \sin^2\vartheta d\varphi^2) + G(R)R^2 dR^2 + H(R)dl^2 = \\ &= \Phi(R)dR^2 + \Psi(R)(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2) + H(R)dl^2. \end{aligned}$$

Nun setzen wir $\sqrt{\Psi(R)} = r$, wobei r wieder die Bedeutung der Entfernung eines Punktes vom 0 Punkt hat, und erhalten für

$$\Phi(R)\left(\frac{dR}{dr}\right)^2 = M(r); \qquad H(R) = W(r),$$
$$ds^2 = M(r)dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2) + W(r)dl^2. \tag{4}$$

§ 56. Berechnung der Krümmung; das vereinfachte Variationsprinzip

Hierin sind M und W noch *unbekannte Funktionen einer Veränderlichen*, die aus dem Variationsprinzip jetzt bestimmt werden müssen. Dazu ist nun K *nach Formel (2) zu berechnen* und hierzu müssen wir wieder die zu (4) gehörigen g-Klammern kennen. Diese könnte man zwar aus (4) nach der Formel

$$\left\{ \begin{array}{c} \mu\nu \\ \lambda \end{array} \right\} = \frac{1}{2}\sum g^{\lambda l}(g_{l\mu\nu} + g_{\nu l\mu} - g_{\mu\nu l}) \tag{5}$$

direkt ausrechnen. Bekanntlich führt aber der Weg, die g-Klammern aus den Differentialgleichungen der geodätischen Linie

$$\ddot{x}_s + \sum_{\mu\nu}\left\{ \begin{array}{c} \mu\nu \\ s \end{array} \right\}\dot{x}_\mu\dot{x}_\nu = 0 \tag{6}$$

zu entnehmen, viel schneller zum Ziel. Wir bilden also die vier Lagrangeschen Ableitungen von

$$\delta \int_{p_1}^{p_2} \left\{ M(r) \left(\frac{dr}{dp} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\vartheta}{dp} \right)^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \left(\frac{d\varphi}{dp} \right)^2 + W(r) \left(\frac{dl^2}{dp} \right)^2 \right\} dp = 0$$

nach r, ϑ, φ, l und erhalten durch Differentiation | 116

$$\begin{aligned}
&\text{nach } r: \ddot{r} + \frac{1}{2}\frac{M'}{M}\dot{r}^2 - \frac{r}{M}\dot{\vartheta}^2 - \frac{r}{M}\sin^2\vartheta\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}\frac{W'}{M}\dot{l}^2 = 0,\\
&\text{nach } \vartheta: \ddot{\vartheta} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\vartheta} - \sin\vartheta\cos\vartheta\dot{\varphi}^2 = 0,\\
&\text{nach } \varphi: \ddot{\varphi} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\varphi} + 2\frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\dot{\vartheta}\dot{\varphi} = 0,\\
&\text{nach } l: \ \ddot{l} + \frac{W'}{W}\dot{r}\dot{l} = 0.
\end{aligned}$$

Hieraus lesen wir die g-Klammern ab:

$$\begin{aligned}
&\left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\} = -\frac{1}{2}\frac{M'}{M}; \quad \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} = -\frac{r}{M}; \quad \left\{ \begin{matrix} 33 \\ 1 \end{matrix} \right\} = -\frac{r}{M}\sin^2\vartheta;\\
&\left\{ \begin{matrix} 44 \\ 1 \end{matrix} \right\} = -\frac{1}{2}\frac{W'}{M};\\
&\left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{r}; \quad \left\{ \begin{matrix} 33 \\ 2 \end{matrix} \right\} = -\sin\vartheta\cos\vartheta; \quad \left\{ \begin{matrix} 13 \\ 3 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{r};\\
&\left\{ \begin{matrix} 23 \\ 3 \end{matrix} \right\} = \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}; \quad \left\{ \begin{matrix} 14 \\ 4 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2}\frac{W'}{W}.
\end{aligned}$$

Hierauf bilden wir nach Formel (2)

$$\begin{aligned}
K_{11} =& \frac{\partial}{\partial r}\left(\left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 13 \\ 3 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 14 \\ 4 \end{matrix} \right\} \right) - \frac{\partial}{\partial r}\left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\}\\
&+ \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\}\left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\}\left\{ \begin{matrix} 21 \\ 2 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 13 \\ 3 \end{matrix} \right\}\left\{ \begin{matrix} 31 \\ 1 \end{matrix} \right\}\\
&+ \left\{ \begin{matrix} 14 \\ 4 \end{matrix} \right\}\left\{ \begin{matrix} 41 \\ 1 \end{matrix} \right\}\\
&- \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\}\left(\left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 13 \\ 3 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 14 \\ 4 \end{matrix} \right\} \right) =\\
=& -\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{1}{2}\frac{W''W - W'^2}{W^2} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{4}\frac{W'^2}{W}\\
&- \frac{1}{2}\frac{M'}{RM} - \frac{1}{2}\frac{M'}{RM} - \frac{1}{4}\frac{M'W'}{MW}.
\end{aligned}$$

Also wird

$$K_{11}g^{11} = \frac{1}{2}\frac{W''}{MW} + \frac{1}{4}\frac{W'^2}{MW^2} - \frac{M'}{rM^2} - \frac{1}{4}\frac{M'W'}{M^2W}.$$

Weiter erhalten wir

$$\begin{aligned}
K_{22} = {} & \frac{\partial}{\partial\vartheta}\left\{ \begin{matrix} 33 \\ 3 \end{matrix} \right\} - \frac{\partial}{\partial r}\left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 21 \\ 2 \end{matrix} \right\}\left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\}\left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} \\
& + \left\{ \begin{matrix} 23 \\ 3 \end{matrix} \right\}\left\{ \begin{matrix} 32 \\ 3 \end{matrix} \right\} - \\
& - \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\}\left(\left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 13 \\ 3 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 14 \\ 4 \end{matrix} \right\}\right) = \\
= {} & -\frac{1}{\sin^2\vartheta} + \frac{1}{M} - \frac{rM}{M^2} - \frac{1}{M} + \frac{\cos^2\vartheta}{\sin^2\vartheta} + \frac{1}{2}\frac{rM'}{M^2} + \frac{1}{M} + \frac{1}{2}\frac{rW'}{MW}
\end{aligned}$$

und hieraus

$$K_{22}g^{22} = -\frac{1}{r^2} - \frac{1}{2}\frac{M'}{rM^2} + \frac{1}{r^2M} + \frac{1}{2}\frac{W'}{rMW}.$$

Ferner wird

$$\begin{aligned}
K_{33} = {} & -\frac{\partial}{\partial r}\left\{ \begin{matrix} 33 \\ 1 \end{matrix} \right\} - \frac{\partial}{\partial\vartheta}\left\{ \begin{matrix} 33 \\ 2 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 31 \\ 3 \end{matrix} \right\}\left\{ \begin{matrix} 33 \\ 3 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 32 \\ 3 \end{matrix} \right\}\left\{ \begin{matrix} 33 \\ 2 \end{matrix} \right\} \\
& + \left\{ \begin{matrix} 33 \\ 1 \end{matrix} \right\}\left\{ \begin{matrix} 13 \\ 3 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 33 \\ 2 \end{matrix} \right\}\left\{ \begin{matrix} 23 \\ 3 \end{matrix} \right\} \\
& - \left\{ \begin{matrix} 33 \\ 1 \end{matrix} \right\}\left(\left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 13 \\ 3 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 14 \\ 4 \end{matrix} \right\}\right) \\
& - \left\{ \begin{matrix} 33 \\ 2 \end{matrix} \right\}\left\{ \begin{matrix} 23 \\ 3 \end{matrix} \right\} = \\
= {} & \frac{sin^2\vartheta}{M} - \sin^2\vartheta\frac{rM'}{M^2} + \cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta - \frac{\sin^2\vartheta}{M} - \cos^2\vartheta + \\
& + \frac{1}{2}\sin^2\vartheta\frac{M'}{M^2} + \frac{sin^2\vartheta}{M} + \frac{1}{2}\sin^2\vartheta\frac{rW'}{MW}
\end{aligned}$$

117 und hieraus

$$K_{33}g^{33} = -\frac{1}{2}\frac{M'}{rM^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2M} + \frac{1}{2}\frac{W'}{rMW}.$$

Schliesslich bilden wir noch

$$\begin{aligned}
K_{44} = {} & -\frac{\partial}{\partial r}\left\{ \begin{matrix} 44 \\ 1 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 41 \\ 4 \end{matrix} \right\}\left\{ \begin{matrix} 44 \\ 1 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 44 \\ 1 \end{matrix} \right\}\left\{ \begin{matrix} 41 \\ 4 \end{matrix} \right\} \\
& - \left\{ \begin{matrix} 44 \\ 1 \end{matrix} \right\}\left(\left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 13 \\ 3 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 14 \\ 4 \end{matrix} \right\}\right) \\
= {} & \frac{1}{2}\frac{W''}{M} - \frac{1}{2}\frac{M'W'}{M^2} - \frac{1}{4}\frac{W'^2}{MW^2} + \frac{1}{4}\frac{M'W'}{M^2} + \frac{1}{2}\frac{W'}{rM} + \frac{1}{2}\frac{W'}{rM}
\end{aligned}$$

und erhalten für

$$K_{44}g^{44} = \frac{1}{2}\frac{W''}{MW} - \frac{1}{4}\frac{M'W'}{M^2W} - \frac{1}{4}\frac{W'^2}{MW^2} + \frac{W'}{rMW}.$$

Da alle $g^{\mu\nu}$ für $\mu \neq \nu$ verschwinden, so brauchen wir die $K_{\mu\nu}$ für $\mu \neq \nu$ gar nicht zu berechnen, da sie in der Formel (2) für die Krümmung nicht auftreten. Die Krümmung ergibt sich nun zu

$$K = \frac{W''}{MW} - \frac{1}{2}\frac{W'^2}{MW^2} - 2\frac{M'}{rM^2} - \frac{M'W'}{M^2W} - \frac{2}{r^2} + \frac{2}{r^2M} + 2\frac{W'}{rMW}.$$

Weiter ist $\sqrt{g} = \sqrt{MW}r^2 \sin\vartheta$, also wird

$$K\sqrt{g} = \left\{ \left(\frac{r^2W'}{\sqrt{MW}} \right)' - 2\frac{rM'\sqrt{W}}{M^{\frac{3}{2}}} - 2\sqrt{MW} + 2\sqrt{\frac{W}{m}} \right\} \sin\vartheta.$$

Jetzt setzen wir noch $M(r) = \frac{r}{r-m(r)}$, $W(r) = w^2(r)\frac{r-m(r)}{r}$, wobei nun m und w willkürliche Funktionen von r sind, und erhalten

$$K\sqrt{g} = \left\{ \left(\frac{r^2W'}{\sqrt{MW}} \right)' - 2w\frac{rm' - m}{r} - 2w + 2w\frac{r-m}{r} \right\} \sin\vartheta,$$

also als *Schlussresultat* für $K\sqrt{g}$ den einfachen Ausdruck

$$K\sqrt{g} = \left\{ \left(\frac{r^2W'}{\sqrt{MW}} \right)' - 2wm' \right\} \sin\vartheta, \tag{7}$$

wobei noch zu berücksichtigen ist, dass bei den nun zu bildenden Lagrangeschen Ableitungen nach m und w das Glied $\left(\frac{r^2W'}{\sqrt{MW}}\right)'$, weil es eine totale Ableitung ist, keinen Beitrag liefert, weil die Variationen an den Grenzen verschwinden sollen.[98] Wir erhalten nun aus dem Variationsprinzip

$$\delta \iiiint K\sqrt{g}drd\vartheta d\varphi dl = 0$$

in diesem Fall $\delta \int mw'dr = 0$, also $m' = 0$ und $w' = 0$ oder $m = \alpha$, $w = 0$. 118
Setzen wir noch $cdt = dt'$ und lassen den Strich wieder weg, so erhalten wir als Schlussresultat

$$ds^2 = \frac{r}{r-\alpha}dr^2 + r^2d\vartheta^2 + r^2\sin^2\vartheta d\varphi^2 - \frac{r-\alpha}{r}dt^2. \tag{8}$$

§ 57. $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ als einzige Lösung

Dies ist das gesuchte Gravitationsfeld eines ruhenden Massenzentrums. Nach unserer Auffassung vom Wesen der Materie können wir als physikalisch realisierbare Lösungen $g_{\mu\nu}$ der Differentialgleichungen $K_{\mu\nu} = 0$ nur diejenigen ansehen, welche regulär und singularitätenfrei sind.

[98] The preceding half-sentence was interlineated.

„Regulär“ nennen wir ein Gravitationsfeld oder eine Massbestimmung, — diese Definition war noch nachzutragen — wenn es möglich ist, ein solches Koordinatensystem einzuführen, dass die Funktionen $g_{\mu\nu}$ an jeder Stelle der Welt regulär sind und eine von Null verschiedene Determinante haben.[99] Wir bezeichnen ferner eine einzelne Funktion als regulär, wenn sie mit allen ihren Ableitungen endlich und stetig ist. Dies ist übrigens immer die Definition der Regularität in der Physik, während in der Mathematik von einer regulären Funktion verlangt wird, dass sie analytisch ist.

Für $\alpha > 0$ bez. $\alpha \leqq 0$ *hat die Massbestimmung* (8) and den Stellen $r = 0$ u. $r = \alpha$ bez. $r = 0$ *Singularitäten*. Wenn wir bedenken, dass diese Singularitäten von der Anwesenheit einer Masse herrühren, so erscheint es auch plausibel, dass dieselben durch Koordinatentransformation nicht zu beseitigen sind.[100]
119 Einen strengen Beweis dafür werden wir aber erst weiter unten geben, | indem wir den Verlauf der geodätischen Linien in der Umgebung dieser Punkte untersuchen. Wir müssen also, um singularitätenfreie Lösungen zu erhalten, $\alpha = 0$ annehmen. Dann geht (8) über in das pseudoeuklidische Linienelement

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - dt^2.$$

Wir haben damit den auf S. 113 formulierten Satz bewiesen: *Bei Abwesenheit von Materie* ($q_i \equiv 0$) existiert unter den auf Seite 113 genannten Voraussetzungen 1–3 die pseudoeuklidische Geometrie des kleinen Relativitätsprinzips in der Physik tatsächlich, und für $t =$ const. ist in der Welt die *Euklidische Geometrie wirklich realisiert*. Es ist also gezeigt, wie einerseits im allgemeinen die Massbestimmung von der Massenverteilung in der Welt abhängig ist, und wie andererseits bei Abwesenheit von Materie diese allgemeine Massbestimmung in diejenige der Euklidischen Geometrie degeneriert, wobei wir es noch dahingestellt sein lassen, ob die Bedingungen 1–3 auch notwendig sind, damit wirklich die Euklidische Geometrie Geltung hat.

§ 58. Charakteristische Singularitäten der Massbestimmung

Aus unserem Resultat (8) können wir aber noch viel mehr schöpfen, wenn wir nur $\alpha \neq 0$ annehmen. Dann handeln wir zwar entgegen unserer eigenen Vorschrift, dass wir nur singularitätenfreie Gravitationsfelder als in der Natur realisierbar ansehen wollen. Daher müssen wir *die Annahme* $\alpha \neq 0$ vorher *rechtfertigen*.

120 *Die Integration der 14 allgemeinen physikalischen Grundgleichungen* für $q_i = 0$ *ist ausserordentlich schwierig*, wir sind sogar, wie wir sahen, noch weit davon

[99] For Hilbert's definition of a singularity, see also *Hilbert 1917*, p. 70, (this Volume, p. 66 and its note 57).

[100] The singularity at $r = \alpha$ is, in fact, a coordinate singularity, see *Eisenstaedt 1982* for a historical discussion of the Schwarzschild solution; see also *Hilbert 1917*, p. 70, (this Volume, p. 66 and its note 57).

entfernt, auch nur den einfachen Spezialfall, dass dieselben in $K_{\mu\nu} = 0$ übergehen, allgemein integrieren zu können. Die mathematischen Schwierigkeiten hindern uns z. B. schon an der Konstruktion eines einzigen neutralen Massenpunktes. Könnten wir eine solche neutrale Masse kontruieren, und würden wir den Verlauf der $\langle g_{\mu\nu} \rangle$ in der Umgebung dieser Stelle kennen, so würden die $g_{\mu\nu}$, wenn wir die neutrale Masse immer mehr gegen einen Massenpunkt hin degenerieren lassen, in diesem Punkte eine *Singularität* aufweisen. Eine solche müssten wir als *erlaubt* ansehen in dem Sinne, dass die $g_{\mu\nu}$ ausserhalb der nächsten Umgebung der Singularität den in der Natur wirklich realisierten Verlauf richtig wiedergeben. Eine solche Singularität müssen wir nun in (8) vor uns haben. Im übrigen können wir schon jetzt sagen, dass die Konstruktion eines neutralen Massenpunktes, auch wenn sie später möglich sein wird, sich als so kompliziert erweisen wird, dass man für die Zwecke, in denen man nicht die nächste Umgebung des Massenpunktes betrachtet, mit ausreichender Genauigkeit mit den mit einer Singularität behafteten, angenähert richtigen Gravitationspotentialen wird rechnen können.

§ 59. Aufstellung provisorischer Axiome

Wir behaupten nun Folgendes: Wenn wir die mathematische Entwicklung, die zur Konstruktion eines neutralen Massenteilchens führt, wirklich werden durchführen können, so werden wir dabei vermutlich auf Gesetze stossen, die wir einst|weilen noch *axiomatisch formulieren* müssen, die aber später sich als 121
*Folgen unserer allgemeinen Theorie erg*eben werden, als Folgen freilich, die bestimmt nur durch eine weitschichtige Theorie und komplizierte Rechnung zu begründen sein werden. Diese Axiome, die also nur *provisorische Geltung* haben sollen, fassen wir folgendermassen:

Axiom I.: Die Bewegung eines Massenpunktes im Gravitationsfeld wird durch eine geodätische Linie dargestellt, welche *Zeitlinie ist.*

Axiom II.: Die Lichtbewegung im Gravitationsfeld wird durch eine geodätische *Nulllinie* dargestellt.

Axiom III.: Eine singuläre Stelle der Massbestimmung ist äquivalent einem Gravitationszentrum.

Zu dieser Formulierung der Axiome I u. II[101] ist Folgendes zu bemerken: Dieselben gehen, in der Grenze $(\delta_{\mu\nu})$ in diejenigen der alten Physik über, sind also in der Tat eine *vernünftige Verallgemeinerung* der letzteren. Für $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ wird die geodätische Zeitlinie nämlich zu einer Geraden, die mit der t-Achse einen Winkel von weniger als 45° bildet, d. h. die Bahnkurve eines Massenpunktes im gravitationsfreien, dreidimensionalen Streckenraum ist eine Gerade, und die Bewegung in derselben ist gleichförmig und geschieht mit *Unterlichtgeschwindigkeit*. Das zweite Axiom besagt für $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$, dass

[101]"I u. II" was interlineated.

das Licht sich in einem solchen Raum ebenfalls geradlinig ausbreitet. Da die Bewegung in einer Nulllinie vor sich geht, ist noch $dx^2 + dy^2 + dz^2 - dt^2 = 0$,
122 d. h. $\frac{dr}{dt}$ = Lichtgeschwindigkeit = 1. | Im allgemeinen ist aber im zweiten Axiom *keine Rede mehr von gerader Linie und konstanter Geschwindigkeit*, wie dies in der alten Physik noch[102] der Fall ist.[103]

Wir werden sehen, dass aus diesen Axiomen tatsächlich das Newtonsche Attraktionsgesetz bezw. die aus diesem resultierenden Kepplerschen Gesetze der Planetenbewegung *in erster Näherung* folgen. *Prinzipiell* aber hat dieses neue *Einsteinsche Gesetz gar keine Aehnlichkeit mit dem Newtonschen.* Es ist ungleich komplizierter als das letztere. Wenn wir es trotzdem dem Newtonschen vorziehen, so ist dies darin begründet, dass dieses Gesetz einem tiefliegenden philosophischen Prinzip — dem der allgemeinen Invarianz —, Genüge leistet, und dass es zwei so heterogene Dinge, wie das Newtonsche Gesetz einerseits und die tatsächliche Gültigkeit der Euklidischen Geometrie in der Physik unter gewissen einfachen Voraussetzungen andererseits als Spezialfälle enthält, so dass wir also nicht, wie dies bis jetzt der Fall war, zuerst die Gültigkeit der Euklidischen Geometrie voraussetzen, und dann ein Attraktionsgesetz anflicken müssen.

§ 60. Die Bahnkurve ist von der Masse des sich bewegenden Punktes unabhängig

Aus den eben formulierten drei[104] Axiomen wollen wir nun *die wichtigsten Folgerungen* ziehen. Ein im Nullpunkt ruhendes Gravitationszentrum bewirkt also, dass die Massbestimmung die Form hat $g_{\mu\nu} = 0$ für $\mu \neq \nu$ und $g_{11} = \frac{r}{r-\alpha}$, $g_{22} = r^2$, $g_{33} = r^2 \sin^2 \vartheta$, $g_{44} = -\frac{r}{r-\alpha}$. Die Geometrie ist eindeutig festgelegt, wenn α bestimmt ist, weil α die einzige noch willkürliche Konstante
123 des Feldes ist. | Diese Grösse α muss also *die Schwere der Masse*, die im 0-Punkt angebracht wird, darstellen. (Wir wissen noch nicht, ob $\alpha > 0$, oder ob $\alpha < 0$ angenommen werden muss. Für $\alpha < 0$ ist $r = 0$ die einzige Singularität, da $r \geqq 0$ sein muss. Für $\alpha > 0$ ist auch die Kugel $r = \alpha$ eine Singularität. Dann darf man, wenn man von $r > \alpha$ ausgeht, nicht $r < \alpha$ werden lassen, d. h. man darf nicht vom Aeusseren in das Innere der Kugel hineingehen, sondern man muss das Kugeläussere und das Kugelinnere als zwei getrennte Gravitationsfelder behandeln.)[105]

Aus dem Axiom I ersehen wir schon, dass der *Satz* gilt:

A) *Die Bahnkurve und die Bewegung des Massenpunktes* in derselben *ist von der Masse des sich bewegenden Punktes unabhängig.*

---

[102]"noch" was interlineated.

[103]In the left margin, there is a reader's mark (⊤).

[104]In the original, "drei" was put into brackets and corrected to "2" in pencil.

[105]The brackets in the preceding paragraph were added in pencil.

Dies stimmt mit der Newtonschen Theorie überein; denn dort ist $m\ddot{x} = -\frac{mMx}{r^3}$, wo m die Masse des sich bewegenden Punktes und M die Masse des Zentrums darstellt. m hebt sich in der Gleichung weg. Diese erste Folgerung A) oder dieses erste Gesetz ist eine strenge Folgerung der von uns aufgestellten Axiomatik; die Uebereinstimmung mit der Newtonschen Mechanik ist also eine exakte und nicht nur eine angenäherte. Um weitere Schlüsse zu ziehen, müssen wir die Differentialgleichungen der Bewegung integrieren. Wir gehen wieder aus vom Variationsproblem

$$\delta \int \left\{ \frac{r}{r-\alpha}\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2\vartheta\dot{\varphi}^2 - \frac{r-\alpha}{r}\dot{t}^2 \right\} dp = 0.$$

Ein Integral der zugehörigen Differentialgleichungen[106] ist zufolge unserer allgemeinen Theorie | (siehe S. 15) 124

$$\frac{r}{r-\alpha}\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2\vartheta\dot{\varphi}^2 - \frac{r-\alpha}{r}\dot{t} = A. \tag{9}$$

A ist die Integrationskonstante und zwar muss für einen Massenpunkt $A < 0$ sein (Bedingung für die Zeitlinie) und für das Licht $A = 0$ (Bedingung für die Nulllinie). Durch Bildung der Lagrangeschen Ableitung[107] nach ϑ erhalten wir

$$(r^2\dot{\vartheta})^{\cdot} - r^2 \sin\vartheta \cos\vartheta\dot{\varphi}^2 = 0. \tag{10}$$

Die durch die Lagrangesche Differentiation nach φ entstehende Gleichung lässt sich sofort einmal integrieren und liefert

$$r^2 \sin^2\vartheta\dot{\varphi} = B. \tag{11}$$

Dasselbe gilt für die Lagrangesche Ableitung nach t:

$$\frac{r-\alpha}{r}\dot{t} = C. \tag{12}$$

B und C sind ebenfalls Integrationskonstanten. Damit haben wir schon drei Integrationen durchgeführt und haben dementsprechend statt 4 Differentialgleichungen 2. Ordnung nur mehr eine Differentialgleichung 2. und 3 Differentialgleichungen 1. Ordnung.

§ 61. Die Bahnkurven liegen in Ebenen durch das Gravitationszentrum

Nun lässt sich eine zweite Uebereinstimmung mit der Newtonschen Theorie angeben, die das System der Differentialgleichungen erheblich zu vereinfachen gestattet. Wir wollen nämlich den *Satz* beweisen:

[106]"der zugehörigen Differentialgleichungen" was corrected from "desselben".

[107]"Bildung der Lagrangeschen Ableitung" was corrected by Hilbert with ink from "Differentiation".

B) *Die Bahnkurven liegen in Ebenen, die durch das Gravitationszentrum gehen.*

Zum Beweise eliminieren wir den Parameter p aus den Differentialgleichungen (10) und (11), um so eine einzige Gleichung für ϑ als Funktion von φ zu
125 erhalten. Wir machen | die identische Umformung

$$\begin{aligned}(r^2\dot\vartheta)' &= \left(r^2\frac{d\vartheta}{d\varphi}\dot\varphi\dot\varphi\right)^{\cdot} = \frac{d}{d\varphi}\left(r^2\frac{d\vartheta}{d\varphi}\dot\varphi\right)\dot\varphi\\ &= \dot\varphi^2\left(2r\frac{dr}{d\varphi}\frac{d\vartheta}{d\varphi}+r^2\frac{d^2\vartheta}{d\varphi^2}\right)+r^2\frac{d\vartheta}{d\varphi}\ddot\varphi.\end{aligned}$$

Weiter erhalten wir aus (11) durch Differentiation nach p wegen $\frac{d}{dp}=\dot\varphi\frac{d}{d\varphi}$

$$\left\{2r\frac{dr}{d\varphi}\sin^2\vartheta+2r^2\sin\vartheta\cos\vartheta\frac{d\vartheta}{d\varphi}\right\}\dot\varphi^2+r^2\sin^2\vartheta\ddot\varphi=0$$

oder nach Division mit $\sin^2\vartheta$ und Multiplikation mit $\frac{d\vartheta}{d\varphi}$

$$2\left\{r\frac{dr}{d\varphi}+r^2\operatorname{cotg}\vartheta\frac{d\vartheta}{d\varphi}\right\}\dot\varphi^2\frac{d\vartheta}{d\varphi}+r^2\frac{d\vartheta}{d\varphi}\ddot\varphi=0.$$

Setzen wir diesen Wert von $r^2\frac{d\vartheta}{d\varphi}\ddot\varphi$ in den Ausdruck für $(r^2\dot\vartheta)^{\cdot}$ ein, so erhalten wir aus (10)

$$\begin{aligned}\dot\varphi^2\left(2r\frac{dr}{d\varphi}\frac{d\vartheta}{d\varphi}+r^2\frac{d^2\vartheta}{d\varphi^2}\right)-2\left(r\frac{dr}{d\varphi}+r^2\operatorname{cotg}\vartheta\frac{d\vartheta}{d\varphi}\right)\dot\varphi^2\frac{d\vartheta}{d\varphi}&\\ -r^2\sin\vartheta\cos\vartheta\dot\varphi^2&=0\end{aligned}$$

oder $\dot\varphi^2r^2\frac{d^2\vartheta}{d\varphi^2}-2\dot\varphi^2r^2\operatorname{cotg}\vartheta\left(\frac{d\vartheta}{d\varphi}\right)^2-\dot\varphi^2r^2\sin\vartheta\cos\vartheta=0$, also

$$\frac{d^2\vartheta}{d\varphi^2}-2\operatorname{cotg}\vartheta\left(\frac{d\vartheta}{d\varphi}\right)^2=\sin\vartheta\cos\vartheta.$$

Das allgemeine Integral dieser Gleichung ist

$$\sin\vartheta\cos(\varphi+a)+b\cos\vartheta=0.$$

Man verifiziert leicht, dass dasselbe eine, und, weil es zwei Konstante enthält, die allgemeinste Lösung der Differentialgleichung ist. In der Tat wird $\cos(\varphi+a)=-b\operatorname{cotg}\vartheta$. Hieraus durch Differentiation nach φ: $-\sin(\varphi+a)=\frac{b}{\sin^2\vartheta}\frac{d\vartheta}{d\varphi}$ Nochmalige Differentiation nach φ ergibt

$$-\cos(\alpha+a)=\frac{b}{\sin^2\vartheta}\left\{\frac{d^2\vartheta}{d\varphi^2}-2\cot g\vartheta\left(\frac{d\vartheta}{d\varphi}\right)^2\right\}.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist gleich $b \operatorname{cotg} \vartheta$ und die rechte wird vermöge der Differentialgleichung $b \operatorname{cotg} \vartheta$. q. e. d.

Die Gleichung $\sin\vartheta\cos(\varphi+a)+b\cos\vartheta$ *stellt eine durch den Nullpunkt gehende Ebene dar*. Es ist nämlich für $x = r\sin\vartheta\cos\varphi$, $y = r\sin\vartheta\sin\varphi$, $z = r\cos\vartheta$
126 die Gleichung $r\sin\vartheta\cos\varphi\cos a - r\sin\vartheta\sin\varphi\sin a + r\cos\vartheta\cdot b = 0$ oder

$$\cos ax - \sin ay + bz = 0, \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Wir haben also einen zweiten *Satz* gefunden, der eine strenge Folgerung unserer Axiome ist und in Uebereinstimmung mit der Newtonschen Theorie steht: Die Bahnkurven liegen in Ebenen durch das Gravitationszentrum.

§ 62. Ableitung der Differentialgleichung der Bahnkurven

Nun setzen wir $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ d. h. $z = 0$ und erhalten anstelle der Gleichungen (9)–(12)

$$\frac{r}{r-\alpha}\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 - \frac{r-\alpha}{r}\dot{t}^2 = A, \tag{9'}$$

$$r^2\dot{\varphi} = B, \tag{11'}$$

$$\frac{r-\alpha}{r}\dot{t} = 1 (= C). \tag{12'}$$

Um $C = 1$ zu machen, darf man nicht einfach $Ct = t^*$ setzen, weil sonst im Integral (9’) das letzte Glied $\frac{r-\alpha}{r}C^2\dot{t}^{*2}$ lauten würde. Dagegen kann man der Konstanten C den Wert 1 erteilen durch *Normierung des Parameters* p, der (siehe S. 13) nur bis auf eine multiplikative Konstante bestimmt ist. Für $r = \infty$ wird (12’) zu $\dot{t} = C$. Setzt man also für $r = \infty$ $\dot{t} = 1$ d. h. $p' = Cp$, so nimmt die Gleichung (12’) die gewünschte Form $\frac{r-\alpha}{r}\dot{t} = 1$ an. Aus obigen drei Gleichungen wollen wir nun *die Gleichung der Bahnkurve* in der Form $r = r(\varphi)$ ableiten. Dazu setzen wir den aus (12’) berechneten Wert von $\dot{t}$ in (9’) ein, ersetzen noch $\dot{r}$ durch $\dot{\varphi}\frac{dr}{d\varphi}$ und erhalten

$$\frac{r}{r-\alpha}\dot{\varphi}^2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2\dot{\varphi}^2 - \frac{r}{r-\alpha} = A.$$

Berücksichtigen wir nun (11’), so finden wir

$$\frac{r}{r-\alpha}\frac{B^2}{r^4}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2\frac{B^2}{r^4} - \frac{r}{r-\alpha} = A.$$

Hierin setzen wir $r = \frac{1}{\rho}$, $\frac{dr}{d\varphi} = -\frac{1}{\rho^2}\frac{d\rho}{d\varphi}$ und erhalten

$$\frac{1}{1-\alpha\rho}B^2\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 + \rho^2B^2 - \frac{1}{1-\alpha\rho} = A.$$

Hieraus ergibt sich als *Gleichung der Bahnkurve* des Massenpunktes die Differentialgleichung erster Ordnung 127

$$\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 = \frac{1+A}{B^2}\rho - \rho^2 + \alpha\rho^3. \tag{13}$$

Nach Axiom I ist $A < 0$, weil die Bahnkurve eines Massenpunktes eine Zeitlinie sein muss. Hätten wir dagegen die Bewegung des Lichts zu untersuchen, so wären zwar nach Axiom II die Differentialgleichungen dieselben, jedoch wäre dann $A = 0$ zu setzen, weil sich das Licht auf einer Nulllinie fortpflanzt.

§ 63. Das Newtonsche Attraktionsgesetz als erste Näherung

Die Differentialgleichung der Bahnkurve für einen Massenpunkt, der sich nach dem *Newtonschen Attraktionsgesetz* bewegt, ist

$$\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 = a + b\rho - \rho^2 \tag{14}$$

und hat den Kegelschnitt $\rho = \frac{b}{2} \pm \sqrt{a + \frac{b^2}{4}}\cos\varphi$ als Lösung. Man sieht also, wenn man (13) und (14) vergleicht, dass das *Einsteinsche Gravitationsgesetz im allgemeinen keineswegs auf die Bahnkurven der Newtonschen Theorie führen wird*. Wohl aber ist dies *angenähert unter gewissen Bedingungen*, die wir nun aufsuch⟨en⟩ wollen, der Fall. Die Differentialgleichung (13) geht nämlich für endliche Werte von ρ *angenähert* in (14) über, wenn α sehr klein wird. Damit der Koeffizient $\frac{\alpha A}{B^2}$ von ρ dann den endlichen Wert b der Gleichung (14) annimmt, muss entweder A sehr gross oder B sehr klein werden. Sehr grosse Werte von A sind aber unzulässig, weil sonst der Ausdruck $\frac{1+A}{B^2}$, d. h. die Konstante a der Newtonschen Theorie unendlich gross werden würde. Also muss B sehr klein werden. Dann bleibt wieder $\frac{1+A}{B^2}$, worin ja A negativ
128 sein muss, nur | endlich, wenn A gegen -1 konvergiert. Um also *die Kegelschnitte als Bahnkurven* zu erhalten, d. h. um die Erscheinungen, die durch die Newtonsche Gravitationstheorie erklärt werden, zu realisieren, muss

$$1)\quad \lim\alpha = 0 \qquad 2)\quad \lim B = 0$$

werden. Dann ist $\lim A = -1$ — d. h. der Parameter p ist angenähert gleich der Eigenzeit — von selbst erfüllt als Folge von (9'), (11') und (12'). *Diese Verhältnisse finden wir nun in unserem Sonnensystem* — mit Ausnahme der bekannten kleinen Störung beim Merkur, die wir unten erörtern wollen — wirklich vor. Aus den Gleichungen (11') und (12') folgt nämlich

$$\frac{\dot\varphi}{\dot t} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{r-\alpha}{r^3}B. \tag{15}$$

Linker Hand steht die Winkelgeschwindigkeit, welche also wegen $\lim B = 0$ sehr klein sein muss. Die Himmelskörper bewegen sich mit einer Geschwindigkeit, deren eine Komponente $r\frac{d\varphi}{dt}$ ist und für die Werte zwischen 20 und 200 km $\sec^{-1}$ beobachtet wurden. Da wir, wie wir unten bei der Behandlung der Lichtbewegung zeigen werden, die Lichtgeschwindigkeit im Unendlichen (300000 km $\sec^{-1}$) als Einheit gewählt haben, so ist die Bedingung $\lim B = 0$ tatsächlich erfüllt.

Früher, d. h. bevor man auch nur das kleine Relativitätsprinzip kannte, war es ganz unverständlich, warum man nie mit beliebig grosser, selbst mit Ueberlichtgeschwindigkeit sich bewegende Körper beobachtete. In der kleinen Relativitätstheorie kommt nun, wie auch in unserer allgemeinen Theorie, der *Lichtgeschwindigkeit die Rolle einer Grenzgeschwindigkeit* zu. Dieser | Gedanke, an den wir uns durchaus schon gewöhnt haben, schien zu jener Zeit ganz abscheulich. Damals war es aber auch noch unverständlich, warum man für die Lichtgeschwindigkeit immer jene selbe Zahl fand, ob man sie nun von einem ruhenden oder von einem bewegten Bezugssystem aus mass. 129

Die erste[108] Bedingung $\lim \alpha = 0$ verlangt, dass *die gravitierenden Massen sehr klein* sind. Auf diesen Punkt werden wir unten, wenn wir erkannt haben, dass α nicht anderes ist, als die schwere Masse eines Körpers, noch zurückkommen. Schon jetzt können wir aus der Gleichung (9'), in der $r-\alpha$ als Koeffizient in zwei Gliedern auftritt, entnehmen, dass α die Dimension einer Länge haben muss. Für den Astronomen sind also sehr kleine Werte von α solche, die im Verhältnis zu den Entfernungen, in denen sich die Trabanten um ihr Zentrum bewegen, zu vernachlässigen sind. Dass wir die Newtonsche Mechanik bei der *Elektronenbewegung* nicht mehr realisiert finden, braucht uns nun auch nicht wunderzunehmen. Denn es[109] sind Elektronengeschwindigkeiten bis zu $\frac{9}{10}$ derjenigen des Lichts beobachtet worden.

§ 64. Der Kreis ist eine Bahnkurve: als Lösung der Differentialgleichung der Bahnkurven

Um die Bedeutung der Konstante α zu erfassen, bemerken wir, dass der *Kreis* eine Bahnkurve ist, die gleichzeitig *eine strenge Lösung der Newtonschen Theorie*, d. h. der Gleichung (14) *und der Einsteinschen Theorie*, d. h. der Gleichung (13) ist. Um zu sehen, dass $\rho =$ const. die Differential|gleichung 130
(14) befriedigt, darf man nicht einfach deren rechte Seite $a+b\rho-\rho^2 = 0$ setzen und hieraus ρ entnehmen, obgleich dann auch die linke Seite $(\frac{d\rho}{d\varphi})^2 = 0$ wird. Auf diesem Wege erhält man zwei *singuläre* Integrale.[110] Man muss vielmehr,

[108] "erste" was corrected from "zweite".

[109] "Denn es" was corrected by Hilbert in pencil from "Einerseits mag dort das α des positiv geladenen schweren Kerns gegenüber der Entfernung der negativen Elektronen von demselben eine nicht zu vernachlässigende Grösse sein, andererseits".

[110] Deleted: "nämlich die beiden Enveloppen der Ellipsenschar".

wie in der Theorie der Differentialgleichungen gezeigt wird, zur Integration der Gleichung $\frac{d\rho}{d\varphi}$ als Potenzreihe $\mathfrak{P}(\rho)$ ansetzen. Ist nun $a+b\rho-\rho^2 = -(\rho-\rho_1)(\rho-\rho_2)$, so wird vermöge der Differentialgleichung $\mathfrak{P}(\rho) = \sqrt{-(\rho-\rho_1)(\rho-\rho_2)}$. Um die Wurzel ziehen zu können, muss ρ_1 *eine Doppelwurzel* der Gleichung $a + b\rho - \rho^2 = 0$ sein. Die Bedingung hierfür ist $a + \frac{b^2}{4} = 0$ *Dann ist die Bahnkurve der Kreis* mit dem Radius $r = \frac{2}{b}$.
Dass der Kreis auch eine mögliche Bahnkurve der Einsteinschen Theorie ist, entnimmt man am einfachsten den Lagrangeschen Differentialgleichungen selbst, aber nicht aus den daraus abgeleiteten Gleichungen (9'), (11'), (12')[111] Wir werden diesen Weg nachher einschlagen; zuerst wollen wir, weil diese Rechnung von mathematischem Interesse ist, den Kreis als mögliche Lösung der Differentialgleichung (13) darstellen. Um die *Doppelwurzel der Gleichung* $a + b\rho - \rho^2 + \alpha\rho^3 = 0$ zu finden, in der jetzt

$$a = \frac{1+A}{B^2}, \qquad b = -\frac{\alpha A}{B^2} \tag{16}$$

gesetzt ist, haben wir nach einer Regel der Algebra die Konstanten a und b aus $a + b\rho - \rho^2 + \alpha\rho^3 = 0$ und der hieraus durch Differentiation nach ρ entstehenden Gleichung $b - 2\rho + 3\alpha\rho^2 = 0$ zu eliminieren. Die zweite Relation
131 liefert | $b = 2\rho - 3\alpha\rho^2$. Hierauf ergibt sich aus der ersten $a = 2\alpha\rho^3 - \rho^2$. Nun ist wegen (16) $\frac{1}{B^2} = a + \frac{b}{\alpha} = 2\alpha\rho^3 - \rho^2 + \frac{2\rho}{\alpha} - 3\rho^2$ und für $r = \frac{1}{\rho}$ $\frac{1}{B^2} = \frac{2\alpha}{r^3} - \frac{4}{r^2} + \frac{2}{\alpha r} = \frac{2}{\alpha r^3}(r-\alpha)^2$ oder

$$B^2 = \frac{\alpha}{2}\frac{r^3}{(r-\alpha)^2}.$$

Aus der Gleichung (15) folgt dann für die Winkelgeschwindigkeit

$$\left(\frac{\dot\varphi}{\dot t}\right)^2 = \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{\alpha}{2}\frac{1}{r^3} \qquad \textit{III. Kepplersches Gesetz.} \tag{17}$$

Diese Gleichung ist insofern ganz merkwürdig, als sich aus ihr die Integrationskonstanten A und B weggehoben haben. Den Grund hierfür werden wir kennen lernen, wenn wir die Kreisbewegung direkt aus den Lagrangeschen Gleichungen ableiten. *Die Winkelgeschwindigkeit der Kreisbewegung* ist also allein *vom Kreisradius und von der Konstanten* α, d. h. der im Zentrum angebrachten Masse *abhängig*.

§ 65. Die Konstante α

An die Gleichung (17)[112] müssen wir eine wichtige Bemerkung knüpfen. Linker Hand steht eine positive Grösse, rechter Hand ist r ebenfalls positiv, *daher*

[111] "selbst, aber nicht aus den daraus abgeleiteten Gleichungen" was interlineated, "(9'), (11') und (12')" was deleted, the deletion afterwards rescinded.

[112] Interlineated by Hilbert in pencil: "oder schon der drüberstehenden".

muss, damit die in der Natur beobachtete Kreisbahn auch aus unserer Theorie folgt,

$$\alpha > 0$$

sein. Diese Ungleichung folgt, wie wir sehen, nicht schon aus unserer allgemeinen Theorie, sie muss vielmehr aus der Erfahrung gewonnen werden. Wir hätten dieselbe übrigens schon aus der zweiten Gleichung (16) $b = -\frac{\alpha A}{B^2}$ entnehmen können. Damit nämlich[113] die Lösung der Gleichung (14) d. h. der Kegelschnitt $\rho = \frac{b}{2} \pm \sqrt{a + \frac{b^2}{4}} \cos\varphi$ eine Ellipse sein kann, muss $b > 0$ sein. Also muss in (16), weil $a < 0$ ist, $\alpha \mid$ positiv sein. Nur *unter dieser Bedingung* 132
wirkt die Kraft des Gravitationszentrums *anziehend* auf den sich bewegenden Massenpunkt, d. h. nur dann sind als Bahnkurven, wie die Erfahrung lehrt, alle drei Arten von Kegelschnitten möglich. Weil $\alpha > 0$ ist, haben wir also eine *reelle Gravitationskugel*, auf deren Oberfläche *die Massbestimmung aufhört, regulär zu sein.*

Aus der Gleichung (17) können wir endlich auch die Bedeutung der Konstanten α entnehmen, wenn wir sie mit ihrer Form, in der sie sich aus der Newtonschen Theorie ergibt, vergleichen. Dort folgt aus der Beziehung: Zentrifugalkraft gleich Anziehungskraft, d. h. $\frac{mv^2}{r} = \kappa\frac{mM}{r^2}$ im Falle des Kreises $mr\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \kappa\frac{mM}{r^2}$. Also wird[114]

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \kappa M\frac{1}{r^3} \quad \left(= \frac{\alpha}{2}\frac{1}{r^3}\right), \qquad \alpha = 2\kappa M.$$

Die Konstante α ist, wie man sieht, bis auf den Zahlenfaktor 2κ *gleich der gravitierenden Masse des Zentralkörpers*, um den sich der Massenpunkt bewegt. In dieser Gleichung hat κ die Bedeutung der Gravitationskonstante in unserem Masssystem, in welchem die Lichtgeschwindigkeit $= 1$ gesetzt ist. Bezeichnen wir im cm, gr, sec.-Masssystem die Lichtgeschwindigkeit mit c und die Gravitationskonstante mit κ^*, so wird $\kappa = \frac{\kappa^*}{c^2}$.

§ 66. Wie das aus dem Hamiltonschen Prinzip abzulesende Integral der Lagrangeschen Gleichungen aus den letzteren folgt

Wir wollen nun *auf anderem Wege nochmals beweisen*, dass *die Kreisbahn eine strenge Lösung der Einsteinschen Theorie* bei allgemeinem α, A und B ist, und zwar, indem wir direkt von den Lagrangeschen Differentialgleichungen des Variationsproblems

$$\int \left\{ \frac{r}{r-\alpha}\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 - \frac{r-\alpha}{r}\dot{t}^2 \right\} dp = \text{Min.} \tag{18}$$

[113] Added by Hilbert in pencil: "ein Kreis möglich sein soll als Bahnkurve"

[114] In the following equation, "$\kappa M\frac{1}{r^3}$" was corrected by Hilbert in pencil from "$\kappa M = \frac{1}{r^3}$". Also, both the formula in brackets and the relation for α were added by Hilbert in pencil.

133 ausgehen. Dasselbe unterscheidet sich von demjenigen, das wir früher unserer Untersuchung zugrunde legten, insofern, als wir jetzt, wo wir wissen, dass die Bahnkurven eben sind, schon im Variationsproblem selbst $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ setzen. Diese Betrachtung wird uns in doppelter Hinsicht von Nutzen sein. Einmal werden wir erkennen, *dass gerade der Kreis* unter allen Bahnkurven der Einsteinschen Theorie *eine ausgezeichnete Stellung einnimmt*. Dann aber wird sich die wichtige Gleichung (17), aus der wir übrigens noch mehrere interessante Folgerungen zu ziehen haben, nun fast ohne Rechnung ergeben. Die Mühe, die wir oben zur Erzielung des nämlichen Resultates hatten, war trotzdem keineswegs vergebens; denn bei der Diskussion der Bahnkurven, auf denen sich das Licht bewegt, werden wir doch wieder auf jene Methode zurückgreifen müssen.

Wir erhalten aus (18) durch Lagrangesche Differentiation nach r die Gleichung

$$[D] \equiv 2\frac{r}{r-\alpha}\ddot{r} + \left(\frac{r}{r-\alpha}\right)\dot{r}^2 - 2r\dot{\varphi}^2 + \frac{\alpha}{r^2}\dot{t}^2 = 0, \tag{19}$$

deren linke Seite wir zur Abkürzung mit $[D]$ bezeichnen. Durch Variation nach φ und t erhalten wir die schon oben abgeleiteten Gleichungen (11') und (12'), in welchen eine Integration sofort auszuführen ist:

$$[B] \equiv r^2\dot{\varphi} = B, \qquad [C] \equiv \frac{r-\alpha}{r}\dot{t} = C.$$

In den vorangehenden Untersuchungen haben wir, statt diese Lagrangeschen Differentialgleichungen zur Bestimmung der unbekannten Funktionen zu benutzen, anstelle der Gleichung (19) das Integral (9'), das eine Folge aller Lagrangeschen Gleichungen ist, benutzt; unter der stillschweigenden Voraus-
134 setzung, dass | alle Lösungen dieses Gleichungssystems auch Integrale der Lagrangeschen Gleichungen sind. Nun wollen wir prüfen, inwiefern diese Annahme berechtigt war.

Vorher bemerken wir noch, dass man ganz allgemein zeigen kann, dass *die zu einem Variationsproblem gehörigen Differentialgleichungen ein Integral haben*, welches sich aus dem Problem selbst *lediglich durch Differentiationsprozesse* entnehmen lässt, wenn nur dass Variationsproblem die Form

$$\int H(\dot{r}\dot{\varphi}\dot{t})dp = \mathrm{Min}$$

hat, wo H ausser $\dot{r}$, $\dot{\varphi}$ und $\dot{t}$ nur noch r, φ und t selbst, nicht aber die unabhängige Veränderliche p als Argumente enthält. Wir haben diesen Satz als Folge unserer allgemeinen Theorie (S. 11 ff) auf S. 14 erhalten, wenn H die spezielle Gestalt $\sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu}\dot{x}_\mu\dot{x}_\nu$ hat. Unter dieser selben Voraussetzung wollen wir ihn nochmals auf kürzerem Wege ableiten. Zu diesem Zwecke *führen wir in das Variationsproblem künstlich eine neue unbekannte Funktion ein*, indem wir den Parameter $p = p(q)$ setzen. Dann erhalten wir — wenn wir die Differentiation nach q mit einem Strich bezeichnen —

$$\int H\left(\frac{r'}{p'}, \frac{\varphi'}{p'}, \frac{t'}{p'}\right) p' dq = \text{Min.}$$

Hieraus folgt, weil H eine homogene, quadratische Funktion von $\dot{r}$, $\dot{\varphi}$ und $\dot{t}$ sein soll,

$$\int H(r', \varphi', t') \frac{dq}{p'} = \text{Min.}$$

Nun können wir eine *neue Differentialgleichung* aufstellen, indem wir die Lagrangesche Ableitung nach der unbekannten Funktion $p(q)$ bilden. Wir erhalten, wenn wir eine Integration gleich ausführen, und dann wieder von der Eigenschaft der | Funktion H, in r', φ' und t' homogen quadratisch zu sein, 135
Gebrauch machen,

$$\frac{H(r', \varphi', t')}{p'^2} = \text{const} = H(\dot{r}, \dot{\varphi}, \dot{t}), \qquad \text{w.z.b.w.}$$

Dieses Resultat, welches in unserem Spezialfall die Gleichung

$$[A] \equiv \frac{r}{r-\alpha}\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 - \frac{r-\alpha}{r}\dot{t}^2 = A \tag{9'}$$

ergibt, *wollen wir verifizieren*. Durch Differentiation dieser Gleichung nach p fällt die Konstante A weg. Zu der so entstehenden Gleichung addieren wir die beiden anderen, die wir erhalten, wenn wir die Gleichungen (11') und (12') nach p differentiieren und danach mit bezw. $-2\dot{\varphi}$ und $-2\dot{t}$ multiplizieren. Es ergibt sich

$$\begin{array}{rl}
\frac{d[A]}{dp} \equiv & 2\frac{r}{r-\alpha}\dot{r}\ddot{r} + \left(\frac{r}{r-\alpha}\right)_r \dot{r}^3 \; + 2r\dot{r}\dot{\varphi}^2 + 2r^2\dot{\varphi}\ddot{\varphi} \; - \frac{\alpha}{r^2}\dot{r}\dot{t}^2 - 2\frac{r-\alpha}{r}\dot{t}\ddot{t} = 0, \\
-2\dot{\varphi}\frac{d[B]}{dp} \equiv & \qquad -4r\dot{r}\dot{\varphi}^2 - 2r^2\dot{\varphi}\ddot{\varphi} = 0, \\
+2\dot{t}\frac{d[C]}{dp} \equiv & \qquad +2\frac{\alpha}{r^2}\dot{r}\dot{t}^2 + 2\frac{r-\alpha}{r}\dot{t}\ddot{t} = 0, \\
\hline
& 2\frac{r}{r-\alpha}\dot{r}\ddot{r} + \left(\frac{r}{r-\alpha}\right)_r \dot{r}\dot{r}^2 \quad -2r\dot{r}\dot{\varphi}^2 \quad + \frac{\alpha}{r^2}\dot{r}\dot{t}^2 = 0.
\end{array}$$

Dies ist aber nichts anderes als die Gleichung $\dot{r}[D] = 0$. Wir haben also die *Beziehung*

$$\frac{d}{dp}[A] - 2\dot{\varphi}\frac{d}{dp}[B] + 2\dot{t}\frac{d}{dp}[C] = \dot{r}[D].$$

§ 67. Die ausgezeichnete Stellung des Kreises unter den Bahnkurven

Jetzt können wir die zu Anfang dieser Betrachtung gestellte Frage beantworten: *Sind die Lösungen des Gleichungssystems (9'), (11') und (12') dieselben*

wie diejenigen des Systems der Lagrangeschen Gleichungen *(19), (11') und (12')*; d. h. folgt aus $[A] = A$, $[B] = B$, $[C] = C$ die Gleichung (19) $[D] = 0$. Man sieht, dass dies tatsächlich der Fall ist, wenn nur $\dot{r} \neq 0$ ist. *Diese Bedingung* ist aber gerade *für den Kreis nicht erfüllt*. Wenn wir also untersuchen
136 wollen, ob der | Kreis eine mögliche Bahnkurve ist, dürfen wir *nicht* von den drei Gleichungen $[A] = A$, $[B] = B$, $[C] = C$ ausgehen. Die Integrale dieser drei Gleichungen erfüllen vielmehr nur dann die Lagrangeschen Gleichungen, wenn die Bahnkurve kein Kreis ist. Man sieht also, dass *der Kreis* unter allen Bahnkurven des Variationsproblems (18) eine *ganz besondere Stellung* einnimmt, zum Unterschied von der Newtonschen Mechanik. In der Tat wird durch die Kepplerschen Gesetze der Kreis in keiner Weise vor den anderen Kegelschnitten ausgezeichnet. Vielleicht liegt in diesem Umstand ein Fingerzeig, wo die tiefsten Geheimnisse der Elektrodynamik verborgen sind.

Man sieht leicht, dass man *zu ganz verkehrten Resultaten* kommt, wenn man die Kreisbahn auf Grund der Gleichungen (9'), (11') und (12') diskutiert. Es folgt nämlich aus (11') und (12')

$$\varphi = \frac{B}{r^2}p, \qquad t = \frac{r}{r-\alpha}p.$$

Die Gleichung (9') liefert dann für $\dot{r}^2 = 0$ vermöge (11') und (12')

$$r^2\left(\frac{B}{r^2}\right)^2 - \frac{r-\alpha}{r}\left(\frac{r}{r-\alpha}\right)^2 = A.$$

In dieser Gleichung tritt die willkürliche Konstante A auf, d. h. *bei beliebig vorgegebenem B* kann zu *jedem Radius r* die Konstante A so bestimmt werden, dass die Gleichung erfüllt ist. Die Winkelgeschwindigkeit in der Bahnkurve $\frac{d\varphi}{dt} = B\frac{r-\alpha}{r^3}$ kann dann wieder ganz beliebig vorgegeben werden, weil B noch willkürlich ist. Wir erhalten also das *falsche* Resultat: es sind alle Kreise als Bahnkurven und alle Winkelgeschwindigkeiten als Bewegungen in der Bahnkurve zulässig.

137 Dass wir oben auch für den Kreis aus Gleichung (13) das richtige Ergebnis, nämlich das dritte Kepplersche Gesetz fanden, trotzdem wir die Gleichung (13) aus den in diesem Fall unbrauchbaren Gleichungen (9'), (11') und (12') ableiteten, hat seinen Grund darin, dass wir den Kreis als Grenzfall einer Kurve[115] ansahen, bei der zwei Wurzeln der rechten Seite von (13) $a + b\rho - \rho^2 + \alpha\rho^3 = 0$ einander gleich werden.

§ 68. Die Kreisbewegung als Lösung der Lagrangeschen Differentialgleichungen

Ziehen wir jetzt zur *Diskussion der Kreisbewegung* die Gleichung (19) heran, so erhalten wir die schon bekannten Resultate nochmals in einfachster Weise.

[115] "Kurve" was corrected from "Ellipse".

Aus (19) wird nämlich für $\dot{r} = 0$

$$-2r\dot{\varphi}^2 + \frac{\alpha}{r^3}\dot{t}^2 = 0 \qquad \text{oder} \qquad \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{\frac{\alpha}{2}}{r^3}.$$

Dies ist aber die Gleichung (17), die die Winkelgeschwindigkeit aus dem Kreisradius zu berechnen gestattet. Ferner wird t bestimmt aus (12’): $t = \frac{r}{r-\alpha}p$. Aus (11’) folgt noch $\varphi = \frac{B}{r^2}p$, wobei B aber nicht mehr willkürlich ist, sondern aus

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \left(B\frac{r-\alpha}{r^3}\right)^2 = \frac{\frac{\alpha}{2}}{r^3}$$

entnommen werden muss. Die Gleichung (11’) lehrt eben nichts Neues, sie ist vielmehr eine Folge von (19) und (12’). Aus diesem Grunde kommt die Integrationskonstante B in (17) nicht vor. Dass die Konstante A dort nicht auftritt, ist nun auch selbstverständlich; durften wir doch die Gleichung (9’) gar nicht benutzen.

§ 69. Zwei merkwürdige Folgerungen: Untere Grenze für den Kreisradius und obere Grenze für die Winkelgeschwindigkeit

Nun können wir einige *ganz merkwürdige Folgerungen* ziehen,[116] wenn wir nur bemerken, dass nicht allle geodätischen Linien als Bahnkurven für den Massenpunkt zulässig sind, son|dern nur Zeitlinien unter ihnen. Es muss also 138

$$\frac{r}{r-\alpha}\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 - \frac{r-\alpha}{r}\dot{t}^2 < 0$$

sein. Ist die Bahnkurve ein Kreis, so wird

$$r^2\dot{\varphi} - \frac{r-\alpha}{r}\dot{t}^2 < 0$$

oder wegen (17) $r^2\frac{\alpha}{2}\frac{1}{r^3} < \frac{r-\alpha}{r}$ d. h.

$$r > \frac{3}{2}\alpha.$$

Dies ist ein durchaus *unerwartetes Resultat*. Es besagt, dass *ein Massenpunkt, der sich in einer Kreisbahn um ein Zentrum* mit der Masse α *bewegt, nur bis zur Entfernung* $\frac{3}{2}\alpha$ *an dasselbe herankommen kann*. Von vornherein sollte man glauben, dass alle Kreise mit $r > \alpha$ erlaubt seien, weil erst für $r = \alpha$ die Massbestimmung singulär wird. Dies ist in der Tat die Grenze, die Schwarzschild (Ueber das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie, Sitzungeber. d. Preuss. Akad. d. Wiss. (7) S 189, 1916)

[116] In the left margin, there is a reader’s mark (⊤).

angibt,[117] und die ich als falsch bezeichnen muss; denn für $\alpha < r < \frac{3}{2}\alpha$ wird die Bewegung nicht mehr durch eine Zeitlinie, sondern durch eine Strecke dargestellt. Dies ist sicher keine mögliche Bewegung für einen Massenpunkt.

Nimmt man in obigen Ungleichungen überall das Gleichheitszeichen, so hat man die Bewegung des Lichts vor sich. Man sieht, dass *der „Lichtplanet"* sich um ein Massenzentrum in einem Kreis vom Radius $r = \frac{3}{2}\alpha$ bewegen kann, und dass dies gleichzeitig die *einzig mögliche Kreisbahn des Lichtes* ist. Elektronen können also bis nahe an diese Grenze herankommen. Die absolute Geschwindigkeit in der Kreisbahn ist $v = r\frac{d\varphi}{dt}$ und für dieselbe finden wir
139 die Ungleichung | $v^2 \leq 1 - \frac{\alpha}{2} \leq \frac{1}{3}$. *Die Geschwindigkeit des Planeten in der Kreisbahn ist also* $< \frac{1}{\sqrt{3}}$, und für den Lichtplaneten selbst wird sie im Kreis $r = \frac{3}{2}\alpha$ zu $v = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Durch das Wirken der Gravitation wird, wie dies Ergebnis zeigt, die Lichtgeschwindigkeit auf dem Kreis $r = \frac{3}{2}\alpha$ auf den ca. $0,7$ Teil ihres Betrages im Unendlichen herabgedrückt.

§ 70. Transformation auf Ruhe bei der Kreisbewegung

Wir wollen an dieser Stelle eine kleine Zwischenbetrachtung einschieben, die uns Gelegenheit gibt, die bei der Formulierung des Kausalitätsprinzips auf S. 97 ff angestellten allgemeinen Ueberlegungen auf einen Spezialfall anzuwenden, und zwar stellen wir uns *die Aufgabe, einen sich in einer Kreisbahn* um die Sonne *bewegenden Planeten auf Ruhe zu transformieren.* Unter den unendlich vielen möglichen Transformationen, die dies leisten, gibt es eine ganz besonders einfache, die wir nun daraufhin prüfen wollen, ob sie eine erlaubte, d. h. eine "eigentliche Raum-Zeittransformation" ist oder nicht. Die Weltlinie des Planeten im ruhenden (ungestrichenen) System ist, wenn wir die konstante Winkelgeschwindigkeit mit $\frac{1}{w}$ bezeichnen und als Parameter die Zeit t nehmen:

$$r = r_0, \quad \varphi = \varphi_0 + \frac{1}{w}t.$$

Die erwähnte *Transformation* des Planeten *auf Ruhe* lautet dann:

$$r = r', \quad \varphi = \varphi' + t', \quad t = wt'.$$

In der Tat wird im mitbewegten (gestrichenen) Koordinatensystem in welchem sich also die Sonne und der Fixsternhimmel drehen, die Weltlinie des Planeten zu

$$r' = r_0, \quad \varphi' = \varphi - \frac{1}{w}t = \varphi_0, \quad t' = \frac{1}{w}t.$$

140 Wir bilden nun die Gravitationspotentiale im gestrichenen System und erhal-

[117] *Schwarzschild 1916a.*

ten

$$ds^2 = \left\{ \frac{r}{r-\alpha} r'^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 - \frac{r-\alpha}{r} \dot{t}^2 \right\} dp^2 =$$
$$= \left\{ \frac{r'}{r'-\alpha} \dot{r}'^2 + \dot{r}'^2 (\dot{\varphi}' + \dot{t}')^2 - \frac{r'-\alpha}{r'} w^2 \dot{t}'^2 \right\} dp^2 =$$
$$= \left\{ \frac{r'}{r'-\alpha} \dot{r}'^2 + r'^2 \dot{\varphi}'^2 + 2r'^2 \dot{\varphi}' \dot{t}' - \left(\frac{r'\alpha}{r'} w^2 - r'^2 \right) \dot{t}'^2 \right\} dp^2.$$

Sind nun die 5 auf S 102f. aufgestellten Ungleichungen,[118] d. h. die Bedingungen für ein eigentliches Raum-Zeit-Koordinatensystem erfüllt? Es wird

$$I. \quad g'_{11} = \frac{r'}{r'-\alpha} > 0, \qquad III. \quad g'_{11} g'_{33} - {g'_{13}}^2 = \frac{r'}{r'-\alpha} r'^2 > 0,$$
$$IV. \quad g'_{44} = r'^2 - \frac{r'-\alpha}{r'} w^2 < 0, \qquad V. \quad g' = -r'^2 w^2 < 0.$$

Alle Ungleichungen, mit Ausnahme der IVten sind, wie man sieht, unter allen Umständen erfüllt. *Damit auch die IVte Ungleichunge $r'^2 - \frac{r'-\alpha'}{r'} w^2 < 0$ erfüllt ist, muss $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{1}{w^2} < \frac{r'-\alpha}{r'}$* werden. Dies ist aber nichts anderes als die schon oben genannte Ungleichung $A < 0$ oder die Bedingung dafür, dass der Kreis eine Zeitlinie ist. Unsere Transformation ist also tatsächlich eine eigentliche Raum-Zeit-Transformation, und jeder sich in einer erlaubten Kreisbahn sich bewegende Planet kann durch dieselbe in erlaubter Weise auf Ruhe transformiert werden.

§ 71. Satz: Jeder Massenpunkt kann auf Ruhe transformiert werden

Wir dürfen sogar die viel allgemeinere Behauptung aufstellen:

Jeder sich auf einer Zeitlinie bewegende Massenpunkt kann durch eine eigentliche Raum-Zeit-Transformation auf Ruhe transformiert werden.

Zum Beweise denken wir uns die Weltlinie des sich | bewegenden Massenpunk- 141
tes in der Form $x_i = w_i(x_4)$ $(i = 1, 2, 3)$ gegeben und setzen $x'_1 = x_1 - w_1$, $x'_2 = x_2 - w_2$, $x'_3 = x_3 - w_3$, $x'_4 = x_4$. Dann wird die Weltlinie im gestrichenen Bezugssystem dargestellt durch $x'_1 = 0$, $x'_2 = 0$, $x'_3 = 0$. *Der Punkt befindet sich* also tatsächlich *in Ruhe. Um zu erkennen, dass diese Transformation* eine — aber natürlich nicht die einzige — *erlaubte ist*, bilden wir die $g'_{\mu\nu}$. Wir erhalten, weil $x_i = x'_i + w_i(x'_4)$, $x_4 = x'_4$ $(i = 1, 2, 3)$, ist $g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\mu} \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\nu} g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$ $(\mu, \nu = 1, 2, 3)$. Also sind die drei ersten Ungleichungen tatsächlich erfüllt. Die Vte Ungleichung $g' < 0$ ist sicher erfüllt und zwar als Folge der drei ersten. Unsere vierdimensionalte Pseudogeometrie ist ja vom Typus $3 + 1$ und

[118] See p. 239 above.

dieser kann, wenn die drei ersten Ungleichungen erfüllt sind, nur dann vorhanden sein, wenn $g' < 0$ ist. Dass endlich $g'_{44} < 0$ wird, sieht man leicht ein: Da die Bahnkurve des Massenpunktes eine Zeitlinie ist, so ist für dieselbe $G(\dot{x}_i(p)) < 0$. Im transformierten Bezugssystem sind $\dot{x}'_1 = 0$, $\dot{x}'_2 = 0$, $\dot{x}'_3 = 0$, also folgt, weil $G < 0$ eine invariante Gleichung ist, $g'_{44}{\dot{x}'_4}^2 < 0$ oder $g'_{44} < 0$, und zwar unabhängig davon, ob die Transformation auf Ruhe eine erlaubte ist oder nicht.

Es kann also jeder Massenpunkt, der sich auf einer Zeitlinie bewegt, auf Ruhe transformiert werden, und es kann sich jeder noch so kleine Planet, der sich um die Sonne bewegt, als Mittelpunkt der Welt betrachten, ohne dass das Kausalitätsprinzip verletzt wird, Dies müssen wir ihm auch gönnen, ja, dieses Resultat ist sogar ein sehr befriedigendes.

142 § 72. Geradlinige Bewegung des Massenpunktes

Nun wenden wir uns einer anderen Aufgabe zu und behandeln das Gegenstück zur Kreisbewegung, nämlich

die Bewegung in gerader Richtung [119]

auf das Massenzentrum. Statt $r =$ const. nehmen wir also jetzt $\varphi =$ const. $= 0$ an. Die Lagrangeschen Gleichungen der Bewegungen lauten jetzt

$$\frac{d}{dp}\left(2\frac{r}{r-\alpha}\dot{r}\right) - \left(\frac{r}{r-\alpha}\right)_r \dot{r}^2 + \frac{\alpha}{r^2}\dot{t}^2 = 0, \tag{19}$$

$$\frac{r-\alpha}{r}\dot{t} = 1, \tag{12'}$$

(aus (11') folgt jetzt $B = 0$). Aus diesen beiden Gleichungen eliminieren wir den Parameter p, und zwar folgt wegen $\dot{t} = \frac{r}{r-\alpha}$ und $\frac{d}{dp} = \frac{r-\alpha}{r}\frac{d}{dt}$ aus (19) die Gleichung

$$\frac{r}{r-\alpha}\frac{d}{dt}\left(2\frac{r}{r-\alpha}\frac{r}{r-\alpha}\frac{dr}{dt}\right) + \frac{\alpha}{(r-\alpha)^2}\frac{r^2}{(r-\alpha)^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{\alpha}{r^2}\frac{r^2}{(r-\alpha)^2} = 0$$

oder

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{3\alpha}{2r(r-\alpha)}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - \frac{\alpha(r-\alpha)}{2r^3}, \tag{20}$$

als eine Differentialgleichung 2. Ordnung. Die entsprechende Gleichung in der Newtonschen Theorie heisst $\frac{d^2r}{dt^2} = -\kappa\frac{M}{r^2}$.[120] *Die neue Differentialgleichung*

[119] Added by Hilbert in pencil: “Hier besser Note S. 24.” Hilbert's comment is probably a reference to *Hilbert 1917*, p. 76, (this Volume, p. 71). P. 76 is the 24th page of that paper, and Hilbert probably referred to the pagination of an offprint version. Offprints were often paginated starting with page 1 in contrast to the version that appeared in the journal issue, see *Sauer 1999*, note 74.

[120] Deleted: “Für grosses r wird in derselben die Beschleunigung konstant (auf der Erdoberfläche g).”

(20) ist infolge des Auftretens eines Gliedes mit $\left(\frac{dr}{dt}\right)^2$ *erheblich komplizierter als die Newtonsche*, aber sie hat noch denselben Charakter. Insbesondere kommt in ihr als einzige Konstante, die aus den Tatsachen zu entnehmen ist, wieder nur die Sonnenmasse α vor.

Wir stellen nun die Frage, die wir für allgemeines α und für beliebige Geschwindigkeit noch gar nicht berührt haben: *Wirkt die Gravitation anziehend oder abstossend*, d. h. | ist $\frac{d^2r}{dt^2} < 0$ oder $\frac{d^2r}{dt^2} > 0$? Dies hängt vom Vorzei- 143
chen der rechten Seite der Gleichung (20) ab. Aus derselben erhalten wir als Bedingung für die

$$\begin{array}{lcc} \textit{Abstossung:} & \multirow{2}{*}{$\dfrac{3\alpha}{2r(r-\alpha)}\left(\dfrac{dr}{dt}\right)^2$} & > \\ \textit{Anziehung:} & & < \end{array} \dfrac{\alpha(r-\alpha)}{2r^3}.$$

Also muss $\frac{dr}{dt} = |v| < \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{r-\alpha}{r}$ sein, damit Anziehung und $|v| > \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{r-\alpha}{r}$ damit Abstossung eintritt. In einer beliebigen, festen Entfernung vom Massenzentrum wirkt bei hinreichend kleiner Geschwindigkeit die Gravitation, wie man sieht, unabhängig vom Vorzeichen von α immer anziehend. Dieser Fall ist in der Himmelsmechanik realisiert.

Für $\lim \alpha = 0$ muss $|v| < \frac{1}{\sqrt{3}}$ sein, damit die Gravitation anziehend wird; die Geschwindigkeit kann also noch ausserordentlich gross sein, d.h. *die Anziehung gilt*, wie man sieht, *weit über die Gültigkeitsgrenze des Newtonschen Gesetzes hinaus*. Im Newtonschen Falle, nämlich für $\lim \alpha = 0$ und $\lim \frac{dr}{dt} = 0$ erhalten wir aus (20) auch das Newtonsche Gesetz: $\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{\frac{\alpha}{2}}{r^2}$. Wiederum finden wir $\frac{\alpha}{2} = \kappa M$.

Ersetzen wir in der Newtonschen Gleichung r für grosse Werte durch $x + a$, wobei $\frac{x}{a}$ sehr klein sein soll und entwickeln nach Potenzen von $\frac{x}{a}$, so erhalten wir

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\frac{\alpha}{2}}{a^2}\left\{1 - \frac{2x}{a} + \cdots\right\}.$$

Also ist die Beschleunigung in grosser Entfernung vom Massenzentrum angenähert konstant (auf der Erdoberfläche $= g$).

Für kleine Gravitation, aber *endliche* Geschwindigkeit erhalten wir aus (20) $\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{\frac{\alpha}{2}}{r^2}\left(1 - 3\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right)$. | Es tritt dann also *zur Newtonschen Kraft* $-\frac{\frac{\alpha}{2}}{r^2}$ 144
noch eine ihr *entgegengesetzt wirkende Kraft* $\frac{\frac{\alpha}{2}}{r^2}3\left(\frac{dr}{dt}\right)^2$, die auch proportional der Masse und ausserdem proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit ist, hinzu.

Wir können die Gleichung aber noch *anders deuten*, wenn wir sie in der Form

$$\frac{1}{1 - 3\left(\frac{dr}{dt}\right)^2}\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{\frac{\alpha}{2}}{r^2}$$

schreiben. Dann wirkt auf den Massenpunkt nur die Newtonsche Kraft $-\frac{\frac{\alpha}{2}}{r^2}$, dagegen *vergrössert sich* jetzt unter dem Einfluss der Geschwindigkeit *die*

Masse im Verhältnis $1 : \frac{1}{1-3\left(\frac{dr}{dt}\right)^2}$. Man beachte die merkwürdige *Analogie zur Elektrodynamik*, wo die auf das Elektron wirkende Kraft

$$\mathfrak{k} = \frac{1}{1-\frac{3}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2}\frac{d^2r}{dt^2} \text{ ist, d.h. Masse} = \frac{1}{1-\frac{3}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2}.$$

Da sich der Massenpunkt auf einer Zeitlinie bewegt, ist in (9')

$$A = \frac{r}{r-\alpha}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - \frac{r-\alpha}{r} < 0.$$

Es wird also immer $\frac{dr}{dt} = |v| < \frac{r-\alpha}{r}$ sein.

§ 73. Geradlinige Bewegung des Lichtstrahls

Für $A = 0$ haben wir das auf das Zentrum gerichtete oder das davon wegstrebende Licht. Dann wird aus der Ungleichung eine Gleichung: $|v| = \frac{dr}{dt} = \frac{r-\alpha}{r}$. Ein solcher *Lichtstrahl wird also immer abgestossen*, da seine Geschwindigkeit stets zu gross ist, als dass die Gravitation noch anziehend wirken könnte. Die Lichtgeschwindigkeit im Unendlichen in beliebiger Richtung erhält man, wenn man in $\frac{r}{r-\alpha}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - \frac{r-\alpha}{r} = 0$ $r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$ ersetzt durch $v^2 - \left(\frac{dr}{dt}\right)^2$.
145 Dann folgt aus $\frac{r}{r-\alpha}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + v^2 - \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - \frac{r-\alpha}{r} = 0$ für grosses r *unabhängig von der Richtung* $|v| = 1$.

Der geradlinig auf das Zentrum zueilende Lichtstrahl, dessen Geschwindigkeit also immer abnimmt, *hat* wegen $\frac{dr}{dt} = \frac{r-\alpha}{r}$ *im Punkt* $r = \alpha$ *die Geschwindigkeit Null*. Er erreicht diesen Punkt übrigens erst nach unendlich langer Zeit. Man kann diese Gleichung nämlich integrieren: es wird $t = r + \alpha \lg(r-\alpha)$ und man erhält $t = \infty$ für $r = \alpha$ Da unsere Gleichung eigentlich $\left|\frac{dr}{dt}\right| = \frac{r-\alpha}{r}$ lautet, ist auch der umgekehrte Strahlengang möglich und es[121] wird ein Lichtstrahl, der in sehr geringer Entfernung vom Punkt $r = \alpha$ die zugehörige sehr kleine, radial nach aussen gerichtete Beschleunigung besitzt, geradlinig ins Unendliche laufen, aber erst nach sehr langer Zeit (mit der Geschwindigkeit 1) dort ankommen. *Die Lichtgeschwindigkeit* im Gravitationsfeld ist natürlich nur im Unendlichen von der Richtung des Lichtstrahls unabhängig, im allgemeinen *hängt* sie *von der Richtung ab*. Im zentrisch symmetrischen Gravitationsfeld z. B. ist auf dem Kreis $r = \frac{3}{2}\alpha$ die Geschwindigkeit in der Normalen $\frac{dr}{dt} = \frac{r-\alpha}{r} = \frac{\frac{3}{2}\alpha-\alpha}{\frac{3}{2}\alpha} = \frac{1}{3}$. In der Tangente dagegen ist sie, wie wir auf S. 137 sahen, gleich $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Den topologischen Verlauf der Lichtstrahlen werden wir weiter unten diskutieren.[122]

[121]"ist auch der umgekehrte Strahlengang möglich und es" was interlineated with ink in an unknown hand.

[122]See §§ 76, 77 below.

§ 74. Untersuchung der Bahnkurven in zweiter Näherung 146

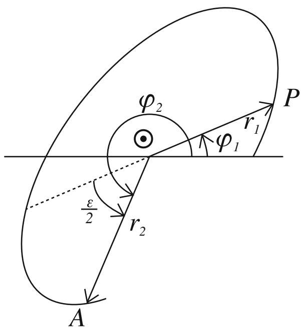
Nachdem wir erkannt haben, dass die Bahnkurve eines nach der Einsteinschen Theorie sich bewegenden Massenpunktes, d. h. die Lösungen der Differentialgleichung (13), für $\lim \alpha = 0$ und $\lim B = 0$ in *erster Näherung* die Kegelschnitte der Newtonschen Theorie sind, machen wir uns nun an

die Untersuchung der Bahnkurven in zweiter Näherung.

Bekanntlich findet der Astronom das Newtonsche Attraktionsgesetz in all den mannigfachen Erscheinungen der ganzen Himmelsmechanik, *mit Ausnahme einer kleinen*, unbedeutenden *Störung beim Merkur, auf Glänzendste bestätigt*,[123] d. h. er kann alle Bewegungen der Planeten, Kometen und Monde, sowie die der Doppelsterne unter der Annahme dieses Kraftgesetzes zwanglos erklären und genau vorausberechnen. Um diese Leistung der Newtonschen Theorie gebührend einzuschätzen, muss man wissen, dass die astronomischen Messungen sich sehr exakt durchführen lassen und z. B. die physikalischen Messungen — mit alleiniger Ausnahme der Spektralanalyse — an Genauigkeit weit übertreffen, so dass das Newtonsche Gesetz einer viel feineren Prüfung unterzogen werden konnte als die meisten anderen physikalischen Gesetze. Bedenkt man noch, dass dieses Attraktionsgesetz ausserdem die ganze Mechanik erklärt, die wir auf der Erdoberfläche vor uns haben, so begreift man, dass das Newtonsche Gesetz als eines der best fundierten Naturgesetze galt, und dass jene kleine Abweichung bei der Merkurbahn durch ad hoc eingeführte Annahmen zu erklären gesucht wurde.[124]
An eine *Abänderung des Newtonschen Gesetzes* zu denken, | wagte man gar 147
nicht. So wurde es ein *Prüfstein der Einsteinschen Theorie*, ob aus ihr die merkwürdige Bahnkurve des Merkurs ohne weiteres folge, was nun in der Tat der Fall ist.
Wir werden sehen, dass in der Einsteinschen Theorie alle Bahnkurven, sobald sie nur beliebig wenig von der Kreisbahn abweichen, nicht mehr geschlossen sind, ganz im Gegensatz zur Newtonschen Theorie, wo die dem Kreis benachbarten Kurven Ellipsen sind. Dass die aus jener Theorie folgende Abweichung von der Ellipsenbahn nun nur beim Merkur beobachtet werden konnte, hat den Grund darin, dass für alle Planeten die Exzentrizität der Ellipsenbahn so klein und — mit Ausnahme des Merkur — die Entfernung von der Sonne so gross ist, dass die Sonnenmasse α selbst, die ja auch die Dimension einer Länge hat, gegenüber jener Entfernung eine so kleine Grösse ist, dass in der Gleichung (13) schon die *erste Näherung* die astronomischen Tatsachen mit hinreichender Genauigkeit beschreibt. Um so verblüffender ist es aber auch, dass gerade die *einzige* mit Sicherheit *feststellbare Abweichung vom Newtonschen Gesetz durch die Einsteinsche Theorie vollkommen erklärt* werden kann.

[123] For contemporary reviews, see *Zenneck 1901*, *Newcomb 1895*.

[124] For a historical discussion of attempts to explain the anomaly, see *Earman and Janssen 1993*.



Man bezeichnet in der Astronomie den Punkt der Planetenbahn, in dem die Entfernung von der Sonne ein Minimum ist, als *Perihel*, denjenigen, in dem sie ein Maximum ist, als *Aphel*. Die Newtonsche
148 | Theorie verlangt nun, dass der Winkel $\varphi_2 - \varphi_1$, den der Radius-Vektor: Sonne-Planet zwischen diesen beiden Bahnpunkten beschreibt, genau gleich π ist. Als

Perihelbewegung ϵ

d. h. als Winkel, um den das Perihel in Abweichung von der Newtonschen Theorie bei einem Umlauf des Planeten in der Bahnebene vorrückt oder zurückbleibt, haben wir also $\varepsilon = 2(\varphi_2 - \varphi_1 - \pi)$ zu nehmen, und *diesen Winkel wollen wir jetzt* aus der Einsteinschen Theorie *berechnen*. Zuerst leiten wir die Formel ab, die das Vorrücken des Perihels ganz *allgemein* durch die Sonnenmasse, die halbe grosse Achse und die Exzentrizität der Ellipse ausdrückt, und erst nachher setzen wir die speziellen Werte für den Merkur ein.

Wir müssen von der Differentialgleichung (13)

$$\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 = \frac{1+A}{B^2} - \frac{\alpha A}{B^2}\rho - \rho^2 + \alpha\rho^3 = a + b\rho - \rho^2 + \alpha\rho^3$$

ausgehen. Wir bezeichnen noch die Entfernungen Sonne-Perihel und Sonne-Aphel mit bezw. r_1 und r_2 und setzen $\rho_1 = \frac{1}{r_1}$, $\rho_2 = \frac{1}{r_2}$. Diese beiden Werte finden wir als Wurzeln der kubischen Gleichung, die man durch Nullsetzen der rechten Seite von (13) erhält,

$$a + b\rho - \rho^2 + \alpha\rho^3 = 0,$$

und zwar müssen wir jene beiden Wurzeln nehmen, die für $\alpha = 0$ in die Wurzeln der entsprechenden quadratischen Gleichung der Newtonschen Theorie

$$a + b\rho - \rho^2 = 0$$

übergehen. Wir erhalten aus (13)

$$\frac{d\varphi}{d\rho} = \frac{1}{\sqrt{a + b\rho - \rho^2 + \alpha\rho^3}}$$

149 und finden für den Winkel

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{d\rho}{\sqrt{a + b\rho - \rho^2 + \alpha\rho^3}}. \tag{21}$$

Rechts steht ein ganz bestimmter Ausdruck von a, b und α. Zu integrieren ist zwischen jenen beiden Wurzeln der kubischen Gleichung. Für $\alpha = 0$ lässt sich das Integral sofort auswerten und man findet $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi$, so dass das Vorrücken des Perihels $\varepsilon = 0$ wird, wie es auch sein muss. Wir entwickeln nun den Integrand (21) nach Potenzen von α. Es ist

$$\begin{aligned} a + b\rho - \rho^2 + \alpha\rho^3 &= \alpha(\rho - \rho_1)(\rho - \rho_2)(\rho - \rho_3) \\ &= -(\rho - \rho_1)(\rho - \rho_2) \cdot \alpha\rho_3 \left(1 - \frac{\alpha\rho}{\alpha\rho_3}\right), \end{aligned}$$

wobei ρ_3 diejenige Wurzel der kubischen Gleichung ist, die für $\alpha = 0$ unendlich wird. Jetzt muss noch ρ_3 berechnet werden. Bekanntlich ist $\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = \frac{1}{\alpha}$ (die Summe der Wurzeln ist gleich dem negativen Koeffizienten von ρ^2). Also wird

$$a + b\rho - \rho^2 + \alpha\rho^3 = -(\rho - \rho_1)(\rho - \rho_2)(1 - \alpha\rho_1 - \alpha\rho_2)\left(1 - \frac{\alpha\rho}{1 - \alpha\rho_1 - \alpha\rho_2}\right)$$

und

$$\frac{1}{\sqrt{a + b\rho - \rho^2 + \alpha\rho^3}} = +\left(1 + \frac{1}{2}\alpha(\rho_1 + \rho_2)\right)\left(1 + \frac{1}{2}\alpha\rho\right)\frac{1}{\sqrt{(\rho_1 - \rho)(\rho - \rho_2)}}.$$

Diesen Ausdruck setzen wir unter dem Integralzeichen ein und erhalten

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \left(1 + \frac{1}{2}\alpha(\rho_1 + \rho_2)\right)\int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{1 + \frac{1}{2}\alpha\rho}{\sqrt{(\rho_1 - \rho)(\rho - \rho_2)}} d\rho.$$

Nun können wir die Integration ausführen:

$$\begin{aligned} \varphi_2 - \varphi_1 = \left\{1 + \frac{1}{2}\alpha(\rho_1 + \rho_2)\right\} &\left[\arcsin \frac{\rho - \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}}{\frac{\rho_2 - \rho_1}{2}}\right. \\ &\left. + \frac{1}{2}\alpha\left\{\sqrt{(\rho_1 - \rho)(\rho - \rho_2)} + \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}\arcsin\frac{\rho - \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}}{\frac{\rho_2 - \rho_1}{2}}\right\}\right]_{\rho_1}^{\rho_2} \end{aligned}$$

. 150

§ 75. Die Perihelbewegung des Merkur

Wir erhalten also

$$\begin{aligned} \varphi_2 - \varphi_1 = \left\{1 + \frac{1}{2}\alpha(\rho_1 + \rho_2)\right\} &\left(\overbrace{\arcsin 1 - \arcsin(-1)}^{\pi}\right. \\ &\left. + \frac{\alpha}{2}\left\{0 + \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}(\arcsin 1 - \arcsin(-1))\right\}\right) \\ = \left\{1 + \frac{1}{2}\alpha(\rho_1 + \rho_2)\right\}&\left\{\pi + \frac{\pi}{4}\alpha(\rho_1 + \rho_2)\right\} = \left(1 + \frac{3}{4}\alpha(\rho_1 + \rho_2)\right)\pi. \end{aligned}$$

Somit wird der Winkel ε, der das *Vorrücken des Perihels* angibt

$$\varepsilon = \frac{3}{2}\pi\alpha(\rho_1 + \rho_2).$$

Nun ist aber die Summe der beiden Wurzeln $\rho_1 + \rho_2$ der kubischen Gleichung angenähert gleich der Summe der beiden Wurzeln $\sigma_1 + \sigma_2$ der quadratischen Gleichung $a+b\rho-\rho^2 = 0$, d. h. es muss $\rho_1+\rho_2 = \sigma_1+\sigma_2+\alpha f(\sigma_1, \sigma_2)$ sein, weil für $\alpha = 0$ $\rho_1+\rho_2 = \sigma_1+\sigma_2$ wird.[125] Sei $S_i = \frac{1}{\sigma_i}$ die grösste bezw. kleinste Entfernung des Planeten von der Sonne, wenn derselbe sich genau in einer Ellipse bewegen würde, so gilt die Beziehung $\sigma_1 + \sigma_2 = \frac{S_1+S_2}{S_1 \cdot S_2} = \frac{2a}{a^2(1-e^2)}$ Hierin bedeutet a die grosse Halbachse und e die numerische Exzentrizität der Ellipse. Setzt man diesen Ausdruck oben ein, so erhält man als *Perihelbewegung*

$$\varepsilon = \frac{3\alpha\pi}{a(1-e^2)}.$$

In diese Formel hat man nun in jedem Spezialfall für alle Konstanten ihre numerischen Werte einzusetzen. Um *die Perihelbewegung des Merkur* zu finden, hat man also für α die Sonnenmasse einzusetzen und a und e aus der beobachteten Merkurbahn zu entnehmen. Wir behalten uns alle Dimensionsüberlegungen auf später vor, um hier die theoretischen Untersuchungen nicht unterbrechen zu müssen. Vor der Hand genügt es zu wissen, dass α aus der experimentell bestimmten Sonnenmasse berechnet werden kann und angenä-
151 hert gleich 3 km gefunden wird.[126] Setzt | man alle beobachteten Daten ein, so findet man für den Merkur

$$\varepsilon = 43'' \qquad \textit{in 100 Jahren}$$

in wundervoller Uebereinstimmung mit den Beobachtungen des Astronomen Leverrier: $\varepsilon = 45'' \pm 5''$.[127]

Aus der allgemeinen Formel *ersieht man von neuem, dass* $\alpha > 0$ sein muss, weil $\varepsilon > 0$ ist. Dies allein ist schon eine qualitative Bestätigung der Theorie, besonders auch, da in allen Fällen, wo eine Perihelbewegung einigermassen bestimmt hat nachgewiesen werden können, *immer* $\varepsilon > 0$ gefunden wurde. (Literatur: A. Einstein, Erklärung der Perihelbewegung des Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie. Sitzungsber. d. Preuss. Akad. d. Wiss. (47) S. 831 1915).[128]

[125] On the left hand page, Hilbert wrote in pencil: "Statt σ_1, σ_2 schreibe ρ_1^0, ρ_2^0!"

[126] See p. 280 below.

[127] This is the value quoted in *Einstein 1915c*, p. 839. Einstein cites *Newcomb 1895* as his source, but see the discussion in *Earman and Janssen 1993*, pp. 130–132. See also *Roseveare 1982* for a historical discussion.

[128] *Einstein 1915c*.

§ 76. Diskussion der Differentialgleichung der Bahnkurven für die Lichtbewegung

Wir wollen nun nochmals auf *die Bewegung der Lichtstrahlen im Gravitationsfeld* eines Massenpunktes zurückkommen, und zwar wollen wir

die Gestalt der Bahnkurven

beschreiben, ohne uns dabei auf Beweise einzulassen. Alles Nähere wird man in einer demnächst in den Göttinger Nachrichten erscheinenden Mitteilung von V. Fréedericksz finden.[129] Da für das Licht $A = 0$ wird, nimmt die Differentialgleichung (13) jetzt die Form an

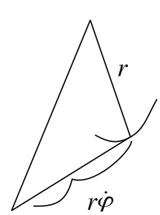
$$\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 = \frac{1}{B^2} - \rho^2 + \alpha\rho^3. \tag{22}$$

Die Konstante B hat hier eine einfache Bedeutung. Wir erinnern nämlich daran, dass B die Konstante des Flächensatzes ist, wie man aus der Lagrangeschen Differentialgleichung | $r^2\dot{\varphi} = B$ ersieht.[130] B ist also gleich dem 152
doppelten Inhalt des Dreiecks, dessen Grundlinie die in einem Bahnpunkt in der Richtung der Tangente an die Bahnkurve aufgetragene Länge der Lichtgeschwindigkeit und dessen Höhe der kürzeste Abstand dieser Tangente vom Gravitationszentrum ist. Da die Lichtgeschwindigkeit nun im Unendlichen den Wert 1 hat, so ist B selbst der kürzeste Abstand, den die Tangente an die Bahnkurve im unendlichen fernen Punkt derselben (Asymptote der Bahnkurve) vom Gravitationszentrum hat. *B ist sozusagen die Distanz, um welche der Lichtstrahl im Unendlichen am Zentrum vorbeizielt.* (L. Flamm, Beiträge zur Einsteinschen Gravitationstheorie, Physikal. Zeitschr. 1916 S. 452)[131]

Das allgemeine Integral der Differentialgleichung (22) ist von der Form $\rho = f(B^2, \varphi - \varphi_0)$. Es entsteht also dadurch, dass man diejenige Bahnkurve, die ein Lichtstrahl beschreibt, der von einem bestimmten unendlich fernen Punkt ($\rho = 0$) z. B. dem Punkt $\varphi_0 = 0$ in einer durch die Konstante B bestimmten Richtung ausgeht, um den Punkt $r = 0$ sich drehen lässt. Wir setzen in

[129] This paper by Fréedericksz, in fact, never appeared, see *Hilbert 1917*, p. 77, (this Volume, p. 71 and its note 63).

[130] At the top of the page, Hilbert sketched the following figure in pencil:

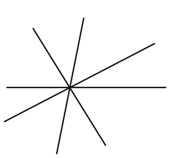


[131] *Flamm 1916*.

der weiteren Diskussion immer $\varphi_0 = 0$, betrachten also nur die einparametrige Kurvenschar, die der Lichtstrahl beschreibt, wenn man der Konstante B immer andere Werte erteilt. Es ist dies die *Gesamtheit der Bahnkurven des Lichtes, das von einem unendlich fernen Punkt* nach allen möglichen Richtungen *ausgeht*. Die Asymptoten an diesen Bahnkurven im unendlich fernen Punkt bilden also eine Schar paralleler Geraden. Wir können uns nun ein all-
153 gemeines Bild | dieser Kurven machen, weil wir wissen, dass das Licht sich auf einem Kreis vom Radius $r = \frac{3}{2}\alpha$, also auf einer *geschlossenen Kurve* bewegen kann. *Dieser Kreis muss daher ein Integral unserer Differentialrechnung sein*, wenn in dieselbe für B ein gewisser Wert eingesetzt wird, den man leicht berechnen kann; und zwar folgt aus $r^2\dot{\varphi} = B$, $r^2\dot{\varphi}^2 - \frac{r-\alpha}{r}\dot{t}^2 = 0$, $\frac{r-\alpha}{r}\dot{t} = 1$ — drei Gleichungen, die wir auf S. ⟨126⟩ aufgestellt hatten — für $r = \frac{3}{2}\alpha$ der gesuchte Wert $B^2 = \frac{27}{4}\alpha^2$.

§ 77. Die Poincarésche Zykeltheorie und die Krümmung der Lichtstrahlen

Dieser *merkwürdige Fall, dass eine Differentialgleichung eine einzige geschlossene Kurve als Lösung hat*, ist von *Poincaré* in seiner Himmelsmechanik zuerst untersucht worden. Seine Grundidee war, dass diese *geschlossene Kurve den Verlauf aller anderen Bahnkurven*, d. h. aller anderen Lösungen der Differentialgleichungen für andere Werte von B^2 *charakterisieren muss*. Man nennt diese ausgezeichnete Lösung ein *Zykel*, und die in dem erwähnten Werk ausgebaute Theorie heisst die *Poincarésche Zykeltheorie*. Da alle Lösungen der Differentialgleichung, die zu verschiedenen Werten des Parameters B^2 gehören, durch den unendlichen fernen Punkt $\rho = 0$ hindurchgehen, so ist auch diese eine singuläre Stelle, allerdings eine sehr einfache nämlich in der Poincaréschen Terminologie ein sogenannter *Strahlenpunkt*.

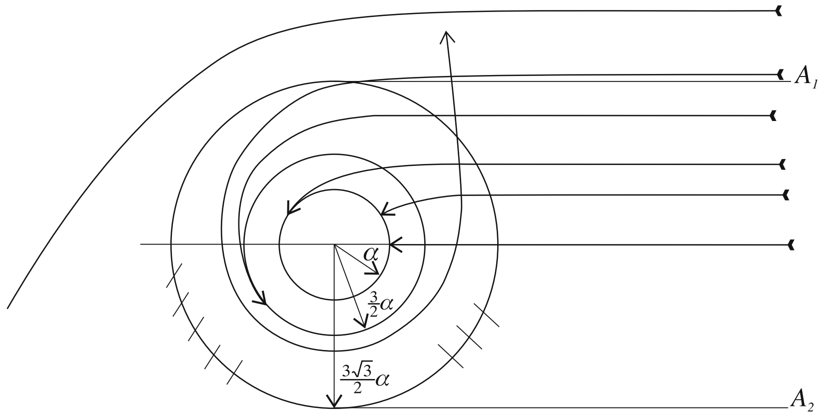


Für grosse Werte von r, d. h. für kleine Werte von ρ wird nämlich die Differentialgleichung (22) zu $\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 = \frac{1}{B^2} - \rho^2$. Ihre Lösung ist die gerade Linie $\rho = \frac{\sin\varphi}{B}$, d. h. die Bahnkurven
154 sind in grosser Entfernung vom Gravitationszentrum | Gerade, und zwar bedeutet B diesen Abstand der Asymptote von der x-Achse.[132] Setzen wir für $B = \frac{3\sqrt{3}}{2}\alpha$, so erhalten wir die Asymptoten der zu diesem Wert von B gehörigen Bahnkurve. Da für dieses B auch der Kreis $r = \frac{3}{2}\alpha$ ein Integral[133] ist, so können wir schon vermuten, dass sich *jene Bahnkurve asymptotisch um diesen Kreis herumschlingen wird*, ohne ihn je zu erreichen. Die nähere Diskussion der

[132] The preceding half sentence was interlineated by Hilbert in pencil.

[133] "Integral" was corrected from "singuläres Integral" in pencil.

Differentialgleichung zeigt, dass dies tatsächlich der Fall ist. Den Verlauf der übrigen Lösungen der Gleichung ersieht man aus nebenstehender Figur.[134]



In derselben sind die drei[135] Kreise $r = \alpha$, $r = \frac{3}{2}\alpha$ und $r = \frac{3\sqrt{3}}{2}\alpha$ gezeichnet. Jene beiden Kurven also, deren Asymptoten A_1 und A_2 sind,[136] schlingen sich asymptotisch um den Kreis $r = \frac{3\alpha}{2}$[137] herum. Die Kurven, deren Asymptoten zwischen A_1 und A_2 liegen, schneiden den Kreis $r = \frac{3}{2}\alpha$ und gelangen bis zum innersten Kreis, | wo sie aufhören. Diejenigen Bahnkurven endlich, 155
deren Asymptoten ausserhalb von A_1 und A_2 liegen, schlingen sich, wenn ihre Asymptoten nahe genug an einer der beiden ausgezeichneten Asymptoten liegen, beliebig oft um den Kreis $r = \frac{3}{2}$ herum, entfernen sich dann wieder und verlaufen asymptotisch geradlinig in einer anderen Richtung ins Unendliche. Hat dagegen die Asymptote an die Kurve eine grosse Entfernung $B\delta$[138] von A_1 und A_2, so schlingt sich die Kurve überhaupt nicht um den mittleren Kreis herum, sondern wird in seiner Nähe nur etwas gekrümmt und geht dann wieder ins Unendliche. Ist der Abstand δ äusserst gross, d. h. ist $\lim \alpha = 0$, *so hat die Bahnkurve die Gestalt eines Hyperbelastes* $r = \frac{B}{\frac{\alpha}{2B} + \cos\varphi}$, der gegen die Sonne zu konkav ist und die Sonne selbst im Brennpunkt stehen hat; wird schliesslich δ unendlich gross, d. h. ist $\alpha = 0$, so wird die Bahnkurve zur Geraden. Für $\lim \alpha = 0$ erhält man also die Ablenkung, die der Lichtstrahl im Gravitationsfeld erfährt, wenn man den Winkel, den die beiden Hyperbelasymptoten einschliessen, berechnet. Dieser Winkel hat die Grösse $\frac{\alpha}{B}$.
Setzt man für $\frac{\alpha}{B}$ die Sonnenmasse ein und wählt B so, dass der Lichtstrahl gerade den Sonnenrand tangiert, d. h. so, dass *die Ablenkung durch die Sonne*

[134]Laue included virtually the same figure into his *Laue 1921*, p. 226, see also *Eisenstaedt 1987*, p. 306, for historical discussion.

[135]"drei" was deleted in pencil and corrected to "2".

[136]"sind" was corrected by Hilbert in pencil from "den äussersten Kreis berühren".

[137]"den Kreis $r = \frac{3\alpha}{2}$" was corrected in pencil from "den mittleren Kreis".

[138]"B was interlineated with pencil."

ein Maximum wird, so findet man

$$\frac{\alpha}{B} = 1.7''.$$

Dieser Effekt, müsste festzustellen sein, wenn man einen Fixstern, dessen Strahlen nahe am Sonnenrande vorbeigehen, bei einer Sonnenfinsternis beob-
156 achtet. Doch ist er experimentell noch |[139] nicht bestätigt worden, da bis heute noch keine dahinzielenden Untersuchungen angestellt werden konnten.[140] Auch durch den Planeten Jupiter sollte eine Ablenkung der Lichtstrahlen verursacht werden, die — obgleich viel kleiner als die durch die Sonne bewirkte — doch eben noch feststellbar sein muss. Leider liegen auch hierüber noch keine Beobachtungen vor.[141]

---

[139] On the left hand page, Hilbert wrote in pencil the following notes and then later deleted them again:
Will man für grosse Entfern⟨un⟩g⟨en⟩ und zugleich grosse B die Differentialgl. int⟨e⟩g⟨rieren,⟩ so setze $\rho B = \sigma$ so wird (S. 151)

$$\left(\frac{d\sigma}{d\varphi}\right)^2 \frac{1}{B^2} = \frac{1}{B^2} - \frac{\sigma^2}{B^2} + \frac{\alpha\sigma^3}{B^3}$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\varphi}\right)^2 = 1 - \sigma^2 + \frac{\alpha\sigma^3}{B}$$

$$\sigma = \cos\varphi + \tau \qquad \frac{\alpha}{B} = \delta$$

$$\left(-\sin\varphi + \frac{d\tau}{d\varphi}\right)^2 = 1 - (\cos\varphi + \tau)^2 + \frac{\alpha}{B}(\cos\varphi + \tau)^3$$

$$-2\sin\varphi\frac{d\tau}{d\varphi} = -2\cos\varphi \cdot \tau + \frac{\alpha}{\cdot}$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\varphi}\right)^2 = 1 - \sigma^2 + \delta\sigma^3 \qquad \frac{1}{\sigma} = \tau$$

$$+\frac{1}{\tau^4}\left(\frac{d\tau}{d\varphi}\right)^2 = 1 - \frac{1}{\tau} + \frac{\delta}{\tau^3}$$

$$\left(\frac{d\tau}{d\varphi}\right)^2 = \tau^4 - \tau^2 + \delta\tau$$

[140] Einstein's prediction of light deflection in the gravitational field of the sun was confirmed by the results of two English expeditions to measure the deflection of star light during the solar eclipse of 29 May 1919, see *Dyson et al. 1920*. The results were announced on 6 November 1919, and made Einstein world famous almost instantaneously, see *CPAE9 2004*, pp. xxxi–xxxvii, and references cited therein, for a historical discussion.

[141] In *Einstein 1916a*, p. 822, the value of gravitational deflection for a light ray grazing the limb of Jupiter is given as $0{,}02''$. In correspondence, Einstein had claimed the feasibility of an observational confirmation of light deflection in the gravitational field of Jupiter (see Einstein to Otto Naumann, 7 December 1915, and Einstein to Karl Schwarzschild, 9 January 1916 *CPAE8-A 1998*, Docs. 160, 181). He had also suggested that Erwin Freundlich should try to undertake the corresponding measurements at the Göttingen observatory under his supervision, and had communicated with Hilbert, both in correspondence and in personal conversation, about Hilbert's support for such a plan (see Einstein to Hilbert, 18 February 1916, 30 March 1916, and Hilbert to Einstein, 27 May 1916 *CPAE8-A 1998*, Docs. 193, 207, 222, see also note 152 on p. 285 below). For the first observational confirmation of light deflection in the gravitational field of Jupiter, see *Treuhaft and Lowe 1991*.

§ 78. Dimensionsbetrachtungen. Berechnung von α für die Sonne und für ein Wasserstoffmolekül

Wir sind bis jetzt der Frage, welches

die Dimensionen der physikalischen Grössen

sind, absichtlich aus dem Wege gegangen. Wir wollen uns jetzt kurz mit dieser Frage beschäftigen, die deswegen von grosser Bedeutung ist, weil man bei allen numerischen Rechnungen gerade die Dimensionen kennen muss, um bekannte physikalische Daten, die der Physiker natürlich immer in seinem Masssystem, dem sog. cm, gr, sec (c. g. s)-Masssystem, angibt, auf unser Masssystem umrechnen zu können.

Die Grundgleichung der Newtonschen Mechanik ist $\frac{d^2x}{dt^2} = -\kappa\frac{M}{x^2}$. Dabei muss die Konstante κ eine solche Dimension besitzen, dass die rechte Seite der Gleichung dieselbe Dimension wie die linke, nämlich $\frac{\text{Länge}}{(\text{Zeit})^2}$ hat. Bezeichnen wir die Längen-, Massen-, Zeit-Dimension mit bezw. l, m, t, so sind die Dimensionen der Newtonschen Gleichung $\frac{l}{t^2} = \kappa\frac{m}{l^2}$. *Also ist κ von der Dimension* $l^3m^{-1}t^{-2}$ und zwar ist der experimentell gefundene Wert $\kappa = 6.7\cdot 10^{-8}\text{cm}^3\text{gr}^{-1}\text{sec}^{-2}$. *Um die Grösse α unserer Theorie* für irgend eine Masse *ausrechnen zu können*,
muss man, wie wir wissen, die Gleichung $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = -\frac{\frac{\alpha}{2}}{r^3}$ | vergleichen mit der 157
entsprechenden Gleichung der Newtonschen Theorie $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = -\kappa\frac{M}{r^3}$. Diese letztere Gleichung kann man übrigens aus den beiden Differentialgleichungen

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\kappa\frac{Mx}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -\kappa\frac{My}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

sofort ableiten. Wir suchen dieselben nämlich durch den eine Kreisbewegung darstellenden Ansatz

$$x = \sqrt{x^2+y^2}\cos\omega t, \qquad y = \sqrt{x^2+y^2}\sin\omega t$$

zu integrieren, wobei wir also $x^2+y^2 = r^2 = \text{const.}$ lassen müssen. ω hat dann die Bedeutung der Winkelgeschwindigkeit und soll ebenfalls eine Konstante sein. Aus den beiden Differentialgleichungen finden wir dann als Gleichung, der die beiden Konstanten r und w genügen müssen, die bekannte Beziehung $\omega^2 = -\kappa\frac{M}{r^3}$, d. h. eben jene gesuchte Gleichung $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = -\kappa\frac{M}{r^3}$. Diese Gleichung können wir *nicht* ohne weiteres mit der entsprechenden Einsteinschen $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = -\frac{\frac{\alpha}{2}}{r^3}$ vergleichen, weil *die Zeit* in beiden *in verschiedenen Einheiten gemessen* wird; in der letzteren ist die Zeitdimension nämlich so gewählt, dass die Lichtgeschwindigkeit im Unendlichen gleich 1 wird, während der Physiker als Lichtgeschwindigkeit $c = 3\cdot 10^{10}\text{cm}^1\text{sec}^{-1}$ annimmt. Damit auch in der Einsteinschen Gleichung dieselbe Zeiteinheit wie in der Newtonschen steht, muss in der ersteren t durch ct ersetzt werden. In der Tat wird dann aus $\frac{dr}{dt}=1$ für die neue Zeitvariable $\frac{dr}{dt}=c$. Wir haben also einerseits $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2=-c^2\frac{\frac{\alpha}{2}}{r^3}$ und andererseits $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2=-\kappa\frac{M}{r^3}$ oder

$$\frac{\alpha}{2}=\kappa\frac{M}{c^2}.$$

158 Rechter Hand muss eine Länge stehen, da α die Dimension einer Länge hat. Dies ist in der Tat der Fall, denn es ist $\frac{\mathrm{cm}^3}{\mathrm{grsec}^2}\frac{\mathrm{gr}}{\frac{\mathrm{cm}^2}{\mathrm{sec}^2}}=\mathrm{cm}$. Um den *Wert der Konstanten* $\frac{\alpha}{2}$ *für die Sonne* zu berechnen, hat man nun für M die bekannte Sonnenmasse $1.95\cdot 10^{33}gr$ einzusetzen. Dann wird $\frac{\alpha}{2}=1.45\cdot 10^5$cm (der wirkliche Sonnendurchmesser ist $6.9\cdot 10^{10}$cm).[142] Das Licht kann, wie wir wissen, auf einem Kreis vom Radius $r=\frac{3}{2}\alpha$ kreisen; dieser Radius hat also für die Sonne eine Länge von ungefähr 4.5km.

Als Gegenstück dazu berechnen wir noch $\frac{\alpha}{2}$ *für ein H_2-Molekül*. Hier hat man für M den experimentell gefundenen Wert von $1\,.\,64\cdot 10^{-24}gr$ einzusetzen und erhält $\frac{\alpha}{2}=1\,.\,23\cdot 10^{-53}$cm. Dies ist ein sehr wichtiges Datum; einerseits gibt es einen Begriff von der Dimension, in der das Licht, also auch ein sehr schnell sich bewegendes Elektron um den positiven Kern eines Atoms kreisen müsste. Da andererseits der Durchmesser des Elektrons von der Grössenordnung 10^{-13}cm, also im Verhältnis zur Masse des H_2-Moleküls[143] schon unendlich gross ist, so wird man nicht erwarten dürfen, dass infolge der Grössenordnung von $\frac{\alpha}{2}$ für die Elektronenbewegung ein von der Newtonschen Mechanik abweichendes Bewegungsgesetz gelte. Unsere auf S. 129 geäusserte dahin gehende Vermutung erweist sich also als unrichtig.[144]

§ 79. Verhalten des Massfadens im zentrischen Gravitationsfeld bei tangentialer und radialer Lage

Wir haben schon zwei Folgerungen aus unserer Theorie gezogen, die einer Prüfung durch das Experiment zugänglich sind, nämlich erstens die Perihel-
159 bewegung der Planeten und | zweitens die Krümmung der Lichtstrahlen im Gravitationsfeld. Nun wollen wir noch einen dritten Effekt besprechen, der ebenfalls an der Erfahrung prüfbar ist. Wir befassen uns nämlich mit dem

Verhalten von Massfaden und Lichtuhr im Gravitationsfeld,

weil daraus ein ungemein wichtiger Schluss, nämlich die Rotverschiebung der Spektrallinien einer sich im Gravitationsfeld befindlichen Lichtquelle gegenüber einer ausserhalb desselben sich befindenden gezogen werden kann. Um

[142]"Sonnendurchmesser" should be "Sonnenradius".

[143]"Moleküls" was corrected from "Atoms".

[144]See p. 259 above.

diese komplizierte Erscheinung zu verstehen, machen wir uns am zentrisch-symmetrischen Gravitationsfeld nochmals klar, dass in demselben *die Euklidische Geometrie durchaus nicht gilt*. Wir denken uns in der Lage, alle nun anzustellenden Messungen gleichzeitig ausführen zu können, d. h. wir setzen $t = \text{const}$ Dann nimmt unser Linienelement die Form an

$$ds^2 = \frac{r}{r-\alpha}dr^2 + r^2 d\varphi^2.$$

Der Apparat, mit dem wir jetzt zu messen haben, ist der Massfaden, da alle Weltlinien nun Strecken sind. Derselbe gestattet uns also, die vom gewählten Bezugssystem unabhängige Länge einer endlichen — und nicht nur einer infinitesimalen — Strecke zu messen; denn *endliche* Strecken müssen wir messen können, um zu zeigen, dass die Euklidische Geometrie nicht mehr gültig ist. Im Infinitesimalen gilt dieselbe ja auch jetzt noch. Es kommt uns nun darauf an, ein *einfaches Experiment* ausfindig zu machen, *das die Nichtexistenz der Euklidischen Geometrie beweist*. Dazu müssen uns die Koordinaten r u. φ jedes Punktes bekannt sein.[145]

Falls wir *die Koordinaten* r und φ jedes Punktes der $r\varphi$-Ebene noch nicht 160
kennen, so *können wir* sie *folgendermassen bestimmen*: Man kann durch drei Messungen mit dem Massfaden in jedem Punkt der $r\varphi$-Ebene die $g_{\mu\nu}$ in Bezug auf irgend ein willkürliches Koordinatensystem experimentell bestimmen (siehe S. 96).[146] Diese Grösssen $g_{\mu\nu}$ denken wir uns in jedem Punkte der Geometrie angeschrieben. Dann können wir — wie unsere Theorie zeigt — ein solches Koordinatensystem einführen, dass $g_{11} = \frac{r}{r-\alpha}$, $g_{12} = 0$, $g_{22} = r^2$ wird. In demselben hat dann jeder Punkt der Ebene zwei experimentell zu findende Zahlen r und φ als Namen.

Die hier beschriebene allgemein anwendbare Methode, um die Funktionen $g_{\mu\nu}$ zu finden, lässt sich sicher in diesem besonders durchsichtigen Fall der zentrischen Symmetrie erheblich vereinfachen. Es ist klar, dass man selbst bei Hinzunahme der Zeit in unserem Gravitationsfeld

$$ds^2 = \frac{r}{r-\alpha}dr^2 + r^2 d\varphi^2 - \frac{r-\alpha}{r}dt^2$$

r mit dem Massfaden und auch mit der Lichtuhr durch irgend welche Messungen finden können muss; denn r ist eine Invariante. *Alle Invarianten* aber *lassen sich durch Massfaden und Lichtuhr bestimmen*. Ebenso ist in diesem Linienelement dt eine Invariante und kann also mit der Lichtuhr gemessen werden. Diese Bemerkung ist prinzipiell von Wichtigkeit für die unten zu besprechende Rotverschiebung der Spektrallinien.

Nachdem nun r und φ gefunden sind, können wir die Länge S einer geschlossenen Kurve $r = \text{const}$ mit dem Massfaden messen. Diese Kurve nennen wir
einen Kreis. Längs | desselben ist $ds = rd\varphi$ und daher wird $s = 2r\pi$. Auf dem 161

[145] The preceding sentence was added.

[146] See p. 236 above.

Kreise, auf welchem *der Massfaden überall tangential zum Gravitationsfeld angelegt* wird, *gelten noch* die Massverhältnisse der *Euklidischen Geometrie.* Betrachten wir also die Oberfläche der im dreidimensionalen r, ϑ, φ-Raum liegenden Kugel $r = \text{const}$, konstruieren auf ihr ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Seiten als geodätische Linien grösste Kreise der Kugel sein müssen, und machen die mit dem Massfaden zu messende Länge der Katheten $= 1$, so finden wir als Länge der Hypothenuse $\sqrt{2}$. Wir bemerken noch, dass die geodätischen Linien auf der Kugeloberfläche keineswegs geodätische Linien sind, wenn wir die Geometrie im dreidimensionalen Raum

$$ds^2 = \frac{r}{r-\alpha} dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2$$

betrachten, d. h. wenn wir auch Kurven als Verbindungslinien zweier Punkte der Kugeloberfläche zulassen, die *nicht* auf der Kugeloberfläche selbst verlaufen.

Legen wir nun den Massfaden im Gravitationsfeld

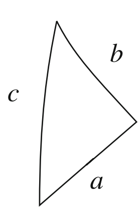
$$ds^2 = \frac{r}{r-\alpha} dr^2 + r^2 d\varphi^2$$

in radialer Richtung an, d. h. halten wir die φ konstant und lassen r und dr wachsen, so finden wir als Zunahme der Länge, die wir auf dem Massfaden ablesen können,

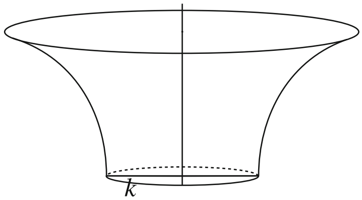
$$ds = \sqrt{\frac{r}{r-\alpha}} dr = \left(1 + \frac{\alpha}{2r}\right) dr,$$

während wir, wenn die Euklidische Geometrie Geltung hätte, $ds = dr$ finden müssten. Die am Massfaden abgelesene Zahl hat sich eben beim Fortschreiten um dr um mehr als dr vermehrt, nämlich um $\left(1 + \frac{\alpha}{2r}\right) dr$. *In Bezug auf dieses Koordinatensystem scheint es daher, als ob die am Massfaden angebrach-*
162 *ten | Zahlen näher zusammengerückt wären.* Wir können unser Experiment deswegen dahin interpretieren, *dass sich der in radialer Richtung angelegte Massfaden unter dem Einfluss des Gravitationsfeldes zusammengezogen hat.*

§ 80. Geometrische Interpretation auf der Rotationsfläche einer Parabel



Denken wir uns nun ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck mit der Kathetenlänge $s = 1$; die eine Kathete a möge eine radial gerichtete geodätische Linie ($\varphi = \text{const.}$) sein. Die andere sei eine geodätische Linie b, die auf der ersten senkrecht steht. Die Hypothenuse c ist dann diejenige geodätische Linie, welche die beiden Endpunkte der Katheten verbindet. *Legen wir* jetzt *den Massfaden*, der auf den beiden Katheten angelegt, die Länge 1 anzeigt, *längs der Hypothenuse an, so finden wir*



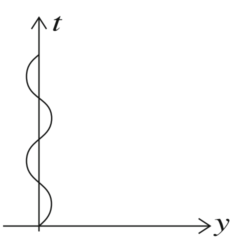
keineswegs als Länge derselben $\sqrt{2}$. Dies kann man sich leicht plausibel machen. Die durch das Linienelement $ds^2 = \frac{r}{r-\alpha}dr^2 + r^2 d\varphi^2$ definierte Geometrie lässt sich nämlich als *Geometrie auf einer Fläche deuten*, die durch *Rotation einer Parabel* um ihre Leitlinie entsteht. In der Umgebung des vom rotierenden Scheitelpunkt beschriebenen Kreises κ haben wir also von der Euklidischen Geometrie durchaus verschiedene Massverhältnisse. Da die Parabel aber, wenn man sich von dieser Stelle entfernt, sehr bald zum Durchmesser angenähert parallel wird, so nähert man sich dann auch schnell den Massverhältnissen der Euklidischen Geometrie (siehe L. Flamm, Physikal.⟨Zeitschrift⟩)[147]

§ 81. Die Rotverschiebung der Spektrallinien 163

Nun *betrachten wir die Pseudogeometrie* in einem x, y, t-Raum ($\vartheta = \frac{\pi}{2}$) unseres Gravitationsfeldes. Hier werden wir einen entsprechenden Effekt erhalten, und zwar einen, der der experimentellen Beobachtung zugänglich ist, nämlich

die Rotverschiebung der Spektrallinien auf den Fixsternen.

Das Linienelement unserer Pseudogeometrie kann man gemäss den auf S. 115 angegebenen Formeln leicht auf rechtwinklige Koordinaten umrechnen.[148] Es kommen dann Glieder mit dx^2, $dxdy$, dy^2 und dt^2 vor. Für einen in der x, t-Ebene[149] ($y = 0$) sich befindenden Punkt wird der Faktor von dt^2, der nachher allein von Wichtigkeit ist, zu $\frac{x-\alpha}{x}$: das Linienelement hat dann die Form



$$ds^2 = -\frac{x-\alpha}{x}dt^2 + \text{quadratische Form in } dx \text{ und } dy.$$

Um die Zeit ablesen zu können, müssen wir eine *Uhr* haben. Eine solche finden wir in denkbarer Vollkommenheit in der Natur realisiert durch *ein schwingendes und Licht emittierendes Molekül*, etwa das eine helle gelbe Spektrallinie a⟨u⟩ssendende Natriummolekül. Damit die Lichtschwingungen für einen in der x-Richtung blickenden Beobachter sichtbar sind, muss das Elektron im Molekül um den auf der x-Achse

[147] *Flamm 1916*.

[148] See p. 248 above.

[149] "in der x, t-Ebene" was corrected from "auf der Achse".

ruhenden Kern in der dazu senkrechten y-Richtung[150] Schwingungen ausführen. Wir machen nun die *axiomatische Annahme dass die auf der Zeitachse*
164 *abgelesene Zeit t einer Schwingung immer die nämliche sei.* Befindet | sich das Molekül in dem zentrisch-symmetrischen Gravitationsfeld, so wird diese Schwingungsdauer aber, wie wir nun zeigen wollen, von der Entfernung des Moleküls vom Gravitationszentrum abhängen.

Wir machen ferner die Annahmen, dass

1) *die Eigenzeit* τ einer Schwingung, — die man also auf der Uhr ablesen müsste, welche die Bewegung des schwingenden Elektrons mitmacht — *unendlich klein* sei,

2) *die Amplitude dy* der Schwingung noch unendlich klein sei im Verhältnis zur Eigenzeit τ, d. h. dass auch die Geschwindigkeit des Elektrons *unendlich klein* sei.

Dann ist folgendes *Axiom* einleuchtend:

Die Eigenzeit τ einer Schwingung des Moleküls ist *unabhängig von der Stelle des Gravitationsfeldes*, an welcher sich das Molekül befindet.

In der Tat ist unter obigen Voraussetzungen $g_{\mu\nu} = \text{const}$. Man kann es also immer durch eine Transformation — bei welcher ja die Invariante τ ungeändert bleibt — erreichen, dass die neuen $g'_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ werden. Dann herrschen aber — wo sich auch das Molekül befindet — immer die nämlichen Massverhältnisse der Pseudoeuklidischen Geometrie.

Dieses *Axiom hat* natürlich ebenso wie das weiter oben genannte, *nur provisorischen Charakter*. Wenn die neue Physik einmal vollständig ausgebaut sein wird, so muss dasselbe eine Folge der allgemeinen Theorie sein.

Nun fassen wir zwei Moleküle ins Auge, von denen eines auf der Sonneno-
165 berfläche in einer Entfernung x_0 vom | Zentrum, das andere auf der Erde in der praktisch unendlich grossen Entfernung X_0 sich befinden möge. Für das erstgenannte Molekül berechnen wir nun die Eigenzeit τ einer Periode. Weil der positive Kern ruht, wird $dx = 0$; weil die Geschwindigkeit des negativen Elektrons unendlich klein ist, wird auch $dy = 0$. Also erhalten wir, wenn P eine Periode auf der Sonnenoberfläche bezeichnet,

$$\tau = \int_P ds = \int_P \sqrt{\frac{x_0 - \alpha}{x_0}} dt = \sqrt{\frac{x_0 - \alpha}{x_0}} t = \left\{ 1 - \frac{1}{2} \frac{\alpha}{x_0} \right\} t.$$

Ebenso erhalten wir für das auf der Erde schwingende Molekül, wenn wir über eine Periode P^* integrieren und berücksichtigen, dass $\frac{X_0 - \alpha}{X_0}$ angenähert gleich 1 ist,

$$\tau = \int_{P^*} \sqrt{\frac{X_0 - \alpha}{X_0}} dt = T.$$

[150] "in der dazu senkrechten y-Richtung" was corrected from "in einer dazu senkrechten Richtung, etwa in der y-Richtung".

Nun sind *die Schwingungszeiten* t und T *proportional den Wellenlängen* bezw. λ und Λ. Also wird, weil die Eigenzeit τ einer Periode beidemal dieselbe war,

$$\lambda : \Lambda = 1 : \left(1 - \frac{1}{2}\frac{\alpha}{x_0}\right) \qquad \text{oder}$$

$$\frac{\lambda - \Lambda}{\lambda} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\alpha}{2x_0}.$$

Setzt man für α *die Sonnenmasse* und für x_0 den *Sonnenradius* ein so findet man[151]

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{3}{7}10^{-5}.$$

Nehmen wir noch an, dass die Lichtgeschwindigkeit an den einzelnen Stellen des Raumes sich zeitlich nicht ändert, dass wir also die Schwingung eines auf der Sonne schwingenden Moleküls unverändert von der Erde aus beobachten können, so folgt hieraus:
Die Spektrallinien eines lichtaussehenden Gases sind auf der Sonne nach Rot verschoben gegenüber den Linien, die dasselbe Gas auf der Erde emittiert, und zwar findet diese | *Verzögerung* der Schwingung als unmittelbare Folge 166
der Gravitation *am Ort der Schwingung* selbst statt und wird nicht erst dadurch erzeugt, dass das Licht der emittierenden Quelle von der Sonne zur Erde strahlt. Für das Bestehen dieses Effektes sprechen nach E. Freundlich spektrale Beobachtungen an Fixsternen bestimmter Typen; eine endgültige Prüfung aber steht noch aus.[152]

III. Kapitel

§ 82. Die elektrodynamischen Erscheinungen als Wirkungen der Gravitation

Der Fall der Anwesenheit von Materie in unserer vierdimensionalen Pseudogeometrie.

[151] On p. [158] (see p. 280 above), Hilbert had computed the value of $\alpha/2$ to be $1.45 \cdot 10^5$ cm, and had given the value of the solar diameter as $6.9 \cdot 10^{10}$ cm which is actually the value for the solar radius. The value for $\Delta\lambda/\lambda$ given by Einstein is $2 \cdot 10^{-6}$, see *Einstein 1907b*, p. 459, *Einstein 1911*, p. 905, and *Einstein 1914*, p. 1084. The discrepancy of a factor of 2 arises from the earlier confusion of solar diameter and radius.

[152] See *Freundlich 1915a* and *Freundlich 1915b*. Freundlich's claim that the observational data provided evidence for Einstein's gravitational red shift was disputed by Hugo von Seeliger and Hans Ludendorff, a dispute that contributed to Freundlich's difficulty in obtaining an academic position. When Einstein and Hilbert discussed plans to provide Freundlich a position at the Göttingen observatory in early 1916 (see note 141 on p. 278 above), it was suggested that Freundlich should also work on the observation of solar red shift. See *Hentschel 1997*, ch. 4, for a historical discussion of early attempts to find evidence for gravitational redshift and Freundlich's role in it. Astronomical evidence of gravitational red shift remained controversial for a long time. For the first unambiguous, terrestial confirmation of the gravitational red shift of spectral lines see *Pound and Rebka 1960*, and for a comprehensive discussion of the history of gravitational redshift, see *Hentschel 1998*.

ist der letzte Schritt, den wir tun müssen, um unsere Theorie so auszugestalten, dass sie keine Geometrie mehr ist, sondern eine theoretische Physik, die sich experimentell prüfen lässt. Dazu knüpfen wir wieder an die Untersuchungen an, die wir auf S. 104ff angestellt hatten.[153] Wir lassen also die drei auf S. 121 genannten Axiome,[154] insbesondere das ad hoc eingeführte Axiom, dass Unstetigkeiten der Massbestimmung mit dem Vorhandensein von Materie äquivalent sein sollen, wieder fallen und treiben *reine Kontinuumsphysik*. Wir sind damals auf Grund allgemeiner Betrachtungen über das Wesen der Materie zu dem Schluss gekommen, dass die physikalischen Grundgleichungen aus einem Variationsprinzip entspringen müssen, in welchem als Funktion unter dem Integralzeichen eine allgemeine Invariante H steht, deren Wahl wir uns vorbehielten. Wir sagten nur, dass sie als Argumente die 10 Gravitati-
167 onspotentiale $g_{\mu\nu}$ samt ihren ersten und | zweiten Ableitungen — wovon die letzteren nur linear auftreten sollen — und die 4 Komponenten q_1, q_2, q_3, q_4 des elektrodynamischen Vektors samt ihren ersten Ableitungen enthält. Wir haben oben in der Folge nur den Spezialfall, dass die ganze Welt frei von Materie ist, behandelt; nun tun wir also den noch fehlenden *letzten Schritt* und nehmen an, das die *Welt mit der Materie erfüllt* ist.

Schon bevor wir uns über die Wahl der Hamiltonschen Funktion H schlüssig machen, können wir eine *merkwürdige Folgerung* aus unserer Theorie ziehen: Aus unserem Variationsproblem folgen 14 Differentialgleichungen, nämlich durch Lagrangesche Differentiation nach den $g^{\mu\nu}$ die 10 Gravitationsgleichungen

$$\frac{\partial\sqrt{g}H}{\partial g^{\mu\nu}} - \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial\sqrt{g}H}{\partial g_k^{\mu\nu}} + \sum_{kl}\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l}\frac{\partial\sqrt{g}H}{\partial g_{kl}^{\mu\nu}} = 0, \quad (\mu,\nu = 1,2,3,4), \tag{23}$$

die wir auch abgekürzt in der Form

$$[\sqrt{g}H]_{\mu\nu} = 0 \tag{23'}$$

schreiben und durch Lagrangesche Differentiation nach den q_h die 4 verallgemeinerten Maxwellschen Gleichungen

$$\frac{\partial\sqrt{g}H}{\partial q_k} - \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial\sqrt{g}H}{\partial q_{hk}} = 0, \qquad (h = 1,2,3,4), \tag{24}$$

die wir abgekürzt als

$$[\sqrt{g}H]_h = 0. \tag{24'}$$

schreiben. *Von diesen 14 Gleichungen sind*, wie wir schon bemerkten (siehe S. 108),[155] *4 eine Folge der 10 übrigen*, d. h. es bestehen zwischen diesen 14 Differentialgleichungen 4 wirkliche Identitäten. Betrachtet man also die Gesamtheit der Lösungen von irgend 10 jener 14 Gleichungen, z. B. alle Lösungen

168 der Gleichungen (23), so enthalten dieselben noch 4 willkürliche Funk|tionen der 4 Veränderlichen x_1, x_2, x_3, x_4, da wir ja 14 unbekannte Funktionen und nur 10 Gleichungen zu ihrer Bestimmung haben. Diese 4 willkürlichen Funktionen werden nun durch die 4 noch nicht herangezogenen elektrodynamischen Gleichungen (24) *nicht* bestimmt, sondern es werden nur gewisse Lösungen der 10 Gravitationsgleichungen, die mit dem Problem selber nichts zu tun haben, durch die 4 letzten Gleichungen als ungültig ausgeschieden.

In diesem Sinne kann man also die 4 elektrodynamischen Gleichungen als Folge der Gravitationsgleichungen ansehen. Für den Fall, dass die Invariante H jene spezielle Gestalt hat, die wir ihr unten geben werden, habe ich diesen Satz in meiner ersten Mitteilung über die Grundlagen der Physik in den Göttinger Nachrichten (1915) bewiesen.[156] *Damit ist ein bekanntes, von Riemann stammendes Problem gelöst*, nämlich die Frage, inwiefern die elektrischen Erscheinungen mit der Gravitation zusammenhängen.

§ 83. Die vier Invarianten, aus denen die Funktion L zusammengesetzt werden muss

Unsere Aufgabe ist es nun, *die Hamiltonsche Funktion H* so *zu wählen*, dass die resultierenden physikalischen Grundgleichungen alle physikalischen Beobachtungen richtig beschreiben. Hierzu sind weitere Axiome erforderlich. Soll in der Grenze d. h. bei Abwesenheit von Materie, die Euklidische Geometrie herauskommen, so muss notwendig

$$H = K + L$$

gesetzt werden, wo K die Riemannsche Krümmungsinvariante ist, so dass wir nur über die Invariante L noch frei verfügen können. Die *einfachste Annahme* nun, die wir *über L* machen können, ist | die, dass dieselbe ausser den q_h und 169
deren ersten Ableitungen nur die $g_{\mu\nu}$ selbst, nicht aber deren Ableitungen enthält. Die $g_{\mu\nu}$ selber müssen allerdings sicher in L vorkommen, weil sich aus dem Vektor q_h und dessen ersten Ableitungen allein keine allgemeinen Invarianten bilden lassen. Diese Annahme ist nun aber eine ganz *gewaltige Vereinfachung*; denn aus diesen Argumenten q_h, q_{hk}, $g_{\mu\nu}$ kann man *nur 4 allgemeine Invarianten* zusammensetzen, also kann L selbst auch nur eine noch zu bestimmende Funktion dieser 4 Invarianten sein. Diese letzteren wollen wir nun angeben.[157]

[153] See p. 241 above.

[154] See p. 253 above.

[155] See p. 243 above.

[156] *Hilbert 1915*, p. 397, (this Volume, p. 30).

[157] Hilbert, in fact, missed a fifth invariant:

$$Q_3 \equiv \sum_{klmnop} M_{kl} M_{no} q_m q_p g^{kn} g^{mo} g^{lp}.$$

In den Bezeichnungen, die ich in meiner ersten Mitteilung verwendet habe, haben wir[158]

$$Q = \sum_{klmn} M_{mn} M_{lk} g^{mk} g^{nl}. \tag{1}$$

Dabei bezeichnet $M_{lk} = q_{kl} - q_{lk}$ eine Komponente eines schief symmetrischen Tensors, des sogenannten elektromagnetischen Sechservektors. Seinen Komponenten M_{23}, M_{31}, M_{12}, M_{14}, M_{24}, M_{34} entsprechen in der dreidimensionalen Schreibweise bezw. $\mathfrak{H}_x$, $\mathfrak{H}_y$, $\mathfrak{H}_z$, -i$\mathfrak{E}_x$, -i$\mathfrak{E}_y$, -i$\mathfrak{E}_z$, wobei mit $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{E}$ die magnetische und elektrische Feldstärke bezeichnet wurde. In dieser Invariante — und ebenso in den folgenden — kommen *die Ableitungen* der elektrodynamischen Potentiale *nur in den Verbindungen* $q_{kl} - q_{lk}$ vor; dies ist ein ganz *merkwürdiger Umstand*. Die Vektorkomponenten q_h selbst treten in dieser Invariante nicht auf.

$$q = \sum_{kl} q_k q_l g^{kl} \tag{2}$$

170 Dies ist die einzige Invariante, in der keine Ableitungen der| $g_{\mu\nu}$ vorkommen.[159]

$$Q_1 = \sum_{mnkl} M_{mn} M^*_{lk} g^{mk} g^{nl}, \tag{3}$$

wobei mit M^* der zu M *duale Sechservektor* bezeichnet wird, der entsteht, wenn man in M die drei ersten Komponenten der Reihe nach an die Stelle der drei zweiten setzt und umgekehrt die drei zweiten Komponenten an erster Stelle schreibt. Man kann diese Regel dadurch zum Ausdruck bringen, dass man für

$$M^*_{lm} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} G^{\alpha\beta}_{lm} M_{\alpha\beta}$$

schreibt, wobei

$$G^{\alpha\beta}_{lm} = \sum_{\mu\nu} \frac{1}{\sqrt{g}} \delta_{\alpha\beta\mu\nu} g_{\mu l} g_{\mu m}$$

bedeutet. Dabei hat $\delta_{\alpha\beta\mu\nu}$ den Wert $+1$ bezw. -1, je nachdem man von 1234 zu $\alpha\beta\mu\nu$ durch eine gerade oder ungerade Anzahl von Vertauschungen gelangt. Die Invariante 3) gleicht der ersten insofern, als hier wieder nur Ableitungen der q_h, aber nicht diese Grössen selbst auftreten.

$$Q_2 = \sum_{lk} B_k B_l g^{kl}, \qquad \text{wobei der Vektor} \tag{4}$$

$$B_k = \sum_{mn} M^*_{nk} q_m g^{mn}$$

In *Pauli 1921*, §. 64, it is also claimed that there exist only four invariants but, in addition to Q_3, only Hilbert's Q, q, and Q_1 were listed. In the supplementary notes to the English edition of 1958, Pauli pointed out that there exist, in fact, five invariants, and that he had missed the one that Hilbert here calls Q_2 (*Pauli 1958*, p. 223)

[158] Cp. *Hilbert 1915*, p. 407, (this Volume, p. 44 above).

[159] "$g_{\mu\nu}$" should be "q_h".

ist. Dies ist die *einzige Invariante, die sowohl* q_h *als auch* q_{hk} *enthält*. Beide Grössen treten ausserdem in ihr — wie auch in den vorher genannten — quadratisch auf.

§ 84. Wahl der Hamiltonschen Funktion L

Die *Invariante* L muss nun eine Funktion sein, die Q, q, Q_1 und Q_2 als Argumente enthält.[160] Die einfachste Annahme ist nun die, Q_1 und Q_2 überhaupt wegzulassen und L nur aus Q und q zusammenzusetzen. Dann erhält man nämlich aus der Theorie die bekannten Maxwellschen Gleichungen. Diesen Fall werden wir auch unten allein betrachten; doch stellt er meiner Ansicht nach kein Definitivum dar. Vielmehr wird man | wohl, um die durch die 171
Quantentheorie bedingten *an der heutigen Elektrodynamik anzubringenden Abänderungen* aus der Theorie zu erhalten, noch mindestens eine der beiden Invarianten Q_1und Q_2 hinzuziehen müssen. Dazu scheint mir gerade Q_2 besonders gut geeignet, weil in dieser Invariante *gleichzeitig* q_k *und* q_{hk} *auftreten*. Diese Invariante liefert nämlich[161] nur an den Stellen, wo q_h von Null verschieden ist — d. h. in der Nähe von elektrischen Massen — einen merklichen Beitrag zu den Feldgleichungen. Da die Maxwellschen Gleichungen aber gerade in der Nähe solcher elektrischer Massen versagen, so kann man durch die Hinzunahme von Q_2 möglicherweise die gesuchte Verbesserung dieser Gleichungen erzielen.

Wenn man *axiomatisch* festsetzt, dass in L die Ableitungen q_{hk} nur quadratisch vorkommen sollen, so dürfen in L die *Invarianten* Q, Q_1, Q_2[162] nur *linear* auftreten. Einzig die Wahl der Funktion, welche q als Argument enthält, wollen wir noch offen lassen, weil in q keine Ableitungen der q_h vorkommen. Diese Funktion muss späterhin durch Axiome festgelegt werden. Einstweilen schreiben wir also

$$L = aQ + a_1Q_1 + a_2Q_2 + f(q).$$

Die aus dieser Form der Invarianten L sich ergebende Theorie wollen wir nicht weiter verfolgen, sondern machen nun die *vereinfachende Annahme* — die vielleicht *nur für grosse Entfernungen von elektrischen Massen zulässig* ist — $L = aQ + f(q)$. Setzen wir noch $a = -\frac{1}{2}$, so wird die Hamiltonsche Funktion zu

$$H = K - \frac{1}{2}Q + f(q). \tag{25}$$

Unter Benutzung unserer abkürzenden Bezeichnungsweise für Lagrangesche 172

[160] As pointed out in *Pauli 1921*, § 64, the lack of gauge invariance poses a severe problem for Mie’s theory. Of the five possible invariants, only Q and Q_1 are gauge invariant. Moreover, Q_1 is actually a pseudo-scalar and changes sign under parity transformations. Hence, only it’s square would be admissible, see *Pauli 1958*, p. 223.

[161] “nämlich” was corrected from “also”.

[162] “Q, Q_1, Q_2” was corrected from Q, q, Q_1, Q_2”.

Ableitungen erhalten wir dann *die 10 Gravitationsgleichungen*

$$[\sqrt{g}K]_{\mu\nu} + \frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial g^{\mu\nu}} = 0, \qquad (\mu,\nu = 1,2,3,4) \tag{26}$$

und wenn wir die auf S. 110 erwähnte Umformung[163]

$$[\sqrt{g}K]_{\mu\nu} = \sqrt{g}(K_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Kg_{\mu\nu})$$

verwenden, so können wir diese Gleichung auch schreiben

$$K_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Kg_{\mu\nu} = -\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial g^{\mu\nu}}, \qquad (\mu,\nu = 1,2,3,4), \tag{26'}$$

wobei die rechten Seiten noch auszurechnen sind. Dies werden wir erst weiter unten tun. Hierzu kommen nun noch *die 4 verallgemeinerten Maxwellschen Gleichungen*

$$[\sqrt{g}L]_h = 0, \qquad (h = 1,2,3,4). \tag{27}$$

Da zwischen den 14 Gleichungen (26) und (27) 4 Identitäten bestehen, so lassen sich also die 4 Maxwellschen Gleichungen als Folge der 10 Gravitationsgleichungen darstellen, und zwar sind *bei unserer speziellen Wahl der Hamiltonschen Funktion H* die Gleichungen (26) in Bezug auf die 4 Funktionen q_h *Integrale der Gleichungen (27)*. In der Tat enthalten die Gravitationsgleichungen nur die Grössen M_{lk} — d.h. $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ — nicht aber deren Ableitungen, während in den Maxwellschen Gleichungen auch noch diese 4 Ableitungen vorkommen. Man gelangt also von den 4 letzten Gleichungen durch Integration zu den 10 ersten.

§ 85. Die Maxwellschen Gleichungen als Folge für $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$

Wir wollen nun zuerst zeigen, dass *für $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ die Gleichungen (27) in*
173 *die gewöhnlichen Maxwellschen Gleichun|gen übergehen.* Hierauf müssen wir untersuchen, was aus den 10 Gravitationsgleichungen wird, wenn man $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ einsetzt. Da in den Gleichungen (27) nicht nach den $g^{\mu\nu}$ differenziert wird, so dürfen wir von vornherein $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ in dieselben einsetzen. Dann wird

$$Q = -\sum_{kl} M_{kl}^2 \qquad \text{und} \qquad q = \sum_h q_h^2.$$

Lassen wir k nur die Werte $k > l$ durchlaufen, so schreibt sich $L = \sum_{k>l} M_{kl}^2 + f(q)$. Durch Lagrangesche Differentiation nach q_h erhalten wir hieraus

$$\sum_k \frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial L}{\partial q_{hk}} - \frac{\partial L}{\partial q_h} = 0, \qquad (h = 1,2,3,4).$$

[163] See p. 245 above.

Nun ist $\frac{\partial L}{\partial q_{hk}} = \frac{\partial}{\partial q_{hk}} \sum_{m>n} M_{mn}^2 = -2M_{hk}$, also wird $\frac{\partial L}{\partial q_{hk}} = 2M_{kh}$. Hieraus folgt

$$\sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial L}{\partial q_{hk}} = 2 \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} M_{kh} = 2(\mathrm{Div}\, M)_h.$$

Ferner ist $\frac{\partial L}{\partial q_h} = \frac{\partial f}{\partial q_h}$. Setzt man also $\frac{\partial f}{\partial q_h} = -2r_h$, wobei die r_h die *Viererdichte der Elektrizität* sein soll, so werden die Lagrangeschen Gleichungen zu

$$(\mathrm{Div}\, M)_h = -r_h, \qquad (h = 1, 2, 3, 4). \tag{28}$$

Dies ist aber die *eine Gruppe von vier Maxwellschen Gleichungen*, die man so in Worte fassen kann:

„*die Weltdivergenz des elektromagnetischen Sechservektors ist gleich der negativen elektrischen Dichte*."

Nun lautet ein bekannter Satz der Vektoranalysis, den man leicht verifizieren kann, $\mathrm{Div}\,\mathrm{Div}\, M = 0$, also folgt aus (28)

$$\mathrm{Div}\, r = 0. \tag{29}$$

Dies ist die sogenannte *Kontinuitätsgleichung*, d. h. die Bedingung dafür, dass 174
der Vektor r_h eine Dichte sein kann. Diese Bedingung besagt, dass in jedem Raumpunkt so viel Elektrizität hinein- wie hinausströmt.

Bezeichnen wir ferner mit $(\mathrm{curl}\, q)^*$ den zu $\mathrm{curl}\, q$ dualen Vektor, so lautet eine andere Gleichung der Vektoranalysis $\mathrm{Div}(\mathrm{curl}\, q)^* = 0$, also folgt aus (28) noch

$$\mathrm{Div}\, M^* = 0. \tag{30}$$

Dies ist die *die zweite Gruppe von Maxwellschen Gleichungen*.

§ 86. Die Maxwellschen Gleichungen als Ausgangspunkt der Relativitätstheorie

Die Maxwellschen Gleichungen sind bekanntlich der Ausgangspunkt und die *Quelle aller Relativitätstheorie* gewesen; und es ist interessant, sich dieser merkwürdigen historischen Entwicklung zu erinnern, um einzusehen, welch ungeheuren Umweg die Wissenschaft machen musste, um uns den Gedanken der allgemeinen Relativität aufzuzwingen. Zuerst stoppelte Maxwell aus den bekannten elektrodynamischen Gesetzen jene merkwürdigen nach ihm benannten Gleichungen zusammen. Dann brachte man sie auf eine einfachere und durchsichtigere Gestalt, indem man die Zeit als gleichberechtigte Veränderliche neben die drei Raumkoordinaten setzte. Hierauf zeigten Lorentz und Einstein die orthogonale Invarianz dieser Gleichungen, d. h. die Invarianz gegenüber der Lorentztransformation ($g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$). Der nächste Schritt vorwärts war Einsteins *kleine* Relativitätstheorie; und schliesslich sagte sich Einstein

„wenn schon, denn schon“, und schuf so seine *grosse* Relativitätstheorie. Hand in Hand damit gingen Experimente, deren Bedeutung von den | Experimenta- 175
toren selbst gar nicht erkannt wurde; denn sie sahen nicht, dass diese Experimente dazu *zwingen*, das allgemeine Relativitätsprinzip anzuerkennen. — Die experimentellen Untersuchungen wiederum wurden erst dadurch ermöglicht, dass man lernte, bessere Glasplatten zu schleifen.

§ 87. Der Energietensor $T_{\mu\nu}$

Was wird nun aus den 10 Gravitationsgleichungen (26), *wenn man in dieselben* $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ *einsetzt?* Da wir jetzt nach den $g^{\mu\nu}$ differenzieren, so müssen wir zuerst $\frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial g^{\mu\nu}}$ berechnen und dürfen erst danach den $g_{\mu\nu}$ die speziellen Werte $\delta_{\mu\nu}$ erteilen. Durch einfaches Ausrechnen erhalten wir die Identität[164]

$$\sum_{\mu} \frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial g^{\mu\nu}} g^{\mu\sigma} = L\delta_{\nu}^{\sigma} - \sum_{k} \frac{\partial L}{\partial M_{\sigma k}} M_{\nu k} - \frac{\partial L}{\partial q_{\sigma}} q_{\nu}.$$

Nun setzen wir $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$, dann geht dieselbe[165] über in

$$\left(\frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial g^{\nu\sigma}}\right)_{g_{\mu\nu}=\delta_{\mu\nu}} = \left(-\frac{1}{2}Q + f\right)\delta_{\nu\sigma} - 2\sum_{k} M_{\sigma k} M_{\nu k} - \frac{\partial f}{\partial q_{\sigma}} q_{\nu},$$

also erhalten wir für die rechte Seite von (26) auch[166]

$$\left(\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial g^{\nu\sigma}}\right)_{g_{\mu\nu}=\delta_{\mu\nu}} = \left(-\frac{1}{2}Q + f\right)\delta_{\nu\sigma} - 2\sum_{k} M_{\sigma k} M_{\nu k} - \frac{\partial f}{\partial q_{\sigma}} q_{\nu}. \tag{31}$$

Rechter Hand steht aber nichts anderes als *der bekannte Sechzehnertensor der alten Elektrodynamik*, dessen Komponenten die *Maxwellschen Spannungen* und *der Poyntingsche Vektor* bilden.

Wir werden nun den *Tensor*

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial g^{\mu\nu}} = T_{\mu\nu} \tag{32}$$

immer als Energie ansprechen, wenn auch $g_{\mu\nu} \neq \delta_{\mu\nu}$ ist; doch werden wir die Berechtigung dieser Annahme erst weiter unten bei der Besprechung des Impulsenergiesatzes einsehen können.

176 Unsere 10 Gravitationsgleichungen (26) haben mithin | für allgemeine $g_{\mu\nu}$ folgende *merkwürdige Gestalt und Bedeutung*

$$K_{\mu\nu} - \frac{1}{2}K g_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}, \tag{33}$$

in Worten:

[164] “Identität” was corrected from “Intensität”.

[165] “dieselbe” was corrected from “die linke Seite”.

[166] “(26)” should be “(26’)”; “auch” was added.

$$\textit{Krümmungstensor } -\tfrac{1}{2}K g_{\mu\nu} = \textit{Energietensor}.$$

Einstein drückt dies auch so aus: Die Gleichungen (33) besagen, dass die drei Begriffe *Energie*, *träge Masse* und *schwere Masse ein und dasselbe* sind.

Es ist durchaus bemerkenswert, dass sich der Energietensor so verblüffend einfach aus dem zweiten Term L der Hamiltonschen Funktion ergibt als $\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial g^{\mu\nu}}$. Man ersieht aus dieser Form sofort, dass die Energie ein symmetrischer Tensor ist — es ist ja $g^{\mu\nu} = g^{\nu\mu}$ —, während dies in der alten Elektrodynamik, in der man keine $g^{\mu\nu}$ kennt und also auch nicht danach differenzieren kann, mühsam bewiesen wird und als ein merkwürdiger Satz gilt, aus dem dann folgt, dass die Energie träge Masse besitzt. Hier erscheint die Energie direkt als Gegenstück zum Gravitationspotential: *Die Ableitungen von $\sqrt{g}L$ nach den Gravitationspotentialen geben den Energietensor $T_{\mu\nu}$*, gewiss eine wunderbar sich ineinander kettende Tatsachenreihe.

Multiplizieren wir die Gleichungen (33) mit bez. $g^{\mu\nu}$ und summieren über μ und ν, so erhalten wir linker Hand (siehe S. 110)[167] $-K$ und rechter Hand $\sum_{\mu\nu} g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} = T$. Also kann man diese Gleichungen auch so schreiben, dass linker Hand nur der Krümmungstensor steht[168]

$$K_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}T g_{\mu\nu}. \tag{33'}$$

177

§ 88. Die alte Elektrodynamik folgt nicht aus der neuen Theorie für $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$

Nun müssen wir auf unsere Frage zurückkommen: Was wird aus den Gravitationsgleichungen, wenn man in dieselben für $g_{\mu\nu}$ die Werte $\delta_{\mu\nu}$ und für q_h irgend ein Lösungssystem der Maxwellschen Gleichungen einsetzt. Wir ersehen sofort: Es wird

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial g^{\mu\nu}} = 0,$$

d. h. *es muss der Energietensor verschwinden, damit die Gravitationsgleichungen erfüllt sind*. Dann dürfen aber die q_h nicht irgend welche Lösungen der Maxwellschen Gleichungen sein, wir müssen vielmehr — damit die Welt von Energie frei ist — die trivialen Lösungen der Maxwellschen Gleichungen $q_h = 0$ wählen. Mit diesen müssen wir in die Gravitationsgleichungen eingehen, damit dieselben durch $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ zu erfüllen sind.

Wir erhalten also das *scheinbar paradoxe Resultat*, das *die alte Elektrodynamik für $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ nicht als Grenzfall aus der neuen* entspringt. Tatsächlich

[167] See p. 245 above.

[168] In the following form, the gravitational field equations were presented by Einstein when he published them for the first time, see *Einstein 1915d*.

ist dieses Ergebnis aber im besten Einklang mit unserer Theorie; denn wir ersehen daraus, dass die Anwesenheit von Materie — d. h. $q_h \neq 0$ — immer ein Abweichen der Massbestimmung von derjenigen der Pseudoeuklidischen Geometrie bedingt. Dies ist aber gerade eine notwendige Ergänzung der Antwort, die wir auf die auf S. 109 aufgeworfene Frage:[169] Gilt die Euklidische Geometrie in der Physik? gaben. Wir konnten zeigen, dass diese Geometrie unter der Voraussetzung $q_h = 0$ und unter gewissen einschränkenden Voraussetzungen für die $g_{\mu\nu}$ (siehe S. 113)[170] tatsächlich gilt. Nunmehr sehen wir, dass die Annahme $q_h = 0$ durchaus notwendig war.

178 ## § 89. Näherungsweise Integration

Um ein Lösungssystem der 14 physikalischen Grundgleichungen zu erhalten, in welchen die q_h von Null verschiedene Werte haben, dürfen wir den $g_{\mu\nu}$ nicht *genau* die Werte $\delta_{\mu\nu}$ erteilen; doch können die $g_{\mu\nu}$ noch immer *angenähert* diese Werte annehmen, wie wir ersehen, wenn wir nun

die angenäherte Integration der Feldgleichungen

behandeln. Dazu haben wir nur eine *kleine Modifikation in unserem Ansatz* der Hamiltonschen Funktion anzubringen oder besser: Wir haben eine andere Auffassung zum Ausdruck zu bringen. Wir ersetzen nämlich L durch ϵL, so dass

$$H = K + \epsilon L \tag{34}$$

wird. Den Parameter ϵ denken wir uns klein, damit wir die Lösungen der Differentialgleichungen nach steigenden Potenzen desselben entwickeln können. Dieser Ansatz ist durchaus *keine Einschränkung der Allgemeinheit*; durch denselben bringen wir vielmehr zum Ausdruck, dass wir eine bestimmte Integrationsmethode anwenden wollen. Dass wir damit das Richtige getroffen haben, wird der Erfolg lehren.

Wir setzen nun die Lösungen $g_{\mu\nu}$ und q_h in der Form an

$$g_{\mu\nu} = g^{(0)}_{\mu\nu} + \epsilon g^{(1)}_{\mu\nu} + \epsilon^2 g^{(2)}_{\mu\nu} + \cdots, \qquad q_h = q^{(0)}_h + \epsilon q^{(1)}_h + \epsilon^2 q^{(2)}_h + \cdots.$$

Für $\epsilon = 0$ haben wir nur die 10 Gleichungen

$$[\sqrt{g}K]_{\mu\nu} = 0$$

zu erfüllen. Ein Lösungssystem derselben — vielleicht sogar das einzige, wenn wir absolute Regularität verlangen — ist $\delta_{\mu\nu}$. Wir haben daher für $g_{\mu\nu}$ die Entwicklung

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \epsilon h_{\mu\nu} + \epsilon^2 g^{(2)}_{\mu\nu} + \cdots,$$

179 in welcher der Koeffizient von ϵ, den wir auch noch berechnen wollen, zur Abkürzung mit $h_{\mu\nu}$ bezeichnet wurde. Jedes physikalische Problem läuft jetzt darauf hinaus, die weiteren Glieder in dieser Reihe sowie in derjenigen für q_h zu finden. *Setzen wir also den Koeffizienten von ϵ gleich Null*, so erhalten wir aus den 4 elektrodynamischen Gleichungen für das Verschwinden dieses Koeffizienten die 4 Bedingungsgleichungen

$$([\sqrt{g}L]_h)_{g_{\mu\nu}=\delta_{\mu\nu}} = 0, \qquad (h = 1, 2, 3, 4). \tag{35}$$

Dies sind aber, wie wir eben gesehen haben, *genau die alten Maxwellschen Gleichungen*.[171]

Wir bezeichnen ein Lösungssystem derselben mit $q_h^{(0)}$. Dieses haben wir nun einzusetzen in die *erste Näherung der Gravitationsgleichungen*, die durch Nullsetzen des Koeffizienten von ϵ entsteht, dann lauten dieselben

$$\left\{([\sqrt{g}K]_{\mu\nu})_{g_{\mu\nu}=\delta_{\mu\nu}+\epsilon h_{\mu\nu}}\right\}_{(\epsilon^1)} = -\left(\frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial g^{\mu\nu}}\right)_{g_{\mu\nu}=\delta_{\mu\nu}}. \tag{36}$$

Hierbei ist linker Hand, weil K — im Gegensatz zu L — nicht mit ϵ multipliziert ist, für $g_{\mu\nu}$ die *erste Annäherung* $\delta_{\mu\nu} + \epsilon h_{\mu\nu}$ einzusetzen und dann sind die Glieder mit ϵ zu sammeln, während rechter Hand die *nullte Annäherung* $\delta_{\mu\nu}$ schon den Koeffizienten von ϵ liefert. Rechts steht jetzt schon wieder der Energietensor der alten Elektrodynamik. Aber da derselbe nicht verschwinden muss, ist alles in bester Ordnung; und die 14 Gleichungen haben durch diese Entwicklung nach steigenden Potenzen von ϵ ein ganz anderes Aussehen bekommen.

Unsere Gravitationstheorie steht also | durchaus *nicht im Widerspruch zur* 180 *alten Physik*. Sie ist vielmehr ein *Schlüssel zum Verständnis* der letzteren; insbesondere wird die Bedeutung der Energie erst jetzt durchsichtig. Die 10 Gravitationsgleichungen[172] und die 4 elektrodynamischen Gleichungen geben in nullter[173] Näherung genau die Erfahrungstatsachen wieder, nämlich: Die *Pseudoeuklidische Geometrie und die gewöhnlichen Maxwellschen Gleichungen*. Es erscheint also hier die Pseudoeuklidische Geometrie als eine Annäherung an die wirkliche Physik, und dies ist es gerade, was die Entwicklung nach ϵ so schön und elegant macht. Man kann diese Integrationsmethode recht eigentlich als die „*Erschaffung der Welt aus dem Nichts*“ bezeichnen; denn das Nichts — d. h. $\epsilon = 0$ — ist nach unserer Auffassung eben die Pseudoeuklidische Geometrie.

---

[169] See p. 244 above.

[170] See p. 247 above.

[171] Strictly speaking, Hilbert's assertion is true only for $f(q) \equiv 0$.

[172] Deleted: “geben in nullter”.

[173] “nullter” was corrected from “erster”.

§ 90. Die erste Annäherung

Um die Gleichungen (36) weiter zu behandeln, stützen wir uns auf Rechnungen, die Einstein (Näherungsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation, Sitzungsber. d. Preuss. Akad. d. Wiss. (32) 1916 S. 688ff)[174] durchgeführt hat. Wir setzen mit Einstein

$$h_{\mu\nu} = k_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}\sum_s k_{ss}, \tag{37}$$

wobei $k_{\mu\nu} = k_{\nu\mu}$ sein soll. Einstein nimmt weiter an, dass die $k_{\mu\nu}$ den vier Bedingungen

$$\sum_s \frac{\partial}{\partial x_s} k_{\mu s} \qquad (\mu = 1, 2, 3, 4) \tag{38}$$

genügen mögen. Dies involviert natürlich auch *vier Bedingungen für die Funktionen $h_{\mu\nu}$*. Man kann aber den Beweis erbringen, dass diese Bedingungen
181 keine Einschränkung der Allgemein|heit bedeuten (Hilbert, Die Grundlagen der Physik, 2 Mitteil. Gött.Nachr. 1916).[175] Es lässt sich nämlich durch eine *infinitesimale Transformation*

$$x'_s = x_s + \varepsilon\varphi_s(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

— wobei das ε wieder jenes ist, nach welchem wir entwickeln — immer erzwingen, dass bei geeigneter Wahl der vier willkürlichen Funktionen φ_s die neuen $k'_{\mu\nu}$ die vier Bedingungen (38) erfüllen. Sind aber diese vier Gleichungen erfüllt, so erhält man nach Einstein (a.a.O.)

$$(K_{\mu\nu})_{g_{\mu\nu}=\delta_{\mu\nu}+\varepsilon h_{\mu\nu}} \equiv \varepsilon\Box(k_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}\sum_s k_{ss}), \quad (\varepsilon^2)$$

wobei $\Box = \sum_\iota \frac{\partial^2}{\partial x_\iota^2}$ bedeutet und wobei nach der in der Zahlentheorie üblichen Schreibweise mit $\equiv$, (ε^2) gemeint ist, dass nur Glieder mit ε^1 berücksichtigt sind. Diesen Ausdruck setzen wir in die Gravitationsgleichungen in der Gestalt (33') ein. In denselben schreiben wir noch für

$$T_{\mu\nu} = \varepsilon t_{\mu\nu} + \varepsilon^2 t^{(2)}_{\mu\nu} + \dots.$$

Hierin ist also, wie man aus (31) und (32) ersieht, $t_{\mu\nu}$ der Energietensor der alten Elektrodynamik. Wir erhalten nun als Koeffizient von ε

$$\Box\left(k_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}\sum_s k_{ss}\right) = t_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}\sum_s t_{ss}. \tag{39}$$

[174] *Einstein 1916b*.

[175] *Hilbert 1917*, pp. 65–66, (this Volume, pp. 59–61 above).

Setzt man hierin $\mu = \nu$ und summiert über μ, so wird

$$\square \left(\sum_\mu k_{\mu\mu} - 2 \sum_s k_{ss} \right) = \sum_\mu t_{\mu\mu} - 2 \sum_s t_{ss}$$

oder

$$\square \sum_\mu k_{\mu\mu} = \sum_\mu t_{\mu\mu}.$$

Unter Benutzung dieser Relation *schreibt sich (39) in der Form*

$$\square k_{\mu\nu} = t_{\mu\nu}, \qquad (\mu, \nu = 1, 2, 3, 4). \tag{40}$$

Sind die $q_s^{(0)}$ aus (35) gefunden, so kann man aus | (31) die rechten Seiten von 182
(40) berechnen. Aus diesen Gleichungen entnimmt man dann die $k_{\mu\nu}\langle,\rangle$ hierauf aus (37) die $h_{\mu\nu}$ und erhält so *in erster Näherung die Gravitationspotentiale*

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \varepsilon h_{\mu\nu}.$$

§ 91. Das Wesen der Gravitation

Die Gleichungen (40) liefern uns *wichtige Aufschlüsse über das Wesen der Gravitation*. In der Bezeichnungsweise der Potentialtheorie schreiben sich dieselben als

$$\Delta k_{\mu\nu} - \frac{\partial^2 k_{\mu\nu}}{\partial t^2} = t_{\mu\nu}. \tag{41}$$

Dies ist aber nichts anderes als die bekannte *Schwingungsgleichung* der Elektrodynamik. Als Integral derselben erhalten wir das *retardierte Potential*

$$k_{\mu\nu}(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{t_{\mu\nu}(\xi, \eta, \zeta, t - r)}{r} d\xi d\eta d\zeta, \tag{42}$$

wobei $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (x-\zeta)^2}$ bedeutet und über alle Stellen des Raumes zu integrieren ist, an denen $t_{\mu\nu} \neq 0$ ist. Nun kann man aber *alle Schlüsse, die in der Optik* an diese Differentialgleichung *geknüpft werden*, in dieser Näherung auch *auf die Gravitation übertragen*, insbesondere: Die *Gravitation pflanzt sich in Wellen fort*, die sich in erster Näherung geradlinig und gleichförmig mit Lichtgeschwindigkeit bewegen.

Dies ist aber die Beantwortung einer alten Frage von fundamentaler Bedeutung. Früher hatte man die Vorstellung, dass sich die Gravitation unendlich rasch fortpflanze. Als dann das kleine Relativitätsprinzip aufkam, geriet man mit dieser Ansicht auf Widersprüche gegen das Kausalitätsprinzip. Dann
nahm man an, dass sich die Gravitation mit Lichtgeschwindigkeit | fortpflan- 183
ze, aber dies war nichts weiter als eine leere Festsetzung, bis die neue Theorie über den Zusammenhang zwischen Licht und Gravitation Aufschluss gab.

Die der Gleichung (40) entsprechende Gleichung der Elektrodynamik ist bekanntlich

$$\Box q_s = -r_s$$

mit dem Integral

$$q_s = -\frac{1}{4\pi}\iiint \frac{r_s(\xi,\eta,\zeta,t-r)}{r} d\xi d\eta d\zeta,$$

wobei r_s die elektrische Viererdichte ist. *In der Einsteinschen Gravitationsgleichung* (40) steht also die elektromagnetische Energie an Stelle der elektrischen Dichte.

§ 92. Elektronentheorie

Um die *Elektronentheorie* aus unserer allgemeinen Theorie der Materie zu erschliessen, muss man in den Näherungen der Differentialgleichungen einen Schritt weitergehen. Um z. B. eine statische, um einen Punkt *symmetrische Elektrizitätsverteilung* zu erhalten, hat man

$$r_1 = 0, \quad r_2 = 0, \quad r_3 = 0, \quad r_4 = \varphi(r)$$

zu setzen. Nun hatten wir aber[176]

$$\frac{\partial f}{\partial q_s} = -2r_s,$$

also folgt für $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$

$$q_1 = 0, \quad q_2 = 0, \quad q_3 = 0.$$

Eine solche Lösung der elektrodynamischen Gleichung bedeutet, *dass die ganze Welt aus einem einzigen, dauernd ruhenden Elektron besteht*. Diese Untersuchung führt in erster Näherung auf die sehr schönen und interessanten Resultate von Mie (Ann.d.Phys 1912 (37) S.511, (39) S.1, 1913 (40) S.1).[177]

184
§ 93. Hamiltonsches Prinzip in der Mechanik

Als Abschluss dieses Kollegs wollen wir

einige Betrachtungen über den Impuls-Energiesatz

[176] See p. 291 above.

[177] *Mie 1912a*; *Mie 1912b*; *Mie 1913*. For English translations of these papers, see *Renn and Schemmel 2007a*; for historical discussion of Mie's theory and Hilbert's reception of it, see *Kohl 2000*, *Corry 2004*, ch. 6, and *Smeenk and Martin 2007*.

anstellen und zwar möchte ich Ihnen eine besondere einfache Ableitung dieses mit dem Hamiltonschen Prinzip aufs engste zusammenhängenden Satzes geben.

Um die leitende Idee, die unseren Betrachtungen zu Grunde liegt, zu erfassen, machen wir uns die Verhältnisse erst an einem *besonders einfachen Hamiltonschen Prinzip*, nämlich an demjenigen, aus welchem in der Mechanik die *Gesetze der Bewegung eines Massenpunktes* in einem Kraftfeld abgeleitet werden. Bezeichnet man mit T die kinetische Energie und mit U die potentielle Energie des Massenpunktes und setzt $H = T - U$, so lautet dieses Hamiltonsche Prinzip

$$\delta \int H dt = 0, \tag{43}$$

wobei t die Zeit bedeutet. Hierin ist U eine beliebige Funktion von x, y, z allein und T eine Funktion von x, y, z ausserdem eine homogene quadratische Funktion von $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, sodass H eine Funktion der 6 Argumente x, y, z, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ wird. *Der Parameter t tritt also unter dem Integral nicht explizit auf*, sondern nur die Ableitungen von x, y, z nach diesem Parameter. Eine solche nicht explizit vorkommende Variable heisst nach Helmholtz eine *zyklische Koordinate*.[178]

Bekanntlich ist nun *ein Integral* dieses Hamiltonschen Prinzip (43) *die Gesamtenergie*

$$T + U = \text{const.}$$

Dies liegt aber gerade an dem Auftreten einer zyklischen Koor|dinate. Allge- 185
mein gilt folgender leicht zu verifizierende

Satz : Enthält die Funktion H unter dem Integralzeichen des Hamiltonschen Prinzips die angegebenen Argumente, so bilde man die sogenannte *Legendresche Funktion*

$$F = H - \dot{x}\frac{\partial H}{\partial \dot{x}} - \dot{y}\frac{\partial H}{\partial \dot{y}} - \dot{z}\frac{\partial H}{\partial \dot{z}}; \qquad \left(\dot{x} = \frac{dx}{dt} \quad \text{u. s. w.}\right)$$

dann ist die Gleichung

$$\frac{d}{dt}F = 0$$

eine Folge der drei aus dem Variationsprinzip fliessenden *Lagrangeschen Differentialgleichungen*. Hieraus folgt nun $F = \text{const.}$ Da T eine homogene quadratische Funktion von $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ ist und U diese Variabelen überhaupt nicht enthält, so ist

$$\dot{x}\frac{\partial H}{\partial \dot{x}} + \dot{y}\frac{\partial H}{\partial \dot{y}} + \dot{z}\frac{\partial H}{\partial \dot{z}} = 2T, \quad \text{also wird} \quad F = T - U - 2T$$

oder

$$T + U = \text{const.} \qquad \text{w. z. b. w.}$$

[178] See *Helmholtz 1884a*, *Helmholtz 1884b*, see also *Hertz 1894*, §§ 546ff, and *Boltzmann 1904*, ch. IV. For a historical discussion of the notion of cyclic coordinates, see *Lützen 2005*, ch. 18.

§ 94. Die 4 Impulsenergiesätze der Physik

In der Physik liegen nun die Verhältnisse viel komplizierter; denn hier steht im Hamiltonschen Prinzip ein vierfaches Integral und die Funktion unter dem Integralzeichen enthält *die 4 zyklischen Koordinaten* x, y, z, t bez. x_1, x_2, x_3, x_4. Diese 4 Parameter treten in der Hamiltonschen Funktion nicht explizit auf, weil

die physikalischen Gesetze von Ort und Zeit unabhängig sind. In der Tat würde im entgegengesetzten Fall die Hamiltonsche Funktion in jedem Weltpunkt eine andere sein und infolgedessen wären die 14 das physikalische Geschehen bestimmenden Lagrangeschen Differentialgleichungen an jedem Ort und zu jeder Zeit verschiedene. Entsprechend den 4 zyklischen Koordinaten erhalten
186 wir auch 4 Differentialgleichungen an Stelle | der einen Gleichung (44). *Diese 4 Gleichungen können wir als unmittelbaren Ausdruck dafür ansehen, dass das physikalische Geschehen in jedem Weltpunkt denselben Gesetzen zu gehorchen hat.* Die Gleichungen haben — wie wir sehen werden — *Divergenzform* und lassen sich infolgedessen auch nicht so einfach integrieren wie (44).

§ 95. Abspalten eines Divergenzausdrucks

Um diese 4 Differentialgleichungen abzuleiten, hatte man früher komplizierte Rechnungen nötig. Auch wir werden jetzt bei der Ableitung derselben nicht ohne ein gewisses Mass von Rechnung auskommen; doch ist der Weg, den wir einschlagen klar und durchsichtig und entbehrt nie eines bestimmten leitenden Gedankens.

Wir gehen aus vom *Variationsprinzip*

$$\delta \iiiint (K+L)\sqrt{g}\, dW = 0. \tag{45}$$

Dasselbe *können wir* nun — freilich auf Kosten der allgemeinen Invarianz — *beträchtlich vereinfachen*. Da wir nämlich wissen, dass die zweiten Ableitungen $g^{\mu\nu}_{hk}$ der $g^{\mu\nu}$ in L gar nicht und in H nur *linear* auftreten, so können wir folgende *Umformung* vornehmen: Wie man aus Formel (2) S. 110 entnimmt,[179] stammen die Glieder $g^{\mu\nu}_{hk}$ in $K\sqrt{g}$ aus den beiden Ausdrücken

$$\Phi = \sum_{\mu\nu\lambda} \sqrt{g}\, g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\lambda} \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \lambda \end{matrix} \right\} \qquad \text{und} \quad \psi = \sum_{\mu\nu\lambda} \sqrt{g}\, g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left\{ \begin{matrix} \mu\lambda \\ \lambda \end{matrix} \right\}.$$

Durch partielle Integration erhalten wir z. B. für Φ folgende Umformung

$$\Phi = \sum_{\lambda} \frac{\partial}{\partial x_\lambda} \left(\sqrt{g} \sum_{\mu\nu} g^{\mu\nu} \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \lambda \end{matrix} \right\} \right) - \sum_{\mu\nu\lambda} \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \lambda \end{matrix} \right\} \frac{\partial}{\partial x_\lambda} \left(\sqrt{g}\, g^{\mu\nu} \right).$$

[179] See p. 245 above.

Das erste Glied rechter Hand ist ein Ausdruck von *Divergenzcharakter*; einen solchen bezeichnen wir abgekürzt mit Div. | Dieselbe Umformung führen wir 187
auch mit ψ durch. Den beiden zweiten Gliedern in Φ und ψ kann man noch unter Benutzung von Formeln, die sich bei Einstein (Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie, Sonderabdr⟨uck⟩ a. d. Ann. d. Phys. 1916, S. 35)[180] finden, eine andere Gestalt geben und zwar erhält man wiederum nach Einstein (Hamiltonsches Prinzip und allgemeine Relativitätstheorie, Sitzungsber. d. Preuss. Akad. d. Wiss. 1916, (42) S. 1113)[181]

$$K\sqrt{g} = \sqrt{g}\sum_{\mu\nu\alpha\beta} g^{\mu\nu}\left[\left\{ {\mu\alpha \atop \beta} \right\}\left\{ {\beta\nu \atop \alpha} \right\} - \left\{ {\mu\nu \atop \alpha} \right\}\left\{ {\alpha\beta \atop \beta} \right\}\right] + \mathrm{Div}\,.$$

Wir bezeichnen

$$\mathfrak{K} = \sqrt{g}\sum_{\mu\nu\alpha\beta} g^{\mu\nu}\left[\left\{ {\mu\alpha \atop \beta} \right\}\left\{ {\beta\nu \atop \alpha} \right\} - \left\{ {\mu\nu \atop \alpha} \right\}\left\{ {\alpha\beta \atop \beta} \right\}\right]. \tag{46}$$

$\mathfrak{K}$ ist also ein homogener quadratischer Ausdruck in den $g^{\mu\nu}_h$ in gewisser Analogie z. B. zum Dirichletschen Integral oder zum Hamiltonschen Prinzip (43) der Mechanik, in welchen beiden die Grössen $\frac{dx_i}{dt}$ quadratisch auftreten.
Da wir von $K\sqrt{g}$ einen Ausdruck von Divergenzcharakter angespalten[182] haben, um $\mathfrak{K}$ zu erhalten, so ist $\frac{\mathfrak{K}}{\sqrt{g}}$ *keine allgemeine Invariante*. Dagegen kann man zeigen, dass $\frac{\mathfrak{K}}{\sqrt{g}}$ eine *projektive Invariante* der Koordinaten x_s ist; d. h. es ist zwar durch Weglassen des Ausdrucks Div die allgemeine, aber nicht die projektive Invarianz von K zerstört worden. Wir bezeichnen noch

$$\mathfrak{L} = L\sqrt{g}; \tag{46'}$$

dann schreibt sich also das Hamiltonsche Prinzip (45) in der Form

$$\delta\iiiint(\mathfrak{K} + \mathfrak{L} + Div)\,dW. \tag{47}$$

§ 96. Infinitesimale Transformation 188

Nun machen wir Gebrauch von der Tatsache, dass die Variablen x_s unter dem Integral (47) nicht explizit auftreten und zwar führen wir

eine infinitesimale Transformation

[180] *Einstein 1916a.*
[181] *Einstein 1916c*, p. 1113.
[182] "angespalten" should be "abgespalten".

an dem Integral

$$\iiiint K\sqrt{g}\,dW = \iiiint \mathfrak{K}\,dW + \iiiint Div\,dW \tag{48}$$

durch, indem wir

$$x_s \quad \text{durch} \quad x_s + \Delta x_s$$

ersetzen. Hierin bedeutet $\Delta x_s = \epsilon\varphi_s(x_1, x_2, x_3, x_4)$ eine Funktion von x_1, x_2, x_3, x_4, die nur sehr kleine Werte annimmt. Diese Transformation wird uns fast ohne Rechnung einige *sehr merkwürdige identische Gleichungen* erschliessen. Berechnen wir jetzt das Integral (48) für die transformierten Variablen und subtrahieren davon dieselbe Gleichung, gebildet für die ursprünglichen Veränderlichen, so wird die linke Seite gleich Null, weil hier die allgemeine Invariante $K\sqrt{g}\,dW$ steht, deren Wert ja bei der Transformation ungeändert bleibt. Auf der rechten Seite kann das vierfache Integral

$$\iiiint \text{Div}\ dW$$

mit Hilfe des *Gauss'schen Satzes* in ein dreifaches, genommen über die dreidimensionale Begrenzung des vierdimensionalen Weltstückes umgeformt werden. Betrachtet man nun nur solche Funktionen Δx_s, die auf dieser Begrenzung verschwinden, so ändert auch $\iiiint$ Div dW durch die Transformation seinen Wert nicht und hebt sich nach Subtraktion der beiden Gleichungen (48) von-
189 einander weg. Also folgt |

$$\Delta \iiiint \mathfrak{K}\,dW = \Delta \iiiint \left(\frac{\mathfrak{K}}{\sqrt{g}}\right)\sqrt{g}\,dW = 0, \tag{49}$$

wobei das Δ vor dem Integralzeichen bedeutet, dass die Differenz der Werte des Integrals $\iiiint \mathfrak{K}\,dW$ nach und vor der Transformation zu nehmen ist. Man bemerke übrigens, dass die Gleichung (49) gefunden wurde, *ohne dass vom Hamiltonschen Prinzip irgend wie Gebrauch gemacht wurde*. Nun ist $\sqrt{g}\,dW$ eine allgemeine Invariante, also wird $\Delta\sqrt{g}\,dW = 0$ und daher kann man (49) in der Form

$$\iiiint \left(\Delta\frac{\mathfrak{K}}{\sqrt{g}}\right)\sqrt{g}\,dW = 0 \tag{49'}$$

schreiben.

Um diese Gleichung weiter zu behandeln, müssen wir untersuchen, wie sich die Funktionen $g^{\mu\nu}$ ändern, wenn x_s durch $x_s + \Delta x_s$ ersetzt wird. Aus dem Transformationsgesetz der $g^{\mu\nu}$ bei allgemeinen Transformationen findet man in diesem Spezialfall (Einstein, Hamiltonsches Prinzip usw. a.a.O. S. 1114)[183]

$$\Delta g^{\mu\nu} = \sum_\alpha \left(g^{\mu\alpha}\frac{\partial\Delta x_\nu}{\partial x_\alpha} + g^{\nu\alpha}\frac{\partial\Delta x_\mu}{\partial x_\alpha}\right).$$

[183] The following equations are the same as *Einstein 1916c*, eqs. (11), (12).

Ebenso ergibt sich

$$\Delta g_\sigma^{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\sigma}(\Delta g^{\mu\nu}) - \sum_\alpha g_\alpha^{\mu\nu} \frac{\partial \Delta x_\alpha}{\partial x_\sigma}.$$

Nun können wir $\Delta \frac{\mathfrak{K}}{\sqrt{g}}$ berechnen und zwar erhalten wir, wenn wir die Glieder zusammenfassen, je nachdem sie $\frac{\partial \Delta x_\sigma}{\partial x_\nu}$ oder $\frac{\partial^2 \Delta x_\sigma}{\partial x_\nu \partial x_\alpha}$ als Faktor enthalten, für alle Variationen und nicht nur für solche, die auf der Begrenzung verschwinden,

$$\Delta\left(\frac{\mathfrak{K}}{\sqrt{g}}\right) = \frac{1}{\sqrt{g}}\left\{\sum_{\sigma\nu} T_\sigma^\nu \frac{\partial \Delta x_\sigma}{\partial x_\nu} + 2\sum_{\mu\nu\alpha\sigma} \frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial g_\alpha^{\mu\sigma}} g^{\mu\nu} \frac{\partial^2 \Delta x_\sigma}{\partial x_\nu \partial x_\alpha}\right\}, \tag{50}$$

wobei zur Abkürzung

$$T_\sigma^\nu = 2\sum_\mu \frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial g^{\mu\sigma}} g^{\mu\nu} + 2\sum_{\mu\alpha} \frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial g_\alpha^{\mu\sigma}} g_\alpha^{\mu\nu} + \mathfrak{K}\delta_\sigma^\nu - \sum_{\mu\alpha} \frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial g_\nu^{\mu\alpha}} g_\sigma^{\mu\alpha} \tag{51}$$

gesetzt ist. Man sieht leicht, dass T_σ^ν in den $g_\alpha^{\mu\nu}$ homogen quadratisch ist. 190
Jetzt machen wir von der Eigenschaft Gebrauch, dass $\frac{\mathfrak{K}}{\sqrt{g}}$ eine projektive Invariante ist. Bei einer *linearen* infinitesimalen Transformation wird also die linke Seite von (50) zu Null. Auf der rechten Seite fallen die Glieder mit $\frac{\partial^2 \Delta x_\sigma}{\partial x_\nu \partial x_\alpha}$ weg und *es folgt*

$$T_\sigma^\nu = 0, \qquad (\sigma, \nu = 1, 2, 3, 4). \tag{52}$$

Diesen *16 Identitäten* muss also der Ausdruck $\mathfrak{K}$ genügen. Wir haben dieselben durch rein gedankliche Überlegungen mit einem Minimum von Rechnung gefunden. Vom Hamiltonschen Prinzip ist auch dabei noch nicht die Rede gewesen.

Infolge dieser Gleichungen kommen für beliebige Δx_s in (50) nur die Glieder mit $\frac{\partial^2 \Delta x_\sigma}{\partial x_\nu \partial x_\alpha}$ vor; und für alle Variationen, die auf dem Rande verschwinden, wird aus (49')

$$\iiiint \sum_{\mu\nu\alpha\sigma} g^{\mu\nu} \frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial g_\alpha^{\mu\sigma}} \frac{\partial^2 \Delta x_\sigma}{\partial x_\nu \partial x_\alpha} dW = 0. \tag{53}$$

Nun formen wir den Ausdruck unter dem Integralzeichen, – wie immer in der Variationsrechnung in solchen Fällen – durch *zweimalige partielle Integration* um und erhalten, weil Δx_s im übrigen noch beliebig wählbar ist

$$\sum_{\mu\nu\alpha} \frac{\partial^2}{\partial x_\nu \partial x_\alpha}\left(g^{\mu\nu} \frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial g_\alpha^{\mu\sigma}}\right) = 0, \qquad (\sigma = 1, 2, 3, 4). \tag{54}$$

Dies sind *4 weitere Identitäten*, welche $\mathfrak{K}$ erfüllen muss und die man auch durch blosses Ausrechnen hätte finden können. Dieselben sind *eine direkte Folge davon, dass die Variablen x_s in $\mathfrak{K}$ nicht explizit auftreten.* Wir hätten die Rechnung übrigens noch kürzer gestalten können, wenn wir nur diese 4
Gleichungen, nicht aber die 16 Gleichungen (52) hätten finden wollen, von 191
welchen wir unten noch Gebrauch zu machen haben.

§ 97. Der Energietensor S^ν_σ

Nun führen wir den folgenden Tensor

$$S^\nu_\sigma = \sum_{\mu\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(g^{\mu\nu}\frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial g^{\mu\sigma}_\alpha}\right) \tag{55}$$

ein. Mit dessen Hilfe lassen sich die Gleichungen (54) schreiben als

$$\sum_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} S^\nu_\sigma = 0, \qquad (\sigma = 1, 2, 3, 4). \tag{56}$$

In der gewöhnlichen Elektrodynamik ist bekanntlich *die Energie ein Sechzehnertensor, dessen Divergenz verschwindet*. Hier haben wir aber gerade 4 Divergenzgleichungen vor uns, *also müssen wir S^ν_σ als Energie ansprechen.*

Dies ist das eine wichtige Resultat unserer Rechnung. Das andere ist, dass *jede einzelne Komponente der Energie S^ν_σ nach (55) selbst wieder die Form einer Divergenz* hat. Dies ist natürlich die Folge der Gleichung (54) d. h. davon, dass eine Summe von zweiten Ableitungen zu Null wird. Diese merkwürdige *Divergenzform jeder Komponente des Energietensors* hat in der gewöhnlichen Elektrodynamik kein Gegenstück und wird erst durch die Gravitation verständlich. Es folgt aus dieser Gestalt der Energie, dass sich jedes Integral einer einzelnen Energiekomponente, erstreckt über ein Weltstück, in ein Oberflächenintegral verwandeln lässt.

§ 98. Einsetzen in das Hamiltonsche Prinzip

Bis hierher war vom Hamiltonschen Prinzip nicht die Rede. Deswegen haben wir auch noch keine

192 *Beziehungen zu unseren Weltgleichungen*

gefunden, das soll nun nachgeholt werden. Für alle an der Begrenzung verschwindenden Variationen hat das Hamiltonsche Prinzip (47) die Form

$$\delta \iiiint (\mathfrak{K} + \mathfrak{L})\, dW = 0. \tag{57}$$

Durch Bildung der Lagrangeschen Ableitungen nach den $g^{\mu\nu}$ erhalten wir die 10 Gravitationsgleichungen

$$\sum_\mu g^{\mu\sigma} \left| \sum_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial g^{\mu\nu}_\alpha} - \frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial g^{\mu\nu}} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g^{\mu\nu}} \right., \qquad (\mu, \nu = 1, 2, 3, 4).$$

Wir multiplizieren dieselben bez. mit $g^{\mu\sigma}$ und summieren über μ. Hierauf formen wir das erste Glied durch Produktintegration um und erhalten wegen (55)

$$S_\nu^\sigma = \sum_{\alpha\mu} g_\alpha^{\mu\sigma} \frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial g_\alpha^{\mu\nu}} - \sum_\mu g^{\mu\sigma} \frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial g^{\mu\nu}} = \sum_\mu g^{\mu\sigma} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g^{\mu\nu}}. \tag{58}$$

Unter Benutzung der Lagrangeschen Gleichungen hat sich also die Energie so umformen lassen, dass die Ableitungen nach den Variablen x_s nicht mehr explizit auftreten. Die *Energie* S_ν^σ *zerfällt in die beiden Teile*

$$\mathfrak{G}_\nu^\sigma = \sum_\mu g^{\mu\sigma} \frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial g^{\mu\nu}} + \sum_{\alpha\mu} g_\alpha^{\mu\sigma} \frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial g_\alpha^{\mu\nu}}, ^{\langle 184\rangle}$$

$$\mathfrak{E}_\nu^\sigma = \sum_\mu g^{\mu\sigma} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g^{\mu\nu}} + \sum_\mu g^{\mu\sigma} \frac{\partial \sqrt{g}\,\mathfrak{L}}{\partial g^{\mu\nu}},$$

von denen wir den ersteren als die *Energie des Gravitationsfeldes*, den letzteren als die *Energie des elektromagnetischen Feldes* ansprechen. Diese geht — wie aus Gleichung (31) folgt[185] —, für $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ in den bekannten Energietensor der alten Elektrodynamik über. Der kovariante Tensor (32) folgt aus dem gemischten Tensor $\mathfrak{E}_\nu^\sigma$ als $\tau_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_p \mathfrak{E}^p g_{p\nu}$.[186] Der Gravitationsenergie kann man noch eine *einfachere Form* geben, wenn man (52) benutzt. Dann wird nämlich

$$\mathfrak{G}_\nu^\sigma = \frac{1}{2}\left(\sum_{\alpha\mu} g_\nu^{\mu\alpha} \frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial g_\sigma^{\mu\alpha}} - \mathfrak{K}\delta_\nu^\sigma \right).$$

Die Energie hat nur im projektiven Sinn Tensorcharakter, da wir den streng 193
allgemeinen Charakter der Invarianz durch Abspaltung des Gliedes mit Divergenzcharakter im Hamiltonschen Prinzip haben fallen lassen. Wir sagten auf S. 108, dass nur invariante Aussagen einen physikalischen Sinn haben.[187] Die hier abgeleiteten Gleichungen sind nun nicht invariant. Aber sie haben trotzdem physikalischen Sinn; denn *sie gelten für jedes Bezugssystem*, d. h. die entsprechenden Gleichungen für ein anderes Koordinatensystem gelten auch und zwar als Folge der Gravitationsgleichungen. Diese Eigenschaft der Gleichungen ist aber offenbar etwas von Invarianz durchaus verschiedenes und die dahingehenden Behauptungen von Einstein sind daher unrichtig.[188]

§ 99. Ausbau der Theorie

Wir sind in diesem Kolleg soweit gekommen, dass wir die ganze allgemeine mathematische Grundlage der neuen Physik in allen wesentlichen Teilen

[184] After the equal sign, Hilbert added in pencil: "Vorzeichen?"

[185] See p. 292 above.

[186] The preceding sentence was interlineated.

[187] See p. 243 above.

[188] Probably a reference to Einstein's comments in the last paragraph of *Einstein 1916c*.

vollständig hergestellt haben. Der *weitere Ausbau der Theorie* hat nun darin zu bestehen, die Integration der physikalischen Grundgleichungen anzustreben. Dies wird in der Weise geschehen, wie ich es auf S. 183 angedeutet habe: Durch eine Entwicklung nach ε baut man die Elektrodynamik in die Pseudogeometrie hinein. Die zweite Annäherung der Grundgleichungen liefert die Elektronentheorie. Die experimentelle Physik ist heute viel weiter vorangeschritten als die theoretische und ich hoffe, dass gerade die vielen unaufgeklärten Fragen der Elektronentheorie nun ihre Lösung finden werden.

Description of the Text

Collection: Georg-August-Universität Göttingen, Mathematisches Institut, Inv. Nr. 16205k.

Size: Cover size 22.5 cm ×28.2 cm; page size approx. 22.0 cm ×27.7 cm

Cover Annotations: On the spine, in gold lettering, is the notation, 'Hilbert, Grundlagen // der // Physik // II. // 1916/17'

Composition: 7 signatures of 9 to 20 sheets each (double pages); in all 203 pages, inclusive front- and end-sheets.

Pagination: The title page is not numbered. The following pages are continuously numbered from 1 to 193. Between page 33 and 34, a page numbered 33a was inserted. Page 107 is missing. The table of contents follows after page 193 and is paginated from 194 to 200.

Original Title: On the title page: DIE GRUNDLAGEN DER PHYSIK / II. / Vorlesung / von / D. HILBERT / Göttingen / Wintersemester 1916/17.//Ausgearbeitet von / R. BÄR.

Text: Typewritten text with equations, mathematical signs and some corrections added in black ink by R. Bär who arranged the script. Drawings have been added in pencil. Verso sides of pages are left blank. Paragraph headings are written, often in abbreviated form, in the margin of the page. Hilbert added occasional corrections and additions in pencil. On the botton of page 21 a paper strip, which is about 4 centimeters high, has been glued over the page, and page 74 was stuck together using two different sheets of paper.

“*This page left intentionally blank.*”

Chapter 3

The Foundation of Physics: Specific Topics (1915?–1918)

Introduction

In this Chapter, we present four documents that, in different ways, illustrate Hilbert's thinking on the foundations of physics. The first document is a set of page proofs for Hilbert's "First Communication" on the "Foundations of Physics" (*Hilbert 1915*, this Volume pp. 28ff.). These proofs differ significantly from the published version, in particular with regard to Hilbert's discussion of the energy concept and, consequently, with regard to the explicit axiomatic structure of the theory. The second document is a brief sketch of notes for what appears to be a talk on his theory of the "Foundations of Physics," given some time after mid-December 1915, in which Hilbert concentrates on the representation of matter *qua* electricity in his new, generally covariant and unified theory of gravitation and electromagnetism. The third document is the typescript of a lecture, given in December 1916, on the causality principle in general relativity. The fourth document is a batch of handwritten notes for a series of lectures on space and time, delivered to German soldiers in Bucharest, Romania, in March 1918.

The Foundations of Physics: Proofs of the "First Communication"

The set of proofs for *Hilbert 1915* was first discovered by Leo Corry who recognized their significance to the development of Hilbert's thinking about the "Foundations of Physics."[1] A widely read article on the differences between these proofs and the published version appeared in 1997[2] and rekindled a priority debate about whether Hilbert or Einstein found the correct general relativistic field equations of gravitation. The proofs also show a distinctly different logical structure of the theory, which is most apparent in that Hilbert postulated a third axiom that does not appear in the published version. This axiom was motivated by a discussion of the concept of energy in the new theory and postulated a restriction of the general covariance of the gravitational and electromagnetic field equations. For a detailed discussion of the significance of the proofs, see the Introduction to this Volume, sec. 3.

Pages 1 to 3 and 9 to 13 of the proofs do not differ substantially from the printed text of *Hilbert 1915*, pp. 395–397 and pp. 405–407.[3] Differences between the proofs and the published version for those pages are pointed out in the annotation and textual apparatus to our reprint of *Hilbert 1915* in Chapter 1 (see pp. 28ff. above). The text on pages 4 to 8 of the proofs, however, was almost completely rewritten for the published version.

---

[1] See *Corry 2004*.

[2] *Corry, Renn and Stachel 1997*.

[3] For a facsimile reprint of the proofs, see *Renn 2005*, pp. 147–159.

The "First Communication" (*Hilbert 1915*) was written in a period of intense competition between Hilbert and Einstein, and the proofs bear witness to the haste in which Hilbert was trying to secure priority for his insights.[4] Hilbert announced the presentation of a communication under the title "The Fundamental Equations of Physics" ("Die Grundgleichungen der Physik") for publication in the Göttingen Academy's proceedings on 15 November. On 16 November, he gave a presentation of his work under the same title to the Göttingen Mathematical Society. The manuscript for the article was then turned in with this title on 19 November, a day before the actual Academy session, which was an unusual irregularity in the Academy's proceedings. The title of the communication was then changed to "The Foundations of Physics" ("Die Grundlagen der Physik"). The date stamp on the proof sheets of 6 December 1915 and the fact that there are only a few handwritten corrections in the margin of these proofs suggests that the more substantial revisions of his theory were done after this date. From Hilbert's correspondence we know that he sent out offprints of his final paper by mid-February; but the issue of the *Nachrichten* containing the final version was only issued on 31 March 1916.

The Foundations of Physics: Notes

The text is a double-sided sheet contained in *Cod. Ms. D. Hilbert 634* that contains what appears to be notes for a lecture by Hilbert on the subject of his "First Communication" on the "Foundations of Physics." The occasion of the lecture and the date of the manuscript are unclear. Judging from the contents, the date most likely is between late 1915 and 1918. In all probability these notes were written after Hilbert's revision of the proofs of *Hilbert 1915*, i.e., after 6 December 1915. It mentions on the second page the fact that the "general energy equation" would be "invariant" as an explicit advantage of the new theory. Since the most significant difference between the proofs and the published version concerns the energy theorem and its covariance properties, this comment would seem incompatible with Hilbert's understanding of the energy concept as laid out in the proof version.[5]

The notes differ in several ways from the published communication of *Hilbert 1915* as well as from the presentation of similar material in his two lecture courses. First, Hilbert clearly organized the subject matter around the problem of the representation of matter. Second, he organized his notes in a way that reflects both a logical and a historical order. He first considers the

[4] For the following, see *Sauer 1999*.

[5] Another hint that the notes were written after revising the proofs of *Hilbert 1915* in December 1915 is that the notation of the action principle $\delta \int (K+L)\sqrt{g}dw = 0$ follows the printed rather than the proof version, which denotes the differential in the integral as $d\tau$.

case of the vacuum, i.e., of the absence of matter, then includes a rigid electron with reference to Born's notion of Lorentz-covariant rigidity. Indicating three deficiencies of this theory, he goes on to discuss Mie's variational framework of deriving generalized Maxwell equations for the representation of the electrons in terms of solutions to non-linear electromagnetic field equations. He writes down the explicit solution for Mie's non-linear Lagrangian that he had also discussed in § 28 of *Hilbert 1916a**. Again he lists three shortcomings of this theory, and proceeds to include gravitation by discussing a generally covariant theory based on a metric tensor representing the gravitational potential. The notes here go beyond both Hilbert's published communication and his lecture courses. At the end of the notes, Hilbert discussed explicitly the case of a spherically-symmetric gravitational field and sets up a Lagrangian that would produce an electron solution in this generalized theory. The notes stop short of giving an explict solution to this variational problem, and only indicate that such a solution would be found by successive approximations following the scheme laid out in § 89ff. of *Hilbert 1916/17**.

The notes document Hilbert's commitment to an electrodynamic world-view as well as a research program of finding a field-theoretic representation of the electron that became dominant in the search for a unified field theory by Einstein and other contemporaries in the 1920s and later.

The Causality Principle in Physics

Hilbert gave a two-part lecture under the title "Das Kausalitätsprinzip in der Physik" to the Göttingen Mathematical Society on 21 and 23 November, 1916.[6] Since the typescript of SUB *Cod. Ms. D. Hilbert 642* presented here bears the same title, and since much of the material contained in the typescript is also found in *Hilbert 1917* which Hilbert submitted a month later,[7] we take this document to reflect the content of the lectures of 21 and 23 November 1916.[8]

The general theme of the lecture is a reflection on the new status of the concept of causality in a physical theory that, in accordance with the principle of general relativity, is formulated in a generally covariant way. The need to reconsider the classical concept of causality had already been of central concern to Hilbert when he was writing his first note.[9] Here Hilbert discusses this

[6] *Jahresbericht der DMV* 25 (1917), 113.

[7] Note, however, that earlier versions of a "Second Communication" on the "Foundations of Physics" had already been submitted to the Academy on 4 December 1915 and on 26 February 1916; see the Introduction to this Volume, sec. 4.

[8] The handwriting of the person who added the equations is the same handwriting of the person who added the equations to the (first part) of *Hilbert 1916/17**, which according to its title page was R. Bär.

[9] See the discussion in the Introduction to this Volume, secs. 3 and 4.

issue both on the level of the causal sequence of spacetime events and on the level of the Cauchy initial value problem of partial differential equations. In particular, he points out that in a generally covariant theory the variational principle does not produce the same number of differential equations as there are dynamical variables. This problem, as he observes on p. 3, arises for the first time in the history of mathematics. Hilbert illustrates the problem by considering the example of an electron at rest, and argues the need to formulate additional conditions to exclude the possibility of performing a coordinate transformation such that the electron would be at rest up until a certain moment of time and then set itself into motion. Indeed, Hilbert conceives of the Cauchy problem in general relativity[10] as a problem of formulating the principle of causality. Given initial data on a spacelike hypersurface, how can we be sure that the dynamical evolution is uniquely determined by the field equations? Hilbert's answer is based on a more precise formulation of the concept of causality that hinges on the distinction between meaningful and meaningless statements. Another aspect of the problem of causality in a generally covariant theory pertains to the possibility of closed timelike curves. In order to exclude the possibility of such solutions that would violate the causal order of events, Hilbert proposes to add conditions to the field equations that are necessary and sufficient to exclude coordinate transformation, which would turn any part of an entirely timelike curve into a spacelike one. In other words, the causal sequence between spacetime events cannot be reversed by pure coordinate transformations. The conditions that he formulates were included in *Hilbert 1917* and became known as "reality conditions" or sometimes as "Hilbert conditions."

Bucharest Lectures on Space and Time

The last document presented in this Chapter are notes for a course of lectures given in occupied Bucharest, Romania, in March 1918 as part of a series of "Deutsche Hochschulkurse."[11] A first series of these courses had taken place in Bucharest from 26 November to 8 December 1917. According to the official report about the first series, the initiative for these courses had come from "a small group of German intellectuals, who had come together in the

[10]For a historical discussion of the Cauchy problem in general relativity and Hilbert's contributions to its understanding, see *Stachel 1992*.

[11]For historical information about the situation in Bucharest during World War I and about these courses, see *Kiritescu 1989*, esp. p. 283, and *Bornemann 1978*.

service for the military administration in Romania."[12] The purpose of these courses was described in the report as follows:

> Das Vorlesungsverzeichnis war unter dem Gesichtspunkt zusammengestellt worden, dass die Hoschschulkurse in erster Linie anregend wirken sollten. Ohne Rücksicht auf Prüfungen oder etwa zu erwerbende Berechtigungen wollte man die Teilnehmer einmal vollständig aus dem Alltag des Krieges heraus lösen und sie für eine Zeit ganz in die Welt heimischen geistigen Lebens versetzen. Den schon längere Zeit im Felde stehenden Studierenden aber sollten die Kurse durch erneute Berührung mit der Wissenschaft die Lust und die Kraft zur späteren Wiederaufnahme ihres Studiums geben.[13]

The courses were considered a success, and a second series devoted to "Klinische Medizin" had taken place from 25 February to 9 March 1918. The third series of these Bucharest "Deutsche Hochschulkurse" was devoted to "Technik, Eisenbahnwesen, Bergbau, Naturwissenschaft, Land- und Forstwissenschaft" and took place from 14 to 27 March 1918.[14] Participants were soldiers who were detailed to go to these courses by leave of absence from their units.

> Wer unter Befreiung von allen übrigen Dienstverpflichtungen von seinem Truppenteil zu den Hochschulkursen abkommandiert worden war, hatte durchschnittlich 4–5 Stunden für den Tag zu belegen, wenn er die in Aussicht gestellte Urkunde über den Besuch der Kurse erhalten wollte.[15]

More specifically, admission was open to every member of the military.

> Der Kreis der zugelassenen Hörer war diesmal noch insofern erweitert, als jeder allgemeingebildete Heeresangehörige die Berechtigung hatte, sich in die Belegbogen einzuschreiben.[16]

It appears, however, that the courses were also open to non-military personnel. In addition to the 120 participants, 394 civilian auditors signed up. The courses were given by 31 lecturers from various German universities. The courses were complemented by popular evening lectures:

---

[12]"... von einer kleinen Gruppe deutscher Akademiker, welche die gemeinschaftliche Arbeit im Dienste der Militärverwaltung in Rumänien zusammengeführt hatte." (*Hochschulkurse 1917*, p. 3). In his diaries, the Romanian bishop Raymund Netzhammer mentions the "sächsische Hofrat Dr. Volkmann und Prof. Dr. Darmstädter" as organizers of these courses (*Netzhammer 1995/1996*, Vol. 2, p. 785). Volkmann is also mentioned as organizer of the courses in the *Bukarester Tagblatt* of 1 and 25 March 1918. Ludwig Volkmann (1870–1947) was a publisher and had organized the "Internationale Ausstellung für Buchgewerbe und Graphik" in Leipzig in 1914. It is likely that Hilbert's invitation to the courses in Bucharest was mediated through his colleague Paul Darmstädter (1873–1934), extraordinary professor of "Wirtschafts- und Kolonialgeschichte" in Göttingen and a member of the liberal circle around Hilbert; see *Ericksen 1998*, pp. 430–434.

[13]*Hochschulkurse 1917*, p. 4; see also *Rumänien in Wort und Bild*, Vol. 1, No. 24 (1917), pp. 16–17, and *Bukarester Tagblatt* of 1 November 1917.

[14]*Hochschulkurse 1918*.

[15]*Hochschulkurse 1918*, p. 12.

[16]ibid.

> Von den öffentlichen Vorträgen zählten die úber das Deutschtum in Russland 120, die über Friedrich den Grossen 175, die über das Ameisenleben 255 und die über Goethe 337 eingeschriebene Hörer.[17]

The courses took place in the "Fundatiunea Carol," the palace of the university foundation.

Hilbert's lecture course was announced under the title "Raum und Zeit in der Physik" and comprised ten hours. The lectures were announced to take place on Thursday and Friday, 14 and 15 March, Monday through Friday, 18–23 March, and Monday and Tuesday, 25 and 26 March. A final lecture probably was given on Wednesday, 27 March.[18] In the same series, his Göttingen colleague Tammann gave a seven-hour course on "Metalle und Legierungen" and a three-hour course on "Sprengstoffe und ihre Wirkungen." Apparently, Hilbert left Göttingen for Bucharest already on 9 March 1918.[19]

The Bucharest lectures are interesting for several reasons. Biographically, they mark the point where Hilbert no longer did active research in the theory of general relativity but started to give lectures on physics of a more popular character. Ironically, he does so just at a time when his colleagues in Göttingen Felix Klein, Carl Runge, Emmy Noether and others, were deeply involved in trying to clarify the conceptual problem of energy conservation in general relativity, a problem that also played an important role in Hilbert's own papers on general relativity.[20] Hilbert, however, had already shifted his activities to the foundations of logic and arithmetic, as is witnessed by his major lecture course on set theory given in 1917.

The special occasion of lecturing to an audience who had not been in touch with recent scientific discussions for some time put Hilbert in the position of giving an elementary exposition about the new theory of relativity. The very fact that Hilbert was invited and chose to speak about "space and time in physics" is telling. The Bucharest lectures are interesting as an early occasion of reflection on the foundations of the new concept of space and time implied by special and general relativity. Indeed, in the Bucharest lectures Hilbert rather explicitly reflects on the role of empirical evidence for the foundations of the theory of relativity. Thus, Hilbert discusses Fizeau's and Michelson's experiments, de Sitter's astronomical proof of the finite speed of light, and the phenomenon of aberration as well as the experimental basis of the equivalence principle, e.g., the experiments by Roland Eötvös. Hilbert

[17] ibid, p. 14.

[18] See the daily program of the "Hochschulkurse" in the *Bukarester Tagblatt* of these days.

[19] See letter by Hilbert to Klein, 7 March 1918, "Übermorgen reise ich nach Bukarest." *Hilbert and Klein 1985*, p. 144.

[20] See the discussion in the Introduction to this Volume, secs. 3 and 4.

also explicitly reflects on the novelty of the relativistic concepts of space and time in the history of the mathematical sciences.

Tilman Sauer

Erste Korrektur meiner ersten Note.

Die Grundlagen der Physik.
(Erste Mitteilung.)

Vorgelegt in der Sitzung vom 20. November 1915.[1]

Die tiefgreifenden Gedanken und originellen Begriffsbildungen, vermöge derer M i e seine Elektrodynamik aufbaut, und die gewaltigen Problemstellungen von E i n s t e i n sowie dessen scharfsinnige zu ihrer Lösung ersonnenen Methoden, haben der Untersuchung über die Grundlagen der Physik neue Wege eröffnet.

Ich möchte im Folgenden — im Sinne der axiomatischen Methode — [2] aus drei einfachen Axiomen ein neues[3] System von Grundgleichungen der Physik aufstellen, die von idealer Schönheit sind, und in denen, wie ich glaube, die Lösung der gestellten Probleme enthalten ist. Die genauere Ausführung sowie vor Allem die spezielle Anwendung meiner Grundgleichungen auf die fundamentalen Fragen der Elektrizitätslehre behalte ich späteren Mitteilungen vor.

Es seien $w_s (s = 1, 2, 3, 4)$ irgendwelche die Weltpunkte wesentlich eindeutig benennende Koordinaten, die sogenannten Weltparameter. Die das Geschehen in w_s charakterisierenden Größen seien:

1) die zehn[4] Gravitationspotentiale $g_{\mu\nu}$ $(\mu, \nu = 1, 2, 3, 4)$ mit symmetrischem Tensorcharakter gegenüber einer beliebigen Transformation der Weltparameter w_s;

---

[1] These page proofs of *Hilbert 1915* bear printer's stamps with a date of 6 December 1915. The title line "Erste Korrektur meiner ersten Note" was added by Hilbert with ink at the top of the page, the remainder of the text is typeset. See the Introduction, p. 310, and the Introduction to this Volume, sec. 3, for further discussion.

[2] In the page margin, Hilbert indicated that the word "wesentlich" was to be inserted at this point.

[3] The word "neues" was crossed out.

[4] In the page margin, Hilbert indicated that the words "von *Einstein* zuerst eingeführten" were to be inserted at this point.

2) die vier elektrodynamischon ⟨sic!⟩ Potentiale q_s mit Vektorcharakter im selben Sinne.

Das physikalische Geschehen ist nicht willkürlich, es gelten vielmehr zunächst folgende zwei Axiome:

2 Axiom I (Mie's[A] Axiom von der Weltfunktion): *Das Gesetz des physikalischen Geschehens bestimmt sich durch eine Weltfunktion H, die folgende Argumente enthält:*

$$g_{\mu\nu}, \qquad g_{\mu\nu l} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial w_l}, \qquad g_{\mu\nu lk} = \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial w_l \partial w_k}, \tag{1}$$

$$q_s, \qquad q_{sl} = \frac{\partial q_s}{\partial w_l}, \qquad\qquad (l, k = 1, 2, 3, 4) \tag{2}$$

und zwar muß die Variation des Integrals

$$\int H\sqrt{g}d\tau$$

$$(g = |g_{\mu\nu}|, \quad d\tau = dw_1 dw_2 dw_3 dw_4)$$

für jedes der 14 Potentiale $g_{\mu\nu}$, q_s verschwinden.

An Stelle der Argumente (1) können offenbar auch die Argumente

$$g^{\mu\nu}, g_l^{\mu\nu} = \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial w_l}, g_{lk}^{\mu\nu} = \frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial w_l \partial w_k} \tag{3}$$

treten, wobei $g^{\mu\nu}$ die durch g dividierte Unterdeterminante der Determinante g in Bezug auf ihr Element $g_{\mu\nu}$ bedeutet.

Axiom II[B] (Axiom von der allgemeinen Invarianz): *Die Weltfunktion H ist eine Invariante gegenüber einer beliebigen Transformation der Weltparameter w_s.*

Axiom II ist der einfachste mathematische Ausdruck für die Forderung, daß die Verkettung der Potentiale $g_{\mu\nu}$, q_s an und für sich völlig unabhängig ist von der Art, wie man die Weltpunkte durch Weltparameter benennen will.

[A] Mie's Weltfunktionen enthalten nicht genau diese Argumente; insbesondere geht der Gebrauch der Argumente (2) auf Born zurück; es ist jedoch gerade die Einführung und Verwendung einer solchen Weltfunktion im Hamiltonschen Prinzip das Charakteristische der Mie'schen Elektrodynamik.

[B] Die Forderung der orthogonalen Invarianz hat bereits Mie gestellt. In dem oben aufgestellten Axiom II findet der Einsteinsche Grundgedanke fundamentale der allgemeinen Invarianz den einfachsten Ausdruck, wennschon bei Einstein das Hamiltonsche Prinzip nur eine Nebenrolle spielt und seine Funktionen H keineswegs allgemeine Invarianten sind, auch die elektrischen Potentiale nicht enthalten.

Das Leitmotiv für den Aufbau meiner[5] Theorie liefert der folgende mathematische Satz, dessen Beweis ich an einer anderen Stelle darlegen werde.
T h e o r e m I.

Ist J eine Invariante bei beliebiger Transformation der vier Weltparameter, welche n Größen und ihre Ableitungen | enthält, und man bildet dann 3
aus

$$\delta \int J\sqrt{g}d\tau = 0$$

in Bezug auf jene n Größen die n Lagrangeschen Variationsgleichungen, so sind in diesem invarianten System von n Differentialgleichungen für die n Größen stets vier eine Folge der $n-4$ übrigen — in dem Sinne, daß zwischen den n Differentialgleichungen und ihren totalen Ableitungen stets vier lineare, von einander unabhängige Kombinationen identisch erfüllt sind.

Bezüglich der Differentialquotienten nach $g^{\mu\nu}$, $g_k^{\mu\nu}$, $g_{kl}^{\mu\nu}$, wie sie in (4) und nachfolgenden Formeln auftreten, sei ein für allemal bemerkt, daß wegen der Symmetrie in μ, ν einerseits und k, l andererseits die Differentialquotienten nach $g^{\mu\nu}$, $g_k^{\mu\nu}$ mit 1 bezw. $\frac{1}{2}$ multipliziert zu nehmen sind, jenachdem $\mu=\nu$ bezw. $\mu\neq\nu$ ausfällt, ferner die Differentialquotienten nach $g_{kl}^{\mu\nu}$ mit 1 bezw. $\frac{1}{2}$ bezw. $\frac{1}{4}$ multipliziert zu nehmen sind, jenachdem $\mu=\nu$ und $k=l$ bezw. $\mu=\nu$ und $k\neq l$ oder $\mu\neq\nu$ und $k=l$ bezw. $\mu\neq\nu$ und $k\neq l$ ausfällt.

Aus Axiom I folgen zunächst bezüglich der zehn Gravitationspotentiale $g^{\mu\nu}$ die zehn Lagrangeschen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial\sqrt{g}H}{\partial g^{\mu\nu}} = \sum_k \frac{\partial}{\partial w_k}\frac{\partial\sqrt{g}H}{\partial g_k^{\mu\nu}} - \sum_{k,l}\frac{\partial^2}{\partial w_k\partial w_l}\frac{\partial\sqrt{g}H}{\partial g_{kl}^{\mu\nu}}, \quad (\mu,\nu=1,2,3,4) \tag{4}$$

und sodann bezüglich der vier elektrodynamischen Potentiale q_s die vier Lagrangeschen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial\sqrt{g}H}{\partial q_h} = \sum_k \frac{\partial}{\partial w_k}\frac{\partial\sqrt{g}H}{\partial q_{hk}}, \quad (h=1,2,3,4). \tag{5}$$

Die Gleichungen (4) mögen die Grundgleichungen der Gravitation, die Gleichungen (5) die elektrodynamischen Grundgleichungen oder die verallgemeinerten Maxwellschen Gleichungen heißen. Infolge des oben aufgestellten Theorems können die vier Gleichungen (5) als eine Folge der Gleichungen (4) angesehen werden, d. h. wir können unmittelbar wegen jenes mathematischen Satzes die Behauptung aussprechen, *daß in dem bezeichneten Sinne die elektrodynamischen Erscheinungen Wirkungen der Gravitation sind.* In dieser

[5]In the proofs, Hilbert indicated that the word "meiner" was to be replaced by "der". This correction of the proofs was not executed in the published version.

Erkenntnis erblicke ich die einfache und sehr überraschende Lösung des Problems von Riemann, der als der Erste theoretisch nach dem Zusammenhang von Gravitation und Licht gesucht hat.[6]

Indem unser mathematisches Theorem lehrt, daß die bisherigen Axiome I und II für die 14 Potentiale nur zehn wesentlich von einander unabhängige
4 Gleichungen liefern können, andererseits bei | Aufrechterhaltung der allgemeinen Invarianz mehr als zehn wesentlich unabhängige Gleichungen für die 14 Potentiale $g_{\mu\nu}$, q_s garnicht möglich sind, so ist, wofern wir der Cauchyschen Theorie der Differentialgleichungen entsprechend den Grundgleichungen der Physik den Charakter der Bestimmtheit bewahren wollen, die Forderung von vier weiteren zu (4) und (5) hinzutretenden nicht invarianten Gleichungen unerläßlich. Um zu diesen Gleichungen zu gelangen, stelle ich zunächst eine Definition des Energiebegriffes auf.

Zu diesem Zwecke bilden wir aus der Invariante H, indem wir nach $g^{\mu\nu}$ mittelst des willkürlichen contragredienten Tensors $h^{\mu\nu}$ polarisieren, den Ausdruck

$$J^{(h)} = \sum_{\mu,\nu} \frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}} h^{\mu\nu} + \sum_{\mu,\nu,k} \frac{\partial H}{\partial g_k^{\mu\nu}} h_k^{\mu\nu} + \sum_{\mu,\nu,k,l} \frac{\partial H}{\partial g_{kl}^{\mu\nu}} h_{kl}^{\mu\nu},$$

wo zur Abkürzung

$$h_k^{\mu\nu} = \frac{\partial h^{\mu\nu}}{\partial w_k}, \quad h_{kl}^{\mu\nu} = \frac{\partial^2 h^{\mu\nu}}{\partial w_k \partial w_l},$$

gesetzt ist. Da die Polarisation ein invarianter Prozeß ist, so ist $J^{(h)}$ eine Invariante. Wir behandeln jetzt den Ausdruck $\sqrt{g}J^{(h)}$ in derselben Weise wie in der Variationsrechnung den Integranden eines Variationsproblems, wenn man partielle Integration anwenden will; wir erhalten so folgende Identität:

$$\sqrt{g}J^{(h)} = -\sum_{\mu,\nu} H \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial g^{\mu\nu}} h^{\mu\nu} + \sum_{\mu,\nu} [\sqrt{g}H]_{\mu\nu} h^{\mu\nu} + D^{(h)}, \tag{6}$$

wo zur Abkürzung

$$[\sqrt{g}H]_{\mu\nu} = \frac{\partial \sqrt{g}H}{\partial g^{\mu\nu}} - \sum_k \frac{\partial}{\partial w_k} \frac{\partial \sqrt{g}H}{\partial g_k^{\mu\nu}} + \sum_{k,l} \frac{\partial^2}{\partial w_k \partial w_l} \frac{\partial \sqrt{g}H}{\partial g_{kl}^{\mu\nu}}$$

und

$$\begin{aligned} D^{(h)} = \sum_{\mu,\nu,k} \frac{\partial}{\partial w_k} \left(\frac{\partial \sqrt{g}H}{\partial g_k^{\mu\nu}} h^{\mu\nu} \right) &+ \sum_{\mu,\nu,k,l} \frac{\partial}{\partial w_k} \left(\frac{\partial \sqrt{g}H}{\partial g_{kl}^{\mu\nu}} h_l^{\mu\nu} \right) \\ &- \sum_{\mu,\nu,k,l} \frac{\partial}{\partial w_l} \left(h^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial w_k} \frac{\partial \sqrt{g}H}{\partial g_{kl}^{\mu\nu}} \right) \end{aligned} \tag{7}$$

[6] The following discussion of the energy concept text was replaced by a significantly different discussion of this concept on pp. 398–403 of the published version. See the Introduction to this Volume, sec. 3, for further discussion of these differences. Starting with p. 9, the published version again follows closely the text of the proofs.

gesetzt ist. Der Ausdruck $[\sqrt{g}H]_{\mu\nu}$ ist nichts anders als die Lagrangesche Variationsableitung von $\sqrt{g}H$ nach $g^{\mu\nu}$, durch deren Nullsetzen

$$[\sqrt{g}H]_{\mu\nu} = 0 \tag{8}$$

die Gravitationsgleichungen (4) entstehen, und der Ausdruck $D^{(h)}$ ist eine Summe von Differentialquotienten d. h. von reinem Divergenzcharakter.

Nunmehr benutzen wir die leicht beweisbare Tatsache, daß, wenn p^j $(j = 1, 2, 3, 4)$ einen willkürlichen kontravarianten Vektor bedeutet, der Ausdruck

$$p^{\mu\nu} = \sum_s (g_s^{\mu\nu} p^s - g^{\mu s} p_s^\nu - g^{\nu s} p_s^\mu), \qquad \left(p_s^j = \frac{\partial p^j}{\partial w_s}\right)$$

einen symmetrischen kontravarianten Tensor darstellt.

Tragen wir in den invarianten Ausdruck $J^{(h)}$ an Stelle von $h^{\mu\nu}$ den speziellen kontravarianten Tensor $p^{\mu\nu}$ ein, so entsteht wiederum ein invarianter Ausdruck, nämlich

$$J^{(p)} = \sum_{\mu,\nu} \frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}} p^{\mu\nu} + \sum_{\mu,\nu,k} \frac{\partial H}{\partial g_k^{\mu\nu}} p_k^{\mu\nu} + \sum_{\mu,\nu,k,l} \frac{\partial H}{\partial g_{kl}^{\mu\nu}} p_{kl}^{\mu\nu},$$

wo zur Abkürzung

$$p_k^{\mu\nu} = \frac{\partial p^{\mu\nu}}{\partial w_k}, \quad p_{kl}^{\mu\nu} = \frac{\partial^2 p^{\mu\nu}}{\partial w_k \partial w_l},$$

gesetzt ist. Wir behandeln jetzt den Ausdruck $\sqrt{g}J^{(p)}$ in der Weise, wie in der Variationsrechnung den Integranden eines Variationsproblems, wenn man partielle Integration anwenden will — so jedoch, daß bei diesem Verfahren die ersten Differentialquotienten p_s^j der p^j stets unverändert stehen bleiben und nur die zweiten und dritten Ableitungen der p^j in den Divergenzausdruck hinübergenommen werden, überdies jedesmal die angewandten Hülfsausdrücke invariant gegenüber linearer Transformation ausfallen⟨, und setzen⟩[7]

$$\begin{aligned} E = &\sum \left(H \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial g^{\mu\nu}} g_s^{\mu\nu} + \sqrt{g} \frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}} g_s^{\mu\nu} + \sqrt{g} \frac{\partial H}{\partial g_k^{\mu\nu}} g_{sk}^{\mu\nu} + \sqrt{g} \frac{\partial H}{\partial g_{kl}^{\mu\nu}} g_{skl}^{\mu\nu} \right) p_s \\ &- \sum (g^{\mu s} p_s^\nu + g^{\nu s} p_s^\mu) \, [\sqrt{g}H]_{\mu\nu} \\ &+ \sum \left(\frac{\partial \sqrt{g}H}{\partial g_k^{\mu\nu}} g_s^{\mu\nu} + \frac{\partial \sqrt{g}H}{\partial g_{kl}^{\mu\nu}} g_{sl}^{\mu\nu} - g_s^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial w_l} \frac{\partial \sqrt{g}H}{\partial g_{kl}^{\mu\nu}} \right) p_k^s; \end{aligned} \tag{9}$$

[7]In the following formula, Hilbert corrected with pencil the factor p_s to the contravariant form p^s and put an exclamation mark in the margin. Regarding the numbering of the next two equations there is an irregularity in the remainder of the text since at several places, the proofs mistakenly refer to (9) where (10) is meant and vice versa, see notes 8, 12 below. The grammatical inconsistency, the error in the following formula, and the irregularity of the equation numbering indicate a preliminary nature of the considerations at this point of the proofs.

wir erhalten so folgende Identität

$$\sqrt{g}J^{(p)} = -\sum_{\mu,\nu} H\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial g^{\mu\nu}}p^{\mu\nu} + E + D^{(p)}, \tag{10}$$

6 wo zur Abkürzung |

$$\begin{aligned} D^{(p)} = \sum\Bigg\{ &-\frac{\partial}{\partial w_k}\left(\sqrt{g}\frac{\partial H}{\partial g_k^{\mu\nu}}(g^{\mu s}p_s^\nu + g^{\nu s}p_s^\mu)\right) \\ &+\frac{\partial}{\partial w_k}\left((p_s^\nu g^{\mu s} + p_s^\mu g^{\nu s})\frac{\partial}{\partial w_l}\left(\sqrt{g}\frac{\partial H}{\partial g_{kl}^{\mu\nu}}\right)\right) \\ &+\frac{\partial}{\partial w_l}\left(\sqrt{g}\frac{\partial H}{\partial g_{kl}^{\mu\nu}}\left(\frac{\partial p^{\mu\nu}}{\partial w_k} - g_{sk}^{\mu\nu}p^s\right)\right)\Bigg\} \end{aligned}$$

gesetzt ist. Der Ausdruck E ist gegenüber linearer Transformation invariant und in Bezug auf den Vektor p^j von der Gestalt

$$E = \sum_s e_s p^s + \sum_{s,l} e_s^l p_l^s$$

wo e_s und e_s^l nach (10) wohl definierte Ausdrücke sind. Insbesondere ergibt sich, wie man sieht

$$e_s = \frac{d^{(g)}\sqrt{g}H}{dw_s}; \tag{11}$$

dabei ist die durch $d^{(g)}$ bezeichnete Differentiation total nach w_s, jedoch so auszuführen, daß die elektrodynamischen Potentiale q_s unberührt bleiben.

Der Ausdruck E heiße die Energieform. Um diese Bezeichnung zu rechtfertigen, beweise ich zwei Eigenschaften, die der Energieform zukommen.

Setzen wir in der Identität (6) für $h^{\mu\nu}$ den Tensor $p^{\mu\nu}$ ein, so folgt daraus zusammen mit (9), sobald die Gravitationsgleichungen (8) erfüllt sind:

$$E = (D^{(h)})_{h=p} - D^{(p)} \tag{12}$$

oder

$$\begin{aligned} E = \sum\Bigg\{ &\frac{\partial}{\partial w_k}\left(\sqrt{g}\frac{\partial H}{\partial g_k^{\mu\nu}}g_s^{\mu\nu}p^s\right) - \frac{\partial}{\partial w_k}\left(\frac{\partial}{\partial w_l}\left(\sqrt{g}\frac{\partial H}{\partial g_{kl}^{\mu\nu}}\right)g_s^{\mu\nu}p^s\right) \\ &+\frac{\partial}{\partial w_l}\left(\sqrt{g}\frac{\partial H}{\partial g_{kl}^{\mu\nu}}g_{sk}^{\mu\nu}p^s\right)\Bigg\}, \end{aligned} \tag{13}$$

d. h. es gilt der Satz:

S a t z 1. Die Energieform E wird v e r m ö g e d e r G r a v i t a t i o n s g l e i c h u n g e n einer Summe von Differentialquotienten nach w_s gleich, d. h. sie erhält Divergenzcharacter.

Würden wir bei der obigen Behandlung des Ausdruckes $\sqrt{g}J^{(p)}$, die zu (9)[8] führte, noch einen Schritt weitergegangen sein und bei dem in der Variationsrechnung üblichen Verfahren auch die ersten Differentialquotienten p_s^j der p^j in den Divergenzausdruck hinübergeschafft haben, so würde der allein die p^j enthaltende Ausdruck

| ⟨...⟩[9] ⟨7⟩

Dieser Satz zeigt, daß die dem Energiesatz der alten Theorie entsprechende Divergenzgleichung

$$\sum_l \frac{\partial e_s^l}{\partial w_l} = 0 \tag{15}$$

dann und nur dann gelten kann, wenn die vier Größen e_s verschwinden, d. h. wenn die Gleichungen gelten

$$\frac{d^{(g)}\sqrt{g}H}{dw_s} = 0 \tag{16}$$

Nach diesen Vorbereitungen stelle ich nunmehr das folgende Axiom auf:

A x i o m III (Axiom von Raum und Zeit). *Die Raum-Zeit-koordinaten sind solche besonderen Weltparameter, für die der Energiesatz (15) gültig ist.*

Nach diesem Axiom liefern in Wirklichkeit Raum und Zeit eine solche besondere Benennung der Weltpunkte, daß der Energiesatz gültig ist.

Das Axiom III hat das Bestehen der Gleichungen (16) zur Folge: diese vier Differentialgleichungen (16) vervollständigen die Gravitationsgleichungen (4) zu einem System von 14 Gleichungen für die 14 Potentiale $g^{\mu\nu}$, q_s: *d e m S y s t e m d e r G r u n d g l e i c h u n g e n d e r P h y s i k*.[10] Wegen der Gleichzahl der Gleichungen und der zu bestimmenden Potentiale ist für das physikalische Geschehen auch das Kausalitätsprinzip gewährleistet, und es enthüllt sich uns damit der engste Zusammenhang zwischen dem Energiesatz und dem Kausalitätsprinzip, indem beide sich einander bedingen. Dem Übergang von e i n e m Raum-Zeit-Bezugssystem zu einem anderen entspricht die Transformation der Energieform von e i n e r sogenannten "Normalform"

$$E = \sum_{s,l} e_s^l p_l^s$$

[8]The reference should probably be to eq. (10) rather than to eq. (9). Cp. note 7 above.

[9]From the top of the sheet which contains pp. 7 and 8 of the proofs a small strip of paper was cut off. Hence at this point some 10 lines of text are missing. The excised piece also cuts off parts of the following sentence on this page but respects the beginning of the paragraph on p. 8.

[10]The very first version of Hilbert's note had the title "Grundgleichungen der Physik", see *Sauer 1999*, n. 88, and the Introduction to Chapter 3, p. 311.

auf eine andere Normalform.

⟨8⟩ | ⟨...⟩[11]

Da K nur von $g^{\mu\nu}$, $g_s^{\mu\nu}$, $g_{lk}^{\mu\nu}$ abhängt, so läßt sich beim Ansatz (17) die Energie E wegen (13) lediglich als Funktion der Gravitationspotentiale $g^{\mu\nu}$ und deren Ableitungen ausdrücken, sobald wir L nicht von $g_s^{\mu\nu}$, sondern nur von $g^{\mu\nu}$, q_s, q_{sk}, abhängig annehmen. Unter dieser Ausnahme, die wir im Folgenden stets machen, liefert die Definition der Energie (10) den Ausdruck[12]

$$E = E^{(g)} + E^{(e)} \tag{18}$$

wo die „Gravitationsenergie“ $E^{(g)}$ nur von $g^{\mu\nu}$ und deren Ableitungen abhängt und die “elektrodynamische Energie” $E^{(e)}$ die Gestalt erhält

$$E^{(e)} = \sum_{\mu,\nu,s} \frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial g^{\mu\nu}}(g_s^{\mu\nu}p^s - g^{\mu s}p_s^\nu - g^{\nu s}p_s^\mu), \tag{19}$$

in der sie sich als *eine mit* $\sqrt{g}$ *multiplizierte allgemeine Invariante* erweist.

Des Weiteren benutzen wir zwei mathematische Theoreme, die wie folgt lauten:

Theorem II. Wenn J eine von $g^{\mu\nu}$, $g_l^{\mu\nu}$, $g_{lk}^{\mu\nu}$, q_s, q_{sk} abhängige Invariante ist, so gilt stets identisch in allen Argumenten und für jeden willkürlichen kontravarianten Vektor p^s

$$\begin{aligned}\sum_{\mu,\nu,l,k}\left(\frac{\partial J}{\partial g^{\mu\nu}}\Delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial J}{\partial g_l^{\mu\nu}}\Delta g_l^{\mu\nu} + \frac{\partial J}{\partial g_{lk}^{\mu\nu}}\Delta g_{lk}^{\mu\nu}\right)&\\ + \sum_{s,k}\left(\frac{\partial J}{\partial q_s}\Delta q_s + \frac{\partial J}{\partial q_{sk}}\Delta q_{sk}\right) &= 0;\end{aligned}$$

dabei ist

$$\begin{aligned}\Delta g^{\mu\nu} &= \sum_m (g^{\mu m}p_m^\nu + g^{\nu m}p_m^\mu),\\ \Delta g_l^{\mu\nu} &= -\sum_m g_m^{\mu\nu}p_l^m + \frac{\partial\Delta g^{\mu\nu}}{\partial w_l},\end{aligned}$$

9

[11] Just as on the previous page, the top of this page is missing since a strip of the sheet containing the two pages was cut off. The missing text, in all probability, contained the equation

$$H = K + L \tag{17}$$

which is referred to in the next sentence, and an explicit expression for the Riemann curvature scalar K, in terms of the Ricci tensor $K_{\mu\nu}$, as on the bottom of *Hilbert 1915*, p. 402, see this Volume p. 38 and its note 34.

[12] In the preceding sentence the word “Ausnahme” probably should read “Annahme”, and the reference to eq. (10) should probably to be to eq. (9), cp. note 7.

$$\begin{aligned}\Delta g^{\mu\nu}_{lk} &= -\sum_m (g^{\mu\nu}_m p^m_{lk} + g^{\mu\nu}_{lm} p^m_k + g^{\mu\nu}_{km} p^m_l) + \frac{\partial^2 \Delta g^{\mu\nu}}{\partial w_l \partial w_k},\\ \Delta q_s &= -\sum_m q_m p^m_s,\\ \Delta q_{sk} &= -\sum_m q_{sm} p^m_k + \frac{\partial \Delta q_s}{\partial w_k}.\end{aligned}$$

Theorem III. Wenn J eine n u r von $g^{\mu\nu}$ und deren Ableitungen abhängige Invariante ist, und, wie oben, die Variationsableitungen von $\sqrt{g}J$ bezüglich $g^{\mu\nu}$ mit $[\sqrt{g}J]_{\mu\nu}$ bezeichnet werden, so stellt der Ausdruck — unter $h^{\mu\nu}$ irgend einen kontravarianten Tensor verstanden —

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{\mu,\nu} [\sqrt{g}J]_{\mu\nu} h^{\mu\nu}$$

eine Invariante dar; setzen wir in dieser Summe an Stelle von $h^{\mu\nu}$ den besonderen Tensor $p^{\mu\nu}$ ein und schreiben

$$\sum_{\mu,\nu} [\sqrt{g}J]_{\mu\nu} p^{\mu\nu} = \sum_{s,l} (i_s p^s + i^l_s p^s_l),$$

wo alsdann die Ausdrücke

$$\begin{aligned} i_s &= \sum_{\mu,\nu} [\sqrt{g}J]_{\mu\nu} g^{\mu\nu}_s,\\ i^l_s &= -2 \sum_\mu [\sqrt{g}J]_{\mu s} g^{\mu l}\end{aligned}$$

lediglich von $g^{\mu\nu}$ und deren Ableitungen abhängen, so ist

$$i_s = \sum_l \frac{\partial i^l_s}{\partial w_l} \tag{20}$$

in der Weise, daß diese Gleichung identisch für alle Argumente, nämlich die $g^{\mu\nu}$ und deren Ableitungen, erfüllt ist.

Wir wenden nun Theorem II auf die Invariante L an und erhalten

$$\begin{aligned}\sum_{\mu,\nu,m} \frac{\partial L}{\partial g^{\mu\nu}} (g^{\mu m} p^\nu_m + g^{\nu m} p^\mu_m) - \sum_{s,m} \frac{\partial L}{\partial q_s} q_m p^m_s \\ - \sum_{s,k,m} \frac{\partial L}{\partial q_{sk}} (q_{sm} p^m_k + q_{mk} p^m_s + q_m p^m_{sk}) = 0.\end{aligned} \tag{21}$$

Das Nullsetzen des Koeffizienten von p^m_{sk} linker Hand liefert die Gleichung

$$\left(\frac{\partial L}{\partial q_{sk}} + \frac{\partial L}{\partial q_{ks}} \right) q_m = 0$$

oder

$$\frac{\partial L}{\partial q_{sk}} + \frac{\partial L}{\partial q_{ks}} = 0, \tag{22}$$

d. h. die Ableitungen der elektrodynamischen Potentiale q_s treten nur in den Verbindungen

$$M_{ks} = q_{sk} - q_{ks}$$

auf. Damit erkennen wir, daß bei unseren Annahmen die Invariante L außer ⟨von⟩ den Potentialen $g^{\mu\nu}$, q_s lediglich von den Komponenten des schiefsymmetrischen invarianten Tensors

$$M = (M_{ks}) = \mathrm{Rot}(q_s)$$

d. h. des sogenannten elektromagnetischen Sechservektors abhängt. *Dieses Resultat ergibt sich hier wesentlich als Folge der allgemeinen Invarianz, also auf Grund von Axiom II.*

Setzen wir in der Identität (21) den Koeffizienten von p^ν_m linker Hand gleich Null, so erhalten wir mit Benutzung von (22)

$$2\sum_\mu \frac{\partial L}{\partial g^{\mu\nu}} g^{\mu m} - \frac{\partial L}{\partial q_m} q_\nu - \sum_s \frac{\partial L}{\partial M_{ms}} M_{\nu s} = 0, \qquad (\mu = 1, 2, 3, 4). \tag{23}$$

Diese Gleichung gestattet eine wichtige Umformung der elektromagnetischen Energie. Der mit p^ν_m multiplizierte Teil von $E^{(e)}$ in (19) wird nämlich wegen (23):

$$-2\sum_\mu \frac{\partial \sqrt{g} L}{\partial g^{\mu\nu}} g^{\mu m} = \sqrt{g}\left\{ L\delta^m_\nu - \frac{\partial L}{\partial q_m} q_\nu - \sum_s \frac{\partial L}{\partial M_{ms}} M_{\nu s} \right\}, \tag{24}$$

$$(\mu = 1, 2, 3, 4) \quad (\delta^\mu_\nu = 0, \quad \mu \neq \nu, \quad \delta^\mu_\mu = 1).$$

Wenn man hier in dem Ausdrucke rechter Hand zur Grenze für

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= 0, \qquad (\mu \neq \nu) \\ g_{\mu\nu} &= 1 \end{aligned} \tag{25}$$

übergeht, so stimmt derselbe genau mit demjenigen überein, den Mie in seiner Elektrodynamik aufgestellt hat: der Mie'sche elektromagnetische Energietensor ist also nichts anderes als der durch Differentiation der Invariante L nach den Gravitationspotentialen $g^{\mu\nu}$ entstehende allgemein invariante Tensor beim Übergang zum Grenzfall (25) — ein Umstand, der mich zum ersten Mal auf den notwendigen engen Zusammenhang zwischen der Einsteinschen allgemeinen Relativitätstheorie und der Mie'schen Elektrodynamik hingewiesen und mir die Überzeugung von der Richtigkeit der hier entwickelten Theorie gegeben hat.

11 Es bleibt noch übrig, bei der Annahme (17) direkt zu zeigen,[13] wie die oben aufgestellten verallgemeinerten Maxwellschen Gleichungen (5) eine Folge der Gravitationsgleichungen (4) in dem oben angegebenen Sinne sind.

Unter Verwendung der vorhin eingeführten Bezeichnungsweise für die Variationsableitungen bezüglich der $g^{\mu\nu}$ erhalten die Gravitationsgleichungen wegen (17) die Gestalt

$$[\sqrt{g}K]_{\mu\nu} + \frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial g^{\mu\nu}} = 0. \tag{26}$$

Bezeichnen wir ferner allgemein die Variationsableitungen von $\sqrt{g}J$ bezüglich des elektrodynamischen Potentials q_h mit

$$[\sqrt{g}J]_h = \frac{\partial\sqrt{g}J}{\partial q_h} - \sum_k \frac{\partial}{\partial w_k}\frac{\partial\sqrt{g}J}{\partial q_{hk}},$$

so erhalten die elektrodynamischen Grundgleichungen wegen (17) die Gestalt

$$[\sqrt{g}L]_h = 0. \tag{27}$$

Da nun K eine lediglich von $g^{\mu\nu}$ und deren Ableitungen abhängige Invariante ist, so gilt nach Theorem III identisch die Gleichung (20), worin

$$i_s = \sum_{\mu\nu} [\sqrt{g}K]_{\mu\nu}\, g_s^{\mu\nu} \tag{28}$$

und

$$i_s^l = -2\sum_{\mu} [\sqrt{g}K]_{\mu s}\, g^{\mu l}, (\mu = 1, 2, 3, 4) \tag{29}$$

ist.

Wegen (26) und (29) ist die linke Seite von (24) gleich $-i_\nu^m$. Durch Differentiation nach w_m und Summation über m erhalten wir wegen (20)

$$\begin{aligned}
i_\nu &= \sum_m \frac{\partial}{\partial w_m}\left(-\sqrt{g}L\delta_\nu^m + \frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial q_m}q_\nu + \sum_s \frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial M_{sm}}M_{s\nu}\right) \\
&= -\frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial w_\nu} + \sum_m \left\{ q_\nu \frac{\partial}{\partial w_m}\left([\sqrt{g}L]_m + \sum_s \frac{\partial}{\partial w_s}\frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial q_{ms}}\right)\right. \\
&\quad \left. + q_{\nu m}\left([\sqrt{g}L]_m + \sum_s \frac{\partial}{\partial w_s}\frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial q_{ms}}\right)\right\} \\
&\quad + \sum_s \left([\sqrt{g}L]_s - \frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial q_s}\right)M_{s\nu} + \sum_{s,m}\frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial M_{sm}}\frac{\partial M_{s\nu}}{\partial w_m},
\end{aligned}$$

da ja

$$\frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial q_m} = [\sqrt{g}L]_m + \sum_s \frac{\partial}{\partial w_s}\frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial q_{ms}}$$

und 12

$$-\sum_m \frac{\partial}{\partial w_m}\frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial q_{sm}} = [\sqrt{g}L]_s - \frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial q_s}.$$

Nunmehr berücksichtigen wir, daß wegen (22)

$$\sum_{m,s}\frac{\partial^2}{\partial w_m \partial w_s}\frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial q_{ms}} = 0$$

ist, und erhalten dann bei geeigneter Zusammenfassung:

$$\begin{aligned} i_\nu = -\frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial w_\nu} + \sum_m\left(q_\nu\frac{\partial}{\partial w_m}[\sqrt{g}L]_m + M_{m\nu}[\sqrt{g}L]_m\right) \\ + \sum_m\frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial q_m}q_{m\nu} + \sum_{s,m}\frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial M_{sm}}\frac{\partial M_{s\nu}}{\partial w_m}. \end{aligned} \tag{30}$$

Andererseits ist

$$-\frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial w_\nu} = -\sum_{s,m}\frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial g^{sm}}g^{sm}_\nu - \sum_m\frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial q_m}q_{m\nu} - \sum_{m,s}\frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial q_{ms}}\frac{\partial q_{ms}}{\partial w_\nu}.$$

Das erste Glied der rechten Seite ist wegen (26) und (28) nichts anderes als i_ν. Das letzte Glied rechter Hand erweist sich als entgegengesetzt gleich dem letzten Glied rechter Hand in (30); es ist nämlich

$$\sum_{s,m}\frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial M_{sm}}\left(\frac{\partial M_{s\nu}}{\partial w_m} - \frac{\partial q_{ms}}{\partial w_\nu}\right) = 0, \tag{31}$$

da der Ausdruck

$$\frac{\partial M_{s\nu}}{\partial w_m} - \frac{\partial q_{ms}}{\partial w_\nu} = \frac{\partial^2 q_\nu}{\partial w_s\partial w_m} - \frac{\partial^2 q_s}{\partial w_\nu\partial w_m} - \frac{\partial^2 q_m}{\partial w_\nu\partial w_s}$$

symmetrisch in s, m und der erste Faktor unter dem Summenzeichen in (31) schiefsymmetrisch in s, m ausfällt.

Aus (30) folgt mithin die Gleichung

$$\sum_m\left(M_{m\nu}[\sqrt{g}L]_m + q_\nu\frac{\partial}{\partial w_m}[\sqrt{g}L]_m\right) = 0; \tag{32}$$

d. h. aus den Gravitationsgleichungen (4) folgen in der Tat die vier von einander unabhängigen linearen Kombinationen (32) der elektrodynamischen Grundgleichungen (5) und ihrer ersten Ableitungen. *Dies ist der ganze mathematische Ausdruck der oben allgemein ausgesprochenen Behauptung über den Charakter der Elektrodynamik als einer Folgeerscheinung der Gravitation.*

13 Da L unserer Annahme zufolge nicht von den Ableitungen der $g^{\mu\nu}$

[13] An equation number (17) would have been found on the excised piece of the top of page 8, see note 11 above.

abhängen soll, so muß L eine Funktion von gewissen vier allgemeinen Invarianten sein, die den von Mie angegebenen speziellen orthogonalen Invarianten entsprechen und von denen die beiden einfachsten diese sind:

$$Q = \sum_{k,l,m,n} M_{mn} M_{lk} g^{mk} g^{nl}$$

und

$$q = \sum_{k,l} q_k q_l g^{kl}.$$

Der einfachste und im Hinblick auf den Bau von K nächstliegende Ansatz für L ist zugleich derjenige, der der Mie'schen Elektrodynamik entspricht, nämlich

$$L = \alpha Q + f(q)$$

oder noch spezieller an Mie anschließend:

$$L = \alpha Q + \beta q^3,$$

wo $f(q)$ irgend eine Funktion von q und α, β Konstante bedeuten.

Wie man sieht, genügen bei sinngemäßer Deutung die wenigen einfachen in den Axiomen I, II, III ausgesprochenen Annahmen zum Aufbau der Theorie: durch dieselbe werden nicht nur unsere Vorstellungen über Raum, Zeit und Bewegung von Grund aus in dem von Einstein geforderten Sinne umgestaltet, sondern ich bin auch der Überzeugung, daß durch die hier aufgestellten Grundgleichungen die intimsten, bisher verborgenen Vorgänge innerhalb des Atoms Aufklärung erhalten werden und insbesondere allgemein eine Zurückführung aller physikalischen Konstanten auf mathematische Konstanten möglich sein muß — wie denn überhaupt damit die Möglichkeit naherückt, daß aus der Physik im Prinzip eine Wissenschaft von der Art der Geometrie werde: gewiß der herrlichste Ruhm der axiomatischen Methode, die hier wie wir sehen die mächtigen Instrumente der Analysis nämlich, die Variationsrechnung und Invariantentheorie in ihre Dienste nimmt.

Description of the Text

Collection: SUB Göttingen, signature *Cod. Ms. D. Hilbert 634*, pp. 23–29 (the page numbers refer to the page numbers added in the page margin in pencil by the SUB).

Size: Page size approx. 24.0 cm ×16.5 cm

Cover Annotations: See below.

Composition: The proofs consist of 13 pages of consecutive pagination. Pages are printed on both sides. Pp. [1]/2, [7/8], and [13] are on single sheets, pp. 3/4 and 5/6 as well as pp. 9/10 and 11/12 are on folded signature sheets. From the single sheet which contains pp. [7/8] a piece was cut off from the top such that approximately 10 lines of text as well as the page numbers are missing at the top of these pages.

Pagination: Pages 2 to 6 and pages 9 to 13 are paginated in the top left and right corners (for even and odd page numbers, respectively).

Original Title: See below.

Text: The first set of proofs to "Die Grundlagen der Physik. (Erste Mitteilung)" (*Hilbert 1915*) is contained in the folder *Cod. Ms. D. Hilbert 634*. This is a blue folder containing 29 pages, on the front side of which a label with "Gravitation" written in Hilbert's hand can be found. The pages differ in quality of paper, pagination and size; a part of them has been written by Hilbert, another by different, partly unknown persons: for example R. Bär (who has arranged *Hilbert 1916a** and *Hilbert 1916/17**: pages 7 and 12. Another (unidentified) person's handwriting (pages 2 to 6, 8, 11) is the same as on a single sheet ("Berechnung der Zentrifugal-Beschleunigung aus dem Prinzip der geodätischen Linie") found in *Cod. Ms. D. Hilbert 592*. Some notes by Hilbert were written on a sheet of letter-paper of Hotel Beau-Séjour in Lugano. Pages 15 to 20 form a larger unit: They are folded each and put one in another so that they form a single unsewn layer. On front of 15th page Hilbert wrote: Allgemeine Relativitätstheorie / Meine Vorträge (Physik). The proofs, presented here, are the last 13 pages in that folder.

The first page of the proofs has the note "Erste Korrektur meiner ersten Note" in Hilbert's hand on the top of the page. It also contained some notes in pencil that were later erased. Pages 1, 9, and 13 show a printer's stamp from the "Dieterich'sche Univ.-Buchdruckerei/ W.FR. KAESTNER/ GÖTTINGEN" with date stamp of "6.- Dez.1915" on the bottom of the page. Pages 1, 2, and 5 contain some correction notes in Hilbert's hand. In the top right hand corners of pages 1, 3, and ⟨7⟩ Roman numerals I, II, III, respectively, were written in ink.

⟨Die Grundlagen der Physik. Notizen.⟩

Keine Elektrizität, keine Materie: $M = (\mathfrak{h}, -i\mathfrak{e})$

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Div} & M^* & = 0 \\ \text{Div} & M & = 0 \end{array}\right\}$$ 6 Komponente⟨n⟩ liefern dann Alles, was nötig. Die Physik wäre fertig.[1]

Zusätze 1.) Stücke von Bornscher Starrheit
2.) Auch im Innern Maxwellsche Gl⟨eichungen⟩. Div$M = r$, DivM^* $= 0$
3.) $f = r \cdot M \quad \int f dv = 0.$

Die 10 Komp⟨onenten⟩ M, r liefern dann Alles. Physik fertig.

Mängel 1.) Extrastellung der Starrheitskräfte⟨,⟩ Momentankraft.
2.) Keine Gravitation
3.) falsch (Quanten!, Wasserstoffmodell strahlt nicht)[2]

Radikale Beseitigung: alle Gedanken von Einstein u. Mie⟨.⟩
Differentialgl⟨eichungen,⟩ während bisher Integralgl⟨eichungen⟩ nötig waren.
Auflösung von Div$M^* = 0$ durch den Ansatz $M = \text{Curl}\, q$

$$\delta \int Q d\omega = 0 \qquad Q = \sum_{kl} M_{kl}^2 = \sum_{kl} \left(\frac{\partial q_l}{\partial w_k} - \frac{\partial q_k}{\partial w_l} \right)^2$$

$$\sum_k \frac{\partial M_{kl}}{\partial w_k} = 0.$$

$$\delta \int (Q + \alpha q^3) d\omega = 0 \qquad r_l = \alpha \frac{\partial q^3}{\partial q_l}, \qquad q = \sum_k q_k^2$$

Energietensor: $$\delta_k^l L - \sum_s \frac{\partial L}{\partial M_{ls}} M_{ks} - \frac{\partial L}{\partial q_l} q_k$$

Einfachstes Beispiel: $q_4 = \varphi$

[1] For a similar use of the phrase “Physik wäre fertig,” see Hilbert’s lecture on the causality principle, p. 336 below.

[2] Cf. a similar list of arguments in *Hilbert 1916a**, § 26 (this Volume, pp. 144–144).

$$\delta\int\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2+\alpha\varphi^6\right\}dxdydz=0$$

$$\delta\int\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)^2+\alpha\varphi^6\right\}r^2dr=0$$

$$r\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+2\frac{\partial\varphi}{\partial r}-3\alpha r\varphi^5=0 \qquad \varphi=\sqrt[4]{\frac{c}{\alpha}}\left(r^2-c\right)^{-\frac{1}{2}}\ \langle 3\rangle$$

Mängel 1.) c kontinuierlich 2.) kein 2^{tes} Elektron möglich.
daher Kraftgesetz nicht zu prüfen, geschweige Quantenth. etc.
3.) Keine Gravitation.

Nun allgemeine Invarianz. Gravitationspotentiale dazu nötig, die den q koordiniert sind. Zur Beschreibung des physikalischen Geschehens sind diese 14 Komponenten nötig.

$$Q=\sum_{klmn}M_{mn}M_{lk}g^{mk}g^{nl}$$

$$G=\sum_{kl}q_kq_lg^{kl}$$

Energietensor $\displaystyle\sum_{\mu}\frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial g^{\mu k}}g^{\mu l}$

[2]

$$\delta\int(K+L)\sqrt{g}d\omega=0$$

Die Vorteile: Curl, Maxwellgl⟨eichungen⟩ eine Folge, Allg⟨emeine⟩ Energiegl ⟨eichung⟩ invariant.
Einfachste Lösung:
14 Gl. ausrechnen $q_4=\varphi$, $g_{11}=1$, $g_{22}=\gamma$, $g_{33}=\gamma\sin^2\psi$, $g_{44}=f$
diese 14 Gl⟨eichungen⟩ sind 3en aequivalent, nämlich:

$$\delta\int(K+L)\gamma\sqrt{f}dr=0$$

$$K=\frac{2\gamma''}{\gamma}-\frac{1}{2}\frac{\gamma'^2}{\gamma^2}+\frac{f''}{f}-\frac{1}{2}\frac{f'^2}{f^2}+\frac{\gamma'}{\gamma}\frac{f'}{f}-\frac{2}{\gamma}$$

$$L=-2\frac{\varphi'^2}{f}+\alpha\left(\frac{\varphi^2}{f}\right)^3$$

[3]The same solution is discussed in *Mie 1912b*, pp. 18–40, and in *Hilbert 1916a**, pp. 95f, (this Volume, p. 148).

3 Gl⟨eichungen⟩ blau unterstrichen auf Postkarte.[4]

$$\delta \int \left\{ u'v' + \frac{3}{4} u^{-3} v + \frac{3}{4} uv \left(\frac{\varphi' u^{\frac{1}{3}}}{v} \right)^2 - \frac{3}{2} \alpha uv \left(\frac{\varphi' u^{\frac{1}{3}}}{v} \right)^6 \right\} dr = 0$$

rot 1.

$14 = 10 + 4$

$4 = 3 + 1$ ist durch Rechnung bestätigt.

Integrationsmetho[de]: nach ϵ entwickelt.[5]

rot 2, blau 2-3 blei 1.

Ableitung der ersten kombiniert mit den 2 u 3ten ist die Max. Die Maxwellschen überflüssig.

[4]We have not been able to locate the postcard that Hilbert here refers to.

[5]Hilbert presumably had in mind a discussion of the action principle $\delta \int (K + \epsilon L) \gamma \sqrt{f} dr = 0$, where solutions are expanded in terms of ϵ, see *Hilbert 1916/17**, § 89, (this Volume, pp. 294).

Description of the Text

Collection: SUB Göttingen, signature *Cod. Ms. D. Hilbert 634*, pp. 21–22 (the page numbers refer to the page numbers added in the page margin in pencil by the SUB).

Size: Page size approx. 11.7 cm × 20.7 cm

Cover Annotations: None.

Composition: A single sheet of paper folded in the middle, written on the recto side with black ink in Hilbert's hand.

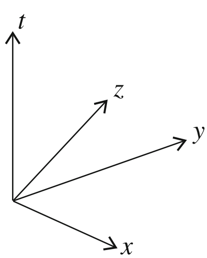
Pagination: None.

Original Title: None.

Text: The manuscript is contained in the folder *Cod. Ms. D. Hilbert 634*, see the description of this folder on p. 330.

Das Kausalitätsprinzip in der Physik

Der Physiker ist leicht von der Notwendigkeit des allgemeinen Relativitätsprinzips zu überzeugen. Man braucht ihn nur darauf hinzuweisen, wie unphysikalisch, wie innerlich unwahrscheinlich die alte Physik inklusive des Relativitätsprinzips von Lorentz[1] war.



Wenn die Naturgesetze in Bezug auf ein x, y, z, t-Koordinatensystem aufgestellt sind, so waren in der alten Physik noch weitere solche Bezugssysteme gleichberechtigt, und zwar grade diejenigen, welche durch eine *lineare* Transformation aus dem Ursprünglichen hervorgehen. Diese Annahme ist aus der Euklidischen Geometrie in die Physik übernommen worden. Dieser Geometrie wird damit eine wirkliche Existenz zugesprochen. Damit haben in der Physik auch die Kongruenzsätze dieser Geometrie Geltung. Dies sind aber Fernwirkungsgesetze schlimmster Art. Sie setzen nämlich die Existenz starrer Koordinatenachsen in der Welt als etwas Wirkliches, Realisierbares voraus. Die Welt der Materie wird dadurch, um es drastisch auszudrücken, an einer bestimmten Garnitur von festen Kleiderhaken aufgehängt. Man braucht sich diese Tatsache nur zu vergegenwärtigen, um sie abzulehnen.

Die Koordinaten dürfen nichts anderes sein als Namen, die wir den Punkten in der vierdimensionalen Welt beilegen, und die wahren Gesetze, denen die physikalischen Ereignisse gehorchen, müssen vollkommen unabhängig von der Wahl dieser Namen | sein. Diese Forderung pflegt man als *allgemeines* 2

[1] For the attribution of the relativity principle to Lorentz, cf. Hilbert's first discussion of special relativity in his lecture course on mechanics from summer 1911. Here Hilbert does not mention Einstein but attributes the realization of the significance of the Lorentz transformations for physics to Lorentz: "Das grosse Verdienst Lorentz' ist, ihre Bedeutung für die Physik gefunden und klargelegt zu haben." (*Hilbert 1910/11**, p. 282). Cf. also the introductory passage of *Minkowski 1908* where Minkowski attributes what he calls the *postulate* of relativity to Lorentz, i.e. the expectation that also the as yet unidentified laws of ponderable bodies would be covariant under Lorentz transformations, whereas Einstein had expressed that this postulate is not an artificial hypothesis but "eine durch die Erscheinungen sich aufzwingende neuartige Auffassung des Zeitbegriffs." *Minkowski 1908*, p. 55.

Relativitätsprinzip zu bezeichnen. Sie ist eines der Axiome, die wir der Physik zugrunde legen.[2] Ein weiteres Axiom ist die Forderung der Stetigkeit und Differenzierbarkeit, die wir von allen Funktionen, die physikalische Ereignisse beschreiben, voraussetzen. Wir benötigen, um das physikalische Geschehen an einer Stelle x_1, x_2, x_3, x_4 der Welt, d. h. in einem Weltpunkt zu beschreiben, 14 solcher Funktionen. Jeder Geometer weiss, dass man zur Definition der Kurvenlänge in einer vierdimensionalen Geometrie die 10 in den beiden Indizes symmetrischen Funktionen $g_{\mu\nu}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ der quadratischen Form $\sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu}(x) X_\mu X_\nu$ nötig hat. Diese 10 Funktionen wollen wir auch in die Physik übernehmen. Sie sollen uns dort die Kleiderhaken oder starren Koordinaten, die man früher brauchte, ersetzen. Da wir aber nicht Geometrie im vierdimensionalen Raum treiben, sondern die physikalischen Ereignisse in der Welt beschreiben wollen, so kommen wir mit dieser quadratischen Invariante allein nicht aus. Das Einfachste, was man noch hinzunehmen kann, ist eine lineare Invariante $\sum_\mu q_\mu(x_1, x_2, x_3, x_4) X_\mu$, und zwar bedeutet hierin der Vektor $\langle q_\mu \rangle$ das retardierte, elektrodynamische Potential. Kennt man diese 14 Funktionen in der ganzen Welt, so ist man mit der Physik fertig.[3]— Einfachere Annahmen konnte man bisher nicht machen.

Da die Weltgesetze von den Namen x_1, x_2, x_3, x_4, die wir den Weltpunkten beilegen, unabhängig sein sollen, untersuchen wir, wie sich die Funktionen $g_{\mu\nu}$ und q_μ bei einer beliebigen Umbenennung der Weltpunkte, d. h. bei einer beliebigen Koordinatentransformation $x_i = x_i(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4)$ verändern. Wir
3 finden | als neue Funktionen, die den neuen Namen angepasst sind,

$$g'_{\mu\nu}(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) = \sum_{\alpha\beta} \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu} \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu} g_{\alpha\beta} \quad ; \quad q'_\mu(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) = \sum_\alpha \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu} q_\alpha .$$

Die Weltgesetze, denen das physikalische Geschehen gehorchen soll, dürfen keine Ferngesetze, sondern müssen vielmehr Differentialgleichungen sein. Um sie zu erhalten, stellt man an die Spitze der Physik ein *Hamiltonsches Prinzip*, weil ein solches invariante Gleichungen liefert. Wir fordern also

$$\iiiint H \cdot \sqrt{g} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 = \text{Minimum}.$$

Aus diesem Prinzip fliessen nun nur 10 Differentialgleichungen $[H\sqrt{g}]_{\mu\nu} = 0$ zur Bestimmung der 14 unbekannten Funktionen $g_{\mu\nu}$, q_μ.[4] Dies ist das

[2] Einstein regularly used the term *postulate* of general relativity in his publications prior to 1917, cf. e.g. *Einstein 1916a*, §§2–3. It appears that the term "allgemeines Relativitätsprinzip" was used by Einstein for the first time in *Einstein 1917a*, §18, (dated December 1916 and published 1917). For its designation as an axiom, see *Hilbert 1915*, p. 396, (this Volume, p. 29).

[3] The phrase "Physik fertig" occurs also in Hilbert's notes for a lecture on the foundations of physics, see p. 331 above.

[4] As in *Hilbert 1915*, $H = H(g_{\mu\nu}, q_\mu)$ denotes the Lagrangian, g the determinant of the metric, and $[H\sqrt{g}]_{\mu\nu}$ the Lagrangian derivative of $H\sqrt{g}$ with respect to the metric. Here

erste Mal in der Mathematik, dass ein Variationsprinzip zu wenig Gleichungen liefert. Die Variationsprinzipe sind sonst grade deswegen so beliebt, weil sie immer genügend Gleichungen liefern. In der alten Physik war das viel schöner. Dort erhielt man ebenso viele Gleichungen wie unbekannte Funktionen. (z. B. 3 hydrodynamische, 4 elektrodynamische Gleichungen). D. h. man hat immer ein sogenanntes *bestimmtes System*. Hier aber tritt der paradoxe Fall ein, dass wir ein *unterbestimmtes* System von Gleichungen erhalten.

Ein individueller Vorgang in der Natur ist durch die Differentialgleichungen noch nicht bestimmt. Diese geben vielmehr nur das allgemeine Gesetz. Zur Festlegung des einzelnen Ereignisses braucht man noch die Anfangs- oder Randbedingungen. Sind diese auch noch gegeben, so ist der Vorgang nach der Theorie der Differentialgleichungen vollkommen bestimmt. In unserem Falle, wo wir nur 10 Gleichungen für 14 unbekannte Funktionen haben, kann von
der Festlegung eines Ereignisses | durch die Anfangsbestimmungen keine Rede 4
mehr sein. Das ganze Kausalitätsprinzip geht also in die Brüche; denn es ist unmöglich, weitere vier invariante Gleichungen hinzuzufügen. Entweder sind diese neuen Gleichungen eine Folge der ursprünglichen 10, oder sie stehen mit ihnen im Widerspruch.

Wir können leicht einen Vorgang konstruieren, der mit dem alten Kausalitätsprinzip unvereinbar ist. Ein Lösungssystem unserer 14 Gleichungen sei für alle Werte von[5] $x_4 = t$ gegeben durch die bestimmten Funktionen $g_{\mu\nu}(x)$, $q_\mu(x)$. Führen wir eine beliebige Transformation $x_i = x_i(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4)$ aus, so sind die entsprechenden $g'_{\mu\nu}(x')$, $q'_\mu(x')$ nur ein anderer mathematischer Ausdruck für dasselbe mathematische Geschehen. Nun sind aber die 10 Differentialgleichungen gegenüber dieser Transformation invariant, also bleiben die neuen Funktionen $g'_{\mu\nu}(x')$, $q'_\mu(x')$ Lösungen der Differentialgleichungen, wenn man darin die x'_i durch irgend welche Funktionen von x_i, z.B. also durch die x_i ersetzt, d. h. $g'_{\mu\nu}(x)$, $q'_\mu(x)$ sind ebenfalls Lösungen der 10 Differentialgleichungen. Sie stellen natürlich einen ganz anderen individuellen physikalischen Vorgang dar. Wählt man nun $x'_i = x_i$ für $t \leqq 0$, aber $x'_i \neq x_i$ für $t > 0$, doch stetig inklusive aller Ableitungen, so stimmt das physikalische Ereignis $g'_{\mu\nu}(x)$, $q'_\mu(x)$ bis zur Zeit $t = 0$ mit dem Ereignis $g_{\mu\nu}(x)$, $q_\mu(x)$ überein und weicht dann vollkommen von ihm ab.

Am besten wird dies an einem Beispiel klar: die ganze Welt bestehe aus einem einzigen, ruhenden symmetrischen Elektron. Dasselbe ist gegeben durch
ein solches System von 14 | Funktionen $g^*_{\mu\nu}$, q^*_μ, die einerseits unsere 10 Diffe- 5
rentialgleichungen erfüllen und andererseits als Argument $x^2 + y^2 + z^2$, nicht aber die Zeit enthalten. Dieses Lösungssystem gelte für alle x, y, z und für $t \leqq 0$. Dann kann man nicht schliessen, dass die Funktionen $g^*_{\mu\nu}$, q^*_μ auch für $t > 0$ von t unabhängig sein müssen, wenn sie nur weiterhin Lösungen der

it is assumed that the 4 generalized Maxwell equations obtained by varying the electromagnetic potential q_μ are a consequence of the 10 gravitational field equations, as argued in *Hilbert 1915*, pp. 396–397, (this Volume, p. 29f above).

[5] "alle Werte von" was corrected from "beliebiges".

Differentialgleichungen bleiben und für $t = 0$ die alten Werte annehmen sollen. Man kann also nicht schliessen, dass das Elektron in Ruhe bleiben wird; es kann sich tatsächlich in Bewegung setzen.

Die alte Theorie von Einstein läuft nun darauf hinaus, 4 nicht invariante Gleichungen hinzuzufügen.[6] Aber auch dies ist mathematisch falsch. Auf diesem Wege kann die Kausalität nicht gerettet werden.

Die Aufklärung des Paradoxons erhalten wir, wenn wir nur den Begriff der Relativität schärfer zu erfassen suchen. Man muss nämlich nicht nur sagen, dass die Weltgesetze vom Bezugssystem unabhängig sind, es hat vielmehr jede einzelne Behauptung über eine Begebenheit oder ein Zusammentreffen von Begebenheiten physikalisch nur dann einen Sinn, wenn sie von der Benennung unabhängig, d. h. wenn sie invariant ist. Die Behauptung „das Elektron ruht" ist sinnlos; denn sie ist nichts Invariantes, ebenso wenig wie die Behauptung „Göttingen ist 3 Kilometer entfernt". „Das Elektron ruht" heisst: $q_1 = 0$, $q_2 = 0$, $q_3 = 0$, $q_4 \neq 0$.[7] Diese Behauptung ist in der Tat nicht invariant.

6 Wir wollen beweisen, dass das so formulierte Kausali|tätsprinzip: „Alle sinnvollen Behauptungen sind eine notwendige Folge der vorangegangenen" gültig ist. Dieser Satz allein ist logisch notwendig und er ist auch für die Physik vollkommen ausreichend. Durch den Zustand für $t = 0$ sind alle sinnvollen Behauptungen für $t > 0$ eindeutig festgelegt. Die sinnvollen Aussagen über die Zukunft müssen — dies ist unsere Voraussetzung — durch ein System invarianter Gleichungen, in denen die $g_{\mu\nu}$, ihre beliebig hohen[8] Ableitungen, sowie die q_μ und deren[9] Ableitungen auftreten, dargestellt sein. Es muss also, wenn man für ein anderes Koordinatensystem $x_i = x_i(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4)$ die entsprechenden Grössen $g'_{\mu\nu}$ und q'_ν bildet, $F_\rho(g_{\mu\nu}(a), g_{\mu\nu\kappa}(a), g_{\mu\nu\kappa\lambda}(a), q_\mu(a), q_{\mu\kappa}(a))$

[6] Prior to the completion of the general theory of relativity by publication of generally covariant gravitational field equations in November 1915, Einstein had published in 1913 together with Grossmann an "Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und einer Theorie der Gravitation" (*Einstein and Grossmann 1913*). In it he presented a metric tensor theory of gravitation with generally covariant equations of motion. The gravitational field equations of the "Entwurf," however, were not generally covariant. In a second paper coauthored with Grossmann, Einstein had then identified the covariance group of the gravitational field equations of the "Entwurf" and shown that they transform covariantly under "justified" transformations between so-called "adapted" coordinates, i.e. coordinates which satisfy four relations arising from the postulate of energy-momentum conservation for the theory, see *Einstein and Grossmann 1914*. In the fall of 1915 Hilbert initially had reinterpreted Einstein's theory, formulating generally covariant field equations by means of an invariant variational principle and restricting the covariance by stipulation of an additional axiom to this effect. While revising the proofs of *Hilbert 1915*, Hilbert dropped that additional axiom. For further discussion of the prehistory of *Hilbert 1915*, see *Sauer 1999*.

[7] Actually, an electron at rest would be described (in a suitable coordinate system with x_4 identified as the time coordinate) by the conditions $g_{\mu\nu,4} = q_{\mu,4} = 0$ and an electromagnetic four-current with components 0, 0, 0, 1, cf. the discussion of "normal coordinates" below on p. 9, and the corresponding discussion of the electron at rest in *Hilbert 1917*, p. 60, (this Volume, p. 54).

[8] "beliebig hohen" was corrected from "ersten und zweiten".

[9] "deren" was corrected from "ihre ersten".

$= 0$, $\rho = 1, 2, \ldots$, übergehen in $F_\rho(g_{\mu\nu}{}'(a'), g_{\mu\nu\kappa}{}'(a'), g_{\mu\nu\kappa\lambda}{}'(a'), q_\mu{}'(a'), q_{\mu\kappa}{}'(a')) = 0$. Die einzige Bedingung, der die Transformation unterworfen ist, ist außer Stetigkeit und Differenzierbarkeit die, dass für $t = 0$: $t' = 0$, $x'_i = x_i$ $(i = 1, 2, 3)$ wird, d. h. die Transformation soll die Gegenwart ungeändert lassen. Dies ist die Definition einer physikalisch sinnvollen Aussage. Nur eine solche ist durch die Anfangswerte der $g_{\mu\nu}$, q_μ und ihrer Ableitungen eindeutig festgelegt und zwar sind diese Anfangswerte als Cauchy'sche Randbedingungen zu verstehen.

Dass man diese Randwerte beliebig vorgeben kann, oder dass man sich an eine Stelle der Welt hinbegeben kann, wo der durch diese Werte charakterisierte Zustand in diesem Zeitmoment herrscht, muss hingenommen werden. Der die Natur beobachtende Mensch wird eben als ausserhalb dieser physikalischen | Gesetze stehend betrachtet; sonst käme man zu den Antinomien der 7
Willensfreiheit.

Um also eine invariante Aussage zu erhalten, müssen für $g_{\mu\nu}$, q_μ in einem bestimmten Bezugssystem so viele Aussagen gegeben sein, dass man daraus die Koordinaten eliminieren kann. Die Aussage für die Zukunft selber kann dann ein sehr komplizierter Ausdruck werden.

Der Satz „das Elektron ruht" hat keinen Sinn;[10] man kann dasselbe nämlich durch folgende Transformation in Bewegung setzen: $x'_i = x_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ für $t < 0$ und $x_1 = x'_1 + e^{-\frac{1}{t^2}}$, $x'_i = x_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ für $t \geq 0$. Man sieht, dass das Elektron im Augenblick $t = 0$ anfängt, sich zu bewegen. Dagegen ist folgende andere Aussage invariant und sinnvoll⟨:⟩ „hat das Elektron für $t < 0$ geruht, so lässt sich ein solches Koordinatensystem einführen, dass in demselben die Behauptung, „das Elektron ruht" gilt". In der invarianten Schreibweise wird diese Aussage recht kompliziert. Es muss nämlich für das neue Bezugssystem $\frac{\partial g'_{\mu\nu}}{\partial t'} = 0$ und $\frac{\partial q'_\mu}{\partial t'} = 0$ sein. In diesen Gleichungen wird linker Hand alles durch die Funktionen $g_{\mu\nu}(x_1, x_2, x_3, x_4)$, ihre ersten und zweiten Ableitungen nach den x_i, durch die $q_\mu(x)$, ihre ersten Ableitungen nach den x_i und durch die $\frac{\partial x'_i}{\partial x_k}$ ausgedrückt. Aus diesem Gleichungssystem werden dann die vier Funktionen $x'_i(x_1, x_2, x_3, x_4)$ eliminiert. Die so entstehenden Gleichungen $F_\rho(g_{\mu\nu}, \cdots) = 0$ sind folglich ausserordentlich kompliziert. Sie drücken aus, dass das Elektron in dem neuen Bezugssystem ruht.

Den Unterschied zwischen physikalisch sinnvollen und sinnlosen Behaup- 8
tungen kann man auch an einem Beispiel aus der Geographie erläutern. Die Behauptung, drei Orte haben diesselbe geographische Breite, ist physikalisch sinnlos: denn sie wird durch andere Wahl des Koordinatensystems zerstört. Dagegen ist die Behauptung, drei Orte liegen auf einem grössten Kreise der Erdkugel, von der Wahl des Bezugssystems unabhängig.

Auf die Schwierigkeit, zwischen einer sinnvollen und einer sinnlosen Behauptung unterscheiden zu müssen, stösst man übrigens auch in der Weierstrass'schen Variationsrechnung. Dort wird die zu variierende Kurve als in

[10] For another discussion of this example, see *Hilbert 1917*, p. 60, (this Volume, p. 54).

Parametergestalt gegeben angenommen, und man erhält dann eine Differentialgleichung für zwei unbekannte Funktionen. Man betrachtet dann nur solche Aussagen, die invariant bleiben, wenn man den Parameter p durch eine willkürliche Funktion von p ersetzt.[11]

Unsere obige Formulierung[12] des Kausalitätsprinzips, die an die Auffassungen der alten Physik anschloss, gab nur die zeitliche Verknüpfung des physikalischen Geschehens. Wir können aber viel weiter gehen, indem wir die Werte von $g_{\mu\nu}$, q_μ und ihre Ableitungen in einem beliebigen dreidimensionalen Gebiet vorgeben. Die physikalisch sinnvollen Behauptungen sind dann auch durch diese Randbedingungen eindeutig festgelegt und invariant gegenüber allen Transformationen, die die Koordinaten in dieser dreidimensionalen Mannigfaltigkeit, der Basis, die man festhalten muss, ungeändert lassen. Besonders offensichtlich zeigen sich die Aussagen auf Grund der Kausalität, wenn
9 man fol|gendes *Normalkoordinatensystem* einführt, das sich zwar physikalisch nicht als nützlich erweisen wird. Wir wollen nämlich ein solches Bezugssystem wählen, dass in demselben die elektrodynamische Dichte r'^i die Werte 0, 0, 0, 1 annimmt. Diese Dichte ist definiert durch $r^i = \frac{\partial f(q\cdot q)}{\partial q_i} = \frac{\partial f(q\cdot q)}{\partial (q\cdot q)} \sum_\mu g^{\mu i} q_i$.[13] Hierin ist $(q\cdot q) = \sum_{k,l} q_k q_l g^{kl}$ und r^i mit der Vierergeschwindigkeit durch die Gleichungen $r^i = \rho \frac{\partial x_i}{\partial \tau}$ verknüpft, wo ρ die gewöhnliche elektrische Dichte bedeutet. r^i transformiert sich nach der Formel $r^i = \sum_\alpha \frac{\partial x_i}{\partial x'_\alpha} r'^\alpha$, also wird, weil r'^α die Werte 0, 0, 0, 1 haben soll, $r^i = \frac{\partial f}{\partial q_i} = \frac{\partial x_i}{\partial x'_4}$. Um die Transformation auf elektrische Ruhe auszuführen, sind also diese 4 Differentialgleichungen zur Bestimmung von $x_i(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4)$ zu integrieren. Diese Gleichungen löst man als gewöhnliche Differentialgleichungen für die eine Veränderliche x'_4 und mit den Randbedingungen: für $x'_4 = 0$ soll $x'_1 = x_1$, $x'_2 = x_2$, $x'_3 = x_3$, $x_4 = 0$ sein. Hierdurch erhält man eine bestimmte Transformation des Vektors 0, 0, 0, 1 der verlangten Art. Will man alle Transformationen erhalten, so fügt man zu dieser noch die Transformation des Vektors 0, 0, 0, 1 in sich hinzu. Die Differentialgleichungen hierfür sind $\frac{\partial x_i}{\partial x'_4} = 0$ $(i = 1,\ 2,\ 3)$ und $\frac{\partial x_4}{\partial x'_4} = 1$ mit den allgemeinen Lösungen $x_i = \mathfrak{v}_i(x'_1, x'_2, x'_3)$ für $i = 1, 2, 3$ und $x_4 = x'_4 + \mathfrak{v}_4(x'_1, x'_2, x'_3)$, wobei die $\mathfrak{v}_i$ willkürliche Funktionen bedeuten. Soll also die Transformation für $x'_4 = 0$ in $x'_i = x_i$ für $i = 1,\ 2,\ 3$ und $x_4 = 0$

[11] The parametric formulation of a variational integral of the form $\int f(x, y, dy/dx)dx$ with $x = x(y)$ as $\int F(x, y, dx/dt, dy/dt)dt$ with $x = x(t)$ and $y = y(t)$ and its consequences such as homogeneity of the first degree of F with respect to x' and y' is introduced routinely in the first chapters of Weierstraß's lectures on the calculus of variations, see chapters 8 and 9 of *Weierstraß 1927* which is the published version based on several *Ausarbeitungen* of these lectures. Weierstraß's lectures on the calculus of variations are briefly mentioned in Hilbert's obituary of Weierstraß (*Hilbert 1897*, p. 68). A copy of an *Ausarbeitung* was available in the *Mathematisches Lesezimmer* (*Hiemenz 1907*, pp. 103, 168). For a discussion of Weierstraß's work in the calculus of variations, see *Goldstine 1980*, ch. 5, for a discussion of Hilbert's work in the calculus of variations, see *Thiele 1997*.

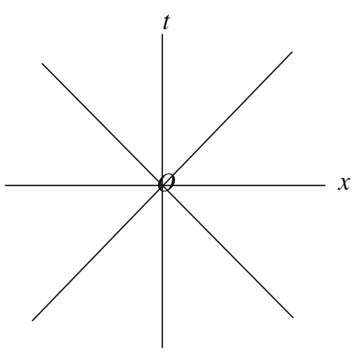
[12] "Formulierung" was corrected from "Folgerung".

[13] The second equation is missing a factor of 2, and the summation should run over i. Here, as in *Hilbert 1915*, p. 407, f is an arbitrary function.

übergehen, so ist sie die identische, d. h. die Transformation auf elektrische Ruhe ist auf eine und nur eine Weise möglich.

Es drückt sich daher jede Aussage in dem Koordinaten|system, in Be- 10
zug auf welches die Elektrizität ruht, durch *allgemeine Invariante* aus. Diese ausgezeichnete Eigenschaft kommt gerade dem Bezugssystem der elektrischen Ruhe zu, d. h. demjenigen, das r^i die Werte 0, 0, 0, 1 erteilt. Ein beliebiger Vektor lässt sich durchaus nicht immer auf diese Form bringen, z.B. ist dies für den Vektor q_i nicht der Fall. Dies liegt daran, dass q_i ein kovarianter, r^i aber ein kontravarianter Vektor ist. In der Tat würden für $q'_i = 0, 0, 0, 1$ die Transformationsformeln des kovarianten Vektors für die neuen Koordinaten die Gleichungen $q_i(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{\partial x'_4}{\partial x_i}$ liefern, d. h. vier Gleichungen für die eine unbekannte Funktion x'_4. Diese Gleichungen sind nur dann lösbar, wenn die Integrabilitätsbedingung $\operatorname{curl} q = 0$ erfüllt ist. Der $\operatorname{curl} q$ ist nämlich eine allgemeine Invariante, die also durch passende Wahl des Bezugssystems nicht zum Verschwinden gebracht werden kann.

Natürlich hat man, wenn man auf elektrische Ruhe transformiert, nicht auch die Energieströmung verhindert. Diese vollzieht sich dann vielmehr in den $g_{\mu\nu}$.



Wir wollen nun die von Einstein aufgeworfene Frage beantworten, ob es durch eine Koordinatentransformation möglich ist, die *zeitliche Folge von Ursache und Wirkung* zu vertauschen.[14]

In der kleinen Relativitätstheorie ist das bekanntlich unmöglich.[15] Dort liegen alle Punkte, auf die der 0-Punkt wirken kann, im „Nachkegel", alle diejenigen, die auf
den 0-Punkt wirken können, im |„Vorkegel". 11
Auf Gleichzeitigkeit lassen sich durch die Lorentztransformation nur solche Punkte bringen, die ausserhalb dieser Kegel liegen und daher physikalisch in gar keinem Zusammenhang stehen. Ein Punkt einer Weltlinie ist durch $x = at$, wobei $a < 1$ ist, gegeben, und da jetzt jede

---

[14]In § 16 ("Kritische Bemerkungen über die Grundlagen der Theorie") of *Einstein 1914*, following his derivation of the (non-generally covariant) "Entwurf"-field equations, Einstein discusses the question whether the line elements of one and the same coordinate axis could be timelike and spacelike, hence excluding the possibility of distinguishing one coordinate as time. (See also Einstein to Lorentz, 17 January 1916, *CPAE8-A 1998*, p. 246). He also poses the question whether closed world lines of material points could exist. Both these questions are adressed by Hilbert below.

[15]The geometric interpretation of the Lorentz transformation by means of the notion of a light cone was introduced in *Minkowski 1909*. For the causal interpretation of the light cone, see *Laue 1911*, §8.

Transformation erlaubt ist, so wird der Punkt x, t mit dem 0-Punkt auf Gleichzeitigkeit gebracht durch $x' = x$, $t' = t - \frac{x}{a}$. Ja es kann sogar auf beliebig viele Weisen die zeitliche Reihenfolge umgekehrt werden.

Dies widerspricht allen unseren physikalischen Erfahrungen. Darum untersuchen wir, welches die geringsten Einschränkungen für alle Bezugssysteme sind, damit die Möglichkeit der Vertauschung von Ursache und Wirkung verhindert wird. Zu diesem Zwecke benötigen wir folgender *Definitionen*⟨:⟩

1) Bezeichnen wir die quadratische Form $\sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu}(x_1, x_2, x_3, x_4) X_\mu X_\nu = G(X_1, X_2, X_3, X_4)$, so nennen wir $G(X) = 0$ den zum Punkte x_1, x_2, x_3, x_4 gehörigen *Nullkegel*. (Derselbe ist gegenüber einer allgemeinen Transformation also nicht invariant). Die in jedem Punkte einer Weltlinie errichteten Nullkegel sind hier im Gegensatz zum kleinen Relativitätsprinzip zu einander nicht mehr parallel gerichtet.

2) Unter einer *Nulllinie* versteht man jede Kurve $x_i(p)$ welche der Gleichung $G(\dot{x}_i(p)) = 0$ genügt. Diese Gleichung ist eine gewöhnliche Mongesche (diophantische) Differentialgleichung. In der gewöhnlichen Geometrie sind die Nulllinien imaginär.

12 3) Eine *geodätische Nulllinie* erfüllt sowohl $\delta \int \sqrt{\sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} dx_\mu dx}$[16] $\langle = 0\rangle$ als auch $G(\dot{x}_i(p)) = 0$. In der kleinen Relativitätstheorie sind diese Linien Gerade, die mit der t-Achse einen Winkel von 45° bilden.

4) Legt man durch einen Weltpunkt alle durch ihn hindurchgehenden geodätischen Linien, so bilden dieselben eine Fläche, die in diesem Punkte eine Spitze hat. Diese Fläche nennen wir *Zeitkegel*. Er ist gegenüber einer allgemeinen Transformation invariant.

5) Jede Linie, die innerhalb der in jedem Punkte errichteten Nullkegel liegt, soll eine *Zeitlinie* heißen; und jede ausserhalb dieser Nullkegel verlaufende Linie heisse eine *Raumlinie*. Die Bedingung dafür, dass $x_i(p)$ eine Zeitlinie oder Raumlinie darstellt, ist bezw. $G(\dot{x}_1(p), \dot{x}_2(p), \dot{x}_3(p), \dot{x}_4(p)) < 0$ und $G(\dot{x}_i(p)) > 0$.

6) Ein (zeitloser) *Dreierraum* heisse ein dreidimensionaler Raum, wenn die in jedem seiner Punkte errichteten (ebenen) Tangentialräume sämtlich ausserhalb der zu diesen Punkten gehörenden Nullkegel liegen. Jede Linie dieses Raumes ist eine Raumlinie. Der Dreierraum bildet das Gegenstück zur Zeitlinie. Die analytische Bedingung dafür, dass eine dreifach unendliche Mannigfaltigkeit $x_i = x_i(p_1, p_2, p_3)$, $(i = 1, 2, 3, 4)$ einen Dreierraum darstellt, ist $G(X_1, X_2, X_3, X_4) > 0$, wobei $X_i = \frac{\partial x_i}{\partial p_1} p_1 + \frac{\partial x_i}{\partial p_2} p_2 + \frac{\partial x_i}{\partial p_3}$[17] bedeutet. Dann gelten folgende Sätze:

13 I) Jede Zeitlinie verläuft ganz innerhalb des zu je|dem ihrer Punkte gehörigen Zeitkegels, weil jeder Nullkegel, dessen Spitze auf dem Zeitkegel liegt, diesen Zeitkegel berührt.

[16] dx should be dx_ν.

[17] The last term should be multiplied with p_3.

II) Eine geodätische Nulllinie kann nie in einen Dreierraum hineingehen. Dagegen kann man die Spitze des Zeitkegels mit jedem beliebigen Punkte innerhalb oder auf dem Zeitkegel durch eine Raumlinie verbinden.[18]

Eine solche Zeitlinie kann sich nun schliessen, d. h. in sich zurücklaufen. Dann hat man eine *Riemannsche Welt* vor sich, in der die $g_{\mu\nu}$ und q_μ nicht mehr eindeutige Funktionen der x_i sind. Wenn dieser Fall eintritt, scheinen sich Ursache und Wirkung zu vertauschen.[19] Dieses Paradoxon löst sich folgendermaßen: es sind von vornherein zwei Fälle denkbar:

a) Die Zeitlinie kann nicht auf Null zusammengezogen werden. Dann ist die Eigenschaft eines Punktes dieser Riemannschen Welt, dass zu demselben mehrere Potentialwerte gehören eine rein zufällige, vom Koordinatensystem unabhängige,[20] also physikalisch sinnlose.

b) Der Fall, dass die Zeitlinie auf Null zusammengezogen werden kann, was vom Koordinatensystem unabhängig wäre, kann nicht eintreten. Es gilt nämlich der

Satz: Um jeden Weltpunkt lässt sich eine so kleine Umgebung abgrenzen, dass in derselben keine geschlossene Zeitlinie existiert.

Beweis: Wir führen für x_1, x_2, x_3, x_4 solche Variable, die wir wieder x_1, x_2, x_3, x_4 nennen, ein, dass in dem Welt|punkt $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 =$ 14
0, den wir ins Auge fassen, $G(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = a_1\xi_1^2 + a_2\xi_2^2 + a_3\xi_3^2 - a_4\xi_4^2$; $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $a_3 > 0$, $a_4 > 0$ gilt. Dann betrachten wir eine beliebige, durch den 0-Punkt gehende Weltlinie $x_i = x_i(s)$, wo aber jetzt s die wirkliche Bogenlänge der Kurve bedeutet, so dass $\sum_{i=1}^{4}(\frac{dx_i}{ds})^2 = 1$ ist. Für die Weltlinie ergibt sich dann im 0-Punkt $G(\frac{dx_1}{ds}, \frac{dx_2}{ds}, \frac{dx_3}{ds}, \frac{dx_4}{ds}) \geq a^* \left\{(\frac{dx_1}{ds})^2 + (\frac{dx_2}{ds})^2 + (\frac{dx_3}{ds})^2\right\} - a_4(\frac{dx_4}{dx})^2$, wenn a^* der kleinste der positiven Werte a_1, a_2, a_3 ist. Also wird

$$G\left(\frac{dx_1}{ds}, \frac{dx_2}{ds}, \frac{dx_3}{ds}, \frac{dx_4}{ds}\right) \geq a^* \left\{1 - \left(\frac{dx_4}{ds}\right)^2\right\} - a_4\left(\frac{dx_4}{ds}\right)^2,$$

und dieser Ausdruck ist gewiss

$$> \frac{1}{2}a^*,$$

wenn für die Weltlinie $\left(\frac{dx_4}{ds}\right)^2$ genügend klein ausfällt; und zwar muss $\left(\frac{dx_4}{ds}\right)^2 < \pi$ sein, wo $\pi = \frac{1}{2}\frac{a^*}{a^*+a_4}$ ist. Also ist für das von uns gewählte Koordinatensystem das Minimum von

$$G(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) > \frac{1}{2}a^*,$$

---

[18]The proof of this second theorem is given below in an appendix to the lecture on pp. [16f].

[19]See note 14 above. In 1949 Gödel showed that Einstein’s gravitational field equations admit solutions that include closed timelike curves (see *Gödel 1949* and, e.g., *Malament 1987* for further discussion of these solutions).

[20]“unabhängige” should be “abhängige”.

wenn nur $\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2+\xi_4^2 = 1, \xi_4^2 < \pi$ ist. Wegen der Stetigkeit der Koeffizienten in G wird das Minimum von G in den zum 0-Punkt benachbarten Punkten, wo nun G freilich nicht mehr die einfache Form einer Summe von Quadraten hat, doch benachbarte Werte annehmen. Man bestimme also eine so kleine Umgebung des betrachteten Punktes, dass das Minimum von G bei denselben Nebenbedingungen und bei dem gleichen π noch $\geqq \frac{1}{4}a^*$ bleibt. Für diese Umgebung folgt dann, dass eine Weltlinie, für die überall $\left(\frac{dx_4}{ds}\right)^2 < \pi$ ausfällt,
15 nicht die Zeitlinie sein kann, da für die Zeitlinie | $G(\dot{x}_i(p)) < 0$ ist. Also ist für jede Zeitlinie $\left(\frac{dx_4}{ds}\right)^2 \geqq \pi$. Eine solche Linie kann aber, wenn sie samt ihren Ableitungen stetig sein soll, nicht geschlossen sein, q. e. d.

Hiermit ist obiges Paradoxon geklärt; das Kausalitätsprinzip ist dadurch nicht gefährdet. Wir können nun die andre Frage beantworten: Welche einschränkende Auswahl muss unter den Koordinatensystemen getroffen werden, damit in den zulässigen Ursache und Wirkung ihre zeitliche Reihenfolge nicht vertauschen können? Wir denken uns also die zehn Funktionen $g_{\mu\nu}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ willkürlich gegeben bis auf die eine Bedingung[21]

$$\langle \mathrm{g}<0. \rangle$$

Diese vierdimensionale Welt erfüllen wir nun durch eine dreifach unendliche Schar von Zeitlinien und durch eine einfach unendliche Schar von Dreierräumen. Wir behaupten:

Die Gesamtheit dieser Zeitlinien und Dreierräume ist zugleich die Gesamtheit der erlaubten Koordinatensysteme. Mit anderen Worten: Man darf die Koordinaten x_1, x_2, x_3 nur dann als räumliche und x_4 nur dann als Zeit ansprechen, wenn sie bez. zu jener Schar von Dreierräumen und jenen Scharen von Zeitlinien gehören, und es gilt der

Hauptsatz: Geht man von einem erlaubten Bezugssystem zu einem andern erlaubten über, so bleibt die Reihenfolge von Ursache und Wirkung erhalten.

Beweis: Es liege also der Weltpunkt E_2 mit $E_1(0, 0, 0, 0)$ auf einer Zeitlinie. Wäre nun eine Transformation auf Gleichzeitigkeit $t' = 0$ möglich, so würden die beiden Punkte in einem Dreierraum liegen. Dann läge aber E_2
16 ausserhalb des | Zeitkegels von E_1. Dies ist ein Widerspruch gegen die Voraussetzung: denn eine Zeitlinie liegt stets innerhalb der Zeitkegel aller ihrer Punkte (Satz I).

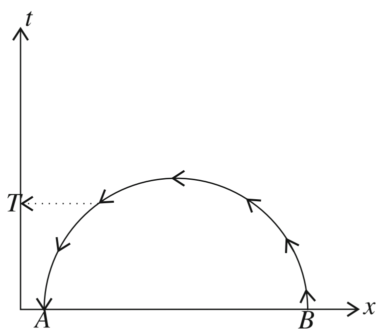
Erlaubte Koordinatensysteme lassen sich bei beliebiger Wahl der $g_{\mu\nu}$ immer finden, doch wird die Welt dann im allgemeinen eine Riemannsche sein, d. h. die $g_{\mu\nu}$ sind nicht mehr eindeutige Funktionen ihrer Argumente. Die analytische Bedingung dafür, dass ein Koordinatensystem ein erlaubtes ist, wird durch folgende *Ungleichungen* ausgedrückt:

$$g_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} > 0, \quad g_{44} < 0.$$

[21] The following equation is missing in the original.

Diese Ungleichungen lassen sich auch so formulieren: In jedem Weltpunkt liegt die t-Achse innerhalb und der Dreierraum ausserhalb des zugehörigen Nullkegels. In der Tat wird in Folge dieser Bedingungen der Schnitt des Nullkegels mit dem Dreierraum (Streckenraum) imaginär. Der Dreierraum hat die Gleichung $x_4 = 0$. Der Schnitt von Nullkegel und Dreierraum ist $\sum_{\mu\nu=1}^{3} g_{\mu\nu} X_\mu Y_\nu = 0$ und dieser dreidimensionale Kegel ist wegen obiger Ungleichungen imaginär.

Nachtrag : *Beweis von Satz II (S.13)*:



Der Dreierraum oder Streckenraum wird in jedem Punkt der t-Achse in der nebenstehenden zweidimensionalen Figur durch eine Parallele zur x-Achse dargestellt. Gäbe es eine Zeitlinie, | die zwei Punkte A und 17
B des zu $t = 0$ gehörenden Dreierraumes (x-Achse der Figur) verbinden könnte, so würde auf dieser Zeitlinie mindestens ein Punkt $t = T$ liegen, in dem der zugehörige Nullkegel den Dreierraum der Zeit T tangieren würde. Der Nullkegel kann aber wegen der Bedingungen, die das erlaubte Koordinatensystem erfüllen muss, keine Fläche mit dem Streckenraum gemein haben.

Description of the Text

Collection: SUB Göttingen, signature *Cod. Ms. D. Hilbert 642*.
Size: Page size approx. 28.8 cm $\times$22.4 cm.
Cover Annotations: The typescript lacks a cover page.
Composition: The typescript consists of 17 loose pages.
Pagination: The recto sides are paginated in the upper right corner from 1 to 17. Pagination is part of the typescript. The verso sides of the pages have neither been paginated nor counted.
Original Title: The typescript lacks a title page; however, the first line on the first page presents a title: 'Das Kausalitätsproblem in der Physik'.
Text: The typescript has been completed with drawings and additions such as formulas or mathematical symbols in black ink. The handwriting of the person adding formulas and symbols is identical to that of the person who arranged *Hilbert 1916/17**, which is, according to its title page, R. Bär. Nothing indicates, that Hilbert made any corrections or additions in this draft except a correction of an orthographic mistake on page no. 15, made by Hilbert himself.

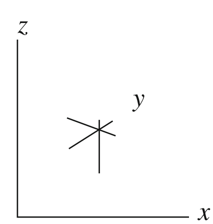
⟨Bucharest Lectures on Space and Time⟩

Bukarest
März 1918

In dem gewaltigen Wissenskomplex Philosophie, Mathematik, Physik gibt 1
es 2 fund⟨amentale⟩ Begriffe, die jeder Wissenschaft spezifisch und zugleich gemeinsam gleichbedeutsam sind: *Raum und Zeit*.

Raum ist vielseitig untersucht worden: von den Philosophen, Mathematikern, Physikern.

Kant: der Raum ist eine notw⟨endige⟩ Vorstellung. “Man kann sich niemals eine Vorstellung davon machen, dass kein Raum sei, ob man sich gleich ganz wohl denken kann, dass keine Gegenstände darin angetroffen werden”.[1] Der Raum ist eine *reine Anschauung*, denn man kann sich nur einen einzigen Raum vorstellen. Der Raum gehört nach Kant nicht zum *Inhalt* der sinnlichen Anschauung, sondern ist ihre Form, die sie und damit Erfahrung erst möglich macht: *transzendentale Idealität* und *empirische Realität*. Charakter der Geometrie. Der Mathematiker, so interessant er solche Gedanken findet, giebt sich nicht damit zufrieden: er will die Eigenschaften des Raumes beschreiben und ihren logischen Zusammenhang aufdecken. Das vollkommenste Mittel dazu ist die *Zahl*.



Rechtwinkliges Koordinatenkreuz. Darin ist der Punkt durch die 3 Abstände, die man durch Zahlen bestimmt (Einheitsstrecke!), bestimmt. Es giebt ausgezeichnete Flächen, die Ebenen, ⟨die⟩ durch

[1] The quote is from the “Transzendentale Ästhetik, Erster Abschnitt. Von dem Raume, § 2,” p. A24/B38f ([p. 67]*Kant 1956*). Kant’s concept of space is mentioned briefly in a footnote in the third edition (published 1918) of *Einstein 1917a*, p. 87. Somewhat more explicitly Kant’s concepts of space and time are discussed in the context of General Relativity in *Schlick 1917*, pp. 54–55.

lin⟨eare⟩ Gleichungen charakterisiert sind. (analytische Geometrie).[2] Bestimmter Körper.[3] x, y, z. Ebene ist eine lin⟨eare⟩ Gleichung; Gerade sind zwei solche Gleichungen. Entfernung findet man aus der Gleichung: $s = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$.
Gleichberechtigte Systeme x', y', z'.

$$\begin{array}{c|c} x' = \alpha_{11}x+\alpha_{12}y+\alpha_{13}z & x' = x+\alpha_1 \\ \dots & \dots \end{array}$$

Gerade, Ebene, Entfernung sind invariant.

2 |[4]Ebenso die Länge: $x_2-x_1 : dx$, $y_2-y_1 : dy$, $z_2-z_1 : dz$

$$\int ds = \int \sqrt{dx^2+dy^2+dz^2} \quad x = x(p), \quad y = y(p), \quad z = z(p)$$

Speziell zweidimensionaler, eindimensionaler Raum.

Dies ist der *Euklidische* Raum[5] = *Deskartischer*, wie wir ihn auf der Schule lernen, (Dreieckscongruenz, Parallelenaxiom), wie sie das *tägliche Leben*, der *Techniker* und meist auch - bis vor kurzem ausschließlich ⟨-⟩ der *Physiker* braucht; und damit kommen wir zu den Physikern. *Newton sagt*: Der abs⟨olute⟩ Raum bleibt vermöge seiner Natur und ohne Beziehung auf einen äusseren Gegenstand stets gleich und unbeweglich.[6] (Der Physiker sieht die Sätze der Geometrie als Naturgesetze an, die der experimentellen Bestätigung fähig und bedürftig sind.) Bewegung starrer Körper entspricht den Kongruenzsätzen. Gerade sind Stäbe, gespannte Fäden, Lichtstrahlen, Bahn des freien Massenpunktes etc. Winkelsumme im Dreieck Brocken, Inselberg, Hohe⟨r⟩ Hagen.[7]

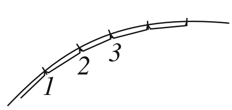
Nun Zeitbegriff.

---

[2]As was done repeatedly in the manuscript — see the note on the text —, the text "Darin ist der Punkt ... (analytische Geometrie)" and the figure were written in pencil on the left hand page and indicated to be inserted at this place by a correction sign. The word "Einheitsstrecke!" was interlineated without brackets.

[3]The preceding two words interlineated in pencil.

[4]At the top of the page, Hilbert wrote:



$$\sqrt{(x_2-x_1)^2} \qquad + \qquad \sqrt{(x_3-x_2)^2}$$

[5]Interlineated with pencil: "weil man andere Räume ⟨kennt⟩!".

[6]The preceding sentence was taken verbatim from *Newton 1872*, p. 25.

[7]For another mention of Gauß's experiment, see *Hilbert 1916a**, p. 5, (this Volume, p. 85 and its note 10).

Kant: Zeit ist eine notwendige Vorstellung. Man kann sich niemals eine Vorstellung davon machen, dass keine Zeit sei, ob man zwar wohl die Erscheinungen überhaupt aus der Zeit wegnehmen kann etc. wie oben.[8]
Mathematiker t-Achse $t' = t + d$.

Newton: Die absolute, wahre u⟨nd⟩ mathematische Zeit verfliesst an | sich 3
und vermöge ihrer Natur gleichförmig und ohne Beziehung auf irgend einen äusseren Gegenstand.[9] Zusammenfassend nun haben wir: Ideale Uhren, die an jeder Stelle des absoluten Raumes aufgestellt sind und die absolute Zeit anzeigen.[10] (Dieser Zeitbegriff ist der *von Kindheit an* uns Allen geläufige, altüberlieferte des *täglichen* Lebens, von den *Technikern* und *Praktikern* gebrauchte.)

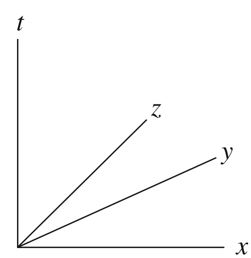
Sie sehen: dass Raum und Zeit zusammengehören ist eine alte Wahrheit; besonders Kant hebt ja schon äusserlich im Ausdruck das Gemeinsame scharf hervor. Aber wie eng diese Verknüpfung und wie tief und gewaltig die volle Erkenntnis dieser Wahrheit reicht, davon hatte man doch *keine Ahnung*, dies ist erst heute klar. Bisher nur Analogie bei der Darstellung von Raum und Zeit.

Nun sachlich: Der vermittelnde Begriff zwischen Raum und Zeit ist der der *Bewegung*;[11] die einfachste Bewegung ist die gradlinig gleichförmige

[8]"Transzendentale Ästhetik, Zweiter Abschnitt. Von der Zeit, § 4," p. A31/B46 ([p. 74]*Kant 1956*) reads: "Die Zeit ist eine notwendige Vorstellung, die allen Anschauungen zum Grunde liegt. Man kann in Ansehung der Erscheinungen überhaupt die Zeit selbst nicht aufheben, ob man zwar ganz wohl die Erscheinungen aus der Zeit wegnehmen kann."

[9]The preceding sentence was taken verbatim from *Newton 1872*, p. 25.

[10]Interlineated with pencil: "4 dimen⟨sionale⟩ Welt". On the left hand page, there is a sketch of a four-dimensional coordinate system:



[11]Interlineated with pencil:

"Gleichbleiben der Lage in der Zeit heisst Ruhe.
Veränderung " Bewegung."

$x = vt\langle,\rangle\ v = $ konst.[12]

$$\begin{aligned} x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}$$

$\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{dx}{dt} = v = $ konst. Geschwindigkeit längst der x-Achse. x', y', z' sind Koordinaten im mitbewegten System.

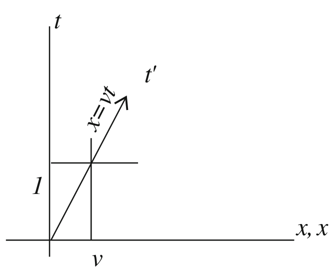
Allgemeiner[13] am Allgemeinsten

$$\left.\begin{aligned} x' &= x + a_1 t \\ y' &= y + a_2 t \\ z' &= z + a_3 t \end{aligned}\ \right| \quad \begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_1 t \\ y' &= \ldots \\ z' &= \end{aligned} \qquad \mathfrak{v} = (-a_1, -a_2, -a_3)$$

wo ⟨die⟩ a_{hk} ⟨eine⟩ orthogonale Transf⟨ormation darstellen.⟩

4 Hier erscheint *zum ersten Mal* in bedeutungsvoller Weise formal Raum und Zeit x, y, z und t verbunden, die konst⟨anten⟩ Komponenten a_1, a_2, a_3 neben den a_{hk}! ({ Die Bewegung ist für das Galileische Trägheitsgesetz eine ausgezeichnete (verharrt in Ruhe oder gradlinig gleichförmiger Bewegung.)}) Auch fordert das analoge Auftreten von x, y, z, t zur Zeichnung im $x - t$ bez. $x - y - z - t$-Raume heraus. Darstellung durch die Gerade im vierdimensionalen Raume.[14] Einfachstes Beispiel einer *Weltlinie* ist nichts anderes als was in der $x - t$ *Ebene jedem Techniker geläufig*. Wenn wir nun in Bezug auf das mitbewegte Koordinatensystem wieder einen Körper gradlinig gleichförmig sich bewegen lassen, so tut er es auch in Bezug auf das erste (Flieger

[12] On the left hand page, Hilbert wrote: "z. B. Fieberkurve" and sketched the following figure:



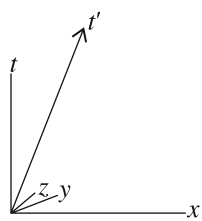
[13] On the left hand page, Hilbert wrote with pencil: "Promenade im D-Zug $x' = x - vt$; $w = u + v$ $x'(y'z')$ Koordinaten des D-Zuges; x'' Koordinate des Mannes im Zug; $x'' = x' - ut = x - (u + v)t$. Alle Folgerungen stimmen mit Wirklichkeit. Am Platze Beispiel von Geschwindigkeiten. Gras wachsen: $\frac{10^{-5}\text{cm}}{\text{sec}}$, kl. Uhrzeiger = Geschwindigkeit der Bakterien $\frac{10^{-3}\text{cm}}{\text{sec}}$." A mark in blue pencil and the word "Beiblatt" indicates that Hilbert at this point referred to some unidentified sheet with additional notes.

[14] On the left hand page, Hilbert sketched the following figure:

quer über den Eisenbahndamm im fahrenden Wagen) u. zwar Addition der Geschwindigkeiten:[15]

$$x' = x + at$$
$$x'' = x' + bt \ : \ x'' = x + (a+b)t \ : \ v + w \quad \text{neue Geschwindigkeit}$$

Promenade im D-Zug:[16] Ist die (absolute) Bewegung in Bezug auf K eine Galileische, so ist sie es auch bezüglich K'. Dies ⟨ist⟩ trivial, nun aber das Galileische Relativitätsprinzip: *Alles Naturgeschehen verläuft bezüglich K' nach genau denselben Gesetzen wie bezüglich K*. Also ob Eisenbahn, Schiff, Nordpol, Aequator, Tag und Nacht, Sommer, Frühling etc. wir |[17] merken keinen Unterschied wenn wir Flöte spielen, Billard, Schlittschuh laufen oder jonglieren — und doch erhebliche Änderungen der Geschwindigkeit an Grösse und Richtung. Die alte klassische, von den Technikern allein angewandte Mechanik ergiebt genau dies Trägheitsgesetz. So *scheinbar Alles gut*, als ob Galilei und Newton[18] das letzte Wort hätten - und Alles plausibel und in sich sicher. Nun aber nähere Prüfung ergiebt Bedenklichkeiten.[19] Lichtausbreitung im



[15] Of the following equations, the first was interlineated in pencil. Also, on the left hand side, Hilbert wrote in pencil: "$x' = x - vt$, $y' = y$, $z' = z$, Analogon zur Koordinatentransformation im Raume!"

[16] The illustration of the relativity of motion in terms of a moving railway wagon is used repeatedly in *Einstein 1917a*, p. 6 and passim.

[17] At the top of the page, Hilbert wrote: "Noch Galileische Prinzip: Kant."

[18] Interlineated with pencil: "Kant".

[19] To be inserted at this point, the following text was written with pencil on the left hand page: "M. H. Wir hatten bisher die Gal. Bew. u. Gal. Relativ. behandelt. *Gal. Bew.*: Wenn wir in Bezug auf ein solches die Naturges. formulieren, so sind es dieselben wie in Bezug auf den absoluten Raum d. h. invariant bei

$$\begin{array}{ll} x' = a_{11}x + \cdots + a_{13}z + a_1 t \quad \text{sp.} & x' = x - vt \\ y' = & y' = y \\ \ldots & z' = z \end{array}$$

Beispiel: $m\frac{d^2x}{dt^2} = K$. Durch *Fall*gesetz nie prüfen ob Ruhe ob Gal. Bew. So scheinbar Alles gut und das ist es auch in der groben Mechanik; aber feinere Prüfung führt zu leeren Raum nach denkbar einfachstem Gesetz, das jedem Schulkind bekannt ⟨ist,⟩ $c = 300000$ km/sek. Lichtstrahl im Eisenbahnwagen ist wegen Addition der Geschwindigkeit[20] ⟨im⟩ Widerspruch gegen das Relativitätsprinzip von Galilei, wenn man die Ausbreitung des Lichtes eben auch als allgemeines Naturgesetz ansehen will. Aber dies brauchen wir ja nicht zu tun.[21] Zur Entscheidung dieser Schwierigkeit Experimente:[22]

2) *Fizeau* (Brechungsexponent von Wasser $n = \frac{c}{c_f}$). Wenn das Wasser mit der Geschwindigkeit v strömt, so lehrt das obige Gesetz der Addition der Geschwindigkeiten:[23]

$$c'_f = c_f + v;$$

das Experiment zeigt dagegen[24]

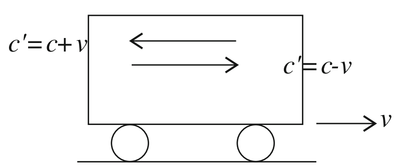
$$c'_f = c_f + v(1 - \frac{1}{n^2}),$$

also dies Gesetz falsch!
Arge Verlegenheit: versuchen S.7[25]

Unstimmigkeiten, bereitet Verlegenheit. Die Verlegenh. zu schildern, heute" Deleted, with pencil: "arge Verlegenheit" and "ratlos".

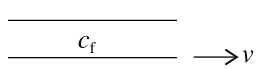
[20]The words "wegen Addition der Geschwindigkeit" are interlineated.

[21]The preceding sentence is interlineated. On the left hand page, the following figure was added:



[22]Here and in the following, the numbering of the paragraphs dealing with Fizeau's and Michelson's experiments was changed in the original. Apparently, Hilbert initially intended to discuss Fizeau's experiment first and Michelson's experiment second. He then seems to have changed his mind, introducing the corresponding corrections. For a discussion of the role of Fizeau's and Michelson's experiments for Einstein's discovery of special relativity, see *CPAE2 1989*, pp. 258–266. For contemporary accounts of the role of experiments for the foundation of special relativity, see e.g. *Einstein 1917a*, § 16, *Laue 1911*, § 2.

[23]On the left hand page, the following figure was added:



[24]Fizeau's experiments on the velocity of light in a moving liquid were published in *Fizeau 1851*. The significance of these experiments for the foundation of special relativity is discussed at various places in Einstein's writings (e.g. *Einstein 1917a*, § 13.) as well as in other textbooks, e.g. *Laue 1911*, pp. 10–11.

[25]Interlineated at the right bottom corner of this page: "Also es scheint auf das Gesetz von der *Addition der Geschwindigkeiten abgesehen* zu sein, gerade was ich als *trivial* — bei unseren alten Anschauungen von Raum und Zeit — bezeichnete, während Relat. gelten könnte — freilich nicht mit den *obigen Transformationsformeln.*"

1. *Michelson.*[26] Das System $x'y'$ bewege sich mit der Geschwindigkeit v 6
längs der x-Achse. Zur Zeit $t = 0$ lassen wir einen Lichtstrahl vom Punkt (00) unter dem Winkel ϑ gegen die x-Achse ausgehen. Nach d. Zeit t ist das Signal bis zum Punkt

$$x = ct\cos\vartheta, \quad y = ct\sin\vartheta$$

gelangt. Nach S. 3[27] wird

$$x' = ct\cos\vartheta - vt, \quad y' = ct\sin\vartheta$$

also im bewegten System

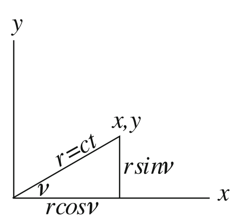
$$\begin{aligned} {c'_\vartheta}^2 &= \frac{{x'}^2 + {y'}^2}{t^2} = c^2 - 2cv\cos\vartheta + v^2 \\ c'_\vartheta &= \sqrt{c^2 - 2cv\cos\vartheta + v^2} \end{aligned}$$

insbesondere[28] $c'_0 = c - v$, $c'_\pi = c + v$, wie einleuchtet.
M⟨ichelson⟩ beobachtet mit äusserster Genauigkeit[29] $(v = 30\frac{\text{km}}{\text{sec}}.)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{c'_\vartheta} = \frac{1}{c'_{\vartheta+\pi}} &= \left[(c^2 - 2cv\cos\vartheta + v^2)^{-\frac{1}{2}} + (c^2 + 2cv\cos\vartheta + v^2)^{-\frac{1}{2}}\right] \\ &= \frac{2}{c} + \frac{v^2}{c^3}(3\cos^2\vartheta - 1) + \cdots \end{aligned}$$

und findet $\frac{2}{c}$, also $c_\vartheta{}'$ unabhängig von ϑ, als ob ein Relativitätsprinzip gelte! aber nicht, wie es Galilei meinte, sondern krasser Widerspruch gegen Addition

[26] On the left hand page, Hilbert sketched the following figure:



and wrote the equations

$$\begin{aligned} x' &= x - vt \\ y' &= y \end{aligned}$$

[27] See [p. 3] of the manuscript above.

[28] In the following equations, c'_0 and c'_π were corrected in pencil from γ_0 resp. γ_π. On the left hand side, Hilbert had written and deleted, with pencil: "Künstliche, aber tiefsinnige Versuche von H. A. Lorentz".

[29] For Michelson's experiment, see *Michelson 1881*, *Michelson 1887*, and the discussion in *Laue 1911*, pp. 13–15.

der Geschwindigkeit. Deshalb noch 2$^{\text{ter}}$ naheliegender Versuch: Fizeau, wo dies Gesetz allein zur Prüfung gelangt.[30]

7 Für[31] 1. wäre Ritzsche Hypoth⟨ese⟩, wonach Lichtfortpflanz⟨ung⟩ wie Korpuskular-theorie. Dies aber mit elektromag⟨netischer⟩ Th⟨eorie⟩ nicht vereinbar.[32] Dem aber steht de Sitters Doppelsternbeob⟨achtung⟩ gegenüber.[33] Das Licht eines solchen Sternes würde von A mit der Geschw⟨indigkeit⟩ $c+v$, von B mit $c-v$ zu uns kommen. Die Zeitdauer zwischen beiden maximalen Abständen ist $= \frac{1}{2}P$ ($P =$ Periode ist astrom. bekannt). Für diese Zeitdauer würde man beobachten müssen: $\frac{R}{c-v}$ (Zeit, die das Licht von B zu uns braucht) $-\frac{R}{c+v}$ (Zeit, die es von A braucht) $+\frac{1}{2}P = 2\frac{Rv}{c^2-v^2} + \frac{1}{2}P$. Man beobachtet aber genau $\frac{1}{2}P$.[34] Also wirklich recht ratlos.[35]

Die Konfusion wird eher noch vermehrt, wenn ⟨man⟩ noch andere Erscheinungen heranzieht, z.B. Aberration,[36] Elektrodyn⟨amik⟩ ponderabler

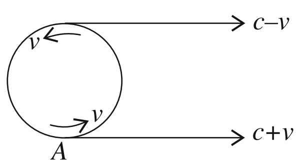
---

[30] The half-sentence "wo dies ... gelangt" was added in pencil. Initially, Hilbert had discussed Fizeau's experiment first, see note 22 above.

[31] Initially, Hilbert had started this page with the following sentence which he then deleted: "Nun Rettung von 2. durch elektromag. Lichtth. möglich, reicht aber nicht für 1. aus." On the left hand page, Hilbert similarly had started by writing: "Nun Rettung von 1. durch elektromag. Lichtth. möglich, reicht aber nicht für 2. aus. Für 2. wäre Ritzsche Hypoth. wonach Lichtfortpfl. wie Korpuskularth." Again these sentences were deleted. The remainder of the left hand page contains a sketch of the de Sitter observation, cp. note 33, and some remarks on aberration, cp. note 36.

[32] The preceding sentence is interlineated.

[33] See *de Sitter 1913a* and *de Sitter 1913b*. De Sitter's work is briefly mentioned in *Einstein 1917a*, § 7. On the left hand page, Hilbert sketched the following figure:



[34] Interlineated with pencil: "Galileische Prinzip widerlegt."

[35] At this point, Hilbert wrote with pencil at the right margin of the page: "Bernays S. 6" Possibly a reference to Paul Bernays's course notes on "Raum und Zeit" from WS18/19 (*Hilbert 1918/19**). Here the page reference 61ff. would be more appropriate which deals — after discussing de Sitter and Fizeau — with "Vermehrung der philosophischen Schwierigkeiten durch die Verbindung der üblichen Auffassung mit dem Galileischen Prinzip."

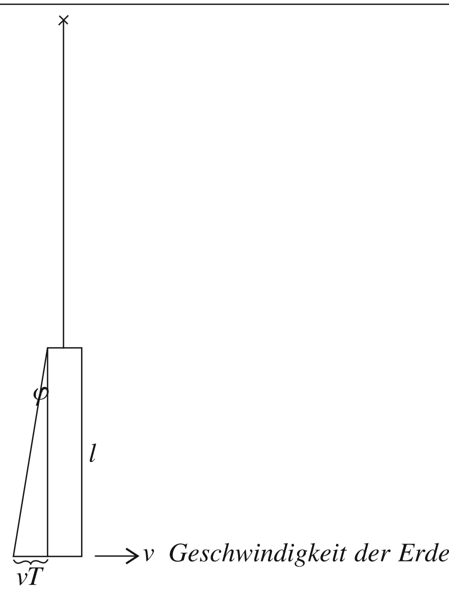
[36] On the left hand page, Hilbert wrote the following remarks in pencil: "$T = \frac{1}{c}$ die Zeitdauer, die das Licht das Fernrohr durchläuft; während dieser Zeit ist die Erde um $vT = \frac{vl}{c}$ vorwärtsgekommen. Wenn ich also den oben im Fernrohr einfallenden Strahl erwischen will, so muss ich es so schräg halten: $\tan\varphi = \frac{vT}{\lambda} = \frac{v}{c}$. Dies stimmt; aber Wasserfüllung!"
On the left hand page, Hilbert sketched the following figure:

bewegter Körper nach Herz - Galilei etc. hinzuzieht. Vieler Mühen,[37] vieler Umwege hat es bedurft bis Einstein die einfache Lösung des Rätsels fand. Jeder hätte blos *durch reines Denken* die Lösung finden können: *kühnste, gewaltigste Gedanke, festgewurzeltste Vorurteil*. Nie ohne den Zwang des Experiments das gewagt zu denken: Im Faust heisst es:

> Geheimnisvoll am lichten Tag
> Lässt sich Natur des Schleiers nicht berauben
> Und was sie deinem Geist nicht offenbaren mag
> Das zwingst Du ihr nicht ab mit Hebeln und mit Schrauben.[38]

Wir dürfen diesen Ausspruch aber nicht so auffassen, daß er eine Un- 8
terschätzung des Experimentes bedeutet.[39] Vielmehr erwiesen sich Hebel und Schrauben kräftiger als reine Phantasie und zwangen uns zur gewaltigsten Revolution im Gebiete des Geistes. So wie Gauss durch seine Dreiecksmessung die gewohnte Geometrie bestätigt, so ⟨hat⟩ Michelson *die gewohnte Raum-Zeitauffassung widerlegt*. Aufgeben der absoluten Zeit: Festgewurzelte althergebrachte Auffassung geht zum Teufel, was sogar H. A. Lorentz schwer fiel! obwohl der Gedanke so einfach, so naturgemäß und die Forderung der absoluten Gleichzeitigkeit eigentl. sinnwiedrig ⟨ist⟩.[40]

[41] Meine Herren! Gestern Exper⟨imente vorgestellt⟩, die geeignet waren, 8a



[37]Interlineated: “künstliche, aber tiefsinnige u der Wahrheit nahe H.A. Lorentz.”

[38]The quote is from the tragedy’s first part, first scene (“Nacht”), (*Goethe 1993a*, p. 28, lines 672–675).

[39]This sentence was corrected from: “Dieser Ausspruch bedeutet eine Unterschätzung des Experiments.”

[40]The words “Festgewurzelte . . . sinnwiedrig” are interlineated.

unsere gewohnten Auffassungen von Raum und Zeit zu erschüttern. 1.) Michelson 2.) Fizeau $c'_f = c_f + v(1 + \frac{1}{n^2})$ 3.) de Sitter 4.) Aberration Damit Exp⟨eriment⟩ beendet zwischen dem *Zusehen* u. *Nachdenken*⟨;⟩ *Exp*⟨eriment⟩ od. *Logik*.[42] Da gerade das Additionstheorem — trivial! — am *meisten gefährdet* ist, so wollen wir uns genau klar machen wie wir die räumlich-zeitlichen Abmessungen vornehmen. Eisenbahndamm stellen alle 10^{m} Lichtuhr auf. Von Null aus ein Lichtsignal, durch das wir alle Uhren regulieren. Jetzt! Gleichzeitig! Nun langer Eisenbahnzug mit Geschw⟨indigkeit⟩ v wo wir von neuem dasselbe machen Jetzt! Überdies dass $t = 0$ $x = 0$ gerade $t' = 0$ $x' = 0$[43] d. h. wenn die Uhr bei $x = 0$ $t = 0$ zeigt, der Kilometerstein $x' = 0$ darüber führt und dessen Uhr $t' = 0$ zeigt, wodurch die Raum-Zeitabmessungen im Koupee eindeutig festgelegt ⟨sind⟩,[44] d. h. x', t' sind bestimmte Funktionen von x, t.[45]

Nun sagten wir $x' = x - vt$ wäre trivial in der Tat, wenn $t' = t$ postulirt.

Apriori nach Kant, auch Newton nehmen dies als selbstverständlich. Wenn wir dann noch bewegte Meter = ruhenden für $t = 0$ nehmen, so in d. Tat trivial.[46] Aber das ist ja gerade das Wesen der voraussetzungslosen Wiss⟨enschaft⟩, *keine Annahmen* zu machen, ohne sich dessen *bewußt zu sein*. *Axiomatik*. Ob die Annahmen zur Beschreibung der wirklichen Tatsachen brauchbar ⟨sind⟩, muss dann aus den Experimenten folgen. Ja hier müssen wir dem *Exp*⟨eriment⟩ *u. d. Technik* sogar noch eine höhere Bedeutung einräumen. Faust. - - - Das Experiment entscheidet gegen $t = t'$. Also was für den Eisenbahndamm gleichzeitig ist, ist es nicht für[47] das Koupee!!! Nun genaue Formeln.

[41] The following material was written on the left hand page, indicated to be inserted at this point by an arrowed line.

[42] The preceding two sentences, starting with “Meine Herren!” (“M. H.”) were written in pencil. The words “Damit Exp. ... od. *Logik*.” are interlineated.

[43] The words “dass” and “gerade” interlineated in pencil.

[44] The preceding sentence starting with “d. h.” is interlineated.

[45] The preceding sentence starting with “d. h.” is interlineated.

[46] The preceding sentence is interlineated.

[47] Interlineated with pencil: “den D-Zug”.

Die Zeit für unser Koupee lesen wir direkt an den Stationsuhren ab! *Ganz falsch* kann das Galileische Relativitätsprinzip nicht sein. Das neue muß für $c = \infty$ das Galileische werden, denn für $c = \infty$ richtig![48] |[49] 8 cont’d

$$(1)\begin{cases} x' = w(x - vt) & w = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = w(x - vt) \end{cases}$$

$$x'^2 - c^2 t'^2 = x^2 - c^2 t^2$$

c spielt also ausgezeichnete Rolle. $|v| < c$. Für $c = \infty$ Galilei-Newtonsches Relativitätsprinzip

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2$$

Ersetzen wir ct durch t und ct' durch t'', so wie $c = 1$

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - t'^2 = x^2 + y^2 + z^2 - t^2$$

bez. $ict = l$, so

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 + l'^2 = x^2 + y^2 + z^2 + l^2$$

$$c \quad 3 \times 10^{10} \times \text{cm} = 1\text{sec.} = 3\ 10^5\text{km}$$

$c = 1$

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}(x - vt) \\ t' &= \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}(-vx + t) \end{aligned} \qquad |v < 1|$$

9

[48]In the manuscript, this paragraph was written before the preceding paragraph and was indicated to be moved to this position by an arrowed line. Before it, the following words were written and deleted: “Wenn unser Koupé sich mit der Geschwindigkeit v über den Eisenbahndamm bewegt, so hatten wir für die Koord. im Koupee die Formeln

$$x' = x - vt$$

aufgestellt oder auch

$$\begin{aligned} x' &= x - vt \\ t' &= t \end{aligned}$$

absolute Zeit.”

[49]Continued text from above, cp. note 41 above.

$$x'' = \frac{1}{\sqrt{1-w^2}}\,(x' - wt') \;\; = \frac{1}{\sqrt{1-V^2}}\,\left(x' - V^2 t\right)$$
$$t'' = \frac{1}{\sqrt{1-w^2}}\,(-wx' + t') = \frac{1}{\sqrt{1-V^2}}\,(-Vx + t) \qquad V = \frac{v+w}{1+vw}$$

oder wenn wir c nicht $= 1$ genommen hätten $V = \frac{v+w}{1+\frac{vw}{c^2}}$. $v = c$ ergiebt $V = c$

Aufklärung: 2.[50] Fizeau

$$\frac{c_f + v}{1 + \frac{vc_f}{c^2}} = (c_f + v)\left(1 - \frac{vc_f}{c^2}\right) = c_f + v - \frac{vc_f^2}{c^2} = c_f + v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

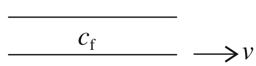
1.[51] Michelson: $x = ct$; $c = c$ Addit⟨ion⟩ d. Gesch⟨windigkeiten⟩

$$\left.\begin{aligned} x' &= w(c-v)t \\ t' &= w\left(-\frac{v}{c} + 1\right)t \end{aligned}\right\Vert \quad x' = ct'!$$

Aberration:[52] Wenn ich nach (1) S. 8[53] x', t' einführe, so bekomme ich wegen $x = vt$ für den Stern $x = 0$ $y = R$:[54]

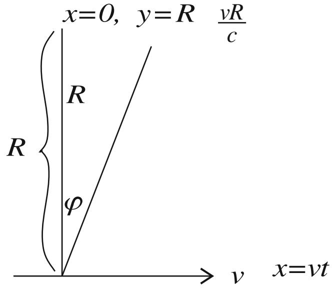
$$\left.\begin{aligned} x' &= -\frac{vt}{\sqrt{}} \\ t' &= \frac{t}{\sqrt{}} \end{aligned}\right\} \quad \text{also} \quad x' = -vt$$

[50]The number “2.” was added in pencil, see note 22 above. The following calculation was illustrated on the left hand page by the following figure:



[51]The following three lines were interlineated in pencil, substituting the following phrases: “Michelson c bleibt c'”, “Einsteinsches Relativitätsprinzip”, “Folgerungen”, “Transformation auf Ruhe”.

[52]The following consideration was illustrated on the left hand side by the following figure:



[53]See [p. 8] of the manuscript above.

[54]The preceding sentence was corrected, with pencil, from: “Wenn ich ... so erscheint die Erde wegen $x = vt$ auf Ruhe $x' = 0$ transformiert. Der Stern $x = 0$ $y = R$ hat:”

d. h. bewegt sich mit der Geschw⟨indigkeit⟩ $-v$. Das Licht von ihm zur Erde braucht die Zeit $T = \frac{R}{c}$. Will ich ihn also um $t' = 0$, d. h. in $x' = 0$,[55] sehen, so muss ich $t' = -\frac{R}{c}$ einsetzen; dies giebt $x' = \frac{vR}{c}$ d. h. $\operatorname{tang} \varphi = \frac{v}{c}$, unabhängig davon wie das Fernrohr gefüllt ist. Nun $c = 1$ S. 8 unten:[56]

Welt = 4 dimensional $x\ y\ z\ t$ beziehungsweise $x\ y\ z\ l$ Raum

$$\begin{array}{l} \text{Jetzt} \\ \text{d. neue Th.} \end{array} \left\{ \begin{array}{l|l} x' = \alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \quad + \alpha_{14}t & x' = \alpha_{11}x + \qquad\qquad + \alpha_{14}t \\ y' = & \\ z' = & z' = \alpha_{31}x + \qquad\qquad + \alpha_{34}t \\ t' = \alpha_{41}x + \qquad\qquad + \alpha_{44}t & t' = \qquad\qquad\qquad\qquad t \\ x^2 + y^2 + z^2 - t^2 \text{ invariant.} & \multicolumn{1}{c}{\underbrace{x^2 + y^2 + z^2 \text{ invariant}}_{\text{früher!}}} \end{array} \right.$$

Genau wie ich das Cartesische Koordinaten 3-Kreuz wechseln durfte, so jetzt in der Welt das 4-Kreuz! Formal elegant $t = il$ S. 8.[57] Aus $t = const$ folgt nicht $t' = const$ d. h. zwei Ereignisse die gleichzeitig waren, werden es im Allgem⟨einen⟩ nicht bleiben u. umgekehrt. Dies erscheint unerhört und wir müssen ernstlich fragen, ob Kausalitätsprinzip nicht gefährdet. Wenn es regnet, dann wird es nass![58]

Um[59] das Schreiben zu erleichtern $c = 1$ d. h. Als Zeiteinheit die Zeit, die das Licht für 1 cm braucht d. h. nach secunden $\frac{1}{c} = \frac{1}{3}10^{-10}$ sec. $x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}}$, $t' = \frac{-vx + t}{\sqrt{1 - v^2}}$.

---

[55]"d. h. in $x' = 0$" is interlineated in pencil.

[56]"Nun $c = 1$ S. 8 unten:" is added with pencil. Thereafter the equation $it = l$ was deleted. On the following line, Hilbert added a sign with red pencil, indicating a reference to p. 11, cp. note 66 below.

[57]"Formal elegant $t = il$ S. 8." was interlineated in pencil

[58]The preceding sentence was added in pencil. On the left hand page, Hilbert wrote with pencil: " Die Causalität bleibt gerettet. Unsere Befürchtungen [sind] grundlos!", where "Causalität" was corrected from "Logik". Underneath this sentence, he wrote with pencil: "früher genügte $t_2 > t_1$ damit 2 Ereignisse im Verhältnis von Ursache und Wirkung treten konnten. Jetzt ist $\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} < 1$ dazu nötig."

[59]The following text was reconstructed using material written with pencil on the lower half of the left hand page, numbered "10*" in the top left corner (cp. Description of the Text). The text on the bottom half of p. 10* was marked to be inserted at respective places on p. 10 by arrowed lines in pink pencil. It starts with the interlineated phrase:
"Von hier aus nach den Ferien." It is not clear whether this remark refers to a break in the Bucharest lecture course, or whether Hilbert made use of these notes for a later lecture course in Göttingen.
The reconstructed text substitutes the following text on p. 10 which was deleted with pencil strokes: "Jedes geradlin. gleichf. sich bewegende System ist mit jedem z. B. dem ursprünglich ruhendem gleichberechtigt, z. B. fahrender Eisenbahnzug. Wir können darin von neuem räumliche u. zeitliche Abmessungen (starre Massstäbe, Lichtuhren) vornehmen. Wir können diese aber auch durch Ablesungen auf den alten Kilometersteinen und -uhren bestimmen nach (1) S. 8 — nur nicht die neue Zeit direkt auf der Stationsuhr finden! Nehmen wir in 1.) im bew. System denselben Ort x' zu 2 verschiedenen Zeiten t'_1, t'_2, so

1.) Nimm im bew⟨egten⟩ System den Ort $x' = 0$ und berechne t' durch t: Wegen $x' = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}(x - vt)$ ist $x = vt$ und in $t' = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}(-vx + t)$ eingesetzt giebt $t' = \sqrt{1-v^2}t$ d. h. $t' < t$ d. h. die Uhr im beweg⟨ten⟩ Syst⟨em⟩ geht langsamer, vom ruhenden aus gesehen, Verjüngung durch Reisen.

2.) Nimm im bew⟨ten⟩ System dieselbe Zeit $t' = 0$ und berechne x' durch t: Wegen $t' = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}(-vx + t)$ ist $t = vx$ und in $x' = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}(x - vt)$ eingesetzt giebt $x' = \sqrt{1-v^2}x$ d. h. $x' < x$ d. h. ⟨die⟩ Länge im bewegten System erscheint vom ruhenden System aus verkürzt.

3.) Nehmen wir im bewegten System zu irgend einer selben Zeit t' 2 verschiedene Orte x_1, x_2, so ⟨ist⟩ $-vx_1 + t_1 = -vx_2 + t_2$ d. h. $v = \frac{t_2-t_1}{x_2-x_1}$[60] d. h. haben 2 Ereignisse im alten System die Differenz $t_2 - t_1$, so werden sie im bewegten System gleichzeitig ⟨sein⟩, wenn $v = t_2 - t_1/x_2 - x_1$ ausfällt. Man braucht also nur v so zu wählen, um im bewegten System Gleichzeitigkeit zu erreichen.

Meine Herren! Wir waren bei der wichtigsten prinzipiellen Frage, nämlich der Gleichzeitigkeit stehen geblieben.

11 Wegen der Wurzel $v < 1$![61] Da $|v| < 1$, was wegen der Wurzel notwendig angenommen werden muss, so sind solche und nur solche Ereignisse auf Gleichzeitigkeit transformierbar,[62] für die

$$\left|\frac{t_2 - t_1}{x_2 - x_1}\right| < 1 \qquad (\text{ev.} < c!)$$

d. h.

$$\left|\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}\right| > 1$$

---

folgt $(c = 1)$ wegen

$$t = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\left(vx' + t'\right)$$

$$t_2 - t_1 = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\left(t_2' + t_1'\right) \quad \text{d. h.} \quad t_2 - t_1 > t_2' - t_1'$$

die neue Zeitdifferenz ist kl. als die an d. Stationen abgelesene; die Uhr im beweg. Syst. geht langsamer, vom ruhenden aus gesehen. Nehmen wir in 2.) im bew. S. zur selben Zeit t' 2 versch. Orte x_1', x_2', so

$$x_2 - x_1 = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}(x_2' - x_1')$$

d. h. ⟨die⟩ Länge im bewegten System erscheint vom ruhenden aus verkürzt.

$$t_2 - t_1 = \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}(x_2' - x_1') = v(x_2 - x_1)''$$

[60] Here and in the following, Hilbert erroneously interchanged the space- and time coordinates.

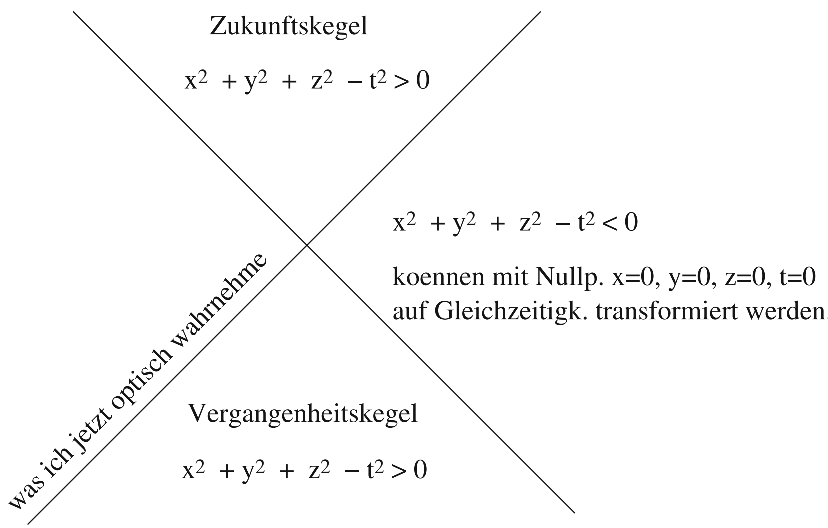
[61] The preceding sentence is interlineated in pencil.

[62] In the preceding sentence, the words “was wegen ... muss” and “solche und” are interlineated in pencil.

also die durch Signale nicht verbunden werden können[63] die also nie im Verhältniss von Ursache zu Wirkung stehen können. Also kein Wiederspr. mit Kausalität. Regnen u. Nasswerden können nicht auf gleichz⟨eitig transformiert⟩ geschweige denn die Zeitordn⟨ung⟩ umgekehrt werden.[64]
Zahlenbeisp⟨iele:⟩ Erde von der Sonne aus gemessen 6 cm verkürzt. 100 Jahre auf der Sonne würden vom nächsten Fixstern aus 6 sec. länger. Ereig⟨nisse⟩ auf Sonne und Fixst⟨ern⟩, die von der Sonne aus gleichz⟨eitig erschienen,⟩ würden vom Fixstern aus 2 St⟨unden⟩ Zeitdifferenz aufweisen.

Wichtige Bestätigung der Theorie $v < c$, dass alle Himmelskörper eine Geschw⟨indigkeit⟩ $<$ 200, 300 km/sec. ⟨haben⟩ also weit unter Lichtgeschw⟨indigkeit,⟩ desgl. die Beweg⟨ung⟩ der Planet⟨en,⟩ Komet⟨en,⟩ der Atome und Elektr⟨onen.⟩ β-Strahlen ⟨kommen⟩ nahe an die Lichtgeschw ⟨indigkeit⟩ heran.[65]

Nun *Einsteinsches Relativitätsprinzip*[66]
Umwandlung der Mechanik[67] 11*



[63]Interlineated with pencil: "auch sogar die Reihenfolge umkehren! ja sogar $t'_1 > t'_2$ wenn $v > \frac{t_2 - t_1}{x_2 - x_1}$ genommen wird ($t_2 > t_1$). Die Zeitfolge bei einer wirklichen Bewegung kann nicht umgekehrt werden." At this point, Hilbert added with pink pencil a "4.)".

[64]The preceding sentence was interlineated in pencil. At the beginning of the next line, Hilbert wrote a "5.)" with pink pencil, and a cross with blue pencil.

[65]At this point, Hilbert wrote a "6.)" with pink pencil, and a sign with blue pencil. For the numerical examples, Hilbert may have assumed a velocity of the orbital motion of the earth around the sun of $\approx$ 30km/s, which would result in a Lorentz-contraction of the earth's diameter of $\approx$ 6mm, and of a velocity of the sun relative to the fixed stars of $\approx$ 300km/s, which would result in a time dilation of $\approx$ 0.4s for 100 years, see also note 120.

[66]The preceding line was interlineated with pencil. Next to it Hilbert wrote with red pencil "*) S. 9 einschieben" (cp. note 56); these words were then deleted with blue pencil.

[67]Some deleted equations are following at this point. Instead, Hilbert indicated that text on the left hand page was to be inserted at this point.

Nimm hinzu: Weyl, S. 137[68]

Meine Herren!

Das Einstein Pr⟨inzip⟩ *lautet*: Ein jedes Naturgesetz verhält sich invariant gegenüber einer jeden Transf⟨ormation⟩.

$$x' = a_{11}x + \dots$$
$$\dots\dots\dots$$

wo $x'^2 + y'^2 + z'^2 - t'^2 = x^2 \cdots - t^2$.
Wenn das Gesetz sich auf eine räumliche Dimension beschränkt. Bew⟨egung⟩ längst der x-Achse Ausgangsformeln:[69]

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x - a_{12}t \\ y' &= a_{21}x - a_{22}t \end{aligned} \qquad x'^2 - t'^2 = x^2 - t^2$$

oder $it = l$

$$\begin{aligned} x' &= \alpha_{11}x - \alpha_{12}l \\ l' &= \end{aligned} \qquad x'^2 + l'^2 = x^2 + l^2$$

$$x, l \quad : \quad y, x$$

$$\text{Krü⟨mmun⟩g} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(1 - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

11 cont'd $m\frac{d^2x}{dt^2} = K$, $\frac{d^2x}{dt^2}$ ist zwar bei Galileischen Transf⟨ormationen⟩ invariant; nicht aber bei der Lorentz-Transf⟨ormation⟩. Für letztere ist vielmehr $\frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(1-\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$ eine Invariante. Krümmung der Kurve in $x - t$-Ebene.

12 |[70] $M = \frac{m}{\left(1-\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$ $M\frac{d^2x}{dt^2} = K$, was sich bei Kathoden- und β-Strahlen

[68] Minkowski's light cone is discussed in *Weyl 1918*, p. 137. Hilbert had studied the proofs of the first edition of Weyl's book by mid-April, see his draft of a letter to Weyl, dated 22 April 1918 (SUB *Cod. Ms. D. Hilbert 457/17*). It is well possible that Hilbert had received (part of) the proofs before his trip to Bucharest. Einstein who had also studied the proofs of Weyl's book had received them batchwise in March 1918: In a letter to Einstein, dated March 1, Weyl announced that Springer would send him the proofs; in a letter to Weyl, dated March 8, Einstein ackknowledged receipt of some first batches of proofs, and in a letter to Felix Klein, dated 24 March, Einstein reported that he had recently studied proofs of Weyl's book *CPAE8-B 1998*, Docs. 472, 476, 492. Assuming that Hilbert was among those who were to receive the proofs directly by the publisher (see for a similar example, Max Born to Ferdinand Springer, 14 April 1920, in which Born asked Springer to send proofs of his relativity book to Albert Einstein, David Hilbert, Arnold Sommerfeld, and Moritz Schlick, quoted in *Holl 1996*, p. 83), Hilbert may have received at least part of Weyl's book before leaving Göttingen for Bucharest on March 9. See also Weyl to Hilbert, 5 April, 1918, in which he thanks Hilbert "erst jetzt für Ihren freundlichen Brief und Karte."

[69] In the following equations, y' should be t'.

glänzend bestätigt.[71]
Eine andere Anwendung des Einsteinschen Relativitätspr⟨inzip⟩ ist diese:

Hertz postulirte, um von der Elektrodyn⟨amik⟩ ruhender Körper zu der der bewegten zu kommen, das Galilei-Newtonsche Relativitätsprinzip und kam so zu falschen, durch das Exp⟨eriment⟩ widerlegten Formeln[72] — Minkowski, indem er das Einsteinsche benutzte, zu den richtigen Formeln.

Aber[73] nicht nur dieser oder jener spezielle Fortschritt ist es, den wir dem neuen Relativitätspr⟨inzip⟩ danken, nein:[74] die ganze Mechan⟨ik,⟩ Elektrodynamik, kurz Physik wird von *3 auf 4* gestellt: und dass dies so zwanglos geht bringt uns die innere Ueberzeugung bei, es fällt wie Schuppen uns von den Augen. Das alte *Dreier-Gewand*[75] erscheint uns *hässlich*, unbequem und *unpraktisch* und wer an Formeln Freude hat, erst das neue Gewand lässt diese zur Geltung kommen. Beispiele Geschwindigkeit u. Dichte. *Kraft* — Arbeit. Energie *Elektromag*⟨netischer⟩ *Sechservektor*.— [76]

Bei der Erkenntnis der Natur erscheinen mir immer diejenigen *Entdeckungen die wichtigsten*, durch die ganze Disziplinen vereinigt werden. Beispiele 1.) Oerstedt'sche[77] Entdeckung der abgelenk⟨ten⟩ Magnetn⟨adel.⟩ Jetzt vertieft, indem $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{E}$ nur verschiedene Komponenten desselben Vektors. 2.) Maxwell⟨:⟩ Optik ist Elektrodyn⟨amik⟩. Jetzt vertieft, da c universelle Bedeutung. 3.) Chemische Kräfte H_2 = Coulombschen Gesetz. Nun stand ganz ausserhalb die Gravitationskraft. Obwohl die älteste, die allgemeinste, rechnerisch genauestens stimmende so ganz unnahbar thronte das *Newtonsche* Gesetz. Diesen fehlenden Zusammenhang erkannte Einstein, dessen Prinzip | viel 13

[70] At the top of the page, the following equations were deleted:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\dot x}{\dot t} \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\dot t\ddot x - \dot x\ddot t}{\dot t^3} = \frac{K}{m}\,\frac{\dot t^2 - \dot x^2}{\dot t^3} = \frac{K}{m}\,\frac{1}{\dot t^3}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = K\left(1 - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}} \qquad 1 - \frac{\dot x^2}{\dot t^2} = \frac{1}{\dot t^2} \qquad M = \frac{m}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

[71] For a similar comment, see *Hilbert 1916a**, p. 82, (this Volume, p. 139 and its note 74 above. On the left hand page, Hilbert wrote in pencil: “Träge Masse = ∞, wenn $\frac{dx}{dt} = 1$, entsprechend dem dass keine höhere Geschwindigkeit als 1 möglich ⟨ist⟩”.

[72] For a discussion of Hertz's electrodynamics, see e.g. *Whittaker 1951*, pp. 319–330, *Darrigol 2000*, pp. 255–257.

[73] The following paragraph was written on the facing left hand page and indicated to be inserted at this point by an arrowed line.

[74] In the manuscript, the latter part of the sentence was interlineated. Originally, it read: “Aber nicht nur das:”

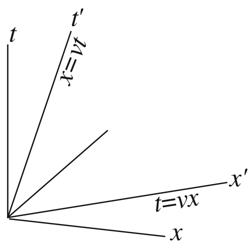
[75] Written at the bottom of the page and indicated to be inserted at this place: “Jedermann, der nun in der neuen Mech⟨anik⟩ u. Physik vorwärtskommen will, muss mit allen Vieren fahren.”

[76] Underneath a horizontal line, Hilbert wrote the following text which was then deleted: “Nachdem nun aber ⟨das⟩ dogmatische Eis der absoluten Zeit durchbrochen gelang Einstein noch viel mehr. Dies Alles ist ja nur das kleine Relativitätspr., nun kommen wir aber an das grosse!”

[77] An arrowed line in pink pencil connects this to the word Sechservektor above.

tiefer unsere Gesammtauffassung beeinflusst, als etwa Kopernikus. Erst das allg⟨emeine⟩ Relativ⟨itätsprinzip⟩ von Einstein ist die Vollendung der richtigen Raum-Zeitth⟨eorie⟩; dies erst hat auch erst die völlige Ueberzeugung gebracht (H. A. Lorentz!, der vor der Entdeckung des allg⟨emeinen⟩ nicht an das spezielle R⟨elativitätsprinzip⟩ glaubte)[78]

Der Wagen bewegt sich relativ zum Bahndamm (Bezugskörper)
Der Bahndamm " zum Wagen (")



Ein frei sich selbst überlassener, von allen anderen genügend entfernter Körper kann als Bezugskörper genommen werden, ebenso jeder, der in Bezug auf ihn gradl⟨inig⟩ gleichf⟨örmig⟩ rotationsfrei sich bewegt: nämlich in Bezug auf diese lauten die Naturgesetze gleich — wenn man auch die Zeit mittransformirt vgl. geom⟨etrische⟩ Figur![79]

Der Gegenstand als einheitliches Mittel zur Zusammenfassung aller auf ihn sich beziehenden Ereignisse ist eine Weltröhre![80]

Durch das spezielle Relativitätspr⟨inzip⟩ ist der absolute Raum keineswegs völlig beseitigt. Ein gleichförmig rotirender Körper ist ja als Bezugskörper nicht erlaubt. In Bezug auf einen solchen wären die Physik.-Gesetze anders⟨.⟩[81] Foucaultsches Pendel, invariable Ebene. Newtons Eimerversuch.

⟨——————————⟩[82]

Nachdem Einstein *sein*[83] *Relativitätspr*⟨inzip⟩ entdeckt und die neue Raum-Zeitauffassung begründet hatte, strebte er sofort einem noch *viel höheren* Ziele zu. Er erzählte mir, dass er trotz des Erfolges sofort mit seinem Prinzip nicht zufrieden war.[84] Weshalb nicht. Das dogmatische Eis der absoluten Zeit war durchbrochen, aber ganz u gar war alles *Absolute in der Bewegung*[85] noch nicht beseitigt.

---

[78] For a historical discussion of Lorentz's views on the general theory of relativity, see *Kox 1988*.

[79] The figure was written on the left hand page and indicated to be inserted here by an arrowed line.

[80] This sentence is written in pencil on the left hand page underneath the figure.

[81] For a discussion of the problem of rigidly rotating disk in the history of relativity, see *Stachel 1980*, *Maltese and Orlando 1995*.

[82] At this point, Hilbert wrote with red pencil a box-like sign, indicating that the following text, written on the front page of an extra folded sheet was to be inserted at this point.

[83] "sein" was corrected from "das".

[84] Einstein and Hilbert met for the first time when Einstein visited Göttingen from 28 June to 5 July 1915 in order to give six lectures under the auspices of the Wolfskehl Foundation, see *CPAE8-B 1998*, p. 997, and *Corry 2004*, pp. 320–325. Einstein paid another visit to Göttingen, staying in Hilbert's house, in early March 1916, see *CPAE8-A 1998*, Docs. 193, 197, 207.

[85] "alles Absolute in der Bewegung" was corrected from "der absolute Raum".

Meine Herren! Was ich Ihnen vorgetr⟨agen habe,⟩ hat unsere Anschau⟨ung⟩en über Raum u. Zeit gewandelt und auf die th⟨eoretische⟩ Phys⟨ik⟩ insb. Mech⟨anik⟩ u. Elektrodyn⟨amik⟩ umgestaltend gewirkt. Aber das ist Alles nur das sogenannte kleine Einsteinsche Relat⟨ivitätsprinzip,⟩ jetzt kommen wir zum Grossen, nur winzig spezieller Fall. Wenn auch mit dem Dogma der abso⟨luten⟩ Zeit gebrochen, so doch[86] noch nicht beseitigt. Gerade was Newton schon für den absoluten Raum anführt blieb bestehen. Newton Eimerversuch. Auch wenn wir nie die *Sterne* sehen oder etwas von ihnen erfahren könnten, so würde doch *Foucault's* Pendelversuch u. die *Abplattung* ⟨der Erde die Rotation erkennen lassen, und⟩ auch die *Fliehkraft* an den Pendelversuchen muss die Rotation der Erde erkennen lassen. Die Erde als ruhend ansehen ist eben mit unserer alten Mechanik nicht erlaubt. Nur die Galileische Bewegung ist in der Weise ausgezeichnet. Jede andere Bew⟨egun⟩g nicht. Und doch wäre dies nötig, wenn alle Bewegung nur relativ sein soll, Karussel auf der Erde als ruhend ⟨anzusehen⟩ davon sind wir sehr weit entfernt![87] Nehmen wir die einfachste Nicht-Galileische Bewegung.

⟨——————————⟩[88]

In der Tat scheint es ganz unmöglich auch für einen beschleunigten Körper als Bezugssystems die Invarianz der Gesetze zu verlangen. Bremsung des Eisenbahnzuges ist für den Insassen deutlich merkbar. Alle Gegenstände werden in gleicher Weise in der Zugrichtung | geschleudert.[89] Feinere Ausführung 14
dieser Betrachtung u. dieser Schleuderkraft. *Ein Kasten* als Laboratorium im Weltall weit von allen Sternen entfernt.[90] Aussen an der Decke ein Seil, an dem mit konstanter Kraft gezogen wird, so dass das Zimmer sich mit wachsender Geschw⟨indigkeit⟩ bewegt nach dem Gesetz der Konstanz d. Beschl⟨eunigung,⟩

(Träge Masse)(Beschl.) = (Kraft)[91]

für einen aussen befindl⟨ichen⟩ Beobachter in einem *anderen Kasten ohne Strick*. Massgebend für die Spannung d. Seiles ist die *träge Masse des Kastens*.

[86]The preceding paragraph was written at the top of the page and indicated to be inserted at this point by an arrowed line.

[87]The preceding sentence was written at the bottom of the page and marked for insertion at this point by a correction sign. There is a curious similarity here to a formulation, Einstein had once used. When Einstein had completed his 1912 theory of static gravitational fields based on the assumption of the equivalence of uniform rectilinear acceleration and a static homogeneous gravitational field, he considered, as the next step of generalization, the case of rotating frames of references. Referring to the difficulties he was encountering in this endeavour, he wrote to his friend Michele Besso, 26 March 1912: “Du siehst, dass ich noch weit davon entfernt bin, die Drehung als Ruhe auffassen zu können!” *CPAE4 1995*, p. 436.

[88]After the last word of the preceding sentence, Hilbert had written the same mark with red pencil as on p. 13, and the words ‘S. 13’ indicating that the previous text was to be inserted here. The flow of the text on p. 13 now continues as given in the following.

[89]At this point Hilbert interlineated the word: “Aber”

[90]The following sentence was deleted by Hilbert: “Befestigt mit Stricken am Boden befindet sich der Beobachter.”

[91]This line was deleted by Hilbert.

Im Seil wird doppelte Spannung merkbar, wenn doppelt so träges Koupee.[92] Der Mann im Lab⟨oratorium⟩ aber steht auf dem Boden und konstatirt, dass alle Körper mit genau dergleichen konst⟨anten⟩ Beschl⟨eunigung⟩ zum Boden fallen wegen des Galileischen Trägheitsgesetzes. Denn wenn der Physiker zwei Körper loslässt, so behalten sie die gleiche Geschwindigkeit während das Laboratorium mit Beschleunigung weiterfliegt.[93] Er konstatirt das Vorhandensein einer eigentümlichen Kraft, nicht wie magnet⟨ische⟩ oder elektr⟨ische,⟩ sondern von Material sowie vom phys⟨ikalischen⟩ Zustande unabhängige Kraft. Er kennt als Physiker eine solche Kraft: die Schwerkraft. Er wird sich nur einen Augenblick wundern, warum nicht sein ganzes Laboratorium dieser Schwerkraft folgend in die Tiefe stürzt, aber da bemerkt er das Seil.[94] Also sein Labor⟨atorium⟩ ruht für ihn aufgehängt in einem konstanten Schwerefelde. Massgebend für die Spannung des Seiles ist die *schwere Masse des Kastens* 2x so schwerer Kasten bewirkt doppelte Seilspannung.[95] Beide also gleich. *Aequivalenzpr*⟨inzip⟩ Das Bezugssyst⟨em⟩ ist beschl⟨leunigt, ist⟩ *aequivalent* mit⟨: der⟩[96] Vorgang findet in einem Gravitationsfelde statt. In der alten Th⟨eorie⟩ ist Trägheit zwar eine Grund-Eigenschaft d. Materie, aber Schwere eine *Kraft wie andere* u. daher ihre Gleichheit etwas rein Zufälliges und ganz Unerklärtes.[97]

|[98] Zentrifugalkraft auf der Erde Holz u. Messingkugeln Masse des angezogenen Körpers im Gravitationsfelde hebt sich weg. 1.[99] $\cancel{m}\ddot{x} = \cancel{m}M\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}$ $\left(= -\frac{x}{r^3}\right)$. *Apfel und Mond.* Alle Körper fallen gleich rasch. 2.[100] Ebenso Schwingungsdauer eines Pendels unabhängig von der Art der Substanz d. Kugel: $\cancel{m}\ddot{\varphi} = \cancel{m}\sigma\varphi$"

3.[101] Die Gleichheit von träger und schwerer Masse ist experim. sehr genau durch Eötvös nachgewiesen. Der[102] Balken der Torsionswaage[103]

---

[92] The preceding two sentences are interlineated in the original.

[93] The words "wegen des ⟨...⟩ weiterfliegt" were written on the left hand page and indicated by a correction sign to be inserted at this point.

[94] The preceding sentence was written on the left hand page and indicated by a correction sign to be inserted at this point.

[95] The preceding sentence is interlineated in the original.

[96] At the places of the two editorial insertions, Hilbert had added colons in red pencil.

[97] The word "Unerklärtes" was corrected from "erstaunlich, rätselhaft!"

[98] Hilbert had started the page with the following sentence which was then deleted: "Die Gravitation ermöglicht die allgemeine Relativität."

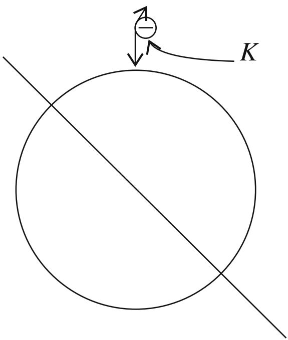
[99] The number "1." was added in red pencil. It refers to the three illustrations of the equivalence principle discussed on this page: free fall, pendulum oscillations and the Eötvös experiments. Hence Hilbert added, in red pencil, a "2." resp. a "3." close to the discussions of the pendulum and of the Eötvös experiment.

[100] The number "2." was added in red pencil on the left hand page, close to a figure and and some equations illustrating the pendulum problem.

[101] The number "3." was added in red pencil on the left hand page, cp. note 99.

[102] The rest of this paragraph was added on the left hand page.

[103] Eötvös' experiments are discussed in *Freundlich 1917*, pp. 67–69.



⊥ zum Meridian(Zeichenebene) einmal eingestellt und dann genau um 180° gedreht. Holz und Messing. Kugel gegen die Schwerkraft u. Zentrifugalkraf in ⊥ Komponente der Schwere gleichgerichtet ausballanziert gegen Schwer- und Fliehkraft und Torsion ausballanziert gegen Fliehkraft Holz > Blei. Die Komponente K der Differenz d. Schwungkraft für die Holz- u. Messingkugel müsste an der Torsion des Drathes beobachtbar sein wegen Blei-Holz.

Identität von Flieh- und Schwerkraft. Wir sehen also, wenn allgemeine Relativität der Bewegung möglich sein soll, so muss es eine *Kraft wie die Schwerkraft geben*. Diese ist nothwendig dazu. Ob sie nun tatsächlich die allg⟨emeine⟩ Relativität bewirkt, müssen wir nun sehen.[104]

⟨————————⟩[105]

M. H. Wir haben gestern gesehen: wenn allg⟨emeine⟩ Relativität möglich sein soll, so muss es eine Kraft, wie die[106] Schwere geben: Nun diese giebt es, also ist diese notw⟨endige⟩ Bedingung erfüllt. Das Aequivalenzprinzip ist die genaue Fassung des Axioms von der Gleichh⟨eit⟩ der trägen u schweren Masse. Nun ⟨wollen wir⟩ die Art der 1.) Charakterisierung der Gravitation ihre 2) Eigenschaften und 3. math⟨ematisch⟩ bestimmenden Gesetze ausfindig machen.

1.) Was wir bisher gravitationsfrei nannten, war der Fall des kl⟨einen⟩ Relativitätspr⟨inzips⟩ $dx^2+dy^2+dz^2-dt^2$ invariant bei Galileischen Transf⟨ormationen⟩ jetzt S. 15

⟨————————⟩[107]

[104]The preceding two sentences were interlineated, substituting the following sentence which was deleted: “Wenn es ernst mit der allgem. Relativ. so müssen wir die Erde als ruhend ansehen dürfen; die Fliehkraft muss dann durch die Rotation der Sternmassen hervorgerufen werden (Schweres Schwungrad).”

[105]At this point, Hilbert made with blue pencil a mark indicating that the text on the inside left hand page of an extra folded sheet was to be inserted at this point. This extra text is given in the following.

[106]Interlineated: “Schleuderkraft”.

[107]Although the text on the extra sheet continues, at this point, the same mark as on p. 15 was put down in blue pencil. Apparently, Hilbert intended to continue with the remainder of p. 15 and then with the remainder of the text on the extra sheet. The rest of the text of p. 15 is given in the following.

Also nicht bloss lin⟨eare⟩ Transf⟨ormation,⟩ sondern z. B. wenn wir die Erde oder ein Karussel auf Ruhe transformieren wollen.[108]

$$\begin{aligned} x' &= \cos vt\ x - \sin vt\ y \\ y' &= \sin vt\ x + \cos vt\ y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned}$$

Dabei wird $dx^2 + dy^2 + dz^2 - dt^2$ nämlich

$$dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 - dt'^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + (v^2r^2 - c^2)dt^2 + (\ )dxdt + \dots$$

Einfacher in Polarkoordinaten $x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta$: $r' = r$, $\vartheta' = \vartheta + vt$

$$dr'^2 + r'^2 d\vartheta'^2 + z'^2 - t'^2 = dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + 2r^2 v d\vartheta dt + (r^2v^2 - c^2)dt^2$$

Bei beliebiger Transform⟨ation⟩ $\sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu$ also 10 Koeffizienten $g_{\mu\nu}$ sind der Ersatz für die Bewegung. Wir müssen uns entschliessen diese als Komp⟨onenten⟩ d. Grav⟨itation⟩ anzusehen auf dem Rotations-Körper als Bezugssystem.[109] Also

⟨——————————⟩[110]

Also bei anderer Transf⟨ormation⟩ $x' = f$, $y' = g$, $z' = h$, $t' = k(x, y, z, t)$ noch andere Koeffizienten! Was wir früher gravitationsfrei nannten $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$, blieb bei Galileischen Transf⟨ormationen⟩ gravitationsfrei. Also statt *einer* Grösse u bei Newton jetzt 10, soviel ⟨wie⟩ Finger an der Hand. $u(x, y, z, t)$, $g_{\mu\nu}(x, y, z, t)$. Dass es mehr als eine Grösse sind, stört uns nicht. Geschwindigkeit, Elektrodyn⟨amisches⟩ Viererpotential. Dass es gerade 10 sind ist sehr *bedeutsam 10 Komponenten* der Energie!

2.) *Bewegungszustand und Gravitationsfeld* charakterisieren den mechanischen Zustand eines Körpers z. B. rotirende Erde: Rotation $+g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ oder Ruhe und $g_{\mu\nu}$ wie auf S. 15.[111] Bei der rotierenden Erde waren die geraden Weltlinien nach Galilei. d. h. $\delta\int\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2 - dt^2} = 0$ $\frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2+\dots}}\dot{x} = \text{const}$ d. h. $\dot{x} = \text{const}$ etc. Bei der Erde spiralförmige Weltlinien: $\delta\int\sqrt{dr^2 + r^2d\vartheta^2 + 2r^2vd\vartheta dt + (r^2v^2 - 1)dt^2} = 0$ allgemein

$$\delta\int\sqrt{\sum g_{\mu\nu}dx_{mu}dx_\nu} = 0 \qquad \text{Licht auch noch} \qquad \sum g_{\mu\nu}dx_\mu dx_\nu = 0$$

---

[108] The words "sondern wenn ... wollen" are interlineated.

[109] The words "auf dem ... Bezugssystem" are interlineated.

[110] In all probablility, Hilbert intended to read the material on the remainder of the inside left page of the extra folded sheet at this point. That text is given in the following.

[111] See [p. 15] of the manuscript above

An Stelle des Galileischen Trägheitspr⟨inzips⟩ tritt das *neue Einsteinsche* ⟨Trägheitsprinzip⟩ *Licht incl.* Die radikalsten Aenderungen sind bei Raum-Zeitmessungen mittelst Uhren und Längenmessungen zu erwarten.

Für t = const sind $\int \sqrt{g_{\mu s} dx_\mu} dx_\nu$ ($\mu=1,2,3$) das räumliche Linienelement: *Nicht-euklische Geometrie.*

⟨————————————⟩[112]

Bei 2 Dimensionen Flächenth⟨eorie.⟩
Schon die geringe Aenderung $\frac{dx^2+dy^2}{y}$ bringt die Bolay-Lobatschefkische Geometrie zustande. Riemann u. Gauss haben Einstein die nothw⟨endigen⟩ Vorarbeiten geliefert. Riemann prop⟨hetische?⟩ Worte Freundl. S. 20.[113] Freilich erst *die Idee* der Beseitigung der abs⟨oluten⟩ Zeit u. ⟨der⟩ abs⟨oluten⟩ Bew⟨egung⟩ ist der zündende Funke, der in Einsteins Kopf entsprang.

⟨————————————⟩[114]

Gravit⟨ation⟩ = Geom⟨etrie⟩ im $x-y-z-t$-Raume! Gravitation messen 16
= Geometrie bestimmen!

Misst ein Beobachter von der ruhenden Ebene E aus den Umfang der rotirenden Scheibe, so erscheint jedes Stückchen der Peripherie verkürzt, dagegen in Richtung des Durchmessers unverändert. Er findet also Umfang, divid⟨iert⟩ d⟨urch⟩ Durchm⟨esser⟩ nicht $= \pi = 3,14\ldots$ sondern eine grössere Zahl. Also garnicht Euklidisch.[115] Nicht-Euklisch z. B. komplexe Halbebene $\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{y}$ oder auf krummer Fläche. Früher bei der speziellen Relativität waren die Transf⟨ormationen⟩ linear orthog⟨onal⟩ und daher blieb die Geometrie Euklidisch = Vernachlässigung der Gravitation.

⟨————————————⟩[116]

Meine Herren! Wir wollen uns recht klar machen, worin besteht die Verallg⟨emeinerung⟩ und was wird durch dieselbe erreicht?

---

[112] The following text continues on the right inside page of the extra folded sheet.

[113] With reference to Riemann’s 1854 *Habilitationsschrift* Freundlich wrote: “Riemann pointed prophetically to the paths along which Einstein then walked.” (“Riemann weist prophetisch auf die Wege hin, die Einstein jetzt beschritten hat.” *Freundlich 1917*, p. 14). On pp. 20–21, Freundlich presented an extended quote by Riemann about the necessary modification of Newtonian physics driven by unexplained facts.

[114] At this point, Hilbert put down a cross in blue pencil and the words “S. 17”, indicating that he was to continue with the text on the top of p. 17 where the cross in blue is also found. Here we will, however, first continue with the flow of the text on p. 16 which is given in the following.

[115] See note 81 above.

[116] On a single extra page, Hilbert summarized the differences between the characteristic features of special and general relativity. Although no clear indication is found where this text was to be inserted, it fits best at this point.

In der ⟨Theorie des⟩ kleinen Relativitätspr⟨inzips:⟩

1.) Das Quadrat des Raum-Zeitelements $d\tau^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - dt^2$ ist trotz der Beseitigung des abs⟨oluten⟩ Zeitbegriffs doch *Euklidisch* geblieben $t = \text{const.}$ $dt = 0$

2.) $\delta\int\sqrt{} = 0$ liefert die gradl⟨inig⟩ gleichf⟨örmige⟩ Bew⟨egung⟩ für kräftefreie Bewegung: d. h. Galileische⟨s⟩ Trägheitspr⟨inzip.⟩

3.) $d\tau = 0$ ist ebenfalls Galileische Lichtbeweg⟨ung⟩.

4.) Transf⟨ormationen⟩ in sich sind nur die *lin*⟨earen⟩ *orth*⟨ogonalen⟩ daher kann nur eine *Galileische Bew*⟨egung⟩ auf Ruhe gebracht werden.

In der gr⟨oßen⟩ Relativ⟨itätstheorie⟩ dagegen.

1.) $d\tau^2 = \sum g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu$ ⟨;⟩ $g_{\mu\nu}$ Komp⟨onenten⟩ d. Schwerepotentials — was die Math⟨ematiker⟩ längst ausf⟨ührlich⟩ behandelt haben — aus rein logischen Motiven. Nicht Euklidische Geom⟨etrie⟩.

2.) $\delta\int d\tau = 0$ Gaeod⟨ätische Linie⟩ für kräftefreie Bewegung. Einsteinsches Trägheitsgesetz.

3.) $d\tau = 0$ Licht. krumm u. ungleichf⟨örmig⟩ beschleunigt.

4.) Jede Transformation erlaubt, wenn das Gravitationsf⟨eld⟩ mittransf⟨ormiert⟩ wird. Jeder Punkt auf Ruhe ⟨transformierbar⟩.

In der kleinen Relativ⟨itätstheorie⟩ bleiben die $g_{\mu\nu}$ fest $= 1, -1, 0$ und zur Erklärung der Schwere musste man zu Newton greifen extr u: $\Delta u = -8\pi\rho$.

In der gr⟨oßen⟩ Relativ⟨itätstheorie⟩ müsste man $g_{\mu\nu}$ aus 10 Gl. bestimmen Wie müssen diese lauten? *Spürsinn* von Einstein!

⟨――――――――――――――⟩[117]

Allgemeine⟨s⟩ Relativitätspr⟨inzip⟩: Alle Bezugssysteme sind für die Formulierung der Naturges⟨etze⟩ gleichwertig. Diese sind gegenüber jeder Transfor⟨mation⟩ invariant.

Dazu ist notwendig, dass die Gravitationsgl⟨eichungen⟩ Differentialgleichungen sind. Damit die Gravitation (wie Elektr⟨izität⟩ u. Magn⟨etismus⟩) als *Fernkraft* beseitigt und zugleich die Forderung der Kontinuumsth⟨eorie⟩, dass die Gesetze von der Wahl der Bezeichnungen der Ereignisse unabhängig sein
17 | müssen, erfüllt ⟨sei:⟩[118]

$$K_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}$$

Erste Annäherung: Newtons Theorie, wenn 1.) $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} +$ kl⟨eine⟩ Gr⟨ößen,⟩ 2.) Geschw⟨indigkeiten⟩ d. Materie kl⟨eine⟩ Gr⟨ößen⟩

$$\frac{d^2 x_h}{dt^2} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial x_h} \qquad (h = 1, 2, 3)$$

[117] After the previous insertion, the text on p. 16 continues as given in the following.

[118] In the top left corner of this page, Hilbert wrote the word: "Spürsinn" and "aus $\Delta u = -4\pi\rho$ machen"

$T_{44} = 0$, alle anderen $T_{\mu\nu} = 0$

$$\Delta g_{44} = \rho \quad \text{d. h.} \quad g_{44} = -\frac{1}{8\pi}\int \frac{\rho}{r} dr \quad \text{q. e. d.}$$

Zweite Annäherung: Die Bahnellipse rotiert im Sinne der Umlaufsbew⟨egung⟩ (Vorrücken des Perihels) um 43 Bogensec⟨unden⟩ im Jahrhundert beim Mercur, bei anderen Planeten nicht merklich.

Die allg⟨emeine⟩ Relativität ist gewährleistet durch die invariante Form, aber im Speziellen Nachrechnen *Erdrotation*⟨,⟩ Schwungrad.
Wenn man sich *nachträglich den kurzen Sinn* der gr⟨oßen⟩ Rel⟨ativitätstheorie⟩ überlegt, so selbstverständlich. Von *den Namen unabhängig Starre Koordinatenstange.*[119]
Ein Gravitationszentrum

$$G(dr, d\vartheta, d\varphi, dl) = \frac{r}{r-\alpha} dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2\vartheta d\varphi^2 - \frac{r-\alpha}{r} dt^2$$

$$\begin{aligned} x &= r\cos\vartheta \\ y &= r\sin\vartheta\cos\varphi \qquad \frac{\alpha}{2} \quad \text{ist die gravitirende Masse} \\ z &= r\sin\vartheta\sin\varphi \end{aligned}$$

|[120] 18

$$\delta\int G\left(\frac{dr}{dp}, \frac{d\vartheta}{dp}, \frac{d\varphi}{dp}, \frac{dt}{dp}\right) dp = 0$$

Für den kreisenden Massenpunkt: $r > \frac{3\alpha}{2}$, $v < \frac{1}{\sqrt{3}} =$ gilt für kreisendes Licht. Spezielle Lichtstrahlen: Asymptotenspiralen mit $r = \frac{3\alpha}{2}$ als Poincareschem Zykel, Hyperbelbahn als abgelenkter Strahl. Für die gradlinige Bewegung auf das Zentrum zu gilt Anz⟨iehung⟩ bez. Abst⟨oßung⟩ jenachdem

$$\left|\frac{dr}{dt}\right| < \text{ bez. } > \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{r-\alpha}{r}$$

wird. Für das Licht ist

$$\left|\frac{dr}{dt}\right| = \frac{r-\alpha}{r}; \begin{cases} = 0 & (r = \alpha) \\ = 1 & (r = \infty) \end{cases}$$

dasselbe wird also stets abgestossen. Newtons Gesetz ist nur das *letzte Schwänzchen* der richtigen Gravitationstheorie.[121]

[119] The preceding two paragraphs were written with pencil at the bottom of the page and marked by an arrowed line for insertion at this point.

[120] On the left hand page, i.e. on the back of the previous p. 17, Hilbert wrote down some numerical calculations, involving a computation of the number of seconds per year.

[121] A similar metaphor had been used by Einstein in a letter to Zangger from 10 March 1914: "die Natur zeigt uns von dem Löwen zwar nur den Schwanz. Aber es ist mir unzweifelhaft, dass der Löwe dazugehört, wenn er sich auch wegen seiner ungeheuren Dimensionen dem Blicke nicht unmittelbar offenbaren kann. Wir sehen ihn nur wie eine Laus, die auf ihm sitzt."*CPAE5 1993*, Doc. 513, For a discussion of the heuristic problem of finding the correct generalization of Newton's law, see e.g. *CPAE4 1995*, Doc. 17, § 1.

⟨——————————⟩[122]

18v Einstein Grundlagen der allg. Relativth. Ann d. Phy. Bd 49
" Ueber die spezielle u die allg. Relativ Vieweg Braunschweig 1917
Freundlich Die Einsteinsche Gravitationsth. Verlg Springer Berlin 1917
Schlick, Raum u. Zeit in der gegenwärtigen Physik " "[123]

Es war meine Absicht, Ihnen eine Vorstellung davon zu machen, dass auch auf dem Gebiet wissenschaftlicher Forschung in den letzten Jahren einzig dastehende und gewaltige Ereignisse sich zugetragen haben. Ist doch das Raum-Zeitproblem, an dem Jahrhunderte gearbeitet, jetzt zum Abschluss gelangt. Wenn ich nur an die ganz Grossen der Mechanik erinnere: 1500 Kop⟨ernikus⟩ 1600 Gal⟨ilei⟩ Keppl⟨er⟩ 1700 Newton Leibnitz dann nur 200 Jahre Maxwell–Lorentz Gauss–Riemmann Einstein den Schlüssel des Problems fand.

Dank abstatten, dass Sie das Raum-Zeit Problem in anderem praktischen Sinne gelöst haben dass Sie mir *Gehör geschenkt* haben in den *Universitätsräumen einer okkupirten Hauptstadt*, was uns Allen eine *singuläre noch nie erlebte Raumerscheinung* ist und zu einer so *singulären Zeit* wie der heutigen, wo Ihre Seele sonst mit so ganz anderen Dingen der Freude u. des Leides erfüllt ist.

⟨——————————⟩[124]

Zum Schluss erinnere ich an die Hauptdaten für die Entwicklungsgesch⟨ichte⟩ der Mechan⟨ik⟩, soweit sie für uns in Frage kommt:

Kopernikus 1473–*1543*
Galilei 1564–*1642* u. Keppler 1571–1630
Newton *1642*–1727 u. Leibniz 1646–1716
Eukl. Arch. um 300 v. Ch.

$$\left.\begin{array}{r}\text{Kop. um 1500}\\ \text{Gal. Keppl. um 1600}\\ \text{Newt, Leib. um 1700}\end{array}\right\}\text{Einstein 1900 (Gauss-Riemann)}$$

So haben wir in den letzten Jahren also auch auf dem Gebiete der exact. Naturwissenschaften ein einzig dastehendes u. welthist. Ereigniss erlebt: die

[122] The closing passage of Hilbert's lectures was written down in two versions. The following version was written on the back of p. 18,

[123] The references were added in pencil. They are *Einstein 1916a*, *Einstein 1917a*, *Freundlich 1917*, *Schlick 1917*. Hilbert used the second edition of Freundlich's book, a first edition had appeared in 1916 (*Freundlich 1916*). Schlick's treatise was first published on 17 March 1917 in *Die Naturwissenschaften* and subsequently as an independent booklet.

[124] The second version of the concluding passage, which appears to be the one actually read by Hilbert, was written on the back of p. 1, i.e. on the left hand page to p. 2. It is given in the following.

völlige Lösung des Raum-Zeitproblems. Ich danke Ihnen für das Interesse; dass Sie es mir ermöglicht haben, das Raum-Zeitproblem jetzt u hier praktisch in einem anderen Sinne zu lösen, dass Sie mir Gehör geschenkt haben zu einer Zeit, wo Ihre Gedanken mit so ganz anderen Leiden u. Freuden erfüllt sind und an einem Ort, den Hörsälen einer okkupierten Stadt, was wir ja wohl alle in unserem Leben als eine singuläre Raumerscheinung ansehen und dauernd in Erinnerung behalten werden.[125]

[125]For a discussion of the occasion of these lectures in occupied Bucharest during world war I, see the Introduction to Chapter 3, p. 313.

Description of the Text

Collection: SUB Göttingen, signature *Cod. Ms. D. Hilbert 592.*

Size: Page size approx. 21.0 cm ×16.5 cm.

Cover Annotations: In the middle of the cover page: 'Bukarest // März 1918.' written by Hilbert using black ink.

Composition: The text appears on a signature of 11 sheets, folded in the middle and sewn together with a thread; two sheets (page 17 and 18) have been cut out of this part, but were handed down with the draft. Further more, the draft includes 3 loose sheets of paper; the first is folded in the middle, such that there are two pages with four sides; the second is a single sheet of the same size as the other pages; the thrid is a sheet of paper of different size, folded in the middle and simply laid in. The first two sheets bear text in Hilbert's handwriting; the third is written by an unidentified hand and bears a title 'Berechnung der Zentrifugal-Beschleunigung aus dem Prinzip der geodätischen Linie.'

Pagination: The recto sides of pages have been paginated by Hilbert using black ink. Verso sides of pages are ordinarily neither paginated nor counted. An exception are verso sides of the 10th and 11th pages: They are paginated with the page no. of the recto side of the following page and a star each (fol 10 v: 10* and fol 11v: 11*). The pages 18 and 19 cut out are paginated, too, (page nos. 17 and 18) and some notes of Hilbert can be read on them. The following last three sewn pages are left completely blank. The other pages laid in without sewing equally lack pagination.

Original Title: None.

Text: The running text has been written by Hilbert on recto sides of the pages only in black ink, leaving blank verso sides first for later additions or corrections. He used pencil and black ink, too, for corrections, sometimes different coloured pencils for marking passages. The text was heavily corrected and extensively rearranged by Hilbert, such that different reconstructions are possible.

Chapter 4

Epistemological Questions of Physics

(1921 and 1923)

Introduction

In this Chapter, we present two sets of lecture notes by Hilbert in which he reflects on epistemological consequences of modern physics. The opening passages of both lectures set the theme in almost identical words as a reflection on the role of mathematics in the exact sciences. Indeed, both lectures cover similar ground and deal with epistemological implications of general covariance such as time-reversal invariance and the need to formulate what Hilbert calls a "principle of objectivity," the independence from coordinates for all meaningful statements in physics. The second set of lectures takes the theme further and discusses the implications of what Hilbert called the "world equations," i.e., the field equations of his 1915 communication on the "Foundations of Physics." Hilbert considered the question of completeness of physical theory and introduced the concept of "accessorial" laws, arguing that in a proper sense such laws no longer exist in modern physics based on general relativity and quantum theory. This contention is discussed in its philosophical implications in an attempt to position Hilbert's axiomatic method in distinction to Kantian apriorism and against Poincaré's conventionalism.

Nature and Mathematical Knowledge

The first document are notes for a lecture that Hilbert gave on the occasion of receiving an honorary doctorate from the University of Copenhagen in March 1921.[1] Hilbert's lecture was a significant event. The mathematical society in Copenhagen organized a number of lectures around Hilbert's visit in preparation of his talk.[2] On 10 an 17 February, Jul Pál talked about the problem of the "Wohlordnung einer Menge." After that, J. Mollerup spoke about paradoxes of set theory on 3 March, and on Hilbert's consistency proof of the axioms for the positive integer numbers on 10 March. Hilbert's lecture then was given on 14 March, the day he received the honorary doctorate. The lecture was entitled "Natur und mathematisches Erkennen" and took place in the university's *Festsal*.[3] Hilbert continued to lecture on the following days,

[1]For the original doctoral diploma, see SUB Göttingen, *Cod. Ms. D. Hilbert 743/13* "Ehrendoktor der math.-nat. Fakultät der Universität in Kopenhagen, 14.3.1921."

[2]For the following, see *Crone 1923*, 54.

[3]In a report of the German Consulate in Copenhagen dated 9 September 1921, Hilbert's visit was mentioned as an example of the friendly relationships between German and Danish scholars in spite of the boycott of German science after World War I: "Schließlich erlaube ich mir auf die wiederholten Besuche deutscher Gelehrter in Kopenhagen nach dem Kriege hinzuweisen, worauf ich bereits in früherer Berichterstattung Bezug genommen habe. Ich erwähne hiervon nur den Besuch Professor Einsteins im Juni des vorigen Jahres, wobei Professor Einstein ungewöhnliche Ehrungen dargebracht wurden, sowie den Besuch des Göttinger Mathematikprofessors Dr. Hilbert, der im März d.J. auf besondere Einladung mehrere Vorlesungen in der hiesigen Universität hielt und darauf unter besonders

talking about "Axiomlehre und Widerspruchsfreiheit" on 15 and 17 March. On 16 and 18 March, the participants met with Hilbert at the Technical University for further discussion of his presentations.[4]

Given two years before his Hamburg lectures on the "Principal Questions of Modern Physics," Hilbert's talk on "Natur und mathematisches Erkennen" focuses on two topics, each of which Hilbert considered to be of central importance for the foundations of the physical sciences (distinguished from the life sciences) and the role of mathematics in it. One topic arises out of Einstein's theory of general relativity and concerns the role of coordinates in physics. Here Hilbert discusses the essence of the principle of general covariance, or the "principle of objectivity" as he calls it. This principle postulates that a proposition about nature is a meaningful statement about objects in nature only if it has a content that does not depend on the use coordinates. This independence can be achieved in three ways: by showing a concrete object with respect to which the coordinates are fixed, by claiming the existence of an appropriate coordinate system, and by demanding that the proposition be valid for any coordinates. He claims that this distinction is analogous to the logical distinction between singular, particular, and general propositions.

The other topic concerns the notion of probability in the mathematical sciences. The link between the two topics is the issue of time-reversal invariance. Since the principle of general covariance allows for coordinate transformations that correspond to the reversal of time, the principle of objectivity implies time-reversal invariance of the fundamental laws of physics. Given this observation, Hilbert reflects on the origin of irreversibility in statistical mechanics. He argues that irreversibility arises from the practical application of probabilistic concepts and is not inherent in the fundamental laws.[5] In this context, Hilbert strongly distinguished statements that are presumably right from those that assert a probability and from hypothetical statements.[6]

Whereas Hilbert's earlier work on the "Foundations of Physics" addressed the work of both Einstein and Mie as his principal sources for axiomatic

---

ehrenvollen Formen zum Ehrendoktor der hiesigen Universität promoviert wurde." (Bundesarchiv Berlin R1501/9003, quoted (in part) in *Grundmann 2004*, p. 95.)

[4]The text presented here is Hilbert's manuscript for the lecture on 14 March. It ends with an announcement of further lectures, which presumably are the ones given on 15 and 17 March. For more on Hilbert's lectures, see an undated paper clipping from an unidentified daily in *Cod. Ms. D. Hilbert 751*. See also brief reports in the Danish dailies *Politiken* of 13 March, *København* of 15 March, and *Berlingske Tidende* of 15, 16, and 18 March, the latter giving brief summaries of Hilbert's second and third lectures. We do not know of any manuscript for those follow-up lectures. The manuscript for the lecture on 14 March shows a number of emendations and corrections in Hilbert's hand. It is unclear whether these were made for the actual lecture in Copenhagen, or whether Hilbert used the manuscript for a similar lecture at another occasion.

[5]For a detailed discussion of this issue, see *Majer 2002b*.

[6]For this distinction, see also Hilbert's manuscript "Report on my gas lecture" (*Cod. Ms. D. Hilbert 588*).

reflection, it is now Einstein's work and the new quantum theory of Niels Bohr to which he is referring. Both are mentioned explicitly, and Niels Bohr is addressed during the lecture in a polite gesture as "presently the most successful promoter" of the quantum problem.[7]

Principal Questions of Modern Physics

In this set of three lectures delivered at the University of Hamburg in July 1923,[8] Hilbert argues for the possibility of an all embracing science, governed by a set of "world equations" ("Weltgleichungen"). Those world equations are the ones he proposed in his 1915 "First Communication" on the "Foundations of Physics"[9] as a synthesis of Mie's electromagnetic theory of matter and Einstein's theory of gravitation. They would allow, Hilbert argued, the deduction of all known experimental facts without the necessity of stipulating contingent boundary or initial conditions. At the same time, Hilbert takes a moderately empiricist standpoint and argues for a modification of an apriorist philosophy in the Kantian tradition and against a conventionalist understanding in Poincaré's sense.

The lectures were given in summer 1923 at a time of a high interest in discussions about unified field theory.[10] They precede the republication of Hilbert's two notes on the "Foundations of Physics" in a merged and revised form in the *Mathematische Annalen.*[11] In the winter semester of 1923/24, Hilbert also gave a lecture course on a related topic: "Unsere Vorstellungen von Gravitation und Elektrizität (allgemeinverständlich)" that later were worked out under the title "Über die Einheit in der Naturerkenntnis."[12]

Hilbert started his discussion with a reflection on the nature of the relationship between physics and mathematics, concretely between coordinates

---

[7]See [p. 27]; see also Hilbert to Niels Bohr, 18 April 1921: "Meine Frau und ich schwelgen noch immer in der Erinnerung an die schönen und unvergesslichen Wochen, die wir in Kopenhagen verleben durften und nicht zum mindesten ist es Ihr und Ihres Bruders Hans [Verdienst] gewesen, das uns die Zeit zu einer so angenehmen gemacht hat."

[8]The lectures were held on 26, 27, and 28 July 1923. They were announced under the title "Grundsätzliche Fragen der modernen Physik," see *Hamburgische Universität. Verzeichnis der Vorlesungen. Sommersemester 1923*, Hamburg 1923, p. 41. The third of the three lectures was given a second time, with short summaries of the first two lectures, in a talk at the "Physikalische Gesellschaft" in Zurich on 27 October 1923. This lecture was announced under the title "Erkenntnistheoretische Grundfragen der Physik," see *Neue Zürcher Zeitung*, Nr. 1473, Erstes Morgenblatt, 27 October 1923. The manuscript *Cod. Ms. D. Hilbert 596* contains the notes for both the Hamburg and Zurich lectures. For a general discussion of these lectures, see *Sauer and Majer 2005*, *Majer and Sauer 2006*.

[9]*Hilbert 1915* (this Volume, p. 28ff).

[10]For reviews, see *Vizgin 1994*, *Goldstein and Ritter 2003*, *Goenner 2004*, *Sauer 2007*.

[11]*Hilbert 1924*, which was received on 29 December 1923.

[12]See Hilbert's Lecture Courses, 1886–1934, this Volume, p. 721, and *Hilbert 1923/24a**; *Hilbert 1923/24b**.

as a means to introduce numbers on the one hand and the laws of nature on the other hand. As he had done already in his Copenhagen lectures of 1921, he introduced what he called the "principle of objectivity," but even more explicitly and forcefully, Hilbert argued that the "principle of objectivity" is a necessary concretization of Einstein's intentions when he was searching for generally covariant equations. Hilbert shows how, in principle, every differential equation can be brought into a generally covariant form by means of purely formal transformations, a point that had already been emphasized by Kretschmannn in 1917.[13] Hilbert was anticipating, on a general level, results that were later demonstrated in the concrete case of classical Newtonian mechanics.[14] Without the advantage of having modern, coordinate-free terminology at his disposal, Hilbert nevertheless gave a discussion of how different spacetimes may be distinguished through their symmetry properties.

The main point of the first lecture is the introduction of what Hilbert called the "Weltgleichungen" or the "Weltgesetze." These are essentially the generally covariant field equations for the electromagnetic potential and the metric tensor components, formulated in terms of a variational integral and an unspecified but invariant Lagrangian. Hilbert claimed that he had introduced these eight years before, independent of Einstein. He also claimed that now other researchers — he mentioned Levi-Civita, Weyl, Eddington, Schouten and even Einstein — after many detours, had finally come around to accept essentially these same field equations.[15]

At the end, Hilbert pointed to some problems of the physical interpretation of these equations, the issue of causality and the role of the time coordinate, which are treated in more detail elsewhere.[16] Another critical point for the physical interpretation of the field equation that is discussed in the second lecture is the issue of the apparent conflict between time reversal invariance on the foundational level, which is entailed by the principle of general covariance, and the empirically observed irreversibility of physical phenomena. If the fundamental field equations are formally time-reversal invariant, how can they account at the same time for the irreversibility that we observe in nature?[17] As he had done in his Copenhagen lecture, Hilbert revisits the issue

[13]See *Kretschmann 1917*.

[14]See *Cartan 1923* and *Friedrichs 1927*. For the generally covariant reformulation of Newtonian gravity, the concept of an affine connection was crucial, see *Stachel 2007* for a critical discussion.

[15]Specifically, Hilbert had in mind Einstein's latest papers, *Einstein 1923a*, *Einstein 1923b*, and *Einstein 1923c*. The last of these papers had been presented by Einstein to the Prussian Academy for publication in its *Proceedings* on 31 May 1923 and had been published on 28 June 1923, some four weeks before Hilbert's lectures in Hamburg. See *Sauer and Majer 2005* for a detailed discussion of Hilbert's claim.

[16]See *Hilbert 1917* and *Das Kausalitätsprinzip in der Physik* (this Volume, pp. 47, 335).

[17]It is worth noting that Hilbert at one point stated that he would reserve the freedom to modify these equations which would nonetheless remain time-reversal invariant: "Dieses

of the origin of irreversibility in statistical mechanics, emphasizing the distinction between two sources of uncertainty of knowledge. As a mathematical theorem, Boltzmann's ergodic hypothesis is unproven, but granting the truth of the mathematical statement we also make probabilistic assumptions about the occurrence of initial conditions in our statistical reasoning.

The discussion of the application of the field equations and, in particular, the discussion of the central question whether it is conceivable that they may represent the axiomatic foundation for *all* laws of nature is the topic of the second lecture. Here, Hilbert introduced the notion of "accessorial" laws:

> ... ich möchte Alles, was noch zu den Weltlgeichungen hinzugefügt werden muss, um die Geschehnisse in der leblosen Natur zu verstehen, kurz *accessorisch* nennen. (second lecture, pp. 1–2)

The result of the argument of the second lecture very concisely is this:

> ... dass es keine eigentlichen accessorischen Naturgesetze gibt. (second lecture, p. 21)

In order to establish this result, Hilbert discussed the epistemological role of the ergodic theorem and its significance for a justification of the second law of thermodynamics. He also discussed the periodic system of elements and its theoretical foundation in Bohr's quantum theory, arguing that the full system of the chemical elements may, in principle, be deduced from the fundamental world equations, even if "the solution of this theoretical problem still lies in the future" (second lecture, p. 15).

The role of initial or boundary conditions that usually function as accessorial laws is now taken by the postulates of stability and by probabilistic arguments:

> Solche Forderungen wie die der *Konstanz*, der *Stabilität* oder *Periodicität* dürfen wir als *accessorische* ansehen, ebenso wie die Annahme, dass jedes solche Integral in der Natur auch *realisirt* ist. Es ist aber zu beachten, dass diese accessorischen Forderungen — auch die Annahme der Anwendbarkeit der Wahrscheinlichkeitsprinzipien kann dazu gerechnet werden — dass diese accessorischen Principien nicht den math. Charakter *neuer Gleichungen* haben, sondern allgemeiner Art sind, mit unserem Denken überhaupt und unserer Einstellung gegenüber der Natur zusammenhängen. (second lecture, pp. 26–27)

Consequently, Hilbert embarks on the discussion of some general epistemological issues in his third lecture.

In the third part of the lecture, Hilbert addresses what he called "an important philosophical problem," namely the "old question":

Gesetz von der Umkehrbarkeit der physik. Vorgänge, welches hier als eine notwendige Folge der allgem. Relativität erscheint und welches also auch gilt, wenn die Weltlgl. modifiziert werden — was wir uns vorbehalten — ...." first lecture, [p. 27].

> nach dem Anteil, den das Denken einerseits und die Erfahrung andererseits an unserer Erkenntnis haben.

Two circumstances, Hilbert argued, allow the attempt of answering this question for the first time in the history of mankind: the rapid progress of the sciences and the advent of the axiomatic method. The progress of science starting with the Copernican revolution and accelerating with the discoveries in physics of the late nineteenth and twentieth centuries reveals an intimate entanglement of theory and practice, of thought and experience, and provides various examples of profound conceptual changes that had been induced by experience. The axiomatic method, on the other hand, is presented here by Hilbert as a general means suited to design different conceptual frameworks to answer the philosophical question of the relationship between theory and experience. Hilbert's answer to this question has two parts.

First, he introduces what he calls a "framework of concepts," "ein Fachwerk der Begriffe."[18] This framework of concepts would represent the theory of a field of science:

> Das Fachwerk der Begriffe ist nichts Anderes als die Theorie des Wissensgebietes. Diese ist ein abstraktes Abbild, eine Projektion der Tatsachen in das Reich der Begriffe. (third lecture, p. 10)

The internal structure of this framework is set up by the axioms and the logical relations between the concepts implicitly defined by them. Second, its relationship to reality, and this is a crucial point for Hilbert's argument, is a one-to-one mapping:

> Nun besteht *Wissenschaft* darin, dass die Dinge der Wirklichkeit und die Begriffe des Fachwerkes umkehrbar eindeutig aufeinander bezogen werden. (third lecture, p. 13)

Hilbert illustrates his understanding of the application of a framework of concepts to reality by the notion of "between." This notion is implicitly defined by a set of axioms known from Euclidean geometry. This same set of axioms, however, also holds for the electrochemical series of metals and for the laws of heredity observed with inherited properties of drosophila.

The lecture ends with an extended discussion of both the apriorist point of view and with Poincaré's conventionalism. Implicitly at least, Hilbert here refers to Einstein's 1921 paper on "Geometry and Experience."[19] He disagrees with what he sees as an unnecessary concession on Einstein's part toward Poincaré's position, which, as he makes unmistakably clear, he finds untenable.

Ulrich Majer, Tilman Sauer

[18] The term was already used in his second lecture course on the "Foundation of Physics," see *Hilbert 1916/17**, p. 82, (this Volume, p. 226).

[19] *Einstein 1921*.

Natur und mathematisches Erkennen

Wenn wir eine Ueberschau halten wollen über den Bereich derjenigen Wissenschaften, die auf der Betrachtung der leblosen Natur beruhen, so haben wir an alle die Tatsachen, Ergebnisse, *Begriffsbildungen* zu denken, welche den Gebieten der Mathematik, Physik, Astronomie,[1] Chemie⟨,⟩ der Technik und deren Nachbarwissenschaften[2] angehören. Dieser Wissenskomplex ist fein und weit verzweigt und gewaltig an Umfang und Ausdehnung; und doch grenzt er sich scharf ab gegenüber den übrigen Gebieten menschlichen Wissens, nämlich
2 gegenüber den biologischen Wissenschaf|ten und denjenigen, die vom *Menschen als solchem* handeln. Der bezeichnete Wissenskomplex, den wir den physikalischen nennen wollen, hat vor dem übrigen menschlichen Wissen das voraus, dass darin die einzelnen Zweige[3] meist fortgeschrittener und entwickelter, die Tatsachen mehr durch *Systeme logisch* geordnet und die *Ergebnisse im Ganzen gesicherter* sind. Damit hängt zusammen die bedeutungsvolle und exzeptionelle Rolle, die in jenem physikalischen[4] Wissenskomplex, die erstgenannte Wissenschaft, nämlich die Mathematik spielt; ist doch tatsächlich dieser physikalische Wissenskomplex überall mit mathematischen *Ideenbildungen* und *Denkmethoden* durchwebt und die heutige Höhe der Entwicklung in diesen Gebieten ist ohne Mathematik undenkbar.

3 Nun ist es der Begriff der Zahl, der in | der Mathematik die *zentrale Stellung* einnimmt. Da aber die Zahl an sich etwas der Natur Fremdes ist, so bedarf es, wenn sie die genaue und eindeutige Beschreibung eines Tatbestandes oder eines Naturvorganges ermöglichen soll, einer *Vermittelung* zwischen der Zahl und den zu beschreibenden Gegenständen in der Natur. Diese Vermittelung geschieht[5] durch die *Idee des* Koordinatensystems für Raum und Zeit. Das Koordinatensystem erfüllt aber diese Vermittlungsrolle nur dann, wenn ein Prinzip, das ich das Prinzip der Objektivität nennen möchte,[6] gewährt bleibt. Dieses Prinzip lautet: Ein in Koordinaten ausgedrückter Satz über die Natur ist nur dann eine Aussage über die Gegenstände in der Natur,

[1] The word "Astronomie" is interlineated.

[2] "und deren Nachbarwissenschaften" was corrected from "und den beschreibenden Naturwissenschaften."

[3] "Zweige" was corrected from "Teilgebiete".

[4] "physikalischen" was corrected from "grossen".

[5] At this point, Hilbert added a reader's mark: "⊤".

[6] The words "ein Prinzip, das ich" and "nennen möchte" are interlineated.

wenn sein Inhalt von der Wahl der Koordinaten unabhängig ist.[7] Die hiermit verlangte Emanzipirung | vom Koordinatensystem kann auf dreierlei Arten 4
erreicht werden⟨:⟩[8]

erstens durch Aufweisung eines konkreten Objektes, mit Bezug auf welches die Koordinaten festgelegt werden nach Art des singulären Urteils,

zweitens durch die existentiale Form der Behauptung, indem man sagt: es giebt ein Koordinatensystem, in dem die formulierten Beziehungen gelten — es ist die Art des partikulären Urteils

drittens, wenn die Aussage für jedes Koordinatensystem gelten soll — nach Art des generellen Urteils.

Wir wollen uns nun mit den Weltgesetzen beschäftigen. Die Weltgesetze müssen dem Prinzip der *Objektivität* genügen; sie haben zwar den Charakter genereller Urteile, aber nur insofern, als sie für jeden Ort und jede Zeit gelten sollen. Daher ist an sich jede der drei aufgezählten Arten von Darstellungsformen für die Welt|gesetze zulässig. Wir wollen nun untersuchen, welche 5
Anforderungen des Weiteren an die Weltgesetze zu stellen sind.[9]

Als Objekte für die Weltgesetze dienen die Raum-Zeitstellen, die Weltpunkte der vierdimensionalen Raum-Zeitmannigfaltigkeit d. h. *kurz und anschaulich* die verschiedenen „Hier-Jetzt“, festgelegt mittelst irgend eines[10] Koordinatensystems durch die Werte von vier Parametern x_1, x_2, x_3, x_4, wie es einst Gauss und Riemann in der allgemeinen Geometrie lehrten. Das *physikalische Geschehen* werde nur durch gewisse Grössen (P) bestimmt, die wir Potentiale nennen und diese Bestimmtheit des physikalischen Geschehens

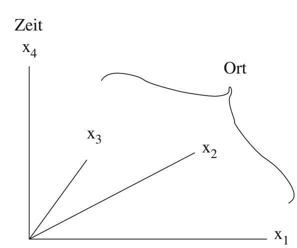
[7] At this point, Hilbert added a reader’s mark (“|”). On the left hand page, Hilbert wrote: “Hamburg[-] ist in Anfg d. Kilo[—]”

[8] For a similar version of this argument, see *Grundsätzliche Fragen der modernen Physik* (SUB Cod. Ms. D. Hilbert 596/I, p. 4 (this Volume, p. 398).) On the left hand page, Hilbert wrote:

„ Koordinatensystem	Urteilsformen
1. Konkret festgelegt	singulär
2. „Es giebt“	partik⟨u⟩l⟨är⟩
3. „Für alle gültig“	generell

In den best⟨immten⟩ Koord⟨inaten⟩ sind die Ko⟨ordinaten⟩ von Ham⟨burg⟩ so u⟨nd⟩ die v⟨on⟩ Berlin so. Entfer⟨nun⟩g als Beispiel.“

[9] A sketch in the left hand page indicates a four-dimensional coordinate sysstem:



[10] “irgend eines” was corrected from “eines allgemeinen”.

durch die Werte von P soll eine vollständige sein, so dass wir *allwissend* wären, wenn wir diese Potentiale für alle Hier-Jetzt d. h. als Funktionen von
6 x_1, x_2, x_3, x_4 kenn|ten; *kurz und anschaulich*: diese Potentiale liefern vollkommen das *Hier-Jetzt-So*.[11]

Nunmehr bringen wir zunächst das Prinzip der *Nahe-Physik* zur Geltung, demzufolge überhaupt Ferngesetze ausgeschlossen sind und nur eine Kontinuumstheorie zugelassen wird. Dies bedeutet mathematisch die Forderung, dass die Weltgesetze Differentialgleichungen[12] sein sollen; hierdurch ist dann zugleich die frühere Forderung erfüllt, derzufolge dieselben Weltgesetze an jedem Orte und zu jeder Zeit gültig seien. Wir wollen überdies, obwohl diese Forderung auch durch eine geringere ersetzt werden könnte, annehmen, dass die die Weltgesetze darstellen⟨den⟩ Differentialgleichungen *rationale* Gleichungen zwischen den Potentialen P und deren Ableitungen nach x_1, x_2, x_3, x_4 sein mögen.[13]

7 Diese P seien nun durch die phys⟨ikalische⟩, astron⟨omische⟩, chem⟨ische⟩ Wiss⟨enschaft⟩ geliefert. Dann müssten wir eine math. Behandlung eintreten lassen.[14] Es könnte nun sein, dass aus diesen Weltgleichungen *durch ein geeignetes Integrationsverfahren* neue Differentialgleichungen zwischen P und *gewissen anderen Funktionen* Q von x_1, x_2, x_3, x_4 sich deduziren liessen, die ebenfalls rational und zwar in P, Q und deren Ableitungen nach x_1, x_2, x_3, x_4 ausfielen. In dem so mathematisch gefundenen erweiterten Funktionensystem P, Q lasse man dann diejenigen Funktionen weg,[15] die blosse rationale Verbindungen der übrigen und deren Ableitungen sind: dann bilden die übrig bleibenden Funktionen ein System, das wir als das System der *Grundpotentiale* G bezeichnen wollen. Aus den Differentialgleichungen für P, Q werden Differentialgleichungen für diese Grundpotentiale G und diese heissen wir die
8 Grundgleichungen der Physik. | Durch Einführung dieser Begriffe Grundpotentiale und Grundgleichungen erhalten, glaube ich, die allgemeinen Aussagen über den *Charakter* von Raum und Zeit, über *Koordinatensysteme*, über *Relativität* und *Invarianz* erst einen bestimmten Sinn und ihren eindeutigen mathematischen Ausdruck.[16]

---

[11] On the left hand page, Hilbert added a reader's mark: "⊥".

[12] "Differentialgleichungen" was corrected from "Differentialgesetze".

[13] On the left hand page, Hilbert wrote with blue pencil: "x_1, x_2, x_3, x_4

$$P: \quad R(P, \frac{\partial P}{\partial x_h}, \frac{\partial^2 P}{\partial x_h \partial x_k}, \cdots) = 0$$
$$P, Q: \quad S(P, Q, \frac{\partial P}{\partial x_h}, \frac{\partial Q}{\partial x_h}, \cdots) = 0''$$

[14] The previous sentence was written at the top of the page with blue pencil.

[15] At this point, Hilbert added a reader's mark: "|", and on the left hand page, he wrote with pencil: "und wenn dann G= ".

[16] The preceding sentence was marked on the left hand page with reader's marks "⊤" and "⊥".

Wenn wir nämlich jetzt statt der x_1, x_2, x_3, x_4 irgend welche andere Funktionen von x_1, x_2, x_3, x_4 als neue Koordinaten nehmen, die Grundpotentiale G ihrem Charakter als Vektoren oder Tensoren entsprechend transformiren und in unsere Grundgleichungen der Physik einführen, so ist das Verhalten dieser Grundgleichungen *massgebend* für unsere Erkenntnis der Eigenschaften von Raum und Zeit in der Physik. Träte nämlich bei jeder Aenderung des Koordinatensystems auch stets eine wirkliche[17] Aenderung | der Grundgleichung 9
ein,[18] so würden wir in strengem Sinne dem Raum und der Zeit in der Natur die *Eigenschaft absolut zu sein zusprechen müssen.* Raum und Zeit besässen alsdann in der Tat vermöge der Grundgleichungen keinerlei durch unsere Wissenschaft feststellbare *Symmetrie*. In diesem Falle wäre, um das vorhin dargelegte Prinzip der Objektivität zu wahren, die erste der drei genannten Arten nämlich die Aufweisung eines konkreten Objektes zur Festlegung des Koordinatensystems die angemessene.[19] Wir sehen also,[20] dass die Existenz eines absoluten Raumes und einer absoluten Zeit nicht blos |[21] sehr wohl logisch 10
denkbar wäre, sondern auch experimentell durch die Weltgesetze feststellbar sein könnte.[22] Die Sachlage ist aber in Wirklichkeit völlig anders.[23]

Nach allen Erfahrungen und allen bisher aufgestellten Theorien kommt dem Raume und der Zeit eine *Symmetrie*[24] zu und in Folge dessen kann in der wirklichen Natur von absolutem Raum und absoluter Zeit in strengem Sinne ganz gewiss nicht die Rede sein. Vielmehr findet Folgendes statt.

Die Grundgleichungen der Physik gestatten eine gewisse Gruppe von Transformationen in sich. Gelingt es nun solche Koordinaten einzuführen, dass die Transformationen dieser Gruppe durch formale Einfachheit besonders ausgezeichnet sind z. B. dadurch dass die Transfor|[25]mationen lineare sind, so 11
sind diese Koordinaten vermöge des invarianten Charakters der Grundgleichungen ausgezeichnet; wir sagen dann: es giebt in der Natur eine durch die Grundgleichungen ausgezeichnete Gruppe von Koordinatensystemen. Solche ausgezeichnete Koordinatensysteme sind in der Gallileischen Mechanik das Cartesische Koordinatensystem und die ausgezeichneten Transformationen sind linear und bilden die bekannte *Gallileische Gruppe*, in der das

[17] The word "wirkliche" is interlineated.

[18] Deleted: "derart, dass sie nach der Transformation nicht blosse Kombinationen der ursprünglichen Grundgleichungen sind."

[19] At this point Hilbert, added a reader's mark: "|". On the left hand page, he wrote: "Wir würden ein solches speziell [Koord?] wo etwa gewisse Gleich 0 werden [?] normierte Koordinaten!"

[20] "Wir sehen also" was corrected from "Diese Überlegungen zeigen".

[21] At the top of the left hand page, Hilbert wrote: "Ich kann natürlich ein anderes Koord. syst. einführen, aber dann sind sind auch die Weltgesetze anders."

[22] At this point, Hilbert added a reader's mark: ⟨|⟩, and interlineated: "von hier".

[23] The words "in Wirklichkeit" are interlineated.

[24] On the left hand page, Hilbert wrote: "Koordinaten!"

[25] At the top of the left hand page, Hilbert wrote: "Durch die Weltgesetze kann ich [zwischen?] diesen Koordinatensystemen der Gruppe nicht unterscheiden."

Gallileische Symmetriegesetz für Raum und Zeit zum Ausdruck kommt. Eine weit tiefer liegende Symmetrie von Raum und Zeit wird durch die Gruppe der Lorentz-Transformationen dargestellt.[26] Hier wie in der Gallileischen Mechanik kommt das oben genannte *Prinzip der Objektivität* in der zweiten der
12 drei aufgezählten Arten, nämlich in der Existen|tialform zur Anwendung; wir sagen: es giebt in der Gallileischen Mechanik bez. in der klassischen Elektrodynamik ausgezeichnete Koordinatensysteme; die Grundgleichungen[27] gestatten alsdann jedesmal eine gewisse Gruppe von Transformationen in sich.[28] Die Verknüpfung von Raum und Zeit, bereits durch Gallilei hergestellt, wird durch das spezielle Lorentz-Minkowskische *Symmetriegesetz* zu einer festen Union. Aber ihren Höhe- und Endpunkt erreicht diese Gedankenentwicklung erst durch die Einsteinsche Entdeckung des *vollkommensten Symmetriegesetzes* für Raum und Zeit. Die Einsteinschen Gravitationsgleichungen sind in dem hier definirten Sinne die Grundgleichungen der Physik, wenn man darin das Gravitationspotential $g_{\mu\nu}$ und ausserdem den *Energietensor* als Grundpoten-
13 tiale nimmt. In den von mir aufgestellten | Grundgleichungen der Physik tritt neben das Gravitationspotential nur das elektromagnetische Viererpotential als Grundpotential auf.[29] In beiden Fällen sagt das Relativitätsprinzip aus, dass die *Grundgleichungen invariant* sind gegenüber jeder beliebigen Transformation des Koordinatensystems d. h. es giebt *kein durch die Naturgesetze ausgezeichnetes* Koordinatensystem.[30] Dabei muss betont werden, dass diese einfache[31] Formulirung des Relativitätsprinzips nur möglich ist auf Grund der genannten mathematisch zu erweisenden Tatsache, dass die Gravitationsgleichung den Charakter von Grundgleichungen in dem von mir definirten Sinne besitzen.[32] An sich würde die blosse Forderung der Invarianz keineswegs schon
14 allein den Gedanken der Relativität zum Audruck bringen, da ja | stets auch aus irgend welchen nicht invarianten Differentialgleichungen durch mathematische Prozesse der Differentiation und Elimination Gleichungen abgeleitet werden können, die formal die Invarianteneigenschaft besitzen und wesentlich dem ursprünglichen aeqivalent sind⟨.⟩[33]

[26] On the left hand page, Hilbert wrote:

$$
\begin{aligned}
x' &= \alpha x + \cdots + \delta \\
y' &= \\
z' &= \\
t' &= t' + c
\end{aligned}
$$

[27] “Grundgleichungen” was corrected from “Weltgesetze”.

[28] On the left hand page, Hilbert wrote: “$G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}$”.

[29] On the left hand page, Hilbert wrote: “$G_{\mu\nu} = f_{\mu\nu}(g_{\mu\nu}, \varphi_{\mu\nu})$”. Underneath, he wrote, slightly slanted: “$T^{\lambda}_{\mu\nu}$”.

[30] On the left hand side, Hilbert bracketed this sentence, and wrote “S. 8”.

[31] “einfache” was deleted with pencil.

[32] On the left hand page, Hilbert added a reader’s mark: “$\perp$”.

[33] The words “und wesentlich dem ursprünglichen aequivalent sind” are interlineated.

In der Einsteinschen Relativitätstheorie, zu der wir nunmehr gekommen sind,[34] wird unserem Prinzip der Objektivität auf die dritte der aufgezählten Arten Rechnung getragen, indem darin den Grundgleichungen selbst volle Invarianz zu Teil wird. Diese *dritte Art der Objektivirung der Natur* ist die unmittelbarste und erscheint uns von vorneherein für die Grundgleichungen der Physik am angemessensten; hierin liegt die grosse überzeugende Kraft des Relativitätsgedankens.[35]

Das Relativitätsprinzip bedeutet, wie mir scheint, zum ersten Male eine | *definitive genaue und allgemeine* Aussage über die in der Wirklichkeit 15
geltenden Gesetze.[36]

Für Einstein war die Forderung der allgemeinen Invarianz der *natürliche Leitfaden* durch den es ihm gelang, die bis dahin ganz abseits stehende Gravitationskraft in die Feldphysik derart einzuordnen, dass uns zugleich mit einem Schlage die Erkenntnis erwuchs: *nicht die Masse als solche*, sondern die Energie ist es — dieselbe Energie, deren Trägheitscharakter schon feststand —, der allein auch die Eigenschaft der Schwere zukommt. Die Einsteinsche Entdeckung der Gravitationsgleichungen stellt somit meiner Meinung nach die gewaltigste reine Gedankentat des menschlichen Geistes dar. Der Mathematiker aber, der schon so oft die praestabilirte Harmonie zwischen *seinem Denken und der Wirklichkeit* mit Staunen bemerkt, wird fast zu der Vorstellung gezwungen, als | sei die Natur eigens so eingerichtet, dass es zu ihrer 16
Erfassung der tiefsten mathematischen Spekulationen bedarf.

Wenn in der allgemeinen Relativitätstheorie von beliebigen Transformationen der Koordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 die Rede ist, so verlangt die *sinngemäße Interpretation* dennoch, dass damit nur solche Transformationen gemeint sind, die einer Schar angehören, in der die identische Transformation vorkommt, d. h. die durch stetige Variation aus derjenigen Transformation erhalten werden kann, die überhaupt Nichts ändert. Es ist aber, wie man durch eine mathematische Ueberlegung leicht zeigen kann, eine notwendige Folge der Invarianz der Grundgleichungen, dass dieselben auch bei gewissen Transformationen invariant bleiben, die die genannte Bedingung nicht erfüllen. Unter diesen Transfor | mationen bietet diejenige ein besonderes Interesse, die lediglich 17
in der Aenderung des *Vorzeichens der Zeitkoordinate* besteht. Die Invarianz der Grundgleichungen gegenüber dieser Transformation bedeutet, dass ein jeder Vorgang in der Natur auch in umgekehrter Zeitrichtung ablaufen kann, d. h. dass volle Reversibilität statthat.[37] Dieses Gesetz von der Umkehrbarkeit

[34] The preceding half-sentence is interlineated.

[35] At this point, Hilbert added a reader's mark.

[36] At this point, Hilbert interlineated the word "und" and drew a line pointing towards the half-sentence: "stellt somit meiner Meinung nach ..." following below.

[37] On the left hand page, Hilbert wrote with pencil: "Die Behauptung, dass es kein⟨en⟩ Unterschied zwischen vorwärts und rückwärts der Zeit nach giebt in dem selb⟨en⟩ Sinne richtig und gemeint, wie man meint, dass der Raum ⟨der?⟩ Zeit nach absolut wird. Näher wohl durch den Hinweis auf die Erdrotation, aber nicht durch das Weltgesetz allein".

der physikalischen Vorgänge, welches hier als Folge der allgemeinen Relativität erscheint,[38] hat sich insbesondere in der Mechanik und in der klassischen Elektrodynamik bestätigt. (Was die Erscheinungen der Radioaktivität betrifft, so ist ihre theoretische Deutung noch nicht so gesichert, daß sie mit Bestimmtheit Einzelvorgänge aufwiese, die nur in einer Zeitrichtung zu verlaufen im Stande sind und demnach dem Reversibilitätsprinzip widersprächen.)

Dagegen *spielen in der Wärmelehre* seit der Aufstellung des Gesetzes von der Vermehrung der Entropie die irreversiblen Vorgänge eine bedeutende Rolle. Wir wollen uns die Frage stellen, inwiefern mit dieser Lehre notwendig
18 die Annahme | einer bevorzugten Zeitrichtung verbunden werden muss.

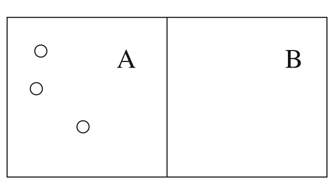
Der Satz von der Vermehrung der Entropie wird aus den Prinzipien der physikalischen Statistik hergeleitet.[39] Vergegenwärtigen wir uns an einem einfachen Beispiele wie nach dieser Auffassung ein irreversibler Vorgang zu Stande kommt.

Es sei ein Kasten durch eine Wand in zwei gleiche Fächer A und B geteilt. *Das Fach* B sei anfangs leer, *das Fach* A mit einem Gase von n Molekülen erfüllt, die sich beim Zusammenstoss wie elastische Kugeln verhalten sollen. Der genaue Zustand des Gases wird in bekannter Weise zu jeder Zeit durch einen bestimmten Punkt des $6n$*-dimensionalen Phasenraumes*, der auf einer $6n-1$ dimensionalen Energiefläche E gelegen ist, dargestellt. Wird die Scheidewand zwichen A und B zu einer Zeit t_1 fortgenommen, so wird zu einer genügend späteren Zeit t_2 das Gas den ganzen Kasten gleichmässig erfüllen.[40] Die Er-
19 klärung die|ses irreversiblen Vorganges nach der statistischen Methode stützt sich nun wesentlich auf *zwei Annahmen*, die beide unter sich von sehr verschiedenm Charakter sind. Die erste Annahme betrifft einen rein mathematischen Satz, der etwa folgendermassen lautet: Wählen wir die Masse[41] des Kastens, die Zahl n der Moleküle, den Wert der gesammten kinetischen Energie von gewisser normaler Grösse, so wird, wenn die Zwischenzeit von t_1 bis t_2 auf 5 Minuten bemessen ist, zur Zeit t_2 die Anzahl der in A befindlichen Moleküle sich von der Anzahl der in B befindlichen Moleküle stets um weniger als 1 pro Mille unterscheiden — es sei denn, dass der Anfangszustand des Gases in A gerade durch Punkte *eines bestimmten Teilgebietes* T der Energiefläche im Phasenraum dargestellt wird, das im Vergleich zur ganzen Energiefläche E von

[38] The preceding half-sentence is interlineated with blue pencil.

[39] On the left hand page, Hilbert wrote: "von hier".

[40] On the left hand side, Hilbert sketched a figure:



and wrote "Phasenraum".

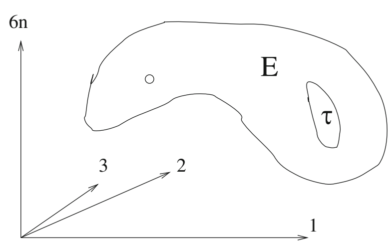
[41] "Masse" should be "Maasse".

angebbarer ausserordentlicher Kleinheit, sagen wir 1 pro $(\text{Mille})^{10}$ ausfällt.[42]
Der Beweis dieses mathematischen Satzes ist äusserst schwierig und dürfte in 20
absehbarer Zeit kaum gelingen. Wir haben aber allen Grund seine Richtigkeit zu vermuten — unter anderem auch desshalb, weil der entsprechende Satz für den einfacheren Fall des eindimensionalen Gases,[43] tatsächlich bewiesen werden kann und sich also als *richtig herausstellt*. Der fragliche Satz über das dreidimensionale Gas ist in demselben Sinne ein vermutlich richtiger mathematischer Satz, wie der grosse Fermatsche Satz in der Arithmetik oder der Satz, dass $2^{\sqrt{2}}$ eine irrationale Zahl ist oder der Satz, dass bei jeder Landkarte auf dem Erdglobus bereits vier die zur Färbung der verschiedenen Länder ausreichende Anzahl von Farben ist. Die Aussage, dass diese Sätze vermutlich richtig sind, ist ein *subjektives auf Grund von mathematischer Erfahrung gefälltes Urteil*.

Die Erklärung unseres Phänomens der Gleichverteilung der Moleküle in 21
A und B nach Fortnahme der Wand in 5 Min erfordert aber noch eine zweite Annahme, die die Wahrscheinlichkeit des Anfangszustandes des Gases in A betrifft und die darin besteht, dass die Moleküle zur Zeit t_1 nicht gerade eine Lage hatten, die durch die Punkte des besonderen Teilgebietes T im Phasenraum dargestellt wird. Im Allgemeinen werden wir wegen der Kleinheit des Teilgebietes T diese Annahme machen dürfen, indem wir den Grundsatz der Wahrscheinlichkeitstheorie anwenden, *wonach das, was fast immer statthat, in Wirklichkeit stets angetroffen wird* — ein Grundsatz, der an der Spitze der ganzen physikalischen Statistik steht.[44]

Die letztere Annahme zusammen mit der ersteren erklären unser Phänomen vollkommen; die erstere Annahme ist eine *Vermutung*, die zweite eine |[45] 22

[42]On the left hand page, Hilbert sketched a figure:



and wrote: “$\tau : \mathcal{E} = 1 : (1000)^{10}$”.

[43]Deleted: “unter wenigstens der speziellen Voraussetzung, dass die Moleküle sich auf Punkte reduziren”

[44]On the left hand page, Hilbert wrote with pencil: “Wenn wir in dieser Tatsache in diesem Umstande, den die Natur verwirklichte, eine Auszeichnung der Zeitrichtung erblicken, so gäbe es in diesem Sinne eine Auszeichnung der Zeitrichtung. Ich möchte darin lieber eine Eigenschaft unseres Denkens unserer Auffassung als eine objekt. Eigenschaft der Natur sehen.”

[45]In the original manuscript an unnumbered page marks the beginning of the second batch of pages. On it Hilbert wrote with blue pencil: “Kopenhagen II, Fortsetzung von I!”; and at the top of p.22, Hilbert wrote: “Hier!”.

Wahrscheinlichkeit. Die beiden an sich so grundverschiedenen Begriffe „vermutlich“ und „wahrscheinlich“ werden desshalb so gefährlich oft mit einander vermengt und verwechselt, weil gerade bei den Anwendungen der Wahrscheinlichkeitstheorie auf Physik die *Vermutungen* eine grosse Rolle spielen und fast alle Wahrscheinlichkeitssätze in der Physik nur *vermutlich* richtige Sätze sind.[46]

Zu der soeben besprochenen Verwechselung tritt noch die unrichtige Anwendung des Begriffes „Hypothese“. So spricht man unglücklicher Weise in der kinetischen Theorie der Materie von der Boltzmannschen Ergoden„hypothese“,
23 während der damit gemein|te[47] Satz ein rein mathematischer Satz ist, der weder eine physikalische Hypothese darstellt, noch auch an sich irgend etwas mit dem Wahrscheinlichkeitsbegriff zu tun hat. Der Ergodensatz ist genau formulirt vielmehr ein math. Satz, an dessen Beweis wir wegen seiner Schwierigkeit nicht herankommen können, wenn wir auch von seiner Richtigkeit vollkommen überzeugt sind. Wir haben es also hier mit 3 grundverschiedenen Begriffen zu tun: *vermutlich*, *wahrscheinlich*, *hypothetisch*. Dann und nur dann, wenn wir dies bedenken, gewinnen wir Klarheit.

Wir[48] kehren nun zu unserer Fragestellung zurück, ob objektiv in der leblosen Natur durch ihre Gesetzlichkeit d. h. ihre innere Konstitution eine Zeitrichtung ausgezeichnet ist. Durch die Weltdifferentialgleichungen findet, wie wir sahen, eine solche Auszeichnung nicht statt. Und nach den eben gemachten Ausführungen, zumal wenn wir bedenken,[49] dass bei allen sonstigen Anwendungen der statistischen Methode die leitenden Grundgedanken die nämlichen sind, wie in unserem Beispiele der Mischung 2er Gase,[50] werden
24 | wir auch *nicht annehmen wollen*,[51] dass die *Wahrscheinlichkeitstheorie an sich* eine Auszeichnung der Zeitrichtung von Vergangenheit auf die Zukunft mit sich bringen kann, da sie rein *logisch-mathematischer* Natur ist. So werden wir damit zu der Erkenntnis geführt, dass bei den Erklärungen irreversibler Vorgänge durch die statistische Methode *die Unsymmetrie* in Bezug auf Vergangenheit und Zukunft nur durch die Art der gewählten Anfangszustände und Anfangsbedingungen zu Stande kommt[52] und demnach die Irreversibilität keine objektiv in der leblosen[53] Natur und ihrer Gesetzlichkeit vorhandene, sondern nur eine scheinbare, *durch den antropomorphen Standpunkt*

[46] Deleted: “Ein einfaches Beispiel eines vermutlich richtigen Wahrscheinlichkeitssatzes ist der Satz, dass die Wahrscheinlichkeit in der unendlichen Dezimalbruchentwicklung für die Zahl π die Ziffer 1 ebenso oft wie die Ziffer 2 anzutreffen, genau $\frac{1}{10}$ beträgt. Also 10%”.

[47] At the top of the page, Hilbert wrote: “z. B. speziell eben jener”.

[48] On the left hand page, Hilbert wrote: “von hier!”

[49] At this point, Hilbert added a reader’s mark.

[50] The words “der Mischung 2er Gase” are interlineated with the same reader’s mark as the one mentioned in the previous footnote.

[51] At this point, Hilbert added a reader’s mark (“||”).

[52] At this point, Hilbert added a reader’s mark (“|”).

[53] The word “leblosen” is interlineated.

begründete ist.[54] Das Befremdende dieser Behauptung verschwindet, wenn
wir uns die entscheidende Rolle vergegenwärtigen, die der Unterschied in der
Zeitrichtung überall in unserem Leben incl. unseres Denkprozesses spielt und
insbesondere wie verschieden die Möglichkei|ten der Herstellung von Anfangs- 25
und von Endzuständen für uns sind. Auch ist es uns natürlich keineswegs be-
nommen, durch Hinweis auf bestimmte Einzelvorgänge eine Zeitrichtung aus-
zuzeichnen z. B. durch die Bewegung der Erde. Unsere Behauptung, dass eine
Auszeichnung einer Zeitrichtung in der leblosen Natur nicht statthat, ist viel-
mehr *in demselben Sinne zu verstehen*, wie unsere frühere Behauptung, dass
Raum und Zeit nicht absolut sind, oder dass es keine ausgezeichneten Ko-
ordinatensysteme giebt, eine Behauptung, die dem nicht widerstreitet, dass
durch *bestimmte Vorgänge* und ebenso durch irgendwelche invariante oder
nicht invariante Bedingungen, die wir willkürlich auferlegen, sehr mannigfal-
tig Koordinatensysteme ausgezeichnet werden können.[55]

(Unsere Auffassung, dass in der leblosen Natur eine Bevorzugung einer
Zeitrichtung nicht statthat, scheint sich durchweg zu bewähren. Zunächst
bemerken wir auch im Rahmen der | statistischen Physik wichtige Erschei- 26
nungsprozesse, die in letzter Instanz auf der Reversibilität der in Betracht
kommenden Einzelvorgänge beruhen: ich erwähne nur das *Kirchhoffsche*
Gesetz über Emission und Absorption sowie die *Helmholtzschen* Reziprozitäts-
gesetze.)[56] Andererseits scheint hier noch folgende Ueberlegung von Interesse.
Unsere Auffassung, die Irreversibilität in der Wärmelehre als eine scheinbare
zu erklären, die nur durch eine Gruppirung von lauter reversiblen Vorgängen
vorgetäuscht würde, ist dadurch gerechtfertigt, dass wir in der That die in
der statistischen Physik in Betracht kommenden Erscheinungen in eine *end-
liche* Anzahl von Einzelvorgängen, die den Grundgleichungen entsprechend
reversibel sind, zerlegen können. Gelänge es ein System von unendlichvielen
Parametern ausfindig zu machen und in ihm dann die von der statistischen
Methode geforderte Irreversibilität zu beobachten, so müssten wir in einer sol-
chen Erscheinung tatsächlich eine Bevorzugung der Zeit|richtung anerkennen. 27
Es verhält sich nun aber im Gegenteil so, dass die sogenannte *Ultra-Violett-
Katastrophe der Hohlraumstrahlung* nicht eintritt, sondern offenbar auch in
diesem Falle die Auflösung in lauter reversible Einzelvorgänge möglich wird.[57]
Damit mündet dann ganz von selbst unsere allgemeine[58] Gedankenentwicke-
lung in demjenigen Problem, das heute die Physiker aller Richtungen so stark
in Atem hält und das berufen ist, ebenso über *aktuelle physikalische* Fragen
wie über die heute berührten *allgemeineren Gesichtspunkte* neues Licht zu

[54] At this point, Hilbert added a reader's mark ("||").

[55] On the left hand page, Hilbert marked the sentence starting with "Unsere Behauptung..." with a bracket and the comment: "auslassen!"

[56] The brackets were added in pencil.

[57] On the left hand page, Hilbert added a reader's mark ("⊥") and wrote: "bis hier!"

[58] The words "ganz von selbst" and "allgemeine" are interlineated.

verbreiten — ich meine das Quantenproblem, dessen gegenwärtig erfolgreichster Förderer hier in Ihrer Mitte weilt und Einer der Ihrigen ist.[59]

Für unsere erkenntnistheoretische Betrachtung sei *daran erinnert*, dass das Quantenproblem *ursprünglich in der Statistik* wurzelte und dort von Planck zuerst *aufgedeckt* worden ist,[60] wie sich dann dasselbe immer mehr
28 aus dem statistischen Milieu erhob | zu der Frage nach dem Charakter der Einzelvorgänge innerhalb der Materie, bis schliesslich die sogenannte Quantenvorschrift, die die Einzelvorgänge regelt, recht *tief liegende mathematische Hülfsmittel*, nämlich die Charakteristikentheorie und die Variationsrechnung heranzieht. Ja es hat ganz den Anschein, dass ähnlich wie in der Einsteinschen Gravitationstheorie eine weitere Vertiefung und Ausbildung dieser mathematischen Methoden später einmal[61] nötig ist, um in befriedigender Weise die Erklärung und Beschreibung *jener noch recht im Dunkel* liegenden Einzelvorgänge zu bewirken.

Wir haben so im Fluge, die gegenwärtig wichtigsten Kapitel der theoretischen Physik durcheilt. Fragen wir, welche Art Mathematik dabei für den Physiker in Betracht kommt, so sehen wir, dass es die *Analysis* ist in ihrem
29 gesammten *Inhalt und Umfang* die dem | Physiker dient und zwar auf zweierlei Weisen: erstens zur *Klärung und Formulirung* seiner Ideen und zweitens als *Instrument der Rechnung* zur raschen und sicheren Gewinnung numerischer Resultate, durch die er die Richtigkeit seiner Ideen prüft. Ausser diesem Antlitz, *in das der Physiker schaut*, hat die Mathematik aber noch ein ganz anderes Gesicht, *das auf die Philosophie gerichtet ist*, dessen Züge nicht minder unser Interesse verdienen. Darüber will ich in meinen folgenden Vorträgen handeln.[62]

---

[59] A reference to Niels Bohr. On the left hand page, Hilbert wrote: "wird gerade diese Möglichkeit der bevorzugten Zeitrichtung beseitigt wird. Vorles. S. 96 Statistik 1922 und S. 104 Schlussbem."

[60] On the left hand page, Hilbert wrote: "beim Denken gehört es zur ursprünglichen Einstellung".

[61] The words "später einmal" are interlineated.

[62] The last words starting with "dessen Züge" were deleted. At the bottom of the page, Hilbert wrote: "Nach dieser Blickrichtung hin möchte ich mir in meinen folgenden Vorträgen gestatten, Ihre Aufmerksamkeit ⟨zu⟩ lenken. Es wird sich da um die Grundlagen handeln, auf denen Alles ruht, was Math. heisst und um deren Befestigung." For more on Hilbert's lectures in Copenhagen, see the Introduction to Chapter 4, p. 376.

Description of the Text

Collection: SUB Göttingen, signature *Cod. Ms. D. Hilbert 589*.

Size: Page size approx. 21.0 cm ×16.5 cm.

Cover Annotations: The first pages of the two parts bear the annotations:'Kopenhagen // Vortrag März 1921 // I' and 'Kopenhagen II // Fortsetzung von I!'.

Composition: The draft is composed of two parts of 11 and 5 sheets, folded in the middle and sewn together respectively with a thread including the title pages; both parts lack a cover. The two outside double pages for each part are broken at the fold and lie loose by the corresponding part.

Pagination: Presumably Käthe Hilbert undertook the pagination with black ink in the upper right corner of the recto side of each page. The verso sides are neither paginated nor counted; the title pages are likewise unpaginated. Otherwise the pagination runs regularly to the end of the second part from 1 to 21 and 22 to 30.

Original Title: At the beginning of each part is a cover page, on which Hilbert noted the above annotation in pencil, which is not a title in the proper sense: "Kopenhagen/Vortrag März 1921./I" and "Kopenhagen II/Fortsetzung von I!", respectively. The first of the two title pages still shows on the recto side traces of erased notations. On the recto side of the second page, above the actual text, an unknown hand wrote: "Frühjahr 1920?"

Text: The text was written by Hilbert in black ink on the recto sides of the pages. On the verso sides appear notes, corrections, and supplementary remarks to the text on the opposite page. Hilbert generally made these notes in black or blue pencil. The continuous text begins on the page after the title page, is interrupted by the second title page, and ends on the recto side of the penultimate sheet, i.e. page 29. On the lower margin of the third page a strip about 5cm high has been cut out, and subsequently pasted over with other paper.

in der Tat
~~Es~~ haben Philosophen – und Kant
ist der klassische Vertreter dieses Standpunk-
tes – behauptet, dass wir ausser der Logik
und der Erfahrung noch <u>a priori</u> ~~gewisse~~ Erkenntnisse über
die Wirklichkeit haben. Nun gebe ich zu,
dass schon zum Aufbau der theoretischen
Fachwerke gewisse <u>apriorische Einsichten</u>
nötig sind und dass stets dem Zu-
standekommen unserer Erkenntnisse 97
solche zu Grunde liegen. Ich glaube,
dass die math. Er-
kenntnis letzten Endes auf einer Art
anschaulicher Einsicht beruht und
dass wir sogar zum Aufbau der Zahlen-
theorie eine gewisse <u>anschauliche Ein-
stellung a priori</u> nötig haben. Damit
behält also der allgemeinste Grundgedan-
ke der Kantschen Erkenntnistheorie seine

Facsimile of p. 23 of part III of *Cod. Ms. D. Hilbert 596.*

24.

(philosophische)

~~[illegible]~~ Bedeutung: nämlich das ~~[illegible]~~ Problem,
jene ~~Kant~~ anschauliche Einstellung a priori
festzustellen und damit die Bedingungen
~~jeder begrifflichen und jeder Erfahrungs~~
der Möglichkeit jeder begrifflichen Er-
kenntnis und ~~jeder~~ zugleich jeder Er-
fahrung * zu untersuchen. Ich meine, dass
dies im Wesentlichen in meinen Untersu-
chungen über die Prinzipien der Math. ge-
schehen ist. Das Apriori ist dabei Nichts 98
mehr und Nichts weniger als eine Grundein-
stellung oder der Ausdruck für gewisse un-
erlässliche Vorbedingungen des Denkens und
Erfahrens. Aber die Grenze einerseits zwischen
Dem, was wir apriori besitzen und logisch
deduziren und andererseits Dem, ~~was wir~~
wozu Erfahrung nötig ist müssen
wir anders ziehen als Kant. denn
Kant hat die Rolle der Apriori-schen

(und den Umfang)

Facsimile of p. 24 of part III of *Cod. Ms. D. Hilbert 596.*

⟨Grundsätzliche Fragen der modernen Physik⟩

M⟨eine⟩ D⟨amen⟩ u⟨nd⟩ H⟨erren⟩. Sie haben mich eingeladen, hier über grundsätzliche Fragen der Physik zu sprechen.[1] Es macht mir eine grosse Freude, das jetzt tun zu dürfen und zwar sollen es 3 durch *ihre Themata* in sich zusammenhängende Vorträge sein. Im Mittelpunkte eines jeden steht eine bestimmte Frage, um die herum sich *der Inhalt* des Vortrages gruppiren soll. Diese Inhalte möchte ich durch folgende Stichworte charakterisiren

1.) *Weltgl*⟨eichungen⟩
2.) Ihre *Anwendung* u. *Auswirkung*[2]
3.) *Theorie*[3] *u. Erfahrung.*

Der erste Vortrag wird etwas *abstrakte* Begriffsbildungen formuliren; der zweite mehr *konkrete* Dinge zur Sprache bringen und der letzte Vortrag soll, hoffe ich, eine *allg*⟨emeine⟩ *philos*⟨ophische⟩ Frage in der Weise behandeln, dass eine *definitive Antwort zu Stande* kommt. In dem letzten Vortrage soll eben das Fazit gezogen werden und wie ich glaube werden Sie dann gewiss erkennen, dass Alles Frühere notwendig war. Denn obwohl es philos. allg. Behauptungen sind, will ich doch, dass sie ebenso bestimmt und ebenso sicher sind wie als wären es rein math. Behaupt.[4]

1 Wir kommen nun zu dem 1sten Thema:

I Die Weltgleichungen.[5]

Wenn wir eine Ueberschau halten über den Bereich derjenigen Wiss⟨enschaften⟩, die auf der Betrachtung der leblosen Natur beruhen, so fallen dahin,

[1] For a discussion of the occasion of these lectures, see the introduction to chapter 4, p. 378.

[2] The word "Auswirkung" was corrected from "Erfolge".

[3] "Theorie" was corrected from "Theorien".

[4] The preceding two sentences are a later insertion. The following passage was deleted: "Wenn schon, wie ich glaube, die Themata des allg. Interesses wert sind, so kann doch ein *Erfolg* der Vorträge nur mit Ihrer Hülfe zu Stande kommen und daher möchte ich mir gleich vorweg gestatten, an diese Ihre Hülfe zu *appelliren*, indem Sie mir *Gelegenheit* geben, in der Diskussion, die sich anschliessen soll, alle die Punkte aufzuklären, die unklar geblieben sind. Wir kommen nun zu dem ersten, dem schwierigsten Thema:"

[5] The title "I Die Weltgleichungen" was substituted for "I Das math. Denken in den physik. Wissenschaften."

gehören dazu alle die Tatsachen, Ergebnisse und Begriffsbildungen, die den Gebieten der *Math*⟨ematik⟩, *Physik*, *Astronomie*, *Geologie*,[6] *Chemie*, ferner der *Technik* und deren Nachbarwiss⟨enschaften⟩ angehören. Dieser *Wissenskomplex* ist gewaltig an Umfang u. Ausdehnung; er ist fein und weit verzweigt und doch grenzt er sich *scharf* ab gegenüber den übrigen Gebieten menschl. Wissens, nämlich gegenüber den biologischen Wiss. und erst recht von denjenigen, in denen der Mensch selbst als solcher im Mittelp⟨unkt⟩ steht.[7]

Der bezeichnete Wissenskomplex, den wir | kurz den physikalischen nen- 2
nen wollen, hat vor dem übrigen menschlichen Wissen Vieles voraus, vor Allem das, dass darin die einzelnen Wissenszweige meist fortgeschrittener und entwickelter, die Tatsachen mehr durch *Systeme logisch* geordnet und die Ergebnisse im Ganzen gesicherter sind. Das hängt jedenfalls damit zusammen, dass in jenem physik. Wissenskomplex die erstgenannte Wiss. nämlich die *Math.* eine besonders bedeutungsvolle exzeptionelle Rolle spielt; ist doch tatsächlich dieser physik. Wissenskomplex überall mit math. Ideenbildungen und *Denkmethoden durchwebt* und die heutige Höhe der Entwickelung in diesem Bereiche wäre ohne Math. unmöglich.[8]

Nun ist es der Begriff der Zahl, der in der Math. die zentrale Stellung
einnimmt. Da aber die Zahl an sich etwas der Natur | Fremdes ist, so be- 3
darf es, wenn sie die genaue und eindeutige Beschreibung eines Tatbestandes oder eines Naturvorganges ermöglichen soll, einer *Vermittelung* zwischen den Zahl⟨en⟩ und den zu beschreibenden Gegenständen. Diese Vermittelung geschieht durch die Idee des Koordinatensystems und es ist bezeichnend, dass es ein Philosoph hohen Ranges war, der das Koordinatensystem erfunden hat.[9]

Ein Koordinatensystem für Raum und Zeit erfüllt aber diese Vermittelungsrolle nur dann völlig, wenn ein Prinzip dabei gewahrt bleibt, das ich das Prinzip der *Objektivität* nennen möchte.[10] Dieses Prinzip lautet: Ein in Koordinaten ausgedrückter Satz über die Natur ist nur dann eine Aussage über die Gegenstände in der Natur wenn er von den Koordinaten unabhängig einen
Inhalt hat:[11] „Die x-Coordinate von Hamburg be|trägt 100 km.“ ist z. B. ein 4

---

[6] "Geologie" is interlineated.

[7] The preceding sentence was corrected from: "die vom Menschen als solchem handeln".

[8] "Es ist daher jedenfalls *entschuldbar* und vielleicht sogar *angebracht*, wenn auch ein Math. den Entwurf eines phys. Weltbildes unternimmt. Ich habe nun in 3 Vorträgen, die ich Ende Sommersemester in Hamburg hielt, einen solchen Versuch gemacht und ich bin Ihnen sehr dankbar, wenn Sie heute ein kurzes Referat darüber entgegennehmen." (from summary added to Zurich version)

[9] A reference to Descartes and his analytic geometry.

[10] For the term "Prinzip der Objektivität", cf. also Hilbert's 1921 Copenhagen lecture *Natur und mathematisches Erkennen*, p. 3 (this Volume, p. 382). Cf. also the marginal comment by Hilbert in *Hilbert 1916/17**, p. 8, (this Volume, note 12 on p. 172)

[11] "wenn er von den Koordinaten unabhängig einen Inhalt hat" was corrected from "wenn sein Inhalt von der Wahl der Koordinaten unabhängig ist".

Satz der keine Aussage über die Wirklichkeit enthält. Die Koordinaten, die notw. waren, müssen gewissermassen wieder entfernt werden.[12]

Diese *Emanzipirung* vom Koordinatensystem, wie sie unser Prinzip der Objektivität verlangt, kann auf 3-erlei Arten erreicht werden:

1.) durch Aufweisung eines konkreten Objektes, mit Bezug auf welches die Koordinaten festgelegt werden — *diese Zimmerkanten* in der Ecke, *diese Uhr*.

2.) durch die existentiale Form der Behauptung, in dem man sagt: es giebt ein Koordinatensystem, in dem die formulirten Beziehungen gelten — es giebt ein *rechtwinkliges* Koordinatensystem, in dem die Koordinaten dieses Punktes 1, 2, 3 cm und dieses zweiten 11, 2, 3 cm sind, Entf. 10 cm.

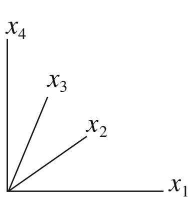
3.) wenn die Aussage für jedes Koordinatensystem gelten soll.

Diese 3 Arten entsprechen den aus der üblichen Logik bekannten 3 Urteilsformen: *singulär*, *partikulär*, *generell*.

5 Wir wollen uns nun mit den physik. *Weltgesetzen* beschäftigen. Die Weltgesetze müssen unserem Prinzip der Objektivität genügen; denn sie sollen doch die Gegenstände in der Natur betreffen. Sie haben zwar den Charakter genereller Urteile, aber nur insofern, als sie für jeden Ort und für jede Zeit gelten sollen. Daher ist an sich jede der 3 aufgezählten Arten von Darstellungsformen für die Weltgesetze zulässig.

Wir müssen nun näher darauf eingehen, welcherlei[13] Aussagen die Weltgesetze sind und welche math. Form sie haben müssen.[14]

Als *Objekte* für die Weltgesetze dienen die Raum-Zeitstellen, die Weltpunkte der 4-dimens. Raum-Zeitmannigfaltigkeit d. h. kurz und anschaulich
6 die verschiedenen | *Hier-Jetzt*, festgelegt mittelst irgend eines Koordinatensystems x_1, x_2, x_3, x_4,[15] wie es einst schon Gauss und Riemann lehrten.



Das physik. Geschehen werde nun durch gewisse Grössen $(p,\ p',\ ..)$[16] bestimmt, die wir Potentiale nennen und diese Bestimmtheit des physik. Geschehens durch die Werte von p, p', soll eine vollständige sein, so dass wir allwissend wären, wenn wir diese Potentiale für alle Hier-Jetzt d. h. als Funktionen von x_1, x_2, x_3, x_4 kennten, kurz und anschaulich: diese Potentiale sollen vollkommen das *Hier-Jetzt-So* liefern.[17]

[12]The preceding sentence is interlineated.

[13]Deleted: "Art".

[14]"welche math. Form sie haben müssen" was corrected from "welche Anforderungen an sie zu stellen sind."

[15]The figure was added to the back of p. 5, thus facing p. 6.

[16]"$(p,\ p',\ ..)$" was corrected from "$(p,\ q,\ ..)$". In many of the following formulas below Hilbert changed the notation for the potentials from captial "P" to small "p". These changes have been silently executed in the following.

[17]Cf. the similar discussion in *Natur und mathematisches Erkennen*, p. 5 (this Volume, p. 383).

Nunmehr bringen wir zunächst das Prinzip der *Nahe-Physik* zur Geltung, demzufolge überhaupt Ferngesetze ausgeschlossen sind und nur eine Kontinuumstheorie zugelassen wird. Dies bedeutet math. die | Forderung, dass die 7
Weltgesetze Differentialgleichungen sein sollen.[18] Wir wollen überdies, obwohl diese Forderung auch durch eine geringere ersetzt werden könnte, annehmen, dass die die Weltgesetze darstellenden Differentialgleichungen[19]

$$\begin{aligned} &R\,(p, p', \tfrac{\partial p}{\partial x_1}, \ldots \tfrac{\partial^2 p}{\partial x_1 \partial x_2} \,..) = 0 \\ &R'(\qquad\qquad\qquad\qquad\quad) = 0 \end{aligned}$$

rationale Gleichungen zwischen den Potentialen p, p' .. und deren Ableitungen nach x_1, x_2, x_3, x_4 sein mögen. Die rationalen Funktionen R, R', ... werden uns dann eben durch die Erscheinungen, die Beobachtungen und Experimente in den Wiss. der Astronomie, Physik und Chemie geliefert — wenn auch nur mittelbar und unvollkommen.

Die Weltgleich⟨ungen⟩ geben sofort Anlass zu einigen Fragen von allgem⟨einem⟩ Charakter.

Zunächst ist es schon für den reinen Mathematiker naheliegend festzu- 8
stellen, ob die Differentialgl. Transformationen der Variabeln x_1 x_2 x_3 x_4 *in sich* zu lassen. d. h. ob, wenn wir statt der x_1 x_2 x_3 x_4 gewisse andere Funktionen x'_1 x'_2 x'_3 x'_4 jener als neue Koordinaten nehmen und zugleich die Potentiale p, p' ev⟨entuell⟩ ihrem Charakter als Vektoren oder Tensoren entsprechend transformiren, die entstehenden Gleichungen dann nur Combinationen der ursprünglichen sind. Gäbe es keinerlei solche Transformationen in sich d. h. träte bei jeder Aenderung des Koordinatensystems auch stets eine eigentliche[20] Aenderung der Grundgleichungen ein, so würden wir in strengem Sinne dem Raum und der Zeit in der Natur die *Eigenschaft absolut* zu sein zusprechen müssen. Raum | und Zeit besässen als dann in der Tat kei- 9
nerlei durch unsere Wissenschaft vermöge der Weltgl⟨eichungen⟩ feststellbare *Symmetrie*. In diesem Falle würde man zur möglichsten Abkürzung[21] der Rechnungen ein besonders geeignetes Bezugssystem x_1 x_2 x_3 x_4 wählen etwa solche Koordinaten, für die gewisse Glieder in den Gleichungen verschwinden und dieses Bezugssystem wäre dann auch durch die Weltgleich⟨ungen⟩ selbst einzig ausgezeichnet und festgelegt. In diesem Bezugssystem und in diesem allein hätten die Weltgleichungen jene „*normirte*“ Form. Es liefe, dies da|rauf 10
hinaus, dass wir, um das vorhin dargelegte Prinzip der Objektivität zu wahren,

[18] Deleted: “hierdurch ist dann zugleich die frühere Forderung erfüllt, der zufolge dieselben Weltgesetze an jedem Ort und zu jeder Zeit gültig sein sollen.”

[19] The following equations were added on the back of p. 6, thus facing p. 7.

[20] “eigentliche” was corrected from “wirkliche”.

[21] The preceding half sentence was corrected from: “In diesem Falle wäre, um das vorhin dargelegte Prinzip der Objektivität zu wahren, die erste der 3 genannten Arten nämlich die Aufweisung eines konkreten Objektes zur Festlegung des Koordinatensystems die angemessene. Man würde dann zur möglichsten Abkürzung”.

die erste der 3 genannten Arten,[22] zur Festlegung des Koordinatensystems benutzten. Wir sehen jedenfalls dass die Existenz eines absoluten Raumes und einer absoluten Zeit nicht blos sehr wohl *logisch denkbar* wäre, sondern auch *experimentell* durch die Weltgesetze feststellbar sein könnte.

Wenn wir auch in dem genannten Falle der Absolutheit von Raum und Zeit sicher sind, so bedürfen unsere bisherigen Begriffssetzungen dennoch einer schärferen Formulirung. Wir erkennen dies, wenn wir uns überlegen, ob auch *umgekehrt* im Falle der Absolutheit von Raum und Zeit unsere Gleichungen
11 stets ohne weiteres | die Eigenschaft, keine Transf⟨ormationen⟩ in sich zuzulassen, notwendig haben müssten. Nehmen wir nun an, die Relationen R liessen keinerlei Transformationen in sich zu, so führe man darin die x_1 x_2 x_3 x_4 selbst als neue skalare Potentiale ein vermöge

$$x_i = x_i(x'_1 x'_2 x'_3 x'_4) \quad i = 1, 2, 3, 4$$

wo x'_1 x'_2 x'_3 x'_4 neue Variable bedeuten. Zugleich führe man diese in den ursprünglichen Potentialen p ein und setze demgemäss

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = \frac{\partial p}{\partial x'_1}\frac{\partial x'_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial p}{\partial x'_4}\frac{\partial x'_4}{\partial x_1}, \quad \text{etc,}$$

worin man aber $\frac{\partial x'_k}{\partial x_i}$ durch die $\frac{\partial x_k}{\partial x'_i}$ ausdrücke. Die so entstehenden Relationen für p und x_i[23]

$$R^*(p, x) = 0 \tag{3}$$

sind nun sogar allgemein invariant. Die neuen Relationen sind aber offenbar mit den früheren aequivalent und wir sehen somit, dass die Forderung so-
12 gar der allgemeinen Invarianz bei der bisherigen | Formulirung überhaupt gar keine Bedingung für die Naturgesetze ist. Aus diesem Grunde führe ich eine *neue Bedingung* für die Weltpotentiale p ein: unter ihnen sollen keine skalaren Potentiale vorkommen. Aber auch diese Bedingung allein genügt noch nicht. Denn, wie die Theorie der partiellen Differentialgleichungen lehrt, lassen sich aus den Gl. $R^*(p, x) = 0$ durch Differentiation und Elimination der x solche Gleichungen

$$R^{**}(p) = 0$$

herstellen, die die x nicht enthalten und die doch in ihrer Gesammtheit den Gleichungen $R^* = 0$ äquivalent sind, insofern als es zu den p mit der Eigenschaft $R^{**} = 0$ stets x giebt mit der Eigenschaft $R^* = 0$. Die so gefundenen $R^{**} = 0$ sind mithin auch aequivalent mit den ursprünglichen Gl.
13 $R = 0$; sie enthalten nicht die x und haben | dennoch die Eigenschaft allgemeiner Invarianz. Um dies Vorkommniss auszuschliessen und zu verhindern, dass die Weltgleichungen durch blosse Differentiation aus solchen von einfacherem Typus ableitbar sind, verlangen wir noch, dass sie den Charakter

[22] Deleted: "nämlich die Aufweisung eines konkreten Objektes".

[23] The following equation is interlineated.

von *Grundgl*⟨eichungen⟩ und die Potentiale p den Charakter von *Grundpotentialen* haben mögen in folgendem Sinne: Sollte es eintreten, dass aus den vorliegenden Differentialgl. für die p durch ein geeignetes Integrationsverfahren neue Differentialgl. zwischen p und gewissen anderen Funktionen w von x sich deduziren liessen, die ebenfalls rational und zwar in p, w und deren Ableitungen nach x ausfielen, so nehme man das so mathematisch gefundene erweiterte Funktionensystem p, w u. lasse davon diejenigen Funktionen weg, die vermöge der Differentialgl. blosse rationale Verbindungen der übrigen und deren Ableitungen sind: die übrig bleibenden | Funktionen γ bilden ein System, 14
das wir das System der Grundpotentiale nennen wollen und die betreffenden Differentialgl⟨eichungen⟩[24]

$$\begin{aligned} \Gamma\ (\gamma, \tfrac{\partial\gamma}{\partial x_1}, \ldots) &= 0 \\ \Gamma'(\qquad\qquad) &= 0 \end{aligned}$$

mögen die Grundgl⟨eichungen⟩ Γ der Physik heissen.

Wenn diese Grundgl⟨eichungen⟩ nunmehr die Eigenschaft haben würden, keinerlei Transformationen in sich zuzulassen, dann und nur dann hätten wir *das Recht*, Raum und Zeit als absolut zu erklären: Raum und Zeit käme alsdann *keinerlei Symmetrie* zu u. sonst nicht.[25]

In Wirklichkeit ist aber im Gegenteil die Sachlage diese: nach allen Erfahrungen und allen bisher aufgestellten Theorien kommen dem Raume und der Zeit gewisse Symmetrie⟨n⟩ zu und dies findet darin den mathematischen Ausdruck, dass die Grundgleichungen der Physik eine gewisse Gruppe von Transformationen in sich gestatten. Wir stellen dann folgende weitere Ueberlegungen an.

Wie math⟨ematisch⟩ gezeigt werden kann gelingt es dann stets,[26] solche Koordinaten einzuführen, dass die Transformationen dieser Gruppe durch formale Einfachheit besonders | ausgezeichnet sind z. B. dadurch, dass die 15
Transformationen lineare sind, u. es sind diese Koordinaten dann[27] vermöge des invarianten Charakters der Grundgl⟨eichungen⟩ ausgezeichnet; wir sagen dann: es giebt in der Natur eine durch die Grundgl⟨eichungen⟩ ausgezeichnete Gruppe von Koordinatensystemen. Solche ausgezeichneten Koordinatensysteme sind in der *Gallileischen Mechanik* das Cartesische Koord⟨inatensystem⟩ und die ausgezeichneten Transform⟨ationen⟩ sind linear und bilden die bekannte *Gallileische* Gruppe, in der das *Gallileische Symmetriegesetz* für Raum und Zeit zum Ausdruck kommt. Eine weit tiefer liegende Symmetrie von Raum u. Zeit wird durch die Gruppe der *Lorentz-Transform*⟨ationen⟩ dargestellt. Hier wie in der Gallileischen Mechanik kommt das anfangs genannte Prinzip der Objektivität in der *2ten* der 3 aufgezählten Arten, nämlich in der

[24] The following equations were added on the back of p. 13, i.e. on the facing page to p. 14.

[25] The words "u. sonst nicht" were added later.

[26] The preceding half sentence was corrected from: "Gelingt es".

[27] "u. es sind diese Koordinaten dann" was corrected from "so sind diese Koordinaten".

Existentialform zur Anwendung; wir sagen: es giebt in der Gallileischen Me-
16 chanik bez. in der klassischen Elektrodynamik ausgezeichne|te Koordinatensysteme; die Grundgl⟨eichungen⟩ gestatten jedesmal eine gewisse Gruppe von Transformationen in sich. Die Verknüpfung von Raum u. Zeit, bereits durch Gallilei hergestellt, wird durch das spezielle *Lorentz-Minkowskische Symmetriegesetz* zu einer festen Union. Aber ihren Höhe- und Endpunkt erreicht diese Gedankenentwickelung erst durch die Einsteinsche Entdeckung des *vollkommensten* Symmetriegesetzes, das für Raum u. Zeit möglich ist. Die Einsteinschen Gravitationsgl⟨eichungen⟩ sind in dem hier definirten Sinne die Grundgl⟨eichungen⟩ der Physik, wenn man darin das Gravitationspotential $g_{\mu\nu}$ und ausserdem den Energietensor als Grundpotentiale nimmt. Ich habe zurselben Zeit Grundgl⟨eichungen⟩ der Physik aufgestellt, in denen neben dem Gravitationspotential $g_{\mu\nu}$ nur noch das elektromagnetische Viererpotential φ_k[28] als Grundpotential auftritt.[29] Das wesentlichste Resultat, zu dem ich damals gelangt war, ist folgendes:[30]

17 Das von mir aufgestellte Hamiltonsche Prinzip lautet[31]

$$\delta \int\int\int\int I\sqrt{g}dx_1dx_2dx_3dx_4 = 0$$

⟨und⟩ führt bei Variation der $g_{\mu\nu}$ bez. φ_i zu folgenden 10 bez. 4 Gl.[32]

$$\begin{array}{rcl} G_h\left(g_{\mu\nu}, \dfrac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_i}, \dfrac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x_i \partial x_k}, \varphi_l, \dfrac{\partial \varphi_l}{\partial x_i}\right) & = & 0 \\ h = 1, 2 \ldots 10 & & \\ M_k\left(g_{\mu\nu}, \dfrac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_i}, \varphi_l \quad \dfrac{\partial \varphi_l}{\partial x_i} \quad \dfrac{\partial^2 \varphi_l}{\partial x_i \partial x_k}\right) & = & 0 \\ k = 1, 2, 3, 4. & & \end{array}$$

den sogenannten Differentialgl. der *Gravitation* bez. der *Elektrodynamik*.

[28]“φ_k” was corrected from “q”.

[29]See *Hilbert 1915* (this Volume, p. 28) and the discussion in the Introduction to this Volume, sec. 3.

[30]“Indem ich die Ideenbildungen und Gedankengänge von Einstein und Mie zusammenfliessen liess, habe ich vor 8 Jahren, also in der Zeit der Entstehung d. Relativitätsth. selbst folgende Weltgl. aufgestellt mit g, φ als Grundpotentialen, die in schematischer Schreibart so lauten:

$$K_{\mu\nu} = -\frac{\partial\sqrt{g}(K + \Phi + \varphi)}{\partial g^{\mu\nu}}$$
$$\varphi = \mathrm{Div}\,(\mathrm{Rot}\,\varphi)^m$$

wo K von g u. 2^{ten} Ab., Φ von g und 1^{ten} Abl. von φ abh.” (taken from summary to Zurich version)

[31]In the preceding sentence, the words “Hamiltonsche Prinzip” were corrected from “Prinzip” and the word “lautet” as well as the following formula are interlineated.

[32]In the second equation “M_k” was corrected from “Φ_k”.

Die nächstliegende u. einfachste Wahl für I ist diese:[33]

$$\delta \int\int\int\int \{K + \overbrace{\alpha\Phi + \beta\varphi}^{L}\}\sqrt{g}dx_1dx_2dx_3dx_4 = 0$$

$$\begin{array}{lll} \Phi & = & \sum\limits_{m,n} \Phi_{mn}\Phi^{mn}, \quad \Phi_{mn} = \text{Rot } \varphi_m \\ \varphi & = & \sum\limits_{k} \varphi_k\varphi^k \\ (1) \quad K_{\mu\nu}{}^{\langle 34\rangle} & = & -\dfrac{\partial\sqrt{g}L}{\partial g^{\mu\nu}} \\ (2) \quad \varphi^m & = & \text{Div } \Phi^{mn} \end{array}$$

Da das Hamiltonsche Integral allg. invariant angenommen wurde, so folgt, dass auch diese Gl. den nämlichen invarianten Charakter haben. Ausserdem folgt aus einem allgemeinen von mir aufgestellten math. Theorem, dass die 4 elektrodynam. Gl. notwendig als eine Folge der 10 Gravitationsgleichungen angesehen werden können d. h. wir können wegen jenes math. Satzes bei unseren Annahmen sofort die Behauptung aussprechen, dass in dem bezeichneten Sinne die elektrodynamischen Erscheinungen, die in den Maxwellschen Gl. ihren Ausdruck finden, *Wirkungen der Gravitation sind*. In dieser Erkenntniss | erblickte ich eine einfache und sehr überraschende Lösung einer schon von 18
Riemann behandelten Frage nach dem Zusammenhange zwischen Gravitation und Licht.[35] Seitdem sind nun zahlreiche Forscher bemüht gewesen, den Zusammenhang zwischen Gravitation und Elektrodynamik dadurch zu *vertiefen*, dass sie die Potentiale $g_{\mu\nu}$ und φ_i zu einer Einheit verschmolzen. Durch einen mathem. Gedanken von *Levi-Civita* angeregt, hat vor Allem *Weyl* in höchst geistvoller Weise eine solche Einheit zwischen $g_{\mu\nu}$ und φ_i construirt.[36] Sein Hauptgedanke lässt sich kurz und leicht fasslich so ausdrücken: Weyl verlangt für den Integranden des Hamiltonschen Integrals ausser der allgem. Invarianz auch noch unveränderte Reproduktion, sobald

$$g \quad \text{durch} \quad \lambda g$$

[33] The preceding sentence and the following equations were written on the back of p. 16, i.e. on the facing page to p. 17 and marked for insertion by a correction mark. After equation (2) the following comment was written and deleted:
"($\Psi_k = \frac{df}{d\varphi_k}$, also $\Psi_k = \varphi_k$ im Falle $f(\varphi) = \varphi$)".

[34] On the left hand side of the equation, a term $-\frac{1}{2}Kg_{\mu\nu}$ had been added but was later erased.

[35] Cf. the remark in *Hilbert 1915*, p. 398, (this Volume, p. 32). The reference to Riemann was dropped in the 1924 reprint of that paper, see note 22 on p. 32 above.

[36] See *Levi-Civita 1917*, *Weyl 1918*, *Weyl 1919a*, and *Weyl 1919b*, § 34. For a historical discussion of Weyl's work, see *Scholz 2001*.

und

$$\varphi \quad \text{durch} \quad \varphi - \text{grad}\,\log\lambda\,(= (\varphi_i - \frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial x_i}))$$

ersetzt wird; dabei bedeutet λ eine willkürliche Funktion der x_i ⟨und⟩ da-
19 bei erscheinen nach Weyl | Gravitations- und elektromagnetisches Feld zu einer einheitlichen *Weltmetrik* verschmolzen. Während andererseits Eddington so vorgeht, dass er gewisse besondere invariante Kombinationen der die Felder bestimmenden Grössen als Grundpotentiale auswählt, hat *Schouten* systematisch alle Möglichkeiten einer solchen Auswahl untersucht und diese als sehr mannigfaltig erkannt.[37] *Einstein* endlich knüpft in seinen letzten Publikationen[38] an *Eddington* an[39] und gelangt ebenso wie Weyl zu einem mathematisch sehr einheitlich aufgebauten System. Indess mündet das Schlussresultat der letzten Einsteinschen Untersuchung wieder auf ein Hamiltonsches Prinzip, das dem ursprünglich von mir aufgestellten gleicht; ja es könnte sein, dass[40] diese Einsteinsche Theorie inhaltlich sich mit der von mir ur-
20 sprünglich aufgestellten Theorie *völlig deckt*.[41] Auf jeden | Fall scheint es mir, dass die seit 1916 erschienenen Erörterungen[42] des in Rede stehenden Problems zwar in mathematischer Hinsicht durch Ideenreichtum und Formeleleganz sich auszeichnen aber bisher keinen wesentlichen physikalischen Fortschritt aufgewiesen haben. Weder die Existenz der Elektronen noch das verschiedene Verhalten von positiver und negativer Elektrizität aufzuklären ist in befriedigender Weise gelungen.[43]

---

[37] In the preceding sentence, the words “gewisse” and “invariante” are interlineated. The reference is to *Schouten 1918*.

[38] “Publikationen” was corrected from “Untersuchungen”. The reference is to *Einstein 1923a*, *Einstein 1923b*, *Einstein 1923c*, which were presented to the Prussian Academy on 15 February, 12 April, and 31 May 1923, respectively.

[39] See *Eddington 1921* and *Eddington 1923*.

[40] “es könnte sein, dass” was corrected from “es scheint, als ob”.

[41] For a detailed discussion of this claim, see *Sauer and Majer 2005*.

[42] “Erörterungen” was corrected from “Untersuchungen”.

[43] “Trotzdem uns diese Gl. nicht einmal das Elektron geschweige denn die Quantentheorie liefern, möchte ich doch glauben, dass sie der bleibende Grundstock der Weltgl. sind. Bessere Gl. sind bisher nicht gefunden worden, nicht durch Levi-Civita, nicht durch die glänzenden und so vielversprechenden neuen Ansätze von Weyl, ⟨At this point Hilbert, introduced the following changes: He deleted the word “neuen”, interlineated “Gedankenbildungen” above “Ansätze” and first interlineated, then deleted the following half-sentence: “deren Grundidee vielleicht doch erst in Zukunft zur Geltung kommt.”⟩ nicht durch Schouten, nicht durch Eddington, nicht durch das wiederholte Eingreifen von Einstein. Im Gegenteil die Quintessenz und das letzte St⟨a⟩dium von Einstein läuft für den Kenner und Einstein wahrscheinlich ⟨unbewusst?⟩ darauf hinaus, dass Einstein auf grossen Umwegen genau dasselbe Gl⟨eichungssystem⟩ aufstellt, nur die Rollen der beiden Potentiale φ, Φ oder der beiden Teilstücke der Maxwell. Gl. miteinandervertauscht. Ich meinte vorhin, jene Weltgl. seien der bleibende Grundstock d. wahren Weltgl. Ich will jetzt aber noch viel mehr annehmen, nämlich dass sie so ergänzt und modifiziert werden können, dass sie uns die Existenz der Elektronen, des pos. wie neg. Elekt. also auch des verschiedenen Verhaltens der beiden Elektrizitäten und auch die Quantenregeln und das Quantenrätsel lösten. Ich

Diesem Mangel[44] wird sicher die Zukunft abhelfen. Als Entgelt dafür können wir gegenwärtig als sicher ansehen, dass die oben von mir aufgestellten Gl. gewiss den *Grundstock für die Weltgl.* ausmachen. In einer letzten vor wenigen Tagen erschienenen Note gelangt Einstein zu dem Hamiltonschen Prinzip:[45]

$$\partial \int\int\int\int \{K + \alpha\Phi + \beta\varphi\}\sqrt{g}dx_1dx_2dx_3dx_4 = 0$$

wo φ durch $\varphi^m = \text{Div}\ \Phi^{mn}$ definiert ist und durch Variation nach $g_{\mu\nu}$ und Φ^{mn} an Stelle meiner Gl. (2) die Gl. $\Phi_{mn} = \text{Rot}\ \varphi_m$ entstehen. Also Nichts als eine *Vertauschung der beiden Serien* ⟨der⟩ Max⟨wellschen⟩ Gl⟨eichungen⟩. Und wenn auf dem kollossalen Umweg über Levi Civita,[46] Weyl, Schouten, Eddington Einst. zu dem Resultat zurückgelangt, so liegt darin sicher eine *schöne Gewähr*.

Auf jeden Fall ist auch[47] die Situation eine sehr erfreuliche vom Standpunkte unserer allgem. u. prinzipiellen Erörterungen aus: Zunächst nämlich erweisen sich die Grössen $g_{\mu\nu}$, φ_i als Grundpotentiale und die für sie bestehenden Differentialgleichungen als *Grundgleich.* in dem von mir definirten Sinne. Zeigen wir dies an den von mir aufgestellten Weltgleichungen.

1.) enthalten dieselben in der Tat kein skalares Potential, sondern nur den 21
einfachen Vektor φ (elektromagn. Viererpotential) und den symmetrischen Tensor $g_{\mu\nu}$ (die Weltmetrik), die ja auch notwendigerweise die einfachsten invarianten für Geometrie u. Physik in Betracht kommenden Grössen sind. Sodann erkennen wir auch sofort, dass diese Differentialgl. in dem von mir geforderten Sinne[48] keinerlei rationale Integrale besitzen — brauchen wir doch nur zu bedenken, dass die Gravitationsgl. im Falle verschwindender φ in erster Annäherung in die Gestalt

$$\Box g_{\mu\nu} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x_4^2} = 0$$

und die elektrodynamischen Gl. im Falle die $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}(0,1)$ gesetzt werden, gleich den gewöhnl. Maxwellschen Gl. werden, diese Gleichungen aber bekanntlich keinerlei rationale Integrale im fraglichen Sinne zulassen.

Nunmehr konstatiren wir den Charakter der Invarianz der Grundglei- 22
chungen gegenüber jeder beliebigen Transformation des Koordinatensystems

weiss wohl, dass ich da auf Unglauben u. Widerspruch d. Phys. stosse. Dann gestatten Sie mir es zu tun, um die Ideen zu fixiren." (taken from summary to Zurich version)

[44] The following paragraph, until "schöne Gewähr," was written on the back of p. 19, i.e. on the facing page to p. 20 and marked for insertion at this point by a correction mark.

[45] See *Einstein 1923c* (published on 28 June 1923) and, for historical discussion, *Sauer and Majer 2005*.

[46] The name "Levi-Civita" is interlineated.

[47] "ist auch" was corrected from "aber ist".

[48] Cf. [p. 7] above.

und damit die Tatsache, dass es kein *durch die Naturgesetze ausgezeichnetes Koordinatensystem* giebt. Dies ist das Einsteinsche Relativitätsprinzip; seine Gültigkeit ist aber genau nur konstatirbar, auf Grund der genannten, math. erwiesenen Tatsache, dass die Weltgleichungen[49] den Charakter von Grundgleichungen in dem von mir definirten Sinne besitzen. Erst durch die Einführung der Begriffe *Grundpotentiale* und *Grundgleichungen* erhalten, glaube ich, wie ich schon vorhin bei der Erörterung der Absolutheit von Raum und Zeit zeigte, die allgemeinen Aussagen über Raum und Zeit, über Koordinatensysteme, über Invarianz und Relativität erst einen *bestimmten Sinn* und ihren
23 eindeutigen math. Ausdruck. An sich nämlich würde die blosse Forderung der Invarianz keineswegs schon allein den Gedanken der Relativität zum Ausdruck bringen, da ja entsprechend dem früher Ausgeführten stets auch aus irgend welchen nicht invarianten Differentialgl. durch die math. Prozesse der Differentiation und Elimination Gleichungen abgeleitet werden können, die formal die Invarianteneigenschaft besitzen und doch inhaltlich im Wesentlichen den ursprünglichen aequivalent sind.

In der Einsteinschen Relativitätstheorie, zu der wir nunmehr gekommen sind, wird unserem Prinzip der Objektivität auf die 3$^{\text{te}}$ der von mir aufgezählten Arten Rechnung getragen, indem darin den Grundgleichungen volle Invarianz zu Teil wird. Diese dritte Art der Objektivirung der Natur ist die unmittelbarste und erscheint unserem Geiste von vorneherein für die Grundgl. der Physik am angemessensten; hierin liegt die *grosse überzeugende Kraft des Relativitätsgedankens*.

24 Das Relativitätsprinzip bedeutet, wie mir scheint, zum ersten Male eine definitive, genaue und allgemeine Aussage über die in der Wirklichkeit geltenden Gesetze und steht somit meiner Meinung nach unter den reinen Gedankentaten des menschlichen Geistes *oben an*.[50]

Die allgemeine Invarianz der Weltgleichungen bringt einige Besonderheiten mit sich, denen gegenüber man eine richtige Einstellung gewinnen muss; ich meine erstens die Frage des *Causalitäts*gesetzes und sodann die Rolle, die die *Zeitcoordinate gegenüber den Raumkoordinaten* spielt, insofern man nur sogenannte eigentliche Raum-Zeittransformationen zulässt. Ich möchte auf diese Fragen, deren völlige befriedigende Lösung keinerlei Schwierigkeit bereitet, nicht näher eingehen,[51] sondern nur noch einen Punkt zur Sprache bringen, der uns besonders für meinen zweiten Vortrag von Interesse ist und der eine wichtige Folgerung aus der allgemeinen Invarianz betrifft.

25 Wenn auch immer in der allgemeinen Relativitätstheorie von beliebigen

[49] "Weltgleichungen" was corrected from "Gravitationsgleichungen".

[50] "und steht … *oben an*" was corrected from "und stellt somit meiner Meinung nach die gewaltigste reine Gedankentat des menschlichen Geistes dar."

[51] A reference to the reality conditions discussed in *Hilbert 1917*, pp. 57ff, (this Volume, p. 51), *Das Kausalitätsprinzip* (SUB Cod. Ms. D. Hilbert 642, this Volume, p. 335ff.), and *Hilbert 1916/17**, §§ 47–48, (this Volume, p. 236).

Transformationen der Raum-Zeit-Koordinaten die Rede[52] ist, so verlangt dar-
über hinaus die sinngemässe Interpretation noch, dass nur solche Transforma-
tionen gemeint sind, die einer Schar angehören, in der die identische
Transform. vorkommt d. h. die durch stetige Variation aus derjenigen Trans-
form. erhalten werden kann, die überhaupt Nichts ändert. Es ist dann aber,
wie man durch eine math. Ueberlegung leicht zeigen kann ($t' = ct \langle , \rangle c >$
$0 \rightarrow t' = -t$) eine notwendige Folge der Invarianz der Grundgleichungen, dass
dieselben auch bei solchen Tranforma|tionen invariant bleiben, die die genann- 26
te Bedingung nicht erfüllen. Unter diesen Transformationen bildet diejenige
ein besonderes Interesse, die lediglich in der Aenderung des Vorzeichens der
Zeitcoordinate besteht. Die Invarianz der Grundgleichungen gegenüber dieser
Transform. bedeutet, dass ein jeder Vorgang in der Natur auch in umgekehrter
Zeitrichtung ablaufen kann d. h. dass volle Reversibilität statthat. Ja es giebt
hiernach überhaupt keinen Unterschied zwischen *vorwärts und rückwärts in
der Zeit*, also zwischen *Zukunft und Vergangenheit*. Und diese Behauptung
ist dann in demselben Sinne gemeint und sicher richtig wie die frühere Be-
hauptung, dass Raum und Zeit nicht absolut sind, nämlich es kann wohl eine
Zeitrichtung ausgezeichnet werden durch den Hinweis auf spezielle konkrete
Vorkommnisse z. B. auf die Erdrotation, | aber durch die Naturgesetze allein 27
ist keine Zeitrichtung vor der anderen ausgezeichnet oder bevorzugt. Dieses
Gesetz von der Umkehrbarkeit der physik. Vorgänge, welches hier als eine
notwendige Folge der allgem. Relativität erscheint und welches also auch gilt,
wenn die Weltgl. modifizirt werden — was wir uns vorbehalten —[53] hat sich
insbesondere in der Mechanik und in der klassischen Elektrodynamik voll-
kommen bewährt. Wir können aber nicht leugnen, dass uns dieses Gesetz mit
unseren alltäglichen Wahrnehmungen und mit der gewöhnlichen Einstellung
unseres Denkens in Konflikt bringt.

Dieser Konflikt soll nun den ersten Anstoss geben, uns mit den Auswirkungen der Weltgl. zu beschäftigen: morgen.

M⟨eine⟩ D⟨amen⟩ u⟨nd⟩ H⟨erren⟩. Ich habe gestern von den Weltgl. ge- 1
sprochen u. einige Prinzipienfragen aufzuklären versucht.[54] Insbesondere ha-
ben wir uns gestern[55] mit der Aufstellung der Weltgleichungen[56] beschäftigt
und uns ihre *innere Struktur* und ihre Eigenschaften klar zu machen versucht.

[52] Deleted: "und wenn auch sogar die eben berührte Einschränkung auf sogenannte „*eigentliche*" Transformationen eingeführt worden".

[53] The words "und welches also auch gilt ... vorbehalten —" were added on the back of p. 26, i.e. on the facing page to p. 27 and marked for insertion at this point by a correction mark.

[54] The second of the three lectures on the 'Principal questions of modern physics' was held in Hamburg on July 27, 1923, see the Introduction, p. 378. In the original manuscript a single page with the entry "Hamburg" precedes this page. Deleted: "Jetzt wollte ich von der Anwendung und Auswirkung dieser Weltgl. reden."

[55] The introductory passage up to this point was corrected from a subheading "Methoden und Ergebnisse in der Physik." and the words: "In dem gestrigen Vortrage haben wir uns".

[56] "Weltgleichungen" was corrected from "Weltgesetze".

Heute[57] wollen wir uns mit der Frage beschäftigen, wie wir[58] diese Weltgleichungen auswirken und welcher Art die entspringenden Ergebnisse in der Physik sind.[59] Und um auch gleich das spezielle eigentliche *Ziel* dieses 2$^{\text{ten}}$ Vortrages zu bezeichnen möchte ich folgende Redeweise gebrauchen:[60] ich möchte Alles, was noch zu den Weltgleichungen hinzugefügt werden muss,
2 um die Geschehnisse | in der leblosen Natur zu verstehen, kurz *accessorisch* nennen.[61] Unsere Weltgleichungen lauteten doch:[62]

$$\begin{aligned} G_h\left(g_{\mu\nu}, \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x_i \partial x_k}, \varphi_l, \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_i}\right) &= 0, \qquad h = 1, 2 \,.\,. 10, \\ M_k\left(g_{\mu\nu}, \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_i}, \varphi_l \quad \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_i} \quad \frac{\partial^2 \varphi_l}{\partial x_i \partial x_k}\right) &= 0, \qquad k = 1, 2, 3, 4; \end{aligned}$$

sie sind nun gewiss insofern *keiner Ergänzung* fähig, als sie den Charakter der Bestimmtheit haben und demnach die Hinzunahme einer neuen weiteren Differentialgleichung, die für die nämlichen Potentiale und wesentlich unabhängig von der vorliegenden gilt, überhaupt nicht in Frage kommt. Andererseits lehrt in der Tat die Math⟨ematik⟩, dass die Potentiale als Funktionen von Ort und Zeit durch die Differentialgl⟨eichungen⟩ allein noch nicht bestimmt sind: gewöhnlich dienen *Anfangs- oder Randbedingungen* zur Festlegung spezieller Lösungen. Ich möchte dazu nur bemerken, dass ich nur, um die Ideen zu fixiren und weil es das Einfachste ist, die Welt im ∞ Eukl⟨idisch⟩-Newtonsch denke. An und für sind die Weltgl⟨eichungen⟩ — eben als Differentialgl⟨eichungen⟩, die die Ableitungen nach der Zeit enthalten ⟨—⟩ nur im Stande,[63] aus bekann-
3 ter Gegenwart die Zukunft voraus | zu sagen. So wichtig dies auch ist: bliebe die Anwendung der Weltgleichungen darauf beschränkt, so würden wir aus ihnen für den gegenwärtigen Zustand der Natur nichts erfahren, was wir aber gerade wollen. So kommen wir auf die wichtige Frage, die zu beantworten[64] eben *unser Hauptziel* sein soll: giebt es noch accessorische Naturgesetze?

Wir wollen zu ihrer Beantwortung einzeln die grossen Disziplinen der Physik durchnehmen. Wenden wir uns zunächst der *Thermodynamik* zu. Die

[57] "Heute" was corrected from "Im gegenwärtigen zweiten Vortrage".

[58] "wir" should be "sich".

[59] The preceding half sentence was corrected from: "wie wir diese Weltgesetze anwenden und welcher Art die gewonnenen Ergebnisse sind d. h. mit der Frage nach den die Weltgesetze betreffenden Methoden und Erfolge".

[60] "Redeweise gebrauchen" was corrected from "Benennung einführen".

[61] The word "kurz" was interlineated.

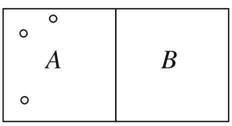
[62] The words "lauteten doch", the following formulas together with the word "sie" were added to the back of p. 1, i.e. the facing page to p. 2 and marked for insertion at this point by a correction sign.

[63] The preceding two sentences, starting with "Ich möchte dazu nur bemerken" are a correction of "Hiernach so scheint die Bedeutung der Weltgleichungen wesentlich darin zu bestehen,".

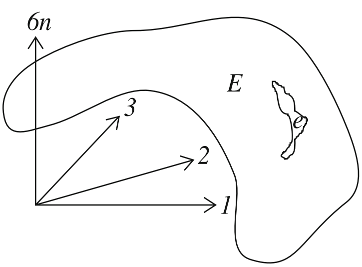
[64] The words "erfahren, was ... beantworten" was corrected from "Durch diese Betrachtungen wird eine Reihe von Gedanken angeregt, die notwendig auf die Frage ausmündet, die".

Weltgleichungen zeigen, wie wir sahen, dass jeder Vorgang in der Natur auch in umgekehrter Zeitrichtung ablaufen kann d. h. dass volle *Reversibilität* statthat. Aus der Wärmelehre wissen wir aber im Gegenteil, dass die irreversibeln Vorgänge in der Natur eine sehr grosse Rolle spielen. Hier könnte man also vielleicht erwarten, auf ein accessorische Weltgesetz zu stossen, was dann den Weltgl. übergeordnet wäre![65] Wir müssen uns daher die Frage vorlegen, ob und | inwiefern mit der Lehre von der Vermehrung der Entropie notwendig die 4
Annahme einer bevorzugten Zeitrichtung verbunden werden muss.

Bekanntlich wird der Satz von der Vermehrung der Entropie aus den Prinzipien der physikalischen Statistik abgeleitet. Vergegenwärtigen wir uns, wie nach dieser Auffassung ein irreversibler Vorgang zu Stande kommt.



Es sei ein Kasten durch eine Wand in 2 gleiche Fächer A und B geteilt. Das Fach B sei anfangs leer, das Fach A mit einem Gase von n Molekülen erfüllt, die sich beim Zusammenstoss genau wie elastische Kugeln verhalten sollen. Der genaue Zustand des Gases wird in bekannter Weise zu jeder Zeit durch einen bestimmten Punkt des $6n$-dimensionalen Phasenraumes dargestellt, der auf der $6n-1$ dimensionalen endlichen Energiefläche E gelegen ist



$$e : E = 1 : (1000)^{10}$$ 5

$$t_2 - t_1 = 5 \text{ Min}$$

Wird die Scheidewand zwischen A und B zu einer Zeit t_1 fortgenommen, so wird zu einer genügend späteren Zeit t_2 das Gas den ganzen Kasten gleichmässig erfüllen. Die Erklärung dieses irreversibeln Vorganges nach der statistischen Methode stützt sich nun wesentlich auf *2 Annahmen*, die beide unter sich von ganz verschiedenem Charakter sind. Die erste Annahme nämlich betrifft einen rein mathematischen Satz, der etwa folgendermassen lautet: Wählen wir die Maasse des Kastens, die Zahl n der Moleküle, den Wert der genannten kinetischen Energie von gewisser normaler Grösse (20 cm lang 10 cm breit $n = 5 \cdot 10^{22}$) | so wird, wenn die Zwischenzeit von t_1 bis t_2 auf 6
5 Min. bemessen ist, zur Zeit t_2 die Anzahl der in A befindlichen Moleküle sich von der Anzahl in B stets um weniger als 1 pro Mille unterscheiden — es sei denn, dass der Anfangszustand des Gases in A gerade durch Punkte eines bestimmten Teilgebietes ε der Energiefläche im Phasenraum dargestellt

[65] The preceding sentence was written at the bottom of the page and marked for insertion at this point by an arrowed line.

wird, das im Vergleich zur ganzen Energiefläche E von angebbarer ausserordentlicher Kleinheit, sagen wir 1 pro $(\text{Mille})^{10}$ ausfällt. Der Beweis dieses math. speziellen, numerischen Satzes ist äussert schwierig u. langwierig[66] und dürfte in absehbarer Zukunft kaum gelingen.[67] Wir haben aber allen Grund, seine Richtigkeit zu *vermuten* — unter Anderem auch desshalb, weil der entsprechende Satz für den einfachen Fall des eindimensionalen Gases tatsächlich bewiesen worden ist und sich also als richtig herausstellt.Der fragliche vorhin
7 ausgesprochene | Satz über das dreidimensionale Gas ist in demselben Sinne ein *vermutlich richtiger math. Satz*, wie der grosse Fermatsche Satz in der Arithm. oder der Satz, dass $2^{\sqrt{2}}$ eine irrationale Zahl ist oder der Satz, dass bei jeder Landkarte auf dem Erdglobus bereits vier die zur Färbung der verschiedenen Länder ausreichende Anzahl von Farben ist — das 4-Farbenproblem. Die Aussage, dass diese Sätze vermutlich richtig sind, ist ein *subjektives* auf Grund von math. Erfahrung gefälltes Urteil.

Die Erklärung unseres Phänomens der Gleichverteilung der Moleküle in A und B nach Fortnahme der Wand in 5 Min. erfordert aber noch eine zweite Annahme, die die *Wahrscheinlichkeit* des Anfangszustandes des Gases in A betrifft und die darin besteht, dass die Moleküle zur Zeit t_1 nicht gerade ei-
8 ne | Lage hatten, die durch die Punkte des besonderen Teilgebietes ε im Phasenraum dargestellt wird. Im Allgemeinen werden wir wegen der Kleinheit des Teilgebietes ε diese Annahme machen dürfen, indem wir den Grundsatz der *Wahrscheinlichkeitstheorie*[68] anwenden, wonach das, was fast immer statthat, in Wirklichkeit stets angetroffen wird — ein Grundsatz, der an der Spitze der ganzen physik. Statistik steht.

Die letztere Annahme zusammen mit der ersteren erklären unser Phänomen vollkommen; die erstere Annahme ist eine Vermutung, die zweite eine Wahrscheinlichkeit. Die beiden an sich so grundverschiedenen Begriffe „*vermutlich*“ und „*wahrscheinlich*“ werden desshalb so gefährlich oft miteinander vermengt und verwechselt, weil gerade bei den Anwendungen der Wahrschein-
9 lichkeitstheorie auf Physik | die Vermutungen eine so grosse Rolle spielen und fast alle Wahrscheinlichkeitssätze in der Physik nur vermutlich richtige Sätze sind, da die mathematischen Beweise eben nicht erbracht zu werden pflegen und auch heute nicht erbracht werden können u. auch in speziellsten Fällen die Rechnungen viel zu langwierig sind.[69] Die Wahrscheinlichkeitssätze in mechanischen Problemen sind in ihrem Charakter von der Art des folgenden Satzes, der als typisches Beispiel eines solchen vermutlich richtigen Satzes gelten kann: In der unendlichen Dezimalbruchentwickelung für die Zahl π ist die Ziffer 1 ebensooft anzutreffen, wie jede andere Ziffer d. h. die Wahrscheinlichkeit, die Ziffer 1 darin anzutreffen ist genau $\frac{1}{10}$.[70] Die Schwierigkeit des Beweises dieses

[66] The words “speziellen, numerischen” and “u. langwierig” were interlineated.

[67] “Zukunft” was substituted for “Zeit”.

[68] The letters “theorie” were underlined twice.

[69] The words “ u. auch ... langwierig sind” were interlineated.

[70] “$\pi = 3,14159\ldots$” (written on the back of p. 8, facing p. 9.)

praecisen rein math. Satzes liegt auf der Hand und doch ist er nur | ein sehr 10
einfaches Beispiel im Vergleich auch nur mit dem vorhin formulirten Satz, der die Mischung der Moleküle 2er Gase betrifft.[71]

Zu der soeben besprochenen Verwechslung tritt aber häufig in den Darstellungen der Statistik noch die meiner Meinung nach ganz unrichtige und irreführende Anwendung des Begriffes der *Hypothese*. So spricht man unglücklicher Weise in der kinetischen Theorie der Materie von der Boltzmannschen Ergodenhypothese, während der damit gemeinte Satz ein rein math. Satz z. B. jener vorhin formulirte Satz über die Mischung der Moleküle 2er Gase nach 5 Min.[72] ist — ein Satz, der weder eine physikalische Hypothese darstellt, noch auch an sich irgend etwas mit dem Wahrscheinlichkeitsbegriff zu tun hat. Der | Ergodensatz, genau formulirt, ist vielmehr ein math. Satz, an des- 11
sen Beweis wir wegen seiner Schwierigkeit nicht herankommen können, wenn wir auch von seiner Richtigkeit vollkommen überzeugt sind. Früher konnte man die Annahme, dass das Gas ein System fliegender Moleküle ist als Hypothese bezeichnen — das ist nun längst zur Gewissheit geworden, so dass jetzt in der kinetischen Theorie d. Gase überhaupt nichts hypothetisches anzutreffen ist.[73] Wir haben es hier also mit 3 grundverschiedenen Begriffen zu tun: *vermutlich*, *wahrscheinlich*, *hypothetisch* ⟨,⟩ dann und nur dann, wenn wir dies bedenken, gewinnen wir Klarheit und eine praecise Antwort auf unsere ursprüngliche Frage, um deretwillen wir diese ganze Betrachtung unternahmen.

Bedenken wir nämlich, dass bei allen sonstigen Anwendungen der statistischen Methode die leitenden Grundgedanken die nämlichen sind, wie in unserem Beispiele der Mischung 2er Gase, und bedenken wir ferner, dass die Wahrscheinlichkeitstheorie an sich | eine Auszeichnung der Zeitrichtung von 12
Vergangenheit auf Zukunft nicht mit sich bringen kann, da sie rein logisch-math. Natur ist, so werden wir damit zu der Erkenntnis geführt, dass bei den Erklärungen irreversibler Vorgänge durch die statistische Methode die *Unsymmetrie in Bezug auf Vergangenheit und Zukunft* nur durch die Art der gewählten Anfangszustände und Anfangsbedingungen zu Stande kommt und demnach die Irreversibilität keine objektiv in der leblosen Natur und ihrer Gesetzlichkeit vorhandene, sondern nur eine scheinbare durch den antropromorphen Standpunkt begründete ist. Es bleibt also dabei, wie es die Weltgleichungen[74] lehren, dass es in der Physik eine ausgezeichnete Zeitrichtung nicht giebt; und wir sehen zugleich, dass jedenfalls in der Thermodynamik nirgends *accessorische* Naturgesetze aufzufinden | sind — ist eben doch 13
das Wahrscheinlichkeitsprinzip nichts Anderes, als eine besondere Methode,

[71] "der Moleküle" was interlineated. The example discussed above concerned the expansion of a gas rather than the mixing of two different gases.

[72] The words "nach 5 Min." were interlineated.

[73] The preceding sentence was written on the back of p. 10, facing p. 11, and directed with an insertion sign to this point.

[74] "Weltgleichungen" was corrected from "Weltgesetze".

wie man die Weltgleichungen anwendet. Freilich setzt diese Anwendung wesentlich das Vorhandensein von Molekülen, von Atomen und zuletzt[75] von Elektronen voraus. Wir müssen desshalb notwendigerweise fragen, ob diese Gebilde und überhaupt das *Prinzip der Atomistik* etwas Accessorisches in unserem Sinne ist. Wenn wir den Entwickelungsgang der modernen Physik ins Auge fassen, kommen wir zur Verneinung dieser Frage d. h. wir erlangen die Auffassung und Ueberzeugung, dass die Weltdifferentialgleichungen allein nach genügender Ausgestaltung bez. Berichtigung[76] hinreichen, um das Vorhandensein, ja sogar die Struktur und die Eigenschaften der Materie zu erschliessen. Ich muss diese Behauptung näher begründen.

Bis vor nicht langer Zeit glaubte man die physikalischen und chemischen
14 Eigenschaften der Elemente als empirisch gegebene Daten hinnehmen | zu müssen und erblickte schon einen grossen Gewinn darin, wenn es gelang, die Vorgänge in der Materie durch *phaenomenologische* Prinzipien zu erklären. Heute wissen wir, dass die Materie aus 2 Arten gleichförmiger Bausteine, den *negativen* Elektronen einerseits und den *positiven Wasserstoffkernen* andererseits aufgebaut ist. *Mie* war der erste, der Weltdifferentialgleichungen aufzustellen suchte, aus denen das Elektron als besonderes Integral hervorgehen sollte.[77] Seitdem liegen vielfache Ansätze in gleichem Sinne vor und, wenn die Erreichung des Zieles auch noch nicht gelungen ⟨ist⟩, so können wir doch damit rechnen, dass dies demnächst geschieht. Aber mehr noch: auch die Gesetze und Regeln der modernen *Quantentheorie* — so dunkel ihr Ursprung im Augenblick noch sein mag — sind von der Art, dass man meiner Meinung
15 nach die sichere Erwartung haben muss, in | ihnen Nichts als die Folgerungen von gewissen noch aufzufindenden Modifikationen der bisher aufgestellten Weltdifferentialgleichungen zu erblicken. Liegt so die Lösung dieses theoretischen Problems noch in der Zukunft, ebenso wie die des Aufbaues der Kerne der höheren Atome aus den Wasserstoffkernen, so haben wir doch dank der Forschungen von *Bohr* über die Struktur der Elemente[78] eine sehr weit gehende Kenntnis: wir wissen mit Sicherheit, dass schon durch die Ladung des Kerns allein alle Eigenschaften des Elementes geregelt werden und warum es dann gerade seine und keine anderen Eigenschaften besitzen muss.

Ich möchte Ihnen in ganz grossen Zügen, die wesentlichsten Gedanken dieser Theorie ins Gedächnis rufen. Die Bahn des Elektrons im Atom lässt sich durch 2 ganze Zahlen charakterisiren: n_k $(k \leq n)$, von denen die erste n
16 die Grösse und die zweite k die Gestalt, näm|lich die Exzentricität der Bahn bestimmt.[79]

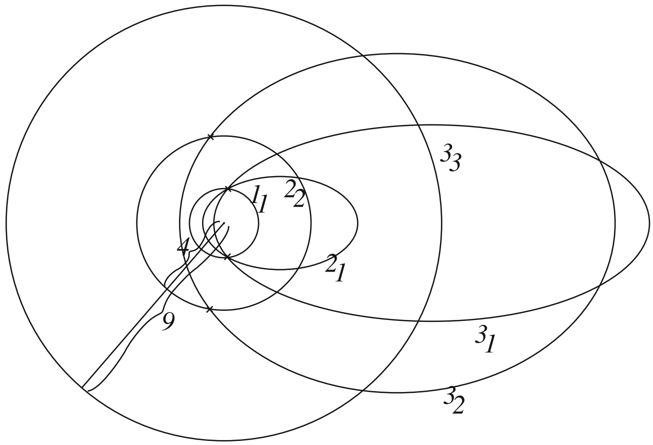
[75]"zuletzt" was corrected from "sogar".

[76]The words "nach genügender Ausgestaltung bez. Berichtigung" were interlineated.

[77]*Mie 1912a*, *Mie 1912b*.

[78]The following account of the structure of the periodic system follows closely Niels Bohr's lecture in Göttingen, held in June 1922, see *Bohr 1977*, pp. 341ff.

[79]The figure was written on the back of p. 15, i.e. on the facing left hand page to p. 16.



Die Untersuchung des *Spektrums* des betreffenden chemischen Elementes
giebt dann über die Bindung der Elektronen durch den Atomkern folgen-
de Auskunft: Die ersten beiden innersten Elektronen werden, wie aus dem
Spektrum von Wasserstoff und Helium hervorgeht, in 1_1 Bahnen gebunden.
Besitzt nun der Kern die Ladung 3, was beim Lithium der Fall ist, so dass
das Atom in neutralem Zustand 3 Elektronen enthalten muss, so kann das
3^{te} Elektron nicht mehr, wie die 2 ersten in 1_1 Bahnen gebunden werden:
es ist vielmehr hier in der Nähe des Kernes kein Platz mehr frei und sein
normaler Bewegungszustand ist nicht eine 1_1, sondern eine 2_1 Bahn, also eine
solche von grösserer Dimension und anderer Gestalt. | Damit versteht man die 17
Alkalinatur des Lithiums; denn da das letzte Elektron wegen der schwachen
Bindung leicht abgegeben werden kann, erklärt sich von selbst die Eigenschaft
des Lithiums, positive Ionen zu bilden. Nach dem nämlichen Prinzip schreitet
nun der Aufbau fort. Jedesmal, wenn die schon gebundenen Elektronen eine
Gruppe von besonderer Symmetrie bilden, wird das nächste in einem neuen
noch nicht vorhandenen Bahntypus eingefangen und damit eine *neue Schale*
im Gefüge des Atoms begonnen — entsprechend chemisch dem Beginn ei-
ner neuen Periode im periodischen System der Elemente. Durch Verfol⟨g⟩ung
dieses Prinzipes erhält man als Schlussresultat ein wunderbar einfaches und
harmonisches Schema für | die Anordnung und die Zahlen der Elektronen in 18
den einzelnen Schalen. In der folgenden Tabelle[80] ist dieses Schema für die
Edelgase, die jedesmal den Abschluss der Perioden und damit besonders wich-
tige *Stationen* bilden, wiedergegeben.

[80]In reproducing Hilbert’s table, we have used the following abbreviations: AN= Atomnummer, He=Helium, Ne=Neon, Ar=Argon, Kr=Krypton, Xe=Xenon, Rn= Emanation.

	AN	Anzahl der Elektronen in den n_k Bahnen.																					
		1_1	2_1	2_2	3_1	3_2	3_3	4_1	4_2	4_3	4_4	5_1	5_2	5_3	5_4	5_5	6_1	6_2	6_3	6_4	6_5	6_6	7_1	7_2
He	2	2																						
Ne	10	2	4	4																				
Ar	18	2	4	4	4	4																		
Kr	36	2	4	4	6	6	6	4	4															
Xe	54	2	4	4	6	6	6	6	6	6		4	4											
Rn	86	2	4	4	6	6	6	8	8	8	8	6	6	6			4	4						
	118	2	4	4	6	6	6	8	8	8	8	8	8	8	8		6	6	6				4	4

Atomgewicht ungefähr das Doppelte
Uran 92.

z. B. $18 = 2 + 4 + 4 + 4 + 4$
$36 = 2 + 4 + 4 + 6 + 6 + 6 + 4 + 4.$

19 Dabei sind, um die Konstruktion des Schemas deutlicher hervortreten zu lassen, die Zahlen des nicht realisirten Elementes 118 vom Edelgascharakter mitangegeben. Die Periodizität des Systems liegt darin begründet, dass die Zahlen für die äusseren Elektronen, die für die chemischen Eigenschaften massgebend sind, sich stets wiederholen.[81] Mannigfache Einzelheiten entnehmen wir unmittelbar aus der Betrachtung unseres Schemas. So z. B. verstehen wir das Auftreten einer grösseren Zahl chemisch unter sich ausserordentlich ähnlicher
20 Stoffe zwischen Xenon u. Emanation, wie es die seltenen | Erden sind.

Diese Beispiele zeigen, wie es möglich ist, allein aus den Feld- und Bewegungsgesetzen die tiefgehendsten Eigenschaften der Materie bis zu den *charakteristischen Einzelheiten* der chemischen Elemente abzuleiten und als *denknotwendige Folgerungen* aus ihnen zu erkennen. Ja, wenn man die radioaktiven Stoffe in Betracht zieht, so können wir sogar über das verhältnismässig häufige oder seltene Vorkommen dieser Elemente Aufschlüsse erhalten und auch diese Aufschlüsse wären letzten Endes als Folgen der Weltdifferentialgl. anzusehen, so dass es scheint, als ob die ganze mannigfaltige und unübersehbare Fülle aller die Materie betreffenden Vorkommnisse und Tatsachen nichts
21 anderes als | Resultate *math. Integrationen* der Weltgleichungen sind. Giebt man dies zu, so ist, glaube ich, meine Behauptung erhärtet, dass[82] *keinerlei accessorische Weltgesetze*[83] vorhanden sind.

Bei der erfolgreichen Weiterentwickelung in dieser Richtung müssten sich schliesslich alle *physik. Konstanten* auf rein math. Konstante vom Charakter e, π zurückführen lassen. Das ist z. B. bei der sogenannten chem. Konstanten in einem überraschenden Masse gelungen, wie es diejenigen Forscher, die die Konstanten zuerst einführten, gar nicht für denkbar gehalten hätten. Es handelt sich da um die Anwendung der Boltzmannschen tiefgreifenden

[81] Deleted: “, während der lineare Anstieg der Kernladungszahl überhaupt nur bei den Eigenschaften der inneren Schalen, die wir aus den Röntgenspektren erfahren, zur Geltung kommt.”.

[82] Deleted: “Struktur und Eigenschaften der Materie ein Ausfluss und letzten Endes denknotwendige Folgerungen der Weltgleichungen sind und dass es somit”.

[83] Deleted: “giebt”.

Definition der Entropie als log. der Wahrscheinlichkeit und einer arithmetischen Methode zur *Abzählung der Gitterpunkte* im Phasenraume gemäss dem Quantengesetz.[84]

Aber um dem Einwand der Einseitigkeit zu entgehen, möchte ich noch ein ganz anderes Gebiet heranziehen, das ebenfalls zu unseren physikalischen Disziplinen gehört, nämlich die Wissenschaft vom Aufbau des Fixsternsystems.

Die moderne Astronomie erfreut sich ebenfalls eines *frischen Tempos* ihres Fortschrittes, indem sie eine Menge neuer Tatsachen ans Licht gezogen und durch fruchtbare theoretische Gesichtspunkte gruppirt und zu erklären gesucht hat.

Wenn auch noch nicht so überzeugend, wie in der Atomlehre, so tritt uns 22
auch hier jedenfalls die Tendenz entgegen, beobachtete Besonderheiten der Sterne, die wir früher ohne weiteres als Tatsache *hinnahmen*, jetzt abzuleiten. So z. B. herscht überall, soweit wir genauere Daten erlangen bez. erschliessen können, eine ganz auffallende Gleichheit hinsichtlich der Massen der Sterne: von ganz vereinzelten Ausnahmen abgesehen, liegen ihre Massen sämtlich in dem Intervall zwischen dem $\frac{1}{2}$- bis 5-fachen der Sonnenmasse. Eddington hat nun in der Tat aus thermodynamischen und strahlungstheoretischen Gründen solche obere und untere Grenzen für die Möglichkeit grosser Massen gefunden, ja noch mehr er hat eine Theorie aufgestellt, die die Temperatur u. Helligkeit der Sterne sowie deren Veränderung erklärt.[85] Somit finden wir auch hier | im 23
weiten Himmelsraum *keinerlei* accessorische Weltgesetze und auch die Existenz und fortschreitende Entwickelung der Sterne erscheint letzten Endes als eine *Konsequenz der Weltgleichungen*.

Der hier von mir vertretene Gedanke, dass das gesammte physik. Sein und Geschehen durch ein Weltgesetz beherrscht wird, das die Form eines allgemein invarianten Systems von partiellen Differentialgleichungen besitzt, hat einen Vorläufer in dem früheren theoretischen Ideal der *Mechanistik*. Aber der Unterschied mit früher, die Wandlung gegenüber dem damaligen Standpunkt ist sehr bedeutend. Wie wir gesehen haben, gehen wir eben heute in den Anforderungen an das theoretische Verständnis der Natur weit über das frühere Ziel hinaus. Während früher die *Vielheit der Stoffe und der physik. Konstanten* als etwas Letztes hingenommen und die sogenannten allge | meinen Eigenschaf- 24
ten der Körper (Kohäsion, Undurchdringlichkeit, Undurchsichtigkeit, Schwere, Trägheit, etc.) einfach jede für sich als Grundkräfte nebeneinander gestellt wurden, gehen wir heute davon aus, dass es nur zweierlei Bausteine der Materie giebt, die Elektronen und positive Kerne, aus deren Zusammensetzungen und Relativbewegungen sich die chemischen und physikalischen Eigenschaften

[84]The preceding paragraph, starting with "Bei der erfolgreichen Weiterentwicklung ..." was written on the back of p. 20, facing p. 21 and indicated for insertion at this point by a correction mark.

[85]The preceding sentence, starting with "ja noch mehr" was written at the bottom of the page and marked for insertion at this point by an arrowed line. See *Eddington 1923*.

der Stoffe erklären lassen und denken uns auch deren Vorhandensein als Folge der Grundgleichungen.[86] Andererseits hat auch in der math⟨ematischen⟩ Form des Ansatzes der Weltgesetze eine grundsätzliche Umstellung stattgefunden.

Bei dem alten mechanistischen Standpunkte bestanden die Grundlagen wesentlich nur aus gewöhnlichen Differentialgleichungen mit der Zeit t als einziger unabhängigen Variabeln — es waren eben die Differentialgleich⟨eichungen⟩ der Mechanik. Und die elektrischen Erscheinungen wurden ihnen
25 dann mit *mehr oder weniger Willkür angepasst*. Es war garnicht daran zu | denken, auf diesem Wege zu einem einheitlichen und umfassenden Gleichungssystem zu gelangen. Unsere Weltgl⟨eichungen⟩ sind vielmehr partielle Differentialgl⟨eichungen⟩ und übrigens solche, für deren Auffindung auch der Gesichtspunkt der math⟨ematischen⟩ Einfachheit neben den Prinzipien der Minimalintegrale und der allgemeinen Invarianz als Leitfaden weitgehende Anhaltspunkte liefert.

Zu Beginn meines heutigen Vortrages habe ich auf den Umstand hingewiesen, dass die Weltgleichungen, weil sie Differentialgleichungen sind, an sich keinerlei bestimmte Lösungen festlegen können und dass es daher scheint, als könnten die Weltgleichungen nur dazu dienen, *aus bekannter Gegenwart die Zukunft* vorauszusagen, während wir für den gegenwärtigen Zustand der Dinge aus ihnen gar nichts erfahren. Wir haben gesehen, dass das Gegenteil zutrifft. Dies findet darin seine Erklärung, dass für unsere Fragestellungen nur solche
26 Lösungen der | Weltgleichungen in Betracht kamen, denen in der Natur beständige oder sich regelmässig wiederholende Vorgänge entsprechen.[87] Solche Forderungen wie die der *Konstanz*, der *Stabilität* oder *Periodicität*[88] dürfen wir als *accessorische* ansehen, ebenso wie die Annahme, dass jedes solche Integral in der Natur auch *realisirt* ist. Es ist aber zu beachten, dass diese accessorischen Forderungen — auch die Annahme der Anwendbarkeit der Wahrscheinlichkeitsprinzipien kann dazu gerechnet werden — dass diese accessorischen Principien nicht den math⟨ematischen⟩ Charakter *neuer Gleichungen* haben,
27 sondern allgemeiner Art sind, ⟨und⟩mit unserem Denken überhaupt und | unserer Einstellung gegenüber der Natur zusammenhängen. Damit nähern wir uns dann dem Thema meines letzten Vortrages, der dasjenige philosophische Problem behandeln[89] soll, zu dem wir hier hingedrängt werden — einem allgemeinen philos⟨ophischen⟩ Problem, das das Denken und das Sein überhaupt betrifft.

⟨1⟩ |[90] Vergegenwärtigen wir uns rasch die Ergebnisse des 2^{ten} Vortrages:

[86] The preceding half-sentence, starting with "und denken uns auch..." was interlineated.

[87] Deleted: "Nur solche Vorgänge sind genügend kontrollirbar und daher für uns einer wissenschaftlichen Behandlung fähig."

[88] "wie die der Konstanz, der Stabilität oder Periodicität" was corrected from "der im Sinne des Stationären, Stabilen oder Periodischen".

[89] Deleted: "und zur Lösung bringen".

sie gipfelten in der Behauptung,[91] dass es keinerlei eigentliche[92] accessorische Naturgesetze giebt. Vielmehr die ganze mannigfaltige und unübersehbare Fülle der die Materie betreffenden Vorkommnisse und Tatsachen sind nichts als Folgerungen aus den Weltgleichungen und das gilt ebenso für die innere Struktur der Materie, wie für die weite Sternenwelt, sodass das Vorhandensein und die Eigenschaften der chemischen Elemente, die physikalischen Konstanten, ja sogar die Grösse der Sterne aus den Weltgleichungen ableitbar sind.

Als Ersatz für die Rand- und Anfangsbedingungen gelten nur die Ge- ⟨3a⟩
sichtspunkte der Wahrscheinlichkeit und Stabilität: Nur diese Lösungen der partiellen Differentialgl⟨eichungen⟩ aber auch alle diese sind in der Wirklichkeit vertreten.[93]

Dieses Ergebnis scheint uns fast auf den Hegelschen Standpunkt zu füh- ⟨1 contd⟩
ren, wonach aus blossen Begriffen alle Beschaffenheit der Natur rein logisch deduziert werden kann. Aber bei näherem Zusehen kommen wir zu einem Standpunkt, der demjenigen von Hegel vielmehr *ganz entgegengesetzt* ist. Wir |[94] 4 lhs
stehen da vor der Entscheidung über ein wichtiges[95] philosophisches Problem, nämlich vor der alten Frage nach dem Anteil, den das Denken einerseits und die Erfahrung andererseits an unserer Erkenntnis haben. Diese alte Frage ist berechtigt; denn sie beantworten, heisst im Grunde feststellen, welcher Art unsere naturwissenschaftliche Erkenntnis überhaupt ist und in welchem Sinne *all' das Wissen*, das wir in dem naturwiss⟨enschaftlichen⟩ Betriebe *sammeln*, Wahrheit ist. Ohne Vermessenheit gegenüber den alten Philosophen und Forschern können wir heute auf eine richtige Lösung der Frage sicherer rechnen

[90] The following part of the lecture was held twice, see the Introduction to Chapter 4, p. 378. Accordingly the remainder of the manuscript displays many corrections and revisions by Hilbert, see the “Description of the Text”. The page number “1” written by Hilbert on this page was pasted over with a slip of paper holding this and the next two sheets together. The original manuscript has a single page with the text “Hamburg III und Zürich” preceding the following pages.

[91] The preceding half-sentence was deleted in the manuscript and replaced by a summary of the preceding two lectures. This summary was written on 8 loose sheets with separate pagination from 1 to 8. This summary was not edited here, cf. the “Note on the text”.

[92] “eigentliche” is interlineated.

[93] The preceding sentence, starting with “Als Ersatz ...” was written on the back of the cover sheet and marked by a correction sign and an arrowed line for insertion at this point.

[94] In the flow of the manuscript, Hilbert heavily edited the following passages which introduce the discussion of the “important philosophical problem.” At one point, he tied pp. 1, 2 and 3 together with a paper clip and started anew on the back of p. 3 (now 3a), facing p. 4. This is the text, we present above. A major portion of the text on p. 2, deleted with rough strokes, reads: “Ist es nicht zu kühn, dieses Problem jetzt hier lösen zu wollen? Jedenfalls, wenn es uns gelingen soll, einen schwierigen Berggipfel zu erklimmen, werden wir uns die richtige Zeit und eine günstige Witterung dafür aussuchen. Und ich glaube Zeit und Umstände treffen wir heute so günstig an wie nie zuvor. Vergegenwärtigen wir uns nur einmal die wichtigsten Entdeckungen früherer Jahrhunderte auf den physik. Gebieten und vergleichen sie mit denen der letzten Jahrhunderte. Die grossen phys. Entdeckungen bieten uns folgendes *chronologisches* Bild:” cf. note 97.

[95] “wichtiges” was corrected from “grosses”.

als jene — aus 2 Gründen. Erstens: die Gegenwart ist günstiger wegen des raschen Tempos, indem sich unsere Wissenschaften heute entwickeln.

4 Die bedeutsamsten Endec | kungen der älteren Zeit, von Kopernikus über Kepler, Gallilei⟨,⟩ Newton[96] etc. bis Maxwell verteilen sich in grösseren Abständen auf fast 4 Jahrhunderte.[97] Die neuere Zeit beginnt 1890 mit der Entdeckung der *Hertz*schen Wellen. Nun folgt Schlag auf Schlag: *Röntgen* entdeckt seine X-Strahlen, Curie die *Radioaktivität*, Planck stellt die *Quantentheorie* auf. Ferner sodann Rutherford's Theorie der *Radioaktivität*⟨,⟩ *Ein*stein's *$h\nu$-Gesetz*, Bohr's Erklärung der Spektren, Laues *Röntgenspektroskopie*, *Moseleys* Nummerirung der Elemente, *Einsteins Relativitätstheorie*, *Rutherfords Zerfällung* des Stickstoffs, Bohr's *Aufbau der Elemente*⟨,⟩ *Aston's Isotopentheorie*.

5 So haben wir von den 90-er Jahren bis zur Gegenwart eine ununterbro|chene Reihe von Entdeckungen und was für Entdeckungen! An Gewaltigkeit steht keine einzige derselben den Errungenschaften der älteren Zeit nach,[98] und überdies sie sind zeitlich enger zusammengedrängt und innerlich vielgestaltiger. Und darin sind beständig *Theorie und Praxis*, *Denken und Erfahrung* aufs innigste verschlungen. Bald eilt die Theorie, bald das Experiment voraus, immer sich gegenseitig bestätigend, ergänzend und anregend.

Wir haben also den älteren Philosophen gegenüber den Vorteil, eine grosse Anzahl solcher Entdeckungen *miterlebt* und die dadurch bewirkten Neueinstellungen während ihrer Entstehung kennen gelernt zu haben. Dabei waren unter den Neuentdeckungen viele solche, die alte *festgewurzelte* Auffassungen und Vorstellungen abänderten oder ganz beseitigten. Denken wir nur an den neuen Zeitbegriff und die Zerfällung der chem. Elemente. Vorurteile, an denen zu rühren früher überhaupt Niemand eingefallen wäre.[99]

---

[96] Deleted: "Helmholtz".

[97] The following chronological list was written on p. 3 of the manuscript and later deleted:
"Um 1500 das *Kopernikanische* Weltsystem.
1600 *Kepler* entdeckt die Gesetze der Planetenbewegung.
" " *Galilei*'s Begründung der Mechanik.
1675 Messung der Lichtgeschw. durch *Olaf Römer*
" " Wellentheorie des Lichtes von *Huygens*
1700 *Newton*sche Himmelsmechanik.
1800 Ausbau der Wellentheorie des Lichtes durch *Fresnel*
1830 *Oersted* entdeckt die Ablenkung der Magnetnadel durch den galvanischen Strom.
" " *Faraday* giebt eine Theorie der elektromagnetischen Erscheinungen
1850 *Helmholtz* begründet die Theorie von der Erhaltung der Energie.
1860 bringt die Spektralanalyse von *Kirchhof und Bunsen*
1880 *Maxwell* begründet die elektromagnetische Theorie des Lichtes."

[98] Interlineated and deleted: "Moseley, Einstein, Rutherf., Bohr!"

[99] Added: "S. 8 links". In the flow of the manuscript, Hilbert heavily edited the following paragraphs which introduce the axiomatic method. At some point, he tied the back of p. 5 and the next pp. 6, 7, and 8 together with a clip of paper and started anew on the back of p. 8, facing p. 9. This new text is the version we present above. A major part of the discarded text of. pp. 6–8, deleted with rough strokes, reads as follows:

Aber noch ein zweiter Umstand kommt der Entscheidung über jene al- 9 lhs
te philosophische Frage zu Gute. Es giebt eine allg. Methode für die theor. Behandlung naturwiss. Fragen, die heute sehr ausgebildet ist, auch oft unbewusst von den Forschern angewandt wird⟨,⟩ d. i. die axiomatische Methode und diese verhilft auf alle Fälle dazu, die betr. Fragestellung zu praecisiren. Was für eine Bewandtniss hat es nun mit der heute so vielgenannten Axiomatik? Da haben wir zuerst auf der einen Seite die Dinge der Wirklichkeit, die wirklichen Vorgänge, wie sie sich durch Beobachtung und Experiment uns zeigen als da sind die Gegenstände um uns, welche wir direkt mit unseren Sinnen wahrnehmen, aber ebenso die Atome Moleküle Sternenwelten etc., die mit gleichem Rechte Wirklichkeit sind. Andererseits vermögen wir — besonders mit Hülf⟨e⟩ der math. Wiss. — durch Anwendung reiner Logik immer
höhere, komplizirtere Gebäude aufzubauen, Fachwerke von | Begriffen, logisch 9
in sich geschlossen und widerspruchsfrei;[100] doch es bleibt *dahingestellt*, ob diese auf die Wirklichkeit anwendbar sind.

Wenn wir nun ein bestimmtes Wissensgebiet ins Auge fassen und die Tatsachen desselben zusammenstellen — sei das Wissensgebiet *eng* und speziell oder *weit* und allgemein, sei es *alt* und viel durchforscht oder *neu* und gerade eben entdeckt — immer bemerken wir bald, dass die Tatsachen desselben einer Ordnung fähig sind. Diese Ordnung erfolgt eben mit Hülfe eines jener Fachwerke, eines Begriffsgebildes in der Weise, dass dem einzelnen Gegenstande

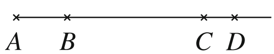
“Also *Zeit und Verhältnisse* zu unserer Bergbesteigung sind günstig; aber wir brauchen nun auch noch eine gute *Ausrüstung* und *Vorbereitung*. Und diese verschaffen wir uns, indem wir zunächst einige Vorfragen stellen, deren klare Beantwortung zur Vermeidung von Missverständnissen zuvor nötig ist, deren sichere Beantwortung aber auch, glaube ich, ohne Mühe möglich ist. Dieser Vorfragen sind wesentlich 2. Die *erste* ist die, was wir unter *Wirklichkeit* verstehen wollen und als solche gelten lassen, und die Antwort darauf ist: Die Gegenstände um uns, die wir sehen und sonst mit unseren Sinnen wahrnehmen, sind wirklich. Aber nicht mehr und nicht weniger wirklich sind auch die *Himmelskörper* und die *Atome* Elektronen und die *Moleküle* und wenn wir die Sätze aufstellen: der Mond wiegt $7 \cdot 10^{25}$ g, ein Wasserstoffatom wiegt $16 \cdot 10^{-25}$ g, so liegt da keine geringere, oder qualitativ andere Art von Realität vor als die, die wir im gewöhnlichen Leben meinen — obwohl ich den Mond nicht auf die Wagschale legen und das Wasserstoffatom nicht einmal sehen kann. Was das Sehen betrifft, so wurde der *Neptun* bereits gewogen, noch ehe ein Astronom ein Fernrohr auf ihn richtete und es giebt sogar bekanntlich überhaupt unsichtbare Himmelskörper, deren *Gewicht*⟨Deleted: “und *Beschaffenheit*”.⟩ bestimmt worden ist. Wir werden also die direkte Wahrnehmbarkeit durch unsere Sinne nicht als Erfordernis der Wirklichkeit ansehen. Das Tor der Sinne ist zu eng und vom Standpunkt der Naturwiss. viel zu willkürlich aufgepflanzt: denken Sie an den knappen Bereich von Schwingungen, den allein wir als *Schall* oder als *Licht* wahrnehmen. In der Tat, wenn wir uns nicht von den antropomorphen Beschränkungen emanzipiren könnten, würde ein *Zerrbild der wirklichen Welt* entstehen.
Auch über die *zweite Vorfrage*, den Gegenpol zu dem eben besprochenen Punkt werden wir leicht hinwegkommen. Die Mathematik vermag, vom Begriff der Zahl ausgehend, immer höhere, komplizirtere Gebäude durch Anwendung reiner Logik aufzubauen. Sie liefert, durch die axiomatische Methode Fachwerke von Begriffen und verlangt dabei nur die Widerspruchsfreiheit; sie liefert fertige logisch mögliche Gebäude und lässt es dahingestellt, ob diese auf die Wirklichkeit anwendbar sind.”

[100] For a similar use of the phrase “Fachwerk von Begriffen” see *Hilbert 1916/17**, p. 82, this Volume, p. 226.

10 des Wissensgebietes ein Begriff dieses Fachwerkes und jeder Tatsache | innerhalb des Wissensgebietes eine logische Beziehung zwischen den Begriffen entspricht. Das Fachwerk der Begriffe ist nichts Anderes als die Theorie des Wissensgebietes. Diese ist ein abstraktes Abbild, eine Projektion jener Tatsachen in das Reich der Begriffe.

Wenn wir nun eine solche Theorie näher betrachten, so erkennen wir allemal, dass der Konstruktion des Begriffsgebildes einige wenige ausgezeichnete Sätze zu grunde liegen und diese dann allein ausreichen, um aus ihnen nach logischen Prinzipien das ganze Gerüst aufzubauen. Diese Sätze heissen die *Axiome*.

Diese Lehre selbst heisst die Axiomatik. Ihre Anwendungsfähigkeit ist sehr ausgedehnt und mannigfaltig: *Jeder Forscher bedient* sich ihrer — *be-*
11 *wusst oder unbewusst*. Das einfachste und älteste Beispiel ist die klassi|sche Elementargeometrie von Euklid. Um Sie an die Methode zu erinnern, wähle ich als Probe das allersimpelste *Teilgebiet der linearen Geometrie*, nämlich die Untersuchung der gegenseitigen Lage der Punkte auf einer Geraden.



Schon bei der Betrachtung von 3 Punkten erkennen wir die Tatsache, dass das „Zwischen-Liegen" der wesentliche Begriff, das entscheidende Kriterium für die Lage ist. Wir stellen daher folgende, diesen Begriff betreffende und ihn implizite definirende Axiome auf:

1. Von 3 Punkten liegt stets einer und nur einer zwischen den beiden anderen.

2. Wenn C zwischen A, D und wenn B zwischen A, C, so liegt B zwischen A, D.

3. Wenn B und C zwischen A, D liegen, so liegt C entweder zwischen A, B oder zwischen B, D; Eines schliesst das Andere aus.

12 Dazu kämen dann die Aussagen über das Abtragen von Strecken d. h. die linearen Kongruenzaxiome, womit sich schliesslich die *lineare Metrik* vollständig begründen lässt. Dies ist der erste Anfang und der Unterbau für das wichtige klassische Musterbeispiel eines logischen Fachwerkes, das Euklid in seiner Geometrie gab.

Wie gesagt, die Fachwerke bedürfen zu ihrer Konstruktion nur der Logik; sie können sonst ganz willkürlich sein. Freilich die Forderung der *Widerspruchsfreiheit* ist unerlässlich; diese ist eine Vorbedingung für die Anwendbarkeit auf die Wirklichkeit; denn in der Wirklichkeit giebt es keine Widersprüche.

Wir haben bisher von der Wirklichkeit an sich und andererseits von der
13 Theorie d. h. dem Begriffsfachwerk andererseits gesprochen. | Nun besteht

Wissenschaft darin, dass die Dinge der Wirklichkeit und die Begriffe des Fachwerkes umkehrbar eindeutig aufeinander bezogen werden. Ich muss einige einfache Beispiele dafür geben, wie dies geschieht. Das einfachste axiomatische Gerüst ist das für den Begriff „zwischen“; dasselbe findet sehr mannigfache Anwendung — oft sogar ganz *naiv* und den Forschern selbst ganz unbewusst. So findet man in der Elektrizitätslehre, dass, wenn ein Metall A gegen ein anderes B bei Berührung positiv elekt. wird und ebenso B gegen C sich positiv lädt, dann auch stets A gegen C positiv wird. Dadurch ist die Stellung von B zu A und C ausgezeichnet und auch nur diese. Bezeichnen wir diese ausgezeichnete Stellung mit der Beziehung zwischen, so erkennen wir, dass alle 3 Axiome über den Begriff „zwischen“ erfüllt sind und wir schliessen desshalb auf die Möglichkeit einer linearen Anord|nung der Metalle: es ist ⟨die⟩ 14
in der Elektrizitätslehre bekannte Spannungsreihe. Die Hauptglieder dieser Reihe sind:

Zink Blei Eisen Kupfer Silber Gold.

Diese ordnen sich also wie die Punkte einer Linie.

Aber noch merkwürdiger ist ein Phaenomen der Vererbungslehre.[101] Drosophila ist eine kleine Fliege, aber gross ist unser Interesse für sie; sie ist der Gegenstand der *ausgedehntesten*, der *sorgfältigsten* und *erfolgreichsten* Züchtungsversuche geworden. Die Fliege ist gewöhnlich[102]

a	*b*	*c*	*d*	*e*
grau,	rotäugig,	fleckenlos,	rundflüglich,	langflgl.;
(am Körper)		(am Körper)	(Flügel mit rundem Rande)	

Es kommen aber auch Fliegen mit abweichenden Sondermerkmalen vor. Statt grau sind diese Fliegen gelb am Körper, statt rotäugig sind sie weissäugig etc. Wir bezeichnen diese Sondermerkmale fleckig, spaltpfl., klumppfl. | mit den 15
entsprechenden grossen Buchstaben; wie folgt:[103]

A	*B*	*C*	*D*	*E*
gelb,	weissäugig	fleckig,	spaltfgl.,	klumpfgl.

Gewöhnlich sind diese 5 Sondermerkmale sämtlich mit einander gekoppelt d. h. wenn eine Fliege gelb ist, dann ist sie auch weissäugig und fleckig, spaltfgl.

[101] The following text was written at the top of the facing left hand page and marked by an arrowed line as the continuation of the main text after the pages 11–13 had been clipped together:
“Das älteste und bekannteste Beispiel ist Euklid’s Geometrie. Ich möchte aber lieber ganz kurz die axiom. Methode an einem sehr drastischen Beispiel aus der modernen Biologie verdeutlichen.”

[102] Probably for the Zurich version, Hilbert replaced the following list with: “grau, rotäugig, fleckenlos, rundflüglich, langflüglich”.

[103] The preceding sentence and the following list were deleted (probably for the Zurich version).

und klumpfl. Und wenn sie klumpfl. ist, dann ist sie auch gelb und weissäugig etc. Von dieser gewöhnlich statthabenden Koppelung kommen nun aber bei geeigneten Kreuzungen unter den Nachkommen an Zahl geringe Abweichungen vor und zwar ⟨—⟩ das ist wichtig u. so merkwürdig ⟨—⟩[104] in prozentual bestimmter konstanter Weise. Es handelt sich um die 5 Merkmale:

$$aA \qquad bB, cC, dD, eE.$$

(Alternative, ob gelb oder grau).[105]

16 Wir wollen die prozentuellen Abweichungen von der gewöhnlichen Koppelung für irgend 2 dieser 5 Merkmale ihre Austauschzahlen nennen und bez. mit[106]

$$p_{ab}, p_{bc}, p_{ac}, \cdots$$

bezeichnen. Diese Austauschzahlen haben nun, wie man findet, die höchst merkwürdige *arithmetische* Eigenschaft, dass allemal die Summe 2er gleich der 3ten ist in folgender Weise

$$p_{ab} + p_{bc} = p_{ac}.$$

Dadurch hat das Merkmal b eine bevorzugte Stellung gegenüber den beiden Merkmalen a und c und auf diese Stellung passen wiederum, wenn wir die Bezeichnung „zwischen" anwenden, alle jene 3 Axiome. Folglich haben wir die
17 Möglichkeit der linearen Anordnung für jene Merkmale. Aber | nicht nur diese bloss topologischen Axiome über „zwischen", sondern auch die *linearen Kongruenzaxiome* sind eben wegen jener arithmetischen Beziehungen erfüllt: die Austauschzahlen p haben somit den Charakter von Entfernungen auf einer Linie und es ist damit für die *Erbeigenschaften* eines Lebewesens eine eindimensionale Geometrie u. zwar die der gewöhnlichen linearen Metrik nachgewiesen worden. Wählen wir die Entfernung zwischen dem Merkmal der Grau-gelbfarbigkeit und der Rot-weiss-äugigkeit als Einheit, also $ab = 1$, so finden wir z. B.

$$bc = 2, ac = 3, cd = 3, bd = 5, ad = 6$$

$$\begin{array}{ccccccc} a & & b & & c & & d \\ & 1 & & 2 & & 3 & \\ & & 3 & & 5 & & \end{array}$$

18 wonach also obenein die Entfernungen zwischen Augenfarbe, Fleckigkeit, und Flügelgestalt auch noch numerisch genaue ganze Zahlen werden.[107] So

[104] The parenthesis is interlineated.

[105] The preceding sentence and the list were deleted (probably for the Zurich version), and the words "Beiblatt 2" were added.

[106] "gelb u. doch rotäugig oder grau u. doch weissäugig" (interlineated in the following formula to illustrate the first term p_{ab}).

[107] Deleted: "Mikroskopische Befunde im Verein mit einer sehr geistreichen geometrischen Theorie lehren, dass jene Erbmerkmale in den sogenannten Chromosomen lokalisirt sind. Chromosome sind Fäden, also lineare Gebilde in den Kernen der Körperzellen."

gewinnen wir erstaunlicher Weise durch statistische Feststellungen bei Kreuzungs-Experimenten eine lineare Metrik, in der die Axiome über zwischen und die Kongruenzaxiome d. lin. Geom. gelten.[108]

|[109] Nun kehren wir zu unserem Problem *zurück*. Zu⟨m⟩ Zwecke seiner 19
Lösung[110] fassen wir den *gesammten* phys. Wissenkomplex ins Auge und fragen nach dem Begriffsfachwerk dieses Gesammtwissens und nach den Axiomen, auf denen dieses grösste, Alles umfassende Fachwerk beruht. Meine[111] Antwort lautet: unsere Weltgleichungen sind diese Axiome und das volle System aller math. Folgerungen[112] aus den Weltgleichungen bildet das *Fachwerk des phys. Wissenskomplexes*, so dass dann der math. und begriffliche Ausbau der Weltgl. im Prinzip alle phys. Theorieen enthalten muss. — Wenn nun diese Weltgleichungen und damit das Fachwerk vollständig vorläge, und |[113] wir 20
wüssten, *dass es*[114] auf die Wirklichkeit in ihrer Gesamtheit passt und dann bedarf es tatsächlich[115] nur des *Denkens* d. h. der begrifflichen *Deduktion*, um alles phys. Wissen zu gewinnen; als dann hätte *Hegel* Recht mit der Behauptung, alles Naturgeschehen aus Begriffen deduziren zu | können. Aber wie 21

[108] Deleted: “die sich auf wirkliche linienförmige Gebilde in den *Zellkernen eines Lebewesens* beziehen, wo von einer unmittelbaren Ausmessung sowenig die Rede sein kann, wie z. B. bei den *Atomabständen* innerhalb der Materie.”

[109] Deleted: “Bisher nur Folgeerscheinungen; jetzt verschiedene sehr viel höhere Ziele”.

[110] The preceding two sentences were replacing the following text: “Dies sind einzelne spezielle Beispiele dafür wie Fachwerke auf Dinge der Wirklichkeit bezogen werden. Umfassendere Beispiele bieten die *Thermodynamik*, die *kinetische Gastheorie*, die *Strahlungstheorie* und andere Wissensgebiete, in denen die axiomatische Methode angewandt worden ist. Nun”.

[111] “Meine” was corrected from “Die”.

[112] Deleted: “⟨bezüglich⟩ aller begrifflichen Verzweigungen”.

[113] The preceding half-sentence is interlineated, replacing the following passage:
“Die Zuordnung zwischen Begriffen und wirklichen Dingen dürfen wir als eine umkehrbar eindeutige annehmen: dabei sehen wir auf *Seiten des Fachwerkes* blosse Umbenennungen oder Umstellungen nicht als wesentlich an und auf *Seiten der Welt* der wirklichen Dinge rechnen wir die Wiederholungen eines Experimentes oder einer Beobachtung als ein einziges Ding.
Endlich sind wir jetzt wohl vorbereitet, um den *Anstieg* zu unserem Problem beginnen zu können.
Wenn das Fachwerk vorläge, von dem”.

[114] The following text was written on the back of p. 18 and marked by a correction sign for insertion at this point:
“Um zu diesen zu kommen, fassen wir einmal den gesamten phys. Wissenskomplex ins Auge und vergegenwärtigen uns, dass die heutige Wissenschaft nicht blos im Sinne der klassischen Mech. aus Daten der Gegenwart die künftigen Bewegungen vorauszuberechnen wünscht, sondern auch gerade die gegenwärtigen tatsächlichen Zustände der Materie auf der Erde u im Weltall erklärt und aus den phys. Gesetzen ableitet. Denken wir an die Bohrschen Atommodelle und an den Aufbau der Sternenwelt. Die Vervollkommung unserer Methoden müsste, so scheint es, dann wirklich zu einem System von Naturgesetzen führen das mit seinen logischen Folgerungen”.

[115] “dann bedarf es tatsächlich” was corrected from “wie die Zuordnung stattfindet, so bedarf es”.

ist es mit der Herkunft der Weltgesetze?[116] Wie gewinnen wir solche? Und wer lehrt uns, dass sie auf das Fachwerk passt? Meine Antwort lautet, dass uns dies[117] ausschliesslich *die Erfahrung* ermöglicht. Im Gegensatz zu Hegel behaupte ich, dass gerade die Weltgesetze[118] auf keine andere Weise zu gewinnen sind, als aus der Erfahrung. Mögen bei der Konstruktion des Fachwerkes der ⟨phys.?⟩ mannigfache spekulative Gesichtspunkte mitwirken: *ob* die aufgestellten Axiome und das aus ihnen aufgebaute logische Fachwerk stimmt[119] das zu *entscheiden*, ist allein die *Erfahrung* im Stande. *Bisweilen* hatte eine Idee ihren ersten Ursprung im reinen Denken, wie z. B. die Idee der Atomi-
22 stik, | während die Existenz der Atome erst 2 Jahrtausende später durch die Experimentalphysik bewiesen wurde. Bisweilen geht die Erfahrung voran und *zwingt dem Geiste den spekulativen* Gesichtspunkt auf. So danken wir es dem *kräftigen Anstoss* des Michelsonschen Experimentes, dass das festgewurzelte Vorurteil der absoluten Zeit aus dem Wege geräumt und schliesslich der Gedanke der allgemeinen Relativität von Einstein[120] gefasst werden konnte.[121] Wer leugnen will, dass d. phys. Axiome d. h. eben die *Weltgesetze* aus der Erfahrung stammen, muss behaupten, dass es ausser der Deduktion und ausser der Erfahrung noch eine dritte Erkenntnisquelle giebt *oder* dass die *Weltgesetze* es garnicht sind, die Naturerkenntnis enthalten.[122] Wir wollen uns mit diesen *beiden Widersachern* beschäftigen. Nach dem Vorausgeschickten wird es uns nicht schwer fallen, ihre Argumente zu entkräften.

23 Es haben in der Tat Philosophen — und Kant ist der klassische Vertreter dieses Standpunktes — behauptet, dass wir ausser der Logik und der Erfahrung noch *a priori* gewisse Erkenntnisse über die Wirklichkeit haben. Nun gebe ich zu, dass schon zum Aufbau der theoretischen Fachwerke gewisse *apriorische Einsichten* nötig sind und dass stets dem Zustandekommen

---

[116]"der Weltgesetze" was corrected from "der Weltgleichungen, d. h. des passenden Fachwerkes".

[117]Deleted: "in entscheidender Weise".

[118]"Weltgesetze" was corrected from "*Axiome unseres* Fachwerkes, nämlich die Weltgleichungen".

[119]Deleted: "und die vermittelte Abbildung zutrifft,".

[120]"von Einstein" is interlineated.

[121]Added on the left hand page, marked for insertion at this point by a correction mark and an arrowed line, and later deleted:
"Sie werden vielleicht meinen, ich stiesse mit meiner Behauptung *offene Türen* ein; dem ist aber ganz u. gar nicht so. Gegen diese Behauptung von dem wesentlich empirischen Charakter der phys. Axiome ist scharfer Einspruch erhoben worden; mir fällt die Aufgabe zu die Argumente dagegen zu entkräften. Zu dem Zwecke stelle ich folgende Ueberlegung an."

[122]Added on the facing left hand page, marked for insertion at this point by an arrowed line, and later deleted:
"dass sie etwas Willkürliches und Gleichgültiges seien, das Wesentliche allein in der Zuordnung zwischen den Begriffen des Fachwerkes u. den wirklichen Dingen liege, sodass die Axiome wie Blankoformeln wären, die erst durch das Hineingeschriebene Bedeutung erhielten."

unserer Erkenntnisse solche zu Grunde liegen. Ich glaube,[123] dass die math.
Erkenntnis letzten Endes auf einer Art anschaulicher Einsicht beruht und dass
wir sogar zum Aufbau der Zahlentheorie eine gewisse *anschauliche Einstellung*
a priori nötig haben. Damit behält also der allgemeinste Grundgedanke der
Kantschen Erkenntnistheorie seine | Bedeutung: nämlich das philosophische 24
Problem, jene anschauliche Einstellung a priori festzustellen und damit die
Bedingungen der Möglichkeit jeder begrifflichen Erkenntnis und zugleich jeder Erfahrung zu untersuchen. Ich meine, dass dies im Wesentlichen in meinen Untersuchungen über die Prinzipien der Math. geschehen ist. Das Apriori ist dabei Nichts mehr und Nichts weniger als eine Grundeinstellung oder der Ausdruck für gewisse unerlässliche Vorbedingungen des Denkens und Erfahrens. Aber die *Grenze* einerseits zwischen Dem, was wir apriori besitzen und logisch deduziren und andererseits Dem, wozu Erfahrung nötig ist, müssen
wir anders ziehen als Kant; denn Kant hat die Rolle und den Umfang[124] des
Apriori-schen | sicher weit überschätzt. 25

Zur Zeit Kants konnte man denken, dass die Raum- und Zeit-Vorstellungen, die man hatte, ebenso allgemein und unmittelbar auf die Wirklichkeit anwendbar sind wie unsere Vorstellungen von *Anzahl*, *Reihenfolge* und *Grösse*, die wir in den math. u. phys. Theorien beständig in der uns geläufigen Weise verwenden. Und dann würde in der Tat die Lehre von Raum und Zeit, insbesondere also die Geometrie etwas sein, das ebenso wie die Arithmetik aller Naturerkenntnis vorausgeht. Dieser Standpunkt Kants wurde bereits,
ehe die Entwickelung der Physik dazu zwang, insbesondere von *Riemann und*
Helmholtz verlassen — mit vollem Recht; | denn *Geometrie* ist nichts Ande- 26
res, als derjenige Teil des gesammten phys. Begriffsfachwerkes, der die möglichen Lagenbeziehungen der starren Körper gegeneinander in der Welt der wirklichen Dinge abbildet. Dass es bewegliche starre Körper überhaupt giebt und welches diese Lagenbeziehungen sind[125] ist lediglich Erfahrungssache. Würden sich z. B. die sämtlichen durch die Kongruenzsätze ausgedrückten Tatsachen in Uebereinstimmung mit der Erfahrung erweisen, fiele dagegen die Winkelsumme in den aus starren Stäben konstruirten Dreiecken stets
$<$ 1 Rechter[126] aus, so würde Niemand darauf verfallen, der Behauptung des
Parallelenaxioms | irgend eine Gültigkeit in dem Raume der wirklichen Körper 27
beizulegen.[127] Der Satz, dass die Winkelsumme 2 Rechte beträgt, ist eben, wie schon Gauss erkannte, lediglich durch das Experiment *feststellbar oder widerlegbar*.[128] Bringen wir gar die Auffassung der *Lorentz-Kontraktion* zur

[123] Deleted: "festgestellt zu haben".

[124] "und den Umfang" is interlineated.

[125] Deleted: "— sogar blos im grobem Sinne —".

[126] Deleted: "und erst in Dreiecken von den Dimensionen der Atomabstände nahezu = 1 Rechten".

[127] Deleted: "vielmehr würden wir einen *wirklichen Raum* nur nach Art der heutigen Bolyai-Lobatschefsky-schen Geometrie kennen."

[128] The rest of this paragraph, from "Bringen wir" until "Ansicht vertraten", was deleted (probably for the Zurich version). For another mention of Gauß's experimental

Geltung — eine Auffassung, die ja den wirklichen Tatbestand richtig wiedergiebt — so ist ohnehin schon damit sogar den Kongruenzsätzen als unmittelbar evidenten Sätzen der Boden entzogen. Auch bei der Mechanik ist es sicher eine Täuschung, wenn jemand glaubt, das *Trägheitsgesetz* apriori einsehen zu können. Dass ein sich selbst überlassener Körper seine einmal vorhandene Be-
28 wegung mit gleich|bleibender Geschwindigkeit fortsetzt, das könnten wir durch blosse Ueberlegung oder durch sogenannte *Gedankenexperimente* niemals erkennen, wenn wir es nicht aus der wirklichen Erfahrung wüssten. Auch ist es ja Tatsache, dass *vor Galilei* die *meisten Denker* eine von dem Trägheitsgesetz abweichende Anssicht vertraten.

Sicherlich dürfen nur solche Kenntnisse als a priori in Anspruch genommen werden, aus denen bestimmte durch das Experiment kontrollirbare und in math. Gleichungen fassbare Tatsachen *nicht* gefolgert werden können. Bei der Aufnahme in den apriorischen Bestand ist die *äusserste Vorsicht* am Platze; sind doch viele der früher als apriorisch geltenden[129] Erkenntnisse heute
29 sogar als *unzutreffend* erkannt worden. Das schlagendste Beispiel | dafür ist die Vorstellung von der absoluten Gegenwart. Eine *absolute Gegenwart* giebt es nicht, so sehr wir auch von Kindheit an daran gewöhnt sind, sie anzunehmen, da es sich eben im täglichen Leben nur um *kurze Entfernungen* und *langsame Bewegungen* handelt. Wäre dies anders, so würde sogar Niemand es einfallen, an die absolute Zeit zu glauben. So aber haben sogar so tiefe Denker wie *Newton und Kant* gar nicht einmal daran gedacht, ja garnicht entfernt gezweifelt an der Absolutheit der Zeit. Der vorsichtige Newton formulirte es sogar so krass wie möglich: die absolute wahre Zeit fliesst an sich und vermöge ihrer Natur gleichförmig und ohne Beziehung auf irgend einen Gegenstand. Newton hat damit ehrlich jeden *Rückzug oder Kompromiss* ab-
30 geschnitten und Kant, der kritische Philosoph, | erwies sich hier so garnicht kritisch, indem er ohne Weiteres Newton akzeptirte. Erst Einstein befreite uns definitiv von diesem Vorurteil — und das wird immer eine der gewaltigsten Taten des menschlichen Geistes bleiben — und die allzuweitgehende apriori Theorie konnte schlagender als durch diesen Fortgang der phys. Wiss. nicht *ad absurdum* geführt werden. Die Annahme der absoluten Zeit hat nämlich unter Anderem den Satz von der Addition der Geschwindigkeiten bei Zusammensetzung zur Folge — übrigens an sich ein Satz, der scheinbar an Evidenz kaum überboten werden konnte — und doch ergab sich aus der Zusammenfassung unserer *Erfahrungen* auf den Gebieten der Optik, der Astronomie und der Elektricitätslehre zwingend, dass der Satz von der Addition der Geschwindigkeiten nicht richtig sein kann: es gilt tatsächlich bekanntlich ein anderes kom-
31 plizirteres Gesetz für die Zusammensetzung 2er Geschwindigkeiten.[130] | Wir

---

determination of the Euclidean character of space, see *Hilbert 1916a**, p. 5, (this Volume, p. 85 and its note 10).

[129]"apriorisch geltenden" was corrected from "vor aller Erfahrung bestehenden".

[130]Added on the facing left hand page with pencil:
"Die Behauptung von der Addi. ist eine notwdg. Folge der alten Raum-Zeit-Auffassg; sie

können sagen: in der neueren Zeit ist die von Gaus u. Helmholtz vertretene Anschauung über die empirische Natur der Geometrie zu einem *sicheren Ergebnis der Wiss.* geworden; sie muss heute für alle philos. Spekulationen, die Raum und Zeit betreffen als *fester Anhaltspunkt* dienen. Denn die Einsteinsche Gravitationstheorie macht dies offenkundig: die Geometrie ist nichts als ein Zweig der Physik; die geometrischen Wahrheiten sind in keiner einzigen Hinsicht *anders gestellt* oder *anders geartet* als die physikalischen. So sind z. B. der *Pythagoreische Lehrsatz* und das *Newtonsche Anziehungsgesetz* vom selben Charakter, insofern sie von demselben physikalischen Grundbegriff, dem des Potentials *beherrscht werden.* Aber noch mehr ist für jeden Kenner d⟨er⟩ E⟨insteinschen⟩ Gravitationsth⟨eorie⟩ sicher:[131] diese beiden Gesetze, bisher
scheinbar so verschiedenartig und durch Fernen ge|trennt, das eine ein schon 32
im Altertum bekannter, seitdem auf der Schule überall gelehrter Satz der elementaren Geometrie, das andere ein Gesetz über die Wirkung der Massen aufeinander, sind nicht bloss vom selben Charakter, sondern nur Teile ein und desselben allgemeinen Gesetzes:[132] der Pythagoreische Lehrsatz wird zu einer speziellen näherungsweisen Folge des Weltdifferentialgesetzes:

$$ds^2 = \sum g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu;$$

denn $t = \text{const}$, $z = \text{const}$ liefert $dt = 0$, $dz = 0$ und $g_{11} = 1$, $g_{12} = 0$ (orth. Koordinaten), $g_{22} = 1$ ergiebt

$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

Andererseits wird die *Newtonsche Anziehung zu einer Eigenschaft der Weltgeometrie* denn die Weltgl. gehen über in

$$\triangle g_{44} = 0$$

und diese ergeben | 33

$$g_{44} = \frac{\text{const}}{r}.$$

d. h. wegen der Gl. der geodätischen Linie

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial g_{44}}{\partial x}$$

das Newtonsche Gesetz.

Es konnte kaum *drastischer* die prinzipielle Gleichartigkeit der geom. und der physik. Tatsachen zu Tage treten. Freilich beim üblichen logischen Aufbau

---

ist sehr anschaulich, apriori würde mancher Philos. vielleicht noch heute sagen, aber sie ist durch vielseitige u eindeutige Exp. mit Sicherheit widerlegt.”

[131]“ist für jeden Kenner d. E. Gravitationsth sicher” is interlineated.

[132]The following text, until “das Newtonsche Gesetz”, was deleted (probably for the Zurich version).

und bei unseren gewöhnlichen, täglichen und von Kinderzeiten her geläufigen Erfahrungen gehen die geometrischen und kinematischen Sätze den dynamischen voraus und dieser Umstand erklärt es, wenn man vergass, dass es überhaupt Erfahrungen sind. Wir sehen also: In der Kantschen a priori Theorie sind noch *antropomorphe Schlacken* enthalten, von denen sie[133] befreit werden muss und nach deren Entfernung nur[134] diejenige *apriorische Einstellung* übrig bleibt, die auch zu *rein math. Erkenntniss* nötig ist.

34 Ich habe als Mittelpunkt meiner Aus|führungen die Behauptung aufgestellt, dass die Weltgleichungen wesentlich aus der Erfahrung stammen. Ich glaube soeben gezeigt zu haben, dass sie sicher nicht apriorisch sind.[135] Der Konventionalismus behauptet, dass z. B. über die Gültigkeit der Euklidischen Geometrie nicht von der Erfahrung entschieden werden könne. Nach Poincaré drücken die geometrischen Sätze selbst keine wirklichen Tatsachen aus,
35 sondern müssen vielmehr nur als ein System von Verein|barungen[136] angesehen werden, (durch welche die Tatsachen dargestellt werden) — in derselben Weise wie man Grössen auf ein Maassystem bezieht. *Wenn* man fragt, ob ein Phänomen nach *einem* gewissen geometrischen Axiomensystem möglich, nach *einem anderen* unmöglich sei, ⟨so⟩ ist ⟨dies⟩ nach Poincaré ebensoviel, wie fragen, ob es Längen giebt, die in Metern ausdrückbar sind, aber nicht in Fuss und Zoll. Jeder Satz, so führt Poincaré aus, der in Euklidischer Weise ausdrückbar sei, muss es auch in Nicht-Euklidischer Weise sein und wenn ein Gesetz in der Euklidischen Interpretation wahr sei, so sei es auch in der Nicht-Euklidischen Interpretation wahr. Um diese Meinung Poincarés zu prüfen, setzen wir z. B. den schon oben betrachteten Fall, dass die Erfahrung
36 uns die sämtlichen durch | die Kongruenzsätze ausgedrückten Tatsachen lehre, dass dagegen die Winkelsumme in den aus starren Stäben konstruirten Dreiecken stets $<$ 1 Rechter und erst in Dreiecken von den Dimensionen der Atomabständen nahezu $=$ 1 Rechtem würde. Vergegenwärtigen wir uns den dann obwaltenden eigentlichen *Sachverhalt*.

Nach Poincaré haben wir dann eine Euklidische Geometrie mit gewissen Geraden und Winkeln: wir wollen diese die *Poincaréschen Geraden und Winkel* nennen. Ausserdem haben wir nun gewisse Kurven und Winkelfunktionen, die aus den wirklichen Lagebeziehungen der starren Körper entnommen werden z. B. die *Rotationsaxen*, die *rechten Winkel* etc., diese wollen wir die wahren Geraden u. die wah⟨ren⟩ Winkel nennen. Sie werden bei unserer

[133]“sie” was corrected from “die phys. Erkenntnis”.

[134]The preceding text, starting with “fahrungen sind.” was written on a slip of paper pasted onto the page. The underlying text is illegible.

[135]Deleted: “Demjenigen, der leugnen will, dass die phys. Axiome d. h. die Weltgl. aus der Erfahrung stammen, bleibt, wie ich schon vorhin andeutete, noch eine andere *Ausflucht* offen, nämlich die Meinung, dass es eigentlich garnicht die phys. Axiome d. h. Weltgleichungen sind, die die Naturerkenntniss enthalten. Auf diese Meinung scheint mir das hinauszulaufen, was man als *Konventionalismus* nennt und was in Poincaré den klassischen Vertreter hat.”. On the facing left hand page, roughly at this point Hilbert wrote: “Karnap! Dingler!”

[136]Added by Hilbert with pencil at the top of the page: “Von hier!”

Annahme, die wir von der Wirklichkeit gemacht haben, eine *hyperbolische Nicht-Euklidische Geometrie* ausmachen.[137]

Diese wahren Geraden und Winkel erscheinen dargestellt durch Gleichungen und Funktionen gewisser 3 Parameter, die ihrerseits eine dreidimensionale Punktmannigfaltigkeit mit Poincaréschen Geraden und Poincaréschen Winkeln von der Art erfüllen, dass für sie das ganze begriffliche Fachwerksgerüst der Euklidischen Geometrie besteht. Nun ist es gewiss ein sachgemässes math.
Verfahren, wenn wir zur Darstellung der nicht-Euklidischen dreidimen|sionalen 37
Bewegungen und Lagebeziehungen unserer starren Körper 3 Parameter verwenden; aber es ist weder *sachgemäss*, noch *einfach*, noch *konventionell*, diesen Parametern eine Metrik aufzuerlegen und sei es auch die einfachste, nämlich die Euklidische. Die Euklidische Metrik ist immerhin ein ausgedehntes Fachwerksgerüst und wenn man dasselbe noch so als einfach und anschaulich *veranschlagen* will; auf jeden Fall ist es komplizirter als überhaupt keinerlei Geometrie und keinerlei Metrik. Würde man dennoch, wie es Poincaré will, die Euklidische Metrik für jene 3 Parameter ansetzen, so liefe dies Verfahren darauf hinaus, in das für die Darstellung der wirklichen Welt notwendige Begriffsgerüst — eben das der hyp. Nichteukl. Geometrie — noch ein in
sich geschlossenes Fachwerkstück einzufügen, das mit | der wirklichen Welt 38
keinerlei Korrespondenz hat und vielmehr in dem Gesammtfachwerk nur als *toter abgekapselter Fremdkörper* erscheint. In der Tat werden in der reinen oder angewandten Math. die 3 Parameter einer 3 dimensionalen Mannigfaltigkeit je nach der Natur des Problems sehr verschiedenartig gedeutet und insbesondere vernünftigerweise Euklidisch-metrisch nur dann, wenn den Euklidischen Transformationen in sich irgend welche Phaenomene entsprechen; das ist aber bei dem Poincaréschen Verfahren nicht der Fall. Der Poincarésche Konventionalismus ist meiner Meinung nach in gar keinem Sinne zu rechtfertigen auch nicht wie Einstein einmal concedirt[138] bedingungsweise und „*sub specie aeterni*“.[139] Um vielmehr unser Begriffs-Fachwerk von Poincaréschen

[137] The preceding paragraph was written on the back of p. 36 and marked for insertion at this point by a correction mark. Underneath, the following sentence was added in pencil: “Nicht aus Konvention wählt man Eukl. Geometrie, sondern weil es eben (angenähert) starre Körper giebt und erst recht nicht aus Einfachheit (Oekonomie) weil ja, wenn es nicht (angenähert) starre Körper gäbe, die Eukl. Geometrie nicht blos ein sehr komplizirtes Mittel, sondern sogar überhaupt ganz überflüssig wäre!”

[138] “einmal concediert” was corrected from “will”.

[139] Cf. Einstein’s lecture on “Geometrie und Erfahrung” delivered to the Berlin Academy of Science on 17 January 1921: “... und man fühlt sich zu folgender allgemeinerer Auffassung hingedrängt, welche Poincarés Standpunkt charakterisiert. Die Geometrie (G) sagt nichts über das Verhalten der wirklichen Dinge aus, sondern nur die Geometrie zusammen mit dem Inbegriff (P) der physikalischen Gesetze. Symbolisch können wir sagen, daß nur die Summe (G+P) der Kontrolle der Erfahrung unterliegt. Es kann also (G) willkürlich gewählt werden, ebenso Teile von (P); all diese Gesetze sind Konventionen. Es ist zur Vermeidung von Widersprüchen nur nötig, den Rest von (P) so zu wählen, daß (G) und das totale (P) zusammen den Erfahrungen gerecht wird. Bei dieser Auffassung erscheinen die axiomatische Geometrie und der zu Konventionen erhobenen Teil der Naturgesetze als erkenntnistheoretisch gleichwertig.

39 und anderen Fremdkörpern zu reinigen, möchte ich extra[140] für | dasselbe die ausdrückliche Forderung aufstellen: Unser Fachwerk soll keinen überflüssigen d. h. keinen solchen Bestandteil enthalten, der ohne Beeinträchtigung der Aufgabe des Fachwerkes fortgelassen werden kann. Ich glaube, dass dadurch zugleich die oft erhobene und an sich recht *vage Forderung* der Einfachheit des Begriffsystems angemessen praecisirt worden ist.

Nach Analogie von Poincaré wäre es, als wenn jemand ein Eierkuchenrecept zwischen die Axiome schieben und dann die Bedeutung der Kochkunst
40 für die Logik damit begründen wollte.[141] | ⟨Der⟩ Konv⟨entionalismus⟩ hat heillose Konfusion angestiftet: Die letzte Konsequenz der Poincaréschen Ansicht ist, dass sich überhaupt keinerlei Naturgesetze finden lassen:[142]

Die Verfechter der rein apriorischen sowie die der conventionalen Theorie machen mit Vorliebe gegen den empirischen Charakter der physik. Axiome[143] geltend, dass die Erfahrung niemals zu *genau gültigen Aussagen* gelangen könne. Damit wird die Frage in die[144] Diskussion hineingezogen, ob es genau gültige Naturgesetze giebt. Die Frage nach dem *empirischen Charakter* der Naturgesetze und die nach ihrer *genauen Gültigkeit* sind aber 2 völlig verschieden geartete und von einander unabhängige Fragen; die für ihre Beantwortung dienenden Konstruktionen müssten strenge auseinandergehalten werden. Aehnlich wie oftmals in den kinetischen Theorien z. B. bei Behandlung des 2$^{\text{ten}}$ Wärmesatzes Verwechselung[145] mit den Begriffen *vermutlich* und *wahrscheinlich* geschieht und dadurch ganz unnötige Missverständnisse
41 u. Paradoxieen erzeugt worden sind. Ja der Umstand, dass man | jene Fragen konfundirt hat, macht es psychologisch erklärlich, wie der Irrtum des

Sub specie aeterni hat Poincaré mit dieser Auffassung nach meiner Meinung Recht." *Einstein 1921*, pp. 126f..

[140]"extra" was corrected from "vielmehr".

[141]The preceding sentence was written on a slip of paper that was pasted on the page at this point. Underneath, the following text is still legible:
"Übrigens beruht die Einführung der Euklidischen Metrik, wie sie Poincaré vorsieht ⟨auf?⟩ der Möglichkeit die ⟨Punkte?⟩ in umkehrbar eindeutiger Weise auf die Punkte des Bolyai-Lobatschewskyschen Raumes abzubilden. Da eine solche Abbildung auf die Punkte der elliptischen Geometrie bekanntlich nicht möglich ist, Poincaré aber letztere ebenfalls zulässt, so scheint mir hier auch eine rein math. Unstimmigkeit in den Ausführungen Poincaré's vorzuliegen."

[142]Deleted: "wenn man nur die Zuordnungen zwischen den wirklichen Dingen und den Begriffen irgend eines Fachwerkssystems gehörig verrenke, so müsste doch immer etwas richtiges herauskommen. Und da vereinigen sich nun beiderlei Gegner gegen den Empirismus." On a piece of paper, pasted onto the lower part of the page, Hilbert wrote:
"Poincaré bemüht sich in seinem Buch „Wissensch⟨aft⟩ u⟨nd⟩ Hypoth⟨ese⟩" den Konventionalismus als der Weisheit letzten Schluß uns plausibel zu machen. Seiner Empfehlung möchte ich in jeder Zeile widersprechen. leider hat P⟨oincaré⟩ grosse Konfusion angerichtet. S. 75; S. 76–77.".

[143]"Axiome" was corrected from "Erkenntnis".

[144]The preceding text, starting with "Die Verfechter ..." was written on a separate sheet of paper, pasted on the top of the page.

[145]The beginning of this sentence was corrected from: "gerade wie etwa in meinem gestrigen Vortrage dasselbe".

Konventionalismus entstanden ist. Wenn nämlich z. B. unsere Erfahrung hinsichtlich der Bewegung der starren Körper so ausfallen würde, wie ich es vorhin annahm, indem sich in den aus Stäben konstruirten Dreiecken sich die Winkelsumme < 1 R⟨echter⟩ herausstellte, so wäre in dem Gesammtfachwerk der Begriffe als bezügliches Teilstück das Bolyai-Lobatschefskysche Gerüst für Niemand zweifelhaft und jedenfalls *das Euklidische Schema von vorneherein* ausgeschlossen und math. unmöglich. Wie aber die Dinge bei unserer Erfahrung tatsächlich liegen, wo nur eine geringe Abweichung von dem Euklidischen Schema ins Spiel kommt, besteht die math. sachgemässe und allgemein vorgeschriebene Me|thode gerade darin, die Euklidische Geometrie zu Grunde zu 42
legen und *ihre Variation* zu behandeln. Es kann hierfür als Grund so wenig die Konvention geltend gemacht werden wie etwa die Störungstheorie der Astronomie eine Konvention ist: vielmehr ist uns die Methode der *Störungstheorie* allein[146] durch die Sache selbst wegen der Notwendigkeit der Korrektion des an sich ungenauen oder vielmehr nicht ganz genauen Keplerschen Gesetzes aufgezwungen worden — als die sachgemässe math. Methode.[147]

Die von uns vertretene Meinung verwirft den (unbedingten *Apriorismus* und den) *Konventionalismus*; aber sie entzieht sich trotzdem keineswegs der vorhin aufgeworfenen Frage nach der genauen Gültigkeit der Naturgesetze. Ich möchte diese Frage vielmehr bejahen und zwar in folgendem Sinne. Die einzelnen Naturgesetze sind Bestandteile des Gesammtfachwerkes, das sich aus den Weltgl. axiomatisch | aufbaut. Und die Weltgl. sind der Niederschlag 43
einer langen zum Teil sehr mühsamen und oft durch Irrwege aufgehaltenen experimentellen Forschung und Erfahrung. Wir gelangen dabei zu der Vorstellung, dass wir uns durch fortgesetzte Ausgestaltung und Vervollständigung der Weltgl. asymptotisch einem *Definitivum* nähern. Jedenfalls ist die Annahme, dass ein solches *Definitivum* existirt, derart, dass sie uns nie mit der Erfahrung in Widerspruch bringen kann. Diese Annahme trägt der tatsächlichen Entwickelung der Wiss. Rechnung.[148]

Wir können dies noch etwas schärfer formuliren, wenn wir den Begriff d. 44
relativen Genauigkeit einführen. Wenn ein bestimmtes System von Weltgleich. vorliegt, so soll die Aussage, dass diese Weltgl. in der Wirklichkeit mit *relativer Genauigkeit* gültig seien, bedeuten, dass keine einzige Tatsache vorliegt oder gegenwärtig vorgewiesen werden kann, die mit dem aus den Weltgl. hervorgehenden Begriffsgerüst in Widerspruch steht. Dieser Begriff der relativen Genauigkeit der phys. Axiome für den betreffenden Tatsachenbereich ist ein *wohl definirter Begriff*.[149] Die Idee der Konvergenz aller Weltgl. von relativer Genauigkeit illustrirt dann eine allgemeine Absicht, die ich überhaupt mit

[146]“allein” is interlineated.

[147]“*Absatz!!!*” (interlineated).

[148]Deleted: “und genügt zudem zur Befriedigung unseres Erkenntnisbedürfnisses. Zudem: wenn ein bestimmtes System von Weltgleichungen vorliegt, so soll die und lässt auch freie Bahn dem Optimismus in der Entwicklung der Wiss⟨enschaft⟩.”

[149]Probably for the Zurich version, the remainder of text was deleted and replaced by the following text, marked for insertion at this point by an arrowed line:

meinen Ausführungen verband. Ich habe nämlich mit meinen Ausführungen versucht, einen Rahmen zu finden, innerhalb dessen es möglich ist, auf alle diese hier berührten Fragen allgemeiner philos. Natur eine *eindeutige u. willkürfreie* Antwort geben zu können. | Der Geist, in dem ich zu den geschilderten Einstellungen und Auffassungen gekommen bin, ist der Geist der Zuversicht. Die Vorstellung von der Existenz eines Definitivismus und der asymptotischen Annäherung schliesst in sich, dass jede etwa vorgelegte bestimmte Frage auch einer Antwort fähig ist — und ist also das gerade Gegenteil dessen, was man oft von griesgrämigen Laien und von bedenklichen Philosophen hört und was in dem Du Bois Raymondsche Worte „ignorabimus“ seinen Ausdruck gefunden hat. Sicherlich wenigstens für die leblose Natur möchte ich vielmehr die Ueberzeugung aussprechen

Wir müssen es wissen!
Wir werden es wissen!

“Und die eben aufgestellte Behauptung von der *Konvergenz aller relativen Weltgleich.* ist dann, wenn Sie wollen, nur ein Schlussakkord, in dem meine Ausführungen ausklingen, eine Idee, die wie ich glaube, dem Entwicke⟨lungs⟩gange der Wiss. entspricht und die die Ueberzeugung zum Ausdruck bringt, dass jede sich uns aufdrängende Frage in naturwissenschaftlichem Geiste auch volle Aufklärung einmal muss finden können, so dass wir statt des so oft genannten Duboi Raymondschen „Ignorabimus“ vielmehr sagen wollen

Wir müssen es wissen!
Wir werden es wissen!

Schluss mit Konventionalismus.”

Description of the Text

Collection: SUB Göttingen, *Cod. Ms. D. Hilbert 596.*

Size: Three booklets; page size approx. 21.0 cm ×16.5 cm.

Cover Annotations: The first pages of the three booklets bear the annotations: 'Hamburg / I'; 'Hamburg / II'; 'Hamburg / III / und / Zürich"'.

Composition: The document consists three separate *booklets*. The booklets were made from sheets of paper, folded in the middle and bound together with a thread. The first booklet is composed of two signatures, consisting of 11 sheets, folded as double pages. A single sheet was pasted in following the cover sheet. In addition, this booklet contains three loose sheets laid in between the cover and the first sheet. The second booklet, has one signature sheet consisting of 13 sheets and one sheet pasted in between pages 22 and 25; furthermore, it contains a half sheet (page 20) glued in between pages 19 and 21. In addition, it contains a single loose sheet. The third booklet has two signature sheets consisting of 19 and 5 sheets, respectively. In addition, eight loose sheets are laid in immediately after the cover sheet; the second signature has fallen apart. A number of pages (1–3; 5–8; 10–13) had been tied together using paper clips. Today the clips are broken up and the text on these pages is readable again.

Pagination: The three booklets have been paginated separately. Only the recto (right hand) sides of the double pages have been numbered, in Hilbert's hand with black ink. In the first booklet, the numbering begins only with the first page following the single sheet that was glued in. It runs continuously from 1 to 27. The last two right hand pages and the three loose sheets are not numbered. In the second booklet, the numbering starts with the first recto page after the cover sheet. It runs continuously from 1 to 27, leaving the last recto page unnumbered. The loose page is not numbered. The third booklet shows a twofold numbering: the first eight loose sheets after the cover sheet are paginated independently, the numbers running from 1 to 8. The pagination of the signature sheet begins on the first recto page after the cover sheet and runs from 1 to 45, leaving unnumbered the last two pages.

Original Title: No proper title, but see the introduction, page 378.

Text: The three booklets contain continuous text written in Hilbert's hand with black ink. The first recto page in the booklet entitled "Hamburg I" contains an introduction to all three lectures, indicating the main themes of the forthcoming lectures and their relations to each other. Most corrections of the original text are in pencil. Hilbert corrected and annotated the text of each lecture, in particular the text of the third lecture. The third lecture was reworked for the occasion of his lecture in Zurich. For this occasion he wrote a summary of the first two lectures on eight loose sheets, which he inserted in the third booklet.

On top of the first page of the folded sheet in the first booklet Hilbert has written "Eröffnungsrede gehalten in Hamburg 1901". This part has not been included. The following two pages that are laid in as loose sheets were written in an unknown hand. This text has also not been included. In the third booklet, individual passages of some pages have been pasted over by strips of paper upon which new text was written. A piece of paper laid in shows the text: "Caruso Erinnerungen an Caruso / Paul Stegemann Verlag Hannover / Dolorosa Die Starken (Alletenroman) / S. 176 / Leipziger Verlag G. m. b. H.".

David Hilbert and James Franck

(University of Chicago Library, Special Collections Research Center, James Franck Papers, Box 19: Hertha Sponer's photograph album, Göttingen, 1920-1933, Folder 13)

Chapter 5

Lectures on Radiation Theory and Quantum Theory (1912)

Introduction

The lecture course on radiation theory discusses the theory of blackbody radiation in thermal equilibrium leading to Kirchhoff's law and to Planck's radiation law.

The course, held in summer 1912, is one in a series of related physics courses.[1] For the summer term 1912 and for the winter term 1912/13, Hilbert announced courses on the "mathematical foundations of physics" in the university catalog. The *Ausarbeitungen* of these two lectures are entitled more specifically "Radiation Theory" and "Molecular Theory".[2] The title of "mathematical foundations of physics" served as an umbrella term for Hilbert's interest both in foundational work and physics research. It indicated the expansion of his activities towards physics at this time.

The previous winter, Hilbert announced a lecture course on "continuum mechanics." The *Ausarbeitung* of this course by Erich Hecke is entitled "Kinetic Theory of Gases" (*Hilbert 1911/12**). In the introduction to this lecture course, Hilbert distinguished three approaches to physics (cf. *Hilbert 1911/12**, pp. 1–3). The first approach is purely phenomenological; the second takes the atomic hypothesis as a matter of fact; the third aims at a fundamental theory of matter. His lecture course on radiation theory follows the second approach, as did the earlier course on gas theory. In fact, both courses share similarities. First, both serve as applications of Hilbert's theory of integral equations. His book on this topic, *Hilbert 1912c*, which collected his publications in this field from 1902 to 1910, concluded with a new chapter on gas theory that was also published as a paper at the same time.[3] At the end of *Hilbert 1912c*, he mentioned the application of integral equations to radiation theory, hence pointing to the novelty of this insight.

In addition, both lecture courses are prominent examples of a logical analysis of a complex physical theory. Hilbert investigated the logical structures of theories that combine mechanical, electromagnetic, and statistical aspects.

A third similarity, as in the case of the gas theory,[4] Hilbert's course on radiation theory was close to his research interests and led to presentations and publications after the semester had ended. Hilbert's publication "Foundation of Elementary Radiation Theory" (*Hilbert 1912a*) is similar to his lecture

---

[1] For a complete list of Hilbert's lecture courses, see Hilbert's Lecture Courses, 1886–1934, this Volume, pp. 709–726.

[2] See *Hilbert 1912** and *Hilbert 1912/13**, respectively; see also p. 718 below.

[3] *Hilbert 1912c*, ch. XXII "Begründung der kinetischen Gastheorie", also published as *Hilbert 1912b*.

[4] Hilbert gave a talk with the title "Kinetic Theory of Gases" to the Göttingen Mathematical Society on 19 December, 1911, i.e. during his lecture course on the same subject (*Hilbert 1911**), see *Corry 2004*, p. 454. An extant manuscript (SUB *Cod. Ms. D. Hilbert* 588) under the title "Report on my gas lecture," presumably the notes for this talk will be included in Vol. 4 of Hilbert's *Foundational Lectures*.

at the September 1912[5] annual meeting of the *Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte* in Münster. An amended version of his paper and two further communications followed.[6]

Hilbert's interest in radiation theory is also seen in his earlier collaboration with Hermann Minkowski. Minkowski lectured on heat radiation in the summer term of 1907, and told his audience in the first lecture that this topic is especially interesting one as it is "a confluence (Konflux) of all the most beautiful physical theories," and "a central, however difficult, and most interesting chapter of the whole area of mathematical physics." He proceeded:

> ... nicht bloß an die Physiker wende ich mich mit dieser Vorlesung, sondern in noch höherem Grade an die eigentlich reinen Mathematiker, die nun geneigt sind, sich mehr oder weniger abseits der Gebiete hier zu halten. Es ist gerade meine Absicht, und auch der Herr Professor Hilbert denkt da ähnlich und hat ähnliche Bestrebungen vor, die reinen Mathematiker für die Anregungen zu gewinnen, die der Mathematik von Seiten der Physik zuströmen. Es ist nicht unwahrscheinlich, dass wir in den nächstjährigen Seminaren mathematisch-physikalische Theorien insbesondere gerade die Wärmestrahlung traktieren werden.

This manuscript is found in Hilbert's papers[7] and it was used by Peter Paul Ewald[8] in 1912,[9] but it is unknown whether Hilbert had engaged in this topic at the time of Minkowski's lectures. Minkowski's lectures followed mainly *Planck 1906*, which was a landmark in the development of quantum

[5] *Hilbert 1912a*. The paper was submitted to the Göttingen Academy on August 22, a few weeks before the talk in Münster which was given on September 18. It contains almost all parts of the talk and expands on certain issues. The main differences between the paper and the talk are the following: 1. Hilbert related the presentation to the plans for an upcoming conference on kinetic theories at Göttingen in April 1913 and pledges for attendance. 2. He added some marked passages like that quoted below in the introduction and those given in footnotes 53, 59, and 71 below.

[6] *Hilbert 1913a*, *Hilbert 1913b*, *Hilbert 1914*.

[7] SUB *Cod. Ms. D. Hilbert 707*.

[8] Paul Peter Ewald (1888–1985) studied chemistry in Cambridge before he turned to mathematics in Göttingen in 1906. He took notes for Hilbert's winter 1906/07 lectures on integral and differential calculus. In Munich since 1907, he was a student of Arnold Sommerfeld and finally turned to theoretical physics. His dissertation *Ewald 1912* was finished in his Göttingen year from April 1912 to April 1913, which was an interlude of his Munich period, which lasted until 1921 when Ewald became professor of physics at the technical university in Stuttgart.

[9] See Peter Paul Ewald to Hilbert, April 11, 1912, SUB Göttingen, *Cod. Ms. D. Hilbert 98*, item 1. "Was den Kirchhoffschen Satz betrifft, so ist der Plancksche Beweis der beste mir bekannte. Den Pringsheimschen Beweis bezeichnet Planck selbst als lückenhaft, Wien's Andeutungen im Encyclopädiearticel befriedigen mich wenig. Ich muss aber gestehen, dass ich hier nicht in der Lage bin, mir andere Litteratur anzusehen.
Minkowski, der sich übrigens eng an Plancks Buch anschliesst, gibt in seiner Vorlesung auch den Planck'schen Beweis, speziell S. 39 u.f."

physics. It codified prominently Planck's view but also other views, especially those of Albert Einstein and Paul Ehrenfest, that stood in clear distinction from Planck's attempt to save the classical theory and disregard the discontinuity.[10] In 1913, Hilbert remarked that Planck's book was the motivation to take up the topic of thermodynamic theory of blackbody radiation,[11] which he discussed in his lectures on continuum mechanics in summer 1911.[12]

The first three chapters of the course "Radiation Theory" from summer 1912 repeat rather closely Hilbert's presentation of special relativity given in chapters 9 and 10 of his course "Continuum Mechanics" from summer 1911 (*Hilbert 1911**). Likewise, chapter 4 on electrodynamics and, to a lesser extent, chapter 5 on Born's theory are similar to chapters 11 and 12 of the 1911 course, respectively. Due to the great similarity of chapters 1–4 with material presented in other lectures, these parts are not reproduced here.[13]

In the sixth chapter of the "Radiation Theory" course, Hilbert turns to electron theory, which was viewed at this time as a rival theory to relativity and actually split the Göttingen physics professors.[14] Hilbert neither sides with a strict mechanistic nor with an electrodynamic worldview.[15] Hilbert's electron is an extended electromagnetic object, which accounts for its mass, but it is also a mechanical point particle of the same mass (p. 35). It is used to construct a simple atomic model (p. 36) serving as semi-realistic interpretation of Planck's resonator in chapter 13 (p. 90) where the radiation law is derived. Chapters 7–10 provide the necessary prerequisites. Chapter 11 on the proof of Kirchhoff's law by means of integral equations is the core of the course that gave rise to Hilbert's publications on radiation theory and public and private disputes.[16] The outlook on a kinetic theory of radiation in which an inhomogeneous integral equation becomes the cornerstone in the same manner as Boltzmann's equation for the kinetic theory of gases is not contained in the lectures.[17] Chapter 12 explores various radiation formulas without quanta followed by the last chapter in which Planck's formula is derived and its inevitability is scrutinized.

In his work on radiation theory, Hilbert collaborated with Ewald and Erich Hecke. His "physics assistant" Ewald reported on the physics literature,

---

[10] For further discussion of this point, see *Kuhn 1978*, 125–130, 143–205.

[11] *Hilbert 1913b*, footnote 1 on p. 18.

[12] *Hilbert 1911**, chapter 13: "Thermodynamik im System des Relativitätsprinzipes."

[13] These lecture courses will be included in Vol. 4 of Hilbert's *Foundational Lectures*.

[14] Cf. e.g. Michelson's description of his 1911 visit to Göttingen given in *Michelson Livingston 1973*, 255.

[15] For the prevalent worldviews in physics at the beginning of the 20th century, cf. *Jungnickel and McCormmach 1986*, ch. 24; cf. also *Corry 1999b*.

[16] For historical discussion, see *Schirrmacher 2003a* and *Corry 2004*, ch. 5.3.

[17] The Münster talk closes with the following thesis: "... zu der Gastheorie ist das Maxwellsche Gesetz der Geschwindigkeitsverteilung in diesem Sinne das Analogon zum Kirchhoffschen Strahlungsgesetz!!!"

while his "mathematics assistant" Hecke took notes and prepared the typescript. As a result of this work, Hilbert located and understood major foundational problems in kinetic, radiation, and elasticity theory. He found that his theory of linear integral equations provided a mathematical framework suited to formulate and resolve conceptual gaps in these fields.

In his public lectures and subsequent publications, Hilbert presented his ideas to a wider public. In his 1912 "Vortrag über meine Gasvorlesung" he criticized Ludwig Boltzmann and Hendrik Antoon Lorentz.[18] In his Münster lecture of the same year, Hilbert told his audience:

> ... meine Ausführungen werden, glaube ich, zugleich erkennen lassen, *was mir wenigstens überraschend war, dass die bisherigen theoretischen Beweisversuche garnicht auf dem richtigen Wege waren, ja wie wenig* sie auch nur in den einfachsten Spezialfällen, den ersten und wichtigsten Kirchhoffschen Satz plausibel zu machen im Stande sind.
> (SUB *Cod. Ms. D. Hilbert* 586).

The main target of Hilbert's criticism was Ernst Pringsheim, whose work was linked with this topic more than that of any others.[19] Pringsheim had researched radiation for a long time and published a number of papers in this field, especially on the foundation of Kirchhoff's law.[20] We do not know whether Pringsheim attended the Münster meeting. But Hilbert's paper was discussed in the Breslau physics colloquium in November 1912, and Pringsheim asked Constantin Carathéodory to forward his objections in a letter to Hilbert.[21] In Hilbert's amended version of his first paper on radiation theory, he acknowledged that he had been referred to *Pringsheim 1903c* but criticized Pringsheim for not taking into account the variability of the diffraction.[22] At the same place, Hilbert also stated that Planck's book did not give a convincing proof of Kirchhoff's law.[23] While a polemical exchange resulted between Pringsheim and Hilbert,[24] Planck's response to Hilbert's criticism was different. In a number of letters he discussed the issue in detail and, as he adopted Hilbert's way of axiomatization, Hilbert learned what he had

[18]SUB Göttingen, *Cod. Ms. D. Hilbert* 588, p. 3.

[19]Ernst Pringsheim (1859-1917), a student of Hermann Helmholtz in Berlin, worked on experimental investigations of blackbody radiation in collaboration with Otto Lummer at the Physikalisch-Technische Reichsanstalt from 1893 to 1904. He became professor of physics at the University of Breslau in 1905.

[20]See, e.g., *Pringsheim 1901a*, *Pringsheim 1901b*, *Pringsheim 1903c*, *Pringsheim 1903b*, *Pringsheim 1904*.

[21]Constantin Carathéodory to David Hilbert, 12 December, 1912, SUB *Cod. Ms. D. Hilbert* 55, item 4.

[22]*Hilbert 1913a*, footnote 1 on p. 16 and footnote 2 on p. 18.

[23]*Hilbert 1913a*, footnote 1 on p. 18.

[24]*Pringsheim 1913a*, dated April 17, refers to *Hilbert 1913a* and *Pringsheim 1913b*, dated July 29, refers to *Hilbert 1913b*, dated July 19.

missed in axiomatizing Planck's approach.[25] As a result, Hilbert took back his objections in a footnote in his second paper on radiation theory.[26] Almost a year later, the dispute with Pringsheim was closed with a one-page long footnote in Hilbert's third and last paper on radiation theory.[27] Max Born looking back on this dispute in 1922 wrote somewhat emphatically:

> [...] diese letzte Abhandlung Hilberts über das Gebiet der elementaren Strahlungstheorie wird immer als die strengste und durchsichtigste Darstellung dieser Theorie zu gelten haben. (*Born 1922*, p. 91)

The fact that the physicists never took up Hilbert's work was attributed by Born to the "deeper problems" of radiation theory, i.e. the problems associated with the law of spectral energy distribution of blackbody radiation were considered far more important:

> Denn hier ergaben sich Zusammenhänge mit den letzten Prinzipien der Physik, die heute gerade durch die Erforschung der Strahlungsgesetze in einer Wandlung begriffen sind. Auch Hilbert hat niemals die Bedeutung der Kirchhoffschen Strahlungsgeometrie überschätzt, sondern seit seinem ersten Eindringen in die Gedanken der modernen Physik den Schwerpunkt der Fragestellung in den Problemen der Statistik und der Quanten gesehen. (*Born 1922*, p. 91)

Arne Schirrmacher

[25] Letters from Planck to Hilbert from April 1 and 15, 1913, SUB *Cod. Ms. D. Hilbert 308A*.
[26] *Hilbert 1913b*, p. 413,
[27] *Hilbert 1914*, pp. 276–277.

Strahlungstheorie

Inhaltsverzeichnis[1]

[1]The table of contents was handwritten in black ink by an unknown hand; chapters in italics are not reproduced (see Chapter 5, the Introduction, note 13).

1

Einleitung.

Die Beschäftigung mit den Grundlagen einer Wissenschaft hat nicht nur an sich Bedeutung, sondern führt meist zu neuen fruchtbaren Vertiefungen und beleuchtet insbesondere die Grenzgebiete der verschiedenen Disziplinen. Bisher hat man axiomatische Untersuchungen vornehmlich in den rein mathematischen Disziplinen durchgeführt, so in der Geometrie, der Wahrscheinlichkeitsrechnung, der Logik (Logikcalcül), der Mengenlehre.[2] Was die Physik anbetrifft, so liegen für die Punktmechanik ausführliche Untersuchungen vor, einerseits von Hertz, andererseits von Boltzmann.[3] Aber auch in der Continuumsmechanik sind schon Anfänge vorhanden, jedoch immer nur vom Standpunkt der reinen Phänomenologie, so für Hydrodynamik und Thermodynamik und Strahlungstheorie.[4]

Nun kommen wir aber zur eigentlichen Physik, welche sich auf den Standpunkt der Atomistik stellt.[5] Und da kann man sagen, dass keine Zeit günstiger ist und keine mehr dazu herausfordert, die Grundlagen dieser Disziplin zu untersuchen, wie die heutige. Zunächst wegen der Zusammenhänge, die man heute in der Physik entdeckt hat, wovon man sich früher nichts hätte träumen lassen: dass die Optik nur ein Kapitel der Elektrizitätslehre ist, dass Elektrodynamik und Thermodynamik dasselbe sind, dass auch die Energie Trägheit besitzt, dann dass auch in der Chemie (Metachemie, Radioaktivität)
2 physikalische Methoden in den Vordergrund treten etc.[6] | Vor allem aber die Atomtheorie, das Prinzip der Diskontinuität, welches sich heute immer schärfer herausschält und keine Hypothese mehr ist, sondern, wie die Lehre des Kopernikus, eine durch das Experiment bewiesene Tatsache.[7]

---

[2] Cf. the respective sections of Hilbert's course 'Logische Prinzipien des mathematischen Denkens' from 1905 (*Hilbert 1905**).

[3] *Hertz 1894*, *Boltzmann 1897*.

[4] Cf. the respective sections of Hilbert's course 'Logische Prinzipien des mathematischen Denkens' from 1905 (*Hilbert 1905**) on hydrodynamics and thermodynamics. For radiation theory Hilbert may refer to Kirchhoff's reformulation of *Kirchhoff 1860* in *Kirchhoff 1862a* where he distinguished carefully between assumptions (§ 1), definitions (§ 2), and the theorem (§ 3) to be derived from the former.

[5] According to the introduction of Kinetische Gastheorie (*Hilbert 1911/12**) where Hilbert distinguishes between three different approaches, here approach B is chosen.

[6] Hilbert alludes here to the the electromagnetic understanding of light by Maxwell and the atomistic explanation of optical properties by use of electron theory by Lorentz in the second half of the 19th century. The bold identification of electrodynamics and thermodynamics may refer to the increasing importance of the thermodynamical treatment of radiation; Hilbert had discussed this issue already in *Hilbert 1911**, ch. 13. The remaining allusions are to the theory of relativity and new methods of physical chemistry like those his friend Walther Nernst developed.

[7] The evidence for discontinuity at the time of the beginning of the summer term was still disputable. Woldemar Voigt, the leading Göttingen physicist at this time, explained at his address on the occasion of the anniversary celebration of the university in June 1912 still the fruitlessness of the atomistic approach in explicit terms. (*Voigt 1912*, p. 22.) The Laue experiment of the X-ray diffraction on crystals was reported by Arnold Sommerfeld only in July 1912.

Naturgemäss ist der atomistische Standpunkt am klarsten und bestimmtesten in der kinetischen Gastheorie zur Geltung gekommen, wo er auch wohl am ehesten formuliert worden ist.[8] So ist auch die systematische Begründung, welche ich in der Vorlesung des vorigen Semesters zu geben versuchte, erfolgreich gewesen.[9] Ich habe gezeigt, dass das wesentliche mathematische Hilfsmittel für die kinetische Gastheorie die Theorie der linearen Integralgleichungen ist, welche in den letzten Jahren auch in der reinen Mathematik ausführlich behandelt worden ist.[10] Mit diesem Hilfsmittel gelingt die vollständige und systematische Begründung der niederen Teile der kinetischen Gastheorie. Allein schon die Fortsetzung, die van-der-Waals-sche Theorie bietet erhebliche Schwierigkeiten,[11] und ich habe mich daher entschlossen, zunächst die neuere Strahlungs- und Quantentheorie ähnlich weit zu führen.[12] Die physikalischen Vorgänge spielen sich im Raume ab. Das Denken aber geschieht in Begriffen. Die Verbindung von Begriffen wird durch die Formel geleistet. So kommt es, dass das physikalische Denken seinen definitiven Ausdruck in der mathematischen Formel findet. „Mathematisch" deutet hier nur die Tatsache der absoluten Klarheit an.

Die Sprache nun, die am direktesten vom Raume zur Formel führt, ist 3
die Vektoranalysis. Ich erinnere nur an den bekannten Begriff des räumlichen Vektors mit seinen drei Komponenten, und die mannigfachen Verknüpfungsregeln, die man zweckmässig definiert. Das Wesentliche bei diesen Definitionen ist immer, dass sie unabhängig von dem zugrundegelegten rechtwinkligen Koordinatensystem sind, eine Forderung, die ihren mathematischen Ausdruck darin findet, dass nur solchen Kombinationen vektorieller Komponenten eine physikalische Bedeutung zukommt, welche bei allen Transformationen des Ausdrucks

$$x^2 + y^2 + z^2$$

in sich selbst unverändert bleiben.

Aber die physikalischen Vorgänge spielen sich auch in der Zeit ab. Und es ist eine der Grundvorstellungen der neueren Physik, dass die Zeit als vierte Koordinate den drei räumlichen Koordinaten völlig gleichberechtigt an die Seite tritt.

Dementsprechend hat man nun in einer vierdimensionalen Mannigfaltigkeit eine ähnliche Vektorsprache einzuführen, wie das seit langem in dem

[8] Cf. introduction to *Hilbert 1911/12**, pp. 2–3.

[9] *Hilbert 1911/12**.

[10] For a summary of Hilbert's work on integral equations cf. *Hilbert 1910*, p. 595–618, and *Hilbert 1912c*.

[11] Hilbert discussed the van-der-Waals equation in the lectures of the following term, cf. *Hilbert 1912/13**. On the problems of a rigorous derivation of the van-der-Waals equation and its validity cf. *Boltzmann 1898*, p. 3 f., p. 12 f. und 138 ff.: "Leider "muss van der Waals auch diese mathematische Strenge in einem Punkte aufgeben, der sich bisher nicht durch Rechnung bewältigen liess." (p. 4)

[12] In a sense Hilbert takes up an old programm that Minkowski announced in his 1907 lectures on heat radiaton for seminars with Hilbert; see introduction to this typescript.

dreidimensionalen Raum geschieht. Diese „Weltvektoranalysis“ soll der Gegenstand des nächsten Kapitels sein.

1. Kapitel.
Vektoranalysis in der vierdimensionalen Welt.

(...)[13]

2. Kapitel.
Das Relativitätsprinzip.

(...)[14]

3. Kapitel.
Die physikalischen Grundbegriffe in der Relativitätstheorie.

(...)[15]

4. Kapitel.
Elektrodynamik.

(...)[16]

[13] This chapter reproduced mainly chapter 9 of *Hilbert 1911** with the same title. Hilbert now added in pencil “Vgl. hierzu Vorl. Grundl. d. Physik 1916 S. 45–56.” (i.e. *Hilbert 1916a**, see this Volume, pp. 110–119).

[14] This chapter reproduced mainly chapter 8 of *Hilbert 1911** with the same title.

[15] This chapter reproduced mainly chapter 10 of *Hilbert 1911** which there has the title ‘Die Stellung der physikalischen Grundbegriffe in der Relativitätstheorie’.

[16] This chapter reproduced mainly chapter 11 of *Hilbert 1911** with the same title.

5. Kapitel: 18

Der Bornsche starre Körper.

Vgl.

Born, Ann. d. Phys. Bd. 30 (1909).[17]

Herglotz, Ann. d. Phys. Bd. 31 (1910)[18]

und

Kap. 12 der Vorlesung von D. Hilbert im S.S. 1911.[19]

Verläuft die Bewegung des starren Körpers nur in einer Dimension, so 19
kann man die Bewegungsgleichungen direkt hinschreiben.[20] Es ist

$$\begin{aligned} x &= -u\big(w(p)-\xi\big) + upw'(p), \\ y &= \eta, \\ z &= \zeta, \\ t &= -p\big(w(p)-\xi\big) + u^2 w'(p). \end{aligned} \qquad u = \left|\sqrt{1+p^2}\right|, \tag{25}$$

Hierin bedeuten ξ, η, ζ die Parameter, die das einzelne Teilchen individualisieren, p den Parameter, der längs der Weltlinien variiert und $w(p)$ ist eine willkürliche Funktion von $p, w'(p)$ ihre Ableitung.

Für $p = 0$ ist

$$x = \xi + \text{const.}, \quad t = \text{const.} = t_0, \quad y = \eta, \quad z = \zeta.$$

ξ, η, ζ bedeuten also im wesentlichen die Koordinaten des Teilchens zur Zeit $t = t_0$.

Bezeichnen wir mit einem Akzent die Differentiation nach p, bei konstantem ξ, so ist

$$\begin{aligned} x' = \frac{dx}{dp} &= -u'(w-\xi) - uw' + uw' + u'pw' + upw'', \quad \text{oder wegen} \quad u' = \frac{p}{u} \\ &= \frac{p}{u}\left(-w + \xi + pw' + u^2 w''\right) = \frac{p}{\left|\sqrt{1+p^2}\right|}\big(\xi - w + pw' + u^2 w''\big), \end{aligned}$$

$$\frac{dt}{dp} = \xi - w + pw' + u^2 w'',$$

folglich

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{p}{u}$$

$$d\tau = \sqrt{1 - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2}\, dt = \frac{1}{\pm u}\, dt$$

[17] *Born 1909a.*

[18] *Herglotz 1910.*

[19] *Hilbert 1911*.*

[20] On page 18 verso is a drawing of an empty coordinate system with axes *xyzt*.

Da aber dt und $d\tau$ dasselbe Vorzeichen haben müssen, und u nach der Definition den positiven Wert von $\sqrt{1+p^2}$ bedeutet, so ist

$$\frac{dt}{d\tau} = u$$

und

$$\frac{dx}{d\tau} = p.$$

20 Also ist p die x-Komponente der Vierergeschwindigkeit. Im x-l-Raum[21] bedeutet $p =$ const. in Gleichung (25) eine Schar von geraden Linien, welche orthogonal zu den Weltlinien stehen. D. h. $p =$ const. gibt diejenigen Punkte der Weltlinienschar an, welche als gleichzeitig zu betrachten sind in einem solchen Bezugssystem, wo der Körper ruht.

Zur Zeit, wo $p = 0$ ist, ist $t = t_0$, d. h. zur Zeit $t = t_0$ ruht der ganze Körper, alle Weltlinien schneiden die x-Achse orthogonal und die Dichte der Zeit $t = t_0$ ist identisch mit der Ruhdichte bei $t = t_0$. (Vgl. auch die andere Darstellung der Bewegung auf Seite 29ff.)[22]

6. Kapitel.

Die Schwingungsgleichung für ein starres Elektron.

Die Maxwellschen Grundgleichungen gestatteten, das elektromagnetische Feld zu berechnen, wenn die Bewegung der Elektrizität bekannt war. Zur vollständigen Berechnung aller Zustandsgrössen des Feldes sind daher noch weitere Gleichungen, welche die Dynamik enthalten, notwendig.

Zu diesem Zwecke führen wir den Kraftvektor

$$f = -r \cdot M \tag{26}$$

ein. Dieser Vierervektor hat in einem System, wo das elektrische Teilchen gerade ruht, die Komponenten

$$\varrho\mathfrak{E}_x, \varrho\mathfrak{E}_y, \varrho\mathfrak{E}_z, 0;$$

21 seine drei ersten Komponenten stimmen also mit dem Dreier|vektor überein,

---

[21] It should be "x-t-Raum".

[22] The preceding sentence was added in black ink by an unknown hand, see the Description of the Text.

den man in der alten Theorie als den auf die Elektrizitätsmenge ϱ wirkende elektrische Kraft bezeichnete.[C]

Die dynamischen Grundgleichungen des Feldes sprechen wir nun in folgender Form aus: In jedem Augenblick ist in jedem Punkte die Summe aller Kräfte gleich Null. Dies ist das Analogon des Satzes über die freie Bewegung in der Mechanik: Trägheitskraft + äussere Kraft gleich Null.

Machen wir nun die Hypothese, dass die Elektrizität ein vollkommen frei bewegliches Medium ist, so würden die dynamischen Gleichungen lauten:

$$r \cdot M = 0.$$

Das ist aber nicht die Auffassung der modernen Elektronentheorie.[24] Diese nimmt vielmehr an, dass die Elektrizität sich bewegt wie ein Schwarm kleiner endlich ausgedehnter Körperchen, welche Elektronen genannt werden. Die Punkte eines Elektrons können sich aber nicht beliebig bewegen, sondern sie sind an bestimmte Bedingungen gebunden, etwa wie in der Mechanik die Koordinaten der Punkte eines absolut starren Körpers Bedingungsgleichungen erfüllen müssen, welche aussagen, dass die Entfernung je zweier Punkte bei der Bewegung unverändert bleibt.

Diese Bedingungen hat man sich physikalisch durch innere Kräfte $k^{(i)}$ realisiert zu denken, deren Grösse sich ähnlich wie in der Mechanik durch die Methode der Lagrangeschen | Faktoren bestimmen lässt. Die dynamischen 22
Gleichungen lauten dann:

$$f + k^{(i)} = 0.$$

Nun machen wir über den Bau des Elektrons die denkbar einfachste Annahme, welche sich in der Relativitätstheorie überhaupt machen lässt:

[C] Vermöge d. Maxwellschen Gleichungen u. auf Grund der Formeln (9), (10) kann man f durch den Welttensor $\sigma = \frac{1}{2}\{(M \times M) - (M^* \times M^*)\}$ in der Gestalt

$$f = \operatorname{div} \sigma$$

darstellen. Die auf den Raum bezüglichen 3×3 Elemente von σ heissen die Maxwellschen Spannungen.[23]

[23] The footnote was added in ink. The equations (9) and (10) appear in Chap. 1 on p. 6 and read $\Sigma = \frac{1}{2}\{(F \times F) - (F^* \times F^*)\}$ and $\operatorname{Div} \Sigma = (\operatorname{Div} F) \cdot F - (\operatorname{Div} F^*) \cdot F^*$, respectively. Here F denotes an antisymmetric tensor of second rank (‘Sechservektor’) and F^* its dual; see also equations (76) and (77) in *Hilbert 1911** which reduce to these equations for $G = F$.

[24] For an overview of different contemporary theories of the electron, see *Jungnickel and McCormmach 1986*, 227–245. A concise contemporary account is *Born 1912*, §3. Theories advanced in Göttingen are those of Wiechert (1894) and Abraham (1902 ff.). Particularly influential was *Abraham 1905*, 2. edition 1908 (*Abraham 1908*), cf. Hilbert’s reference to this book below on p. 54. Further publications on electron theory that Hilbert knew are *Lorentz 1895* (from the 1905 seminar), *Lorentz 1909*, *Born and Minkowski 1910*, *Baedeker 1911*. The latter are cited in his own 1913 course on electron theory (*Hilbert 1913**).

Das Elektron soll sich wie ein Bornscher starrer Körper bewegen, welcher im Ruhezustande Kugelgestalt besitzt.[25]

Auf Grund dieser Annahme soll jetzt die Dynamik des Elektrons weiterentwickelt werden.

Zu diesem Zwecke bedenken wir, dass sich der Konvektionsstrom der Elektrizität aus seinen Bestandteilen zusammensetzen lässt. Es ist der gesamte Strom:

$$\varrho\mathfrak{v} = \varrho_1\mathfrak{v}_1 + \varrho_2\mathfrak{v}_2 + \dots,$$

wenn wir mit Indizes $1, 2, \dots$ die auf die einzelnen Elektronen bezüglichen Grössen bezeichnen. Liegen die Elektronen alle so, dass sie keinen Punkt gemeinsam haben, so ist in dem Raum ausserhalb der Elektronen jedes $\varrho_i = 0$, also auch der gesamte Strom gleich Null. Für einen Punkt im Innern etwa des ersten Elektrons sind $\varrho_2 = \varrho_3 = \cdots = 0$, während ϱ_1 hier von Null verschieden ist. Da aber die Elektrizität nicht wie die materielle Masse undurchdringlich ist, so können die einzelnen Elektronen auch durcheinander hindurch fliegen,[26] und die in einem solchen Augenblick herrschende Dichte ϱ ist gleich der Summe der Partialdichten $\varrho_1 + \varrho_2 + \dots$ in dem betreffenden Punkte, während sich
23 der Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{v}$ gemäss | der obigen Formel aus den $\mathfrak{v}_i$ berechnet. Der Viererstrom ist also jedenfalls gleich[27]

$$r = r_1 + r_2 + \dots \tag{28}$$

Die an einem Volumelemente des i-ten Elektrons angreifende Kraft ist

$$f_i = -r_i M. \tag{29}$$

Die dynamischen Gleichungen sagen aus, dass die innere Kraft plus f_i gleich Null ist. Wir machen es nun ähnlich wie in der Mechanik, indem wir den Begriff der resultierenden Kraft einführen. Wenn $f(xyzt)$ irgend eine Viererkraft ist, welche an jedem Volumelement eines Bornschen starren Körpers angreift, so nennen wir „resultierende Kraft" das Integral:

$$\iiint f \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{1-\mathfrak{v}^2}}$$ [28]

wobei zu integrieren ist über eine Ebene im R_4, welche die Weltlinien der Punkte des Körpers orthogonal schneidet. Diese Integration bedeutet nur, dass man sich erst ein Bezugssystem $x'y'z't'$ so gewählt denkt, dass alle Punkte des

[25] Cf. chapter 5 above. For a discussion of the relevant literature dealing with the problem of relativistic rigidity, cf. *Pauli 1921*, §45; see also *Maltese and Orlando 1995*.

[26] This property corresponds to the electromagnetic view (particles *of* electricity, not material carriers). For contemporary experimental tests and their interpretation cf. e.g. Lenard's work on penetrating cathode rays of 1903 (*Lenard 1903*, in particular § 114).

[27] There is no equation (27) in the text.

[28] To the right of the formula added in pencil: "$= \iiint f\, \widetilde{dV}$".

starren Körpers zu einer Zeit t' in diesem Bezugssystem ruhen. Eine solche Wahl des Bezugssystems ist, wie gezeigt, immer möglich. Dann integriert man über alle $x'y'z'$ bei festem t'. Man drückt dies so aus: Man hat das Integral über die „Ruhgestalt“ des Körpers zu erstrecken. Wenn man daher in jedem einzelnen Punkt der Weltlinien die Geschwindigkeit v als Funktion $v(x\ y\ z\ t)$ sich gegeben denkt, so ist über die Oberfläche im R_4 zu integrieren, welche durch die Gleichung:

$$v_x = \text{const.} \tag{29a}$$

definiert ist. (Auf ihr ist eo ipso auch v_y und v_z ebensowie v_t[29] constant). 24
Bezeichnet man das Element dieser Oberfläche mit dS, so kann man das obige Integral in der invarianten Form[30]

$$\iiint f(x\ y\ z\ t)\, dS$$

schreiben. Dieses Integral ist nur Funktion der Konstanten in (29a).

Nun machen wir über die inneren Kräfte bei starren Körpern die Annahme, dass ihre Resultierende gleich Null ist; dann endlich lauten die dynamischen Gleichungen für das Elektron:

$$\int f_i\, dS_i = 0$$

oder

$$\iiint r_i M \frac{dx\, dy\, dz}{\sqrt{1-\mathfrak{v}_i^2}} = 0, \tag{30}$$

wobei das Integral über die Ruhgestalt des i-ten Elektrons zu erstrecken ist.[31]

Dies sind in Wirklichkeit für jedes i vier Gleichungen. Wir wollen noch sehen, dass die letzte eine Folge der drei ersten Gleichungen ist. Es ist nämlich allemal der Vierervektor r zu dem Produkt $r \cdot M$ orthogonal, oder da r_i sich nur um einen skalaren Faktor von v_i unterscheidet, es ist[32]

$$v_t f_t = v_x f_x + \cdots + v_z f_z$$

Da nun v bei der Integration nach dS konstant bleibt, und $v_t \neq 0$, so folgt in der Tat, dass die vierte Gleichung (30) jedesmal eine Folge der drei ersten ist.[33]

Wir haben nun gerade so viel Gleichungen wie Unbekannte. Da der starrer Körper nur drei Freiheitsgrade hat, so ist | seine Bewegung durch drei 25

[29]“ebensowie v_t” was interlineated in pencil.

[30]In the following expression S was replaced by $\overline{V}$ in pencil.

[31]Added in the right margin in pencil: “$dV = dx\,dy\,dz \qquad d\overline{V} = \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{1-\mathfrak{v}_1^2}}$”. In the preceding formula, “$dx\,dy\,dz$” was changed in pencil to “dV”.

[32]Written in the left margin in pencil: “$v_t = \frac{1}{\sqrt{1-\mathfrak{v}^2}}$”.

[33]On the verso of page 24, the following equations were written:

$$q = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{r(x,y,z,t)}{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2+(t-t_1)^2}}\, dx_1\, dy_1\, dz_1$$

Funktionen einer Variabeln eindeutig bestimmt. Und die dynamischen Gleichungen (30), von denen gerade drei unabhängig sind, haben auch die Form: drei Funktionen ein und derselben Variabeln sollen gleich Null sein für alle Werte dieser Variabeln.

Es ist nun noch zweckmässig, um die dynamischen Gleichungen besser zu übersehen, sich von der Kraft folgende Vorstellung zu bilden: Man bedenke, dass die Maxwellschen Gleichungen linear in M sind. Integriert man daher das System

$$\operatorname{div} M_i = -r_i, \quad \operatorname{div} M_i^* = 0$$

unter denselben Randbedingungen wie das ursprüngliche, so sieht man, dass

$$M = M_1 + M_2 + \dots$$

Wir können daher das Feld mit dem elektromagnetischen Vektor M_i als das Feld bezeichnen, welches von dem i-ten Elektron erzeugt wird. Ganz entsprechend ist der Kraftvektor auf das i-te[34] Elektron die Summe

$$f_h = -r_h \cdot M = -r_h \cdot M_1 - r_h \cdot M_2 - \dots$$

gleich der Summe der Kräfte, welche von den einzelnen Elektronen auf das i-te Elektron ausgeübt werden. Es erscheint also auch eine Kraft, welche ein Elektron auf sich selbst ausübt. Die Resultierende derselben, z. B.

$$-\int r_1 \cdot M_1 \cdot dS_1$$

bietet nun die weitgehendsten Analogien mit der Trägheitskraft der gewöhnlichen Mechanik dar. Wir werden nachher sehen, dass für kleine wenig veränder-
28 derliche Beschleunigungen |[35] die resultierende Kraft eines Elektrons auf sich selbst die Form hat

$$-\text{const.}\,\frac{dv}{d\tau},$$

sodass man dem Elektron Trägheit zuschreiben muss, obwohl es keine materielle Masse besitzt.[36]

Nun wollen wir die Berechnung durchführen. Wir setzen voraus, dass die Punkte des Elektrons nur Bewegungen parallel zur x-Achse ausführen, und wollen die Kraft berechnen, welche das Elektron auf sich selbst ausübt, wobei wir annehmen:

---

and

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 + (t - t_1)^2 = 0.$$

[34] Here and in the following equation, indices "i" were replaced with "h" in pencil.

[35] There are no pages numbered 26 or 27.

[36] The view that the inertial mass of the electron was exclusively of electromagnetic origin was a central claim of the 'electromagnetic world view', see *Wiechert 1894*, *Wien 1901*, *Abraham 1902a*, and *Lorentz 1909*.

1) Die Geschwindigkeit ist um einen festen Betrag kleiner als die Lichtgeschwindigkeit.

2) Die Dimensionen des Elektrons sind kleine Grössen.

3) Die Beschleunigung soll klein sein.

Wir haben also folgende Gleichungen:

$$\begin{cases} \operatorname{div} M = -\varrho_0 v, \quad \operatorname{div} M^* = 0 \qquad\qquad \text{und die Kraft} \\ k = -\displaystyle\iiint \varrho_o (v \cdot M) \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{1-\mathfrak{v}^2}} = -\iiint \varrho (v \cdot M)\, dx\,dy\,dz, \end{cases} \tag{31}$$

wobei diese letzten Integrale über die Ruhgestalt des Elektrons zu erstrecken sind. Führen wir hier unsere Vorraussetzung

$$v_y = v_z = 0$$

ein, so wird

$$k_x = \iiint \varrho \frac{\mathfrak{E}_x}{\sqrt{1-\mathfrak{v}^2}}\, dx\,dy\,dz, \qquad k_t = \iiint \varrho \frac{\mathfrak{v}_x}{\sqrt{1-\mathfrak{v}^2}} \mathfrak{E}_x\, dx\,dy\,dz. \tag{32}$$

Führen wir nun weiter den Ausdruck von $\mathfrak{E}$ durch das Potential q ein, so ist 29

$$M_{xl} = -i\mathfrak{E}_x = \frac{\partial q_l}{\partial x} - \frac{\partial q_x}{\partial l}$$
$$\mathfrak{E}_x = -\frac{\partial q_t}{\partial x} - \frac{\partial q_x}{\partial t}$$

und folglich

$$k_x = -\iiint \frac{\varrho_0}{\sqrt{1-\mathfrak{v}^2}} \left(\frac{\partial q_t}{\partial x} + \frac{\partial q_x}{\partial t} \right) dx\,dy\,dz. \tag{33}$$

Hierbei ist dann noch zu setzen nach Gleichung (24)[37]

$$\begin{aligned} q_x &= \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\overline{\varrho}\,\overline{v}_x}{(\overline{x}-x)\overline{v}_x - (\overline{t}-t)\overline{v}_t} \bigg|_{h=0} d\overline{\xi}\, d\overline{\eta}\, d\overline{\zeta}, \\ q_t &= \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\overline{\varrho}\,\overline{v}_t}{(\overline{x}-x)\overline{v}_x - (\overline{t}-t)\overline{v}_t} \bigg|_{h=0} d\overline{\xi}\, d\overline{\eta}\, d\overline{\zeta}. \end{aligned} \tag{34}$$

[37] Equation (24) appears in chapter 4 on p. 18. The relevant passage reads: ‘Das Ergebnis der etwas schwierigen Rechnung, welche sich u.a. bei Born, Ann. d. Phys. Bd. 30 p. 31 ff. ausgeführt findet, ist schliesslich

$$q = \frac{1}{4\pi} \iiint \overline{\varrho}^* \left[\frac{\overline{v}}{(\overline{x}-x)\overline{v}_x + \cdots - (t-\overline{t})\overline{v}_t} \right]_{h=0} d\overline{\xi}\, d\overline{\eta}\, d\overline{\zeta} \tag{24}$$

Hier bedeutet ϱ^* den Anfangswert der Dichte ϱ, d. h. $\varrho(\xi, \eta, \zeta, 0)$ und zu integrieren ist über denjenigen Teil des $\overline{\xi}$-$\overline{\eta}$-$\overline{\zeta}$-Raumes, wo $\varrho(\overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{\zeta}, 0)$ von Null verschieden ist.’ The reference is to *Born 1909a*.

Die Bewegung des starren Elektrons denken wir uns nun nicht durch die Gleichung (25) von Born dargestellt, sondern in symmetrischer Weise:

Wir verstehen unter τ die Eigenzeit des Mittelpunktes des Elektrons; durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} x &= \alpha(\tau), \\ y &= 0, \\ z &= 0, \\ t &= \beta(\tau), \end{aligned} \qquad \text{wobei} \quad \alpha'^2 - \beta'^2 = -1,$$

werde die Bewegung dieses Punktes dargestellt; dann liefern die Gleichungen

$$\begin{aligned} x &= \alpha(\tau) + \xi\beta'(\tau), \\ y &= \eta, \\ z &= \eta, \\ t &= \beta(\tau) + \xi\alpha'(\tau), \end{aligned} \qquad \alpha'^2 - \beta'^2 = -1, \tag{35}$$

die Bewegung aller Punkte. $\xi = \eta = \zeta = 0$ ist die Weltlinie des Mittel-
30 punktes und $\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$ ergibt sich hieraus als die Ruh|entfernung eines beliebigen Punktes vom Mittelpunkt, die, wie es sein muss, im Verlauf der Bewegung konstant bleibt. Die Parameter τ und ξ sind invariant bei Lorentz-Transformationen. Man findet weiter[38]

$$v_x = \alpha', \quad v_t = \beta'.$$

Es ist nun unsere Aufgabe, die Kraft k_x, welche durch Einführung der Variabeln $\xi\tau$, unter dem Integral eine reine Funktion von τ wird, als Funktion von α, β und ihren Ableitungen auszudrücken, um dann aus der dynamischen Gleichung: Summe aller Kräfte gleich Null, eine Differentialgleichung für die unbekannte Funktion α zu erhalten.

Zu diesem Zwecke transformiere man zunächst alles in die Variabeln ξ, η, ζ, τ; dann wird

$$\begin{gathered} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \beta', \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = -\alpha' \\ \frac{\partial \tau}{\partial x} = -\frac{\alpha'\beta'}{\beta' + \alpha''\xi}, \quad \frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{\beta'^2}{\beta' + \alpha''\xi} = \frac{\alpha'\beta'}{\alpha' + \beta''\xi}. \end{gathered} \tag{36}$$

Ferner

$$\varrho \, dx \, dy \, dz = \varrho_0 \, d\xi \, d\eta \, d\zeta.$$

Weiter setzen wir wegen $\alpha'\alpha'' - \beta'\beta'' = 0$:

$$\alpha'' = \mu\beta', \quad \beta'' = \mu\alpha', \quad \text{sodass} \quad \mu^2 = \alpha''^2 - \beta''^2.$$

[38] The preceding three words were added in ink.

μ ist also ein Skalar, der Betrag der Beschleunigung. Es ist noch

$$\beta'\alpha'' - \beta''\alpha' = \mu, \quad \beta'\alpha''' - \beta'''\alpha' = \mu'.$$

Ferner

$$\alpha'\alpha''' - \beta'\beta''' = \beta''^2 - \alpha''^2 = -\mu^2.$$

Wir wollen nun aus den Formeln (24) für q_x, q_t Reihenentwicklungen herleiten, wobei ξ, η, ζ und μ als kleine Grössen erster Ordnung angesehen werden sollen.

Das erste ist die Auflösung der Gleichung $h = 0$, welche $\overline{\tau}$ als Funktion von $\tau, \xi, \eta, \zeta, \overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{\zeta}$ definiert. Indem wir $\overline{\tau} = \tau + \varphi$ setzen, wo φ eine zu bestimmende Grösse erster Ordnung ist, finden wir: 31

$$\overline{x} - x = \beta'\left(\overline{\xi} - \xi\right) + \varphi\left(\alpha' + \beta''\overline{\xi}\right) + \frac{\varphi^2}{2}\left(\alpha'' + \beta'''\overline{\xi}\right) + \frac{\varphi^3\alpha'''}{6} + (4.\ \text{Ordng}).$$
$$\cdots\cdots \tag{37}$$
$$\left(\overline{x} - x\right)^2 - \left(\overline{t} - t\right)^2$$
$$= \left(\overline{\xi} - \xi\right)^2 + \varphi^2\left(-1 - \mu\left(\overline{\xi} + \xi\right)\right) - \frac{\varphi^3}{3}\mu'\left(2\overline{\xi} + \xi\right) + (5.\ \text{Ordng.})$$

Die Gleichung $h = 0$ lautet dann, wenn man

$$R^2 = (\overline{\xi} - \xi)^2 + (\overline{\eta} - \eta)^2 + (\overline{\zeta} - \zeta)^2$$

einführt,

$$R^2 = \varphi^2\left(1 + \mu(\xi + \overline{\xi})\right) + \frac{\varphi^3}{3}\mu'\left(2\overline{\xi} + \xi\right) + (5.\ \text{Ordng.}),$$
$$\varphi = \pm R\left\{1 - \frac{\mu}{2}\left(\xi + \overline{\xi}\right) - \frac{\varphi}{6}\mu'\left(2\overline{\xi} + \xi\right) + 3.\ \text{Ordng.}\right\}.$$

Da $t > \overline{t}$ sein soll, ist das Minuszeichen zu nehmen, und wenn man rechter Hand noch φ durch $-R$ ersetzt, erhält man schliesslich:

$$\overline{\tau} = \tau + \varphi = \tau - R + \frac{\mu}{2}R(\xi - \overline{\xi}) - \frac{\mu'}{6}R^2(2\overline{\xi} + \xi) + 4.\ \text{Ordng.}. \tag{38}$$

Um nun den Nenner im Integral für q zu erhalten, differentiiere man die Identität (37) nach $\overline{\tau}$, d. h. nach φ, und er|hält 32

$$2(\overline{x} - x)(\overline{\alpha}' + \overline{\beta}''\overline{\xi}) - 2(\overline{t} - t)(\overline{\beta}' + \overline{\alpha}''\overline{\xi}) = 2(1 + \overline{\mu}\overline{\xi})\left\{(\overline{x} - x)\overline{v}_x - (\overline{t} - t)\overline{v}_t\right\}$$
$$= -2\varphi[1 + \mu(\xi + \overline{\xi})] - \varphi^2\mu'(2\overline{\xi} + \xi) + 4.\ \text{Ordng.},$$

$$\frac{1}{(\overline{x} - x)\overline{v}_x - (\overline{t} - t)\overline{v}_t} = \frac{1 - \overline{\mu}\overline{\xi}}{-\varphi[1\mu(\xi + \overline{\xi})] - \frac{\varphi^2}{2}\mu'(2\overline{\xi} + \xi) + 4.\ \text{Ordng.}}$$
$$= \frac{1 + \overline{\mu}\overline{\xi}}{R}\left\{1 - \frac{\mu}{2}(\xi + \overline{\xi}) + \frac{\mu' R}{3}(2\overline{\xi} + \xi) + 3.\ \text{Ordng.}\right\}.$$

Also ist

$$\frac{\overline{v}_x}{(\overline{x}-x)\overline{v}_x-(\overline{t}-t)\overline{v}_t} \equiv A_x =$$
$$\frac{1}{R}\left\{\alpha' + \frac{\alpha'\mu}{2}(\overline{\xi}-\xi) - R\mu\beta' + \frac{R^2}{2}\alpha''' - R\beta'''\overline{\xi} + \frac{\alpha'\mu' R}{3}(2\overline{\xi}+\xi) + 3.\ \text{Ordng.}\right\}.$$

Somit ergibt sich schliesslich:

$$4\pi q_x = \iiint \overline{\varrho}_0 A_x \, d\overline{\xi}\, d\overline{\eta}\, d\overline{\zeta}. \tag{39}$$

Den entsprechenden Ausdruck für q_t erhält man, wenn man hierin überall α mit β vertauscht.

33 Nunmehr berücksichtigen wir, dass der in dem Integral für k_x und k_t auftretende Ausdruck

$$\frac{\partial q_x}{\partial t} + \frac{\partial q_t}{\partial x} \tag{40}$$

eine Invariante bei Lorentz-Transformationen ist, soweit sie nur die x-t-Ebene betreffen. Führen wir hierin die Ausdrücke (39) ein und nehmen unter Berücksichtigung von (36) die Differentiationen nach ξ und τ vor, so ersieht man, dass infolge der Differentiation nach ξ und τ bereits die Glieder höherer als 0. Ordnung in (40) nicht mehr aus (39) entnommen werden können. Der Ausdruck (40) wird also, wenn wir bei den Gliedern 0-ter Ordnung abbrechen, eine ganze rationale Funktion von $\alpha', \beta', \alpha'', \beta'', \alpha''', \beta'''$ und zwar ist sie linear in den letzten beiden Grössen. Als Invariante muss er also eine Funktion nur der 5 Orthogonalinvarianten

$$\begin{gathered}
\alpha'^2 - \beta'^2 = -1, \qquad \alpha''^2 - \beta''^2 = \mu^2, \\
\alpha'\alpha'' - \beta'\beta'' = 0, \qquad \alpha'\alpha''' - \beta'\beta''' = -\mu^2, \qquad \alpha''\alpha''' - \beta''\beta''' = \mu\mu'
\end{gathered}$$

sein, d. h. eine Funktion nur von μ und μ'. Da er also von α', β' selbst nicht mehr abhängt, kann ich seinen Wert ermitteln, indem ich $\alpha' = 0$, $\beta' = 1$ und folglich $\beta'' = 0$, $\alpha'' = \mu$, $\alpha''' = \mu'$ setze. Daraus ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial q_x}{\partial t} &= \frac{\partial q_x}{\partial \tau}\big(1 - \mu\xi + 3.\ \text{Ordng.}\big), \\
\frac{\partial q_t}{\partial x} &= \frac{\partial q_t}{\partial \xi}.
\end{aligned}$$

$\frac{\partial q_x}{\partial \tau}$ ist nun aus (39) zu ermitteln, indem man nach der Differentiation $\alpha' = 0$
34 setzt und bei den Gliedern 0-ter Ordnung ab|bricht:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial q_x}{\partial \tau} &= \iiint \overline{\varrho}_0 \left\{\frac{\mu}{R} - \mu' + 1.\ \text{Ordng.}\right\} d\overline{\xi}\, d\overline{\eta}\, d\overline{\zeta}, \\
\frac{\partial q_t}{\partial \xi} &= \iiint \overline{\varrho}_0 \left\{-\frac{\overline{\xi}-\xi}{R^3} + \frac{\mu}{2}\frac{(\overline{\xi}-\xi)^2}{R^3} - \frac{\mu}{2R} + \frac{\mu'}{3} + 1.\ \text{Ordng.}\right\} d\overline{\xi}\, d\overline{\eta}\, d\overline{\zeta}.
\end{aligned}$$

Folglich

$$
\begin{aligned}
&4\pi \iiint \varrho_0 \left(\frac{\partial q_x}{\partial t} + \frac{\partial q_t}{\partial x} \right) d\xi\, d\eta\, d\zeta \\
= &\int \cdots \int \mu \left\{ \frac{\varrho_0 \overline{\varrho}_0}{R} + \frac{\varrho_0 \overline{\varrho}_0}{2} \frac{(\overline{\xi} - \xi)^2}{R^3} - \frac{\varrho_0 \overline{\varrho}_0}{2R} \right) d\xi\, d\eta\, d\zeta\, d\overline{\xi}\, d\overline{\eta}\, d\overline{\zeta} \\
&- \tfrac{2}{3} \int \cdots \int \varrho_0 \overline{\varrho}_0 (\mu' + 1.\ \text{Ordng.})\, d\xi \cdots d\overline{\zeta}.
\end{aligned}
$$

Eine leichte Umformung ergibt dafür den Wert

$$
\tfrac{2}{3}\mu \int \cdots \int \frac{\varrho_0 \overline{\varrho}_0}{R}\, d\xi \cdots d\overline{\zeta} - \tfrac{2}{3}\mu' \int \cdots \int \varrho_0 \overline{\varrho}_0\, d\xi \cdots d\overline{\zeta}.
$$

Bei dieser Umformung ist nur benutzt, dass die Dichte ϱ_0 nur von dem Betrage $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$ abhängt. Machen wir auch noch die Annahme, dass das Elektron eine homogene Kugel ist, so lassen sich die beiden Integrale aufeinander zurückführen. Setzt man

$$
\text{die Ladung} \quad \iiint \varrho_0\, d\xi\, d\eta\, d\zeta = e,
$$

$$
\text{den Radius des Elektrons} = a
$$

so ist

$$
\int \cdots \int \frac{\varrho_0 \overline{\varrho}_0}{R}\, d\xi \cdots d\overline{\zeta} = \frac{6}{5} \frac{e^2}{a}
$$

und damit schliesslich

$$
\iiint \varrho_0 \left(\frac{\partial q_x}{\partial t} + \frac{\partial q_t}{\partial x} \right) d\xi\, d\eta\, d\zeta = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{4}{5} \frac{e^2}{a} \mu - \frac{2}{3} e^2 \mu' \right\}. \tag{41}
$$

Nach Formel (33) ist k_x gleich $-\beta' \times$ diesem Ausdruck.

Schliesslich haben wir hierin noch α allein einzuführen; wegen

$$
\mu\beta' = \alpha'' \quad \text{ist} \quad \mu'\beta' = \alpha''' - \mu\beta'' = \alpha''' - \mu^2\alpha',
$$

also bis auf Grössen, welche zu vernachlässigen sind,

$$
\begin{aligned}
\mu'\beta' = \alpha''' &= \frac{d^3x}{d\tau^3} \\
\mu\beta' = \alpha'' &= \frac{d^2x}{d\tau^2}.
\end{aligned}
$$

Damit haben wir folgenden Satz bewiesen:

Bezeichnet man mit x die Koordinate des Mittelpunktes des Elektrons, mit τ dessen Eigenzeit, so gilt für kleine Beschleunigungen und kleinen Radius a des Elektrons:

$$
k_x \equiv -\frac{1}{5\pi} \frac{e^2}{a} \frac{d^2x}{d\tau^2} + \frac{1}{6\pi} e^2 \frac{d^3x}{d\tau^3}, \tag{42}
$$

wo k_x die von dem Elektron auf sich selbst ausgeübte Kraft bezeichnet; die Bewegung soll dabei nur in der x-Richtung stattfinden.

Es lässt sich zeigen, wenn man in der oben durchgeführten Rechnung noch einige der folgenden Glieder berücksichtigt, dass die Formel (41) auch dann noch richtig ist, wenn man über die Beschleunigung keine Voraussetzung macht. Die in (41) vernachlässigten Glieder hängen also, was die Grössenordnung anlangt, nur von den Dimensionen des Elektrons ab.

Aus der Formel erkennt man, dass im Falle konstanter oder wenig veränderlicher Beschleunigung sich das Elektron wie ein materieller Punkt mit der Masse

$$m_0 = \frac{e^2}{5a\pi}$$

bewegt. Diese Zahl m_0 nennt man die Ruhmasse des Elektrons.

36 Das einfachste Modell eines leuchtenden Punktes ist ein kleines, mit negativer Elektrizität geladenes Elektron, welches sich innerhalb einer grösseren Kugel bewegt, welche ruht und positiv geladen ist. Berechnen wir nach den oben gemachten Ueberlegungen die Kraft, welche von dieser positiven Kugel auf das Elektron ausgeübt wird, so finden wir, dass diese Berechnung auf das bekannte Problem der gewöhnlichen Elektrostatik hinauskommt, die Anziehung zweier elektrisch geladener Kugeln zu ermitteln. Man erkennt nun sogleich, dass diese Kraft proportional dem Abstand des schwingenden Elektrons vom Mittelpunkt der ruhenden positiven Kugel ist.

Für einen solchen Dipol gilt also die Bewegungsgleichung:

$$c^2 x + \frac{e^2}{5a\pi}\frac{d^2x}{d\tau^2} - \frac{e^2}{6\pi}\frac{d^3x}{d\tau^3} = 0, \tag{43}$$

eine Differentialgleichung 3. Ordnung.[39]

Diese reicht dann zusammen mit Maxwellschen Feldgleichungen vollständig zur Bestimmung aller Zustandsgrössen aus, wenn zur Zeit $t = 0$ das Feld, die Verteilung der Elektrizität und ihre Geschwindigkeit gegeben ist.

Die Formeln (42) und (43) gehen in die üblichen Gleichungen für die Elektrodynamik über, wenn man statt der Eigenzeit τ die Zeit t setzt.

37 7. Kapitel.

Grenzbedingungen an einem ruhenden vollkommenen Spiegel.

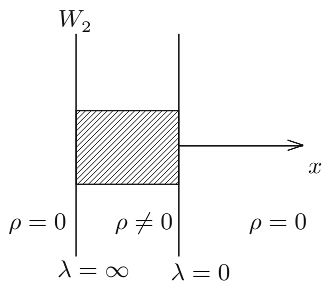
Es sollen hier die Randbedingungen aufgestellt werden, welche die Lösungen der Maxwellschen Gleichungen an Unstetigkeitsflächen erfüllen müssen.Wir betrachten indessen nur den Fall eines ebenen vollkommenen Spiegels, den wir durch die „Leitfähigkeit“ $\lambda = \infty$ charakterisieren.

[39] Footnote added in ink: “Die Lösung x hat man sich in eine Reihe nach Potenzen von a entwickelt zu denken und daher hat die Gl. (43) den Charakter einer Differentialgleichung *2.* Ordnung für x.”

Die Maxwellschen Gleichungen für ein Medium, dessen Dielektrizitätskonstante und magnetische Permeabilität gleich 1 ist, setzen wir in folgender Form voraus:

$$\operatorname{curl}\mathfrak{M} - \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \lambda\mathfrak{E}, \qquad \operatorname{curl}\mathfrak{E} + \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} = 0,$$
$$\operatorname{div}\mathfrak{E} = \varrho, \qquad \operatorname{div}\mathfrak{M} = 0.$$

Wir denken uns nun den Raum durch die y-z-Ebene so geteilt, dass bei positivem x freier Äther, also $\lambda = 0$ ist, während auf der linken Seite λ stetig von Null bis gegen ∞ anwächst.



Zwischen den beiden Ebenen W_1 und W_2 soll ϱ von Null verschieden sein, in 38
dem übrigen Teil des Raumes dagegen $\varrho = 0$.

Wir denken uns nun die Ebene W_2 nach W_1 konvergierend und gleichzeitig die Dichte ϱ derartig ins Unendliche wachsend, dass die Menge von Elektrizität, welche in einem Parallelepid von bestimmtem Querschnitt vorhanden ist, gegen einen Grenzwert konvergiert, der nicht notwendigerweise gleich Null ist.

Wir wollen wissen, welcher Grenzzustand sich bei diesem Prozess einstellt. Da stets die Maxwellschen Gleichungen erfüllt sein sollen, so muss in dem Teil des Raumes, wo $\lambda = \infty$ ist, $\mathfrak{E}$ gleich Null sein. Für $\mathfrak{M}$ folgt daraus $\operatorname{curl}\mathfrak{M} = \lambda\mathfrak{E}$ [40] und $\operatorname{div}\mathfrak{M} = 0$, $\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial t} = 0$. $\lambda\mathfrak{E}$ braucht im Limes nicht Null zu sein, sondern muss nur Funktion von $x\ y\ z$ sein.

Nun integrieren wir $\operatorname{div}\mathfrak{E}$ und $\operatorname{div}\mathfrak{M}$ über das Innere des schraffierten Volumens. Nach dem Gaussschen Satze ist $\int \operatorname{div}\mathfrak{E}\,dv = \int \mathfrak{E}_n\,do$, über die Oberfläche integriert. Im Grenzfalle, wo W_2 und W_1 zusammenfallen, bleibt von dem Oberflächeintegral nur der Teil, der sich auf die zu W_2 und W_1 gehörende Oberfläche bezieht, und da $\mathfrak{E}$ an W_2 verschwindet, ist

$$\lim \int \operatorname{div}\mathfrak{E}\,dv = \int \mathfrak{E}_n\,dW_1.$$

Die Normalkomponente von $\mathfrak{E}$ an der Ebene W_1 gibt also den Grenzwert der Elektrizitätsmenge an, braucht also im limes nicht mit dem Werte $\mathfrak{E} = 0$ links von W_1 übereinzustimmen.

[40]“$= \lambda\mathfrak{E}$” was inserted in ink.

In derselben Weise finden wir aus div $\mathfrak{M} = 0$, dass die Normalkomponente von $\mathfrak{M}$ links und rechts an W_1 dieselbe sein muss.

39 Bei der Curl-Bildung werden die Komponenten $\mathfrak{E}_y$ und $\mathfrak{E}_z$ in der x-Richtung differentiiert; es müssen daher im limes ebenfalls $\mathfrak{E}_y$ und $\mathfrak{E}_z$ nach x differentiierbar sein. D. h. $\mathfrak{E}_y$ und $\mathfrak{E}_z$ ändern sich stetig beim Durchgang durch die Fläche W_1, sind also gleich Null.

Diese Ueberlegung gilt auch für $\mathfrak{M}_y, \mathfrak{M}_z$.

Mit Rücksicht auf diesen Grenzübergang definieren wir einen *vollkommenen Spiegel* als eine Unstetigkeitsfläche für $\mathfrak{E}, \mathfrak{M}$, an der beständig

$$\begin{aligned} &\text{die Normalkomponenten von } \mathfrak{M} = 0, \\ &\text{die Tangentialkomponenten von } \mathfrak{E} \ = 0, \end{aligned} \tag{43a}$$

während die Normalkomponente von $\mathfrak{E}$ beim Durchgang durch die Fläche einen beliebigen Sprung erleiden darf.

Alles dies gilt nur für ruhende Spiegel. Die Verallgemeinerung auf einen bewegten Spiegel werden wir erst später aufstellen.[41]

8. Kapitel.

Hohlraumstrahlung in einem spiegelnden Kubus

Wir wollen jetzt das folgende Problem behandeln:

Gegeben ist ein Kubus von der Kantenlänge 1. Seine Wände sollen vollkommene Spiegel sein. Zur Zeit $t = 0$ ist eine elektromagnetische Erregung innerhalb des Würfels gegeben. Gesucht wird der elektromagnetische Vektor für einen beliebigen Zeitpunkt.

40 Die mathematische Formulierung ist diese:

Es ist eine Lösung der homogenen Maxwellschen Gleichungen:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} M &= 0, \\ \operatorname{div} M^* &= 0 \end{aligned}$$

zu finden, welche für alle Zeiten an der Oberfläche des gegebenen Würfels die Randbedingungen (43a) erfüllt und für $t = 0$ in ein gegebenes Feld M_0 übergeht.

Wir suchen zunächst eine Partikularlösung. Eine solche finden wir bekanntlich, indem wir $M =$ const. $e^{a_1 x + \cdots a_4 t}$ einsetzen oder zweckentsprechender gleich einem Aggregat von Sinussen und Cosinussen. Wir legen die

[41] See ch. 10 below.

Koordinatenebenen in drei Seitenflächen des Würfels, so dass der Nullpunkt $x = 0, y = 0, z = 0$ eine Ecke des Würfels ist,[42] und setzen:[43]

$$\begin{array}{llllll} \mathfrak{E}_x = \cos \mathfrak{a}\pi x & \sin \mathfrak{b}\pi y & \sin \mathfrak{c}\pi z & (e_1 \cos 2\pi\nu t & + e_1' sin 2\pi\nu t), \\ \mathfrak{E}_y = \sin \text{ " } & \cos \text{ " } & \sin \text{ " } & (e_2 \text{ " } & + e_2' \text{ " " }), \\ \mathfrak{E}_z = \sin \text{ " } & \sin \text{ " } & \cos \text{ " } & (e_3 \text{ " } & + e_3' \text{ " " }), \\ \mathfrak{M}_x = \sin \text{ " } & \cos \text{ " } & \cos \text{ " } & (h_1 \sin 2\pi\nu t & + h_1' \cos 2\pi\nu t), \\ \mathfrak{M}_y = \cos \text{ " } & \sin \text{ " } & \cos \text{ " } & (h_2 \text{ " " } & + h_2' \text{ " " }), \\ \mathfrak{M}_z = \cos \text{ " } & \cos \text{ " } & \sin \text{ " } & (h_3 \text{ " " } & + h_3' \text{ " " }). \end{array} \tag{44}$$

Mit einem solchen Ansatz gehen wir in die Maxwellschen Gleichungen ein und suchen die Konstanten $e \cdots e' \cdots h \cdots h'$ $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \nu$ so zu bestimmen, dass die Differentialgleichungen erfüllt sind. Das führt auf eine Reihe von Relationen, welche sich insgesamt so aussprechen lassen: Das Schema der 9 Grössen: 41

$$\begin{array}{ccc} \frac{\mathfrak{a}}{2\nu} & \frac{\mathfrak{b}}{2\nu} & \frac{\mathfrak{c}}{2\nu} \\ \frac{h_1}{a} & \frac{h_2}{a} & \frac{h_3}{a} \\ \frac{e_1}{a} & \frac{e_2}{a} & \frac{e_3}{a} \end{array}, \tag{45}$$

wo a eine gewisse positive Konstante bedeutet, soll ein orthogonales Schema sein.[44] Die entsprechenden Beziehungen gelten ebenso für $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \nu, e', h', \cdots$ Nimmt man die Grössen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ als positive ganze Zahlen (auch Null) beliebig an, so folgt zunächst

$$4\nu^2 = \mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2 + \mathfrak{c}^2;$$

nimmt man weiter e_1, e_2, e_3 irgend wie so an, dass die aus (45) fliessende Beziehung

$$\mathfrak{a}e_1 + \mathfrak{b}e_2 + \mathfrak{c}e_3 = 0$$

erfüllt ist, so folgen dann eindeutig h_1, h_2, h_3.

Ebenso ist bei den gestrichenen Grössen dann alles eindeutig bestimmt, wenn man h_1', h_2', h_3' irgend wie gemäss der Relation

$$\mathfrak{a}h_1' + \mathfrak{b}h_2' + \mathfrak{c}h_3' = 0$$

annimmt.

Dadurch wird zunächst den Maxwellschen Gleichungen Genüge geleistet. Es werden aber durch diesen Ansatz auch die Randbedingungen erfüllt, wie man sofort sieht. Es verschwinden an den Seitenflächen

die Tangentialkomponenten von $\mathfrak{E}$

und die Normalkomponenten von $\mathfrak{M}$

wegen der sinus-Faktoren.

Da die Maxwellschen Gleichungen linear und homogen sind, so ist jede 42

[42] The preceding half-sentence was interlineated in pencil.

[43] Added by Hilbert on the left margin in pencil: "Kantenlänge des Würfels ist = 1 und Lichtgeschwindigkeit = 1! also $x = 1, y = 1, z = 1$, die dem Nullpunkte gegenüberliegende Ecke des Würfels."

[44] "sein" was substituted in ink for "bilden".

lineare Kombination von partikulären Lösungen wieder eine Lösung, und wir werden versuchen, aus (44) durch lineare Kombination eine Lösung zu erhalten, welche für $t = 0$ in ein gegebenes Feld übergeht.

Es seien zur Zeit $t = 0 : \mathfrak{E} = \mathfrak{E}^o$ und $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^o$ innerhalb des Würfels gegeben als Funktionen von x, y, z und gemäss den Randbedingungen. Dann lässt sich zunächst der Vektor $\mathfrak{E}^o$ in eine Fouriersche Reihe entwickeln – und zwar eindeutig – in folgender Art:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{E}_x^o &= \sum_{\mathfrak{abc}} e_1^{(\mathfrak{abc})} \cos \mathfrak{a}\pi x \ \sin \mathfrak{b}\pi y \ \sin \mathfrak{c}\pi z, \\
\mathfrak{E}_y^0 &= \sum_{\mathfrak{abc}} e_2^{(\mathfrak{abc})} \sin \ \text{"} \quad \cos \ \text{"} \quad \sin \ \text{"} \ , \\
\mathfrak{E}_z^o &= \sum_{\mathfrak{abc}} e_3^{(\mathfrak{abc})} \sin \ \text{"} \quad \sin \ \text{"} \quad \cos \ \text{"} \ .
\end{aligned} \tag{46}$$

Hier sind $\mathfrak{a}, b, \mathfrak{c}$ nicht negative ganze Zahlen, über welche summiert wird, und $e_1^{(\mathfrak{abc})}, e_2^{(\cdots)}, e_3^{(\cdots)}$ sind die Fourierschen Koeffizienten. Eine solche cos-Entwicklung ist stets möglich, und die Entwicklung nach sinus ist wegen der Randbedingungen möglich.

Da nun $\mathfrak{E}^o$ nicht beliebig sein darf, sondern so, dass der einen Maxwellschen Gleichung

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = 0$$

genügt wird, so folgt zwischen den zusammengehörigen Konstanten e die Beziehung

$$\mathfrak{a} e_e^{(\mathfrak{abc})} + \mathfrak{b} e_2^{(\mathfrak{abc})} + \mathfrak{c} e_3^{(\mathfrak{abc})} = 0.$$

Deshalb ist es auf genau eine Weise möglich, zu den e ein System $\nu^{(\mathfrak{abc})}$,
43 $h_1^{(\mathfrak{abc})}$, $h_2^{(\mathfrak{abc})}$, $h_3^{(\mathfrak{abc})}$ so hinzuzufügen, | dass die durch (45) angedeuteten Relationen erfüllt sind. In gleicher Weise erhalten wir durch eine analoge Fourier-Entwicklung von $\mathfrak{M}^o$ ein unendliches System von Konstanten $\nu'^{(\mathfrak{abc})}$, $h'^{(\mathfrak{abc})}$, $e'^{(\mathfrak{abc})}$.

Bilden wir jetzt mit diesen so erhaltenen Konstanten $e \dots h \dots e' \dots h'$ die Summe von Gliedern der Form (44), so erhalten wir sechs Grössen $\mathfrak{E}_x \dots \mathfrak{M}_z$, welche Lösungen der Maxwellschen Gleichungen sind, welche ferner für alle Zeiten die Randbedingungen erfüllen und die schliesslich für $t = 0$ in $\mathfrak{E}^o$ resp. $\mathfrak{M}^o$ übergehen.

Das ist genau das, was wir suchten. Es bleibt nur noch der *Eindeutigkeitsbeweis* zu führen, d. h. der Nachweis dafür, dass $\mathfrak{E}, \mathfrak{M}$ für alle Zeiten aus den Maxwellschen Gleichungen eindeutig bestimmt sind, wenn sie zur Zeit $t = 0$ gegeben sind. Und dazu reicht es offenbar aus, zu zeigen, dass $\mathfrak{E}, \mathfrak{M}$ notwendig identisch gleich 0 sind, wenn sie zu einer Zeit $t = 0$ gleich Null sind (und beständig die Randbedingungen erfüllen).

Hierzu ziehen wir die folgende Gleichung heran. Verstehen wir unter $E = \frac{1}{2}(\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{M}^2)$ die elektromagnetische Energiedichte, unter $\mathfrak{S}$ den Strahlvektor $\mathfrak{E} \times \mathfrak{M}$, so ergibt sich als eine Folge der Maxwellschen Gleichungen die Formel

$$\frac{d}{dt}\left(\int E dv\right) + \int \mathfrak{S}_n do = 0,$$

wobei das erste Integral über ein beliebiges festes Volumen, das zweite über dessen Oberfläche zu erstrecken ist. Wenden wir diese Formel auf unseren Würfel an, so folgt zunächst, dass das Integral den Wert Null hat. Denn infolge der | Randbedingungen ist $\mathfrak{E}$ am Rande normal, d. h. $\mathfrak{S} = (\mathfrak{E} \times \mathfrak{M})$ tangential 44
zur Oberfläche gerichtet, also $\mathfrak{S}_n = 0$. Daher ist

$$\frac{d}{dt}\left(\int \mathfrak{E} dv\right) = 0.$$

Die gesamte Energie ist daher

$$\int \frac{1}{2}(\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{M}^2) dv = \text{const.}$$

Ist nun bei $t = 0$ $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{M}$ im ganzen Innern Null, so ist die gesamte Energie gleich Null und daher für alle Zeiten gleich Null. Da nun das obige Integral einen nicht negativen Integranden hat, so folgt daraus $\mathfrak{E} = \mathfrak{M} = 0$ für alle Zeiten, w.z.b.w.[45]

9. Kapitel.

Elektromagnetische Wellen.

Unter einer einfachen ebenen Welle verstehen wir eine Lösung der homogenen Maxwellschen Gleichungen

$$\operatorname{div} M = 0, \quad \operatorname{div} M^* = 0 \tag{47}$$

von der Form

$$M = \mathfrak{C} e^{2\pi i(a_x x + \cdots + a_l l)}, \tag{48}$$

wobei $\mathfrak{C}$ einen von x, y, z, l unabhängigen Sechservektor und $a = (a_x, a_y, a_z, a_l)$ einen ebenfalls konstanten Vierervektor bedeutet. Verstehen wir unter k den Koordinatenvektor (x, y, z, l), so können wir den Exponenten von e in der invarianten Form

$$2\pi i \; a \cdot k$$

schreiben. 45

[45] 'w.z.b.w.' abbreviation for 'was zu beweisen war.'

Die Vektoren $\mathfrak{C}$ und a sind nun aus den Maxwellschen Gleichungen zu bestimmen. Man findet sogleich als notwendige und hinreichende Bedingung, damit (48) eine Lösung von (47) ist:

$$\begin{aligned} a \cdot \mathfrak{C} &= 0, \\ a \cdot \mathfrak{C}^* &= 0, \end{aligned} \qquad \text{oder auch} \qquad \begin{aligned} a \cdot M &= 0, \\ a \cdot M^* &= 0. \end{aligned} \tag{49}$$

Hieraus ergeben sich eine Reihe von weiteren Relationen, die wir nun ableiten wollen.

Zunächst ergibt sich aus der allgemeinen Formel

$$a \times (a \cdot \mathfrak{C}) + (a \times (a \cdot \mathfrak{C}^*))^* = (a \cdot a) \cdot \mathfrak{C}$$

die Gleichung

$$(a \cdot a) \cdot \mathfrak{C} = 0$$

also, da nicht alle Komponenten von $\mathfrak{C}$ gleich Null sein sollen,

$$\begin{aligned} & a \cdot a = 0, \\ \text{d. h.} \qquad & a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 - a_t^2 = 0. \end{aligned}$$

Der Exponentialausdruck in (48) hat daher die Form

$$2\pi i \; a \cdot k = 2\pi i \; a_t \left(\frac{a_x}{a_t} x + \frac{a_y}{a_t} y + \frac{a_z}{a_t} z - t \right).$$

Es ist also

$$\begin{aligned} a_t & \quad \text{die Schwingungszahl} \\ \frac{a_x}{a_t} \ldots \frac{a_z}{a_t} & \quad \text{die Richtungskosinusse der Wellenebenen} \\ a_x x + a_y y + a_z z = \text{const.}, & \end{aligned}$$

und die Wellen pflanzen sich mit der Geschwindigkeit 1, d. h. mit Lichtgeschwindigkeit fort.

46 Ferner liefern die beiden vierten Komponenten in (49)

$$\begin{aligned} a_x \mathfrak{E}_x + a_y \mathfrak{E}_y + a_z \mathfrak{E}_z &= 0, \\ a_x \mathfrak{M}_x + \cdots + a_z \mathfrak{M}_z &= 0. \end{aligned} \tag{50}$$

D. h. $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{M}$ liegen beide in der Wellenebene. Fasst man weiter in den vier Gleichungen $a \cdot M = 0$ die a als Unbekannte auf, so muss die Determinante der M verschwinden, damit nicht alle a gleich Null sind. Diese Determinante hat aber den Wert $M \cdot M^*$. Also

$$M \cdot M^* = i(\mathfrak{E} \cdot \mathfrak{M}) = 0. \tag{51}$$

Das bedeutet, $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{M}$ stehen senkrecht aufeinander.

In Verbindung mit (50) folgt daraus:
Der Strahlvektor $\mathfrak{S} = \mathfrak{E} \times \mathfrak{M}$ steht senkrecht zur Wellenebene. Schliesslich ist auch noch die Relation

$$M \cdot M = 0, \tag{52}$$
$$\text{d. h.} \qquad \mathfrak{E}^2 = \mathfrak{M}^2$$

eine Folge von (49). Der Betrag von $\mathfrak{S}$ ist daher gleich $\mathfrak{E}^2 = \frac{1}{2}(\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{M}^2)$, also gleich der elektromagnetischen Energiedichte.

Schliesslich gilt eine wichtige Umformung des Spannungstensors σ, den wir auf Seite 21, Anmerkg.1 definiert hatten. Es gibt nämlich einen Skalar α, derart, dass σ in der Form

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \sigma_{ll} \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} a_x^2, & a_x a_y, & a_x a_z, & a_x a_l \\ a_y a_x, & a_y^2 & \cdots\cdots\cdots & \\ a_l a_x & \cdots\cdots & & a_l^2 \end{pmatrix} \tag{53}$$

durch den Vektor a dargestellt werden kann.

Man bestätigt dies, indem man ein spezielles Koordinatensystem zugrun- 47
delegt, wo nämlich

$$a_y = a_z = 0$$

ist, und wo man ausserdem, da $\mathfrak{E}$ senkrecht zur Richtung a_x, a_y, a_z ist, auch noch $\mathfrak{E}_y = 0$ annehmen kann. Aus (50), (51), (52) folgt dann weiter

$$\mathfrak{E}_x = 0, \qquad \mathfrak{M}_z = 0, \qquad \mathfrak{M}_x = 0, \qquad \mathfrak{E}_z^2 = \mathfrak{M}_y^2,$$

sodass also $\mathfrak{E}$ in die z-Achse und $\mathfrak{M}$ in die y-Achse fällt. Nimmt man dann noch die allgemein gültige Relation $a \cdot \sigma = 0$ hinzu, welche über die aus $\mathfrak{E}_z^2 = \mathfrak{M}_y^2$ folgende Alternative $\mathfrak{E} = \pm\mathfrak{M}$ Aufschluss gibt, so folgt die Richtigkeit von (53) für dieses spezielle Koordinatensystem und folglich auch im allgemeinen Falle.

Wir haben uns bisher nicht darum gekümmert, dass M durch den Ansatz (48) komplex wurde; da aber die Gleichungen (47) linear sind, so sind der reelle und der imaginäre Teil von M für sich ebenfalls Lösungen.

Wir setzen nun fest, dass wir a_x, a_y, a_z, a_t immer reell annehmen wollen. Alsdann bedenken wir, dass alle Folgerungen, welche wir gezogen haben, sich allein auf die in M linearen Gleichungen

$$a \cdot M = 0, \qquad a \cdot M^* = 0$$

gründeten, welche reelle Koeffizienten a besitzen. Daher muss alles in gleicher Weise auch für den reellen Teil von M gelten, auch die quadratischen
Relationen | (51), (52), (53), bei denen das nicht ohne weiteres ersichtlich ist. 48

10. Kapitel.

Reflexion an einem bewegten Spiegel.

Die in den beiden letzten Kapiteln erhaltenen Resultate wollen wir anwenden, um die Reflexion elektromagnetischer Wellen an einem gleichförmig bewegten Spiegel zu untersuchen.[46]

Eine absolut spiegelnde unendliche Ebene bewege sich mit der konstanten Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$. Ihre Gleichung zur Zeit t lässt sich dann in die Form

$$\mathfrak{b}_x x + \mathfrak{b}_y y + \mathfrak{b}_z z + \mathfrak{b}_l l = 0 \tag{54}$$

bringen, wobei

$$\mathfrak{b}_t = \frac{\mathfrak{b}_l}{i} = \mathfrak{b}_x \mathfrak{v}_x + \mathfrak{b}_y \mathfrak{v}_y + \mathfrak{b}_z \mathfrak{v}_z,$$

$$\text{d. h.} \qquad v \cdot \mathfrak{b} = 0. \tag{55}$$

Hierin liegt nur die unwesentliche Annahme, dass zur Zeit $t = 0$ die Spiegelebene durch den Nullpunkt geht.

Welches sind zunächst die Randbedingungen, denen der elektromagnetische Vektor M an der Spiegeloberfläche genügen muss? Für den ruhenden Spiegel haben wir sie bereits abgeleitet und wir haben sie jetzt nur kovariant zu verallgemeinern. Zu diesem Zwecke führen wir die Vierervektoren

$$e = v \cdot M, \quad m = v \cdot M^* \tag{56}$$

49 ein. Im Fall der Ruhe, $\mathfrak{v} = 0$, ist

$$e = (\mathfrak{E}_x, \mathfrak{E}_y, \mathfrak{E}_z, 0), \quad m = (i\mathfrak{M}, i\mathfrak{M}_y, \mathfrak{M}_z, 0). \tag{57}$$

Da nun die Grössen $\mathfrak{b}_x, \mathfrak{b}_y, \mathfrak{b}_z$ proportional den Richtungskosinussen der Spiegelnormalen sind, so ergeben sich sofort die Randbedingungen

$$\mathfrak{b} \times e = 0, \qquad \mathfrak{b} \cdot m = 0. \tag{58}$$

Denn sie gehen im Falle $\mathfrak{v} = 0$ direkt in unsere früher aufgestellten Bedingungen über.

Nun sieht man bald, dass die Maxwellschen Gleichungen und die Randbedingungen (58) durch eine einzige ebene Welle nicht befriedigt werden können.

Wir wollen daher den einfachsten Ansatz

$$M = \mathfrak{C}_1 e^{2\pi i\, a_1 \cdot k} + \mathfrak{C}_2 e^{2\pi i\, a_2 \cdot k} \tag{59}$$

machen — wobei

$$M_1 = \mathfrak{C}_1 e^{2\pi i\, a_1 \cdot k}, \quad M_2 = \mathfrak{C}_2 e^{2\pi i\, a_2 \cdot k}$$

[46] Cf. *Abraham 1904a*, *Abraham 1904b*, and *Abraham 1908*, § 40.

einfache elektromagnetische Wellen sind — und dadurch die Randbedingungen zu befriedigen suchen. M ist eo ipso Lösung der Maxwellschen Gleichungen, wenn M_1 und M_2 es sind.

Wir setzen[47]

$$\begin{aligned} e_1 &= v \cdot M_1, & e_2 &= v \cdot M_2, \\ m_1 &= v \cdot M_1^*, & m_2 &= v \cdot M_2^*, \\ e &= e_1 + e_2, & m &= m_1 + m_2. \end{aligned} \tag{59}$$

Es sollen nun zunächst $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, a_1, a_2$ so bestimmt werden, dass

$$\mathfrak{b} \times e \equiv (\mathfrak{b} \times \mathfrak{C}_1) e^{2\pi i\, a_1 \cdot k} + (\mathfrak{b} \times \mathfrak{C}_2) e^{2\pi i a_2 \cdot k} = 0 \tag{60}$$

ist, sobald[48] der Punkt k der Spiegelebene angehört, d. h. sobald

$$\mathfrak{b} \cdot k = 0.$$

Setzen wir $x = y = z = t = 0$, so ist $\mathfrak{b} \cdot k = 0$ und die Gleichung (60) geht 50
über in

$$(\mathfrak{b} \times \mathfrak{C}_1) + (\mathfrak{b} \times \mathfrak{C}_2) = 0. \tag{61}$$

Daraus wieder folgt mit Hilfe von (60), dass

$$e^{2\pi i a_1 \cdot k} + e^{2\pi i a_2 \cdot k} = 0$$

sein muss, sobald

$$\mathfrak{b} \cdot k = 0.$$

Das ist aber offenbar nur möglich, wenn die Linearform in x, y, z, l:

$$(a_1 - a_2) \cdot k$$

sich von

$$\mathfrak{b} \cdot k$$

nur um einen konstanten Faktor unterscheidet.

Also ergibt sich aus (60) als erste Folgerung:

$$a_1 - a_2 = \lambda \mathfrak{b}, \tag{62}$$

wo λ ein Skalar ist.

Diese Gleichung enthält das vollständige Reflexionsgesetz. Durch Multiplikation mit $a_1 + a_2$ folgt wegen der für jede einfache Welle gültigen Gleichung $a \cdot a = 0$

$$\mathfrak{b} \cdot (a_1 + a_2) = 0. \tag{63}$$

[47] Deleted in ink: "zuächst". The (typewritten) equation numbering was erroneously continued with number "59" in the following equation although this number had already been used before.

[48] The rest of this sentence and the following equation were added in ink.

Fassen wir die eine Welle als die einfallende, die andere als die reflektierte Welle auf, und betrachten wir einen ruhenden Spiegel, so ist $\mathfrak{b}_l = 0$ und aus (62) folgt:

$$a_{l_1} = a_{l_2},$$

d. h. die Schwingungszahlen der einfallenden und reflektierten Welle stimmen überein. Die drei übrigen Gleichungen in (62) sagen aus, dass im x-y-z-Raume die Richtungen $a_1, a_2, \mathfrak{b}$ in einer Ebene liegen, und wegen (63) ist der Winkel
51 zwischen a_1 und $\mathfrak{b}$ gleich dem zwischen $a_2, \mathfrak{b}$, d. h. Einfallswinkel | gleich dem Reflexionswinkel.

Wir sahen im vorigen Kapitel, Gl. (53), dass zu jeder einfachen Welle ein gewisser Skalar α gehört.[49] Und alle übrigen Beziehungen zwischen einfallender und reflektierter Welle lassen sich nun in die einzige invariante Aussage zusammenfassen, dass diese Skalare für beide Wellen dieselben sind (an der Spiegeloberfläche):

$$\alpha_1 = \alpha_2. \tag{64}$$

Um dieses zu beweisen, berücksichtigen wir zunächst, dass die Gleichung (60) durch die folgende ersetzt werden kann:

$$e = e_1 + e_2 = \mu\mathfrak{b},$$

wo μ einen Proportionalitätsfaktor bedeutet. Auf Grund der Vektoridentität

$$a \cdot (v \cdot M) = -v(a \cdot M)$$

folgt

$$a_1 \cdot e_1 = 0, \quad a_2 \cdot e_2 = 0. \tag{65}$$

Nun betrachten wir die beiden Systeme:

$$\begin{aligned} &\text{I.} \qquad e_1 + e_2 = \mu\mathfrak{b}, \\ &\text{II.} \qquad a_1 - a_2 = \lambda\mathfrak{b}. \end{aligned}$$

Durch Multiplikation von I mit $a_1 + a_2$ folgt wegen (63) und (65)

$$a_1 e_2 + a_2 e_1 = 0. \tag{66}$$

Durch Multiplikation von II mit $e_1 - e_2$ folgt dann wegen (65) und (66)

$$\mathfrak{b} \cdot (e_1 - e_2) = 0$$

und endlich durch Multiplikation von I mit $e_1 - e_2$

$$\begin{aligned} e_1^2 - e_2^2 &= \mu\mathfrak{b} \cdot (e_1 - e_2) = 0, \\ e_1^2 &= e_2^2. \end{aligned}$$

Im Falle der Ruhe folgt hieraus

$$\mathfrak{E}_1^2 = \mathfrak{E}_2^2.$$

52 Da nun die elektromagnetische Energiedichte bei einfachen Wellen wegen (52) $= \mathfrak{E}^2$ ist, so folgt für den ruhenden Spiegel

$$E_1 = E_2. \tag{67}$$

Nun folgt aus (53):

$$\begin{pmatrix} (\sigma_{xx})_1 & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots\cdots \\ \cdots & \cdots\ (\sigma_{ll})_1 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} a_{x_1}^2 \cdots & a_{x_1} a_{l_1} \\ \cdots\cdots & \cdot \\ \cdots\cdots & \cdot \\ \cdots\cdots & a_{l_1}^2 \end{pmatrix}.$$

Also

$$\begin{aligned} & E_1 = \sigma_{ll_1} = \alpha_1 a_{l_1}^2, \\ \text{ebenso} \qquad & E_2 = \sigma_{ll_2} = \alpha_2 a_{l_2}^2. \end{aligned} \tag{68}$$

Da nun für Ruhe $E_1 = E_2$ und $a_{l_1} = a_{l_2}$ ist, so folgt für Ruhe

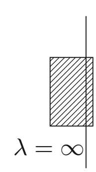
$$\alpha_1 = \alpha_2,$$

und daher gilt diese Gleichung immer. Andererseits kann man dann stets aus (68) schliessen

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{a_{l_1}^2}{a_{l_2}^2} = \frac{\nu_1^2}{\nu_2^2}, \tag{69}$$

wenn ν_1 und ν_2 die Schwingungszahlen der beiden Wellen bezeichnen. Diese Gleichung war das Ziel dieser Ueberlegung. Wir haben sie als spezielle Folge der invarianten Relation $\alpha_1 = \alpha_2$ erkannt.

Schliesslich wollen wir noch die Kraft berechnen, welche auf ein Element der Spiegeloberfläche ausgeübt wird.[50]



Wir haben allgemein für die Kraft, welche auf ein Volumenele|ment ausgeübt 53
wird, den Ausdruck:

$$\int f\, dv = \int \operatorname{div} \sigma\, dv. \tag{70}$$

[49]The preceding sentence was interlineated in ink.

[50]For the following, cf. *Abraham 1908*, §40.

Wir betrachten nur den Dreiervektor $\mathfrak{F}$, dessen Komponenten mit den x-y-z-Komponenten von (70) übereinstimmen. Nun ist

$$(\operatorname{div}\sigma)_{x,y,z} = \operatorname{div}\begin{pmatrix}\sigma_{xx} & \cdots\cdots \\ \cdots & \cdots\cdots \\ \cdots & \cdots\ \sigma_{zz}\end{pmatrix} - \frac{\partial\mathfrak{S}}{\partial t},$$

wobei $\mathfrak{S}$ den Strahlenvektor $\mathfrak{E}\times\mathfrak{M}$ bedeutet. Indem wir dies in das Integral (70) einsetzen und den Gaussschen Satz anwenden, ergibt sich:

$$\int f\,dv = \int \mathfrak{T}\,do - \int \frac{\partial\mathfrak{S}}{\partial t}dv. \tag{71}$$

Hierbei ist $\mathfrak{T}$ ein Dreivektor, der sich aus den Vektoren $\mathfrak{E},\mathfrak{M}$ in folgender Weise zusammensetzt:

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{E}\cdot\mathfrak{E}_n + \mathfrak{M}\cdot\mathfrak{M}_n - \frac{\mathfrak{n}}{2}(\mathfrak{E}^2+\mathfrak{M}^2). \tag{72}$$

$\mathfrak{n}$ ist der Einheitsvektor in Richtung der Normalen auf das Oberflächenelement do und $\mathfrak{E}_n,\mathfrak{M}_n$ sind die Komponenten von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{M}$ in dieser Richtung.

Wenn wir nun annehmen, dass das betrachtete Volumen sich mit der konstanten Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ bewegt, so führen wir statt der Eulerschen Differentiation $\frac{\partial}{\partial t}$ die Lagrangesche $\frac{d}{dt}$ ein, indem wir

$$\frac{\partial\mathfrak{S}}{\partial t}dv = \frac{d\mathfrak{S}}{dt} - \mathfrak{v}_x\frac{\partial\mathfrak{S}}{\partial x} - \mathfrak{v}_y\frac{\partial\mathfrak{S}}{\partial y} - \mathfrak{v}_z\frac{\partial\mathfrak{S}}{\partial z}$$

setzen. Durch abermalige Anwendung des Gaussschen Satzes erhält man

$$\int\frac{\partial\mathfrak{S}}{\partial t}dv = \int\frac{d\mathfrak{S}}{dt}dv - \int \mathfrak{v}_n\cdot\mathfrak{S}\cdot do$$

und folglich

$$\begin{aligned}\mathfrak{F} = \int f\,dv_{|x,y,z} &= \int(\mathfrak{T}+\mathfrak{v}_n\cdot\mathfrak{S})do - \int\frac{d\mathfrak{S}}{dt}dv \\ &= \int\mathfrak{T}^*do - \frac{d}{dt}\int\mathfrak{S}dv.\end{aligned} \tag{73}$$

54 Diese Umformung ist noch allgemein richtig. Wenden wir sie nun auf ein Volumen an, welches an der Oberfläche unseres bewegten Spiegels liegt, und lassen wir dann die Dichte unendlich gross werden und gleichzeitig das Volumen unendlich schmal, so verschwindet das Volumenintegral in (73), da $\mathfrak{S}$ endlich bleibt, während das Oberflächenintegral sich auf das Integral über die Spiegeloberfläche reduziert, da $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{M}$ in dem Leiter bei $\lambda=\infty$ verschwinden.

Es wird also auf ein Stück der Spiegeloberfläche eine Kraft ausgeübt, deren x-y-z-Komponenten durch den Vektor[51]

$$\int(\mathfrak{T}+\mathfrak{v}_n\cdot\mathfrak{S})do$$

[51]"durch den Vektor" was substituted with ink for "gleich".

gegeben sind. Wir nennen $\mathfrak{T} + \mathfrak{v}_n \cdot \mathfrak{S}$ den Druck.

Wenn $\mathfrak{v} = 0$ ist, so ist der Druck gleich $\mathfrak{T}$ und vermöge der am Spiegel herrschenden Randbedingungen

$$\mathfrak{M}_n = 0,\ \mathfrak{E} = \mathfrak{n} \cdot \mathfrak{E}_n$$

wird dann

$$\mathfrak{T} = \frac{\mathfrak{n}}{2}(\mathfrak{E}^2 - \mathfrak{M}^2).$$

Der Druck steht also normal zu dem Flächenelement und hat den Betrag $\frac{1}{2}(\mathfrak{E}^2 - \mathfrak{M}^2)$

Eine kleine Rechnung zeigt nun, dass auch im Falle des bewegten Spiegels vermöge der Randbedingungen die Umformung

$$\mathfrak{T}^* = \frac{\mathfrak{n}}{2}(\mathfrak{E}^2 - \mathfrak{M}^2)$$

gilt (vgl. Abraham, Bd. II. 1908 S.[52])

In Vektorsprache ist

$$\mathfrak{E}^2 - \mathfrak{M}^2 = -M \cdot M.$$

Also der Druck

$$\mathfrak{T}^* = -\frac{\mathfrak{n}}{2} M \cdot M. \tag{74}$$

11. Kapitel. 55

Elementare Strahlungstheorie.[53]

Wir denken uns nun in einem ruhenden Medium von beliebig veränderlicher Dielektrizitätskonstante[54] eine elektromagnetische Strahlung erregt,

[52] Presumably, the reference is to *Abraham 1908*, §40, p. 318, where the formulae differ by a conventional factor $\frac{1}{4\pi}$.

[53] In his first note on radiation theory (*Hilbert 1912a*, p. 774) Hilbert motivated his discussion of this topic with the following words:
'Indessen gibt es ein anderes physikalisches Wissensgebiet, dessen Prinzipien von mathematischer Seite noch gar nicht untersucht worden sind und zu dessen Begründung, wie ich neuerdings gefunden habe, eben jenes mathematisches Hilfsmittel der Integralgleichungen notwendig ist — ich meine die *elementare Strahlungstheorie* und verstehe hierunter denjenigen phänomenologischen Teil der Strahlungstheorie, der unmittelbar auf den Begriffen der Emission und Absorption beruht und in den Kirchhoffschen Sätzen über das Verhältnis von Emission und Absorption gipfelt.
Die folgenden Ausführungen haben zunächst das Ziel, aus den elementaren wohldefinierten Begriffen der Emission und der Absorption die Krichhoffschen Sätze theoretisch zu beweisen; dieses Ziel kann ohne Heranziehung der Integralgleichungen nicht erreicht werden: in der Tat stellen sich die bisher vorliegenden Beweisversuche für die Kirchhoffschen Sätze als ungenügend heraus.'
For further historical discussion of Hilbert's work on the derivation of Kirchhoff's laws for radiation theory, see *Schirrmacher 2003a* and *Corry 2004*, ch. 5.3.

[54] In the typoscript a space was left but no symbol was inserted.

welche durch Superposition beliebiger Wellen entsteht. Jeder einzelnen Welle kommt eine Schwingungszahl ν und eine Wellenlänge λ zu; das Produkt

$$\lambda \cdot \nu = q$$

ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit dieser Welle. Dieses q soll nur eine Funktion des Ortes und der Schwingungszahl sein:

$$q = q(x\ y\ z\ \nu).$$

Der Verlauf eines Strahlungsvorganges ist durch die Maxwellschen Gleichungen für Materie vollkommen bestimmt. Indessen verzichten wir auf eine strenge Ableitung und nehmen axiomatisch einfach das Folgende an:

In jedem Volumelement dv kann Energie erzeugt, oder, wie man sagt, emittiert werden und zwar in jeder Richtung. Der Emissionskoeffizient:

$$\eta = \eta(x\ y\ z\ \nu)$$

soll nun so definiert sein: Die Energie, welche in dem Volumen dv während der Zeit dt erzeugt und in dem körperlichen Winkel dw ausgestrahlt wird und deren Schwingungszahl zwischen ν und $\nu + d\nu$ liegt, soll sein

$$\eta dv\ d\nu \frac{dw}{4\pi} dt.$$

Ferner werde der Absorptionskoeffizient

56 $$\alpha = \alpha(x\ y\ z\ \nu) \tag{4}$$

so definiert:

Wenn Energie E_1 auf einer kleinen Strecke ds von 1 nach 2 transportiert wird, so erfährt sie eine Schwächung, deren Betrag

$$dE = \alpha E_1 ds$$

sein soll. Im Endpunkte 2 kommt also nur die Energie

$$E_1(1 - \alpha_1 ds)$$

an. Die Absorption auf einer endlichen Strecke findet man dann aus der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \frac{dE}{ds} &= -\alpha E, \\ E &= E_1 e^{-\int_1^2 \alpha\, ds}. \end{aligned} \tag{75}$$

Die Integration ist dabei über den im allgemeinen gekrümmten Weg zu erstrecken, längs dessen die Energie von 1 nach 2 transportiert wird.

Schliesslich sei $u(x, y, z, \nu)$ die *Energiedichte*; d. h. die Energie, welche Schwingungszahlen zwischen ν und $\nu + d\nu$ zukommt und welche im Volumen dv enthalten ist, sei

$$u\, dv\, d\nu.$$

Endlich müssen wir noch wissen, in welchen Bahnen die Energie sich fortpflanzt. Das Gesetz, welchem die Lichtstrahlen folgen, ist eine Minimalforderung: die Zeit, welche das Licht braucht, um von 1 nach 2 zu kommen, soll die kleinstmögliche sein. Diese Zeit ist das Integral[55]

$$\int_1^2 \frac{ds}{q}\,, \qquad ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

Die Lichtstrahlen sind die Extremalen des Variationsproblems:

$$\int_1^2 \frac{ds}{q} = \text{Min.} \tag{76}$$

Die Methoden der Variationsrechnung zeigen dann, dass (in der Ebene) die 57
Lichtstrahlen die Integralkurven der Lagrangeschen Differentialgleichung 2. Ordnung

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right) = \frac{1}{q}\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}\left(y'\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial y}\right) \tag{77}$$

sind. Diese können wir noch in invariante Form setzen. Die linke Seite ist genau die Krümmung der Kurve:

$$k = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Da weiter die Richtungskosinusse der Normalen n durch die Grössen

$$-\frac{y'}{\sqrt{1-y'^2}}, \qquad \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$$

gegeben sind, so können wir die rechte Seite von (77) in die Form setzen

$$-\frac{1}{q}\frac{\partial q}{\partial n},$$

und somit genügen die Lichtstrahlen der Differentialgleichung

$$k = -\frac{1}{q}\frac{\partial q}{\partial n}. \tag{78}$$

[55]In the following, Hilbert specializes to the case of 2 dimensions, a restriction that is made explicit only on p. 58 below.

Ist z. B. q überall konstant, so sind die Lichtstrahlen gerade Linien. Ist weiter etwa $q = y$, so werden die Lichtstrahlen die Orthogonalkreise auf der x-Achse. Dies führt auf eine interessante Beziehung zu der Lobatschefskyschen Geometrie. In dieser hat das Bogenelement die Form:

$$\frac{ds}{y}.$$

58 In einer Lobatschefskyschen Ebene, wo die Lichtgeschwindigkeit konstant ist, verlaufen also die Lichtstrahlen ebenso wie in der Euklidischen Ebene, wo $q = y$ ist.

Die folgenden Betrachtungen beziehen sich nun alle auf eine bestimmte Schwingungszahl ν. Wir abstrahieren daher vorläufig ganz davon, dass η, α, u und q auch von ν abhängen können.[56] Ferner werden wir der Einfachheit halber auch alle Beweise nur für die Ebene aussprechen, da die Uebertragung auf den Raum keine prinzipielle Schwierigkeiten bietet.

Die gesamte Strahlungstheorie beruht nun auf einem mathematischen Hilfssatz, dem *Symmetriesatz*, wie ich ihn nennen will. Er wird in den physikalischen Lehrbüchern stets als von selbst einleuchtend angesehen, während wir uns überzeugen werden, dass er eine allgemeine Aussage über die Extremalen eines beliebigen Variationsproblemes von der Form (76) darstellt.[57]

Der Satz lautet folgendermassen:

Wir betrachten einen Lichtstrahl, der von einem Punkte x_0, y_0 nach einem Punkte $x\ y$ geht. Weiter ziehen wir durch x, y

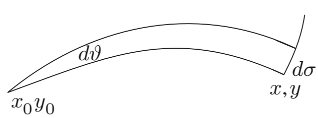


Fig. 1.

die Kurve, welche auf allen von x_0, y_0 ausgehenden Lichtstrahlen senkrecht steht, und nennen $d\sigma$ das Bogenstück auf dieser Kurve, welches durch einen unter dem Winkel $d\vartheta$ von $x_0 y_0$ ausgehenden Lichstrahl abgeschnitten wird. Alsdann ist — wenn wir zur Grenze übergehen — der Quotient

59
$$S(x_0 y_0, xy) = \frac{\frac{d\sigma}{q}}{d\vartheta} \tag{79}$$

[56]This is, however, a crucial step. In the discussions of radiation theory starting with Kirchhoff, Helmholtz, and later Pringsheim and Planck, it was an issue as to how different wavelengths contribute to the total energy, cf. *Kirchhoff 1860*, pp. 577 and 592, *Helmholtz 1903*, p. 162, and Planck's argument for the case of extended homogeneous media *Planck 1906*, § 26, p. 27.

[57]Cf. e.g. the textbooks of *Abraham 1905*, *Planck 1906*, or the articles *Pringsheim 1901a*, or *Wien 1909*. The relation originated from *Helmholtz 1896*, p. 169, and was usually called 'allgemeines Reziprozitätsgesetz' (*Helmholtz 1903*, p. 162) or 'Helmholtz's Reziprozitätssatz' (*Planck 1906*, p. 37).

eine bestimmte Funktion der beiden Punkte x_0, y_0 und x, y. Und der Symmetriesatz sagt nun aus:

Die Funktion S ist eine symmetrische Funktion der beiden Punkte.

Wenn wir unser Variationsproblem geometrisch anders deuten, nämlich auf einer Fläche mit krummlinigen Koordinaten xy, wo das Bogenelement ds die Form

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{q^2(xy)}$$

hat, so behauptet der Symmetriesatz eine Eigenschaft der geodätischen Linien auf dieser Fläche und ist in dieser Einkleidung mit den Hilfsmitteln der Flächentheorie sehr einfach zu beweisen. Er ist wohl zuerst von Bonnet aufgestellt worden (vgl. Darboux, Surfaces, T. III p. 111).[58]

Es scheint mir indessen wünschenswert, hiervon einen direkten Beweis zu besitzen, der nun im folgenden auseinander gesetzt werden soll.

Direkter Beweis des Symmetriesatzes.[59]

Damit sind nun die mathematischen Hilfsmittel zusammengestellt, welche zur Entwicklung der Strahlungstheorie notwendig sind.

Wir fragen zunächst, ob die Grössen u η α q beliebig | vorgegeben wer- 60
den können. Dies ist nicht der Fall. Wir haben dadurch, dass wir alle Grössen von der Zeit unabhängig angenommen haben, uns nur auf thermodynamische Gleichgewichtszustände beschränkt.[60] Wir erhalten dann als erste Beziehung eine Gleichung, welche aussagt, dass Gleichgewicht besteht, und dann lässt sich die Energiedichte u aus den übrigen Grössen berechnen. Diese Gleichungen werden als die Kirchhoffschen Gesetze bezeichnet. Man darf behaupten, dass sie noch nirgends einwandfrei bewiesen sind.[61]

[58] Cf. *Darboux 1894*, 111f., The reference to Bonnet is on p. 112.

[59] The proof is not given in the *Ausarbeitung* of the lecture course. Ewald presented a proof of 'Helmholtz's Reziprozitätssatz' in a letter to Hilbert from 11 April 1912 (SUB Göttingen, signature *Cod. Ms. D. Hilbert 98*, item 1). In *Hilbert 1912a*, p. 774, Hilbert referred to *Straubel 1903* for a general discussion of the 'Symmetriesatz'.

[60] The conditions of equilibrium will be taken into account later, see p. 62 ff.

[61] The last two sentences were added in ink. The original proof of *Kirchhoff 1860* or *Kirchhoff 1862a* as well as that of *Helmholtz 1903* were considered unsatisfactory by Richarz (*Richarz 1903a*, *Richarz 1903b*) who claimed that only Pringsheim's derivation was valid (*Pringsheim 1901a*, *Pringsheim 1903c*). Planck, in turn, claimed that neither Kirchhoff nor Pringsheim gave a full proof (*Planck 1906*, p. 43). Ewald wrote to Hilbert that Planck's proof was the best one he knew and observed that also Minkowski in his course on heat radiation in 1907 had followed Planck. Wien in his contribution to the *Enzyklopädie* followed Pringsheim, but also employed considerations that had been criticized earlier (*Wien 1909*, pp. 284–288).

Wir berechnen jetzt erst die Energiedichte u mit Hilfe der übrigen Grössen, auf Grund der Ueberlegung, dass bei thermodynamischem Gleichgewicht die in einem bestimmten Volumelement zu einer Zeit t vorhandene Energiemenge lediglich gleich der Energie ist, welche von den übrigen Volumelementen in dieses Element hineingestrahlt wird und zur Zeit t gerade sich darin befindet.

Um also u an einer bestimmten Stelle $x_0 y_0$ des Raumes zu finden, berechnen wir zunächst die Dichte, mit welcher die von einem bestimmten anderen Volumelement dv emittierte Energie im Punkte $x_0 y_0$ ankommt.

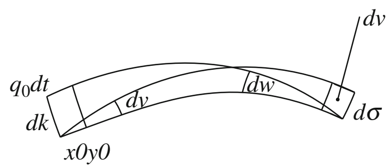


Fig. 2.

Die in dv in einem Winkel dw während der Zeit dt emittierte Energie ist

$$\eta\, dv\, dt\, \frac{dw}{2\pi} \tag{80}$$

61 nach Definition. Sie erfüllt ein Rechteck am Punkte 0 von der Kantenlänge $d\kappa$ resp. $q_0 dt$[62], also vom Inhalt $q_0\ d\kappa\ dt$. Damit sie gerade zur Zeit t in diesem Rechteck liegt, muss sie von dv während eines Zeitraums dt zu einer gewissen anderen Zeit T ausgesandt werden, die indessen hier nicht von Wichtigkeit ist. Das Element des Weges, den diese Energie zurücklegt, sei ds; vermöge der Absorption kommt am Punkte $x_0 y_0$ in dem fraglichen Rechteck nicht die ganze durch (80) gegebene Energie an, sondern auf Grund von (75) nur die Energie

$$\eta\ dv\ dt\ \frac{dw}{2\pi} e^{-\int\limits_{x_0 y_0}^{xy} \alpha ds}.$$

Indem wir diesen Ausdruck durch die Grösse $q_0\ d\kappa\, dt$ des Rechtecks dividieren, erhalten wir die Dichte dieser Energie und daher stellt

$$\eta \frac{dv\ dt\ \frac{dw}{2\pi}}{q_0\ d\kappa\ dt} e^{-\int\limits_{x_0 y_0}^{xy} \alpha ds} = \frac{\eta}{2\pi q_0} \frac{dw}{d\kappa} e^{-\int \alpha ds} dv \tag{80a}$$

[62] The correct velocity for the energy is in general not the phase velocity $q = q(\lambda)$ but the group velocity $g(\lambda) = q(\lambda) - \lambda \frac{dq(\lambda)}{d\lambda}$, as Hilbert remarked in his third communication on the subject (*Hilbert 1914*, p. 279). The editors of Hilbert's *Gesammelte Abhandlungen* have annotated and corrected the formulae of their reprint of the first communication accordingly (*Hilbert 1935*, p. 220). In particular the functions Δ and S and K below might be corrected. Since Hilbert had restricted the discussion to a fixed freqency ν (p. 58), the distinction between phase and group velocity is not of importance for the following discussion.

den Beitrag vor, welchen das Element dv zu der Energiedichte im Punkte x_0y_0 liefert. Die gesamte Energiedichte u_0 im Punkt 0 erhalten wir also, indem wir diesen Ausdruck über alle dv integrieren.

Vorher wollen wir aber noch den Quotienten $\frac{dw}{d\kappa}$ mit Hilfe unseres Symmetriesatzes umformen. Ziehen wir alle von x_0y_0 ausgehenden Lichtstrahlen, so werden alle durch dv hindurchführenden dieser Strahlen innerhalb eines Winkels $d\vartheta$ vom Nullpunkte ausgehen; sie schneiden, wie in Fig. 1, S. 58[63], auf den Orthogonaltrajektorien ein Stück $d\sigma$ ab. Vermöge des | Symmetriesatzes 62
ist nun

$$\frac{\frac{d\sigma}{q}}{d\vartheta} = \frac{\frac{d\kappa}{q_0}}{dw},$$

also

$$\frac{dw}{d\kappa} = \frac{q}{q_0}\frac{d\vartheta}{d\sigma}.$$

Führen wir dies in (80a) ein, und setzen zur Abkürzung[64]

$$\Delta = \frac{\eta}{2\pi q_0^2} q e^{-\int\limits_{x_0y_0}^{xy}\alpha ds} \cdot \frac{d\vartheta}{d\sigma} = \frac{\eta}{2\pi q_0^2}\frac{1}{S} e^{-\int\limits_{x_0y_0}^{xy}\alpha ds}, \tag{80b}$$

so erhalten wir schliesslich die gesuchte Formel

$$u_0 = \int \Delta\, dv. \tag{81}$$

Die Beziehung gewinnt nun erst ihre fundamentale Bedeutung, wenn wir sie mit der Bedingung thermischen Gleichgewichtes in Verbindung bringen.

Das thermodynamische Gleichgewicht eines Strahlungszustandes wollen wir direkt durch die Forderung definieren, dass die Energie, welche in dv während dt erzeugt wird, genau gleich der in dv während dt absorbierten Energiemenge ist. Nur unter dieser Voraussetzung wird auch durch das obige Integral die Energie u richtig dargestellt.

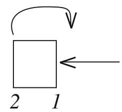
Wir betrachten ein Volumen dv_0 am Punkte x_0y_0. Die während dt emittierte Energie ist

$$\eta_0\, dv_0\, dt.$$

Um die absorbierte Energie zu finden, betrachten wir zunächst den Teil der ganzen in dv_0 hineingestrahlten Energie, welcher von einem bestimmten Volumelement dv ausgeht. Wie wir vorhin berechnet hatten, strömt von dv nach dv_0 Energie mit der Dichte Δdv. Den Betrag der in dv_0 während dt davon absor|bierten Energie finden wir am einfachsten, indem wir uns das 63
Element dv_0

[63] "58" was corrected in ink from "60".

[64] The function S is explicitly introduced below on p. 63 before equation (84).



zusammengebogen denken. Strömt die Energie in der Richtung von 1 nach 2, so tritt durch die Seite 1 während dt ebensoviel Energie ein, wie durch 2 austritt. Wenn wir uns also die Seiten 1 und 2 aufeinandergelegt denken, so findet auf diesem Zylinder stationäre Energieströmung statt; die darauf zirkulierende Energiemenge ist $\Delta dv\, dv_0$; während dt legt sie den Weg $q_0 dt$ zurück, und es wird daher der Betrag

$$\Delta dv\, dv_0\; \alpha_0\; q_0\; dt$$

absorbiert. Diese Grösse über dv integriert, gibt die gesamte absorbierte Energie und diese soll gleich der in dv_0 emittierten Energie sein, woraus als Bedingung für thermodynamisches Gleichgewicht folgt

$$\eta_0 - \alpha_0 q_0 \int \Delta dv = 0. \tag{82}$$

Wir entnehmen hieraus zunächst mit Rücksicht auf (81), dass

$$u\, \alpha\, q = \eta$$

also, soweit $\alpha \neq 0$

$$u = \frac{\eta}{\alpha\, q}. \tag{83}$$

Das Wesentliche bleibt aber die Gleichung (82).Wir werden sogleich erkennen, dass dies eine homogene lineare Integralgleichung zweiter Art für die unbekannte Funktion η ist.[65] Führen wir nämlich in Δ die Funktion

$$S(x_0 y_0, xy) = \frac{\frac{d\sigma}{q}}{d\vartheta}$$

ein, und setzen

$$K(x_0 y_0, xy) = \frac{1}{2\pi} e^{-\left|\int\limits_{x_0 y_0}^{xy} \alpha ds\right|} \cdot \frac{1}{S}, \tag{84}$$

64 so wird

$$\Delta = \frac{1}{q_0^2} K \cdot \eta,$$

und daher ist die Gleichung (82)

$$\eta_0 - \frac{\alpha_0}{q_0} \iint K(x_0 y_0, xy) \eta(xy) dx\, dy = 0. \tag{85}$$

[65] For the theory of integral equations and the terminology, see *Hilbert 1912c*.

Dies ist in der Tat eine Gleichung für η von der behaupteten Form. Der Kern K ist sogar symmetrisch. Denn S ist nach dem Symmetriesatz eine symmetrische Funktion in $x_0 y_0, xy$ und der Exponentialfaktor in K ist ebenfalls symmetrisch, da das Integral absolut zu nehmen ist.

Die weitere Aufgabe besteht nun darin, die Lösungen von (85) zu finden. Wir werden zuerst eine Lösung aufstellen und von dieser dann zeigen, dass sie die einzige ist. Zu diesem Zwecke formen wir das Integral in (85) durch eine partielle Integration um. Statt x, y führen wir die Bogenlänge s der von Punkte $x_0 y_0$ ausgehenden Lichtstrahlen und den Winkel ϑ ein, welchen sie mit einer festen Richtung bilden. Das Volumelement hat dann die Form

$$dx\,dy = d\sigma ds = d\vartheta ds \cdot \frac{d\sigma}{d\vartheta} = qSd\vartheta ds,$$

und wir können daher die Gleichung (85) in die Form[66]

$$\eta_0 - \frac{\alpha_0}{2\pi q_0} \iint e^{-\int\limits_0^s \alpha ds} \eta\, q\, ds\, d\vartheta = 0 \tag{86}$$

setzen. Nun bedenken wir zunächst, dass das Bestehen der Integralgleichung eine Beziehung von der Form

$$\eta = \varphi\, \alpha$$

zur Folge hat, auch an den Stellen, wo α verschwindet. Es wird η sicher da gleich Null, wo α gleich Null ist. An diesen Stellen ist für die unbekannte Funktion φ aus der Integralgleichung kein bestimmter Wert zu ermitteln. Um diese | Schwierigkeiten zu vermeiden — da es uns ja nur auf η ankommt — 65
können wir also einfach die Festsetzung treffen, dass sich die Integralgleichung nur auf das Gebiet beziehen soll, wo $\alpha \neq 0$ ist.

Führen wir dann $\varphi = \frac{\eta}{\alpha}$ als unbekannte Funktion in (86) ein, so folgt

$$2\pi q_0 q_0 - \int\limits_{s=0}^{\infty} \int\limits_{\vartheta=0}^{2\pi} \alpha e^{-\int\limits_0^s \alpha ds} \varphi\, q\, ds\, d\vartheta = 0.$$

Nun ist

$$\alpha\, e^{-\int\limits_0^s \alpha ds} = -\frac{d}{ds}\left(e^{-\int\limits_0^s \alpha ds}\right).$$

[66]The following equation has no number in the typoscript, but it is referred to as (86) on the next page.

Also folgt durch partielle Integration nach s

$$\int_0^\infty \int_0^{2\pi} \alpha e^{-\int_0^s \alpha\, ds} \varphi q \, ds \, d\vartheta$$

$$= -\int_{\vartheta=0}^{2\pi} \varphi q e^{-\int_0^s \alpha\, ds} d\vartheta \Big|_0^\infty + \int_0^{2\pi} \int_0^\infty e^{-\int_0^s \alpha\, ds} \frac{\partial(\varphi q)}{\partial s} \, ds \, d\vartheta \tag{87}$$

$$= 2\pi \varphi_0 q_0 + \iint e^{-\int \alpha\, ds} \frac{\partial(\varphi q)}{\partial s} \, d\vartheta \, ds.$$

Die Integralgleichung ist also aequivalent mit der Gleichung

$$\int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-\int_0^s \alpha\, ds} \frac{\partial(\varphi q)}{\partial s} \, d\vartheta \, ds = 0.$$

Diese Gleichung wird aber offenbar befriedigt durch den Ansatz

$$\begin{aligned} \varphi q &= \text{const.} \\ \frac{\eta q}{\alpha} &= \text{const.}, \end{aligned} \tag{88}$$

da hierfür der Integrand identisch gleich Null wird.

Daher ist (88) eine Lösung unserer homogenen Integralgleichung (85).

Dass dieses nun die einzige Lösung ist, ist eine allgemeine Eigenschaft
66 einer Klasse von linearen Integralglei|chungen, welche sich folgendermassen formulieren lässt:[67]

Sei

$$\varphi(s) - \int_a^b K(s,t) \, \varphi(t) dt = 0$$

die vorgelegte Gleichung. Ist dann K eine symmetrische, im Innern beständig positive Funktion von s und t und hat die Gleichung eine im Innern nirgends verschwindende stetige Lösung $\psi(s)$, so ist diese Lösung notwendig die einzige Lösung.[68]

Um dies einzusehen, multiplizieren wir die Gleichung mit $\psi(s)$ und benutzen die Gleichung

$$\psi(s) = \int_a^b K(s,t) \, \psi(t) dt.$$

[67] Cf. *Hilbert 1912c*, ch. 2.

[68] The two occurrences of 'im Inneren' added in ink.

Dann können wir die vorgelegte Gleichung in folgender Gestalt schreiben:

$$\int_a^b K(s,t)\big[\psi(t)\varphi(s) - \psi(s)\varphi(t)\big]\,dt = 0. \tag{89}$$

Führen wir hier statt φ eine Funktion Φ durch die Gleichung

$$\Phi(s) = \frac{\varphi(s)}{\psi(s)}$$

ein, was wegen $\psi \neq 0$ immer möglich ist, multiplizieren alsdann die Gleichung (89) mit $\Phi(s)$ und integrieren nach s, so erhalten wir

$$\int_a^b\int_a^b K(s,t)\psi(s)\psi(t)[\Phi(s) - \Phi(t)]\Phi(s)dsdt = 0.$$

Durch Vertauschung der Variabeln s und t und Addition der so entstehenden Gleichung zu der obigen, ergibt sich

$$\int_a^b\int_a^b K(s,t)\ \psi(s)\ \psi(t)[\Phi(s) - \Phi(t)]^2 dsdt = 0.$$

Da nun nach Voraussetzung K und ψ ein festes Vorzeichen haben, so ist die Gleichung nur möglich, wenn der Integrand identisch Null ist, d. h.

67

$$\begin{aligned}\Phi(s) &= \text{const.}, \qquad (5)\\ \varphi(s) &= c\psi(s).\end{aligned}$$

Die Lösung φ ist also nur ein Multiplum von ψ, w.z.b.w.

Durch eine kleine Modifikation der vorstehenden Ueberlegung ergibt sich gleichzeitig die Tatsache, dass der Eigenwert $\lambda = 1$ der kleinste Eigenwert von K ist.

Wir wenden dies auf unsere Integralgleichung (85) an. Da wir ihre Gültigkeit nur für den Raum $\alpha \neq 0$ brauchen und sie für das übrige Gebiet durch die Forderung $\eta = 0$ ersetzt denken, so lässt sie sich in bekannter Weise in eine Integralgleichung mit symmetrischem Kern überführen, indem man

$$\psi = \frac{\eta}{\sqrt{\frac{\alpha}{q}}}$$

statt η als unbekannte Funktion einführt. Der Kern ist dann die symmetrische Funktion

$$K \cdot \sqrt{\frac{\alpha\alpha_0}{q\,q_0}},$$

welche höchstens am Rande des Integalgebietes verschwindet, und wie wir zeigten, ist die gleichfalls nur am Rande verschwindende Funktion

$$\psi = \sqrt{\frac{\alpha}{q}}$$

eine Lösung der Integralgleichung. Wir können dann den eben bewiesenen Satz anwenden, und erhalten das Resultat, dass unsere Integralgleichung in der Tat nur die Lösung (88) besitzt.

Wir haben uns nun noch zu überzeugen, dass die Singularitäten unseres Kernes von nicht zu hoher Ordnung sind. Was zunächst das Intervall anlangt, so würde, wenn wir es nach allen Richtungen ins Unendliche ausgedehnt den-
68 ken, | in der Tat eine zu hohe Singularität auftreten; das Doppelintegral über den Kern existiert dann nicht mehr, weil der Faktor

$$e^{-\int\limits_{x_0 y_0}^{xy} \alpha ds}$$

im Unendlichen keineswegs verschwindet. Unsere oben durchgeführte Schlussweise verliert dann auch ihre Gültigkeit. Z. B. ist bei $\alpha = 1$ ausser $\eta = \text{const.}$ auch noch $\eta = x$ und $\eta = y$ eine Lösung. Wir können uns daher nur durch geeignete Annahmen über α helfen. Dabei ist aber zu berücksichtigen, dass unsere partielle Integration in Gleichung (87) nur dann zu dem Resultat

$$\frac{\eta}{\alpha\, q} = \text{const.}$$

führt, wenn

$$e^{-\int\limits_{0}^{s} \alpha ds}$$

am Rande des Gebietes verschwindet. Die einfachste Annahme wäre daher die, dass ein endliches Gebiet nur in Frage kommt, und dass am Rande desselben α so gross wird, dass $e^{-\int \alpha ds}$ hier gleich Null wird. Allerdings würde dann durch den Faktor α eine Singularität hineinkommen.

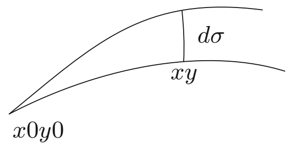
Eine wesentlichere Bedeutung haben aber die dem Kern selbst eigentümlichen Singularitäten, welche durch das Nullwerden von S entstehen. Zunächst verschwindet S an den Stellen

$$x = x_0, \quad y = y_0.$$

Betrachten wir nämlich die von x_0, y_0 ausgehenden Lichtstrahlen, so erkennt man, dass

$$q\, S = \frac{d\sigma}{d\vartheta}$$

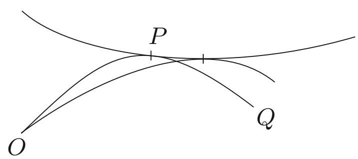
69



in der Nähe von x_0, y_0, da die Lichtstrahlen im Kleinen als gradlinig angesehen werden können, von derselben Ordnung klein ist wie die Entfernung der Punkte xy, x_0y_0, sodass also

$$\frac{S}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}$$

endlich bleibt. Diese Singularität von K ist also von der Ordnung 1 und noch zulässig. Dagegen treten weitere Singularitäten noch längs ganzer Kurven auf, nämlich an der Enveloppe der von x_0y_0 ausgehenden Lichtstrahlen.



Fasst man einen Lichtstrahl OPQ ins Auge, und ist P der Berührungspunkt desselben mit der Enveloppe der Schar, so heisst bekanntlich P der zu 0 konjugierte Punkt. Bis vor den Punkt P ist dieser Lichtstrahl wirklich eine Lösung unseres Variationsproblemes; dagegen hört die Minimaleigenschaft über den Punkt P hinaus auf.

Am Punkte P verschwindet S.[69] Ich möchte da behaupten, dass S längs der Enveloppe nur von der Ordnung $\frac{1}{2}$ ver|schwindet, sodass auch diese Sin- 70
gularitäten der ganzen Theorie der Integralgleichungen für unsere Gleichung nicht in Frage stellen. Indessen wäre über die Singularitäten eine strenge Untersuchung wünschenswert.[70]

Wenn wir nun annehmen, dass wir auf unsere Integralgleichung (85) die ganze Theorie der linearen Integralgleichungen anwenden dürfen, so können wir noch einen Schritt weiter gehen. Wir setzen nämlich voraus, dass über das ganze betrachtete Gebiet Wärmequellen von der Ergiebigkeit $W(x, y)$ verteilt sind, derart, dass

$$W\,dv\,dt$$

[69] The typoscript continues with the following passage in which spaces were left for handwritten variables, then, however, crossed out in ink:
‘Bewegt man sich nun auf dem Lichtstrahl und betrachtet S als Funktion der Bogenlänge s auf diesem Lichtstrahl, so ergibt sich aus der Differentialgleichung 2. Ordnung, welche wir für gefunden hatten, dass in als Funktion von genau in erster Ordnung verschwindet. Wir brauchen aber ihr Verhalten als Funktion der beiden Variabeln , ; ich...’

[70] For the discussion of admissible singularities, cf. *Hilbert 1912c*, ch. 6.

die von einem Element dv während dt erzeugte Wärme bedeutet. Als Bedingung für thermisches Gleichgewicht ergibt sich dann leicht die inhomogene Integralgleichung

$$\tilde{\eta}_0 - \frac{\alpha_0}{q_0} \iint K(x_0 y_0, xy)\tilde{\eta}(xy)dx\,dy = W_0. \tag{90}$$

Damit diese eine Lösung hat, ist nach der allgemeinen Theorie notwendig und hinreichend, dass W orthogonal zu den Lösungen der homogenen transponierten Gleichung ist.[28] Da nun hier die transponierte Gleichung die Lösung 1 und nur diese besitzt, wenn $\eta = \frac{\alpha}{q}$ die einzige Lösung der homogenen Gleichung (85) ist, so muss gelten

$$\iint W\,dx\,dy = 0, \tag{91}$$

wobei aber das Integral nicht nur über das Gebiet $\alpha \neq 0$, sondern über das ganze Gebiet zu erstrecken ist.

Ist diese Bedingung der Lösbarkeit erfüllt, so folgt aus (90) die Grösse $\tilde{\eta}$, aber noch nicht eindeutig; denn wenn $\tilde{\eta}$ eine Lösung von (90) ist, so ist auch
71 $\tilde{\eta} + c\frac{\alpha}{q}$ eine Lösung. | Welche von diesen Lösungen zu nehmen ist, kann nur das Experiment entscheiden. Ich möchte hier die Behauptung aufstellen, dass man unter $\tilde{\eta}$ diejenige Lösung der Gleichung (90) zu verstehen hat, welche ebenfalls die Orthogonalitätsbedingung

$$\iint (\tilde{\eta} - \eta)dx\,dy = 0$$

erfüllt, wobei η die Lösung der homogenen Gleichung bedeuten soll.

Wir wollen nun alles zusammenfassen, was wir bis jetzt bewiesen haben. Wir fanden (für die Ebene)

$$(1) \quad u = \frac{\eta}{\alpha q}, \qquad (2) \quad \frac{\eta q}{\alpha} = \text{const.}$$

Im Raum gelten dann die Beziehungen

$$(1) \quad u = \frac{\eta}{\alpha q} \qquad (2) \quad \frac{\eta q^2}{\alpha} = \text{const.} \tag{92}$$

Die Bezeichnung „const.“ soll bedeuten „unabhängig vom Orte“. Alles galt für eine bestimmte Schwingungszahl ν und für eine bestimmte Temperatur ϑ. Durch Kombination der beiden Gleichungen erhalten wir daher den Satz: Für alle Medien, welche im Strahlungsgleichgewicht mit einander stehen, ist der Ausdruck

$$u\,q^3$$

[28] See *Hilbert 1912c*.

dieselbe vollkommen bestimmte Funktion von ν und ϑ. Es ist also

$$uq^3 = F(\vartheta, \nu) \tag{93}$$

eine universelle Funktion von ϑ, ν, in welcher überhaupt keine Materialkonstanten mehr vorkommen.[71] F gibt die Energieverteilung im Spektrum an, und wir nennen den Strahlungszustand mit dieser Energieverteilung die *schwarze Strahlung* | oder Temperaturstrahlung. Es ist derjenige Zustand, welcher 72
sich in einem allseitig abgeschlossenen Raume herstellt, der einen im übrigen beliebig kleinen Rest von Materie enthält.[72] In einem vollkommen von Materie entblössten Raum sind η und $\alpha = 0$ und der Quotient $\frac{\eta}{\alpha}$ daher ohne Sinn. Hier sind auch andere stationäre Zustände möglich; erst durch die Materie kommt überhaupt der Begriff der Temperatur der Strahlung hinein.

Die Gleichung (93), welche das sog. *erste Kirchhoffsche Gesetz*[73] darstellt, können wir auch so interpretieren: Führen wir statt q

$$\lambda = \frac{q}{\nu}$$

ein, so ist λ eine Funktion des Ortes; aber es ist wieder

$$u\,\lambda^3$$

eine universelle Funktion von ϑ, ν; d. h. die in einem Wellenlängenkubus enthaltene Energie der Strahlung ist für alle Körper, welche in thermischem Gleichgewicht miteinander stehen, die gleiche.

Die in Gleichung (92) formulierten Aussagen bezeichnet man als den ersten Kirchhoffschen Satz.[74] Daneben tritt nun der sog. *2. Kirchhoffsche Satz*,[75] dessen Bedeutung jedoch gegen die des ersten erheblich zurücktritt. Es ist eine einfache Folgerung aus unserem Symmetriesatz und kann folgendermassen ausgesprochen werden:

Bei thermischem Gleichgewicht ist stets derjenige Teil der von einem Volumenelement 1 emittierten Energie, welcher | in einem anderen Volumen- 73
element 2 absorbiert wird, gleich demjenigen Teil, welcher von 2 emittiert und in 1 absorbiert wird.

Wir führen den Beweis wieder für die Ebene:

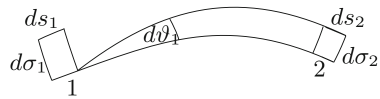
[71]In *Hilbert 1912a*, p. 787, Hilbert remarked: 'Dieser Satz erscheint hier als eine tiefliegende mathematische Wahrheit, deren Inhalt durch das physikalische Experiment gefunden und auf Grund physikalischer Kombinationen dessen Beweis aber erst mittels der Theorie der Integralgleichungen möglich wird.'

[72]Planck imagined a little coal particle ('Kohlestäubchen') sitting in an otherwise evacuated cavity to ensure radiation equilibrium, cf. e.g. *Planck 1906*, pp. 66–67.

[73]In *Kirchhoff 1860*, pp. 597–598, this law is an appended conclusion from his theorems. There is no second law of Kirchhoff.

[74]Cf. *Kirchhoff 1860*, p. 575; since Kirchhoff did not consider a position-dependent velocity q both formulae coincide.

[75]Cf. *Kirchhoff 1860*, 583.



Das in 1 gelegene Volumen $ds_1 \cdot d\sigma_1$ emittiert Energie im Oeffnungswinkel $d\vartheta_1$ nach dem Volumen 2; der Betrag dieser, während der Zeit dt emittierten Energie ist

$$\eta_1 d\sigma_1 ds_1 \frac{d\vartheta_1}{2\pi} dt.$$

Infolge der Absorption längs des Weges $1 \cdots 2$ kommt in 2 nur der Bruchteil $e^{-\int_1^2 \alpha ds}$ davon an. Und davon wird in 2 absorbiert der Bruchteil $\alpha_2 ds_2$. Es ist also die in 1 während dt emittierte und in 2 absorbierte Energie gleich

$$A_1 = \eta_1 d\sigma_1 ds_1 \frac{d\vartheta_1}{2\pi} dt \cdot \alpha_2 \cdot ds_2.$$

Entsprechend ist

$$A_2 = \eta_2 d\sigma_2 ds_2 \frac{d\vartheta_2}{2\pi} dt\, \alpha_1 ds_1,$$

also

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\eta_1\, \alpha_2\, d\sigma_1\, d\vartheta_1}{\eta_2\, \alpha_1\, d\sigma_2\, d\vartheta_2}.$$

Nun ist nach dem ersten Kirchhoffschen Satz

$$\frac{\eta_1 q_1}{\alpha_1} = \frac{\eta_2 q_2}{\alpha_2},$$

also

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{q_2}{q_1} \frac{d\sigma_1 d\vartheta_1}{d\sigma_2, d\vartheta_2} = \frac{\frac{1}{q_1} \frac{d\sigma_1}{d\vartheta_2}}{\frac{1}{q_2} \frac{d\sigma_2}{d\vartheta_1}}.$$

74 Dieser Quotient ist aber nach dem Symmetriesatz gleich 1, | daher

$$A_1 = A_2,$$

w.z.b.w.

12. Kapitel.

Die Energieverteilung der schwarzen Strahlung.

Die Hauptaufgabe der Strahlungstheorie ist nun die Ermittelung der universellen Funktion $F(\vartheta, \nu)$, deren Existenz die im vorigen Kapitel entwickelte elementare Strahlungstheorie bewiesen hat. Zu diesem Zwecke müssen wir die Resultate der Elektrodynamik heranziehen, überhaupt einen Zusammenhang zwischen den Begriffen der Strahlungstheorie und der Elektrodynamik herstellen.

Ausserdem müssen wir die Gültigkeit der im vorigen Kapitel entwickelten Gesetze in etwas erweitertem Masse annehmen. Wir wollen sie auch dann als gültig ansehen, wenn das Medium sich in *unendlich langsamer Bewegung* befindet.[76]

Unter Anwendung der Gesetze der Reflexion an einem bewegten Spiegel wird es uns dann gelingen, die unbekannte Funktion $F(\vartheta, \nu)$ zweier Argumente zurückzuführen auf eine unbekannte Funktion nur eines Argumentes.

Wir haben zunächst noch einiges nachzutragen über den bewegten Spiegel.[77] Das Reflexionsgesetz hatten wir in der Form gefunden (Gleichung (62)):

$$a_1 - a_2 = \lambda \mathfrak{b}.$$

Verstehen wir nun unter α_1, α_2 die Winkel der Wellennormalen gegen die 75
Spiegelnormale, so finden wir hieraus leicht die beiden Gleichungen:

$$\mathfrak{v}(\nu_1 \cos\alpha_1 + \nu_2 \cos\alpha_2) = \nu_1 - \nu_2,$$
$$\nu_1 \cos\alpha_1 - \nu_2 \cos\alpha_2 = \mathfrak{v}_n(\nu_1 + \nu_2),$$

durch welche ν_2, α_2 als Funktionen von ν_1, α_1 gegeben sind. Man sieht, dass für den ruhenden Spiegel, $\mathfrak{v}_n = 0, \nu_1 = \nu_2$ und $\alpha_1 = \alpha_2$ wird. Nun entnehmen wir aus der ersten Gleichung:

$$\nu_2 = \nu_1 \frac{1 - \mathfrak{v}_n \cos\alpha_2}{1 + \mathfrak{v}_n \cos\alpha_1} = \nu_1(1 - \mathfrak{v}_n(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2) + \cdots).$$

Indem wir höhere als die erste Potenz von $\mathfrak{v}_n$ vernachlässigen, können wir die Gleichung in der Form

$$\nu_2 = \nu_1(1 - 2\mathfrak{v}_n \cos\alpha_1) \tag{94}$$

schreiben.

Nunmehr denken wir uns in eine Hohlkugel, deren Wand absolut spiegelt, eine Strahlung eingeschlossen.[78] Im Innern soll, abgesehen von einem materiellen Stäubchen, dessen Anwesenheit aus der Strahlung eine schwarze Strahlung macht, freier Äther sein. Jetzt denken wir uns die Wand beweglich, derart, dass unendlich langsam sich die Kugel komprimiert oder dilatiert. Der Radius R der Kugel ist dadurch eine Funktion der Zeit. Im Verlaufe der Bewegung bleibt die Strahlung schwarz, da der Vorgang unendlich langsam verläuft, dagegen ändert sich die Temperatur, denn durch die Kompression der Kugel wird ja gegen den Strahlungsdruck Arbeit geleistet.

Wir verfolgen nun einen vom Mittelpunkt der Kugel ausgehenden Strahl,
dessen Schwingungszahl ν sei. Beim Auf|treffen auf die Wand wird er reflektiert, 76

[76] This idea of an adiabatic expansion was introduced in *Wien 1893*.

[77] Cf. *Abraham 1908*, §42.

[78] The following discussion follows loosely *Wien 1909*, 296–299, as indicated below on p. 81.

und verändert seine Schwingungszahl gemäss der Gleichung (94). Die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_n$ ist an allen Punkten der Wand dieselbe, wir setzen sie gleich w. Der Einfallswinkel α_1 ist gleich Null, sodass also nach einmaliger Reflexion der Schwingungszahl ν in

$$\nu(1-2w) \tag{95}$$

übergegangen ist. Während einer Zeit dt geht nun ein Strahl $\frac{dt}{2R}$ mal hin und her und bei jeder Reflexion erhält die Schwingungszahl den Faktor $1-2w$, sodass nach der Zeit dt aus ν die Schwingungszahl

$$\nu(1-2w)^{\frac{dt}{2R}} = \nu(1-\frac{w}{R}dt) \tag{96}$$

geworden ist. Wenn wir also die Schwingungszahl als Funktion der Zeit t, oder da diese als Funktion von R angesehen werden kann, ν als Funktion von R betrachten, so folgt aus (96)

$$\begin{aligned} d\nu &= -\frac{w}{R}\nu\, dt = -\frac{\nu}{R}\frac{dR}{dt}\, dt \\ \frac{d\nu}{\nu} &= -\frac{dR}{R}. \end{aligned} \tag{97}$$

Wir haben diese Beziehung nur für den Mittelpunkt der Kugel abgeleitet. Da wir aber nur unendlich langsame Vorgänge betrachten, so ist in jedem Augenblick thermisches Gleichgewicht vorhanden und die Beziehung (97) gilt daher an jedem Orte. Es ist indessen durch eine Modifikation auch möglich, ihre Richtigkeit direkt zu beweisen. Lässt man nämlich von einem beliebigen Punkte einen Strahl ausgehen, welcher in dem Einfallswinkel α auf die Kugelfläche trifft, so erkennt man leicht, dass er nach jeder Reflexion wieder unter dem Winkel α auffällt, und zwischen je 2 Reflexionen legt er genau den Weg $2\cdot R\cdot\cos\alpha$ zurück. Gemäss der Formel (94) verändert sich bei jeder Reflexion
77 seine Schwingungszahl um den | Faktor

$$1-2w\cos\alpha,$$

also nach der Zeit dt um den Faktor

$$(1-2\,w\,\cos\alpha)^{\frac{dt}{2R\cos\alpha}},$$

woraus wieder die Gleichung (97) folgt.

Jetzt wollen wir die Energie ϵ_ν berechnen, welche der gesamten in der Kugel vorhandenen Strahlung von der Schwingungszahl ν zukommt. Ist v das Volumen der Kugel, so ist

$$\epsilon_\nu = u_\nu\cdot v = \Phi(\nu, v),$$

und zwar eine reine Funktion $\Phi(\nu, v)$ von ν, v. Die Temperatur denken wir uns dabei als abhängig von v. Bedenken wir nun, dass diese gesamte Energie durch Änderung von v um dv in Energie von der Schwingungszahl $\nu + d\nu$ übergeht, wobei sich $d\nu$ aus (97) bestimmt, so folgt

$$\Phi(\nu + d\nu, v + dv) = \Phi(\nu, v),$$

wenn

$$\frac{d\nu}{\nu} = -\frac{dR}{R} = -\frac{1}{3}\frac{dv}{v}.$$

Also

$$\frac{\partial\Phi}{\partial v}dv + \frac{\partial\Phi}{\partial\nu}d\nu = 0$$
$$3v\frac{\partial\Phi}{\partial v} - \nu\frac{\partial\Phi}{\partial\nu} = 0.$$

D. h. [79]

$$\Phi \text{ ist nur Funktion von } \nu^3 v. \tag{99}$$

Dazu kommt nun noch eine Beziehung zwischen Druck und Energiedichten. Wir können sie aus der reinen Elektrodynamik ableiten. Da aus Symmetriegründen allseitig gleicher Druck herrschen muss, so sind die 3×3 räumlichen Elemente des Maxwellschen Spannungstensors σ mit Ausnahme der Diagonal|glieder gleich Null, während 78

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -p$$

ist. Anderseits ist stets in dem Tensor σ die Summe der vier Diagonalelemente gleich Null; da das letzte die elektromagnetische Energiedichte E ist, finden wir

$$-3p + E = 0,$$
$$p = \frac{E}{3}.$$

Dieses E ist die Energiedichte der gesamten Strahlung, es ist also zu setzen

$$E = u = \int_0^\infty u_\nu d_\nu,$$

sodass also

$$p = \frac{u}{3}. \tag{100}$$

Diese selbe Beziehung können wir auch rein aus der Thermodynamik ableiten. Ist nämlich ϵ die gesamte Energie in Volumen, so ist nach thermodynamischen Gesetzen

$$\left(\frac{\partial\epsilon}{\partial v}\right) = -p, \tag{101}$$

[79] There is no equation (98).

wobei die Differentiation bei konstanter Entropie zu verstehen ist.

Der Vorgang, den wir hier studiert haben, verläuft nun aber unendlich langsam und adiabatisch. Daher lässt er die Entropie ungeändert. Wir haben also, um die Gleichung (101) anzuwenden

$$u \cdot v = \epsilon = \int_0^\infty \Phi(\nu^3 v) d\nu$$

zu setzen, und dies nach der einzigen darin vorkommenden Variabeln v zu differentiieren. Nun ist

79

$$\begin{aligned} \frac{\partial \epsilon}{\partial v} &= \int_0^\infty \Phi' \nu^3 \, d\nu = \frac{1}{3v} \int_0^\infty \nu \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} \, d\nu \\ &= \frac{1}{3v} \nu \Phi \Big|_0^\infty - \frac{1}{3v} \int_0^\infty \Phi \, d\nu \\ &= -\frac{\epsilon}{3v} = -\frac{u}{3}, \end{aligned}$$

also wiederum die Gleichung (100).

Mit Hilfe der Gleichung (99) und (100) werden wir nun auf Grund thermodynamischer Prinzipien endlich unsere unbekannte Funktion $u_\nu = F(\vartheta, \nu)$ auf einfachere Funktionen zurückführen können.

Sei $\mathfrak{F}$ die „freie Energie", eine Funktion von ϑ und v. Dabei soll aber $\mathfrak{F}$ sich auf die ganze Kugel, nicht auf die Volumeneinheit beziehen. Es ist dann bekanntlich

$$\begin{aligned} \text{Entropie} \quad \eta &= \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \vartheta}, \\ p &= \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial v}. \end{aligned}$$

Anderseits besteht zwischen Energie und freier Energie allgemein die Beziehung

$$\begin{aligned} \mathfrak{F} &= \eta \, \vartheta - \epsilon \\ &= \vartheta \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \vartheta} - \epsilon, \end{aligned}$$

woraus in unserem Falle wegen

$$\epsilon = u \, v = 3 \, p \, v$$

sich für $\mathfrak{F}$ die partielle Differentialgleichung

$$\mathfrak{F} = \vartheta \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \vartheta} - 3 \, v \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial v}$$

ergibt. Hieraus findet man, unter W eine willkürliche Funktion verstanden,

$$\mathfrak{F} = \vartheta \cdot W(v\,\vartheta^3).$$

80 Da nun $\mathfrak{F}$ notwendig proportional dem Volumen sein muss, so ist W eine lineare Funktion, und man findet daher

$$\mathfrak{F} = v\vartheta^4. \tag{102}$$

Diese einfache Gleichung beschreibt das thermodynamische Verhalten unserer Hohlraumstrahlung. Wir sehen, dass der zweite Parameter v nur künstlich hineingebracht ist. Würden wir alles auf die Volumeneinheit beziehen, wie es in der Thermodynamik üblich ist, so wäre alles nur von dem einen Parameter ϑ abhängig. In diesem Sinne ist die Hohlraumstrahlung als die denkbar einfachste Substanz zu bezeichnen.

Aus (102) ergibt sich nun der Reihe nach[80]

$$\begin{aligned} p &= \vartheta^4, \\ \eta &= 4v\vartheta^3, \\ \epsilon &= 3v\vartheta^4. \end{aligned} \tag{103}$$

Aus der zweiten dieser Gleichungen ergibt sich endlich unser gesuchtes Resultat. Da die unendlich langsame adiabatische Kompression der Hohlraumstrahlung die Entropie konstant lässt, so ist aus (103) v als Funktion von ϑ bekannt. Setzen wir dies in

$$\epsilon_\nu = u_\nu \cdot v = \Phi(\nu^3 v)$$

ein und berücksichtigen, dass u_ν die Entropie gar nicht enthalten kann, so erkennen wir, dass

$$\begin{aligned} u_\nu &= \frac{\epsilon_\nu}{v} = \Phi\left(\frac{\nu^3}{\vartheta^3} \cdot v\vartheta^3\right) \cdot \frac{\vartheta^3}{v \cdot \vartheta^3}, \\ u_\nu &= \vartheta^3 \varphi\left(\frac{\vartheta}{\nu}\right), \end{aligned} \tag{104}$$

oder auch

$$u_\nu = \nu^3 \psi\left(\frac{\vartheta}{\nu}\right)$$

sein muss. Damit ist $F(\vartheta, \nu)$ auf eine unbekannte Funktion des einen Argu- 81
ments $\frac{\vartheta}{\nu}$ reduziert.

Die Formel (104) spricht das *Stefan-Boltzmann-Wiensche Gesetz* aus.[81] Die Abteilung,[82] welche ich hier gegeben habe, geht auf eine Idee von Wien

[80] The third relation expresses the Stefan-Boltzmann law $u = const.\vartheta^4$ with $u = \frac{\epsilon}{v}$.

[81] Hilbert used the terminology from *Abraham 1908*, p. 341f.

[82] "Abteilung" should be "Ableitung".

zurück.[83] Der von Abraham in dem 2. Bande seines Lehrbuches gegebene Beweis scheint mir dagegen in der Form nicht einwandfrei zu sein.[84]

Wir wollen von unserer Formel eine einfache Anwendung machen. Indem wir zunächst die Energie statt auf Schwingungszahlen auf die Wellenlängen $\lambda = \frac{1}{\nu}$ beziehen, erhalten wir für die in einem Intervall $\lambda \cdots \lambda + d\lambda$ gelegene Energiemenge

$$u_\nu \left| \frac{d\nu}{d\lambda} \right| d\lambda = \frac{u_\nu}{\lambda^2} d\lambda = \frac{\psi(\lambda\,\vartheta)}{\lambda^5} d\lambda.$$

Wir wollen nun ermitteln, an welchen Stellen des Spektrums bei konstanter Temperatur die Energiedichte

$$u^\times(\lambda) = \frac{1}{\lambda^5}\psi(\lambda\,\vartheta)$$

am grössten ist. Wir finden hierfür die Gleichung

$$\frac{\vartheta}{\lambda^5}\psi' - \frac{5}{\lambda^6}\psi = 0$$

oder

$$\lambda\,\vartheta\psi' - 5\psi = 0$$

oder, wenn wir $\lambda\,\vartheta = M$ setzen,

$$M\psi'(M) - 5\psi(M).$$

Hieraus findet man für M einen numerischen Wert. Die Wellenlänge mit maximaler Energie findet man daher aus der Gleichung

$$\lambda\,\vartheta = M,$$

82 und man sieht, dass mit wachsender Temperatur diese Stelle nach dem violetten Ende des Spektrums, wo λ kleiner ist, hinrückt.[85]

Durch das Wiensche Gesetz sind wir weiter in der Lage, Energie von beliebig gegebener Farbe eine bestimmte Temperatur zuzuordnen. Wir ordnen ihr nämlich diejenige Temperatur zu, welche sie bei ihrer Dichte und Farbe innerhalb einer schwarzen Strahlung haben würde. Ebenso besitzt nun auch die Strahlung von jeder Farbe auch[86] eine Entropie, die sich aus thermodynamischen Prinzipien berechnen lässt.

---

[83] See footnote 78 above.

[84] Cf. *Abraham 1905*, p. 357, *Abraham 1908*, p. 340f. This opinion was not shared by Planck, cf. his letters to Hilbert of 20 October 1912 and 24 January, 1913 (SUB Göttingen, signature *Cod. Ms. D. Hilbert 308A*), items 2 and 3.

[85] For the original derivation of this law, see *Wien 1893*. The term displacement law was introduced later, cf. *Kangro 1970*, p. 47.

[86] "auch" deleted in ink.

Ist u_ν die Energiedichte,[87] so gilt für die Entropiedichte η_ν

$$\vartheta = \left(\frac{\partial u_\nu}{\partial \eta_\nu}\right)_v = \frac{du_\nu}{d\eta_\nu} \quad ; \text{ also } \vartheta \left(\frac{d\eta_\nu}{d\vartheta}\right)_v = \left(\frac{du_\nu}{d\vartheta}\right)_v ;$$

die Schwingungszahl ν ist hierbei ja gar nicht als veränderlich anzusehen. Man findet hieraus leicht

$$\eta_\nu = \nu^2 \sigma \left(\psi\left(\frac{\vartheta}{\nu}\right)\right).$$

Hierin ist gesetzt
$\sigma(x) = \int \frac{dx}{\chi(x)}$, wobei χ die zu ψ inverse Funktion bedeutet. Man erkennt, dass die gesamte im Volumen v und im Intervall $d\nu$ enthaltene Entropie

$$\eta_\nu \cdot v \cdot d\nu = \frac{1}{3}\sigma\left(\psi\left(\frac{\vartheta}{\nu}\right) d(\nu^3 v)\right).$$

bei adiabatischer Änderung konstant bleibt, da sowohl $\nu^3 v$ wie $\vartheta^3 v$ konstant bleibt.

Ohne ein neues Axiom lässt sich nun über die Funktion ψ der einen 83
Variabeln $\frac{\vartheta}{\nu}$ nichts weiter aussagen. Um ψ festzulegen, muss vielmehr ein ganz neuer Gedanke hinzutreten. Ich will hier der historischen Reihenfolge nach die Ansätze, die man hier gemacht hat, auseinandersetzen. Sie alle haben Ueberlegungen aus der statistischen Theorie gemeinsam.

Die einfachste, aber auch roheste Annäherung an die wirklichen Verhältnisse wird durch eine Idee von Lord Rayleigh erreicht, indem er an den *Jeansschen Kubus* anknüpft.[88] Er setzt die Schwingungen, welche in einem solchen spiegelnden Kubus stattfinden, in Analogie mit den Molekülen eines Gases. Bei einer bestimmten Temperatur ϑ ist die mittlere kinetische Energie eines Gasmoleküls für jeden Freiheitsgrad

$$\frac{1}{2}k\vartheta.$$

Ebenso soll nun jeder einzelnen Schwingung in dem Kubus für jeden Freiheitsgrad diese Energie zugeteilt werden. Nun hatten wir früher in Kap. 8) gesehen, dass eine einzelne Schwingung, wie sie durch die Gleichung (44) dargestellt wird, noch vier Parameter enthält. Diese vier Freiheitsgrade entsprechen den drei Schwerpunktskoordinaten des Gasmoleküls. Dementsprechend erhält also eine einzelne Schwingung die Energie

$$4 \cdot \frac{1}{2}k\vartheta = 2k\vartheta \tag{105}$$

zuerteilt. Nun haben wir abzuzählen, wieviel verschie|dene Schwingungen im 84

[87] The preceding half sentence was corrected in ink from: “Ist E_ν die Energie im Volumen v”.

[88] The original papers are *Rayleigh 1900*, *Rayleigh 1905*; for further discussion, see *Wien 1909*, 322–326, and also *Kuhn 1978*, 144–152.

Intervall $\nu \cdots \nu + d\nu$ liegen. Wie aus den Formeln des 8. Kapitel hervorgeht (Gleichungen (45), (46)), haben wir nur zu sehen, für wieviel positive ganzzahlige Wertsysteme $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ die Ungleichung

$$4\nu^2 \leqq \mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2 + \mathfrak{c}^2 \leqq 4(\nu + d\nu)^2$$

erfüllt ist. Betrachten wir vorerst auch negative $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$, so ist die Anzahl der Lösungen jener Ungleichung asymptotisch gleich dem Volumen einer Kugelschale mit den Radien 2ν und $2(\nu + d\nu)$, also gleich

$$4\pi\,(2\nu)^2\, 2d\nu = 32\,\pi\,\nu^2 d\nu.$$

Da wir nur positive Werte $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ zulassen, so haben wir hiervon den achten Teil zu nehmen, um die richtige Anzahl

$$4\pi\,\nu^2\, d\nu \tag{106}$$

zu erhalten. Soviel Schwingungen liegen also im Frequenzintervall $\nu \cdots \nu + d\nu$ in einem Kubus von der Kantenlänge 1, und jede einzelne erhält die Energie (105). Daher wird die gesamte Energiedichte für dieses ν, ϑ

$$u_\nu = 4\pi\,\nu^2 \cdot 2k\vartheta = 8\pi\nu^2 k\vartheta. \tag{107}$$

Diese Formel heisst das *Rayleighsche Strahlungsgesetz*.[89] Es ordnet sich zunächst unter das allgemeine Wiensche Verschiebungsgesetz unter, welches durch (104) ausgedrückt wird. Wir haben da nur

$$\psi(x) = 8\pi k x$$

zu setzen. Es ist nun sehr merkwürdig, dass durch diese kühne Idee von Rayleigh tatsächlich eine verhältnismässig gute Annäherung an die Wirklichkeit erreicht wird. Für kleine Schwingungszahlen stimmt nämlich die Formel (107) sehr gut mit den Ergebnissen des Experiments.

85 Dass sie für alle ν wenigstens ungefähr stimmt, ist aber von vornherein nicht zu erwarten. Denn die gesamte Energie

$$\int_0^\infty u_\nu d\nu$$

würde ja unendlich gross werden, wenn die Formel (107) auch für grosse ν richtig wäre. Um hier eine vernünftige Formel zu erhalten, ist ein ganz neuer Gedanke nötig: Wir müssen in die Strahlung eine kleine Menge Materie hineinbringen, repräsentiert durch das einfachste elektromagnetische Atommodell, welches wir im Kapitel 6) untersucht haben.[90]

[89] Historically, this is not the law proposed in *Rayleigh 1900*, but rather what was later called the Rayleigh-Jeans law following *Rayleigh 1905* and *Jeans 1905*, see *Kuhn 1978*, 144–152, for further discussion.

[90] See p. 56 of the lecture notes above.

13. Kapitel.

Ein Resonator unter Wirkung einer Strahlung.

Im Kapitel 6) hatten wir die Bewegungsgleichungen für einen schwingenden Dipol aufgestellt. Einen solchen Dipol oder Resonator denken wir uns nun in unsere Hohlraumstrahlung versetzt und wollen sehen, in welcher Weise sich zwischen der Strahlung und dem Resonator die Energie umsetzt, um daraus einen Schluss auf die Energieverteilung u_ν machen zu können.

Wir wollen wieder annehmen, der Oszillator schwinge nur in der x-Richtung. Nennen wir $\mathfrak{E}$ den Vektor des äusseren Feldes, e die Ladung des negativen Elektrons, m dessen elektromagnetische Masse, R seinen Radius, so gibt die Gleichung (43)

86
$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x - \frac{5}{6}R\frac{d^3x}{dt^3} = \frac{e}{m}\mathfrak{E}_x.$$

Hierbei haben wir noch t statt τ geschrieben. Die homogene Gleichung liefert zuerst die Eigenschwingung der Resonators. Diese Differentialgleichung 3. Ordnung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x - \frac{5}{6}R\frac{d^3x}{dt^3} = 0 \tag{108}$$

ist nun, wie aus ihrer Herleitung ersichtlich ist, nur unter Weglassung von Gliedern mit höheren Potenzen von R gültig, und die Lösungen desselben haben wir uns ebenfalls noch Potenzen von R entwickelt zu denken. Tut man das aber, so erkennt man, dass die Gleichung (108) nur zwei Willkürlichkeiten enthält und den Charakter einer Differetialgleichung 2. Ordnung besitzt. Durch Angabe von Ort und Geschwindigkeit bei $t = 0$ ist die Bewegung des Elektrons vollkommen festgelegt.

Dementsprechend finden wir, unter Vernachlässigung zweiter und höherer Potenzen von R, leicht die allgemeine Lösung von (108) mit zwei Integrationskonstanten c, φ:

$$x = c\, e^{-\frac{5}{12}Rk^2t}\cos(kt - \varphi).$$

Führen wir die Schwingungszahl ν_A durch

$$k = 2\pi\nu_A$$

ein, ebenso noch

$$\sigma = \frac{5}{6}\pi kR,$$

so ergibt sich

$$x = ce^{-\sigma\nu_A t}\cos(2\pi\nu_A t - \varphi). \tag{109}$$

Nun lassen wir auf den Resonator eine einfache ebene Welle auffallen, indem wir setzen

87
$$\mathfrak{E}_x = \mathfrak{C}\cos[2\pi\nu(t - x) - \vartheta].$$

Wir brauchen den Wert von $\mathfrak{E}$ nur an der Stelle, wo der Oszillator gerade ist, und nehmen daher einfach in dem Ausdruck für $\mathfrak{E}_x x = 0$. Man findet dann zunächst eine Lösung der inhomogenen Gleichung, nämlich

$$x = \frac{3}{e}\frac{\mathfrak{E}}{16\pi^3\nu^3}\frac{\cos(2\pi\nu t - \vartheta - \gamma)}{\sqrt{t + \frac{\pi^2}{\sigma^2}\left(\frac{\nu_A}{\nu}\right)^2\left\{\frac{\nu_A^2}{\nu^2} - 1\right\}^2}},$$

wobei sich der Winkel γ bestimmt aus

$$\cot\gamma = \frac{\pi}{\sigma}\frac{\nu_A}{\nu}\left\{\frac{\nu_A^2}{\nu^2} - 1\right\}.$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung erhält man aus dieser, indem man eine beliebige Lösung der homogenen Gleichung hinzufügt; wir denken uns aber t so gross gewählt, dass wegen des Exponentialfaktors in (109) dieser Teil zu vernachlässigen ist; die Schwingungen des Oszillators hängen daher für grosse Zeiten nicht mehr von dem Anfangszustande, sondern nur von der auffallenden Welle ab. Die gesamte Energie, welche der Resonator besitzt, setzt sich aus kinetischer und potentieller Energie zusammen; sie ist gleich

$$4\pi\left(\frac{m}{2}x'^2 + \frac{m}{2}k^2x^2\right) \langle D\rangle$$

Also ist der zeitliche Mittelwert der Resonatorenergie unter Wirkung jener einzelnen Welle

88
$$E_A = \frac{3\nu_A}{\nu}\left\{\frac{\nu_A^2}{\nu^2} + 1\right\}\frac{\mathfrak{E}^2}{16\pi\sigma\nu^3}\frac{1}{1 + \frac{\pi^2}{\sigma^2}\left(\frac{\nu_A^2}{\nu^2}\right)\left\{\frac{\nu_A^2}{\nu^2} - 1\right\}^2}$$
$$= \frac{3\nu_A}{\nu}\left\{\frac{\nu_A^2}{\nu^2} + 1\right\}\frac{\mathfrak{E}^2\sin^2\gamma}{16\pi\sigma\nu^3}.$$

Jetzt lassen wir auf den Resonator eine ungeordnete schwarze Wellenstrahlung auffallen. Sie ist durch ihre Energieverteilung $u(\nu)$ vollkommen gegeben. Um sie analytisch darzustellen, wählen wir eine sehr grosse Zahl T und setzen dann für jede ganze[91] Zahl n

$$\mathfrak{C}_n = \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{u\left(\frac{n}{T}\right)}{T}}.$$

Mit diesen Koeffizienten $\mathfrak{C}_n$ und geeignet zu wählenden Phasen ϑ_n bilden wir dann die Fourierreihe

$$\mathfrak{E}_x = \sum_{n=0}^{\infty}\mathfrak{C}_n\cos\left(\frac{2\pi nt}{T} - \vartheta_n\right),$$

[D] Der Faktor 4π muss wegen der Einheiten gewählt werden.

[91] "ganze" was corrected from "grosse".

welche in der Tat eine Strahlung mit der Energieverteilung $u(\nu)$ darstellt.[E] Bilden wir nämlich[92] den zeitlichen Mittelwert von $\mathfrak{E}_x^2$, so sieht man, dass wegen der Orthogonalität der cos und sin die Energie sich additiv aus den Partialenergien zusammensetzt, derart, dass die in einem Intervall $\nu = \frac{n}{T}$ bis $\nu + d\nu = \frac{n}{T} + \frac{n'}{T}$ enthaltene Energie gleich

$$3\overline{\mathfrak{E}_x^2} = \frac{3}{2}\sum_{n}^{n+n'} \mathfrak{E}_n^2 = u(\nu)d\nu$$

wird.

Es bliebe nur noch zu zeigen, dass die Darstellung von $\mathfrak{E}$ wesentlich von T unabhängig ist.

Wenn wir nun die Energie des Atomes durch die | Constanten der auffal- 89
lenden Welle ausdrücken, so findet man nach obiger Formel

$$E_A = \frac{3\nu_A}{16\pi\sigma}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\nu_A^2}{\nu^2}+1\right)\mathfrak{E}_n^2}{\nu^4\left\{1+\frac{\pi^2}{\sigma^2}\frac{\nu_A^2}{\nu^2}\left(\frac{\nu_A^2}{\nu^2}-1\right)^2\right\}},\ \nu = \frac{n}{T},$$

oder wenn wir

$$\mathfrak{E}_n^2 = \frac{2}{3}\frac{u(\nu)}{T}$$
$$\frac{1}{T} = d\nu$$

setzen:

$$E_A = \frac{\nu_A}{8\pi\sigma}\int_0^{\infty} \frac{\left(\frac{\nu_A^2}{\nu^2}+1\right)u(\nu)d\nu}{\nu^4\left\{1+\frac{\pi^2}{\sigma^2}\frac{\nu_A^2}{\nu^2}\left(\frac{\nu_A^2}{\nu^2}-1\right)^2\right\}}.$$

Nun nehmen wir statt ν die Integrationsvariable

$$x = \frac{\pi}{\sigma}\left(\frac{\nu}{\nu_A}-1\right)\ ,\ d\nu = \frac{\sigma\nu_A}{\pi}dx$$
$$\frac{\nu}{\nu_A} = \frac{\sigma x}{\pi}+1,$$

so wird

$$E_A = \frac{1}{8\pi^2\nu_A^2}\int_{-\frac{\pi}{\sigma}}^{\infty} \frac{[1+\left(1+\frac{\sigma x}{\pi}\right)^2]u\left(\frac{\sigma x\nu_A}{\pi}+\nu_A\right)dx}{\left(\frac{\sigma x}{\pi}+1\right)^6+\frac{\pi^2}{\sigma^2}\left\{1-\left(\frac{\sigma x}{\pi}+1\right)^2\right\}^2}$$

[E] Wegen der Gleichmässigkeit der Strahlung nach allen Richtungen und da die Energie sich auch gleichmässig auf $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{M}$ verteilt, muss die Energiedichte der Strahlung im Mittel $\frac{1}{2}\overline{(\mathfrak{E}^2+\mathfrak{M}^2)} = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot\overline{\mathfrak{E}}_x^2 = 3\overline{\mathfrak{E}}_x^2$ sein.

[92] "nämlich" substituted in ink for "dann".

und für Limes $\sigma = 0$ (d. h. Elektronenradius $= 0$)[93]

$$E_A = \frac{1}{8\pi^2\nu_A^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2u(\nu_A)dx}{1+4x^2} = \frac{u(\nu_A)}{8\pi^2\nu_A^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{8\pi}\frac{u(\nu_A)}{\nu_A^2}.$$

Diese Formel drückt die Energie des Atoms durch die Energiedichte der schwarzen Strahlung aus, die der Eigenfrequenz des Atoms entspricht.

90 Die Formel

$$U_\nu = \frac{u_\nu}{8\pi\nu^2} \tag{110}$$

setzt die Energie des Resonators oder Atommodells mit der Energiedichte der Hohlraumstrahlung in Verbindung. Denken wir uns also eine grosse Anzahl solcher Atommodelle mit verschiedenen Eigenfrequenzen im Gleichgewicht mit einer schwarzen Strahlung, so können wir u_ν dadurch ermitteln, dass wir die Energieverteilung U_ν auf diese Resonatoren oder Atome nach den Methoden der Gastheorie berechnen. Auf jeden Freiheitsgrad kommt demnach die Energie

$$\frac{1}{2}k\vartheta.$$

Dem Resonator haben wir bei unseren Annahmen zwei Freiheitsgrade zuzuschreiben, indem hier auch die potentielle Energie besonders zu zählen ist. So wird

$$U_\nu = k\vartheta$$

und

$$u_\nu = 8\pi\nu^2 k\vartheta.$$

Wir erhalten also wiederum das Rayleighsche Strahlungsgesetz, dessen Unhaltbarkeit wir bereits oben eingesehen haben.

Um aus diesen Schwierigkeiten herauszukommen, wollen wir nach *Planck* die statistische Ueberlegung, welche auf die Energieverteilung $\frac{1}{2}k\vartheta$ führt, einmal durchsehen und werden erkennen, dass sie uns zu einer brauchbaren Formel führt, wenn wir den letzten Grenzübergang, den man sonst dabei macht, nicht ausführt.

91 Wir haben also folgendes *Problem*:

Eine gegebene Energiemenge E ist auf N Moleküle (Resonatoren) mit denselben ν_A zu verteilen. Dabei stellen wir als Axiom an die Spitze, dass im Gleichgewicht die wahrscheinlichste Verteilung tatsächlich eintritt. Welches ist dann der Zusammenhang zwischen mittlerer Energie und Temperatur?

Um die wahrscheinlichste Verteilung zu finden, denken wir uns die Energie E in kleine Quanten ϵ geteilt, sodass E ein ganzzahliges Vielfaches von ϵ ist, und jedem Molekül immer nur Vielfache von ϵ an Energie zuerteilt werden

[93] The material in brackets was added in ink.

sollen. Es sei N_n die Anzahl der Moleküle, welche die Energie $n\epsilon$ erhalten.[94] Die Wahrscheinlichkeit W für eine bestimmte Verteilung ist[95]

$$W = \frac{N!}{N_0!N_1!\cdots N_p!},$$

wo $p = \frac{\mathrm{E}}{\epsilon}$[96] gesetzt ist. Diese zu einem Maximum zu machen, führt unter Anwendung der Stirlingschen Formel auf folgendes Problem aus der Differentialgleichung:

$$-\sum_n N_n \log N_n = \text{Max.},$$

während

$$\sum_n N_n = N \quad \text{und} \quad \sum_n N_n \epsilon_n = \mathrm{E}.$$

Mit Hilfe zweier Lagrangescher Faktoren λ, μ findet man in bekannter Weise die Gleichungen[97]

$$1 + \log N_n + \lambda + \mu n\epsilon = 0,$$

also[98]

$$N_n = e^{-(1+\lambda)} e^{-\mu n\epsilon} = \frac{e^{-\mu\epsilon_n}}{\sum e^{-mu\epsilon_n}}, \quad \mu = \frac{1}{h\vartheta}.$$

λ und μ bestimmen sich aus den Nebenbedingungen: 92

$$\mathrm{E} = e^{-(1+\lambda)}\epsilon \sum_{n=0}^{p} n e^{\mu n\epsilon},$$

$$N = e^{-(1+\lambda)} \sum_{n=0}^{p} e^{-\mu n\epsilon}.$$

Hierin wollen wir noch die grosse Zahl p durch ∞ ersetzen und finden dann für die mittlere Energie eines Resonators

$$U = \frac{\mathrm{E}}{N} = \frac{\epsilon}{e^{\mu\epsilon} - 1}.$$

[94] Here and in the following, "ϵ_n" was written above "$n\epsilon$" in pencil.

[95] The typoscript originally read: "Die Wahrscheinlichkeit W für eine bestimmte Verteilung ist proportional zu $\frac{N!}{N_0!N_1!\cdots N_p!} = aW$" and was later corrected in pencil.

[96] Added in pencil: "= Anzahl der ϵ_n"

[97] Added in pencil "durch Differentiation nach N_n"

[98] The last part of the following equation was added by Hilbert in pencil. In addition he added in the margin "$\mu = \frac{1}{h\vartheta}$".

Die Entropie des ganzen Zustandes ist proportional dem log der Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned}\eta &= \kappa \log W \\ &= \text{const.} - \kappa \sum N_n \log N_n \\ &= \text{const.} + \kappa(1+\lambda)N + \kappa\mu\epsilon \sum N_n n \\ &= \text{const.} + \kappa(1+\lambda)N + \kappa\mu \mathrm{E}.\end{aligned}$$

Nun soll nach thermodynamischen Gesetzen die Temperatur sich aus

$$\frac{1}{\vartheta} = \left(\frac{d\mathrm{E}}{d\eta}\right)^{-1}$$

bestimmen, daher finden wir

$$\kappa\mu = \frac{1}{\vartheta},\ \mu = \frac{1}{\kappa\vartheta},$$

und daher folgenden Zusammenhang zwischen mittlerer Energie des Resonators U_ν und Temperatur

$$U_\nu = \frac{\epsilon}{e^{\frac{\epsilon}{\kappa\vartheta}} - 1}. \tag{111}$$

Wenn wir nun das Energieelement ϵ gegen Null konvergieren lassen, wie man das gewöhnlich tut, erhält man $U_\nu = \kappa\vartheta$. Planck tut dies nun nicht, sondern
93 nimmt an, dass die Resonatoren nicht beliebige Energie aufneh|men können, sondern immer nur Vielfache eines gewissen Quantums ϵ, das seinerseits wieder von der Eigenfrequenz ν des Atoms abhängen kann. Genauer muss man sagen: Er nimmt an, dass infolge uns unbekannter Verhältnisse das Vorkommen anderer Energiemengen als Vielfache von ϵ an diesen Resonatoren ausserordentlich unwahrscheinlich ist oder jedenfalls nur während so kurzer Zeit stattfindet, dass es physikalisch nicht in Betracht kommt.

Akzeptiert man nun jene Formel (111), so findet man in Verbindung mit (110) für die Energieverteilung in der schwarzen Strahlung die Formel

$$u_\nu = 8\pi\nu^2 \frac{\epsilon}{e^{\frac{\epsilon}{\kappa\vartheta}} - 1} = 8\pi\nu^3 \frac{\frac{\epsilon}{\nu}}{e^{\frac{\epsilon}{\kappa\vartheta}} - 1}.$$

Hierin ist ϵ noch eine unbekannte Funktion von ν allein. Diese können wir aber aus dem Wienschen Verschiebungsgesetz ermitteln. Denn darnach muss der Faktor von ν^3 eine Funktion allein von $\frac{\vartheta}{\nu}$ sein, woraus sich ergibt, dass $\frac{\epsilon}{\nu}$ eine universelle Konstante h ist:

$$\epsilon = h\nu.$$

Damit haben wir die *Plancksche Formel* für die Energieverteilung der schwarzen Strahlung

$$u_\nu = \frac{8\pi\, h\, \nu^3}{e^{\frac{h\nu}{\kappa\vartheta}} - 1}. \tag{112}$$

Die Konstante h hat die Dimension Energie $\times$ Zeit; Planck nennt sie das Wirkungsquantum. Es ist:

$$\kappa = 1{,}35 \cdot 10^{-16} \text{ erg sec.}$$
$$h = 6{,}55 \cdot 10^{-27} \text{ erg sec.}$$

Diese Strahlungsformel und die sich darauf gründende Vorstellung von quan- 94
tenhafter Verteilung der Energie hat sich bis jetzt glänzend bestätigt.[99]

Es ist nun von Interesse, dass *Ehrenfest* (Ann. d. Phys. 1911)[100] und *Poincaré* (Journal de Physique 1912)[101] gezeigt haben, dass man auch von anderer Seite mit Notwendigkeit auf eine diskontinuierliche Energieverteilung unter den Resonatoren geführt wird.[102]

Macht man nämlich zunächst in den vorherigen Ueberlegungen den Uebergang zu unendlich kleinem ϵ, d. h. von der Summe zum Integral, so hat man folgendes Problem:

$$\begin{cases} \log W = -\displaystyle\int_0^\infty N(E) \log N(E)\, dE = \text{Maximum}, \\ \displaystyle\int_0^\infty N(E)\, dE = N, \\ \displaystyle\int_0^\infty E N(E)\, dE = \mathrm{E}, \end{cases}$$

wobei $N(E)dE$ die Anzahl der Atome bedeutet, deren Energie zwischen E und $E + dE$ liegt. Hieraus findet man in der bekannten Weise

$$N(E) = e^{-(\lambda+1)} e^{-\mu E}$$

und daraus

$$\frac{\mathrm{E}}{N} = \frac{\int_0^\infty E e^{-\mu E} dE}{\int_0^\infty e^{-\mu E} dE}.$$

Wir hatten schon erkannt, dass das hieraus folgende Strahlungsgesetz unbrauchbar ist.

Man wird also auf die Idee kommen, nicht alle Verteilungen als gleich
wahrscheinlich anzusehen, sondern | die Anzahl der Moleküle, deren Energie 95

[99] The quantal distribution of energy had found successful application in particular in the theory of specific heats. Following *Einstein 1907a*, Born and von Kármán developed a theory in Göttingen during a time of intense contact with Hilbert. Hilbert presented this theory in the lecture of the following term on molecular theory (*Hilbert 1912/13**, p. 109ff).

[100] *Ehrenfest 1911*.

[101] *Poincaré 1912*.

[102] Hilbert’s presentation of the work of Ehrenfest and Poincaré may have been influenced by Theodor von Kármán’s presentation of their research at the Göttingen Mathematical Society on July 16, 1912, cf. *Jahresberichte der Deutschen Mathematikervereinigung* 21 (1912) 166, or *Corry 2004*, 456.

zwischen E und $E + dE$ liegt, gleich

$$N(E)\gamma(\nu, E)dE,$$

wobei $\gamma(\nu, E)$ eine noch unbekannte Gewichtsfunktion ist, welche noch von der Frequenz ν des Atoms abhängt. Entsprechend findet man

$$U_\nu = \frac{\mathrm{E}}{N} = \frac{\int_0^\infty Ee^{-\mu E}\gamma(\nu, E)dE}{\int_0^\infty e^{-\mu E}\gamma(\nu, E)dE}.$$

Welche Annahmen hat man nun über γ zu machen, damit ein vernünftiges Strahlengesetz herauskommt? Zunächst findet man daraus, dass die Wahrscheinlichkeit bei adiabatischen Vorgängen jedenfalls unverändert bleiben muss, für γ die Bedingung

$$\gamma(\nu, E) = f(\nu)Q\left(\frac{E}{\nu}\right).$$

In dem obigen Ausdruck für U_ν fällt $f(\nu)$ ganz heraus; es wird

$$U_\nu = \frac{\int_0^\infty Ee^{-\mu E}Q\left(\frac{E}{\nu}\right)dE}{\int_0^\infty e^{-\mu E}Q\left(\frac{E}{\nu}\right)dE}.$$

Diese Funktion Q wird man nun so zu wählen haben, dass jedenfalls für kleine ν das Rayleighsche Strahlungsgesetz herauskommt, während für grosse ν das Produkt

$$u_\nu = 8\pi\nu^2 U_\nu,$$

welches die Energiedichte der schwarzen Strahlung gibt, gegen Null konvergiert. Es soll also sein:

96 $$\lim_{\nu=\infty} \nu^2 U_\nu = 0.$$

Dies liefert die Bedingung

$$0 = \lim_{\nu=\infty} \nu^2 \frac{\int_0^\infty Ee^{-\mu E}Q\left(\frac{E}{\nu}\right)dE}{\int_0^\infty e^{-\mu E}Q\left(\frac{E}{\nu}\right)dE} = \lim_{\nu=\infty} \nu^3 \frac{\int_0^\infty xe^{-\mu\nu x}Q(x)dx}{\int_0^\infty e^{-\mu\nu x}Q(x)dx}.$$

Eine nähere Untersuchung zeigt nun, dass dieser Bedingung durch keine stetige Funktion $Q(x)$ genügt werden kann. Vielmehr muss der Nullpunkt $x = 0$ eine Gewichtsbelegung von derselben Grösse erhalten, wie sonst eine Strecke. Die Energie Null (und zwar absolut Null[103]) bekommen also Q_0 Moleküle, während zunächst die weitere Verteilung noch durch eine stetige Funktion Q geregelt wird. Obige Bedingung nimmt daher die Form an:

$$\lim_{\nu=\infty} \nu^2 \frac{\int_0^\infty Ee^{-\mu E}Q\left(\frac{E}{\nu}\right)dE}{\int_0^\infty e^{\mu E}Q\left(\frac{E}{\nu}\right)dE + Q_0} = 0.$$

Es ergibt sich dann, dass Q zunächst eine gewisse Strecke gleich Null sein muss und dann wiederum ein Punkt in derselben Weise wie eben der Nullpunkt ausgezeichnet werden muss.

Man wird so ganz naturgemäss auf die Plancksche Vorstellung der Energiequantums ϵ geführt.

[103] Deleted in ink: "nicht nur klein"

Description of the Text

Collection: Georg-August-Universität Göttingen, Mathematisches Institut, Inv. Nr. 16206v.

Size: Cover size 22.5 cm × 28.2 cm; page size approx. 22.2 cm × 27.6 cm.

Cover Annotations: On the spine, in gold lettering, is the notation, 'Hilbert, // Strahlungs- // theorie. // — // Sommer. // 1912.'

Composition: 10 signatures of 3 to 8 sheets each (double pages); in all, 99 pages, inclusive front- and end-sheets.

Pagination: The pages are numbered in the upper right corner of the recto side of each page. The front end page, the title page, the page with the table of contents and the next page are not numbered. The text itself consists of 94 pages, numbered from 1 to 25 and 28 to 96; numbers 26 and 27 are missing. The last page is left blank and is not numbered.

Original Title: 'Strahlungstheorie. // Vorlesung // vom Sommersemester 1912 // von // D. Hilbert.'

Text: Typewritten text; the table of contents, mathematical symbols, formulas and some corrections have been added by hand in black ink. Presumably these alterations to the typescript were made by Erich Hecke, who also revised other scripts. No sign can be found that this draft was a carbon copy.

"*This page left intentionally blank.*"

Chapter 6

Lectures on Quantum Theory

(1922–23 and 1926–27)

Introduction

Hilbert's lectures on radiation theory (*Hilbert 1912**, this Volume, Chapter 5) contain a discussion of Planck's radiation formula and also comment on the underlying quantum hypothesis. But it is in two lecture courses that occur 10 and 14 years later that Hilbert explicitly concerns himself with the old quantum theory and the new quantum mechanics. A decade passed before, the first lecture course was given under the title "Mathematical Foundations of Quantum Theory" (*Hilbert 1922/23a**) in the winter semester 1922/23 and was worked out by L. Nordheim and G. Heckmann.[1] It presents what is now known as the "old quantum theory," especially Bohr's quantization rules using the framework of Hamilton-Jacobi theory and action-angle variables in classical mechanics.

Another four years passed before the second full course devoted exclusively to quantum theory was given in winter 1926/27 under the title "Mathematical Methods of Quantum Theory" (*Hilbert 1926/27**). It was worked out by L. Nordheim as well. While the course of 1922/23 met for two hours each week, the course of 1926/27 was four hours. The longer course was divided into two parts. In the first part, Hilbert presented the material of his 1922/23 lecture course. In fact, the *Ausarbeitungen* of *Hilbert 1922/23a** and of the first part of *Hilbert 1926/27** are closely parallel. Long passages of the 1922/23 course have been copied for the second course, but occasionally Hilbert rearranged the material or shortened it. The typescript of the 1922/23 course also shows numerous handwritten corrections and additions by Hilbert, some of which pertain to an overall change in notation, while others are edits of the original text. A comparison of the 1922/23 course and its handwritten corrections with the first part of the 1926/27 course shows that Hilbert's handwritten comments were only partly incorporated into the reworked version of the later course. In this Volume is the typescript of the first course. Hilbert's handwritten additions and corrections to it are annotated. In square brackets are the page numbers of the corresponding pages of the first part of the second course and any difference between the two versions that is not a mere change of notation is annotated. For the second part of the 1926/27 course, we present the *Ausarbeitung* by Nordheim (*Hilbert 1926/27**). This *Ausarbeitung* also carries handwritten comments by Hilbert which are annotated for the second part of the 1926/27 course. It is unclear when Hilbert annotated the *Ausarbeitung* of the 1926/27 but there are indications that it might

[1] See Hilbert's Lecture Courses, 1886–1934, this Volume, p. 721. Two identical copies of this *Ausarbeitung* exist in Göttingen. One copy is deposited in the library of the Mathematical Institute and carries a number of corrections and additions in Hilbert's hand. The other one is a copy deposited in the *Handschriftenabteilung* of the SUB (*Cod. Ms. D. Hilbert* 566).

have been at some later time,[2] possibly for his lecture course on *Mathematical Methods of the New Physics* given in the summer semester of 1930.[3]

The course of 1922/23 is an example of Hilbert's characteristic concern with the mathematical foundation of physical theory. It begins with a purely mathematical exposition of the general variational problem and develops the Hamilton-Jacobi theory for the associated differential equation. This is done with a view toward the problem of introducing the quantum conditions, and Hilbert recognizes the problem of identifying the proper mathematical formulation for an unambiguous and clean application of the quantization rule. The same problem had been realized by Paul Ehrenfest in his introduction of the adiabatic hypothesis. In this context, Hilbert introduced what he suggested to name a "Quantrix."

The course of 1926/27 was held immediately after the development of the "new quantum mechanics" by Werner Heisenberg, Max Born, Pascual Jordan, Erwin Schrödinger, Paul Dirac, and others. It contains all the then-known new results, e. g. Heisenberg's original approach leading to "matrix mechanics," Schrödinger's "wave mechanics" and their application to the harmonic oscillator, the rigid rotator and the hydrogen atom. Further topics are perturbation theory, Fermi-Dirac vs. Bose-Einstein statistics, the ideal quantum gas, the Klein-Gordon equation, the probability interpretation of Schrödinger's wave function by Born, and Pascual Jordan's axiomatization of the new theory.[4]

Hilbert was, without a doubt, one of the few people at that time who completely understood the physical implications and the mathematical structure of the new theory, including the problems still to be solved. This is remarkable, even given the fact that the new quantum theory employed mathematical tools developed earlier in large part by Hilbert himself, for example the eigenvalue problem for integral operators and the theory of infinite-dimensional quadratic forms. It is not by chance that in modern text books quantum mechanics is formulated in terms of abstract "Hilbert spaces." In his courses Hilbert explicitly addressed the question of the connection between the different mathematical frameworks used for quantum theory, punctuated by very insightful comments.

Hilbert's occupation with the new quantum theory pushed his and his collaborator's efforts to achieve an axiomatic presentation of the theory:

---

[2]See, e.g., various reader's signs in the margins (see, e.g., notes 8 and 21 on pp. 611 and 615) as well as marginal notes that refer to a book that was only published in 1928 (*Haas 1928*), see, e.g., notes 35 and 50 on pp. 623 and 635.

[3]See Hilbert's Lecture Courses, 1886–1934, this Volume, p. 722.

[4]For a comprehensive historical account of the development of quantum mechanics, see *Mehra and Rechenberg 1982a*, *Mehra and Rechenberg 1982b*, *Mehra and Rechenberg 1982c*, *Mehra and Rechenberg 1982d*, *Mehra and Rechenberg 1987a*, *Mehra and Rechenberg 1987b*, *Mehra and Rechenberg 2000*, *Mehra and Rechenberg 2001*. Hilbert's work is discussed by these authors explicitly in *Mehra and Rechenberg 2000*, ch. III.2.

> Diese Betrachtungen und Gedankenbildungen fordern geradezu dazu heraus, eine Axiomatik nach den Prinzipien und Gesichtspunkten zu formulieren, die ich vor nunmehr einem Menschenalter zur Begründung der Geometrie benutzt habe. (*Hilbert 1926/27**, p. 214)

The last part of the course, pp. 214–225, deals with Pascual Jordan's early axiomatization of quantum mechanics in terms of conditional probabilities. Jordan had presented some of his results at the session of the *Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse* on 14 January 1927 and published it in the *Nachrichten* (*Jordan 1926a*) as well as in the *Zeitschrift für Physik* (*Jordan 1926d*, *Jordan 1927*).

The 1926/27 course immediately predates the publication of the paper "Foundations of Quantum Mechanics" (*Hilbert, von Neumann and Nordheim 1928*), coauthored with John von Neumann and Lothar Nordheim and received by the *Mathematische Annalen* on 6 April 1927. This paper explicitly mentions Hilbert's course and gives a more detailed presentation of an axiomatics of quantum theory, which is again based on Jordan's approach. In addition, it may be viewed not only as the starting point for von Neumann's later investigations[5] but as the catalyst for a program of investigation of the foundations of quantum mechanics, culminating in von Neumann's book "Mathematical Foundations of Quantum Mechanics" (*von Neumann 1932*), which in turn opened an ongoing tradition of investigations into the axiomatic analysis of the foundations of quantum mechanics.

The spirit of this approach is formulated in the joint paper by Hilbert, von Neumann and Nordheim in the following way:

> Der physikalische Grundgedanke der ganzen Theorie besteht darin, daß an Stelle von strengen funktionalen Beziehungen der gewöhnlichen Mechanik überall Wahrscheinlichkeitsrelationen treten. [...] Der Weg, der nun zu dieser Theorie führt, ist folgender: man stellt gewisse physikalische Forderungen an diese Wahrscheinlichkeiten, die durch unsere bisherigen Erfahrungen und Entwicklungen nahe gelegt sind, und deren Erfüllung gewisse Relationen zwischen den Wahrscheinlichkeiten erfordern. Dann sucht man zweitens einen einfachen analytischen Apparat, in dem Größen auftreten, die genau dieselben Relationen erfüllen. Dieser analytische Apparat, und damit die in ihm auftretenden Rechengrößen, erfahren nun auf Grund der physikalischen Forderungen eine physikalische Interpretation. Das Ziel ist dabei, die physikalischen Forderungen so vollständig zu formulieren, daß der analytische Apparat gerade eindeutig festgelegt. Dieser Weg ist also der einer Axiomatisierung, wie sie z.B. in der Geometrie durchgeführt worden ist. (*Hilbert, von Neumann and Nordheim 1928*, p. 2.)

Heinz-Jürgen Schmidt, Ulrich Majer, Tilman Sauer

---

[5] For further discussion, see *Lacki 2000*.

Mathematische Grundlagen der Quantentheorie

Inhaltsverzeichnis

Die *Hamilton-Jacobische Theorie* der höheren Dynamik ist die Grundlage der 1
Himmelsmechanik, insbesondere der Störungsrechnung, und sie hat gerade zu diesem Zwecke ihre vollkommenste Ausbildung erfahren; doch glaubte man nicht, dass sie noch für andere Zwecke der Physik von Nutzen sein könnte. Man strebte wohl von jeher danach, auch die Atomtheorie auf die Mechanik zu gründen, aber es musste erst ein NEWTON der Atomtheorie kommen, und das ist *NIELS BOHR* gewesen, der auf Grund neuartiger physikalischer Ideen, nämlich der *Quantentheorie*, ein tieferes Eindringen in dieses Gebiet ermöglichte.[1] Und es ist wieder die Hamilton-Jacobische Theorie, die hier die Führung übernimmt und die ganze Entwicklung beherrscht. Sie wird geradezu das A-B-C der Quantentheorie, und ihre genaue Kenntnis ist zu dem Verständnis der letzteren unumgänglich. Im Folgenden werden wir sie nur soweit entwickeln, wie sie in der Physik Anwendung findet, aber alle prinzipiellen Ideen hervorheben. Wir benutzen hierzu die Methode der *Variationsrechnung*, die alleine einen vollständigen Einblick in die Natur der Probleme gewährt.

⟨Einiges über Variationsrechnung⟩

⟨Das einfachste Variationsproblem⟩

Wir[2] beginnen mit der Entwicklung des einfachsten Falles der Variationsrech- [3]
nung, der aber bereits alle wesentlichen Gedanken hervortreten lässt. Es soll das Integral[3]

$$\int_{x_1}^{x_2} F(y, y', x)\, dx$$

zu einem Minimum gemacht werden. Damit ist folgendes gemeint, $F(y, y', x)$ ist eine bekannte Funktion der 3 Argumente y', y, x. Man denke sich nun für y alle möglichen Funktionen von x eingesetzt, die an den Grenzen x_1 und x_2

[1] See *Bohr 1913a*; *Bohr 1913b*; *Bohr 1913c*.

[2] In the left margin, Hilbert added a reader's sign (⊤). In the 1926/27 version of the lecture course (*Hilbert 1926/27**), Hilbert had replaced the first paragraph of this course with a different introduction (see p. 608 below), and then followed the present *Ausarbeitung* with a number of revisions, the significant ones of which are being pointed out in the annotation. The most obvious revision consists in a change of notation that was indicated already in marginal notes in the present *Ausarbeitung* (see, e.g., the following note) and was carried out throughout the later *Ausarbeitung*. This change of notation and other purely stylistic changes are not annotated. For ease of reference, page numbers pertaining to the version of *Hilbert 1926/27** are also given in square brackets in the page margin.

[3] On the left hand page, Hilbert wrote: "Statt x y p η setze t q k p". Indeed, in many of the following formulas, these substitutions were done with pencil in Hilbert's hand. We will here give the original version of the formulas and will not point out corrections that only amount to the above substitutions.

des Integrals bestimmte vorgegebene Zahlenwerte y_1 und y_2 annehmen, für die also

$$y(x_1) = y_1 \quad \text{und} \quad y(x_2) = y_2$$

2 ist. y' sei die Ableitung von $y(x)$ nach x, die also, wenn für $y(x)$ eine be|stimmte Funktion eingesetzt wird, überall einen bekannten Wert besitzt. Unser Integral hat also für jede Wahl von $y(x)$ einen bestimmten Zahlenwert. Gesucht ist nun diejenige Funktion $y(x)$, für die dieser Zahlenwert der kleinstmögliche ist. Diese Aufgabe ist offenbar eine naturgemässe Verallgemeinerung des Minimalproblems der Differentialrechnung, in der eine Funktion $F(x)$ gegeben, und derjenige Wert von x gesucht ist für den $F(x)$ ein Minimum hat. Jetzt dagegen ist eine Funktion gesucht. Unser Integral, das für jede solche einen bestimmten Zahlenwert hat, ist demnach eine Funktionenfunktion, und bekannt, wenn $y(x)$ bestimmt ist.

Die Lösung dieser Aufgabe, von der wir nicht die Ableitung, sondern nur das
[4] Resultat angeben wollen, ist bereits | in sehr eleganter Weise von Lagrange gegeben worden.[4] Analog wie bei der Differentialrechnung die notwendige Bedingung für ein Minimum das Verschwinden der Ableitung

$$\frac{dF(x)}{dx} = 0$$

ist, so ist es hier das Verschwinden eines anderen Ausdrucks der sogenannten Lagrangeschen – oder Variationsableitung, die wir mit $[F]_y$ bezeichnen wollen. Dabei bedeutet

$$[F]_y \equiv \frac{d\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)}{dx} - \frac{\partial F}{\partial y}.$$

Führen wir die Differentation nach x aus, so lautet unsere Bedingung ausführlich:

$$[F]_y \equiv \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} y'' + \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y} y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0,$$

und dies ist offenbar eine bekannte Differentialgleichung für die gesuchte Funktion $y(x)$, während bei der Differentialrechnung eine Gleichung, die einen bestimmten Wert von x liefert, auftritt. Unsere Differentialgleichung, die hier als
[5] Lösung des Variationsproblems erscheint, ist nun | von 2. Ordnung, so dass ihre allgemeine Lösung noch von 2 willkürlichen Konstanten a, b abhängen wird:

$$y = y(x, a, b).$$

3 Aber das ist gerade sehr befriedigend, denn wir können so mit ihrer Hilfe die beiden Randbedingungen für die Grenzen des Integrals

$$y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2$$

berücksichtigen, und werden so im Allgemeinen eine eindeutig bestimmte Funktion $y(x)$ als Lösung erhalten.

---

[4]See *Lagrange 1788*.

⟨Das einfachste Variationsproblem für zwei Unbekannte⟩

(Anschliessend an diese Lösung wäre nun vom rein mathematischen Standpunkt die Frage nach den hinreichenden Bedingungen, ob also wirklich immer ein Minimum eintritt, zu untersuchen.)[5] Hier wollen wir uns aber nicht damit aufhalten, sondern dazu übergehen, das einfachste Variationsproblem mit 2 unbekannten Funktionen zu behandeln. Die Aufgabe ist wieder das Integral

$$\int_{x_1}^{x_2} F(y', z', y, z, x)\, dx,$$

wo F eine bekannte Funktion der 5 Argumente y', y, z', z, x ist, zu einem Minimum zu machen, wobei für $y(x)$ und $z(x)$ alle möglichen Funktionen einzusetzen sind, die den Randbedingungen

$$\begin{aligned} y(x_1) &= y_1, \quad z(x_1) = z_1, \\ y(x_2) &= y_2, \quad z(x_2) = z_2 \end{aligned}$$

genügen, so dass unser Integral wieder für jedes Funktionenpaar $y(x)$ und $z(x)$ [6]
einen ganz bestimmten Zahlenwert besitzt, also eine Funktionenfunktion zweier Argumente ist. Auch hier ist alles analog wie in der Differentialrechnung. Wie dort die Bedingung für das Extremum einer Funktion zweier Variabeln $F(x, y)$ das gleichzeitige Verschwinden der der beiden partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

ist, so müssen hier die beiden Lagrangeschen Ableitungen gleich 0 gesetzt werden, also

4
$$\begin{aligned} [F]_y &\equiv \frac{d\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)}{dx} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \\ [F]_z &\equiv \frac{d\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)}{dx} - \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \end{aligned}$$

sein. Man kann sich dies leicht veranschaulichen, indem man sich erst eine der beiden Funktionen z. B. $z(x)$ festgehalten denkt, und das Minimum bezüglich der andern Funktion $y(x)$ aufsucht. Die Bedingung hierfür ist natürlich $[F]_y = 0$. Halten wir jetzt $y(x)$ fest, und variieren $z(x)$, so bekommen wir noch die Bedingung $[F]_z = 0$. Für ein absolutes Minimum müssen also beide

[5]Brackets added in pencil.

gleichzeitig erfüllt sein. Schreiben wir sie noch einmal ausführlich hin[6]

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}y'' + \frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial z'}z'' + \frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial y}y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial z}z' + \frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0,$$
$$\frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial y'}y'' + \frac{\partial^2 F}{\partial z'^2}z'' + \frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial y}y' + \frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial z}z' + \frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial x} - \frac{\partial F}{\partial z} = 0,$$

[7] so haben wir[7] also 2 simultane Differentialgleichungen 2. Ordnung, deren allgemeine Lösung also 4 willkürliche Konstante a, b, c, d enthalten wird. Wir können also gerade wieder die 4 Randbedingungen befriedigen, und es ist alles vollkommen bestimmt. In ganz derselben Weise würde sich auch die Ausdehnung auf n unbekannte Funktionen gestalten.

⟨Einführung von Nebenbedingungen⟩

Durch die Betrachtung der Variationsprobleme mit mehreren gesuchten Funktionen haben wir die Möglichkeit, Nebenbedingungen einzuführen, genau wie in der Differentialrechnung, und so relative Minima zu untersuchen. Diese Nebenbedingungen werden jetzt allerdings nicht in der Form einer gewöhnlichen Gleichung, sondern einer Differentialgleichung

$$G(y', z', y, z, x) = 0$$

auftreten: Das Problem bleibt, das Integral

$$\int_{x_1}^{x_2} F(y', z', y, z, x)\, dx$$

zu einem Minimum zu machen, wobei aber jetzt nur die Funktionen $y(x)$ und $z(x)$ zur Konkurrenz zugelassen sind, die der Differentialgleichung $G = 0$ genügen. Auch die Lösung dieser Aufgabe ist bereits von LAGRANGE gegeben worden, und steht wieder in vollkommener Analogie mit dem entsprechen-
5 den Problem der Differential|rechnung. Wir führen einen LAGRANGEschen Faktor λ ein, der hier selbst als unbekannte Funktion von x

$$\lambda = \lambda(x)$$

[8] aufzufassen ist, und behandeln das absolute Minimalproblem

$$\int_{x_1}^{x_2} \left\{F(y', z', y, z, x) + \lambda(x)G(y', z', y, z, x)\right\}dx = \text{Minimum.}$$

[6] The preceding sentence was deleted and the following equations are missing in *Hilbert 1926/27**.

[7] In *Hilbert 1926/27**, “so haben wir” was corrected to “Wir haben in ihnen”.

Bilden wir hiervon die LAGRANGEsche Ableitung nach λ, so sehen wir, dass sie sich, da ja die Ableitung von λ, λ' nicht auftritt, einfach reduziert auf

$$\frac{\partial(F+\lambda G)}{\partial\lambda} = G = 0.$$

Die Nebenbedingung ist also ohne weiteres erfüllt, und mit den beiden anderen Bedingungen

$$[F+\lambda G]_y = 0,$$
$$[F+\lambda G]_z = 0$$

haben wir insgesamt 3 simultane Differentialgleichungen, die zur Bestimmung der 3 unbekannten Funktionen $y(x)$, $z(x)$, $\lambda(x)$ gerade ausreichen. Die Integrationskonstanten werden wieder durch die Randbedingungen festgelegt.

⟨Neue Form des Variationsproblems⟩

Im Folgenden werden wir zu dem Ausgangsproblem mit einer unbekannten Funktion zurückkehren, da bereits dieses uns gestattet, alle wesentlichen Sätze der Theorie zu entwickeln. Die Erweiterung war aber notwendig, um dem Variationsproblem verschiedene neue Formen geben zu können. Wir werden versuchen hierdurch Vereinfachungen zu erzielen, und wenn auch dafür an anderen Stellen gewisse Komplikationen eintreten werden, es handelt sich ja im Grunde immer um | dasselbe Problem, so gewinnt man doch einen viel [9]
tieferen Einblick in die Natur des Gegenstandes und gelangt zu Operationen, auf die man sonst nie verfallen wäre.

Als ersten Schritt in dieser Richtung führen wir zunächst y' als neue Unbe- 6
kannte ein, die wir etwa mit p bezeichnen. Dann schreibt sich unsere Aufgabe folgendermassen als Variationsproblem mit 2 Unbekannten.[8]

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} F(p,y,x)\,dx = \text{Minimum},$$

wobei aber noch die Nebenbedingung

$$y' - p = 0$$

besteht. Der Vorteil dieser neuen Formulierung, der dem Problem ein ganz anderes Aussehen verleiht, wenn auch beide Fassungen dem Wesen nach äquivalent sind, besteht darin, dass jetzt die Ableitungen aus den Integralen verschwunden sind. Dafür haben wir eine Nebenbedingung, die allerdings ausserordentlich einfach ist, und müssen jetzt 2 Funktionen $y(x)$ und $p(x)$ bestimmen. Die Bedingungen für das Minimum, das jetzt nur ein relatives ist, sind

[8] On the left hand page, Hilbert wrote again: "Statt x y p η setze t q k p", cf. note 3.

nach dem Früheren:

$$[F + \lambda(y' - p)]_y = 0,$$
$$[F + \lambda(y' - p)]_p = 0,$$
$$\frac{\partial[F + \lambda(y' - p)]}{\partial\lambda} = y' - p = 0,$$

d. h. wir berechnen das absolute Variationsproblem

$$\int_{x_1}^{x_2} \{F(p, y, x) + \lambda(y' - p)\} dx = \text{Minimum}.$$

[10] Nun enthält $F(p, y, x) + \lambda(y' - p)$ die Ableitung p' von p nicht, und es reduziert sich die Forderung

$$[F + \lambda(y' - p)]_p = 0$$

einfach auf

$$\frac{\partial F}{\partial p} - \lambda = 0, \quad \lambda = \frac{\partial F}{\partial p}.$$

Damit ist λ bestimmt, wir können seinen Wert einsetzen und erhalten damit
7 ein neues absolutes Variationsproblem mit 2 unbe|kannten Funktionen[9]

$$\int_{x_1}^{x_2} \left\{ F(y, p, x) + \frac{\partial F}{\partial p}(y' - p) \right\} dx = \text{Minimum}.$$

Dieses neue Problem ist wieder völlig äquivalent mit unserer ersten, ursprünglichen Aufgabe, wie sich ohne weiteres folgendermassen einsehen lässt. Wir haben wieder 2 Bedingungen. Davon lautet die eine

$$\left[F + \frac{\partial F}{\partial p}(y' - p) \right]_y = 0.$$

Die zweite reduziert sich, da ja p' nicht im Integranden vorkommt, auf

$$\frac{\partial \left(F + \frac{\partial F}{\partial p}(y' - p) \right)}{\partial p} = \frac{\partial F}{\partial p} + \frac{\partial^2 F}{\partial p^2}(y' - p) - \frac{\partial F}{\partial p} = 0,$$

und diese besagt nichts anderes, als dass $y' - p = 0$ sein muss. Setzen wir dies ein, so kommen wir in der Tat auf das erste Problem zurück. Wir wollen noch die Verabredung treffen, das Argument x als selbstverständlich immer fortzulassen, und ferner die partiellen Ableitungen durch einen Index zu bezeichnen, so dass wir beispielsweise

$$\frac{\partial F(y, p, x)}{\partial p} = F_p(y, p)$$

[11] schreiben. Was haben wir mit dieser neuen Formulierung gewonnen? | Wir

[9] In the left margin, Hilbert added the following comment in pencil: “Man kann kürzer sofort zu diesem Variationsproblem übergehen ohne das λ zu benutzen!”.

haben zwar ein Problem mit 2 unbekannten Funktionen vor uns, aber ein solches von besonders einfacher Gestalt. Denn es kommt die Ableitung der einen Funktion p überhaupt nicht, und die der anderen y nur linear vor.[10]

⟨Unabhängigkeitssatz und Feldtheorie⟩

Diese einfache Form des Integranden legt ganz neuartige Fragestellungen nahe und ermöglicht eine lange Kette von Schlüssen. Liegt nämlich ein Integral

$$\int_{x_1}^{x_2} (A + By')\,dx$$

vor, – unser obiges hat offenbar diese Form, wenn man

8 $$A = F - pF_p, \quad B = F_p$$

setzt –, so wird man sich fragen, wann diese Funktionenfunktion, wir müssen ja um ihren Wert zu bestimmen die Funktion $y(x)$ d. h. den „Weg" kennen, etwa sich selbst degradiert. Das heisst unter welchen Umständen wird sie vom Weg unabhängig, also eine reine Ortsfunktion? Eine solche Fragestellung tritt sehr häufig in der Physik auf, z. B. in der Thermodynamik. Hier ist die zugeführte Wärme eine solche Funktionenfunktion, mit der sich alleine nicht viel anfangen lässt, aber es wird aus ihr durch Hinzufügung eines integrierenden Faktors, der reziproken Temperatur, eine reine Ortsfunktion, die Entropie, die eine fundamentale Bedeutung besitzt. –

Die Bedingung für die Unabhängigkeit vom Wege für ein solches Integral ist nun offenbar die, dass A und B als partielle Ableitung einer Funktion $\Phi(x, y)$ erscheinen:

$$A = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad B = \frac{\partial \Phi}{\partial y}.$$

Dann wird nämlich unser Integral

$$\int_{x_1}^{x_2} (A + By')\,dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} y'\right) dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{d\Phi}{dx}\,dx = \Phi(x_2 y_2) - \Phi(x_1 y_1)$$

eine reine Ortsfunktion. Die notwendige und hinreichende Bedingung hierfür ist bekanntlich

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x},$$

[10] In the left margin, Hilbert added a reader's sign (⊥) and wrote: "S. 19". In *Hilbert 1926/27** the remainder of the page [11] was deleted, then a number of pages are missing, and then *Hilbert 1926/27** continues with p. [25] which picks up the discussion of the present course on p. 19, see note 18 below.

und hieraus ergibt sich für unser Variationsproblem, wenn wir die Werte für A und B einsetzen

$$\frac{\partial(F - pF_p)}{\partial y} = \frac{\partial F_p}{\partial x}.$$

Sehen wir einstweilen von der ursprünglichen Bedeutung von p ab, behandeln es als eine neue Variable und differenzieren wir aus, so ergibt sich

9 $$F_p \frac{\partial p}{\partial y} + F_y - F_p \frac{\partial p}{\partial y} - p\left(F_{p,p} \frac{\partial p}{\partial y} + F_{p,y}\right) = F_{p,p} \frac{\partial p}{\partial x} + F_{p,x}$$

oder

$$F_{p,p}\,(p_x + pp_y) + pF_{p,y} + F_{p,x} - F_y = 0.$$

Dies ist offenbar eine partielle Differentialgleichung für p, die wir die dem Variationsproblem adjungierte partielle Differentialgleichung nennen. Unsere Fragestellung ist nun, ob wir p als Funktion von x und y derart bestimmen können, dass $F(p, x, y)$ eine solche Funktion von x und y allein wird, dass unser Integral

$$\int_{x_1}^{x_2} \big\{F - F_p(y' - p)\big\} dx$$

vom Wege unabhängig wird. Wir suchen also eine Belegung der x, y Ebene mit p Werten, das heisst ein p-Feld, das dieser Forderung genügt, und die Bedingung hierfür ist offenbar, dass $p(x, y)$ eine Lösung der adjungierten partiellen Differentialgleichung ist.

Für die Möglichkeit, dieser Bedingung zu genügen, gilt nun der folgende fundamentale Satz, der sogenannte Unabhängigkeitssatz, der sofort den Zusammenhang zwischen den Variationsproblemen und der gegenwärtigen Fragestellung klar legt: Ist $y' = p(x, y)$ ein beliebiges intermediäres Integral[F] der LAGRANGEschen Differentialgleichung

$$[F]_y = F_{y',y'}y'' + F_{y',y}y' + F_{y',x} - F_y = 0,$$

also der Bedingungsgleichung für unser ursprüngliches Variationsproblem

$$\int_{x_1}^{x_2} F(y', y, x)\, dx = \text{Minimum},$$

so genügt $p(xy)$, die rechte Seite der intermediären Differentialgleichung, der adjungierten partiellen Differentialgleichung, und umgekehrt: ist $p(xy)$ Lösung der adjungierten partiellen Differentialgleichung, so ist $y' = p(xy)$ ein intermediäres Inte|gral der obigen LAGRANGEschen Differentialgleichung. Damit

10

[F] Ein intermediäres Integral einer Differentialgleichung höherer Ordnung, ist eine solche niedrigerer Ordnung, deren Lösungen sämtlich auch Lösungen der vorgelegten Differentialgleichung höherer Ordnung sind.

also das Integral in unserm letzten Minimalproblem vom Wege unabhängig ist, genügt es, eine solche Funktion $p(xy)$ zu nehmen, dass jede Lösung $y(x)$ der Differentialgleichung $y' = p(xy)$ dem ursprünglichen Variationsproblem genügt.

Der Beweis ist sehr einfach zu führen. Es sei $y' = p(xy)$ ein intermediäres Integral der LAGRANGEschen Differentialgleichung

$$[F]_y \equiv F_{y'y'}y'' + F_{y'y}y' + F_{y'x} - F_y = 0,$$

die also identisch in x und a erfüllt ist, wenn wir für y die allgemeine Lösung $y = y(xa)$ der Differentialgleichung $y' = p(xy)$ einsetzen. Dann gilt auch

$$y'' = p_x + p_y y'$$

identisch in x und a. Führen wir dies in unsere Differentialgleichung ein:

$$F_{y'y'}(p_x + p_y y') + F_{y'y}y' + F_{y'x} - F_y = 0$$

und schreiben wieder für y' p, so bekommen wir:

$$F_{pp}(p_x + p_y p) + F_{py}p + F_{px} - F_y = 0.$$

Diese Gleichung stimmt nun formal genau mit der adjungierten partiellen Differentialgleichung überein, gilt aber zunächst identisch in x und a. Führen wir aber anstelle von a vermittelst $y = y(xa)$ y ein, so gilt sie dann natürlich auch identisch in x und y. Damit ist der erste Teil des Satzes bewiesen.

Ist[11] umgekehrt $p(xy)$ eine Lösung der adjungierten partiellen Differentialgleichung und genüge $y(x)$ der Gleichung $y' \cdot p(xy)$ so können wir $p_x + p_y p = y''$ einsetzen, und kommen dann offenbar, wenn wir wieder überall für p y' einführen, auf die LAGRANGEsche Differentialgleichung zurück, womit auch der zweite Teil des Unabhängigkeitssatzes bewiesen ist.

⟨Das Unabhängigkeitsintegral (Eikonal)⟩

Wir gehen jetzt daran, den Wert unseres Integrals weiter zu verfolgen. Wir greifen also ein beliebiges intermediäres Integral $y' = p(xy)$ der LAGRANGEschen Differentialgleichung heraus, und setzen es in unser Integral ein. Dann wissen wir, dass letzteres vom Wege unabhängig, also eine reine Ortsfunktion
wird. Wir wol|len deshalb die Werte der Variabeln x und y an der unteren 11
Grenze mit x_1 und y_1 bezeichnen, während wir an der oberen Grenze einfach x und y schreiben, da wir jetzt den Wert des Integrals als Funktion seiner oberen Grenze auffassen können. Wir führen also die Funktion

$$J(xy) = \int_{x_1}^{x} \big\{F + F_p(y' - p)\big\} dx$$

[11] The following lines until the bottom of p. 10 of the typescript were typed with single spacing.

ein. Diese Funktion hat eine ganz fundamentale Bedeutung in den verschiedensten Gebieten, wo sie infolgedessen auch jedesmal einen besonderen Namen bekommen hat. So heisst sie in der Optik Eikonal, in der Flächentheorie geodätische Entfernung, in der Variationsrechnung Minimalfunktion, in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen Lösung der partiellen Differentialgleichung, und in der Mechanik HAMILTON-JACOBIsche Funktion. Es ist daher nur recht und billig, ihr auch in der Quantentheorie eine eigene Bezeichnung zu geben, für die ich „Quantrix“ vorgeschlagen habe.[12] Die Funktion $J(x, y)$ hängt offenbar noch wesentlich von der Wahl des Feldes $p(xy)$ ab, für das wir noch eine grosse Willkür haben, und es gehört zu jeder Funktion $p(xy)$ ein eigenes Eikonal. Wir können aber leicht eine Bedingung für alle Eikonale desselben Variationsproblems aufstellen. Greifen wir ein bestimmtes heraus, so können wir seine Ableitungen angeben, denn es ergibt sich aus seiner Definition durch das Integral

$$\begin{aligned}\frac{\partial J}{\partial x} &= F - pF_p,\\ \frac{\partial J}{\partial y} &= F_p.\end{aligned}$$

Die rechten Seiten dieser Gleichung sind Funktionen von x, y, p, wobei letzte-
12 res durch die Wahl des Feldes bestimmt ist. Wir bekom|men aber eine hiervon unabhängige Beziehung, wenn wir aus den 2 Gleichungen p eliminieren, in der also nur $\frac{\partial J}{\partial x}$, $\frac{\partial J}{\partial y}$, x, y auftreten

$$\Phi\left(\frac{\partial J}{\partial x}, \frac{\partial J}{\partial y}, x, y\right) = 0.$$

Dies ist offenbar eine partielle Differentialgleichung, die sogenannte Hamilton-Jacobische Differentialgleichung, der alle Eikonale genügen müssen.

⟨Konstruktion des allgemeinsten Feldes, Transversalen⟩

Unsere nächste Aufgabe ist jetzt, die Bedeutung des Eikonals für das Variationsproblem zu erkennen. Zu diesem Zwecke machen wir zunächst eine spezielle Annahme. Wir greifen aus der 2 parametrigen Schar von Integralkurven[G] der Lagrangeschen Differentialgleichung $[F]_y = 0$ diejenige einparametrige Schar heraus, deren Kurven durch einen bestimmten Punkt x_0, y_0 gehen, die sich

[G]Diese Kurven haben wieder eine grosse Bedeutung für die verschiedensten Probleme, und dementsprechend auch eine ganze Reihe von Namen. So heissen sie in der Variationsrechnung Extremalen, in der Optik Lichtstrahlen, in der Flächentheorie geodätische Linien, bei den partiellen Differentialgleichungen Charakteristiken, und in der Mechanik und der Quantentheorie endlich Bahnkurven.

[12]See p. 537 below.

etwa durch die Gleichung $y = y(x, a)$ darstellen lassen, und nehmen dann als p-Wert im Punkte x, y die Ableitung y' der durch diesen Punkt gehenden Kurve der Schar an der Stelle x. Wir nehmen ferner den Punkt x_0, y_0 als Anfangspunkt unseres Integrationsweges, und wissen dann, dass der Wert des Eikonals J in einem beliebigen Punkt unabhängig vom Wege wird. Um diesen Wert zu bestimmen, wählen wir letzteren so einfach wie möglich. Wir nehmen die Integralkurve, die x_0, y_0 mit dem Punkt x, y verbindet. Längs dieser Kurve ist aber überall $y' = p$. Unser Integral:

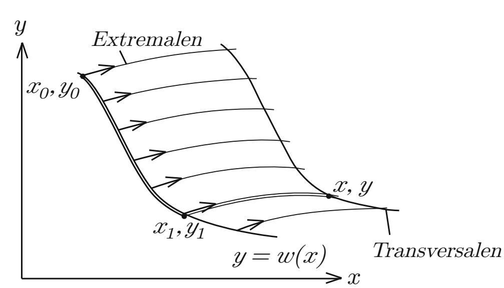
$$J(xy) = \int_{x_0}^{x} \Big\{F(p, y, x) + F_p(y' - p)\Big\} dx$$

reduziert sich dann auf

$$\int_{x_0}^{x} F(y', y, x)\, dx,$$

und da wir ja $y' = p(x, y)$ so bestimmt hatten, dass der Lagrangeschen Differentialgleichung $[F]_y = 0$ genügt wird, so fin|den wir das einfache Resultat: 13
Unser Eikonal J ist nichts anderes, als gerade der Minimalwert des ursprünglichen Variationsproblems.

Diese Bedeutung scheint zunächst an die besondere Wahl des p-Feldes geknüpft. Um sie allgemein erkennen zu können müssen wir uns von dieser Spezialisierung frei machen. Wir sehen zunächst, dass das allgemeinste p-Feld von einer willkürlichen Funktion abhängen muss; denn $p(x, y)$ soll ja die Lösung einer partiellen Differentialgleichung sein. Wir können dies auf folgende Weise erreichen:



$y = w(x)$ sei eine beliebige vorgegebene Kurve in der xy-Ebene. Dann definieren wir zunächst zu jedem Punkte dieser Kurve den Wert von $p(x, y)$ durch die Forderung

$$F(p, y) + F_p(y' - p) = 0.$$

Dies ist, wenn wir $y' = w'(x)$ einsetzen, eine gewöhnliche Gleichung für p. Jetzt legen wir durch jeden Punkt P der Kurve $y = w(x)$ eine bestimmte Extremale, d. h. eine Lösungskurve der LAGRANGEschen Gleichung $[F]_y = 0$, indem wir für den Punkt P der Extremale die Richtung $y' = p$ vorschreiben. Durch diese 2 Bedingungen: dass sie durch P gehen und dort eine vorgeschriebene Richtung haben soll, ist offenbar die Extremale völlig bestimmt; denn sie ist die Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung 2. Ordnung. So haben wir eine einparametrige Schar von Extremalen konstruiert. Allgemein ordnen wir jetzt einem Punkte x, y der

Ebene den Wert $p = y'$ zu, wo y' die Richtung der durch diesen Punkt hindurchgehenden Extremalen kennzeichnet. Auf diese Weise sind wir zu einem
14 p-Felde gelangt, welches von einer willkürlichen Funktion $w(x)$ ab|hängt und
also die nötige Allgemeinheit besitzt.

Ist ein p-Feld, d. h. die Funktion $p(x, y)$ gegeben, so wird

$$F(p, y) + F_p(y' - p) = 0$$

eine Differentialgleichung 1. Ordnung für y. Ihre Lösungen bilden eine einparametrige Kurvenschar. Man nennt die Kurven dieser Schar die Transversalen des p-Feldes. Durch eine Transversale der ganzen einparametrigen Schar ist das p-Feld bestimmt, wie wir gesehen haben; in unserer Konstruktion haben wir z. B. das p-Feld bestimmt, indem wir von der Transversale $y = w(x)$ ausgingen.

⟨Bedeutung des Eikonals⟩

Nachdem wir das p-Feld im allgemeinen Fall konstruiert haben, können wir auch das Eikonal $J(x, y)$ bestimmen, und wir fragen wieder nach der Bedeutung dieser Funktion. Den festen Punkt x_0, y_0 der unteren Grenze des Integrals

$$J(x, y) = \int_{x_0, y_0}^{x, y} \{F + F_p(y' - p)\} dx$$

nehmen wir auf der Transversalen $y = w(x)$ an. Zur Berechnung von J steht uns die Wahl des Integrationsweges wieder frei. Wir wählen sein erstes Stück längs der Transversalen bis zu deren Schnittpunkt x_1, y_1 mit der durch den Punkt x, y gehenden Extremalen. Dieses Stück liefert keinen Beitrag zum Integral, da der Integrand längs der Transversalen nach Konstruktion verschwindet. Das letze Stück des Integrationsweges wählen wir längs der Extremalen vom Punkt x_1, y_1 bis zum Punkte x, y. $J(x, y)$ wird also wieder der Minimalwert des Integrals

$$\int_{x_1}^{x} F(y', y, x)\, dx$$

genommen zwischen den 2 festen Transversalen, die durch den Anfang resp.
Endpunkt des Integrationsweges gehen. Dieser Wert, der „Abstand“ der beiden
15 Transversalen ist, da J auf der Transversalen | konstant, und im Übrigen vom
Wege unabhängig ist, offenbar selbst konstant.

Wir haben gesehen, dass man mit der Integration der LAGRANGEschen Differentialgleichung $[F]_y = 0$ auch das allgemeinste p-Feld also auch die allgemeine Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\Phi\left(\frac{\partial J}{\partial x}, \frac{\partial J}{\partial y}, x, y\right) = 0$$

gewonnen hat. Dieses Ergebnis wurde seinerzeit als ein grosser Fortschritt begrüsst, weil damit die Integration der partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung auf die von gewöhnlichen zurückgeführt war. Denn man kann zu jeder partiellen Differentialgleichung, die J nicht explicite enthält, was aber keine wesentliche Beschränkung bildet, auch das zugehörige Variationsproblem finden.
Ein noch grösserer Nutzen aber sollte aus diesem Zusammenhang zwischen der gewöhnlichen LAGRANGEschen Differentialgleichung und der partiellen von Hamilton-Jacobi erwachsen, als man jenen Gedanken umkehrte und die Integration der gewöhnlichen Differentialgleichung auf die der partiellen zurückführte. Dies ist das grosse Verdienst von Jacobi.

⟨Die Hamilton-Jacobische Theorie⟩

⟨Die Hamilton-Jacobische Differentialgleichung⟩

Wir sahen zu Anfang, dass die Differentialgleichung $[F]_y = 0$ die Lösung des Variationsproblems

$$\int_{x_1}^{x_2} F(y', y, x)\, dx = \text{Minimum}$$

darstellt. Nun stellt uns die Physik ihre Aufgaben in der Regel nicht in der Form eines Variationsproblems, sondern in der Form von Differentialgleichungen. Man verschafft sich in der Physik erst künstlich ein Variationsproblem, dessen Lösung die vorgelegte Differentialgleichung ist. Welcher Nutzen erwächst denn nun | aus der Kenntnis des Zusammenhangs zwischen einer vor- 16
gelegten Differentialgleichung und einem Variationsproblem für die eigentliche Aufgabe⟨,⟩ nämlich die Integration der Differentialgleichung? Gewiss ist es ja schon erkenntnis-theoretisch interessant, dass die Aufgabe, welche uns die Natur in Form einer Differentialgleichung stellt, sich als ein Minimalproblem auffassen lässt. Wird denn aber auch die Lösung der Aufgabe durch die Kenntnis des Minimalproblems erleichtert? JACOBI hat diese Frage zuerst gestellt und in seinem *Prinzip des letzten Multiplikators* auch schon beantwortet.[13] Ihm wenden wir uns jetzt zu.

⟨Der Satz vom letzten Multiplikator und die Integration der Lagrangeschen Differentialgleichung⟩

Multiplikator einer Differentialgleichung $y' = p(x, y)$ heisst eine Funktion $M(x, y)$, die so beschaffen ist, dass identisch

$$M(x, y)\{y' - p(x, y)\} \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y'$$

[13]See *Jacobi 1996*.

wird. D. h. die mit dem Multiplikator multiplizierte linke Seite der vorgelegten Differentialgleichung, deren rechte Seite null ist, soll ein vollständiges Differential werden. Das ergibt die Bedingungen:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial x} &= -Mp,\\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} &= M.\end{aligned} \tag{1}$$

Kennt man also einen Multiplikator M, so findet man φ durch reine Quadraturen. Hat man aber φ, so bestimme man $y(x)$ durch Auflösung der Gleichung

$$\varphi(x, y) = \text{const}; \tag{2}$$

dann ist diese Funktion die[14] Lösung der Differentialgleichung $y' - p = 0$.[15]
17 Hat man also einen Multiplikator gefunden, so ist damit die Integration der vorgelegten Differentialgleichung auf Quadraturen zurückgeführt.

Der Inhalt des Satzes von JACOBI ist nun folgender: Angenommen wir kennen ein intermediäres Integral der LAGRANGEschen Differentialgleichung, das noch von einer willkürlichen Konstanten a abhängt: $y' = p(x, y, a)$ hätten also die LAGRANGEsche Differentialgleichung einmal vollständig integriert. Dann ist

$$M = \frac{\partial^2 F}{\partial p^2}\frac{\partial p}{\partial a}$$

ein Multiplikator der Differentialgleichung $y' - p(x, y) = 0$. M ist hier durch Vermittlung von p natürlich von a abhängig. Durch Quadraturen ist man dann im Besitze der Funktion φ, welche jetzt auch den Parameter a enthält, also gemäss 2) im Besitze einer Lösung von $y' = p$, welche noch den zweiten willkürlichen Parameter enthält. Man hat demnach eine von 2 willkürlichen Parametern abhängige Lösung der LAGRANGEschen Differentialgleichung $[F]_y = 0$ gewonnen, das ist aber die allgemeine Lösung. Man spricht vom "letzten" Multiplikator, weil durch ihn die LAGRANGEsche Gleichung zum zweiten, also letzten Mal integriert wird, wenn man sie bereits einmal vollständig integriert hat. Die vollständige Integration der LAGRANGEschen Differentialgleichung ist damit reduziert auf die Aufindung eines intermediären Integrals, welches von einer Konstanten abhängt.

Zum Beweise des JACOBIschen Satzes machen wir von der Voraussetzung gebrauch, dass $y' = p(x, y, a)$ intermediäres Integral der LAGRANGEschen
18 Differentialgleichung ist. Wir haben näm|lich für jeden Wert von a ein p-Feld in der x, y-Ebene vor uns, welches eben infolge jener Voraussetzung nach dem Unabhängigkeitssatze das Integral J zu einer Ortsfunktion macht. Natürlich

[14] "die" substituted for "offenbar eine".

[15] Deleted: "Denn für $p = \text{const.}$ folgt aus der Definitionsgleichung für den Multiplikator:".

ist dies Eikonal noch von a abhängig: $J = J(x, y, a)$. Es ist ferner

$$\begin{aligned}\frac{\partial J}{\partial a} &= \int\limits_{x_1}^{x} \frac{\partial}{\partial a}\big\{F + F_p(y' - p)\big\}dx \\ &= \int\limits_{x_1}^{x} \big\{F_p p_a + F_{pp} p_a (y' - p) - F_p p_a\big\}dx \\ &= \int\limits_{x_1}^{x} F_{pp} p_a (y' - p)\, dx.\end{aligned}$$

Da nun $J(x, y, a)$ eine Ortsfunktion für alle Werte des Parameters a ist, so muss dies natürlich auch für $\frac{\partial J}{\partial a}$ gelten, also auch unser letztes Integral vom Wege unabhängig sein. Das heisst aber, der Integrand muss ein vollständiges Differential sein, mit anderen Worten $F_{pp} p_a$ ist ein Multiplikator der Differentialgleichung $y' - p = 0$.

Dieser Beweis zeigt uns, dass wir auch die nötige Quadraturen schon ausgeführt haben; denn wir kennen ja bereits die Funktion $\varphi(xy) = \frac{\partial J}{\partial a}$.

Setzen wir diese einer willkürlichen Konstanten gleich, die wir mit b bezeichnen wollen, so haben wir in

$$\frac{\partial J}{\partial a} = b$$

die allgemeine, von 2 Parametern abhängige Lösung der LAGRANGEschen Differentialgleichung. Wir können diese demnach vollständig integrieren, wenn wir nur eine einparametrige Schar von Lösungen der Hamilton-Jacobischen partiellen Differentialgleichung

$$\Phi\left(\frac{\partial J}{\partial x}, \frac{\partial J}{\partial y}, x, y\right) = 0$$

gefunden[16] haben. Wir erkennen jetzt auch, wie die Integration einer Differentialgleichung zweiter Ordnung erleichtert ist, wenn wir das zugehörige Variationsproblem kennen, d. h. die Funktion F wirklich angeben können. Denn dann brauchen wir nur noch ein von einem Parameter abhängiges intermediäres Integral zu finden um $\langle J\rangle$ und damit die allgemeine Lösung zu gewinnen. Darin liegt der Nutzen z. B. des Hamiltonschen Prinzips für die Integration der Bewegungsgleichungen der Mechanik.[17] 19

[16] On the left hand page, Hilbert wrote again: "Statt $x\ y\ p\ \eta$ setze $t\ q\ k\ p$", cf. note 3.

[17] At this point, the equation

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} \big\{F + F_p(y' - p)\big\}dx = \text{Min.}$$

⟨Das kanonische Variationsproblem⟩

[26] Wir[18] wollen jetzt unserem ursprünglichen Variationsproblem noch eine neue also fünfte Form geben, welche für die Mechanik im allgemeinen und für die Störungstheorie im besonderen von grosser Bedeutung ist. Wir hatten zuletzt immer das Variationsproblem

$$\int_{x_1}^{x_2} \{F + F_p(y' - p)\} dx = \text{Min.}$$

behandelt, wobei die zwei unbekannten Funktionen y und p gesucht sind. Im Integranden tritt hier die Ableitung von p garnicht, die von y nur linear auf. Aber der Faktor F_p von y' kann ja noch eine ganz komplizierte Funktion von y und p sein. Es wäre offenbar viel bequemer, wenn der Faktor von y' einfach die andere Unbekannte wäre. Dies können wir erreichen, indem wir

$$\eta = F_p(p, y, x)$$

als neue Unbekannte einführen, und y und η als gesuchte Funktionen behandeln. p wird dann eine Funktion von η, y, x, und unser Variationsproblem erhält die Fassung:[19]

$$\int_{x_1}^{x_2} \{\eta y' - L(\eta, y, x)\} dx = \text{Min.},$$

wo

$$L = -F + pF_p$$

20[27] |[20] gesetzt ist; dabei soll in dem Ausdruck für L p durch η, y, x ausgedrückt

---

was deleted with ink. In the left margin, a reader's sign ($\top$) was added in pencil, and on the left hand page, Hilbert wrote, and deleted, the following equations with pencil:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial F}{\partial q}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{q}} = p \qquad \mathcal{H} = \dot{q}\frac{\partial F}{\partial \dot{q}} - \mathcal{F} = \mathcal{H}(p, q)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}(p, q)}{\partial p} = \dot{q}$$

In addition, on this and the following pages, most equations were corrected or rewritten by Hilbert with a change of notation, cp. the previous note.

[18] *Hilbert 1926/27** picks up again at this point, see note 10 above, and the first two sentences are corrected there by Hilbert with pencil to read: "Wir wollen jetzt unserem ursprünglichen Variationsproblem eine neue Form geben, welche für die Mechanik von grosser Bedeutung ist. Wir behandeln das Variationsproblem [...] wobei die zwei unbekannten Funktionen $q(t)$ und $k(t)$ gesucht sind, was offenbar dieselben obigen Lagrangeschen Differentialgl. giebt."

[19] The following equations were rewritten with different notation by Hilbert in pencil. In addition, Hilbert added with pencil: "ob wirklich Min.?"

werden. Man nennt L die *LEGENDREsche Funktion* von F, da sie vermittels einer sogenannten LEGENDRE-Transformation aus F hervorgeht. Diese Transformation tritt in vielen Gebieten der Mathematik und mathematischen Physik auf: so in der Geometrie beim Übergang von Punkt- zu Linienkoordinaten, oder in der Thermodynamik beim Übergang von der Entropie zum thermodynamischen Potential.

Da nun unser Variationsproblem die einfachste Form erhalten hat, die ein Variationsproblem mit zwei unbekannten Funktionen überhaupt annehmen kann, dass nämlich nur die Ableitung der einen Funktion aufritt, und zwar dazu nur linear und allein mit der anderen gesuchten Funktion multipliziert (wäre dies nicht der Fall, so läge gar kein Variationsproblem mehr vor), so wird es auch das *kanonische Variationsproblem* genannt, und η und y die *kanonischen Variablen*. Dies kanonische Variationsproblem wollen wir nun weiterhin untersuchen.

Zuerst fragen wir, wie man von den Variabeln η, y, L zu den alten Variabeln p, y, F zurückgelangen kann. Dazu differenzieren wir L partiell nach η

$$L_\eta = \frac{\partial}{\partial\eta}(-F + p\eta) = -F_p p_\eta + p_\eta \eta + p = p.$$

Hieraus folgt weiter:

$$\begin{aligned} L &= -F + p\eta = -F + L_\eta \eta, \\ F &= -L + \eta L_\eta. \end{aligned}$$

Stellen wir noch einmal die Transformationsformeln zusammen: [28]

$$\begin{aligned} \eta &= F_p \\ L &= -F + pF_p \end{aligned} \qquad \text{und} \qquad \begin{aligned} p &= L_\eta \\ F &= -L + \eta L_\eta, \end{aligned}$$

so sehen wir, dass der Übergang von F zu L derselbe ist, wie | der umgekehrte, 21
und das ist gerade eine besonders wichtige Eigenschaft der LEGENDREschen Transformation.

⟨Form der Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung⟩

Für diese letzte Form unseres Variationsproblems, erhalten auch die Variationsableitungen eine besonders einfache Gestalt. Sie reduzieren sich, wie man leicht sieht, auf

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\partial L}{\partial \eta}, \\ \frac{d\eta}{dx} &= -\frac{\partial L}{\partial y}, \end{aligned}$$

[20]On the left hand page, Hilbert wrote: “Statt $x\ y\ p\ \eta\ \mathcal{L}$ setze $t\ q\ k\ p\ \mathcal{H}$”, cp. note 3.

und dies ist ein System von zwei Differentialgleichungen 1. Ordnung von besonders symmetrischem Bau, das als das *kanonische* bezeichnet wird, und die Grundlage für alle feineren Untersuchungen der Dynamik bildet. – Ebenso werden auch y und η als kanonische Variable bezeichnet. Diese kanonischen Differentialgleichungen sind natürlich nach der ganzen Herleitung äquivalent mit der ursprünglichen LAGRANGEschen Differentialgleichung, die ja von der 2. Ordnung ist,

$$[F]_y = 0,$$

[29] was sich auch durch direkte Umformungen beweisen lässt.

(Mit Hilfe der LAGRANGEschen[21] Funktion L erhält nun auch die partielle Differentialgleichung, der alle Eikonale $J(x, y)$ genügen müssen, eine besonders einfache Form. Wir hatten ja früher gefunden:

$$\begin{aligned} J_x &= F - pF_p, \\ J_y &= F_p, \end{aligned}$$

wofür wir nun schreiben können:

$$\begin{aligned} J_x &= -L(\eta, y, x), \\ J_y &= \eta. \end{aligned}$$

Hier lässt sich nun die Elimination des dritten Argumentes η ohne weiteres ausführen, und die Hamilton-Jacobische Differentialgleichung wird:

$$\frac{\partial J}{\partial x} + L\left(\frac{\partial J}{\partial y}, y, x\right) = 0.$$

22 Man erhält sie also, indem man in der LEGENDREschen Funktion $L(\eta, y, x)$ η durch $\frac{\partial J}{\partial y}$ ersetzt, und diesen Ausdruck gleich $-\frac{\partial J}{\partial x}$ setzt.)[22]

Für die späteren Anwendungen wollen wir gleich hier für den Fall eines einzigen Freiheitsgrades die wichtigsten Eigenschaften des kanonischen Variationsproblems und der kanonischen Gleichungen untersuchen; denn nur dadurch, dass man auf die ersten einfachsten Formen zurückgeht, kann man den Sinn und die Bedeutung der einzelnen Schritte und Operationen genau übersehen und daher verstehen.

[21] "LAGRANGEschen" should be "LEGENDREschen".

[22] The brackets were added in pencil.

⟨Theorie der kanonischen Transformation⟩

Zuerst[23] fragen wir, ob es neben den ursprünglichen Variabeln η, y auch andere η^*, y^* gibt, bei deren Einführung das Variationsproblem

$$\int_{x_1}^{x_2} \{\eta y' - L\}\, dx = \text{Min.} \tag{1}$$

in ein äquivalentes[24]

$$\int_{x_1}^{x_2} \left\{\eta^* y^{*\prime} - L^*(\eta^*, y^*, x)\right\} dx = \text{Min.} \tag{2}$$

übergeht. Dabei ist nicht verlangt, dass durch die Substitution

$$\begin{aligned} \eta^* &= \eta^*(\eta, y, x), \\ y^* &= y^*(\eta, y, x) \end{aligned} \tag{3}$$

das erste Integral identisch in das zweite übergeht, sondern nur, dass die beiden Variationsprobleme miteinander äquivalent sind, und die kanonische Form der LAGRANGEschen Differentialgleichung erhalten bleibt. Notwendig und hinreichend ist hierfür offenbar die Bedingung:

$$\eta y' - L(\eta, y, x) = \eta^* y^{*\prime} - L^*(\eta^*, y^*, x) + \frac{dW(\eta^*, y^*, x)}{dx}, \tag{4}$$

d. h. die beiden Integranden unterscheiden sich nur um | eine vollständige [30]
Ableitung nach der unabhängigen Veränderlichen x. Denn das Integral über ein solches Differential ist ja vom Integrationsweg unabhängig und liefert bei
festem Anfangs- und Endpunkt nur einen kon|stanten Beitrag, der für die 23
Bestimmung der Extremalen ohne Belang ist. Beide Integrale nehmen also „gleichzeitig“ ihr Minimum an: d. h. wenn das Integral (1) seinen Minimalwert annimmt für die Funktionen $\eta(x)$, $y(x)$, so tut es das Integral (2) für diejenigen Funktionen $\eta^*(x)$, $y^*(x)$, die vermöge der Substitution (3) aus η und y hervorgehen. Dasselbe gilt natürlich auch, wenn man vom Integral (2) ausgeht, und die zu (3) inversen Substitutionen

$$\begin{aligned} \eta &= \eta(\eta^*, y^*, x), \\ y &= y(\eta^*, y^*, x) \end{aligned} \tag{3a}$$

benutzt.

[23] In *Hilbert 1926/27** the preceding two paragraphs (starting with "Mit Hilfe der LAGRANGEschen") are missing, and the word "Zuerst" was changed to "Nachdem wir das Variationsproblem auf die einfache kanonische Form gebracht haben,".

[24] In the left margin, Hilbert wrote with pencil: "Statt η^*, y^* schreibe P, Q".

Die Beziehung (4) soll nun identisch gelten[25] in den neuen Variabeln η^*, y^* und natürlich auch in deren Ableitungen $\eta^{*\prime}$, $y^{*\prime}$, das heisst, führt man in der linken Seite von (4) vermittels (3a) η^*, y^* ein, so soll sie sich auf eine Identität reduzieren. Um diese besser auswerten zu können, führen wir rechts in W an Stelle von η^* die Variable y ein,[26] indem wir die Transformationsgleichung

[31] $$y = y(\eta^*, y^*, x)$$

nach η^* auflösen

$$\eta^* = \eta^*(y, y^*, x).$$

Dann wird aus (4)[27]

$$\begin{gathered} \eta y' - L(\eta, y, x) = \eta^* y^{*\prime} - L^*(\eta^*, y^*) + \frac{dV(y, y^*, x)}{dx}, \\ \frac{dV}{dx} = \frac{\partial V}{\partial y} y' + \frac{\partial V}{\partial y^*} y^{*\prime} + \frac{\partial V}{\partial x}, \end{gathered} \tag{4a}$$

wobei $V(y, y^*, x)$ statt $W(\eta^*, y^*, x)$ gesetzt ist; und diese Beziehung muss nun identisch in y, y^*, y', $y^{*\prime}$ gelten.[28] Infolgedessen müssen die Faktoren dieser Grössen (und natürlich auch die von ihnen freien Glieder) auf beiden Seiten gleich sein, und wir können daher sofort durch Koeffizientenvergleichung
24 folgende 3 Bedingungen | für η, η^* und L^* aus (4a) entnehmen:

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{\partial V(y, y^*, x)}{\partial y}, \\ O &= \eta^* + \frac{\partial V(y, y^*, x)}{\partial y^*}, \\ -L(\eta, y, x) &= -L^*(\eta^*, y^*, x) + \frac{\partial V(y, y^*, x)}{\partial x}. \end{aligned} \tag{5}$$

Diese Bedingungen sind notwendig und hinreichend für die Erhaltung der kanonischen Form des Variationsproblems bei einer Transformation der Variabeln. Wir können also das Resultat auch in folgender Form aussprechen: Man
[32] erhält immer eine kanonische Transformation, indem man eine | willkürliche Funktion V der Argumente y, y^*, x; $V(y, y^*, x)$ wählt, und als Transformati-

[25] Interlineated by Hilbert with pencil: "mit Hilfe von (3)".

[26] The words "die Variable" were added by Hilbert with pencil. At this point, Hilbert also added with pencil: "sodass y, y^* die unabh. Variabeln werden."

[27] In the following equation $L^*(\eta^*, y^*)$ should be $L^*(\eta^*, y^*, x)$. In the left margin, Hilbert wrote with pencil "Für L^* schreibe steiler H".

[28] At this point, Hilbert added a reader's sign ($\top$) to indicate that the following words, written with pencil on the left hand page, are to be inserted here: "$\top$ nachdem man zuvor p aus 3a durch q, Q, t ausgedrückt und dann dann ⟨sic⟩ eingesetzt hat".

onsgleichungen

$$\eta = \frac{\partial V(y, y^*, x)}{\partial y}$$
$$\eta^* = -\frac{\partial V(y, y^*, x)}{\partial y^*}$$

nimmt, die die Verknüpfung der alten und der neuen Variablen liefern, und zwar erhält man auf diese Weise auch alle überhaupt existierenden. Die neue LEGENDREsche Funktion wird dann

$$L^* = L + \frac{\partial V}{\partial x},$$

wo rechts natürlich η und y durch η^* und y^* auszudrücken sind, so dass die kanonischen Gleichung für η^* und y^*

$$\frac{dy^*}{dx} = \frac{\partial L^*}{\partial \eta^*}$$
$$\frac{d\eta^*}{dx} = -\frac{\partial L^*}{\partial y^*}$$

lauten. Enthalten insbesondere die Transformationsformeln die unabhängige Veränderliche x nicht, so wird einfach

$$L^* = L.$$

Wir haben bei der obigen Betrachtung die Variabeln y, y^* bevorzugt, indem wir als erzeugende Funktion für die Transformation eine willkürliche Funktion $V(y, y^*, x)$ wählten. Genau so gut können wir aber z. B. y und η^* | als [33]
unabhängige Variable nehmen. (Um die | Transformationsformeln für diesen Fall zu erhalten schreiben wir Gleichung (4)

$$\begin{aligned}\eta y' - L &= \eta^* y^{*\prime} - L^* + \frac{d}{dx}(W + \eta^* y^*) - \frac{d}{dx}(\eta^* y^*)\\ &= -L^* + \frac{d}{dx}(W + \eta^* y^*) - y^* \eta^{*\prime},\end{aligned}$$

und setzen

$$W(\eta^*, y^*, x) + \eta^* y^* = U(\eta^*, y^*, x) \tag{6}$$

und erhalten damit

$$\eta y' - L = -y^* \eta^{*\prime} - L^* + \frac{dU(\eta^*, y^*, x)}{dx}. \tag{4a}$$

Wir können jetzt ganz analog wie vorhin in U statt y^* vermittels (3a) y einführen und für $U(\eta^*, y^*, x)$ $T(y, \eta^*, x)$ schreiben, so dass wir eine Identität in y, η^* und deren Ableitung y', $\eta^{*\prime}$ bekommen.)[29] Diese liefert wieder durch Koeffizientenvergleichung die Transformationsformeln:

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{\partial T(y,\eta^*,x)}{\partial y} \\ y^* &= \frac{\partial T(y,\eta^*,x)}{\partial \eta^*} \\ L^* &= L + \frac{\partial T}{\partial x}. \end{aligned} \tag{5a}$$

Wir können demnach auch die allgemeinste kanonische Transformation erhalten, indem wir eine willkürliche Funktion $T(y,\eta^*,x)$ vorgeben; die Transfor-
[34] mationsformeln werden | dann durch (5a) geliefert.[30] (Wollen wir insbesondere

[29] The brackets were added with pencil. In the left margin, Hilbert wrote with pencil: "Dann bekommen wir:".

[30] In *Hilbert 1926/27**, the following material, until "Im Hinblick auf ..." on p. 30 (see note 36 below) was replaced by the following text:
"Mit Hilfe der kanonischen Transformationen lässt sich die systematische Integrationstheorie der kanonischen Gleichungen sehr leicht entwickeln. Es liegt nahe, zu fragen, ob man es nicht erreichen kann, dass die neue Hamiltonsche Funktion K verschwindet. Die Funktion, die dies leistet, wollen wir zum Unterschied zu anderen Transformationsfunktionen mit J bezeichen. Nun soll J eine Funktion von q, Q und t sein und

$$p = \frac{\partial J}{\partial q}, \quad P = -\frac{\partial J}{\partial Q}, \quad K = H + \frac{\partial J}{\partial t}$$

werden. Damit K verschwindet, muss also

$$\frac{\partial J(q,Q,t)}{\partial t} + H\left(q, \frac{\partial J}{\partial q}, t\right) = 0$$

sein. Dies ist eine partielle Differentialgleichung 1. Ordung für J, die HAMILTON-JACOBIsche partielle Differentialgleichung. Sie entsteht indem man in der HAMILTONschen Funktion H p durch $\frac{\partial J}{\partial q}$ ersetzt und $\frac{\partial J}{\partial t}$ addiert. Da sie für alle beliebigen Werte von Q bestehen muss, spielt Q die Rolle einer Integrationskonstanten.
Nehmen wir nun an, wir hätten ein Integral der Differentialgleichung, das noch eine Integrationskonstante α enthält, gefunden, so können wir α als neue Variable einführen. Die Transformationsformeln liefern dann

$$\begin{aligned} p = \frac{\partial J}{\partial q}, \quad P = -\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \beta \\ K = H + \frac{\partial J}{\partial t} = 0 \end{aligned}$$

⟨p. 35⟩ und die neuen kanonischen Gleichungen werden infolge der dritten Zeile einfach

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} = \frac{d\beta}{dt} &= 0 \\ \frac{d\alpha}{dt} &= 0. \end{aligned}$$

Also sind sowohl α als auch β konstante Grössen für das mechanische System. Sie heissen die kanonisch konjugierten Konstanten. Damit ist die Integration der kanonischen Differentialgleichungen des mechanischen Systems vollständig durchgeführt, denn die Transformationsgleichungen liefern p und q als Funktionen der Zeit und der beiden Integrationskonstanten α und β.
Die Integration der kanonischen Gleichung ist also zurückgeführt auf die Auffindung eines

dieselbe Transformation einmal nach (5) und dann auch nach (5a) ausdrücken, so hängen die erzeugenden Funktionen nach (6) wie folgt zusammen

$$V = T - \eta^* y^*.$$

Diese Beziehung ist natürlich so zu verstehen, dass man auf beiden Seiten die gleichen Variablen einzuführen hat, während man für die Bestimmung von L^* $V(y, y^*, x)$ oder $T(y, \eta^*, x)$ nehmen muss.

Zu den Transformationsformeln (5a) kann man auch gelangen, indem man nach Einführung von $\eta^* y^*$ mittels (5) noch eine zweite speziel|le kanonische 26
Transformation ausführt, die y^*, η^* in neue Variable η^{**}, η^{**} transformiert. Diese Transformation bestimmen wir durch die Funktion:

$$V^*(y^*, y^{**}, x) = y^* y^{**}.$$

Dann ergeben sich die Formeln (5)

$$\begin{aligned} \eta^* &= \frac{\partial V^*}{\partial y^*} \quad = y^{**} \\ \eta^{**} &= -\frac{\partial V^*}{\partial y^{**}} = -y^* \\ L^{**} &= L^* + \frac{\partial V^*}{\partial x}. \end{aligned} \tag{5b}$$

Integrals mit einer willkürlichen Konstanten der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung. Hiermit scheint zunächst nicht viel gewonnen, da partielle Differentialgleichungen in der Regel schwieriger zu behandeln sind als gewöhnliche. Es hat sich aber gezeigt, dass für viele wichtige Fälle die partielle Differentialgleichung relativ einfache Formen annimmt, sodass ihre Einführung tatsächlich einen grossen Fortschritt bedeutet.

Die Funktion J selbst spielt in den verschiedenen Gebieten eine wichtige Rolle. Nach ihrem Namen in der Optik wollen wir sie mit Eikonal bezeichnen. Sie hat auch in der Mechanik eine einfache und anschauliche Bedeutung. ⟨p. 36⟩ (Denken wir uns in ihre Differentialgleichung

$$\frac{\partial J}{\partial t} + H = 0$$

eine wirkliche Lösung des mechanischen Problems eingesetzt, d. h. die Werte $q(t)$, $\frac{\partial J}{\partial q} = p(t)$ für die wirklich eintretende Bewegung, so erhalten wir mittels der LEGENDREschen Transformation

$$\begin{gathered} \frac{\partial J}{\partial t} - F + \frac{\partial H}{\partial p} p = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial q}\dot{q} = F \\ \frac{dJ}{Dt} = F \qquad\qquad) \\ J_A - J_B = \int_A^B F\,dt \end{gathered}$$

J stellt also den wirklichen Wert des HAMILTONschen Integrals zwischen Anfangs- und Endpunkt der Bahnkurve dar. "

Nun geben 2 kanonische Transformationen hintereinander angewandt offenbar wieder eine kanonische Transformation. Wir können also in (5) die mit einem Stern versehenen Variabeln nach (5b) durch die 2 gesternten ersetzen, wobei die erzeugende Funktion dieser ganzen Transformation

$$
\begin{aligned}
T &= V + V^* \qquad\qquad\qquad\qquad \text{oder nach (5b)} \\
&= V(y, \eta^{**}, x) - y^{**}\eta^{**}
\end{aligned}
$$

ist, und die Transformationsformeln lauten

$$
\begin{aligned}
\eta &= \frac{\partial T(y, \eta^{**}, x)}{\partial y} \\
y^{**} &= \frac{\partial T}{\partial \eta^{**}} \\
L^{**} &= L + \frac{\partial T}{\partial x},
\end{aligned}
$$

und das sind genau die Formeln (5a).

⟨Die kanonischen Konstanten⟩

Um die eben entwickelte Transformationstheorie zu erläutern, wollen wir sie zunächst benutzen, um einen neuen Beweis des Satzes vom letzten Multiplikator zu geben.)[31] Wir[32] gehen von der Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung

$$J_x + L(J_y, y, x) = 0$$

aus, und nehmen an, wir hätten ein, von einer willkürlichen Konstanten a abhängiges Integral $J(a, y, x)$ gefunden. Diese Funktion $J(a, y, x)$ nehmen wir
27 als Erzeugende einer kanonischen Trans|formation $V(y, y^*, x)$, indem wir als neue Variable y^* die Integrationskonstante a einführen. Dann liefern unsere Transformationsformeln (5) auf Seite (24)

$$
\begin{aligned}
\eta &= J_y \\
\eta^* &= -J_{y^*} \\
L^* &= L - J_x,
\end{aligned}
$$

wo a und η^* die neuen konjugierten Variabeln sind. Aus diesen Formeln können wir nun folgendes entnehmen. Die neue LEGENDREsche Funktion L^*

[31] The brackets were added with pencil. In the left margin, Hilbert added a reader's sign (⊤). In addition, at this point Hilbert indicated for insertion with pencil: "Die wichtigste Anwendung erhalten wir, indem wir fragen nach einer kanonischen Transformation, bei der das neue H identisch Null wird."

[32] Added by Hilbert with pencil: "gelangen so dazu ein $V(= I)$ zu suchen".

ist ja gleich 0, denn sie ist nichts anderes, als die linke Seite der Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung, und wir haben gerade J so gewählt, dass diese befriedigt ist. Die neuen kanonischen Gleichungen lauten also einfach

$$\frac{da}{dx} = 0$$
$$\frac{d\eta^*}{dx} = 0.$$

Also ist sowohl $a = \text{const.}$ als auch

$$\eta^* = -\frac{\partial J}{\partial a} = \text{const.}$$

Die erste dieser Gleichungen sagt die schon bekannte Tatsache aus, dass a konstant ist, während die zweite, darüber hinausgehend uns noch liefert, dass auch $\frac{\partial J}{\partial a}$ eine Konstante ist, die wir b nennen können. Dies ist aber gerade der Inhalt des Satzes vom letzten Multiplikator, ([33] und wir könnten hier die dort über die Integration der LAGRANGEschen Differentialgleichung $[F]_y = 0$ gezogenen Schlüsse wiederholen.) a und b sind also kanonisch konjugiert, im Sinne unserer Transformationstheorie, und man nennt sie daher auch die kanonisch konjugierten Konstanten.[34]

⟨Die Variation der Konstanten⟩

Vermittels einer kleinen Modifikation der eben durchgeführten Überlegung sind wir bereits im Stande, einen sehr wichtigen Satz | der Störungsrechnung 28
zu beweisen, nämlich den Satz von der Variation der Konstanten. Es liege ein System kanonischer Gleichungen vor, deren LEGENDREsche Funktion sich in 2 Teile spalten lässt, dass also

$$L = L_1(\eta, y, x) + L_2(\eta, y, x)$$

[33] The brackets were added with pencil. In the left margin, Hilbert added a reader’s sign ($\perp$).

[34] At this point, Hilbert added a reader’s sign (Π) to indicate that the following words, written with pencil on the left hand page, are to be inserted here: “Π Wir können auch sagen: die Kenntnis einer einparametrigen Schaar von intermediären Integralen $p(x, y, a) = \frac{dy}{dx}$ der Lagrangeschen gew. Differentialgl. genügt, um durch blosse Quadratur die volle Lösung der Lagrangeschen Differentialgl. zu erhalten. Nämlich aus

$$\frac{\partial g}{\partial x} F - pF_p \qquad\qquad \frac{\partial g}{\partial t} = F - kF_k$$
$$\frac{\partial g}{\partial y} F_p \qquad\qquad \frac{\partial g}{\partial q} = F_k$$

ergiebt sich aus einem speziellen $p(x, y)$ durch Quadratur ein $I(x, y)$ und umgekehrt aus einer partikulären Lösung der Hamilton-Jacobischen partiellen Differentialgl. $I(x, y)$ eine intermediäre Lösung $p(x, y) = \frac{dy}{dx}$ der Lagrang. Differentialgl. $[F]_y = 0$.”

ist, d. h. es tritt neben den Hauptterm L_1 noch eine „Störungsfunktion“ L_2 hinzu. Ferner wollen wir annehmen, dass sich das ungestörte Problem, d. h. die kanonischen Differentialgleichungen

$$y' = \frac{\partial L_1}{\partial \eta}$$
$$\eta' = -\frac{\partial L_1}{\partial y}$$

vollständig integrieren lassen. Wir werden dann versuchen durch die Kenntnis dieser Lösung, unsere Aufgabe, das gestörte Problem zu integrieren, zu vereinfachen. Dazu können wir folgendermassen vorgehen. Wir kennen nach Voraussetzung eine Lösung $J_1(x, y, a)$ der Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung

$$\frac{\partial J_1}{\partial x} + L_1\left(\frac{\partial J_1}{\partial y}, y, x\right) = 0.$$

Wir nehmen nun ganz analog wie oben eine Transformation der Variabeln vor, für deren erzeugende Funktion wir jetzt J_1 wählen. Das heisst wir führen die kanonischen Konstanten a, b des ungestörten Problems als neue Variable ein, die natürlich im gestörten Problem, keineswegs mehr konstant sind, und fragen nach den Bestimmungsgleichungen für sie. Unsere Transformationsformeln liefern jetzt

$$\eta = \frac{\partial J_1}{\partial y}$$
$$b = -\frac{\partial J_1}{\partial a}$$
$$L^* = L + \frac{\partial J_1}{\partial x}.$$

Nun soll aber J_1 Lösung der obigen Differentialgleichung des ungestörten Problems sein. Es wäre also

$$L^* = \left(L_1 + \frac{\partial J_1}{\partial x}\right) + L_2 = L_2,$$

29 und die kanonischen Gleichungen für a und b lauten einfach

$$\frac{da}{dx} = \frac{\partial L_2}{\partial b}$$
$$\frac{db}{dx} = -\frac{\partial L_2}{\partial a},$$

und das ist der Inhalt des Satzes von der Variation der Konstanten. Die neuen Differentialgleichungen werden in manchen Fällen bereits erheblich einfacher als die ursprünglichen sein.[35]

[35] In the left margin, Hilbert added a reader’s sign ($\perp$) and wrote: “S. 41–44”.

⟨Die Winkelvariabeln⟩

⟨Die verschiedenen Formen des Variationsprinzips⟩

Bevor wir nun den für die Quantentheorie wesentlichsten Schritt ausführen, wollen wir noch einmal zur Übersicht die *verschiedenen Formen* zusammenstellen, die wir im Laufe der Untersuchung unserem ursprünglichen *Variationsproblem* gaben. Wir gingen aus von dem absoluten Minimalproblem mit einer unbekannten Funktion

$$\int_{x_1}^{x_2} F(y', y, x)\, dx = \text{Minimum}. \tag{1}$$

Äquivalent hiermit ist das relative Minimalproblem mit zwei unbekannten Funktionen y und p

$$\int_{x_1}^{x_2} F(p, y, x)\, dx = \text{Minimum} \tag{2}$$

und der Nebenbedingung

$$y' - p = 0.$$

Nach LAGRANGE kann dies relative Minimalproblem wieder ersetzt werden durch ein absolutes mit 3 unbekannten Funktionen y, p, λ

$$\int_{x_1}^{x_2} \big\{F + \lambda(y' - p)\big\} dx = \text{Minimum}, \tag{3}$$

welch letzteres sich weiter in eines mit 2 Funktionen y und p überführen lässt

$$\int_{x_1}^{x_2} \big\{F + F_p(y' - p)\big\} dx = \text{Minimum}. \tag{4}$$

Durch Einführung geeigneter Variabeln η, y bekamen wir endlich die kanonische Form

$$\int_{x_1}^{x_2} \big\{\eta y' - L(\eta, y, x)\big\} dx = \text{Minimum} \tag{5}$$

in den kanonischen Variablen y und $\eta = \frac{\partial F}{\partial y'}$, wo 30

$$L = -F + pF_p$$

die LEGENDREsche Funktion von F bedeutet.

⟨Der Energiesatz⟩

Im Hinblick auf[36] die späteren Anwendungen in der Mechanik machen wir noch für die weiteren Untersuchungen die Annahme, dass die unabhängige Variable x in der Funktion F unseres ursprünglichen Variationsproblems nicht explicite auftreten möge. Dadurch erreichen wir sehr wesentliche Vereinfachungen, denn es enthält dann offenbar auch L x nicht explicite. Unter dieser Voraussetzung können wir beweisen, dass stets

$$L(\eta, y) = \text{const.}$$

[37] ein Integral der kanonischen Gleichung darstellt. | Multiplizieren wir nämlich die letzteren

$$\begin{aligned} \eta' &= -\frac{\partial L}{\partial y} \quad \Big| \; y' \\ y' &= \frac{\partial L}{\partial \eta} \quad \Big| \; \eta' \end{aligned}$$

mit y' resp. mit η' und subtrahieren die erste von der zweiten, so erhalten wir

$$\frac{\partial L}{\partial y} y' + \frac{\partial L}{\partial \eta} \eta' = \frac{dL}{dx} = y'\eta' - y'\eta' = 0,$$

also in der Tat $L = \text{const.}$ In der Mechanik, in der L die Rolle der Energie, und x die der Zeit spielen werden, ist dies der wohlbekannte *Energiesatz*, und mit seiner Hilfe können wir bei unserer Integrationstheorie einen sehr wesentlichen Forschritt erzielen.

Wir hatten früher das ganze Integrationsproblem auf die Lösung der HAMILTON-JACOBIschen partiellen Differentialgleichung für das Eikonal

$$J_x + L(J_y, y, x) = 0$$

31 zurückgeführt. Enthält nun L x nicht explicite, so können wir für | J folgenden Ansatz machen:

$$J = S(y) - ax,$$

wo S eine Funktion von y allein, und a eine Integrationskonstante ist. Gehen wir hiermit in die partielle Differentialgleichung so kommt

$$-a + L\left(\frac{\partial S}{\partial y}, y\right) = 0,$$

[38] und dies ist, wenigstens für einen Freiheitsgrad eine gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung für $S(y)$. Zugleich sehen wir, dass a die Energiekonstante

[36] In *Hilbert 1926/27**, the text picks up again at this point, see note 30 above.

der Mechanik wird. Das Integral dieser Differentialgleichung hängt natürlich auch von a ab, $S = S(y, a)$. Wir haben demnach mit S in

$$J = S(y, a) - ax$$

eine von dem Parameter a abhängige Lösung der HAMILTON-JACOBIschen Differentialgleichung und bekommen also nach dem Satze vom letzten Multiplikator[37] in

$$\frac{\partial J}{\partial a} = \frac{\partial S}{\partial a} - x = b$$

das zweite Integral der kanonischen Differentialgleichungen[38]. Im Folgenden werden wir es fast stets nur mit S „der Wirkungsfunktion" der Mechanik zu tun haben, und auch

$$L\left(\frac{\partial S}{\partial y}, y\right) = a$$

als HAMILTON-JACOBIsche Differentialgleichung und S als Quantrix bezeichnen.[39]

⟨Uniformisierung des Problems⟩

Nach diesen Vorbereitungen können wir endlich den für die Quantentheorie entscheidenden Schritt ausführen. Die Energiegleichung

$$L(\eta, y) = a$$

stellt in der η, y Ebene eine Kurve dar; die einen sehr komplizie|rten Charakter 32[39]
besitzen kann. Wir wollen deshalb noch eine weitere Vorausetzung machen, nämlich dass wenigstens ein Zweig dieser Kurve ganz im Endlichen verlaufen, und dort keinen singulären Punkt besitzen möge, mit anderen Worten ein glattes Oval bilden soll. Hiermit legen wir der Funktion $L(\eta, y)$ eigentlich keine wesentliche Beschränkung auf etwa vom Charakter einer Gleichung: denn die Frage nach der Existenz eines solchen Ovals ist eine topologische, und sein Bestehen ist nur an Realitätsbedingungen, also Ungleichungen geknüpft. Unsere Annahme ist z. B. immer erfüllt wenn L, wie es in der Mechanik häufig der Fall ist, eine positiv definite quadratische Form ist.[40] Für solche Ovale besteht nun folgender fundamentale mathematische Satz, dass sich seine

[37] In the version of *Hilbert 1926/27** (p. 38), the words "nach dem Satze vom letzten Mulitplikator" read "nach unserer Integrationstheorie".

[38] Added in *Hilbert 1926/27**: "und damit die volle Lösung unseres Variationsproblems".

[39] Cf. note 12 above.

[40] In the version of *Hilbert 1926/27**, the following material (until "Die rechte Seite ist wieder ...", cf. note 42 below) was replaced by the following text: "Diese Voraussetzung bedeutet, dass sich die Gleichung $\mathcal{H}(pq) = a$ so vermittelst einer Hilfsvariabeln s auflösen lässt, dass $p = p(s)$ $q = q(s)$ eindeutige periodische Funktionen von s werden, (und zwar) für den ganzen Wertebreich von a. (Dabei schliessen wir die Fälle aus, dass unsere Energiekurve Singularitäten aufweist.) Ferner können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit

Umgebung stets umkehrbar eindeutig auf die Umgebung eines Kreises, also einen Kreisring abbilden lässt. Mit anderen Worten, es existieren stets zwei umkehrbar eindeutige Funktionen $\overline{\eta}$, $\overline{y}$ von η und y

$$\overline{\eta} = \overline{\eta}(\eta, y, a), \quad \overline{y} = \overline{y}(\eta, y, a)$$

die die Schar der Ovale

$$L(\eta, y) = a$$

in eine Schar von Kreisen in der $\overline{\eta}, \overline{y}$-Ebene überführen, und zwar gilt dies für alle Werte von $a\langle , \rangle$ für die die obigen Regularitätsbedingungen erfüllt sind. Die Gleichung dieses Kreises können wir dann in der Parameterform

$$\begin{aligned}\overline{\eta} &= \alpha \cos 2\pi s\\ \overline{y} &= \alpha \sin 2\pi s\end{aligned}$$

darstellen, wo s eine Hilfsvariable und α eine von a abhängige Konstante bedeutet. Die ursprünglichen Variabeln η und y werden also eindeutige Funk-
33 tionen von $\sin 2\pi s$ und $\cos 2\pi s$, also pe|riodisch in s mit der Periode 1. Eine solche Abbildung auf einen Kreis nennt man eine *Uniformisierung* und s daher auch eine uniformisierende Variable.

$$\left.\begin{aligned} y &= y(a, s)\\ \eta &= \eta(a, s)\end{aligned}\right\} \text{Periode 1.}$$

Wächst nun s um 1 bei konstantem a, so durchläuft der Punkt η, y gerade einmal das Oval $L(\eta, y) = a$.

Mit Hilfe der Uniformisierungsvariablen s lässt sich auch die HAMILTON-JACOBIsche Funktion S auf eine besonders bemerkenswerte Form bringen. Ihre Differentialgleichung können wir nämlich schreiben

$$\frac{\partial S}{\partial y} = \eta(y, a),$$

wo $\eta(y, a)$ die Auflösung der Energiegleichung $L(\eta, y) = a$[41] nach y bedeutet. Diese Auflösung fanden wir im Vorigen durch die Parameterdarstellung

annehmen, dass diese Periode gleich 1 sei, dass also bei Vermehrung von s um 1, p und q ihre Ausgangswerte wieder annehmen.

Unter diesen Voraussetzungen ist dann nach den kanonischen Gleichungen

$$\begin{aligned}\frac{dp}{ds}\frac{ds}{dt} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}\\ \frac{dq}{ds}\frac{ds}{dt} &= +\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}\end{aligned}$$

also stets $\frac{ds}{dt} \neq 0$, da sonst $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}$ und $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}$ beide an einer Stelle verschwinden müssten, was wir eben ausschlossen. Es ist also s eine monotone Funktion von t, aber umkehrbar eindeutig vermittels t ausdrückbar. Das werden wir später benutzen.

Nun führen wir in die HAMILTON-JACOBIsche Differentialgleichung $\mathcal{H}(\frac{\partial S}{\partial q}, q) = a$, statt q unsere Hilfsvariable s ein. D. h. wir haben $\frac{\partial S}{\partial q} = p(s, a)$, $q = q(s, a)$, $\frac{\partial S}{\partial p} = p(s, a)\frac{1}{\frac{\partial q}{\partial s}}$."

[41] Added by Hilbert with pencil: "durch s uniformisiert."

$\eta = \eta(a, s)$, und wir bekommen mit ihrer Hilfe demnach als Differentialgleichung für S

$$\frac{\partial S}{\partial s} = \frac{\partial S}{\partial y}\frac{dy}{ds} = \eta(a, s)\frac{dy(a, s)}{ds}.$$

Die rechte Seite ist wieder[42] eine periodische Funktion in s mit der Periode 1, da es ja die beiden Faktoren für sich schon sind. Das Integral einer derartigen Funktion hat nun, wie man sofort sieht, wenn man sie z. B. als Fourierreihe schreibt, stets die Form[43]

$$S = Q(s) + \text{const.} \cdot s,$$

wo Q wieder eine periodische Funktion (Periode 1) ist. | Die Konstante, die wir [41]
mit I bezeichnen wollen und die natürlich ihrerseits noch von a abhängt,[44] bedeutet den Zuwachs von S bei einer Vermehrung von s um 1

$$I(a) = \int_0^1 \frac{\partial S}{\partial s}\, ds$$

und wird die Additivperiode genannt, (weil auch bei jeder weiteren Vemehrung 34
von S um 1 stets dieselbe Konstante zu S hinzutritt).[45] Zusammenfassend können wir also als Resultat feststellen: Unter unseren Voraussetzungen lässt sich die Lösung der HAMILTON-JACOBIschen Differentialgleichung

$$L\left(\frac{\partial S}{\partial y}, y\right) = a$$

in der Parameterform darstellen

$$\begin{aligned} y &= P(s, a) \\ S &= Q(s, a) + I(a) \cdot s, \end{aligned}$$

wo P und Q periodische Funktionen von s (Periode 1) sind. (Die Additivperiode I[46] können wir auch finden, ohne auf s zurückgehen zu müssen, denn wir haben

$$I = \int_0^1 \frac{\partial S}{\partial s}\, ds = \oint \frac{\partial S}{\partial y}\, dy = \oint \eta\, dy,$$

wo die Integration über einen Umlauf um das Oval $L(\eta, y) = a$ zu erstrecken ist.

Ist S einmal gefunden, so erhalten wir nach dem Satz vom letzten Multiplikator [42]

[42] In the version of *Hilbert 1926/27** (pp. 39–40), the preceding material was replaced by the text given in note 40 above, and the words “Die rechte Seite ist wieder” read there: “Hier ist die rechte Seite”.

[43] In the left margin, Hilbert added a reader’s sign ($\top$).

[44] In the left margin added with pencil: “$I = I(a)$”.

[45] The brackets were added with pencil.

[46] Marginal comment by Hilbert with pencil in *Hilbert 1926/27**, p. 41: “d. h. des Zuwachs von S bei Vermehrung von s um 1.”

die vollständige Lösung der kanonischen Differentialgleichung in $\frac{\partial S}{\partial a} = x + b$, und dies wird jetzt

$$\frac{\partial S}{\partial a} = \frac{\partial Q}{\partial a} + s\frac{\partial I}{\partial a} = x + b.$$

Hieraus kann man also s und damit auch y und S als Funktionen von x berechnen. Wir sehen: s unterscheidet sich nur durch den periodischen Teil $\frac{\partial Q}{\partial a}$ von einer linearen Funktion der unabhängigen Veränderlichen x.)[47] Nun ist unsere Darstellung mit Hilfe des Parameters s noch nicht eindeutig; denn jede im Intervall 0 bis 1 mit s ebenfalls von 0 bis 1 gehende eindeutige Funktion von s leistet offenbar dasselbe. Diese Willkür können wir dazu benutzen, unsere Darstellung noch wesentlich zu vereinfachen, wobei wir gleichzeitig eine eindeutige |[48] Normierung mit erreichen. Dies gelingt durch eine passende Transformation der Variabeln.

⟨Die Winkelvariabeln⟩

Zunächst führen wir die Additivperiode I[49] als neue Veränderliche ein, und zwar anstelle der alten η, und suchen eine zu I kanonisch konjugierte Variable, die wir mit w bezeichnen wollen. Unsere Transformationstheorie setzt uns in
[43] Stand, dieses Problem vollkommen | zu erledigen. Wir haben nur irgend eine Funktion $T(y, I)$ zu nehmen, und

$$\eta = \frac{\partial T}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial T}{\partial I}$$

zu setzen. Als Transformationsfunktion wählen wir nun die Lösung der HAMILTON-JACOBIschen Differentialgleichung für $S(y, a)$, in der wir anstelle von a die Additivperiode I einführen, sodass wir jetzt $S = S(y, I)$ erhalten. Die Transformationsformeln lauten dann, da S x nicht explicite enthält:

$$\eta = \frac{\partial S(y, I))}{\partial y}; \quad w = \frac{\partial S(y, I))}{\partial I}$$
$$L^* = L,$$

und es gelten also für I und w die kanonischen Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dx} &= -\frac{\partial L(I, w)}{\partial w} \\ \frac{dw}{dx} &= \quad \frac{\partial L(I, w)}{\partial I}. \end{aligned}$$

[47] The brackets were added with pencil.

[48] At the top of the page, Hilbert wrote with pencil: “$a = H(p, q)$ folglich auch $I = I(a) = I(p, q)$ und diese Funktion $I(p, q)$ soll nun an Stelle von p als neue Variable eingeführt werden und dazu eine kanonische Variable $w(p, q)$ gefunden werden. Ist das möglich? ja.”

[49] Added by Hilbert with pencil: “ist eindeutig”.

Aus ihnen können wir folgendes entnehmen. Nach unserer Voraussetzung gilt der Energiesatz

$$L = a.$$

Andererseits können wir, da ja I eine Funktion von a, und zwar von a allein ist, auch a durch I allein ausdrücken. Die Energiefunktion hängt also nur von I und | nicht von w ab, sodass wir bekommen [44]

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dx} &= -\frac{\partial a(I)}{\partial w} = 0 \\ \frac{dw}{dx} &= \frac{\partial a(I)}{\partial I} \quad = \nu(I). \end{aligned}$$

Die erste Gleichung konnten wir erwarten, da ja I nach Definition konstant 36
war. Die zweite dagegen liefert das neue Ergebnis, dass auch $\frac{dw}{dx}$, weil nur von I abhängig, eine Konstante ist, die wir mit ν bezeichen wollen. Wir können also die zweite Gleichung integrieren und finden

$$w = \nu x + \beta,$$

wo β eine neue Integrationskonstante ist. w wird demnach eine lineare Funktion von x, und noch mehr, sie kann auch direkt die Rolle unseres Hilfparameters s spielen,[50] da sie ja dieselben Periodizitätseigenschaften besitzt. Vermehren wir nämlich s um 1, wobei ja S um I zunimmt,[51] so wächst w infolge der Beziehung

$$w = \frac{\partial S}{\partial I}\langle 52\rangle$$

ebenfalls um 1. Damit ist unsere oben angekündigte Normierung erreicht und alle für s bewiesenen Sätze haben auch für w Gültigkeit, wenn nur, wie wir es hier immer voraussetzen, der Übergang von s zu w umkehrbar eindeutig ist. Es wird also auch

$$\begin{aligned} y &= P(w, I) \\ S &= Q(w, I) + Iw, \end{aligned}$$

wo P und Q periodische Funktionen mit der Periode 1 von [45]

$$w = \nu x + \beta$$

sind. Die Konstante β ist offenbar unwesentlich, denn sie bedeutet nur den Anfangspunkt der Zeitmessung. ν dagegen ist die mechanische Schwingungszahl, denn wenn x um $\frac{1}{\nu}$ vermehrt wird, so durchläuft w gerade eine Periode von 0 bis 1, und wächst also x um 1, so vollführt das System gerade ν Umläufe.

[50] Added by Hilbert with pencil: “Denn da, wie oben gezeigt s, t gegenseitig umkehrbar eindeutig sind und w linear in t ⟨ist⟩, so sind auch w, s gegenseitig umkehrbar eindeutig und also speziell s eindeutig in w also auch p, q eindeutig in w.”

[51] Added by Hilbert with pencil: “Ferner”.

[52] Added by Hilbert with pencil: “$= \frac{\partial S(s,I)}{\partial I} + \frac{\partial S}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial I}$” and “$q = \text{const}\ \frac{\partial q}{\partial I} + \frac{\partial q}{\partial s}\frac{ds}{dI} = 0$”.

Die so gewonnenen Variabeln w, die man allgemein als „Winkelvariable“ bezeichnet, und I, die mitunter auch Wirkungsvariable genannt wird, haben
37 sowohl in der Mechanik als auch in der Quanten|theorie eine hervorragende Bedeutung.[53] In der Letzteren spielt besonders die Additionsperiode I eine fundamentale Rolle, und wir müssen daher ihre Eigenschaften noch näher studieren. Zunächst ist sie völlig eindeutig bestimmt, wie wir nach unserer Herleitung erwarten werden, es sich aber auch direkt mathematisch beweisen lässt. Darauf gehen wir jedoch nicht näher ein.

⟨Die adiabatische Invarianz der Additivperiode⟩

Zweitens hat I auch in der Mechanik noch eine neue Eigenschaft, die nicht unmittelbar aus seiner Definition entnommen werden kann, nämlich die der *Invarianz gegenüber adiabatischen Beeinflussungen*. Bisher hatten wir immer vorausgesetzt, dass die Energiefunktion L d. h. alle auf das betrachtete Sy-
[46] stem wirkenden äusseren und in|neren Kräfte von x, d. h. der Zeit unabhängig seien. Dagegen wollen wir jetzt noch zulassen, dass sie adiabatisch verändert werden. Darunter verstehen wir folgendes: Die Energiefunktion $L(\eta y)$, sei ausserdem noch von einem zunächst konstanten Parameter c abhängig, und mit ihr natürlich auch alle anderen Grössen. Diesen Parameter c denken wir uns jetzt als Angriffspunkt von zeitlich veränderlichen Bedingungen. D. h. c soll eine gegebene Funktion der Zeit x werden:

$$c = c(x),$$

doch sei diese Abhängigkeit derart, dass, wenn T einen sehr langen Zeitraum bedeute, in der Grenze für $T = \infty$ die Änderung von c während dieses Zeitraumes

$$\lim_{T=\infty} c(T) - c(0) = \int\limits_0^T \frac{dc}{dx}\, dx$$

endlich bleibt.[H][54] Wir werden nun zeigen, dass einem solchen Prozess gegenüber I eine Invariante ist.

Der Grundgedanke des Beweises ist ganz analog dem Verfahren bei der Varia-
38 tion der Konstanten. Dort betrachteten wir das ungestörte | Problem als gelöst und führten durch eine geeignete kanonische Transformation die kanonischen Konstanten des ungestörten Systems als Variable in das gestörte ein, wobei

[H] während $\frac{dc}{dx}$ überall gegen 0 geht.

[53] In the left margin, Hilbert added a reader's sign (⊥), and wrote: “Weiter Blatt 2”.

[54] In *Hilbert 1926/27**, The following sentence reads: “Bei einer solchen Beeinflussung, das ist der Adiabatensatz, behält I seinen Anfangswert bei. Auf den Beweis können wir allerdings hier nicht eingehen.” The following material (until “Bis jetzt haben wir reine ...”, cf. note 55) is missing in *Hilbert 1926/27**.

sie natürlich nicht mehr Konstante blieben. In ähnlicher Weise nehmen wir an, wir hätten Winkelvariable eingeführt, für den Fall das⟨s⟩ c konstant sei.

$$\begin{aligned} \eta &= \eta(w, I, c) \\ y &= y(w, I, c). \end{aligned} \tag{1}$$

Lassen wir nun den Parameter c sich adiabatisch verändern, so tritt durch Vermittelung von c auch x überall explicite auf. Trotzdem bleibt die Transformation (1) eine kanonische, und wir können formal wie bisher w und I als Veränderliche einführen. Ihre Bedeutung als Winkelvariable geht natürlich hierbei verloren. Wir wählen nun diesmal zu ihrer Einführung die erste Methode der kanonischen Transformation, die durch die Formeln

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{\partial V(y, y^*, x)}{\partial y} \\ \eta^* &= -\frac{\partial V(y, y^*, x)}{\partial y^*} \\ L^* &= L + \frac{\partial V}{\partial x} \end{aligned} \tag{2}$$

g⟨e⟩liefert wird, wo V irgend eine willkürliche Funktion der 3 Argumente y, y^*, x sein kann. Damit wir nun für $c =$ const. wieder unsere alte Winkelvariable bekommen, müssen wir, wie wir oben gezeigt haben,[I] als Transformationsfunktion

$$S - Iw = Q, \tag{3}$$

also den periodischen Teil der Quantrix wählen, in dem wir vermittels (1) I durch y zu ersetzen haben. Man kann auch leicht direkt bestätigen, dass diese Transformation für $c =$ const. die Winkelvariabeln liefert. Wir haben nämlich einerseits

$$\eta^* = \frac{\partial Q}{\partial w} = -\frac{\partial S(y, I)}{\partial I}\frac{\partial I(y, w)}{\partial w} + I + w\frac{\partial I}{\partial w},$$

da ja S nur vermittels I von w abhängt. Hieraus folgt aber wegen $\frac{\partial S}{\partial I} = w$ 39

$$\eta^* = I.$$

Andererseits ist, wenn wir dies berücksichtigen, auch

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial S}{\partial y} + \frac{\partial S}{\partial I}\frac{\partial I}{\partial y} - w\frac{\partial I}{\partial y} = \frac{\partial S}{\partial y} = \eta,$$

sodass wir in der Tat auf die alten Formeln zurückkommen.

Alle diese Formeln enthalten natürlich noch c als Parameter. Lassen wir nun c sich mit x ändern, so bleibt unsere Transformation eine kanonische, aber es

[I] S war ja die Transformationsfunktion T bei Anwendung der zweiten Methode, und wir hatten gesehen, dass für die gleiche Transformation $V = T - \eta^* y^*$ gilt.

tritt überall x explicite auf. Wir haben für die kanonischen Gleichungen also nach (2) L durch

$$L^* = L + \frac{\partial Q}{\partial x}$$

zu ersetzen, und bekommen

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dx} &= \frac{\partial L^*}{\partial I} \\ \frac{dI}{dx} &= -\frac{\partial L^*}{\partial w} = -\frac{\partial L}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right). \end{aligned}$$

Die erste Gleichung interessiert uns nicht weiter. In der zweiten wird das erste Glied auf der rechten Seite $= 0$, da L von w unabhängig ist. Da ferner in Q x allein in c vorkommt, so können wir schreiben

$$\frac{dI}{dx} = -\frac{\partial^2 Q}{\partial w \partial c}\frac{dc}{dx}.$$

Die Gesamtänderung von I während der Zeit I wird also

$$\Delta I\Big|_0^T = \int\limits_0^T \frac{dI}{dx}\,dx = -\int\limits_0^T \frac{\partial^2 Q}{\partial w \partial c}\frac{dc}{dx}\,dx, \tag{4}$$

und unser Satz ist bewiesen, wenn wir zeigen können, dass dieses Integral im Limes $\frac{dc}{dx} = 0$ und $T = \infty$ verschwindet. Auf die Art der Änderung von $\frac{dc}{dx}$ kommt es offenbar nicht an, und wir können sie uns z. B. linear mit der Zeit vorgenommen denken, also $\frac{dc}{dx}$ einen konstanten Wert geben, dann wird

$$\Delta I = -\frac{dc}{dx}\cdot\int\limits_0^T \frac{\partial^2 Q}{\partial w \partial c}\,dx. \tag{5}$$

Ferner ist Q eine periodische Funktion von w, und also $\frac{\partial^2 Q}{\partial w \partial c}$ ebenfalls eine solche und zwar ohne konstantes Glied. Da nun $w = \nu x + \beta$ ist, so können wir die Integration ausführen, und wegen der Periodizität des Integranden bleibt der Wert des Integrals stets endlich, so gross T auch ist. Allerdings muss man beachten, dass $\nu = \frac{\partial L^*}{\partial I}$ selbst von x abhängt. Ist aber die Änderung von c während einer Periode klein, so heben sich immer noch die positiven und negativen Beträge bei der Integration angenähert auf, und man kann beweisen, dass der Gesamtwert des Integrals durch Berücksichtigung dieser Veränderlichkeit auch nur eine endliche, also nicht mit T über alle Grenzen wachsende, Aenderung erfährt, falls nur gleichzeitig $\frac{dc}{dx}$ genügend klein wird. Auf der rechten Seite von (5) steht also $\frac{dc}{dx}$ multipliziert mit einer endlichen Grösse, und lassen wir $\frac{dc}{dx}$ immer kleiner werden, so verschwindet in der Grenze dieser Ausdruck. Damit ist in der Tat bewiesen, dass bei einem solchen adiabatischen Prozess I seinen Wert beibehält.

⟨Übergang zur Mechanik⟩

Bis[55] jetzt haben wir reine Mathematik getrieben und insbesondere das Variationsproblem

$$\int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\, dx = \text{Minimum}$$

nach den verschiedensten Richtungen untersucht. Doch haben wir alles gleich
so eingerichtet, wie es für die | Anwendungen in der Mechanik praktisch ist, [47]
sodass wir nur die in der letzteren üblichen Voraussetzungen einzuführen brauchen, um die ganze höhere Dynamik fertig vor uns zu haben. Diesen Übergang wollen wir jetzt vollziehen, und wir werden sehen, dass jedem der abgebildeten
Sätze ein mechanisches Theorem entspricht. Dabei wollen wir zunächst | uns 41
auf Systeme mit einem Freiheitsgrad beschränken, da wir auch die Variationsrechnung zunächst nur für eine Variable y entwickelt hatten. Die Mehrzahl der folgenden Sätze gilt fast ungeändert auch für Systeme mit mehreren Freiheitsgraden, worauf wir später noch eingehen werden.

Zunächst führen wir die gewöhnlichen Bezeichnungen ein. Die Rolle der unabhängigen Veränderlichen x übernimmt die Zeit t, und an Stelle von y tritt eine allgemeine Lagenkoordinate q, die die Bewegung des Systems beschreibt; $\frac{dq}{dt}$ werden wir vielfach mit $\dot{q}$ bezeichnen.[56]

⟨Das Hamiltonsche Prinzip⟩

Um[57] die Verbindung mit der Variationsrechnung zu erhalten, müssen wir natürlich ein Variationsprinzip der Mechanik an die Spitze stellen. Dabei ist es ganz gleichgültig, welches wir wählen, wir kommen immer zu richtigen Resultaten. Wegen seiner Allgemeinheit und Einfachheit wollen wir hier das HAMILTONsche Prinzip benutzen:

$$\int_{t_1}^{t_2} (T - U)\, dt = \text{Min.}^{\langle 58\rangle}$$

Hierin bedeutet T die kinetische Energie, die homogen und quadratisch von $\dot{q}$, jedoch beliebig von q und zunächst auch noch von t abhängen möge, während die potentielle Energie U eine beliebige Funktion von q und t sein kann. $T - U$ entspricht unserer früheren Funktion F des ersten Variationsproblems, und

[55] The version of *Hilbert 1926/27** sets in at this point again, cf. note 54.

[56] The preceding paragraph is missing in *Hilbert 1926/27**.

[57] In the left margin, Hilbert added a reader’s sign ($\top$).

[58] In the left margin, Hilbert wrote with pencil: “$F : T - U$”.

die LAGRANGEsche Ableitung $[F]_q = 0$, die die Extremalen liefert, ist hier die bekannte LAGRANGEsche Differentialgleichung 2. Art:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial(T-U)}{\partial\dot{q}}\right) - \frac{\partial}{\partial q}(T-U) = 0,$$

[48] die die Bewegung des Systems bestimmt.

⟨Generalisierte Koordinaten, die kanonischen Gleichungen⟩

42 Wir gehen auch hier zu dem kanonischen Variationsproblem und | kanonischen Variabeln über. Dies geschah oben durch Einführung von

$$\eta = \frac{\partial F}{\partial y'}, \quad L = y'\frac{\partial F}{\partial y'} - F,$$

womit wir erhielten

$$\int_{x_1}^{x_2} \left\{\eta\frac{dy}{dx} - L(\eta, y, x)\right\} dx = \text{Min.}$$

Genau so verfahren wir hier. (An Stelle von η tritt)[59]

$$p = \frac{\partial F}{\partial\dot{q}} = \frac{\partial T}{\partial\dot{q}},$$

da in U $\dot{q}$ nicht vorkommt. Diese Grösse p bezeichnet man in der Mechanik als generalisierte Impulskoordinate (eine Verwechslung mit der Bezeichnung $p = y'$ von früher ist wohl nicht zu befürchten).[60] Die LAGRANGEsche Funktion L[61] wird die Energie, denn wir haben zunächst, da T quadratisch in $\dot{q}$ ist

$$\dot{q}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}} = 2T$$

und demnach

$$L = \dot{q}\frac{\partial F}{\partial\dot{q}} - F = 2T - (T-U) = T + U = E,$$

also in der Tat die gesamte Energie, die zunächst auch noch von der Zeit t abhängen kann. Um die kanonischen Gleichungen zu erhalten, haben wir in

[59] The brackets were added with pencil. The preceding sentence, starting with "Dies geschah" was deleted with pencil.

[60] In the preceding sentence, the following corrections were done with pencil: the word "generalisierte" was put in brackets, the word "Impulskoordinate" was underlined, and the words in brackets were deleted.

[61] "LAGRANGEsche" was corrected to "LEGENDREsche" by Hilbert with pencil, and the variable L was corrected to H, cf. note 3.

$E(\dot{q}, q, t)$ an Stelle von $\dot{q} : p$ einzuführen, sodass unser Variationsprinzip die Form

$$\int_{t_1}^{t_2} \{p\dot{q} - L(p, q, t)\} dt = \text{Min.}$$

annimmt. Hieraus folgen weiter die kanonischen Differentialgleichungen [49]

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial L}{\partial p}$$
$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial q}.$$

(Damit haben wir den Übergang zur Mechanik vollzogen und stellen noch einmal die alten und die neuen Bezeichnungen tabellarisch zusammen: Es wird aus

$$\begin{array}{ccc|ccc} x & : & t & F & : & T-U \\ y & : & q & L & : & E \\ \eta & : & p & & & \end{array}$$

)[62]

⟨Integrationstheorie und Winkelvariabele⟩

Genau so können wir auch die JACOBIsche Integrationstheorie übertragen. 43
Die Differentialgleichung für das Eikonal J lautet

$$\frac{\partial J}{\partial t} + L\left(\frac{\partial J}{\partial q}, q, t\right) = 0,$$

wo wir in L anstelle von p $\frac{\partial J}{\partial q}$ eingeführt[63] haben. Können wir ein von einer willkürlichen Konstante a abhängiges Integral dieser Differentialgleichung finden, so ist nach dem Satze vom letzten Multiplikator

$$\frac{\partial J}{\partial a} = -b$$

die vollständige, von 2 Konstanten a und b abhängige Lösung der kanonischen Gleichungen. Tritt ferner t in L explicite nicht auf,[64] so gilt der Energiesatz

$$L(pq) = \text{const.},$$

und wir können für J den Ansatz machen

$$J = S(q) - at,$$

wobei dann für S die Differentialgleichung [50]

[62] The brackets were added with pencil.

[63] "eingeführt" was corrected by Hilbert with pencil to "eingesetzt".

[64] Added by Hilbert with pencil: "Dann multiplizire die kanonische Gl. mit $\frac{dp}{dt}$ bez. $\frac{dq}{dt}$".

$$L\left(\frac{\partial S}{\partial q}, q\right) = a$$

gilt, und das Integral der Bewegungsgleichungen durch

$$\frac{\partial S(q,a)}{\partial a} = t - b$$

gegeben ist. a ist die Energiekonstante. Auch S hat eine anschauliche mechanische Bedeutung, es ist nämlich nichts anderes, als die Wirkungsfunktion

$$S = 2\int_0^t T\,dt.$$

Wir haben nämlich, da wir den Energiesatz voraussetzen

$$2T = (T-U) + (T+U) = (T-U) + a,$$

und infolgedessen in der Tat

$$2\int_0^t T\,dt = \int_0^t (T-U)\,dt + at = J + at = S,$$

44 da eben das $\int_0^t (T-U)\,dt$, genommen über die wirkliche Bewegung | der Minimalwert des Variationsintegrals also das Eikonal ist. (Wir wollen noch die Bemerkung hinzufügen, dass wir auch direkt S als Unabhängigkeitsintegral also als Eikonal hätten bekommen können, wenn wir den Energiesatz von vorneherein vorausgesetzt, und dementsprechend nicht vom HAMILTONschen, sondern vom EULERschen Prinzip

$$\int_{t_1}^{t_2} T\,dt = \text{Min.}$$

ausgegangen wären, bei dem die Konstanz der Energie als Nebenbedingung vorausgesetzt werden muss. Um unsere Sätze der Variationsrechnung auf die Mechanik zu übertragen hätten wir natürlich irgend ein beliebiges Variationsprinzip zu Grunde legen können, und hätten selbstverständlich immer richtige Resultate erhalten. Da wir es im Folgenden immer mit S und nicht mit J zu tun haben werden, bezeichnen wir auch ersteres hinfort als Quantrix.)[65]

Die Einführung der Winkelvariablen geschieht genau nach unserer früheren Vorschrift. (Es ist zunächst zu untersuchen, ob die Kurve $E(pq) = a$ ein Oval enthält. Ist dies der Fall, so wird die Bewegung periodisch in der Zeit, und) die Quantrix vermehrt sich bei einem Umlauf um die Additivperiode.

$$I = \oint p\,dq$$

[51] Aus dieser Beziehung können wir I als Funktion der Energiekonstanten a berechnen, und in S an deren Stelle einführen. Nach der Transformation

$$p = \frac{\partial S(q, I)}{\partial q}$$
$$w = \frac{\partial S(q, I)}{\partial I}$$

wird die Energiefunktion allein von I abhängen, und demnach, wie wir gezeigt haben

$$w = \nu t + \beta$$

eine lineare Funktion der Zeit. Dabei ist

$$\nu = \frac{\partial L}{\partial I}$$

die Schwingungszahl des Systems. Für einen Freiheitsgrad hat die Grösse I noch eine besonders einfache und anschauliche Bedeutung. Sei $\tau = \frac{1}{\nu}$ die Zeit, die das System braucht, um eine Periode zu durchlaufen, so wird ja[66]

$$I = \oint p \, dq = \int_0^\tau \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \dot{q} \, dt = \int_0^\tau 2T \, dt.$$

Nun ist der Mittelwert einer periodischen Funktion F während einer sehr langen Zeit gleich dem Mittelwert über eine Periode τ, also

$$\overline{F} = \lim_{t=\infty} \frac{1}{t} \int_0^t F \, dt = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau F \, dt.$$

Aus der vorletzten Gleichung wird demnach [52]

$$I = \tau 2\overline{T} = \frac{2\overline{T}}{\nu},$$

d. h. I ist gleich dem doppelten Mittelwert der kinetischen Energie geteilt durch ν. Aus dieser Beziehung sehen wir auch ohne weiteres, dass I von der Wahl der Quantrix (diese ist ja nur bis auf eine willkürliche Funktion bestimmt!) vollständig unabhängig und eindeutig durch das mechanische Problem bestimmt ist, da dies sowohl für $\overline{T}$ als auch für ν wegen ihrer mechanischen Bedeutung gilt. Ferner ist nach dem Satz von der adiabatischen Invarianz, der natürlich hier ebenfalls gilt, auch $\frac{\overline{T}}{\nu}$ eine solche Invariante, wie zuerst von EHRENFEST auf anderem Wege nachgewiesen wurde.[67]

[65] The brackets were added with pencil. The material in brackets is missing in *Hilbert 1926/27**.

[66] Added by Hilbert with pencil: “Fasenintegral”.

[67] See *Ehrenfest 1916*, for historical discussion of Ehrenfest’s adiabatic hypothesis, see *Pérez 2009*.

⟨Einführung der Quantentheorie⟩

⟨Die 2 Grundpostulate der Quantentheorie⟩

Nachdem wir die Mechanik zu einem gewissen Abschluss gebracht haben, wenden wir uns dem Hauptgegenstand dieser Vorlesung der *Quantentheorie* zu. Für ihre Einführung haben wir bereits alles vorbereitet. Ihr wesentlicher Inhalt besteht in 2 Postulaten, die völlig unabhängig zu den bisherigen Theorien hinzutreten, und sogar teilweise ihnen widersprechen. Sie lassen sich, darauf
46 sei be|sonders hingewiesen, natürlich nicht irgendwie a priori begründen, sondern sind aus einem sehr umfangreichen Tatsachenmaterial heraus entwickelt
[53] worden, das | durch sie eine einheitliche und relativ einfache Deutung erfährt. Diese Deutung ist allerdings zunächst rein formaler Natur, und von einer wirklichen Erkenntnis der durch die Quantentheorie beschreibbaren Vorgänge sind wir noch weit entfernt.[68]

Das erste Postulat gibt eine Einschränkung der Mechanik.[69] Für ein mechanisches System mit der Energiefunktion

$$L(pq) = a$$

sind nach der klassischen Vorstellung alle Bahnen, die zu irgend einem Wert der Energiekonstanten a gehören, mechanisch möglich, also eine ganze kontinuierliche Mannigfaltigkeit. Aus dieser Schar trifft die Quantentheorie eine Auswahl, indem sie behauptet, dass nur solche Bahnen in der Natur vorkommen, die der Bedingung

$$I = nh$$

genügen. Dabei ist I die frühere Additivperiode der Quantrix

$$I(a) = \oint dS = \oint p\,dq$$

und h eine universelle Naturkonstante, das PLANCKsche *Wirkungsquantum*, während n irgend eine *ganze Zahl* sein kann. Mit anderen Worten, es sind nur jene Bahnen erlaubt, deren zugehöriges I ein ganzzahliges Vielfaches der Konstante h ist, also eine einfach unendliche *diskrete Schar*. Vermittels I ist
[54] natürlich auch | die Energie a festgelegt, die also ebenfalls nur ganz bestimmte diskrete Werte annehmen kann. Die zweite Konstante in der vollständigen Lösung der Bewegungsgleichungen, die ja nur durch den Anfangspunkt der Zeitrechnung bestimmt ist, und deren Variation daher keine neuen Bahnen
47 liefert, bleibt dagegen von der Quantenvorschrift unb|erührt, und kann daher noch alle beliebigen Werte annehmen. Auch die Bewegung in den Quantenbahnen selbst soll ebenfalls durch die Gesetze der klassischen Mechanik bestimmt sein.

[68] The preceding sentence is missing in *Hilbert 1926/27**.

[69] In the left margin, Hilbert added a reader's sign (⊤).

Zu diesem ersten Postulat, das eine Auswahl aus den mechanischen Bewegungsmöglichkeiten trifft, tritt als Ergänzung ein zweites hinzu, das die Verknüpfung mit der Strahlungstheorie liefert. Nach der klassischen Elektrodynamik sendet jedes bewegte geladene Teilchen elektrische Wellen aus, die durch dessen Bewegung völlig bestimmt sind. Nach der neuen Auffassung dagegen ist dieser Zusammenhang viel lockerer.[70] Zu[71] den Quantenbahnen wird keinerlei Strahlung ausgesandt, und eine solche kommt erst zu Stande, wenn ein Sprung aus einer Quantenbahn in eine andere stattfindet, ein Ereignis, über dessen Eintrittsbedingungen wir noch nichts wissen.[72] Die frei werdende mechanische Energie jedoch dient zur Erzeugung[A] | einer elektromagnetischen [55]
Welle mit der Schwingungszahl

$$\nu_{\text{quant}} = \frac{L_1 - L_2}{h}.$$

Wo L_1 die Energie des Anfangs, und L_2 die Energie des Endzustandes bedeutet. Dieses, zuerst von EINSTEIN in seiner allgemeinen Form entdeckte $h\nu$-Gesetz[73] ist wie gesagt aus der Erfahrung entnommen, und wir können über die Natur des Strahlungsvorganges selbst bislang noch keine weitere Aussage machen.

Diese beiden Grundsätze der Quantentheorie stehen in krassem Widerspruch mit den Vorstellungen der klassischen Mechanik. Zunächst kommt durch die Auswahl der diskreten Bahnen und die *Ein*schränkung einer gewissen Grösse wesentlich auf Ganzzahligkeit ein neues, man möchte beinahe sagen, zahlentheoretisches Element in die Naturgesetze, das der Kontinuumsauffassung der alten Elektro|dynamik ganz fremd gegenübersteht. Ferner hat auch die quan- 48
tentheoretische Schwingungszahl, die sich ja einfach aus der Energiebilanz bestimmt, gar keine Beziehung mehr zu der mechanischen.[74] Die Umwälzung unserer Vorstellungen durch die Quantentheorie ist also noch viel einschneidender, als die durch die Relativitätstheorie hervorgerufene.[75] Letztere hat zwar unsere Anschauungen von Raum und Zeit weitgehend umgestaltet, jedoch werden in ihr die Naturvorgänge wie früher durch Differentialgleichungen und -gesetze beschrieben. Um die Bestimmung der Quantenbahnen zu ermöglichen, muss das System jedoch mindestens eine ganze Periode durchlaufen,

[A] Wir beschreiben hier den Vorgang der Emission. Die Absorption verläuft natürlich gerade umgekehrt.

[70] In *Hilbert 1926/27**, the words “viel lockerer” were corrected by Hilbert with pencil to “ganz anders”.

[71] “Zu” should be “In”.

[72] In *Hilbert 1926/27**, the words “Eintrittsbedingungen und Ablauf selbst wir noch nichts wissen” were corrected by Hilbert with pencil to “Eintrittsbedingungen wir später sprechen werden”.

[73] See *Einstein 1905*.

[74] In the left margin, Hilbert added a reader’s sign (⊥).

[75] The remainder of this paragraph is missing in *Hilbert 1926/27**.

und für die der Schwingungszahlen ist sogar die Kenntnis der Endbahn nach vollzogenem Prozess nötig.

⟨Anwendungen⟩

Um[76] die Anwendung unserer Prinzipien zu erläutern, gehen wir gleich hier
[56] zu den einfachsten *Beispielen* über, | an deren Behandlung sich die Quantentheorie teilweise erst entwickelt hat. Als erstes wählen wir den sogenannten linearen Oscillator.

⟨(a) Oszillator⟩

Auf einen, auf einer Geraden beweglichen Massenpunkt mit der Masse m wirke eine elastische, d. h. mit dem Abstand von einem Anziehungszentrum proportionale Kraft. Sei q der Abstand von diesem Zentrum, und k ein von der Stärke der Kraft abhängiger Proportionalitätsfaktor, so ist die Bewegungsgleichung die bekannte Schwingungsgleichung

$$m\ddot{q} + kq = 0, \quad k > 0.$$

Die kinetische Energie wird

$$T = \frac{m}{2}\dot{q}^2,$$

und die potentielle

$$U = \frac{k}{2}q^2,$$

49 da deren negative Ableitung die Kraft $-kq$ ergeben soll. Nach Definition ist der Impuls

$$p = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}.$$

Mithin wird die Gesammtenergie als Funktion von p und q

$$L = T + U = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}q^2 = a,$$

[57] (und dies ist stets eine Ellipse in der pq-Ebene, also eine geschlossene Kurve, wie unsere Theorie es verlangt.)[77] Die HAMILTON-JACOBIsche Differentialgleichung

$$L\left(\frac{\partial S}{\partial q}, q\right) = a \quad \text{wird hier}$$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + \frac{k}{2}q^2 = a, \quad \text{oder}$$

$$\frac{\partial S}{\partial q} = \sqrt{mk}\,\sqrt{\alpha^2 - q^2}, \quad \text{wobei} \quad \alpha^2 = \frac{2a}{k} \quad \text{gesetzt ist.}$$

[76] In the left margin, Hilbert added a reader's sign (⊤).

[77] The brackets were added with pencil.

Hiermit können wir bereits die Additivperiode der Quantrix

$$I = \oint \frac{\partial S}{\partial q}\, dq = \sqrt{mk} \oint \sqrt{\alpha^2 - q^2}\, dq$$

berechnen, wobei die Integration um einen Umlauf, also von $q = -\alpha$ bis $q = +\alpha$ und zurück zu erstrecken ist. Das letzte Integral bedeutet ersichtlich eine Kreisfläche mit dem Radius α, und wir bekommen also

$$I = \sqrt{mk} \oint \sqrt{\alpha^2 - q^2}\, dq = \sqrt{mk}\, \pi\alpha^2 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\, a.$$

Die Energie L als Funktion von I wird also

$$L = a(I) = \frac{I}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}},$$

und die mechanische Frequenz

$$\nu = \frac{\partial a}{\partial I} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Letztere ist also in unserem Falle von I und damit der Energie unabhängig, [58]
was eine Besonderheit des Oscillators ist. Wir bekommen einfach

$$L = \nu I,$$

und, wenn wir die Quantenbedingung

$$I = nh, \quad n = 1, 2, \ldots$$

einführen

$$L = nh\nu.$$

Beim Oscillator haben wir es also gewissermassen mit Energiequanten zu tun, 50
da ihr Wert immer nur ein Vielfaches der Konstanten $h\nu$ annehmen kann. Auch für die eventuelle Strahlung eines solchen Systems gelten besonders einfache Beziehungen. Findet nämlich ein Übergang von einer Bahn mit der Quantenzahl n_1, also der Energie $L_1 = n_1 h\nu$ nach einer Bahn mit der Quantenzahl n_2, statt, so ist die quantentheoretische Schwingungszahl

$$\nu_{\text{quant}} = \frac{L_2 - L_1}{h} = (n_1 - n_2)\nu,$$

also ein ganzes Vielfaches der mechanischen. Ist insbesondere $n_1 - n_2 = 1$, was, wie wir später sehen werden, beim Oscillator stets der Fall ist, so werden sie direkt einander gleich. Diese letzterwähnten Eigenschaften sind natürlich alle besondere Eigentümlichkeiten des hier betrachteten Systems.

Obgleich wir die stationären Zustände schon gefunden haben, wollen wir, um [59] unsere allgemeine Theorie vollständig wenigstens an diesem einfachen Beispiel durchzuführen auch noch die Winkelvariabeln einführen. Dies geschieht genau nach Vorschrift. Wir haben in der Quantrix

$$S = \sqrt{mk} \int \sqrt{\alpha^2 - q^2}\, dq$$

anstelle der in α enthaltenen Energiekonstanten a die Additivperiode I einzuführen. Wir hatten nun

$$\alpha^2 = \frac{2a}{k} = \frac{I}{\pi\sqrt{mk}}.$$

Somit ergibt sich

$$S(q, I) = \sqrt{mk} \int \sqrt{\frac{I}{\pi\sqrt{mk}} - q^2}\, dq,$$

und die Transformationsformeln werden:

$$w = \frac{\partial S(q,I)}{\partial I} = \frac{1}{2\pi} \int \frac{dq}{\sqrt{\frac{I}{\pi\sqrt{mk}} - q^2}} = \frac{1}{2\pi} \arcsin\left(q\sqrt{\frac{\pi\sqrt{mk}}{I}} \right)$$

$$p = \frac{\partial S(q,I)}{\partial q} = \sqrt{mk}\sqrt{\frac{I}{\pi\sqrt{mk}} - q^2}.$$

51 Lösen wir diese Gleichungen nach q und p auf, so erhalten wir diese als Funktion der Winkelvariablen I und w, und zwar bekommen wir unter Benutzung der Beziehungen

$$w = \nu t + \beta, \quad \nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$q = \sqrt{\frac{I}{2\pi^2 \nu m}}\, \sin 2\pi w = \sqrt{\frac{I}{2\pi^2 \nu m}}\, \sin 2\pi(\nu t + \beta)$$

$$p = \sqrt{2I\nu m}\, \cos 2\pi w \quad = \sqrt{2I\nu m}\, \cos 2\pi(\nu t + \beta).$$

[60] Hierin haben wir gleichzeitig unser mechanisches Problem gelöst, d. h. die Bewegungsgleichungen integriert. Wir verifizieren jetzt leicht die allgemeine Beziehung[78]

$$\overline{T} = \frac{\nu I}{2}$$

für unseren speziellen Fall, denn es wird in der Tat

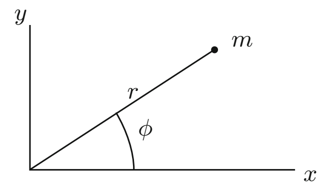
$$T = \frac{p^2}{2m} = I\nu \cos^2 2\pi(\nu t + \beta)$$

$$\overline{T} = I\nu\, \overline{\cos^2 2\pi(\nu t + \beta)} = \frac{I\nu}{2}.$$

[78] See 549 above.

⟨b) Rotator⟩

Als zweites Beispiel behandeln wir den *Rotator*. Ein Massenpunkt m sei mit einem Zentrum fest verbunden, sodass er sich nur in einem Kreise mit dem Radius r um das Letztere bewegen kann. Als Lagenkoordinate q wählen wir den Winkel φ des Radiusvektor mit einer festen Achse. Sonstige Kräfte seien nicht vorhanden, die potentielle Energie also gleich Null, und es wird einfach



$$L = T = \frac{mr^2}{2}\dot{q}^2,$$

also nach Einführung des Impulses

$$p = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = mr^2\dot{q}$$
$$L = \frac{p^2}{2mr^2} = a$$

und demnach die HAMILTON-JACOBIsche Differentialgleichung [61]

$$\frac{\partial S}{\partial q} = p = \sqrt{2mr^2 a} = \text{const.}$$

Wir erhalten für das Phasenintegral[79]

52 $$I = \oint p\,dq = p\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi p = nh,$$

da ein Umlauf hier eine Vermehrung von φ um 2π bedeutet. Wir sehen, wir haben es hier nicht mehr mit Energie, sondern mit Impulsquanten zu tun. Die Energie als Funktion der Quantenzahl selbst wird

$$L = T = \frac{p^2}{2mr^2} = \frac{I^2}{8\pi^2 mr^2} = \frac{n^2h^2}{8\pi^2 mr^2},$$

welcher Ausdruck in der Theorie der Bandenspektren eine fundamentale Rolle spielt.

Ähnlich lautet die Formel für die Energie, wenn man einen Massenpunkt zwischen zwei reflektierenden Wänden mit konstanter Geschwindigkeit hin- und herpendeln lässt, nämlich

$$L = \frac{h^2n^2}{8ml^2},$$

wo l der Abstand der Wände bedeutet. Wir sehen, sie geht aus der obigen für den Rotator hervor, indem man $2\pi r$, die Länge der Kreisbahn, durch $2l$, die

Länge des während einer Periode durchlaufenden Weges | ersetzt. Die Überein- [62]
stimmung rührt natürlich daher, dass bei beiden Systemen der Impuls⟨betrag⟩ zeitlich konstant ist. Diese letzte Formel hat eine Bedeutung für die Gastheorie, da man bei einem sehr verdünnten Gas eine solche Quantelung vornehmen kann.

⟨c) Atommodell (Wasserstoff)⟩

Als letztes Beispiel behandeln wir die Bewegung eines negativen Elektrons mit der Ladung $-e$ um einen ruhenden Kern mit der Ladung $+e$. Wir beschränken uns hier zunächst auf kreisförmige Bahnen (die Betrachtung des allgemeinen Falls elliptischer Bahnen werden wir später nachholen). Dann können wir die Ergebnisse für den Rotator fast ungeändert benutzen. Hinzu kommt lediglich die Gleichgewichtsbedingung, dass sich Zentrifugal- und Coulombsche Anziehungskraft die Wage halten müssen, also

$$mr\dot{\varphi}^2 - \frac{e^2}{r^2} = 0.$$

53 Nehmen wir hierzu die Quantenbedingung des Rotators

$$2\pi p = nh, \quad p = mr^2\dot{\varphi},$$

so haben wir 2 Gleichungen zur Bestimmung des Radius und der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ als Funktion der Quantenzahl n. Wir finden

$$r = \frac{n^2h^2}{4\pi^2me^2}$$
$$\dot{\varphi} = \frac{8\pi^3me^4}{n^3h^3}.$$

[63] Mit Benutzung dieser Werte wird die Energie

$$L = T + U = \frac{m}{2}(r\dot{\varphi})^2 - \frac{e^2}{r} = -\frac{2\pi^2me^4}{n^2h^2}.$$

Sie ist negativ in Übereinstimmung mit dem Unstand, dass man Arbeit aufwenden muss, um das Elektron von dem Kern zu entfernen. Das hier betrachtete System ist zugleich das einfachste Beispiel eines *Atommodells*, da das Wasserstoffatom nach unseren heutigen Anschauungen aus einem schweren positiv geladenen Kern mit einem ihn umkreisenden negativen Elektron besteht. Die Spektrallinien, die bei dem Übergang von einer Quantenbahn mit der Quantenzahl n_1 zu einer mit der Quantenzahl n_2 ausgestrahlt werden haben die Schwingungszahlen

$$\nu_{\text{quant.}} = \frac{L_2 - L_1}{h} = \frac{2\pi^2me^4}{h^3}\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right).^{\langle 80\rangle}$$

[79] Added by Hilbert with pencil: "(Additivperiode)".

Diese Formel, die zuerst empirisch von BALMER aufgestellt wurde,[81] stellt in der Tat das gesamte Linienspektrum des Wasserstoffatoms dar, und man bekommt die einzelnen Serien, indem man die Endbahn n_2 festhält, und n_1 alle ganzzahligen Werte $n_1 > n_2$ durchlaufen lässt. Für $n_2 = 1$ erhalten wir z. B. die im Ultraviolett gelegene Lymann-Serie[82] und für $n_2 = 2$ die im sichtbaren Gebiet gelegene gewöhnliche BALMERsche Serie. Der Ausdruck

$$R = \frac{2\pi^2 me^4}{h^3},$$

der in der Atomtheorie häufig wiederkehrt, ist die bekannte Ryd|bergsche Konstante.[83] [64]54

⟨Systeme mit mehreren Freiheitsgraden⟩

Wir nehmen jetzt die allgemeine Theorie von Neuem auf, und befreien uns zunächst von der Beschränkung auf Systeme mit einem einzigen Freiheitsgrad. Zunächst behandeln wir wieder die reine Mechanik, losgelöst von den speziellen Problemen der Quantentheorie. Hier geht alles fast genau so wie früher, und wir erhalten die Theoreme für *Systeme mit r Freiheitsgraden*, indem wir einfach an Stelle der einen Veränderlichen q deren r $q_1, \ldots, q_r$ einführen. Daher können wir uns kurz fassen und brauchen die Beweise nicht in ihren Einzelheiten zu wiederholen. Die Bezeichnungen wählen wir gleich, wie sie in der Mechanik üblich sind, und wie wir sie schon bei unseren letzten Betrachtungen benutzt haben.

⟨Verschiedene Form der Variationsprobleme⟩

Als Ausganspunkt nehmen wir wieder die Variationsrechnung, und zwar ihr einfachstes Problem bei r unbekannten Funktionen.[84]

$$\int_{t_1}^{t_2} F(q_1, \ldots, q_r, \dot{q_1}, \ldots, \dot{q_r}, t)\, dt = \text{Min.} \tag{1}$$

[80] Since n_1 is assumed to be larger than n_2 according to the comments in the following paragraph, the right hand side should have $(1/n_2^2 - 1/n_1^2)$.

[81] See *Balmer 1885* and, for a historical discussion, *Mehra and Rechenberg 1982a*, 162–163.

[82] "Lymann" should be "Lyman". See *Lyman 1914a* and *Lyman 1914b*.

[83] Added by Hilbert with pencil: "Ein weiteres schönes Beispiel wäre das Pendel: ein an einem Faden aufgehängter Massenpunkt unter Einfluss der Schwere. Zugleich experimentell kann daran die adiabatische Invarianz von $\frac{\overline{T}}{\nu}$ plausibel gemacht werden, indem man den Faden allmählich verkürzt–ist eine unsystematische Beeinflussung!".

[84] Added by Hilbert with pencil: "zugleich Repetition! Ich will mich bei dieser Repetition auch kürzer fassen, wie bei *einem* Freiheitsgrad und nur das unbedingt Notwendige sagen:".

Hierbei ist F eine gegebene Funktion der $2r+1$ Argumente $q_1, \dots, q_r$, $\dot{q}_1, \dots,$ $\dot{q}_r$, t, und die Integration ist zwischen 2 festen Werten von t : t_1 und t_2 zu erstrecken. Gesucht sind die r Funktionen $q_1(t), \dots, q_r(t)$, die an den Grenzen
[65] t_1 | und t_2 bestimmte vorgegebene Werte

$$\left.\begin{aligned} q_i(t_1) &= q_i^{(1)} \\ q_i(t_2) &= q_i^{(2)} \end{aligned}\right\} i = 1, \dots, r$$

annehmen, und mit ihren Ableitungen $\dot{q}_i$ in (1) eingesetzt das Integral zu einem Extremum machen. Die Lösung dieses Problems ist nach LAGRANGE durch das System von Differentialgleichungen 2.Ordnung[85]

$$[F]_{q_i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial F}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \dots, r$$

oder ausführlicher geschrieben[86]

$$\sum_k \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k}\ddot{q}_k + \sum_k \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k} + \sum_k \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{q}_i \partial t} - \frac{\partial F}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \dots, r$$

gegeben. Aus ihnen bestimmen sich die q_i als Funktionen von t, während die $2r$ Integrationskonstanten gerade durch die $2r$ Randbedingungen festgelegt werden.

Diesem einfachsten Variationsproblem geben wir wieder wie früher eine Reihe von verschiedenen Formen, die alle miteinander aequivalent sind. Ersetzen wir zunächst die Ableitungen $\dot{q}_i$ durch neue unbekannte Funktionen k_i, so erhalten wir ein relatives Minimalproblem

$$\int_{t_1}^{t_2} F(q_1, \dots, q_r, k_1, \dots, k_r, t)\, dt = \text{Min.} \tag{2}$$

[66] mit den Nebenbedingungen

$$k_i = \dot{q}_i, \quad i = 1, \dots, r.$$

Dies Problem ist nach Lagrange wieder aequivalent mit dem absoluten Minimalproblem mit $3r$ gesuchten Funktionen

$$\int_{t_1}^{t_2} \big\{F + \lambda_1(\dot{q}_1 - k_1) + \dots + \lambda_r(\dot{q}_r - k_r)\big\} dt = \text{Min.} \tag{3}$$

[85] In the left margin, Hilbert added a reader's sign ($\perp$) and wrote with pencil: "S. 58". The same marginal note was written, and then deleted again, next to the second paragraph of the following page.

[86] In the following equation, the second term should read $\sum_k \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{q}_i \partial q_k}\dot{q}_k$.

wobei die λ_i sogenannte LAGRANGEsche unbestimmte Faktoren sind. Bilden wir hier die LAGRANGEschen Ableitungen nach den k_i so kommt, da ja die Ableitungen der k_i im Integranden nicht auftreten, einfach

$$\frac{\partial F}{\partial k_i} - \lambda_i = 0.$$

Vermittels dieser Beziehungen können wir die λ_i eliminieren, und erhalten somit die 4. Form des Variationsproblems

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ F + \frac{\partial F}{\partial k_1}(\dot{q}_1 - k_1) + \cdots + \frac{\partial F}{\partial k_r}(\dot{q}_r - k_r) \right\} dt = \text{Min.} \tag{4}$$

Diese Umformungen haben wir bereits ausführlich zu Anfang der Vorlesung erörtert.[87]

⟨Unabhängigkeitssatz, Konstruktion des Feldes⟩

An diese letzte Form des Variationsproblems knüpft sich wieder die Fragestellung des *Unabhängigkeitssatzes*. Sehen wir von der Be|deutung des Integrals 56
(4) für die Variationsrechnung einmal ab, und untersuchen seine mathematischen Eigenschaften für sich, so liegt wieder die Frage nahe, ob sich etwa die k_i als Funktionen der q_i und t

$$k_i = k_i(q_1, \ldots, q_r, t), \quad i = 1, \ldots, r$$

derart bestimmen lassen, dass sein Wert vom Wege unabhängig wird, und es von einer Funktionenfunktion zu einer reinen Ortsfunktion in dem $r+1$ dimensionalen Raum der $q_1, \ldots, q_r$ und t degeneriert. In diesem Falle ergibt es dann für alle möglichen Funktionen $q_i(t)$, die nur die Randbedingungen erfüllen müssen, denselben Wert. Notwendig und hinreichend hierzu ist wieder, dass unter dem Integral ein vollständiges Differential der $r+1$ Veränderlichen $q_1, \ldots, q_r, t$ steht. Es müssen also die hierzu erforderlichen Integrabilitätsbedingungen bestehen, und dies ergibt eine Reihe von partiellen Differentialgleichungen für die Funktionen k_i. Man beweist analog wie früher, dass sie erfüllt sind, wenn man nur irgend ein System intermediärer Integrale

$$\frac{dq_i}{dt} = \dot{q}_i(q_1, \ldots, q_r, t)$$

der LAGRANGEschen Differentialgleichungen nimmt, und für jeden Punkt $q_1, \ldots, q_r, t$ die

$$k_i = \dot{q}_i$$

[87]The following material (until “Auch die letzte Umformung ...”, cf. note 91 below) is missing in *Hilbert 1926/27**.

setzt.[B] Um in möglichst allgemeiner Weise ein solches k-Feld wirklich zu konstruieren, also jedem Punkte in dem $r+1$ dimensionalen Raum wirklich ein Wertsystem $k_1, \ldots, k_r$ zuzuordnen, das unseren Bedingungen genügt, und damit gleichzeitig die Bedeutung des Unabhängigkeitsintegrals zu erkennen, gehen wir ganz entsprechend wie bei einem Freiheitsgrad folgendermassen vor.
57 | Wir wählen ganz willkürlich irgend eine Funktion $f(q_1, \ldots, q_r, t)$, die also gleich 0 gesetzt eine r-dimensionale „Fläche“ in unserem $r+1$ dimensionalen Raum darstellt

$$f(q_1, \ldots, q_r, t) = 0,$$

und bestimmen zunächst die k_i für alle Punkte dieser Fläche aus der Forderung, dass für sie der Integrand des Unabhängigkeitsintegrals

$$F - k_1 \frac{\partial F}{\partial k_1} - \cdots - k_r \frac{\partial F}{\partial k_r} + \frac{\partial F}{\partial k_1}\dot{q}_1 + \cdots + \frac{\partial F}{\partial k_r}\dot{q}_r$$

verschwindet. Dies erreichen wir, indem wir die r Grössen k_i jeweilig aus den r Gleichungen

$$\left(F - \sum_k k_k \frac{\partial F}{\partial k_k}\right) : \frac{\partial F}{\partial k_1} : \cdots : \frac{\partial F}{\partial k_r} = \frac{\partial f}{\partial t} : \frac{\partial f}{\partial q_1} : \cdots : \frac{\partial f}{\partial q_r}$$

berechnen, da dann der Integrand bis auf einen gleichgültigen Faktor gleich

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial q_r}\dot{q}_r = \frac{df}{dt}$$

wird, also in der Tat für die Punkte der Fläche verschwindet. Sodann lassen wir von jedem Punkt der Fläche eine solche Kurve $q_i = q_i(t)$ ausgehen, deren Ableitungen $\dot{q}_i$ dort gerade gleich den eben bestimmten k_i sind, und die selbst andererseits Integralkurve der LAGRANGEschen Differentialgleichungen $[f]_{q_i} = 0$ ist. Da diese Integralkurven eine $2r$-parametrige Schar bilden, und sich daher durch jeden Punkt des $r+1$ dimensionalen Raumes und beliebiger Tangentenrichtung in diesem Punkt eine solche Kurve legen lässt, so können wir dies stets erreichen. Ferner ist die Fläche $f = 0$ selbst r dimensional und somit haben wir also ebenfalls eine r-parametrige Kurvenschar bestimmt, welche gerade unseren $r+1$-dimensionalen Raum vollständig überall dicht ausfüllt, und es geht also durch jeden Raumpunkt gerade eine Kurve hindurch. Die Werte der k_i in einem solchen beliebigen Raumpunkt bestim-
58 men wir nun einfach aus den Tan|gentenrichtungen der durch ihn gehenden Kurve, setzen also

$$k_i = \dot{q}_i, \quad i = 1, \ldots, r.$$

[B] Dies gilt allerdings nur unter gewissen Bedingungen, die jedoch bei der nachfolgenden Konstruktion stets erfüllt sind.

⟨Das Eikonal, Integration der LAGRANGEschen Gleichungen⟩

Dann wissen wir, dass für ein solches k-Feld das Integral

$$J = \int_{t_1}^{t} \left\{ F + \frac{\partial F}{\partial k_1}(\dot{q}_1 - k_1) + \cdots + \frac{\partial F}{\partial k_r}(\dot{q}_r - k_r) \right\} dt, ^{\langle 88 \rangle}$$

das wir wieder wie früher Eikonal nennen, eine reine Ortsfunktion im $q_1, \ldots, q_r, t$ Raume wird:

$$J = J(q_1, \ldots, q_r, t).$$

Seine Bedeutung ist wieder der Minimalwert des Integrals

$$\int_{t_1}^{t} F\, dt$$

zwischen den 2 Transversalflächen,[C] die durch den Anhangs- resp. Endpunkt[89] des Integrationsweges gehen.

Wie früher gibt es natürlich auch hier eine grosse Mannigfaltigkeit von Eikonalen, da sie noch von der willkürlichen Funktion $f(q_1, \ldots, q_r, t)$ abhängen. Jedoch lässt sich wieder eine partielle Differentialgleichung angeben, der alle Eikonale genügen müssen. Die vollständige Ableitung von J nach t ist ja

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{\partial J}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial J}{\partial q_i}\dot{q}_i = F - \sum_i k_i \frac{\partial F}{\partial k_i} + \sum_i \frac{\partial F}{\partial q_i}\dot{q}_i, ^{\langle 90 \rangle}$$

und wir haben daher

$$\frac{\partial J}{\partial t} = F - \sum_i k_i \frac{\partial F}{\partial k_i}$$

$$\frac{\partial J}{\partial q_i} = \frac{\partial F}{\partial k_i}.$$

Eliminieren wir aus diesen $r+1$ Gleichungen die r Grössen k_i, so bleibt eine einzige Beziehung zwischen den Ableitungen von J

$$\Phi(J_t, J_{q_1}, \ldots, J_{q_r}, q_1, \ldots, q_r, t) = 0,$$

die HAMILTON-JACOBIsche partielle Differentialgleichung, übrig. Ihre Kenntnis kann unter Umständen das Integrationsgeschäft sehr erleichtern, denn es gilt wieder der Satz vom letzten Multiplika|tor: Kennen wir eine von r 59

[C] Die Transversalflächen sind dadurch definiert, dass auf ihnen das Eikonal konstant ist. Zu Parameterdarstellung vermittels der ⟨k_i⟩ genügen sie offenbar den Differentialgleichungen ⟨$F + \frac{\partial F}{\partial k_1}(\dot{q}_1 - k_1) + \cdots = 0.$⟩

[88] Added by Hilbert with pencil: " $=$ Min". In the left margin, Hilbert added an exclamation mark and wrote: "Weiter S. 59!".

[89] "Anhangs-" should be "Anfangs-".

[90] The last term should read $\sum_i \frac{\partial F}{\partial k_i}\dot{q}_i$.

Konstanten $a_1, \ldots, a_r$ abhängige Lösung

$$J = J(q_1, \ldots, q_r, t, a_1, \ldots, a_r)$$

dieser Differentialgleichung, so stellen die Gleichungen

$$\frac{\partial J}{\partial a_i} = b_i, \quad i = 1, \ldots, r,$$

wo die b_i r neue Konstante sind, die vollständige $2r$ Integrationskonstante $a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_r$ enthaltene Lösung der LAGRANGEschen Differentialgleichung des ursprünglichen Variationsproblems dar. Diese werden also wenn J einmal bekannt ist, durch blosse Differentiation gefunden.

⟨Das kanonische Variationsproblem und Transformation⟩

Auch[91] die letzte Umformung, die wir mit dem Variationsproblem mit einer Unbekannten vornahmen, die Transformation auf die *kanonische Form*, lässt
[67] sich hier in | gleicher Weise vornehmen. Wir führen an Stelle der k_i die r Grössen

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial k_i}$$

ein, und drücken die k vermittels der p aus. Dann erhält das Variationsproblem (4) die kanonische Form[92]

$$\int_{t_1}^{t_2} \big\{p_1\dot{q}_1 + \cdots + p_r\dot{q}_r - L(p_1, \ldots, p_r, q_1, \ldots, q_r, t)\big\} dt = \text{Min.}, \tag{5}$$

über deren Vorzüge wir uns bereits oben ausgesprochen haben. L ist die LEGENDREsche Funktion von F

$$L = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} - F.$$

Auch umgekehrt gehen die alten Variabeln aus den neuen durch eine LEGENDRE-Transformation hervor.

$$k_i = \frac{\partial L}{\partial p_i}$$
$$F = \sum_i p_i \frac{\partial L}{\partial p_i} - L.$$

[91] In the left margin, Hilbert added a reader's sign (⊤). At this point, *Hilbert 1926/27** sets in again, cf. note 87 above.

[92] Added by Hilbert with pencil in the left margin: “Bei s Freiheitsgraden lautet das kan. Variationsproblem:”.

Die Variationsableitungen von (5) liefern wieder die (bekannten)[93] kanonischen Differentialgleichungen

$$\left.\begin{aligned} \dot{p}_i &= -\frac{\partial L}{\partial q_i} \\ \dot{q}_i &= \quad \frac{\partial L}{\partial p_i}. \end{aligned}\right\} i = 1, 2, \ldots, r^{\langle 94\rangle}$$

Auch[95] die HAMILTON-JACOBIsche Differentialgleichung erhält in den kanonischen Variablen dieselbe einfache Form wie früher. (Wir haben ja 60

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial t} &= F - \sum_i k_i \frac{\partial F}{\partial k_i} = -L \\ \frac{\partial J}{\partial q_i} &= \frac{\partial F}{\partial k_i} = p_i, \end{aligned}$$

und erhalten also durch Elimination der p_i)[96]

$$L\left(\frac{\partial J}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial J}{\partial q_r}, q_1, \ldots, q_r, t\right) + \frac{\partial J}{\partial t} = 0,$$

wobei man also einfach in L die p_i durch $\frac{\partial J}{\partial q_i}$ zu ersetzen hat.
Enthält F und damit L t nicht explicite, so folgt aus den kanonischen Gleichungen durch Multiplikation mit $\dot{q}_i$ und $\dot{p}_i$ und nachfolgender Addition resp. Subtraktion

$$\left.\begin{aligned} \dot{p}_i &= -\frac{\partial L}{\partial q_i} \quad \Big|\ \dot{q}_i \\ \dot{q}_i &= \quad \frac{\partial L}{\partial p_i} \quad \Big|\ \dot{p}_i \end{aligned}\right\} i = 1, 2, \ldots, r$$

wieder

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial p_i}\dot{p}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i = \sum \dot{p}_i\dot{q}_i - \sum \dot{p}_i\dot{q}_i = 0$$

also der Energiesatz:

$$L(p_1, \ldots, p_r, q_1, \ldots, q_r) = \text{const.}$$

In diesem Falle können wir ebenso wie früher die HAMILTONsche partielle Differentialgleichung durch den Ansatz

$$J = S(q_1, \ldots, q_r) - a_1 t$$

[93] The brackets were added with pencil.

[94] In the left margin, Hilbert added a reader’s sign ($\perp$) and wrote with pencil: “Weiter S. 61”.

[95] The following material (until “Mit den p_i, q_i ...”, cf. note 99 below) is missing in *Hilbert 1926/27**.

[96] The brackets were added with pencil. Also added by Hilbert with pencil: “nämlich:”.

vereinfachen. Sie erhält dann die Form

$$L\left(\frac{\partial S}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_r}, q_1, \ldots, q_r\right) = a_1.$$

Diese Differentialgleichung, die jetzt allerdings auch noch partiell ist, dient zur Bestimmung der Quantrix S.[97] a_1 ist wieder die Energiekonstante. Haben wir einmal auf irgend eine Weise eine ausser von a_1 noch von weiteren $r-1$ Konstanten abhängige Funktion S, die dieser Differentialgleichung genügt,
61 gefunden, so liefern | die Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial a_1} &= t + b_1 \\ \frac{\partial S}{\partial a_i} &= b_i, \quad i = 2, \ldots, r \end{aligned}$$

nach den q_i aufgelöst

$$q_i = q_i(a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_r, t), \quad i = 1, \ldots, r$$

die volle Lösung der LAGRANGEschen Gleichungen und damit auch der kanonischen, die ja mit ihnen aequivalent sind.[98]

[68] Mit[99] den p_i, q_i sind auch alle anderen Variabeln p_i^*, q_i^* kanonisch konjugiert, d. h. genügen Differentialgleichungen von kanonischer Form, die aus ihnen durch eine kanonische Transformation hervorgehen. Wir geben letztere wieder in 2 Formen an.

1) Man wähle eine willkürliche Funktion

$$V(q_1, \ldots, q_r, q_1^*, \ldots, q_r^*, t).$$

Dann vermitteln die Gleichungen

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial V}{\partial q_i} \\ p_i^* &= -\frac{\partial V}{\partial q_i^*} \\ L^* &= L + \frac{\partial V}{\partial t} \end{aligned}$$

eine kanonische Transformation, und für die p^* und q^* gelten die Differentialgleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{dp_i^*}{dt} &= -\frac{\partial L^*}{\partial q_i^*} \\ \frac{dq_i^*}{dt} &= \frac{\partial L^*}{\partial p_i^*}. \end{aligned}\right\} i = 1, \ldots, r$$

[97] "der Quantrix" was corrected by Hilbert to "von".

[98] In the left margin, Hilbert added, with pencil, a reader's sign ($\perp$), wrote "S. 62", and added another reader's sign ($\top$).

[99] At this point, *Hilbert 1926/27** sets back in again, cf. note 95 above.

2) Eine willkürliche Funktion

$$T(q_1, \ldots, q_r, p_1^*, \ldots, p_r^*, t)$$

leistet dasselbe, wenn man

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial q_i}$$
$$q_i^* = -\frac{\partial T}{\partial p_i^*}$$
$$L^* = L + \frac{\partial T}{\partial t} \langle 100 \rangle$$

(als Transformationsformel benutzt. Nimmt man dieselbe Transformation ein- 62
mal vermittels 1) und dann vermittels 2) | vor so hängen V und T durch die [69]
Beziehung

$$V = T - \sum_i p_i^* q_i^*$$

zusammen. Enthalten insbesondere V resp. T, und damit die Transformationsformeln, t nicht explizite, so wird einfach

$$L^* = L.$$

Ferner können wir auch mit Hilfe dieser Formeln kanonische Konstante einführen, und den Satz von der Variation der Konstanten für mehrere Freiheitsgrade verallgemeinern.)[101]

---

[100] At the bottom of the page, Hilbert wrote with pencil: “Jetzt S. 60”.

[101] The brackets were added with pencil. In the left margin, a reader’s sign ($\top$) was added with pencil. In *Hilbert 1926/27**, the preceding sentence was replaced by the following text: “Auch die Integrationstheorie ist beinahe wörtlich zu übertragen. Man sucht auch hier eine kanonische Transformation mit der Erzeugenden J, die die neue HAMILTONsche Funktion K zum verschwinden bringt. Wegen

$$K = H + \frac{\partial J}{\partial t}, \quad p_i = \frac{\partial J}{\partial q_i}$$

ist hier notwendig und hinreichend, dass J der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial J}{\partial t}(q_i, Q_i, t) + H\left(q_i, \frac{\partial J}{\partial q_i}, t\right) = 0$$

genügt, wobei man in H wieder die p_i durch $\frac{\partial J}{\partial q_i}$ zu ersetzen hat, und die Q_i die Rolle von Integrationskonstanten spielen. Hat man nun ein r unabhängige Konstante $a_1, \ldots, a_r$ enthaltendes Integral, ein sogenanntes vollständiges Integral, dieser Differentialgleichung gefunden, so wähle man die a_k als neue Variable Q_k, und hat dann in

$$p_k = \frac{\partial J}{\partial q_k}$$
$$P_k = -\frac{\partial J}{\partial a_k} = b_k$$

⟨p. [70]⟩ die vollständige Lösung des mechanischen Problems mit den $2r$ Konstanten a_i, b_i, da auch die b_i zufolge

$$K = H + \frac{\partial J}{\partial t} = 0$$

⟨Uebergang zur Mechanik⟩

Den Übergang zur Mechanik erhalten wir wieder durch das HAMILTONsche Prinzip; indem wir für F, $T-U$ einsetzen, wo die potentielle Energie U nur von den q abhängt, die kinetische Energie T jedoch eine homogene quadratische Form der $\dot{q}$ sein soll, deren Koeffizienten wieder beliebig von den q abhängen dürfen. Dann werden die „Impulse“[102]

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i},$$

und es gilt die Beziehung

$$T = \frac{1}{2}\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \frac{1}{2}\sum_i p_i \dot{q}_i.$$

[71] Infolgedessen ist

$$L = \sum_i \dot{q}_i p_i - (T-U) = T + U = E,$$

wieder die Energie, und die Quantrix[103] S die Wirkungsfunktion

$$S = 2\int T\,dt.^{\langle 104\rangle}$$

⟨Ausdehnung der Quantentheorie auf solche Systeme⟩

(Die bisherigen Entwicklungen liefen ganz parallel denen für einen Freiheitsgrad.[105] Für die *Aufstellung der Quantenbedingungen*, zu denen wir jetzt

also

$$\frac{dP_i}{dt} = \frac{db_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial a_i} = 0$$

Konstante werden. J selbst hat auch wieder diesselbe Bedeutung wie früher als der tatsächliche Wert des HAMILTONschen Integrals über die wirkliche Bahnkurve, da der oben gegebene Beweis sich überträgt, wenn man nur immer entsprechend über alle Freiheitsgrade summiert. ”

[102] In the left margin, Hilbert added with pencil to the following three equations: “Impuls-Koordinaten:”, “Kin. Energie:”, “Totalenergie:”. The equations for T and L were then deleted with pencil.

[103] The word “Quantrix” was deleted with pencil.

[104] Added by Hilbert with pencil: “genau wie bei 1 Freiheitsgrad (S. 43)”. In the left margin, Hilbert added: “Nun wollen wir die Winkelvariabeln w einführen”. The following brackets were also added with pencil.

[105] In the left margin of *Hilbert 1926/27**, p. 71, Hilbert wrote with pencil: “Fall getrennter Variabeln! Gleich [—] Zerfall in einzelne Probleme je einer Variabeln⟨.⟩ Allgemein kann man nichts mehr machen. $S = \sum$ von Grössen die alle nur ⟨von⟩ einer Variabeln abhängen⟨.⟩ Uebrigens nur Frequenz Nicht Intensität Korrespondenzprinzip⟨.⟩ Auch stimmt Alles nicht genau quantitativ sondern nur qualitativ mit den Experimenten.” In the right margin of *Hilbert 1926/27**, p. 71, Hilbert wrote with pencil a reader’s sign (⊥) and: “weiter S. 102”.

übergehen, ist jedoch ein ganz wesentlicher Unterschied vorhanden. Dort ge-
lang es unter der nur unwesentlichen Ein|schränkung, dass die „Energiekurve“ 63
$L(pq) = a$ ein Oval sei, zu zeigen, dass die Bewegung periodisch sein müsse, und so liessen sich ganz allgemein uniformisierende Winkelvariable w, I einführen, derart dass die Lagenkoordinate

$$q = P(w)^{\langle 106\rangle}$$

eine periodische Funktion (Periode 1) der linearen Funktion der Zeit

$$w = \nu t + \beta$$

wurde, und die Quantrix S die Form

$$S = Q(w) + Iw,^{\langle 107\rangle}$$

bekam, wo auch Q periodisch in w war. Etwas analoges ist in dem allgemeinen Fall von r Freiheitsgraden offenbar nicht möglich,[108] und wie sehr man sich auch bemüht hat, ist es bis jetzt noch nicht gelungen, Quantenbedingungen zu finden, die für jedes mechanische System anwendbar sind. Man hat aber eine ganze Reihe von Vorschriften angegeben, die unter gewissen Einschränkungen für ziemlich allgemeine Klassen von Problemen ausreichen. Wir wollen hier eine Formulierung angeben, die alle bisher behandelten Fälle umfasst, und dabei als eine direkte Verallgemeinerung unserer früheren Betrachtungen erscheint. Sie ist, wie gesagt, die allgemeinste, die wir heute besitzen, und enthält zugleich eine analytische Bedingung für die Möglichkeit einer Quantelung, die der physikalischen Natur des Problems durchaus angepasst zu sein scheint.)

⟨Voraussetzungen für die Quantentheorie (Additivperiodizität der Wirkungsfunktion)⟩

Vorgelegt sei also ein mechanisches System mit der Energiefunktion

$$L(p_1, \ldots, p_r, q_1, \ldots, q_r).$$

Die Differentialgleichung für die Quantrix[109] erhalten wir indem wir | für p_k 64

[106] “$P(w)$” was corrected by Hilbert with pencil to “Periodische Funktion von w”.

[107] “Q” was corrected by Hilbert with pencil to “Period. Funktion”.

[108] In *Hilbert 1926/27** the remainder of the paragraph was replaced by the following text:
“Es liegt dies daran, dass die bis jetzt vorgetragene ursprüngliche Quantentheorie prinzi⟨p. [72]⟩piell unzureichend war, und nicht sinngemäss auf ganz beliebige Systeme verallgemeinert werden konnte. Dies ist erst in den später vorzutragenden neueren Entwicklungen möglich gewesen. Jedoch konnte man diese Uebertragung für eine grosse Klasse physikalisch wichtiger Probleme vornehmen, und wir müssen diese zunächst kennen lernen, um später die neuen Theorieen verstehen zu können.”

[109] The words “die Quantrix” were corrected by Hilbert with pencil to “S”.

$\frac{\partial S}{\partial q_k}$ einsetzen, also

$$L\left(\frac{\partial S}{\partial q_1},\ldots,\frac{\partial S}{\partial q_r},q_1,\ldots,q_r\right)=a_1.$$

Unsere Voraussetzung ist nun diese:[110] Wir nehmen an, dass unsere Differentialgleichung ein von r Konstanten $a_1,\ldots,a_r$ abhängiges Integral $S(q_1,\ldots,q_r,a_1,\ldots,a_r)$ besitze, mit folgender Eigenschaft: An Stelle der q_i sollen sich r neue, von einander unabhängige Hilfsparameter $s_1,\ldots,s_r$ einführen lassen, derart, dass, wenn wir irgend ein s_i um 1 vermehren, die q_i und $\frac{\partial L}{\partial q_i}$ wieder ihre Anfangswerte annehmen, also periodische Funktionen der s_i mit der Periode 1 sind, während S um eine bestimmte Konstante, die Additivperiode I_i zunimmt.[111] Vermittels der Substitutionsgleichungen

$$q_i=q_i(s_1,\ldots,s_r,a_1,\ldots,a_r),\quad i=1,\ldots,r,$$

die den Bedingungen

$$q_i(s_1,\ldots,s_k+1,\ldots,s_r)=q_i(s_1,\ldots,s_k,\ldots,s_r)$$

genügen müssen, soll also S die Form

$$S=Q(s_1,\ldots,s_r,a_1,\ldots,a_r)+\sum_k I_k s_k$$

---

[110] At this point, Hilbert added with pencil a reader's sign ($\overline{\top}$), and in the left margin, he wrote "$\overline{\top}$ mein Blatt!". In *Hilbert 1926/27**, the following paragraph (until "Ist diese Voraussetzung einmal erfüllt,...") was replaced by the following text:
"Wir nehmen an, dass unsere Differentialgleichung ein Integral mit r unabhängigen Konstanten $a_1,\ldots,a_r$ besitze, dass additivperiodisch in den q_k sei, und zwar mit r Additivperioden $I_1,\ldots,I_r$, dass es also die Form

$$S=R(q_1,\ldots,q_r,a_1,\ldots,a_r)+\sum m_k I_k(a_1,\ldots,a_r)$$

⟨p. [73]⟩ wo die m_k beliebige ganze Zahlen darstellen, d. h. dass für ein bestimmtes Wertsystem $q_1,\ldots,q_r$, S nur diese Werte annehmen kann. Man kann diese Eigenschaft auch so ausdrücken. Halten wir z. B. alle q_k fest ausser q_1, so sei S eine einfache additivperiodische Funktion von q_1, d. h. lassen wir q_1 einen bestimmten geschlossenen Wertebereich durchlaufen, so soll sich S um I_1 vermehren u. s. w.. Ferner seien die $\frac{\partial S}{\partial q_k}$ eindeutige Funktionen der q_k, und endlich noch die Additivperioden I_k solche Funktionen der Integrationskonstanten $a_1,\ldots,a_r$, dass sie nach diesen auflösbar sind, sodass wir S als Funktion der q_k und I_k ausdrücken können

$$S=S(q_1,\ldots,q_r,I_1,\ldots,I_r).$$

Die Additivperioden berechnen sich dabei nach ihrer Definition aus

$$I_k=\oint\frac{\partial S}{\partial q_k}\,dq_k.$$

Fälle, bei denen diese Voraussetzungen erfüllt sind, werden wir später kennen lernen, und dann auch sehen, was sie eigentlich bedeuten. "

[111] In the preceding sentence, Hilbert added with pencil "und $\frac{\partial L}{\partial q_i}$" after "die q_i", and added "eindeutige" after "also". In the left margin, he wrote: "1$^{\text{ste}}$ Annahme".

annehmen, wo Q wieder eine periodische Funktion (Periode 1) der s_i ist und die Additivperioden

$$I_k = \int_0^1 \frac{\partial S}{\partial s_k} \, ds_k$$

sind.[112] Hierdurch erhalten wir die I_k als Funktionen der Integrationskonstanten a_k, die wir daher[113] auch umgekehrt mit Hilfe der I_k ausdrücken können. (Der Unterschied gegenüber einem einzigen Freiheitsgrad ist also der, dass wir dort zeigen konnten, dass die Quantrix stets eine solche Form einer additivperiodischen Funktion besitzt, während wir es hier voraussetzen müssen.)[114]

---

[112] In the left margin, Hilbert wrote: "2$^{\text{te}}$ Annahme".

[113] "daher" was corrected by Hilbert with pencil to: "wie wir ferner annehmen wollen".

[114] The brackets were added with pencil. The beginning of the following sentence was corrected by Hilbert with pencil to: "Sind diese Voraussetzungen erfüllt".

⟨Winkelvariable⟩

Ist diese Voraussetzung jedoch einmal erfüllt, so gestaltet sich alles genau
65 wie früher.[115] Wir können wieder *Winkelvariable* ein|[116] führen, wobei wir

[115] In *Hilbert 1926/27**, the following material (until "Die Quantenbedingungen ...", cf. note 123 below) was replaced by the following text:
"Wir können wieder Winkelvariable, d. h. die zu den I_k kanonisch kon⟨p. [74]⟩jugierten Variabeln einführen, wobei wir natürlich jetzt r Paare w_k, I_k bekommen. Dies geschieht, indem wir $S(q_k, I_k)$ als Erregende der Transformation nehmen, und nach der zweiten Methode dann

$$\begin{aligned} p_k &= \frac{\partial S}{\partial q_k} \\ w_k &= \frac{\partial S}{\partial I_k} \\ K &= H \end{aligned}$$

als Transformationsformeln erhalten. Wir hatten nun vorausgesetzt, dass sich die Integrationskonstanten a_k durch die I_k ausdrücken lassen. Dies gilt also speziell auch für die Energie a_1. Die neue Energiefunktion

$$H = a_1(I_k)$$

ist also eine Funktion der I_k alleine, und enthält die w_k garnicht mehr. Daraus folgt einerseits wieder die Konstanz der I_k

$$\dot{I}_k = -\frac{\partial H}{\partial w_k} = 0,$$

und andererseits

$$\begin{aligned} \dot{w}_k &= \frac{\partial H}{\partial I_k} = \nu_k(I_k) \\ w_k &= \nu_k t + \beta_k, \end{aligned}$$

dass also die w_k lineare Funktionen der Zeit werden. Die β_k sind dabei neue Integrationskonstante.
⟨p. [75]⟩ Aus

$$\frac{\partial S}{\partial w_k} = I_k$$

folgt weiter, dass sich w_k um 1 vermehrt, wenn S um I_k wächst. Nach unserer Voraussetzung der Additivperiodizität gehören aber zu diesen zwei Werten von S dieselben Werte der q_k. Das heisst, die q_k sind periodische Funktionen von w_k mit der Periode 1, und da das für alle w_k gilt, also mehrfach periodische Funktionen aller w_k. Sie lassen sich also als mehrfache Fourierreihen in den w_k darstellen.

$$q_k = q_k(w_1, \ldots, w_r, I_1, \ldots, I_r).$$

Man kann auch umgekehrt beweisen, dass sich immer, wenn die Bewegung in dieser Weise mehrfach periodisch ist, eine Wirkungsfunktion mit den entsprechenden Eigenschaften finden lässt, doch gehen wir darauf nicht ein. Die ν_k sind wieder die mechanischen Schwingungszahlen, denn wenn t um die Zeiteinheit vermehrt ist, so haben die q_k in allen Perioden genau ν_k Umläufe gemacht."

natürlich jetzt r Paare I_k, w_k bekommen. Dies geschieht, indem wir in S an Stelle der a_i die Additivperioden I_i als Integrationskonstanten einführen:[117]

$$S = S(q_1, \ldots, q_r, I_1, \ldots, I_r),$$

was wir können, da ja die a durch die I eindeutig mit festgelegt sind, und die kanonische Transformation

$$\left.\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial S}{\partial q_i} \\ w_i &= \frac{\partial S}{\partial I_i} \end{aligned}\right\} i = 1, \ldots, r$$

ansetzen. (Alle unseren früheren Schlüsse gelten nun unverändert. Insbesondere bleiben in den w_i die Periodizitätseigenschaften der q_i und S als Funktion der s_i erhalten, da

$$w_k = \frac{\partial S}{\partial I_k} = \frac{\partial Q(s_i, I_i)}{\partial I_k} + s_k{}^{\langle 118 \rangle}$$

sich nur um eine periodische Funktion $\frac{\partial Q}{\partial I_k}$ von s_k unterscheidet, und daher gleichzeitig mit s_k um 1 zunimmt. Wenn die Beziehung zwischen den w und

---

[116] In the left margin, Hilbert added a reader's sign ($\top$). Also, at this point in the bound lecture notes, a sheet of paper is inserted with the following notes written with ink:

$$\begin{aligned}
S &= \mathrm{Per}(s_1, \ldots, s_r) + \sum_{k=1}^{r} I_k s_k \\
S &= \mathrm{Per}(q_1, \ldots, q_r, I_1, \ldots, I_r) \\
q_i &= q_i(s_1, \ldots, s_r, I_1, \ldots, I_r) \\
&= \mathrm{Per}(s_1, \ldots, s_r) \\
\frac{\partial S}{\partial q_i} &= \mathrm{Per}(s_1, \ldots, s_r) \\
w_k &= \frac{\partial S}{\partial I_k}(q_1, \ldots, q_r, I_1, \ldots, I_r) \\
\left(\frac{\partial S}{\partial I_k}\right)_{s_1, s_2, \ldots, s_r = \mathrm{const}} &= \mathrm{Per}(s_1, \ldots, s_r) + s_k \\
&= \sum_i \frac{\partial S}{\partial q_i} \cdot \left(\frac{\partial q_i}{\partial I_k}\right)_{s_1, \ldots = \mathrm{const}} + w_k \\
\frac{\partial S}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial q_i}{\partial I_k} &= \mathrm{Per}(s_1, \ldots, s_r), \quad (i = 1, \ldots, r)
\end{aligned}$$

Also:

$$w_k = \mathrm{Per}(s_1, \ldots, s_r) + s_k.$$

[117] Next to the following two equations, Hilbert added with pencil "die neuen P_1 ... P_r (S. 61)" and "die neuen Q_1 ... Q_r", and drew lines to $I_1, \ldots, I_r$ and w_i, respectively.

[118] In the left margin, Hilbert wrote with pencil: "falsch!".

den s umkehrbar eindeutig sind, wie wir es stets annehmen wollen, so können die ersteren die letzteren vollkommen ersetzen, und stellen wieder eine eindeutige Normierung der noch in einem gewissen Grade willkürlichen Parameterdarstellung durch die s_i dar.)[119]

Da die w_i und I_i kanonisch konjugiert sind, so gelten für sie die kanonischen Differentialgleichungen, und da die Transformationsfunktion S die Zeit t nicht explicite enthält, so werden letztere einfach

$$\left.\begin{aligned} \frac{dI_i}{dt} &= -\frac{\partial L}{\partial w_i} \\ \frac{dw_i}{dt} &= \frac{\partial L}{\partial I_i} \end{aligned}\right\} i = 1, \ldots, r.$$

66 Nun ist L aber gleich der Energiekonstanten a_1, die wir allein mit | Hilfe der I_i ausdrücken können. Die Energie muss also nach der Transformation von den w_k unabhängig werden. Hieraus lässt sich wie früher der Schluss ziehen, dass die I_k konstant sind, was allerdings schon von ihrer Definition her bekannt ist, aber darüber hinaus finden wir wieder, dass auch für die Grössen[120]

$$\nu_k = \frac{dw_k}{dt} = \frac{dL(I_i)}{dI_k}$$

als Funktionen der I_i allein dasselbe gilt. Die w_k werden also wieder lineare Funktionen der Zeit

$$w_k = \nu_k t + \beta_k,$$

wobei die β_k neue r Integrationskonstante sind, die noch zu den a_i hinzutreten. Eines dieser β_i kann ganz willkürlich gewählt werden, da wir durch geeignete Wahl des Zeitanfangspunktes einem von ihnen einen beliebigen Wert erteilen können, die übrigen sind aber für die Bewegung wesentlich. Die ν_k sind wieder die mechanischen Schwingungszahlen, denn wenn t um die Zeiteinheit vermehrt ist, so hat w_k genau ν_k Umläufe gemacht, da w_k ja die Periode 1 hat;[121] (sie werden in der Astronomie auch die mittleren Bewegungen genannt. Zusammenfassend können wir feststellen: Aus der Annahme der Additivperiodizität der Wirkungsfunktion, d. h. der Form

$$S = Q(w_1, \ldots, w_r) + \sum_i I_i w_i{}^{\langle 122\rangle}$$

[119] The brackets were added with pencil. In the left margin, Hilbert wrote, and deleted: “Jetzt machen wir die 3$^{\text{te}}$ Annahme, dass hieraus die s sich als eindeutige Funktionen der w bestimmen lassen. Wegen w_k = Periodische Funktion $(s)+s_k$ wird auch w mit s gleichzeitig um 1 zunehmen. daher können wir die s durch die w ersetzen und dies ist eine eindeutige Normierung der Parameter s!”

[120] In the left margin, Hilbert wrote with pencil: “ν_k mechanische Frequenz”.

[121] In the left margin, Hilbert added a reader’s sign ($\perp$). The following brackets were added with pencil.

folgt für die q und damit auch für die p, dass sie als mehrfachperiodische Funktionen von r linearen Funktionen der Zeit w_i dargestellt werden können.

$$\begin{aligned} q_i &= q_i(w_1, \ldots, w_r, I_1, \ldots, I_r) \\ p_i &= p_i(w_1, \ldots, w_r, I_1, \ldots, I_r) \end{aligned} \qquad i = 1, \ldots, r$$

also etwa als mehrfache Fourierreihen. Die $2r$ Integrationskonstanten der Bewegungsgleichungen sind die Grössen $I_1, \ldots, I_r$, und $\beta_1, \ldots, \beta_r$. | Wir werden 67
später auch die Umkehrung dieses Satzes beweisen, dass alle Systeme, deren Integrale der Bewegungsgleichungen auf diese Form gebracht werden können, auch eine Quantrix mit den verlangten Eigenschaften besitzen. Unsere Forderung hat also wohl ihren guten physikalischen Sinn, da es für die Quantelung immer auf die Periodizitätseigenschaften der Bewegung anzukommen scheint. Doch ist sie immerhin recht einschneidend und gibt eine ganz erhebliche Einschränkung, da die ihr gehorchenden Bewegungen nur einen kleinen, allerdings auch sehr wichtigen Bruchteil der mechanischen Probleme ausmachen.)

⟨Die Quantenbedingungen⟩

Die[123] Quantenbedingungen (wir erhalten jetzt natürlich nicht nur eine sondern r) lauten jetzt

$$I_k = n_k h, \quad k = 1, \ldots, r,$$

wobei die n_k irgendwelche ganze Zahlen sind. Durch sie werden also die Additivperioden der Quantrix festgelegt, | und mit ihnen auch entsprechend die In- [76]
tegrationskonstanten $a_1, \ldots, a_r$, während die zweite Reihe ($b_1 \ldots, b_r$ oder)[124] die $\beta_1, \ldots, \beta_r$ durch sie nicht berührt werden.[125]
(Diese Quantenvorschrift lässt noch eine höchst interessante mathematische Fassung zu. Betrachten wir ganz losgelöst von allen mechanischen und physikalischen Vorstellungen die Quantrix

$$S = Q(w_i, I_i) + \sum_i I_i w_i = S(q_1, \ldots, q_r)$$

rein in ihrem formalen Charakter als Funktion der q_k, so sehen wir dass sie eine unendlich vieldeutige Funktion dieser Variabeln ist, und zwar unterscheiden sich alle Werte von S, die sie in einem Raumpunkt $q_1, \ldots, q_r$ annehmen kann, wie man sofort aus der Abhängigkeit von S von den w_i und dem periodischen Charakter ersieht, um einen Ausdruck

68
$$m_1 I_1 + \cdots + m_r I_r,$$

[122] The first term on the right hand side was corrected by Hilbert in pencil to: $Q(w_1, \ldots, w_r, I_1, \ldots, I_r)$.

[123] In the left margin, Hilbert added a reader's sign ($\top$). At this point, the text of *Hilbert 1926/27** sets back in again, cf. note 115 above.

[124] The brackets were added with pencil.

[125] In the left margin, Hilbert added a reader's sign ($\perp$).

wo die $m_1, \ldots, m_r$ irgendwelche ganze Zahlen sind. Nach einem bekannten mathematischen Satze kommt nun ein solcher Ausdruck durch geeignete Wahl der ganzen Zahlen $m_1, \ldots, m_r$ jedem Zahlenwerte beliebig nahe, ausgenommen, wenn die I_k sich wie ganze Zahlen zu einander verhalten, dann wird von ihm nur eine diskrete Mannigfaltigkeit von Werten angenommen. Dies ist aber genau das, was unsere Quantenbedingungen verlangen, die also gerade diesen Ausnahmefall erzwingen, und wir können ihnen also die sehr merkwürdige Formulierung geben: Die Quantrix darf in jedem Raumpunkt nur diskreter Werte fähig sein. Früher, z. B. als man anfing die ABELschen Umkehrprobleme zu untersuchen, ging man solchen bizarren Funktionen, die in jedem Punkt jeden beliebigen Wert annehmen können, als an der Grenze der mathematischen Fassungskraft überhaupt liegend, gerne aus dem Wege, und suchte mit „vernünftigen" Funktionen auszukommen, und es ist sicher sehr bemerkenswert, dass die Quantentheorie diesen vernünftigen Funktionen auch in der Natur eine besonders ausgezeichnete Rolle zuschreibt.)[126]

Die adiabatische Invarianz der Quantenbedingungen beweist man wieder genau wie bei einem Freiheitsgrad.

⟨Eindeutigkeitsfragen⟩

([127] Wir haben nun eine allgemeine Quantenvorschrift für Systeme von einer beliebigen Anzahl r von Freiheitsgraden durchgeführt. Bevor wir aber zu praktischen Anwendungen schreiten, müssen wir noch einen sehr wesentlichen Punkt besprechen. Unsere Vorschrift, nämlich die ganzzahlige Festlegung der Additivperioden der Quantrix S, lieferte uns r Bedingungen, mit deren Hilfe sich die r Integrationskonstanten 1. Art $a_1, \ldots, a_r$ bestimmen lassen, unter
69 denen sich auch die | Energie befand.[128] Da nun die Anzahl der durch r Beziehungen bestimmbaren Grössen höchstens auch gleich r sein kann, so folgt, dass die übrigen r Integrationskonstanten $b_1, \ldots, b_r$ des mechanischen Problems, die in seiner vollständigen Lösung

$$\frac{\partial J}{\partial a_1} = b_1, \ldots, \frac{\partial J}{\partial a_r} = b_r$$

auftreten, noch völlig willkürlich sind. Die Konstante b_1 bedeutet nur den Anfang der Zeitrechnung, wie man sofort sieht, wenn man die erste der obigen

[126] The brackets were added with pencil. The preceding paragraph, i.e. the material in brackets is missing in *Hilbert 1926/27**.

[127] The brackets were added with pencil. In the left margin, Hilbert added with pencil: "Die Frequenzbedingung wie früher: $\frac{H_1 - H_2}{h} = \nu$", added a reader's sign (⊥), and wrote: "S. 70".

[128] In *Hilbert 1926/27**, the rest of the paragraph (until "... Quantrix wählen") was replaced by "Da aber die Wirkungsfunktion als Integral einer partiellen Differentialgleichung noch in weitgehendem Masse willkürlich ist, so ist zu untersuchen, ob die Aufstellung der Winkel- und Wirkungsvariabeln wenigstens eindeutig ist."

Gleichungen für S hinschreibt

$$\frac{\partial S}{\partial a} = t + b_1,$$

aber da für die übrigen $b_2, \ldots, b_r$ keine Bedingung mehr gilt, so sehen wir, dass falls eine Kurve quantentheoretisch erlaubt ist, zugleich mit ihr auch ∞^{r-1} andere, d. h. eine $r-1$ parametrige Schar. Unsere Theorie lehrte andererseits, dass es eine grosse Mannigfaltigkeit von Eikonalen J gibt, da ja die Fläche $f = 0$ in dem $r+1$-dimensionalen Raum der $q_1, \ldots, q_r$ und t noch willkürlich wählbar war, und ebenso gross ist natürlich die Willkür für die Quantrix S, die ebenfalls nur durch eine partielle Differentialgleichung bestimmt ist. Wir müssen also sehen, ob wir dieselbe $r-1$ parametrige Schar bekommen, falls wir eine andere Quantrix wählen.

Wäre dies nicht der Fall, so hätten unsere Quantenbedingungen ja gar keine Bedeutung. Unsere Theorie setzt uns vollkommen in den Stand, diese Frage zu entscheiden.) Wir wollen hier nur das Resultat anführen, einen Beweis findet man z. B. bei KNESER, Math. Ann. 84 S. 277 ff.[129] Es ergibt sich: Alle
Quantrices liefern | dieselben Bahnen, ausgenommen, wenn der besondere Fall [77]
vorliegt, dass zwischen den mittleren Bewegungen $\nu_1, \ldots, \nu_r$, identisch für alle Werte der I eine oder mehrere lineare Beziehungen

$$m_1\nu_1 + \cdots + m_r\nu_r = 0$$

besteht, wobei die m_k ganze Zahlen sind. Dieser Fall heisst |der ausgeartete, 70
und wir werden ihn nachher noch genauer untersuchen.

Für $r = 1$ können wir die Richtigkeit dieses Satzes sehr leicht einsehen. Die einzige mögliche Entartung wäre hier nämlich $\nu_1 = \nu = \frac{dw}{dt} = 0$, oder $w = \text{const.}$ d. h. der Fall der Ruhe, und für diesen gibt es natürlich keine Quantelung. Abgesehen hiervon hatten wir aber die Beziehung

$$I_1 = I = \frac{2\overline{T}}{h}\langle 130\rangle$$

hergeleitet, und da kinetische Energie und Frequenz nach ihrer mechanischen Bedeutung von der Wahl der Quantrix unabhängig sind, so muss dasselbe für I gelten.

Auch[131] für mehrere Freiheitsgrade sind die $I_1, \ldots I_r$[132] wesentlich eindeutig bestimmt, und alle Quantrices haben diesselben Additivperioden. D. h.

[129] *Kneser 1921*. In the left margin, Hilbert wrote with pencil: "Born Atommechanik S. 98 etc.", see *Born 1925*. In *Hilbert 1926/27**, the preceding sentence reads: "Wir wollen hier nur das Resulat anführen, einen Beweis findet man z. B. bei Born, Atommechanik."

[130] "h" was corrected with pencil to "ν".

[131] "Auch" was corrected by Hilbert to "Aber". In the left margin, he wrote a reader's sign (⊤).

[132] Added by Hilbert with pencil: "nur". Also, the following brackets were added with pencil.

dies gilt nur bis auf lineare ganzzahlige Transformationen der Determinante 1. Bei diesen bleiben aber alle Periodizitäts- und Quanteneigenschaften
[78] und auch die kanonische Form | der Bewegungsgleichungen erhalten, so dass die Bahnauswahl diesselbe bleibt, wenn wir auf die w_k die kontragrediente Transformation anwenden.[133] Um dies einzusehen, brauchen wir nur als Transformationsfunktion[134]

$$V = (m_{11}I_1^* + \cdots + m_{1r}I_r^*)w_1 + \cdots + (m_{r1}I_1^* + \cdots + m_{rr}I_r^*)w_r$$

anzusetzen, wobei die $m_{11}, \ldots, m_{rr}$ irgendwelche Zahlen sein können, die die Determinantenbedingung

$$\begin{vmatrix} m_{11} & \ldots & m_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{r1} & \ldots & m_{rr} \end{vmatrix} = 1$$

[133] In *Hilbert 1926/27**, the following paragraph (until "... und wenn die I_k...") was replaced by:
"Führen wir nämlich statt der I_k die linearen Kombinationen

$$J_k = \sum_l m_{kl} I_l, \quad I_k = \sum_k m_{lk} J_k.$$

ein, wo die m_{kl} ganzzahlig, und ihre Determinante gleich 1 sei, so erhalten wir die zu diesen Additivperioden gehörige Wirkungsfunktion $S(q_k, J_k)$, indem wir in $S(q_k, I_k)$, diese linearen Ausdrücke einsetzen. Diese Wirkungsfunktion hat dann auch noch die von uns vorausgesetzten Eigenschaften. Die zugehörigen Winkelvariabeln findet man nach Differentiation durch

$$w_k = \frac{\partial S(q_l, I_l)}{\partial I_k}$$

$$W_k = \frac{\partial S(q_l, J_l)}{\partial J_l}$$

und es wird

$$w_l = \frac{\partial S}{\partial I_l} = \sum_k \frac{\partial S}{\partial J_k}\frac{\partial J_k}{\partial I_l} = \sum_k W_k m_{kl}$$

Die w transformieren sich also bei dieser einzig noch zulässigen Umformung kontragredient zu den I.
Wenn die I_k".

[134] In the left margin, Hilbert wrote with pencil: "Zweite Methode S. 61".

erfüllen. Dann sind nämlich die Transformationsformeln für die w und I zu einander kontragredient[135]

$$\begin{array}{l|l} I_1 = \dfrac{\partial V}{\partial w_1} = m_{11} I_1^* + \cdots + m_{1r} I_r^* & + w_1^* = \dfrac{\partial V}{\partial I_1^*} = m_{11} w_1 + \cdots + m_{1r} w_r \\ I_r = \dfrac{\partial V}{\partial w_r} = m_{r1} I_1^* + \cdots + m_{rr} I_r^* & + w_r^* = \dfrac{\partial V}{\partial I_r^*} = m_{r1} w_r + \cdots + m_{rr} w_r \end{array}$$

und wenn die I_k alle ganzzahligen Werte durchlaufen, | so gilt dasselbe für die 71
I_k^*, sodass die Quantenbedingungen in beiden Fällen dieselben Bahnen liefern. [79]
Dies letzte Resultat erlaubt es uns auch die entarteten Fälle, die in der Praxis sehr wichtig sind, weiter zu behandeln.

⟨Entartung⟩

Der Einfachheit der Darstellung halber nehmen wir an, dass unser System nur 2[136] Freiheitsgrade besitze, zwischen deren mittleren Bewegungen eine[137]

---

[135] On the left hand page Hilbert wrote with pencil: "Besser ohne kanonische Transformation, wie folgt:", and below this comment a sheet of paper is pasted onto the page with the following notes, written by an unknown hand with ink:
Es mögen statt der Perioden

$$I_1, \ldots, I_r$$

r lineare Verbindungen

$$J_k = \sum_{l=1}^{r} m_{kl} I_l$$

mit *ganzzahligen* m_{kl} und $|m_{kl}| = \pm 1$ eingeführt werden. Es soll gezeigt werden, dass sich die Winkelvariablen *kontragredient* zu den I_k transformieren.
Es ist:

$$w_k = \frac{\partial S(q_1, \ldots, q_r, I_1, \ldots, I_r)}{\partial I_k}$$

und entsprechend

$$W_k = \frac{\partial S(q_1, \ldots, q_r, J_1, \ldots, J_r)}{\partial J_k}$$

wobei $S(q_1, \ldots, q_r, J_1, \ldots, J_r)$ aus $S(q_1, \ldots, q_r, I_1, \ldots, I_r)$ hervorgeht, indem man für die I_k die linearen Ausdrücke in $J_1, \ldots, J_r$ setzt; und durch die umgekehrte Ersetzung erhält man $S(q_1, \ldots, q_r, I_1, \ldots, I_r)$ aus $S(q_1, \ldots, q_r, J_1, \ldots, J_r)$. Demnach ist

$$w_l = \frac{\partial S}{\partial I_l} = \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial S}{\partial J_k} \cdot \frac{\partial J_k}{\partial I_l} = \sum_{k=1}^{r} W_k \cdot m_{kl}$$

$$w_l = \sum_{k=1}^{r} m_{kl} W_k, \quad \text{bezw.} \quad w_k = \sum_{l=1}^{r} m_{lk} W_l.$$

[136] "nur" was deleted with pencil, and above "2", Hilbert wrote with pencil "r". In fact, a number of additions and corrections on this page, reflect the intention to deal with the general case of r degrees of freedom, rather than only 2.

[137] Added by Hilbert with pencil: "und nur eine".

lineare Beziehung

$$m_{11}\nu_1 + m_{12}\nu_2 = 0$$

bestehe. Führen wir nun als neue Variable ein

$$\begin{aligned} w_1^* &= m_{11}w_1 + m_{12}w_2 \\ w_2^* &= m_{21}w_1 + m_{22}w_2, \end{aligned}$$

wobei wir m_{21} und m_{22} so wählen, dass die Determinante $\begin{vmatrix} m_{11} & m'_{21} \\ m_{21} & m_{22} \end{vmatrix} = 1$[138] ist, und dazu die entsprechenden Variabeln I^*, so wird offenbar

$$\nu_1^* = \frac{dw_1^*}{dt} = m_{11}\nu_1 + m_{12}\nu_2 = 0.$$

Wir können also im Falle der Ausartung es immer einrichten, dass eine Winkelvariable die mittlere Bewegung 0[139] erhält. Daraus folgt nun, dass auch

$$\frac{dw_1^*}{dt} = \frac{\partial L}{\partial I_1^*} = 0$$

wird, also L nicht mehr von I_1^* abhängt, und dementsprechend auch

$$\nu_2 = \frac{\partial L}{\partial I_2^*}.$$

[80] D. h. I_2^* allein genügt zur Feststellung der Energie und der Periode der Bewegung. Wir werden daraus den Schluss ziehen, das bei entarteten Systemen nur I_2^* zu quanteln ist,[140] (und dem entspricht, dass sich wieder beweisen lässt, dass I_2^* eindeutig bestimmt und adiabatisch invariant ist, was für I_1^* keineswegs gilt.) Auch w_1^* wird in diesem Falle zu einer Konstanten, die von den Quantenbedingungen nicht berührt wird.[141]

72 Wir wollen noch kurz auf die mathematische Bedeutung dieses Falles hinweisen. Die Beziehung $w_1^* =$ const. liefert ein eindeutiges Integral der Bewegungsgleichungen, das ganz koordiniert zu dem Energieintegral hinzutritt. (Ein solches eindeutiges Integral erfordert häufiger sowohl physikalisch, z. B. in der statistischen Mechanik, als auch mathematisch eine sorgfältige Berücksichtigung.[142] Auch in der Variationsrechnung spielt dieses Problem eine grosse Rolle, und ist schon vielfach in Spezialfällen behandelt worden.

---

[138] m'_{21} should be m_{12}.

[139] Interlineated by Hilbert with pencil above "mittlere": "Frequenz 0".

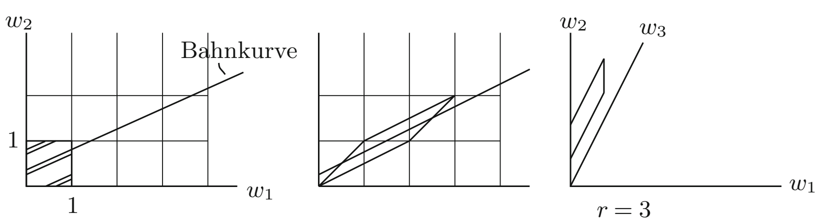
[140] Interlineated by Hilbert with pencil: "= ganz⟨e⟩ Zahl $\cdot h$". Also, the following brackets were added with pencil.

[141] Added by Hilbert with pencil: "Sind 2 oder mehr lineare ganzzahl⟨i⟩g⟨e⟩ Kombinationen der ν Null, so führt man die entsprechenden W_1, W_2 bez. $W_1, W_2 \ldots$ als Winkelvariable ein etc. $r - 2$, bez. noch weniger Quantenbedingungen ... $\mathcal{H} = a$, wird von I_1, I_2 bez. mit weiteren $\mathcal{I}$ unabhängig."

[142] The rest of the paragraph is missing in *Hilbert 1926/27**.

Die Hauptaufgabe, die wohl noch nicht systematisch untersucht worden ist, wäre die, ein neues Variationsprinzip aufzustellen, das dieselben Extremalen wie das ursprüngliche liefert, wenn das Integral als Nebenbedingung hinzugefügt wird. Ein Beispiel hierfür ist der Uebergang vom HAMILTONschen zum EULERschen Prinzip in der Mechanik. Beide ergeben die richtigen Bewegungsgleichungen, und zwar bei dem letzteren unter Benutzung des Energiesatzes. Würde man diesen dagegen zum HAMILTONschen Prinzip hinzunehmen, so würde, obwohl er aus ihm hergeleitet werden kann, etwas ganz Falsches herauskommen. Im allgemeinen lässt sich in einem derartigen Fall die Zahl der Variabeln, also der Freiheitsgrade, vermindern, und es erscheint infolgedessen als sehr natürlich, dass sich auch die Zahl der Quantenbedingungen reduziert.)[143]

Unsere Resultate über entartete Probleme sind noch einer anschaulichen Deutung fähig. Betrachten wir die Bahnkurve in einem Lagenraum der w, so ist sie wegen $w_1 = \nu_1 t + \beta_1$, $w_2 = \nu_2 t + \beta_2$ eine gerade Linie.



Wegen der Periodizität der Lagenkoordinaten in den w stellt bereits ein Quadrat von der Seitenlänge 1 im w-Raum alle möglichen Zustände dar, und wir können daher die Bahnkurve in einem beliebigen Teilquadrant in der w-Ebene, durch das entsprechende Stück in einem einzigen ersetzen, so dass sie ganz in dem einen Elementarviereck verläuft. (Die erlaubten Substitutionen sind solche, die ein Elementarviereck in ein anderes ebenfalls mit dem Inhalt 1 überführen, dessen Ecken in den ganzzahligen Gitterpunkten liegen, das aber kein Quadrat zu sein braucht, genau so wie bei der Transformation der elliptischen Funktionen.)[144] 73[81]

Besteht nun keine lineare, ganzzahlige Beziehung zwischen den ν, so erfüllt die Bahnkurve das Elementarviereck überall dicht. Im Falle der Entartung aber kehren dieselben Stücke immer wieder, und es wird nur ein eindimensionales Gebiet erfüllt. Unsere Transformation auf die Variabeln w^*, I^* bedeutet dann, dass man ein solches Elementarviereck wählt, dessen eine Seite zur Bahnkurve parallel ist, was sich immer ereichen lässt. Alle unsere Sätze über entartete Systeme übertragen sich ohne weiteres auf mehr als 2 Freiheitsgrade.

[143] The brackets were added with pencil.
[144] The brackets were added with pencil.

⟨Anwendungsmöglichkeiten⟩

⟨Separation der Variabeln⟩

[82] Wir haben nun wieder die allgemeinen Grundlagen für die Quantelung gewonnen, und wollen zusehen, wie sich ihre Anwendung gestaltet. Der einfachste Fall, indem unsere Bedingungen erfüllt sind, der auch zugleich der praktisch wichtigste ist, tritt ein, wenn die HAMILTON-JACOBIsche Differentialgleichung sich separieren lässt. Allgemeine Methoden zur Integration partieller Diferentialgleichungen sind ja meist schwer zu finden, und man hilft sich gewöhnlich dadurch, dass man einen durch die Natur des Problems
74 nahegelegten| Ansatz macht, so z. B. bei den meisten Aufgaben der Potentialtheorie, indem man die gesuchte Funktion als Produkt von Funktionen der einzelnen Koordinaten darzustellen sucht. Bei der HAMILTON-JACOBIschen Differentialgleichung nimmt man hingegen eine Summe. Man geht in die Differentialgleichung

$$L\left(\frac{\partial S}{\partial q_1}\cdots\frac{\partial S}{\partial q_r}, q_1\dots q_r\right) = a_1, ^{\langle 145\rangle}$$

die man erhält, indem man in der Energiefunktion $L(p_1\dots p_r, q_1\dots q_r)$

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}, \quad i = 1,\dots,r$$

setzt, mit dem Ansatz

$$S = S_1(q_1) + \cdots + S_r(q_r),$$

[83] wo die einzelnen Funktionen S_i jeweils nur von der Koordinate q_i abhängen sollen. Zerfällt hierbei die partielle Differentialgleichung in r gewöhnliche für $S_1,\dots,S_r$, so haben wir unser Ziel erreicht und können diese bestimmen. Ferner haben wir dann

$$p_1 = \frac{\partial S_1(q_1)}{\partial q_1},\dots,p_r = \frac{\partial S_r(q_r)}{\partial q_r}.$$

Jede dieser Gleichungen liefert eine Relation zwischen einem p_i und dem entsprechenden q_i, also eine Kurve in der p_i, q_i-Ebene, und wir sehen als Ergebnis: Unser Problem mit r Freiheitsgraden zerfällt in r mit je einem Freiheitsgrad.[146] Für diesen hatten wir aber bereits alles erledigt, und es war keine wesentliche Einschränkung[147] für die Quantelung nötig. Wir verfahren

[145] Interlineated by Hilbert with pencil: "quadratisch in $\frac{\partial S}{\partial q_i}$".

[146] Interlineated by Hilbert with pencil: "und wir nehmen an, dass wie ⟨bei⟩ unser⟨em⟩ einparametr. Beispiel sich die Periodizitätseigenschaft herausstellt."

[147] Interlineated by Hilbert with pencil: "d. h. $\frac{\partial S_i}{\partial q_i}$ werden Quadratwurzeln!"

also mit jedem Teilproblem nach unserer ursprünglichen Vorschrift, und können zu jedem Wertepar p_i, q_i die zugehörigen Winkelvariabeln w_i, I_i finden, derart, dass die p_i und q_i periodische Funktionen von w_i, und die S_i additivperiodisch werden. Die Additivperioden, die dann zu quanteln sind, bestimmen sich zu

$$I_i = \int\limits_0^1 \frac{\partial S}{\partial w_i}\, dw_i = \int\limits_0^1 \frac{\partial S_i}{\partial w_i}\, dw_i = \oint p_i\, dq_i,$$

wobei die Integration über eine Periode der Bewegung der betreffenden Ko- 75
ordinate zu erstrecken ist. Even|tuell kann natürlich auch der entartete Fall [84]
eintreten, darauf werden wir weiter unten zurückkommen. Die Additivperioden sind die wohlbekannten Phasenintegrale.

⟨Die Keplerbewegung, Delaunaysche Bewegung⟩

Zur Erläuterung der allgemeinen Theorie wollen wir gleich hier zur praktischen Anwendung übergehen, und das wichtigste, weil grundlegende, Problem der Atomtheorie, die Bewegung eines *Elektrons um* einen *positiv geladenen Atomkern* unter Einfluss der *COULOMBschen Anziehung* nach unseren Prinzipien behandeln. Das mechanische Problem ist dasselbe, wie das 2 Körperproblem der Astronomie, und wir wissen, dass sich das Elektron auf einer Ellipse um den Kern als Brennpunkt bewegt. Wir nehmen an, der Kern sei so schwer, dass seine Bewegung zu vernachlässigen ist. Seine Ladung, ebenso wie die des Elektrons habe den Wert e, der Abstand werde mit r bezeichnet, und die Masse des Elektrons mit m. Dann ist die Energie des Systems zunächst in rechtwinkligen Koordinaten x, y, z.

$$L = T + U = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - \frac{e^2}{r} = a_1.$$

Führen wir in bekannter Weise räumliche Polarkoordinaten ein, so wird

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2\sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}^2\right) - \frac{e^2}{r} = a_1.$$

Die Impulse sind also [85]

$$p_r = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad p_\vartheta = mr^2\dot{\vartheta}, \quad p_\varphi = mr^2\sin^2\vartheta\,\dot{\varphi},$$

und die Energiegleichung bekommt nach deren Einführung die Form

$$L = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\vartheta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\vartheta}\right) - \frac{e^2}{r} = a_1.$$

Die HAMILTON-JACOBIsche Differentialgleichung für die Quantrix wird also

$$\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \vartheta}\right)^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 - \frac{2me^2}{r} = 2ma_1.$$

Hier ist zunächst das Glied mit $\frac{\partial S}{\partial \varphi}$ fortzuseparieren, da es, wenn wir mit 76
$r^2 \sin^2 \vartheta$ hinaufmultiplizieren, ganz isoliert steht, und wir müssen also zunächst $\frac{\partial S}{\partial \varphi} = \text{const.} = a_3$ setzen. Dann wird aus der Differentialgleichung

$$\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left\{\left(\frac{\partial S}{\partial \vartheta}\right)^2 + \frac{a_3^2}{\sin^2 \vartheta}\right\} - \frac{2me^2}{r} = 2ma_1,$$

[86] und hier sind die Variabeln wieder separiert, da der | Klammerausdruck nurmehr von ϑ abhängt, und dies ausserhalb nicht mehr auftritt. Setzen wir ihn also = const. = a_2^2, so erhalten wir für die einzelnen Teile der Quantrix

$$\frac{\partial S}{\partial \varphi} = a_3, \quad \frac{\partial S}{\partial \vartheta} = \sqrt{a_2^2 - \frac{a_3^2}{\sin^2 \vartheta}}$$
$$\frac{\partial S}{\partial r} = \sqrt{2ma_1 - \frac{a_2^2}{r^2} + \frac{2me^2}{r}}.$$

Insgesamt wird sie also

$$\begin{aligned} S &= S_1(r) + S_2(\vartheta) + S_3(\varphi) \\ &= \int \sqrt{2ma_1 - \frac{a_2^2}{r^2} + \frac{2me^2}{r}}\, dr + \int \sqrt{a_2^2 - \frac{a_3^2}{\sin^2 \vartheta}}\, d\vartheta + \int a_3\, d\varphi, \end{aligned}$$

und ihre Additivperioden

$$\begin{aligned} I_1 &= \oint \frac{\partial S}{\partial r}\, dr = \oint \sqrt{2ma_1 - \frac{a_2^2}{r^2} + \frac{2me^2}{r}}\, dr \\ I_2 &= \oint \frac{\partial S}{\partial \vartheta}\, d\vartheta = \oint \sqrt{a_2^2 - \frac{a_3^2}{\sin^2 \vartheta}}\, d\vartheta \\ I_3 &= \oint \frac{\partial S}{\partial \varphi}\, d\varphi = \int_0^{2\pi} a_3\, d\varphi. \end{aligned}$$

Dabei ist die Integration über einen Umlauf in der Ellipse zu erstrecken. Die Integrationen sind auf komplexem Wege ohne Schwierigkeiten auszuführen, und man findet als Resultat

$$I_1 = 2\pi\left(\frac{me^2}{\sqrt{-2ma_1}} - a_2\right)$$
$$I_2 = 2\pi(a_2 - a_3), \quad I_3 = 2\pi a_3.$$

[87] Nach unserer Vorschrift müssen wir jetzt die a_i mit Hilfe der I ausdrücken.

Die Umkehrung der letzten Gleichungen gibt

$$
\begin{aligned}
a_1 &= L = -\frac{2\pi^2 me^4}{(I_1+I_2+I_3)^2} && = \text{Gesamtenergie} \\
a_2 &= \frac{I_2+I_3}{2\pi} && = \text{totaler Drehimpuls} \\
a_3 &= \frac{I_3}{2\pi} && = \text{Drehimpuls um Polarachse.}
\end{aligned}
$$

Hierbei haben wir die mechanische Bedeutung der a_i gleich hinzugefügt. Die 77
w_k könnten wir genau nach unseren Vorschriften finden, insbesondere werden die

$$\nu_k = \dot{w}_k = \frac{\partial L}{\partial I_k}.$$

Nun sehen wir aber folgendes. L hängt nur von $I_1 + I_2 + I_3$ ab, also einer linearen ganzzahligen Kombination der I. Wir haben es demnach mit einem entarteten Fall zu tun, ja sogar mit einem doppelt entarteten, da überhaupt nur eine einzige solche Kombination vorkommt. Nach unseren früheren Überlegungen müssen wir deshalb zu neuen Variabeln übergehen, und zwar führen wir ein:

$$
\begin{aligned}
I_1^* &= I_1 + I_2 + I_3, & w_1^* &= w_1 \\
I_2^* &= \phantom{I_1 + {}} I_2 + I_3, & w_2^* &= w_2 - w_1 \\
I_3^* &= \phantom{I_1 + I_2 + {}} I_3, & w_3^* &= w_3 - w_2.
\end{aligned}
$$

Die Kontragredienzbedingung $\sum Iw = \sum I^* w^*$ ist hierbei erfüllt. In den neuen Variabeln wird die Energie einfach[148]

$$a_1 = L = -\frac{2\pi^2 me^4}{I_1{}^2}$$

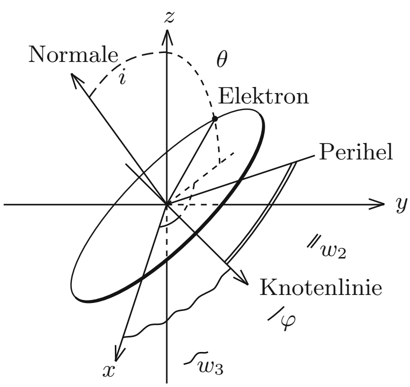
und die einzige Quantenbedingung lautet

$$I_1 = nh,$$

womit wir auf genau denselben Ausdruck zurückkommen, den wir bereits bei den reinen Kreisbahnen gefunden hatten. An der BALMERschen Formel wird also gar nichts durch unsere erweiterte Betrachtung geändert. Die Winkelvariable w_1, wird die mittlere Anomalie genannt, und ist der vom Radiusvektor überstrichene Flächeninhalt, geteilt durch den Flächeninhalt der ganzen Bahnellipse.

Die beiden anderen Paare von Variabeln I_2, w_2, I_3, w_3 werden durch die Quantenbedingung nicht berührt. Sie sind, falls keine | äusseren Störungen 78

[148] In the following two equations, "I_1" should be "I_1^*".



wirken, zeitlich konstant, und bestimmen die Gestalt und die Lage im Raum der Bahnellipse. Die hier eingeführten kanonischen Variabeln, die sogenannten DELAUNAYschen Elemente, werden sowohl in der Astronomie, wie auch in der Quantentheorie immer wieder gebraucht,
[89] und wir sollen deshalb |auch noch ihren Zusammenhang mit den geometrischen Bestimmungsstücken der Ellipsenbahn angeben. Siehe auch nebenstehende Figur. Es bedeute:

a die grosse Halbachse der Bahnellipse

ε die Excentrizität der Bahn

i der Winkel zur Bahnnormale und Polarachse.

Dann werden

$$I_1 = \sqrt{me^2a} = \sqrt{-\frac{2\pi^2me^4}{\text{Energie}}}$$

$$I_2 = \sqrt{me^2a(1-\varepsilon^2)} = \frac{1}{2\pi}\cdot\text{Drehimpuls}$$

$$I_3 = \sqrt{me^2a(1-\varepsilon^2)}\,\cos i = \frac{1}{2\pi}\cdot\text{Drehimpuls um Polarachse}$$

$w_1 =$ mittlere Anomalie

$w_2 =$ Länge des Perihels vom aufsteigenden Knoten

$w_3 =$ Knotenlänge, gemessen in der xy-Ebene von der x-Achse aus.

⟨Feinstruktur und Zeemaneffekt⟩

Bei der einfachen KEPLERbewegung sind I_1, I_2, I_3, w_2, w_3 konstant, während w_1 entsprechend dem 2. KEPLERschen Gesetz (Flächensatz) linear mit
[90] der Zeit wächst. Stören|de Kräfte bewirken im Allgemeinen, wenn sie zentralsymmetrisch sind, eine Drehung des Perihels, und falls sie eine axiale Symmetrie besitzen, eine Drehung der Bahnebene um die ausgezeichnete Achse,
79 eine Praecession, sodass | dann auch w_2 resp. w_3 eigentliche Winkelvariable werden, und auch I_2 bezw. I_3 zu quanteln sind, d. h. es wird dann ebenfalls die Form der Ellipse oder die Lage im Raum quantentheoretisch festgelegt.
Beispiele hierfür bieten einerseits die Relativitätskorrektion, die man erhält, wenn man die Abhängigkeit der trägen Masse von der Geschwindigkeit berücksichtigt, andererseits der ZEEMANNeffekt, der entsteht, wenn man ein

magnetisches Feld auf das strahlende Atom wirken lässt. Die beiden Probleme lassen sich mit ganz denselben Mitteln wie vorhin die einfache KEPLERbewegung behandeln. Man erhält dann unter Vernachlässigung einiger sehr kleiner Terme für die Energie unter Berücksichtigung der Relativitätskorrektion.

$$L = -\frac{2\pi^2 me^4}{I_1^2} - \frac{2\pi^4 me^8}{c^2}\left(\frac{4}{I_1^3 I_2} - \frac{3}{I_1^4}\right); \quad c = \text{Lichtgeschwindigkeit}$$

und für den ZEEMANNeffekt

$$L = -\frac{2\pi^2 me^4}{I_1^2} + \frac{eH}{4\pi mc} I_3; \quad H = \text{Feldstärke des Magnetfeldes.}^{\langle 149\rangle}$$

Wir sehen, in beiden Fällen tritt zu dem alten BALMERschen Term noch ein [91]
Zusatzglied hinzu, dass in beiden Fällen sehr klein ist, und im Spektrum, das man natürlich nach dem $h\nu$-Gesetz ausrechnen kann, nur eine kleine Aufspaltung, eine Feinstruktur der BALMERlinien bewirkt. Bei der Relat.-Korrektion kommt ausser I_1 nur noch I_2 vor, was sich mechanisch in einer Perihelbewegung der Bahn äussert, während I_3 und w_3 konstant sind, und daher die Bahnebene selbst fest bleibt. Beim ZEEMANNeffekt dagegen tritt I_3 und zwar nur I_3 auf, dem entspricht in Übereinstimmung mit einem Satz von LARMOR eine Bewegung der Knotenlinie, eine Praecession.[150]

⟨Quantelung von Systemen, deren Bahnkurven sich in trigonometrischer Form darstellen lassen⟩

([151] Bis jetzt haben wir nur solche Fälle betrachtet, bei denen eine Separation der Variabeln möglich war, und wir sahen, dass dann jede Separationskoordinate q_i nur von dem zugehörigen w_i abhing. Unsere Bedingung für

[149] In *Hilbert 1926/27** added:
"und für den Starkeffekt

$$H = -\frac{2\pi^2 \mu e^4}{J_1^2} \pm \frac{3\mathcal{E}^2 h^2}{8\pi^2 \mu e} J_1(J_1 - 2J_2 - J_3)$$

($\mathcal{E}$ = elektrische Feldstärke)"

[150] Added by Hilbert with pencil on the left hand page:
"Drittens kommt noch die Einwirkung eines elektrischen Feldes in Betracht (Stark-Effekt). ⟨Deleted: Abraham⟩. Dies liefert eine kompliziertere Störung, die eine andere einfache Entartung zur Folge hat: a_1 wird abhängig von I und $I_1 - 2I_2 - I3$ nämlich

$$\mathcal{H} = -\frac{2\pi me^4}{I_1^2} \pm \frac{3\mathcal{E}h^2}{8\pi^2 me} I_1(I_1 - 2I_2 - I_3)$$

also auch einfache Entartung. ($\mathcal{E}$ Elektrische Feldstärke)."
In *Hilbert 1926/27**, the following sentences were added:
"Beim Starkeffekt treten zwar sowohl J_2 als J_3 auf. Es bleibt aber noch eine Entartung bestehen, da wieder nur die lineare Kombination $J_1 - 2J2 - J3$ vorkommt."
The following material (until "Die bisherigen Entwicklungen ...", cf. note 154 below) is missing in *Hilbert 1926/27**.

[151] The bracket was added with pencil, there is no corresponding closing bracket. In the left margin, Hilbert wrote: "Weiter S. 82".

80 die| Möglichkeit einer Quantelung ist aber auch noch in einem zweiten viel umfassenderen und allgemeineren Fall erfüllt, und zwar dann, wenn ein System eine Lösung der Bewegungsgleichungen von folgender Form zulässt

$$\left.\begin{aligned} q_i &= q_i(w_1, \ldots, w_r, a_1, \ldots, a_r) \\ p_i &= p_i(w_1, \ldots, w_r, a_1, \ldots, a_r) \end{aligned}\right\} i = 1, \ldots, r. \tag{1}$$

wobei die q_i und p_i periodische Funktionen mit der Periode 1 der

$$w_i = \nu_i t + \beta^{\langle 152\rangle}$$

und die a_i und β_i die r Integrationskonstanten der Bewegungsgleichungen sind. Dabei ist noch zu fordern, dass sich die Gleichungen (1) eindeutig nach a_1 auflösen lassen sollen, d. h. dass eine Energiegleichung

$$L\left(\frac{\partial S}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_r}, q_1 \ldots q_r\right) = a_1$$

identisch in $a_2 \ldots a_r, w_1 \ldots w_r$ existiert. Wir können nämlich zeigen, dass sich immer unter diesen Voraussetzungen eine Lösung S der HAMILTON-JACOBIschen Differentialgleichung

$$L\left(\frac{\partial S}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_r}, q_1 \ldots q_r\right) = a_1 \tag{2}$$

finden lässt, die die verlangten Eigenschaften hinsichtlich der Additivperioden besitzt. Dies ist offenbar die Umkehrung unserer früheren Betrachtungen, denn wir fanden ja, dass die Integrale der Bewegungsgleichungen von Systemen, deren Quantrix solcherart beschaffen war, immer auf die Form von 1) gebracht werden konnten. Diese Systeme sind also in der Tat die allgemeinsten, die man mit den heutigen Hilfsmitteln behandeln kann. Der Beweis ist folgender: Unter unseren Voraussetzungen gibt es, wie wir gleich nachher zeigen werden, stets eine Funktion $S(w_1 \ldots w_r, a_1, \ldots, a_r)$, deren Ableitungen nach den w_i

$$\frac{\partial S}{\partial w_i} = \sum_k p_k \frac{\partial q_k}{\partial w_i} \tag{3}$$

81 sind, wenn wir für die p_i und q_i die Werte 1) nehmen. Diese Funktion S ist bereits unsere gesuchte Quantrix, denn führen wir in ihr an Stelle der w die q ein, so sehen wir, dass sie die Differentialgleichung 2) löst, da nämlich

$$\frac{\partial S}{\partial q_k} = \sum_i \frac{\partial S}{\partial w_i}\frac{\partial w_i}{\partial q_k} = \sum_{i,l} p_l \frac{\partial q_l}{\partial w_i}\frac{\partial w_i}{\partial q_k} = \sum_l p_l \frac{\partial q_l}{\partial q_k} = p_k$$

ist. Ausserdem hat sie die r-Additivperioden

$$I_i = \int_0^1 \frac{\partial S}{\partial w_i}\, dw_i = \int_0^1 \sum_k p_k \frac{\partial q_k}{\partial w_i}\, dw_i,$$

[152] "β" should be "β_i".

da wir ja die w_i direkt an Stelle unserer früheren Hilfsparameter s_i benutzen können. Die Quantenbedingungen lauten wieder wie früher

$$I_i = n_i h.$$

Es sei noch bemerkt, dass sich auch dem Fall der Entartung Rechnung tragen lässt.

Wir haben jetzt nurmehr zu zeigen, dass die Funktion $S(w_1 \dots w_r, a_1 \dots a_r)$, deren Ableitungen

$$\frac{\partial S}{\partial w_k} = \sum_i p_i \frac{\partial q_i}{\partial w_k}$$

sind, stets existiert. Hierzu ist hinreichend und notwendig, dass die Integrabilitätsbedingungen

$$\frac{\partial}{\partial w_i}\left(\frac{\partial S}{\partial w_k}\right) - \frac{\partial}{\partial w_k}\left(\frac{\partial S}{\partial w_i}\right) = 0$$

erfüllt sind. Diese Bedingungen können wir zunächst in der Form schreiben

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial w_i}\sum_l p_l \frac{\partial q_l}{\partial w_k} - \frac{\partial}{\partial w_k}\sum_l p_l \frac{\partial q_l}{\partial w_i} \\ &= \sum_l \left(\frac{\partial p_l}{\partial w_i}\frac{\partial q_l}{\partial w_k} - \frac{\partial p_l}{\partial w_k}\frac{\partial q_l}{\partial w_i}\right) = [w_k, w_i] = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Die $[w_k, w_i]$ sind die sogenannten LAGRANGEschen Klammersymbole. Zunächst können wir schliessen, dass die $[w_k, w_i]$ konstant sind. Denn es wird

$$\frac{d}{dt}[w_k, w_i] = \sum_l \frac{\partial}{\partial w_l}[w_k, w_i]\frac{dw_l}{dt} = \sum_l \nu_l \frac{\partial}{\partial w_l}[w_k, w_i] = 0. \tag{5}$$

Das letzte Glied lautet nämlich ausgerechnet 82

$$\begin{aligned} &\sum_l \nu_l \frac{\partial}{\partial w_l}[w_k, w_i] \qquad (6) \\ &= \sum_{l,m} \nu_l \left(\frac{\partial^2 p_m}{\partial w_k \partial w_l}\frac{\partial q_m}{\partial w_i} - \frac{\partial^2 p_m}{\partial w_i \partial w_l}\frac{\partial q_m}{\partial w_k} + \frac{\partial p_m}{\partial w_k}\frac{\partial^2 q_m}{\partial w_i \partial w_l} - \frac{\partial p_m}{\partial w_i}\frac{\partial^2 q_m}{\partial w_k \partial w_l}\right). \end{aligned}$$ [153]

Nun ist nach den kanonischen Gleichungen:

$$\frac{\partial L}{\partial p_i} = \dot{q}_i = \sum_l \frac{\partial q_i}{\partial w_l}\nu_l; \quad -\frac{\partial L}{\partial q_i} = \dot{p}_i = \sum_l \frac{\partial p_i}{\partial w_l}\nu_l.$$

[153] The indices k, i should be swapped on the right hand side.

Hieraus folgt durch Differentiation

$$\begin{aligned}\sum_l \nu_l \frac{\partial^2 q_i}{\partial w_l \partial w_m} &= \sum_l \left(\frac{\partial^2 L}{\partial p_i \partial q_l} \frac{\partial q_l}{\partial w_m} + \frac{\partial^2 L}{\partial p_i \partial p_l} \frac{\partial p_l}{\partial w_m} \right) \\ \sum_l \nu_l \frac{\partial^2 p_i}{\partial w_l \partial w_m} &= -\sum_l \left(\frac{\partial^2 L}{\partial q_i \partial q_l} \frac{\partial q_l}{\partial w_m} + \frac{\partial^2 L}{\partial q_i \partial p_l} \frac{\partial p_l}{\partial w_m} \right).\end{aligned} \tag{7}$$

Setzen wir diese Ausdrücke in (6) ein, so hebt sich rechts in der Tat alles weg, die $[w_k, w_i]$ sind also konstant. Infolgedessen gilt natürlich

$$[w_k, w_i] = \int_0^1 \int_0^1 [w_k, w_i]\, dw_k\, dw_i,$$

und dies ist nach (4)

$$= \int_0^1 \int_0^1 \left\{ \frac{\partial}{\partial w_i} \left(\sum_l p_l \frac{\partial q_l}{\partial w_k} \right) - \frac{\partial}{\partial w_k} \left(\sum_l p_l \frac{\partial q_l}{\partial w_i} \right) \right\} dw_k\, dw_i.$$

Hier können wir in jedem Glied eine Integration ausführen:

$$= \int_0^1 \sum_l p_l \frac{\partial q_l}{\partial w_k} \bigg|_{w_i=0}^{w_i=1} - \int_0^1 \sum_l p_l \frac{\partial q_l}{\partial w_i} \bigg|_{w_k=0}^{w_k=1}.$$

und diese Integrale verschwinden nun wegen der Periodizität der Integranden in w_i und w_k, so dass in der Tat die Bedingungen

$$[w_k, w_i] = 0$$

erfüllt sind.)

⟨Das Korrespondenzprinzip⟩

Die[154] bisherigen Entwicklungen gaben eine Theorie der stationären Zustände, die allein in der Quantentheorie möglich sind, und enthielten damit zugleich eine Theorie der Schwingungszahlen, denn zusammen mit dem $h\nu$-Gesetz erlauben sie es uns, diese vollständig zu berechnen. (Obgleich nun die Tragweite und die Fruchtbarkeit dieser Prinzipien eine sehr grosse war, so muss man sich dennoch stets vor Augen halten, dass)[155] die Theorie in diesem
[92] Zustand noch rein formaler Natur und | durchaus unfertig und unabgeschlos-
83 sen | ist. ([156]Wir sind dementsprechend von einem wirklichen Verständnis der

[154] At this point, *Hilbert 1926/27** sets back in again, cf. note 150 above.

[155] The brackets were added with pencil.

Vorgänge, der Elementarprozesse in den Atomen noch sehr weit entfernt, und erkennen bislang nur eine in sich geschlossene Reihe von Gesetzmässigkeiten, die wir zwar auf einige wenige Formeln bringen können, aber keineswegs zu deuten vermögen.) Dies tritt besonders klar hervor, wenn wir die quantentheoretische Auffassung mit der alten klassischen vergleichen. Nach der Quantentheorie bekommen wir, wie schon gesagt, durch die Festlegung der Quantenbahn und die Gesetze der Sprünge die Schwingungszahlen, die aber ihrerseits mit der Bewegung des strahlenden Elektrons zunächst nichts zu tun haben.[157] Die ältere elektrodynamische Theorie der Strahlungsvorgänge will und kann dagegen viel mehr liefern.[158] Nach ihr ist die Strahlung eines Elektrons direkt durch seine Bewegung bestimmt, und zwar bis in alle feinste Einzelheiten, d. h. mit Einschluss von Polarisation, Interferenzfähigkeit etc. und insbesondere ist die elektromagnetische Schwingungszahl direkt gleich der mechanischen. Diese beiden Auffassungen schienen zunächst unüberbrückbar. Dennoch existiert ein Grundgesetz, das zwar nicht über den gedanklichen Gegensatz hinweghilft, aber dennoch erklärt, wieso die alte Elektrodynamik eine so weitgehende Gültigkeit besitzen kann, und uns weiterhin zu einer neueren tieferen Erfassung der Quantentheorie führen wird. Dieses Grenzgesetz führt zu dem sogenannten *Korrespondenzprinzip*, zu dessen Besprechung wir jetzt übergehen.

⟨Korrespondenzprinzip zwischen Quantensprüngen und klassischer Strahlung⟩

Wir[159] untersuchen ganz allgemein ein beliebiges me|chanisches System, das [93]
unseren Bedingungen für die Möglichkeit einer Quantelung genügt, und dessen Bewegung sich dementsprechend mit Hilfe der Winkelvariablen w_k und
den Additivperioden der Quantrix I_k beschreiben | lässt. Die Energie L hängt 84
dann nur von den I_k ab, während sich die Lagekoordinaten q_k wegen der Periodizität in den w_k nach FOURIER entwickeln lassen. Für ein solches System macht nun die *klassische Elektrodynamik* folgende Aussage: Es sendet elektromagnetische Wellen aus, deren Schwingungszahlen sich aus den mechanischen

[156] The brackets were added with pencil. The sentence in brackets is missing in *Hilbert 1926/27**. At the top of page 83, Hilbert wrote with pencil: "Auf jeden Fall sind Ergänzungen nötig; denn bisher doch nur die Möglichkeit von elektromag. Schwingungen, nicht ihr wirkliches Auftreten postulirt." On the top of the left hand page, Hilbert added with pencil: "Bisher: 1.) Stationäre Zustände sind nur diese diskreten möglich, und 2.) *Wenn* Sprünge stattfinden, so findet die Emission bez. Absorption statt und zwar mit der betreffenden Energie (Energiesatz ist erfüllt)."

[157] The words "Bewegung des strahlenden Elektrons zunächst nichts zu tun haben" were underlined with pencil.

[158] On the left hand page, Hilbert wrote with pencil: "Hier S. 86 links!!!", cf. note 162 below.

[159] In the left margin, Hilbert wrote with pencil: "Wir wollen nun vergleichen!".

Grundschwingungen

$$\nu_k = \frac{\partial L}{\partial I_k}, \quad k = 1, \ldots, r.$$

linear und ganzzahlig zusammensetzen:

$$\nu_{\text{klass}} = \sum_k m_k \nu_k = \sum \frac{\partial L}{\partial I_k} m_k, \quad m_k = \text{ganze Zahlen.} \tag{I}$$

also die Kombinations- und Obertöne der klassischen Schwingungen, und zwar sind die Intensitäten der einzelnen Partialschwingungen durch die Amplitude der betreffenden mechanischen Schwingungen bestimmt,[D] also den Fourierkoeffizienten der Bewegung in dem Gliede

$$e^{i(\sum m_k \nu_k t + \delta)}.\langle 160\rangle$$

Ganz anders nach der Quantentheorie. Hier ist

$$\nu_{\text{quant}} = \frac{L'(I'_k) - L''(I''_k)}{h} = \frac{1}{h}\Delta L,$$

wobei der einfache Strich den Anfangs- und der doppelte den Endzustand kennzeichnen soll. Bei dem allgemeinen Quantensprung wird nun jedes I_k sich um einen bestimmten Betrag $\Delta I_k = \Delta n_k \cdot h$ ändern. Zerlegen wir nun diesen ganzen Quantensprung in eine Reihe von solchen, bei denen sich nur
[95] je ein I_k ändert, so können | wir schreiben

[D] Genauer, sie sind proportional $\nu^2_{\text{klass}} \cdot A$, wo A der betr. Fourierkoeffizient bedeutet.

[160] In *Hilbert 1926/27**, the words “also den Fourierkoeffizienten ...” were replaced by the following text:
“Die gesamte Energieaustrahlung eines Elektrons ⟨p. 94⟩ mit der Ladung $-e$ ist nämlich sehr genähert durch

$$dH = -\frac{2e^2}{3c^3}\ddot{w}\langle^2\rangle\, dt$$

gegeben, wo w den Ortsvektor des Elektrons darstellt. Haben wir insbesondere eine periodische Bewegung, also

$$w = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi i n \nu t}, \quad (a_{-n} = \overline{a_n})$$

so entfällt auf die n.te Oberschwingung mit der Frequenz $n\nu$ dabei im Mittel der Anteil

$$\overline{dH_{n\nu}} = \frac{4e^2}{3c^3}(2\pi n\nu)^4 |a_n|^2\, dt.$$

”

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}\Delta L = \frac{1}{h}\Big\{ & L(I_1', I_2', \ldots, I_r') - L(I_1'', I_2', \ldots, I_r') \\ & + L(I_1'', I_2', \ldots, I_r') - L(I_1'', I_2'', I_3', \ldots, I_r') \\ & + \ldots \\ & + L(I_1'', \ldots, I_{r-1}'', I_r') - L(I_1'', \ldots, I_{r-1}'', I_r'')\Big\} \\ = \frac{1}{h}\Bigg(& \sum_k \frac{\Delta L}{\Delta I_k}\Delta I_k\Bigg).\end{aligned}$$

Die $\frac{\Delta L}{\Delta I_k}$ sind richtige „partielle Differenzenquotienten". Nun ist ferner 85

$$\Delta I_k = h(n_k' - n_k'') = h\Delta n_k,$$

also endlich

$$\nu_{\text{quant}} = \sum_k \frac{\Delta L}{\Delta I_k}\Delta n_k. \tag{II}$$

Vergleichen wir nun diese Formel mit der klassischen I), so sehen wir, jeder mögliche quantentheoretische Strahlungsprozess entspricht einer klassischen Schwingung, wenn wir den „Oberton" $m_k \cdot \nu_k$ mit dem Quantensprung um Δn_k einserseits, und den Differentialquotienten $\frac{\partial L}{\partial I_k}$ mit dem Differenzenquotienten $\frac{\Delta L}{\Delta I_k}$ andererseits in Parallele setzen. Ja | noch mehr, wenn alle Δn_k klein [96] sind gegenüber den n_k selbst, also die Änderungen gegenüber dem Absolutwert, so verschwindet ja der Unterschied zwischen Differenzen- und Differentialquotient. D. h. aber klassische und quantentheoretische Schwingungszahlen stimmen für diesen Grenzfall überein.

⟨Die quantentheoretische Schwingungszahl als Mittelwert⟩

Falls nun diese Bedingung, Differenzen klein gegen die n_k selber, nicht erfüllt ist, so kann man doch immer noch die quantentheoretische Schwingungszahl als einen Mittelwert über die klassischen Schwingungszahlen zwischen der Anfangs- und Endbahn ansehen. Die erstere ist also gleich der mechanischen Frequenz einer Zwischenbahn. Dies ergibt sich folgendermassen. Es ist zunächst[161]

$$\nu_{\text{quant}} = \frac{L' - L''}{h} = \frac{1}{h}\int dL = \frac{1}{h}\int \sum_k \frac{\partial L}{\partial I_k}\, dI_k = \frac{1}{h}\int \sum_k \nu_k\, dI_k,$$

[161] On the left hand page, Hilbert wrote the following equations:

$$\nu_{\text{quant}} = \frac{\mathcal{H}' - \mathcal{H}''}{h} = \frac{1}{h}\int_0^1 \sum_k \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I_k}\frac{dI_k}{d\lambda}d\lambda$$

$$I_k = h\left\{{n_k}' + \lambda({n_k}'' - {n_k}')\right\} \qquad ({n_k}'' - {n_k}') = \Delta n_k$$

$$\nu_{\text{quant}} = \int_0^1 \sum \nu_k \Delta n_k d\lambda = \int_0^1 \sum \nu_k m_k d_\lambda$$

wobei die ν_k natürlich als Funktionen der I_k aufzufassen sind. Führen wir nun einen Hilfsparameter λ ein, und setzen

$$I_k = h[n'_k + \lambda(n''_k - n'_k)]; \quad dI_k = h\Delta n_k \, d\lambda,$$

so gelangen wir von der Anfangs- zur Endbahn, indem wir λ von 0 bis 1 gehen
86 lassen. Nehmen wir also λ als Integrationsvariable, so | wird

$$\nu_{\text{quant}} = \int_0^1 \sum \nu_k(\lambda)\Delta n_k \, d\lambda = \int_0^1 \sum \nu_k m_k \, d\lambda,$$

[97] also in der Tat ein Mittelwert über die klassischen Frequenzen.
Da nun die klassische Theorie für grosse I_k die Schwingungszahlen richtig liefert, so wird man schliessen, dass auch für die anderen Bestimmungsstücke der elektrischen Wellen, wie Intensität, Polarisation, Kohärenzdauer eine solche Korrespondenz besteht, und die Aussagen der klassischen Theorie über diese Grössen, die wir oben angaben, für richtig halten. Nur unter dieser Annahme kann man ja auch verstehen, wieso uns die alte Elektrodynamik im Grossen so gute Resultate liefert, es handelt sich dann eben immer um Vorgänge, mit ausserordentlich hohen Quantenzahlen. Aus Kontinuitätsgründen wird man diesen Schluss noch zu verallgemeinern suchen, und vermuten, dass auch für kleinere Quantenzahlen eine wenigstens näherungsweise Uebereinstimmung herrschen wird.[162] Diese Aussage stellt den eigentlichen fruchtbaren Kern des Korrespondenzprinzips dar, der über die formale Analogie hinaus es erlaubt, wirklichen Nutzen daraus zu ziehen. Natürlich lässt sich seine Richtigkeit nicht a priori beweisen, sondern muss durch die Erfahrung bestätigt werden, aber diese Prüfung hat bis jetzt immer eine glänzende Bestätigung des theoretischen Gedankens geliefert.

---

[162] The words "wenigstens näherungsweise" were underlined with pencil. The preceding sentences starting with the beginning of the paragraph were marked with a vertical line in the left margin and the following comment, written by Hilbert with pencil: "Die kl⟨assische⟩ Theorie nicht ganz falsch!". And on the left hand page, Hilbert wrote the following (cf. note 158):
"Die klassische Theorie besteht, soweit sie uns hier angeht, in Folgendem:
Wenn eine elektrische Ladung z. B. Elektron beschleunigt wird, so strahlt sie elektrische Energie in Wellenform aus und zwar sind die im Allgemeinen gleichzeitig ausgestrahlten Schwingungszahlen der ausgestrahlten Wellen mit der mech. Schwingungszahl übereinstimmend⟨e v?⟩. Zu ermitteln durch Fourier-Darstellung der Bewegung der Ladung. Entsprechend auch Polarisation durch die Bewegung zu berechnen. Dabei ist die ausgestrahlte Gesamtenergie, in der Zeit dt für alle Wellen zusammen

$$\frac{2e^2}{3c^3}|\text{Beschleunigung}|^2 dt$$

und zwar die einzelne Welle mit der Schwingungszahl ν:
„Wenn die Bewegung durch die Formel $\sum_n \gamma_n e^{2i\pi n\nu t} \langle , \rangle \quad a_{-n} = \overline{a}_n$ ⟨should be: $\gamma_{-n} = \overline{\gamma}_n$⟩ ($\gamma_n$ scalar oder vektoriell) gegeben, so ist die Energie der Strahlung von der Frequenz $n\nu$, die im Mittel während dt ausgestrahlt wird $\frac{64\pi^4 e^2}{3c^3}(n\nu)^4|\gamma_n|^2 dt$"
(Bei aperiodischer Bewegung Fourier Integral) In der Tat Beschleunigung $-\sum_n 4\pi^2(n\nu)^2 a_n e^{2i\pi n\nu t}$"

⟨Intensitätsberechnungen, Auswahlprinzipien⟩

(Ein Anwendungsbeispiel liefert die Berechnung der Intensität von Spektral-
linien. Nach der klassischen Theorie hängt sie, wie schon oben bemerkt, von
der Amplitute der betreffenden Partialschwingung in der Bewegung des Elek-
trons ab, und wir werden gemäss dem Korresponden⟨z⟩prinzip auch dasselbe
Intensitätsverhältnis für die korrespondierenden Quantensprünge annehmen.
Hier tritt nun eine gewisse | Schwierigkeit auf, da man nicht weiss, ob man für 87
die Amplitudenberechnung die Anfangs- oder die Endbahn, oder einen Mittel-
wert zu nehmen hat. Diese Willkür verschwindet aber z.B. falls eine bestimmte
Partialschwingung durchweg im ganzen Bewegungstypus fehlt. Dann ist ja die
Intensität der klassischen Schwingung gleich 0, und es erscheint hier als sehr
wahrscheinlich, und ist auch durchaus bestätigt worden, dass auch der ent-
sprechende Quantensprung fehlt. Die Intensitätsregel verschärft sich also zu
einem Auswahlprinzip. Ein Beispiel wäre der harmonische Oscillator. Seine
Bewegungsgleichungen lauten, wie wir früher abgeleitet hatten[163]

$$q = \sqrt{\frac{I}{2\pi^2 \nu m}}\, \sin 2\pi w = \sqrt{\frac{I}{2\pi^2 \nu m}}\, \sin 2\pi \nu t,$$

und wir sehen, dass hier keine Oberschwingung etwa mit der Frequenz $n \cdot 2\pi\nu$
$(n \neq 1)$[164] auftritt. Dem entspricht, dass auch nur ein Quantensprung um 1
und kein höherer möglich ist. Anders wird es erst, falls der Oscillator nicht
mehr rein harmonisch ist, sondern eine Abweichung von dem einfachen Kraft-
gesetz der Proportionalität mit der Entfernung vorhanden ist. Dann treten
auch Oberschwingungen und infolgedessen auch höhere Quantensprünge
auf.)[165]

Zum Schluss unserer Betrachtungen über das Korrespondenzprinzip, das sich, [98]
worauf wir aber nicht mehr eingehen können, sehr mannigfach anwenden lässt,
noch ein Hinweis auf die Verschiedenartigkeit der beiden durch es verknüpf-
ten Vorstellungsweisen. Klassisch strahlt ein Atom *gleichzeitig* alle die in ihm
steckenden Schwingungen und Oberschwingungen aus, nach der Quantentheo-
rie dagegen bei einem Quantensprung nur eine einzige Welle mit wohlbestimm-
ter Schwingungszahl und Energie; und die Verteilung der Intensität kommt nur
durch das Verhältnis der *Häufigkeiten* der entsprechenden Quanten|sprünge zu 88
stande. Diese beiden Auffassungen sind auch in der Grenze für grosse Quan-
tenzahlen unvereinbar, und die klassische Theorie liefert nur eine (Art)[166]
Statistik für die Quantensprünge, nach der also die Wahrscheinlichkeit eines
solchen von der Amplitude der korrespondierenden Potentialschwingung ab-
hängt. Dennoch ist diese Korrespondenz sicher kein Zufall, sondern begründet

[163] See p. 51 (this Volume, p. 554) above.

[164] "$(n \neq 1)$" was added with pencil.

[165] The brackets were added with pencil. In the left margin, Hilbert wrote a reader's sign (⊤). The preceding paragraph, i.e. the material in brackets is missing in *Hilbert 1926/27**.

[166] The brackets were added with pencil.

durch die Rolle der klassischen Strahlungstheorie als eine Kontinuumsapproximation an die diskontinuierliche Wirklichkeit.[167]

⟨Die Störungsquantelung⟩

⟨Entartete Systeme⟩

Wir kommen nun zum letzten Gegenstand der Vorlesung, der *Quantelung gestörter mechanischer Systeme.* Unsere Quantenvorschrift führte direkt zum Ziel, falls eine Separation der Variabeln gelang. Ferner konnten wir sie auch noch mit Erfolg anwenden in dem wesentlich allgemeineren Fall, dass die Lösungen der Bewegungsgleichungen sich in Form trigonometrischer Reihen darstellen lassen. Darüber hinaus aber konnten wir nicht gelangen, für allgemeine Fälle haben wir bislang keine brauchbare Quantenvorschrift. Für die praktische Anwendung der Quantentheorie wird es sich also in erster Linie darum handeln, auch für nicht separierbare Systeme die Lösungen in trigonometrischer Form zu finden. Dies ist auch ein altes Problem der Astronomie, und wenn es naturgemäss keine allgemeine Lösung zulässt, so hat man doch eine ganze Reihe von Verfahren finden können, die wenigstens brauchbare Reihenentwicklungen liefern. Unter diesen Methoden ist besonders eine für unseren Zweck geeignet, da sie gerade das liefert, was die Quantentheorie haben will, nämlich die Energie als Funktion der kanonischen Variabeln I. Daneben ist es sehr allgemein und relativ einfach. Es stammt von LINDSTEDT und POINCARÉ.[168] Für die Quantentheorie ist es in erster Linie von
89 BORN und PAULI zurechtgemacht worden, während der Gedanke, die Störungstheorie überhaupt zu verwenden, zuerst von BOHR gefasst und durchgeführt wurde.[169]

Wir nehmen an, wie wir es schon einmal an früherer Stelle taten, dass unser System aus einem bereits gelösten durch Hinzufügung störender Kräfte entsteht, dass also die Energie

$$L = L_0 + L^*$$

sei, wo L_0 die Energie des ungestörten Systems und L^* die Störungsfunktion bedeutet, dabei sollen die störenden Krafte ein Potential besitzen, also in L^* zunächst die $\dot{q}_i$ nicht auftreten. Unter dieser Annahme sind alle für das ungestörte Problem kanonisch konjugierte Variable auch für das gestörte noch

[167] The words “klassischen Strahlungstheorie als eine Kontinuumsapproximation” and “diskontinuierliche Wirklichkeit” were underlined with pencil. In the left margin, Hilbert wrote a reader’s sign (⊥). The first part of *Hilbert 1926/27** ends at this point.

[168] Anders Lindstedt (1854–1939). For historical discussion of Lindstedt’s work and Poincaré’s reception of it, see *Barrow-Green 1997*.

[169] *Born and Pauli 1922* and *Bohr 1918*. Born and Pauli refer to *Poincaré 1892ff*.

kanonisch konjugiert, da die $p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$ in beiden Fällen dieselben sind. Weiter nehmen wir an, das ungestörte Problem sei vollständig behandelt, und wir hätten bereits die zugehörigen Winkelvariabeln I_k^0, w_k^0 gefunden, die wir hier zur Unterscheidung mit den später aufzusuchenden Winkelvariabeln des gestörten Systems mit dem Index ^{0} versehen. Die Koordinaten q_i sind dann periodische Funktionen der w_i^0, und da L^* nur von den q_i abhängen soll, so wird es auch periodisch in den w_i^0. Ferner seien die störenden Kräfte klein gegen die schon im ungestörten System wirksamen, und die Störungsfunktion lasse sich demnach in eine Potenzreihe nach einem kleinen Parameter λ entwickeln

$$L^* = \lambda L_1 + \lambda^2 L_2 + \dots.$$

Dieser Parameter λ kann z. B. die Intensität eines schwachen angelegten äusseren Feldes bedeuten, sein Hauptzweck ist aber nur, in bequemer Weise die Grössenordnungen der auftretenden Glieder zu kennzeichnen, derart, dass man z. B. die Glieder mit λ^2 als klein ge|gen die Glieder mit λ ansehen kann. 90
usw. L_1, $L_2 \dots$ sind also periodische Funktionen der w_k^0, wobei natürlich ausserdem noch die I_k^0 beliebig auftreten können, während L_0 nur von den I_k^0 abhängt. Also ist

$$L = L_0(I_k^0) + \lambda L_1(I_k^0, w_k^0) + \lambda^2 L_2(I_k^0, w_k^0) + \dots.$$

Im gestörten System sind nun die I_k^0, w_k^0 nicht mehr Winkelvariable, aber es gelten immer noch für sie die kanonischen Gleichungen

$$\frac{dI_k^0}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial w_k^0}$$
$$\frac{dw_k^0}{dt} = \frac{\partial L}{\partial I_k^0}$$

und der Energiesatz

$$L(I_k^0, w_k^0) = a_1.$$

Für $\lambda = 0$ ist bereits alles erledigt, und die Quantenbedingungen lauten $I_k^0 = \nu_k h$. Die fundamentale Frage ist nun, ob sich auch für kleine Werte von λ unser System quanteln lässt. Offenbar ist sie im positiven Sinne beantwortet, wenn es gelingt, auch für das gestörte System Winkelvariable I_k, w_k einzuführen, die also die folgenden Eigenschaften haben müssen.

I) Sie sind kanonisch konjugiert, hängen also mit den I_k^0, w_k^0 durch eine kanonische Transformation zusammen.
II) Die ursprünglichen Lagekoordinaten q_k sollen auch in den w_k periodische Funktionen mit der Periode 1 sein.
III) L soll nur von den I_k abhängen.

Dann haben wir ja genau die früheren Verhältnisse wieder, die I_k werden Konstante und die Quantenbedingungen lauten $I_k = n_k h$. Unsere Aufgabe ist

also, eine kanonische Transformation zu suchen, die uns dies leistet. Hierfür müssen wir nun zwei wesentlich verschiedene Fälle unterscheiden: 1) Das un-
91 gestörte Problem ist nicht | entartet, d. h. alle I_k^0 kommen wesentlich in L_0 vor. 2) Das ungestörte Problem ist entartet, nicht alle I_k^0 kommen in L_0 vor. Der erste Fall ist der einfachere und eignet sich ausserdem zur Einführung in die Methode. Fall 2) dagegen erfordert noch eine besondere Betrachtung, ist aber von einer sehr grossen praktischen Bedeutung. Zunächst beschränken wir uns auf den 1. Fall.

Die Vorschrift für eine kanonische Transformation laute nun: Man nehme eine willkürliche Funktion $W(I_k, w_k^0)$ und setze

$$I_k^0 = \frac{\partial W(I_k, w_k^0)}{\partial w_k^0}, \quad w_k = \frac{\partial W(I_k, w_k^0)}{\partial I_k}.$$

Dann sind die I_k, w_k neue kanonische Variable. Um unsere Forderungen 1) und 2) zu erfüllen, setzen wir zunächst an

$$W = \sum I_k w_k^0 + \lambda W_1 + \lambda^2 W_2 + \dots, \tag{1}$$

wobei die $W_1, W_2, \dots$ periodische Funktionen der w_k^0 sein sollen. Es wird also

$$I_k^0 = \frac{\partial W}{\partial w_k^0} = I_k + \lambda \frac{\partial W_1}{\partial w_k^0} + \lambda^2 \frac{\partial W_2}{\partial w_k^0} + \dots, \tag{2}$$

für $\lambda = 0$ gehen also die neuen Variablen in die alten über. Forderung II ist erfüllt, da sich auch die w_k nur um periodische Funktionen von den w_k^0 unterscheiden. Die W_1, W_2 haben wir dann so zu bestimmen, dass auch der Bedingung III genüge geleistet wird. Dazu reicht offenbar auch schon hin, wenn bereits nach der Substitution $I_k^0 = \frac{\partial W}{\partial w_k^0}$ die Energiefunktion

$$L = L_0\left(\frac{\partial W}{\partial w_k^0}\right) + \lambda L_1\left(\frac{\partial W}{\partial w_k^0}, w_k^0\right) + \dots \tag{3}$$

von den w_k^0 unabhängig wird, und das lässt sich in der Tat erreichen. Zunächst führen wir die Entwicklung 2) ein

$$L = L_0\left(\left(I_k + \lambda \frac{\partial W_1}{\partial w_k^0} + \dots\right)\right) + \lambda L_1\left(\left(I_k + \lambda \frac{\partial W_1}{\partial w_k^0}\right), w_k^0\right). \tag{4}$$

Diesen Ausdruck können wir nun durch Entwicklung nach TAYLOR in jedem
92 einzelnen Glied in eine Potenzreihe nach λ umformen, und wenn | er von den w_k^0 unabhängig werden soll, so muss dies für die Faktoren jeder Potenz von λ für sich der Fall sein. Setzen wir also an

$$L = F_0(I_k) + \lambda F_1(I_k) + \lambda^2 F_2(I_k) + \dots$$

und vergleichen hiermit den durch Entwicklung von (4) erhaltenen Ausdruck, so erhalten wir die Bedingungen:

$$F_0(I_k) = L_0(I_k) \tag{5a}$$

$$F_1(I_k) = \sum_i \frac{\partial L_0}{\partial I_i}\frac{\partial W_1}{\partial w_i} + L_1(I_k, w_k^0) \tag{5b}$$

$$F_2(I_k) = \sum_i \frac{\partial L_0}{\partial I_i}\frac{\partial W_2}{\partial w_i^0} + \frac{1}{2!}\sum_{i,l}\frac{\partial^2 L_0}{\partial I_i \partial I_l}\frac{\partial W_1}{\partial w_i^0}\frac{\partial W_1}{\partial w_l^0} + \sum_i \frac{\partial L_1}{\partial I_i}\frac{\partial W_i}{\partial w_i^0} + L_2 \tag{5c}$$

$$\ldots$$

Aus diesen Gleichungen sind nun der Reihe nach $F_0, F_1, \ldots$ und $W_1, W_2, \ldots$ zu ermitteln. Dabei ist zu beachten, dass auf den rechten Seiten in den L und ihren Ableitungen bei ungeänderter Funktionsform die I_k^0 durch die I_k zu ersetzen sind.

Diese Bestimmung ist nun in der Tat möglich. Aus (5a) finden wir zunächst

$$F_0 + L_0(I_k).$$

In 5b) sind die I_k und mit ihnen alle von ihnen allein abhängige Grössen Konstante, während W_1 periodisch in den w_k^0 werden soll, und L_1 sowohl in den I_k, als auch von den w_k^0 abhängt, und in den letzteren ebenfalls periodisch ist. Wir zerlegen nun L_1 in einen rein periodischen Teil L_1' und $\overline{L}_0$ (z. B. wenn L_1 in der Form einer trigonometrischen Reihe gegeben ist, in das konstante Glied, und den Rest) der offenbar gleich dem Mittelwert von L_1 hinsichtlich der w_k^0 ist

$$L_1 = \int_0^1 \cdots \int_0^1 L_1 \, dw_1^0 \cdots dw_k^0$$

$$L_2 = \overline{L}_1 + L_1'.$$

In (5b) müssen nun offenbar die Konstanten und die periodischen Tei|le für sich 93
auf beiden Seiten einander gleich sein, so dass (5b) in die zwei Bedingungen

$$F_1 = \overline{L}_1 \tag{α}$$

$$\sum_i \frac{\partial L_0}{\partial I_i}\frac{\partial W_1}{\partial w_i^0} + L_1' = 0 \tag{β}$$

zerfällt. Aus (α) finden wir F_1, und zwar sehen wir: „Die Energie des gestörten Systems in erster Näherung, also $L_1 + \lambda F_1$ ist gleich der Energie des ungestörten Systems plus dem Mittelwert der Störungsfunktion über die ungestörte Bewegung.“ Diese für die praktische Anwendung in der Quantentheorie wichtigste Ergebnis stammt bereits von BOHR.

Wollen wir die Näherung weiter treiben, so müssen wir zunächst aus β W_1 berechnen. Dies gelingt auch sehr leicht folgendermassen. Wir wissen ja, dass L_1' rein periodisch ist, also sich als FOURIERreihe in den w_k' ohne konstantes Glied darstellen lässt. Schreiben wir noch für $\frac{\partial L_0}{\partial I_k}$ ν_k^0, so bekommt (β) die Form

$$\sum_i \nu_i^0 \frac{\partial W_1}{\partial w_i^0} = \sum_{m_1 \dots m_r} A_{m_1 \dots m_r} \, {\sin \atop \cos} \{m_1 w_1^0 + \cdots + m_r w_r^0\}, \tag{6}$$

wo die ν_k^0 und $A_{m_1 \dots m_r}$ bekannte Funktionen der I_k alleine sind. Man sieht leicht, dass sich diese Differentialgleichung durch

$$W_1 = \sum_{m_1 \dots m_r} \frac{A_{m_1 \dots m_r}}{m_1 \nu_1^0 + \cdots + m_r \nu_r^0} \; {\cos \atop -\sin} \{m_1 w_1^0 + \cdots + m_r w_r^0\},^{\langle 170 \rangle} \tag{7}$$

befriedigen lässt. Somit ist auch W_1 gefunden, und für die höheren Näherungen als bekannt anzusehen.

Unser Verfahren lässt sich ferner unbegrenzt fortsetzen. Alle weiteren Bestimmungsgleichungen sind von der Form

$$\sum_i \frac{\partial L_0}{\partial I_k} \frac{\partial W_l}{\partial w_k^0} = F_l + \Phi_l(I_k, w_k^0), \tag{8}$$

wo Φ_l eine bereits bekannte, in den w_k^0 periodische Funktion ist. Dies ist
94 aber eine Beziehung, die dieselbe Form hat wie Gleichung | (5b), und wir können sie also auf genau dieselbe Weise behandeln. Damit ist unsere Aufgabe vollkommen gelöst. Insbesondere lassen sich, da ja W und L gefunden worden sind, auch die mechanischen Bewegungen ermitteln, und wir sehen, dass die Störungen nur periodischen Charakter haben, da sich ja die I_k und w_k von den I_k' und w_k^0 nur um periodische Funktionen unterscheiden. Zum Schluss noch eine Bemerkung über die Bedeutung der Transformationsfunktion W. Sie ist nichts anderes als die Quantrix unseres Systems, da sie den Ausdruck (3) zu einer Konstanten macht. Dieser ist ja einfach die Energiefunktion, in der man I_k^0 durch $\frac{\partial W}{\partial w_k^0}$ ersetzt hat, also die Differentialgleichungen für die Quantrix. Aus (1) sieht man nun ohne Weiteres, dass unsere Quantrix gerade die richtige Form besitzt, und die I_k ihre Additivperioden sind.

Wir sehen, dass es für die eben durchgeführte Ueberlegung unumgänglich geworden war, vorauszusetzen, dass keinerlei Entartung vorliege, weil sonst in dem Ausdruck (7) für W_1 einige Nenner verschwinden. Bei den praktischen Anwendungen ist es aber die Regel, dass das Ausgangssystem entartet ist, da dies gewöhnlich die KEPLERellipse bildet. Wir müssen also unser Verfahren erweitern.

[170] Should be: ${-\cos \atop \sin}$.

⟨Entartete Systeme⟩

Wir nehmen also an, unser ungestörtes System sei entartet, dann können wir, wie wir gezeigt haben, es immer so einrichten, dass in L_0 einige I_k^0 nicht vorkommen. Zur Unterscheidung wollen wir die eigentlichen Winkelvariabeln des ungestörten Systems, d. h. diejenigen, die bereits ohne äussere Einflüsse eine von 0 verschiedene mittlere Bewegung besitzen, wie bisher mit w_k^0 resp. I_k^0 bezeichnen, die ausgearteten dagegen mit v_i^0; resp. K_i^0. Dabei möge der Index k alle Werte von $1 \ldots s$, i dagegen von $s+1$ bis r an|nehmen können. 95
Es seien also s eigentliche und $r-s$ uneigentliche Winkelvariable vorhanden. Die Energiefunktion soll also lauten

$$L = L_0(I_k^0) + \lambda L_1(I_k^0, w_k^0, K_i^0, v_i^0) + \lambda^2 L_2 + \ldots,$$

dieses L soll nun wieder durch geeignete Substitutionen von den w_k^0 und v_i^0 unabhängig gemacht werden.

Hierzu gehen wir in 2 Schritten vor. Im ungestörten System sind die v_i^0 zunächst konstant. Bilden wir nun gemäss 5b) für die erste Näherung den Mittelwert von L_1, $\overline{L}_1$ über die w_k^0 allein, so wird dieser Mittelwert auch von den v_i^0 abhängen. Im gestörten System sind aber die v_i^0 nicht mehr konstant, sodass unser altes Verfahren hier uns nichts nützt. Anders aber, wenn bei der Mittelung über die w_k^0 gleichzeitig die Abhängigkeit von den v_i^0 mit herausfällt, $\overline{L}_1$ also nurmehr von den I_k und K_i abhängt und infolgedessen konstant wird. Dann ist es offenbar auch jetzt noch geeignet, als erste Näherung für die Energie zu dienen. Berücksichtigen wir nämlich von L_1 nur diesen Teil, untersuchen also das mechanische Problem mit der Energiefunktion

$$L = L_0(I_k^0) + \lambda \overline{L}_1(I_k^0, K_i^0),$$

so sind für dieses sowohl die w_k^0, als auch die v_i^0 eigentliche Winkelvariable, wobei nur die mittleren Bewegungen der letzteren $\frac{dv_i^0}{dt} = \lambda \frac{\partial \overline{L}_1}{\partial K_i^0}$ proportional mit λ also den störenden Kräften sind. Wir werden also dieses System als Ausgangspunkt wählen können, und befinden uns dann wieder in derselben Lage wie vorhin, sodass man wieder auch die höheren Näherungen bestimmen kann, wobei man nur auf die Grössenordnung der einzelnen Glieder genau achtgeben muss.[E] Unser erster Schritt wird also der sein, zu versuchen durch eine geeignete Transformation zunächst die I_k^0, w_k^0, K_i^0, v_i^0 in neue | Variable 96
I_k, w_k, K_i, v_i überzuführen, derart dass der Mittelwert von L_1 hinsichtlich der w_k gleichzeitig auch von den v_i unabhängig wird.

Hierzu machen wir folgenden Ansatz für die Transformationsfunktion

$$T = \sum_1^s I_k w_k + T_0(I_k, K_i, v_i^0), \tag{9}$$

[E] Die Rekursion verläuft infolgedessen ein klein wenig anders.

wobei also T_0 von den w_k^0 unabhängig sein soll. Dann wird zunächst

$$I_k^0 = \frac{\partial T}{\partial w_k^0} = I_k, \quad w_k = \frac{\partial T}{\partial I_k} = w_k^0 + \frac{\partial T_0}{\partial I_k}.$$

Dabei ist zu bemerken, dass auch die w_k für das ungestörte Problem noch den Charakter von Winkelvariabeln haben, da in diesem die $\frac{\partial T_0}{\partial I_k}$ Konstante sind. Für die K_i und v_i gilt hingegen

$$K_i^0 = \frac{\partial T_0}{\partial v_i^0}, \quad v_i = \frac{\partial T_0}{\partial K_i}.$$

Führen wir nun diese Substitutionen aus, so soll $\overline{L}_1$ eine Konstante werden, also

$$\overline{L}_1\left(I_k, \frac{\partial T_0}{\partial v_i^0}, v_i^0\right) = F_1(I_k, K_i) = \text{const.} \tag{10}$$

d. h. T_0 soll so bestimmt werden, dass diese Bedingung erfüllt ist. Hier sehen wir nun das fundamentale Resultat: Dies ist eine partielle Differentialgleichung, und zwar vom HAMILTON-JACOBIschen Typus für ein mechanisches System von $r - s$ Freiheitsgraden,[F] da die I_k Konstante sind und für die K_i^0 und v_i^0 in dieser Näherung die Differentialgleichungen gelten

$$\frac{dK_i^0}{dt} = -\lambda \frac{\partial \overline{L}_1}{\partial v_i^0}, \quad \frac{dv_i^0}{dt} = \lambda \frac{\partial \overline{L}_1}{\partial K_i^0}, \tag{11}$$

und T_0 ist nichts anderes als die Quantrix dieses Systems. Die Differentialgleichungen (11) bestimmen die sogenannten saecularen Störungen der K_i^0; und v_i^0, und die Forderung (10) bedeutet nichts anderes, als dass wir für das Problem der saecularen Störungen Winkelvariable einführen sollen. Gelingt
97 uns dies, so ist alles erledigt. | Die K_i sind natürlich nun auch zu quanteln, so dass also neue Quantenbedingungen zu den alten hinzutreten. Die Durchführbarkeit dieses Verfahrens hängt natürlich von der Natur des Problems ab, und erfordert, dass eben T_0 die Eigenschaft der Additivperiodizität besitzt. Insbesondere sehen wir, dass wir immer zum Ziel kommen, wenn nur einfache Entartung vorliegt, da dann $r - s = 1$ ist, und wir es für die saecularen Störungen nur mit einem Freiheitsgrad zu tun haben. Für andere Fälle müssen auch diese eventuell mit Hilfe eines Näherungsverfahrens behandelt werden; jedenfalls sehen wir, dass ein Störungsproblem um so schwieriger wird, je mehr das Ausgangssystem entartet ist.

Zum Schluss noch eine prinzipielle Bemerkung: Unser Verfahren ist nicht konvergent im strengen mathematischen Sinn, und unsere Darstellung der Bewegung kann also nicht mit beliebiger Genauigkeit gelten. Dies liegt aber nicht so sehr am Verfahren, als an der Natur der Sache, weil eben im Allgemeinen

[F] Es sind also stets weniger als im ursprünglichen System, sodass seine Behandlung leichter ist, als die des alten.

auch für noch so kleine Störungen unsere Bedingungen für die Möglichkeit einer Quantelung nicht streng erfüllt sein kann.[171] An geeigneter Stelle abgebrochen liefert aber unser Verfahren eine Bahnkurve, die mit sehr grosser Genauigkeit die wirkliche approximiert, und wir werden annehmen, dass wir diese genäherte Bahn für die Energieberechnung benutzen dürfen, falls nur die Energiedifferenz kleiner ist, als die Breite der Spektrallinien. Die Schärfe der letzteren zeigt uns jedenfalls, dass die stationären Zustände in den Atomen scharf definiert sind, und solange man keine neuen Anhaltspunkte hat, muss man jedenfalls zusehen, wie weit unsere bisherigen Vorstellungen ausreichen.

[171] The problems Hilbert is dealing with here have been recognized later and led to the famous KAM theorem which plays a prominent role in chaos theory, see *Kolmogorov 1954*, *Arnol'd 1963*, and *Moser 1962*.

Description of the Text

Collection: Georg-August-Universität Göttingen, Mathematisches Institut, Inv. Nr. 16205p.

Size: Cover size 22.6 cm ×28.5 cm; page size approx. 22.4 cm ×28.0 cm.

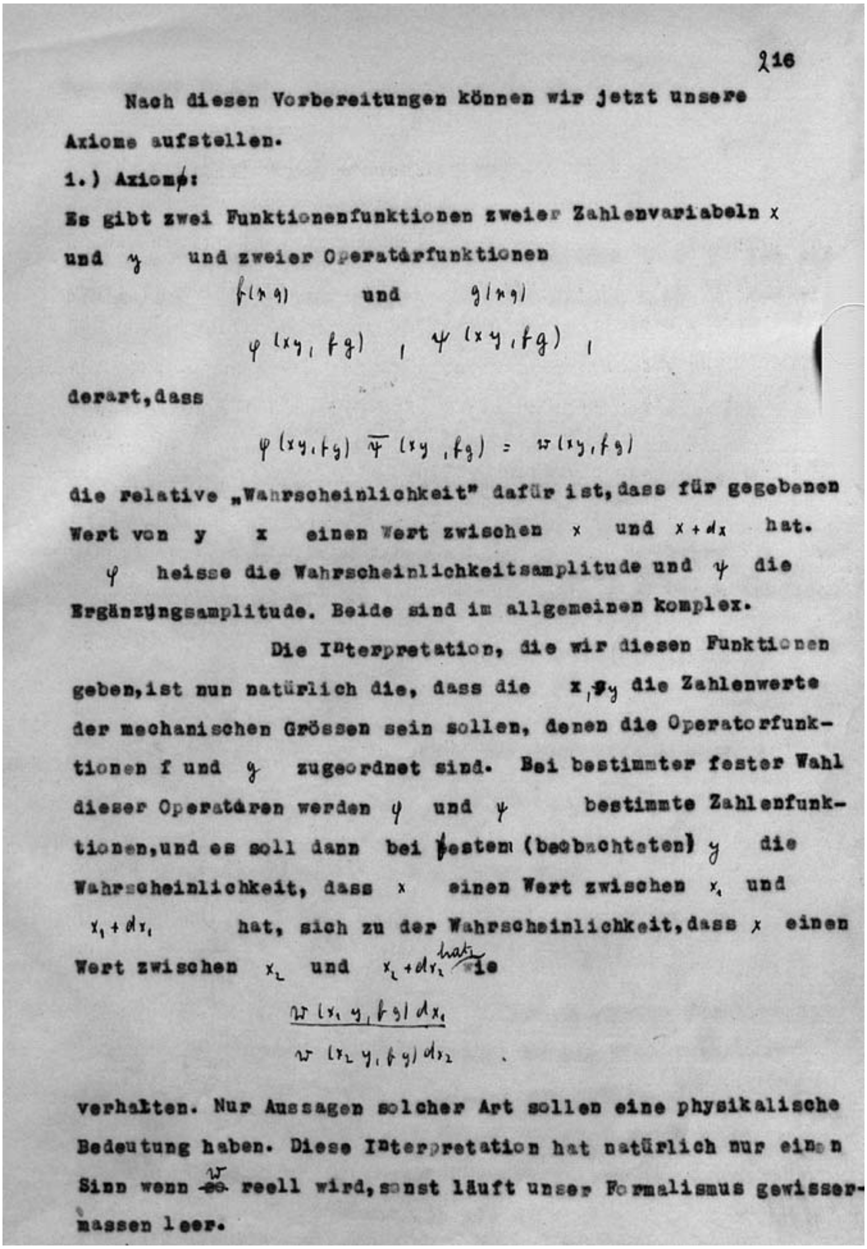
Cover Annotations: On the spine, in gold lettering, is the notation, 'Hilbert // Quanten // theorie // W.S. 1922-23'.

Composition: 7 signatures of 5 to 6 sheets each (double pages); in all 101 sheets, inclusive front- and end sheets.

Pagination: The title page is not numbered, the three following pages with the table of content are numbered with roman numbers (I to III). The following pages of the main text have been paginated with numbers from 1 to 97. From page 67 onwards the typewritten page numbers are all off by 10 and were corrected in black ink.

Original Title: On the title page: 'Mathematische Grundlagen der // Quantentheorie. // Vorlesung im W. S. 1922/23 // von // Geheimrat Prof. D. Hilbert. // Ausgearbeitet von L. NORDHEIM und G. HECKMANN.'

Text: Typewritten text with handwritten equations. The equations were added with ink. On the verso of page 68 a slip of paper (17,5 centimeters broad and 23 cm high) is glued on written by an unidentified hand. On the verso of page 101 (18 and 26 centimeters), another slip of paper is glued on with another unidentified handwriting. Hilbert made corrections and additions using pencil and coloured pencils. A revised version of the text was included as the first part of *Hilbert 1926/27**. Page numbers of this version are indicated in square brackets in the margin. Significant variations between the original version and the version of *Hilbert 1926/27** are annotated.



216

Nach diesen Vorbereitungen können wir jetzt unsere Axiome aufstellen.

1.) Axiom:

Es gibt zwei Funktionenfunktionen zweier Zahlenvariabeln x und y und zweier Operatorfunktionen

$$f(xg) \quad \text{und} \quad g(xg)$$

$$\varphi(xy, fg), \quad \psi(xy, fg),$$

derart, dass

$$\varphi(xy, fg)\,\overline{\psi}(xy, fg) = w(xy, fg)$$

die relative „Wahrscheinlichkeit" dafür ist, dass für gegebenen Wert von y x einen Wert zwischen x und $x + dx$ hat.

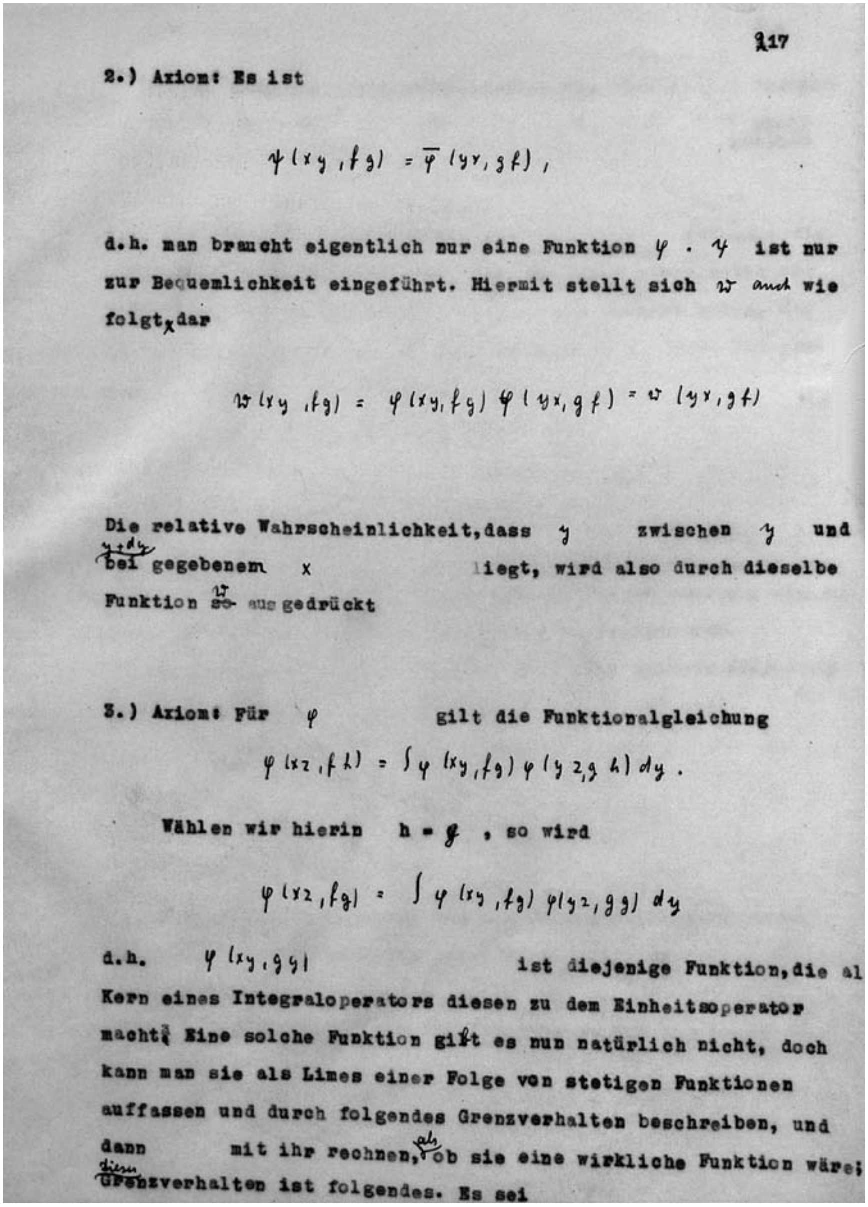
φ heisse die Wahrscheinlichkeitsamplitude und ψ die Ergänzungsamplitude. Beide sind im allgemeinen komplex.

Die Interpretation, die wir diesen Funktionen geben, ist nun natürlich die, dass die x, y die Zahlenwerte der mechanischen Grössen sein sollen, denen die Operatorfunktionen f und g zugeordnet sind. Bei bestimmter fester Wahl dieser Operatoren werden φ und ψ bestimmte Zahlenfunktionen, und es soll dann bei festem (beobachteten) y die Wahrscheinlichkeit, dass x einen Wert zwischen x_1 und $x_1 + dx_1$ hat, sich zu der Wahrscheinlichkeit, dass x einen Wert zwischen x_2 und $x_2 + dx_2$ hat, wie

$$\frac{w(x_1 y, fg)\,dx_1}{w(x_2 y, fg)\,dx_2}.$$

verhalten. Nur Aussagen solcher Art sollen eine physikalische Bedeutung haben. Diese Interpretation hat natürlich nur einen Sinn wenn ~~es~~ w reell wird, sonst läuft unser Formalismus gewissermassen leer.

Facsimile of p. 216 of Hilbert's lecture on *Mathematical Methods of Quantum Theory* (*Hilbert 1926/27**).



217

2.) Axiom: Es ist

$$\varphi(xy, fg) = \overline{\psi}(yx, gf),$$

d.h. man braucht eigentlich nur eine Funktion φ. ψ ist nur zur Bequemlichkeit eingeführt. Hiermit stellt sich w auch wie folgt dar

$$w(xy, fg) = \varphi(xy, fg)\,\varphi(yx, gf) = w(yx, gf)$$

Die relative Wahrscheinlichkeit, dass y zwischen y und $y+dy$ ~~bei~~ gegebenem x liegt, wird also durch dieselbe Funktion w ~~so~~ ausgedrückt

3.) Axiom: Für φ gilt die Funktionalgleichung

$$\varphi(xz, fh) = \int \varphi(xy, fg)\,\varphi(yz, gh)\,dy.$$

Wählen wir hierin h = g, so wird

$$\varphi(xz, fg) = \int \varphi(xy, fg)\,\varphi(yz, gg)\,dy$$

d.h. $\varphi(xy, gg)$ ist diejenige Funktion, die al[s] Kern eines Integraloperators diesen zu dem Einheitsoperator macht. Eine solche Funktion gibt es nun natürlich nicht, doch kann man sie als Limes einer Folge von stetigen Funktionen auffassen und durch folgendes Grenzverhalten beschreiben, und dann mit ihr rechnen, als ob sie eine wirkliche Funktion wäre; dieses Grenzverhalten ist folgendes. Es sei

Facsimile of p. 217 of Hilbert's lecture on *Mathematical Methods of Quantum Theory* (*Hilbert 1926/27**).

Mathematische Methoden der Quantentheorie

Inhaltsverzeichnis

I. Die ältere Quantentheorie.[1]

[1]Except for the "Einleitung", the text of the first part of this lecture course is a revised version of the lecture course of *Hilbert 1922/23a**, see this volume pp. 507–601, where page numbers in square brackets refer to the revised version and significant modifications between the two versions are pointed out in the annotation.

I. Die neue Quantenmechanik.

⟨I. Die ältere Quantentheorie⟩

⟨Einleitung⟩

1 Unter den Gedankengebäuden, die wir in den mathematischen Wissenschaften antreffen, ist eines vor Allen ausgezeichnet, durch seinen *Umfang* und seine *Ausdehnung* d. i. das Gedankengebäude der theoretischen Physik. Mit der Fortentwicklung der Wissenschaft geht Hand in Hand auch der Ausbau der Gedankengebäude. Die Verketttung der Begriffe und die Begriffe selbst verwandeln sich. Betreffs der theoretischen Physik liegen hier die Verhältnisse recht *merkwürdig*:[2] Es hat lange Zeiten gegeben, wo man die theoretische Physik im wesentlichen in ihren Grundlagen als *abgeschlossen* ansah z. B. in der Periode der klassischen Mechanik. Boltzmann und Kirchhof wäre es nie in den Sinn gekommen, zu glauben, dass ihre Mechanik nicht genau so richtig sein möchte. Und ähnlich war es in der durch Maxwell begonnenen Periode der klassischen Elektrodynamik, die in der Tat alle damals bekannten elektrischen und magnetischen Erscheinungen erklärte und ebenso wie die klassische Mechanik ein in sich abgeschlossenes, *widerspruchsfreies* Lehrgebäude ausmachte. Von zwei ganz verschiedenen Seiten aus wurden in neuerer Zeit diese Lehrgebäude *heimgesucht*.

1.) durch die Einsteinsche Relativitätstheorie
2.) durch die seit Plancks Entdeckung immer ernsthafter und schwerer lastende sogenannte Quantentheorie.

Charakteristisch für diese Eingriffe ist, dass Mechanik und Elektrizitätstheorie
2 bisher nicht zu einem einheitlichen Ab|schlusse kommen konnten, vielmehr die theoretische Physik sich gegenwärtig in einem offensichtlichen Zustande der *Unfertigkeit* befindet. Für den jungen Lernenden und Strebenden hat dieser Zustand einen eigenen Reiz; wir glauben so sicher an die Einheit in der Natur, dass wir nicht die Dauerhaftigkeit dieses Zustandes annehmen. Vielleicht dauert es nur kurze Zeit, bis er beseitigt sein wird. Zweck meiner Vorlesung ist es nun, Sie hier an die Grenzen unseres Wissens hinzuführen und so vorzubereiten, dass Sie für die neuen, zu erwartenden Entdeckungen offenstes Verständnis haben.

Bei einer *physikalischen* Theorie ist stets der *physikalische* Inhalt, der *physikalische* Gedankenkomplex das Wesentliche. Die Mathematik spielt nur die Rolle eines Hilfsmittels. Trotzdem, ja gerade deshalb ist aber die genaue Kenntnis, die Herrschaft über die mathematischen Hilfsmittel notwendig. In der theoretischen Physik wird die *gesamte* mathematische Analyse herangezogen, aber im Mittelpunkt steht die Theorie der *Differentialgleichungen*. Es sind aber *nicht beliebige Differentialgleichungen*, die die Hauptrolle spielen, sondern

[2] In the left margin, Hilbert added a reader's sign (⊤) and wrote with pencil: "In der Einleitung zu Anfang dieser Vorles. hatte ich schon darauf hingewiesen, dass es mehrmals in der Physik Zeiten ..."

– das ist ein Faktum – meist eine gewisse Klasse von Differentialgleichungen,[3] nämlich die aus *Varationsproblemen* entspringenden.

Ohne Kenntnis der Grundprinzipien und der wichtigsten Technik der *Variationsrechnung* kann man heute in der theoretischen Physik nicht auskommen. Es wird sich daher für mich hier zunächst darum handeln, diese so kurz und präzise wie möglich auseinander zu setzen. Dazu werden wir im Hinblick auf den Endzweck nur eine bestimmte Auswahl aus dem so grossen Gebiete heranziehen.

⟨...⟩[4]

⟨II. Die neue Quantenmechanik⟩

⟨Matrizenmechanik⟩

⟨Die Matrix der Eigenschwingungen eines Atoms⟩

Im Mittelpunkt unserer bisherigen Entwicklungen standen die beiden funda- 101
mentalen Axiome der älteren Quantentheorie, nämlich

1.) die Quantelungsbedingungen und
2.) die Bohrsche Frequenzbedingung.[5]

Wir sind zu ihnen durch die Natur, d. h. das Experiment gelangt, und zwar eigentlich zu unserem Erstaunen, da sie in krassem Gegensatz zu der alten klassischen Theorie stehen. – Aber neben diesem Erstaunen bemerken wir weiter, dass sie jedenfalls einer Ergänzung bedürfen. Es fehlt im Grunde noch jede Existenzbehaupung, wann und unter welchen Bedingungen nämlich unsere Quantenprozesse eintreten. Auf einen Weg wurden wir hier gewiesen durch das Korrespondenzprinzip. Wir zeigten, dass die quantentheoretischen Frequenzen stets einen Mittelwert zwischen den mechanischen Frequenzen des Anfangs- und Endzustandes bilden, die in der Grenze für grosse Quantenzahlen sich immer mehr einander angleichen. Dieses Korrespondenzprinzip für die Frequenz legt auch ein solches für die Amplituden nahe, und man hat zunächst vermutet, dass in Wirklichkeit auch eine Energie ausgestrahlt wird, die zwischen den entsprechenden klassischen Werten des Anfangs- und Endzustandes liegt. Diese Vermutung ist heuristisch sehr nützlich gewesen. Da

[3] In the typescript, all three occurences of “Differentialgleichungen” in this paragraph were corrected with pencil from “Differentialgliederungen,” a number of similar corrections (e.g. “Faktum” vs. “Faktor”) are found throughout the typescript. This suggests that the typing of the manuscript was not done by Nordheim himself.

[4] For the text of pages 3–98, see *Hilbert 1922/23a**, this Volume pp. 507–601.

[5] In *Hilbert 1922/23a**, p. 47, the second postulate was attributed to Einstein, see this Volume, p. 551.

nach der Quantentheorie die Intensität der Strahlung durch die Häufigkeit der Sprünge bestimmt wird, so können wir auch sagen, dass die Koeffizienten der Fourierreihe, die die Bewegung darstellt, ein Mass für die quantentheoretische Wahrscheinlichkeit der Sprünge liefern. Da nun eine solche Fourrierreihe für den Anfangs- und für den Endzustand besteht, so tritt hier eine charakteristische Zweideutigkeit auf, die man auch nicht etwa durch die Forderung beseitigen kann, dass die wahre Intensität gleich einem Mittelwert der beiden klassisch berechneten Werte für Anfangs- und Endzustand sein soll, da über
102 die Art | dieses Mittelwertes keinerlei Aussage gemacht werden kann.

In diesem unfertigen und unbefriedigenden Zustand verharrte die Quantentheorie lange Zeit, bis vor kurzem die neue Entwicklung der Quantenmechanik einsetzte, zu der Heisenberg den Anstoss gab. Die weitere Entwicklung und mathematische Durchdringung wurde dann von Born u. Jordan und (teilweise) unabhängig von diesen von Dirac[6] gegeben. Zu ihrer Darstellung wollen wir jetzt übergehen. Man gelangt zu ihr, indem man versucht, eine Theorie aufzubauen, die wirklich nur die physikalisch wesentlichen Grössen enthält.

In der klassischen Mechanik kann jede periodische Bewegung z. B. die Bewegung eines Elektrons um seinen Kern dargestellt werden durch eine Fourierreihe

$$q = \sum_n q_n e^{2\pi i n\nu t}, \qquad q_{-n} = \overline{q_n},$$

wobei die einzelnen Frequenzen ganze Vielfache einer Grundfrequenz sind. Dieser Bewegung würde, wie schon früher gesagt, nach der klassischen Elektrodynamik eine Ausstrahlung aller dieser Oberfrequenzen entsprechen, wobei die auf jede Frequenz entfallende Energie-Ausstrahlung im Mittel

$$dE = \frac{4e^2}{c^3}(2\pi n\nu)^4 |q_n|^2 \, dt$$

ist. Quantentheoretisch "korrespondiert" diesem Vorgang die Aussendung eines Spektrums, z. B. des "Balmerspektrums" mit den Frequenzen

$$\nu_{nm} = R\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right), \qquad m = n+1, n+2, \ldots,$$

wobei jede Linie mit einer ganz bestimmten Intensität ausgestrahlt wird. Es entspricht also der klassischen Fourrierreihe eine Gesamtheit von Grössen

$$q_{nm} e^{2\pi i \nu_{nm} t},$$

wobei der erste Index den (zunächst festgehaltenen) Anfangszustand, der zweite alle möglichen Endzustände kennzeichen soll, in die das System übergehen kann.

103 (Allerdings hat es unmittelbar keinen Sinn, diese einzelnen Glieder als Summe

[6] Added by Hilbert with pencil: "u. Schrödinger". The brackets were added with pencil.

zusammenzufassen und etwa

$$q_n = \sum_m q_{nm} e^{2\pi i \nu_{nm} t}$$

als Lagenangabe für das Elektron in dem n.ten stationären Zustand aufzufassen, denn einerseits werden ja die verschiedenen Linien im Gegensatz zu der klassischen Theorie von verschiedenen Atomen ausgesandt, und andererseits würde die klassische Zerlegung einer periodischen Bahn stets eine gewöhnliche Fourrierreihe liefern.

Gleichwohl sind aber) die Grössen q_{nm} und ν_{nm}[7] charakteristisch für alle Eigenschaften des Atoms, denn sie bestimmen seine Reaktion mit der Umgebung. Sie sind ja die Frequenzen der elektromagnetischen Wellen, die es emittieren oder absorbieren kann, sowie die “Amplituden”, die ein Mass für die Stärke, d. h. die Intensität dieser Emissions- oder Absorptionsatome bilden (und sind damit die einzigen Grössen, die uns Kunde von dem inneren Aufbau der Atome geben. Alles andere, wie die genauen Orte der Elektronen in jedem Augenblick, die Phasen usw. sind in keiner Weise bis jetzt direkt beobachtbar.)[8]

Ziehen wir nun noch alle möglichen Ausgangszustände in Betracht, so ist das Atom hiernach repräsentierbar durch ein zweidimensionales Schema von Grössen

$$\left(q_{mn} e^{2\pi i \nu_{nm} t}\right) = \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} e^{2\pi i \nu_{12} t} & \dots \\ q_{21} e^{2\pi i \nu_{21} t} & q_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \mathbf{q}, \langle 9 \rangle$$

das wir allgemein als eine Matrix bezeichnen. Dabei ist es unsere grundlegende Annahme,[10] dass alle Frequenzen sich als Differenzen einer Reihe von Termen W_n darstellen lassen. Es gilt also stets

104 $$\nu_{nm} = -\nu_{mn} = \frac{1}{h}(W_n - W_m)$$

$$\nu_{nk} + \nu_{km} = \nu_{nm}.$$

[7] Added with pencil: “sind”, also the brackets were added with pencil.

[8] The brackets were added with pencil. In the left margin, Hilbert wrote a reader’s sign (⊤).

[9] “$= \mathbf{q}$” was added by Hilbert. In the left margin, Hilbert wrote with pencil:

$$q_{mn} = a_{mn} e^{2i\pi\nu_{nm}}$$
$$q_{mn} = \overline{q_{nm}}$$
$$\nu_{mn} = -\nu_{nm}, \quad \nu_{nn} = 0$$

[10] “Annahme” was corrected by Hilbert with pencil from “Erfahrung”.

Dabei bedeutet positives ν Emission, negatives Absorption. Dies ist das Kombinationsprinzip, das schon lange vor der Quantentheorie von Ritz aufgefunden wurde.[11]

⟨Der Grundgedanke der Matrizenmechanik⟩

Wir nehmen nun an, dass alle mechanischen Grössen auf diese Weise vermittels der Frequenzen und entsprechenden Amplituden als Matrizen darzustellen sind, also nicht nur die Koordinaten q_k sondern auch z. B. die Impulse p_k und die Energie H, und es soll dann mit ihrer Hilfe eine Mechanik aufgestellt werden, die sich so eng wie möglich an die klassische Mechanik anschliesst. (Das bedeutet, dass man die Vorschriften auffinden soll, die es erlauben, aus dem zu Grunde gelegten Modell (z. B. Kern plus Elektron unter Einwirkung der Coulombschen Anziehung) die Matrizen, die den Koordinaten entsprechen, zu berechnen. Ob dann unsere so gewonnene Quantenmechanik der Wirklichkeit entspricht, kann nur das Experiment zeigen, indem die berechneten Frequenzen und Amplituten mit den beobachteten verglichen werden. Sie hat sich in der Tat glänzend bewährt.

Es entspricht dabei die Auffindung der Koordinatenmatrix q_{nm} und der W_n, also der ν_{nm}, die vollständige klassische Integration der Bewegungsgleichungen, d. h. die Auffindung der q_k als Funktionen der Zeit und aller Integrationskonstanten, d. h. die Bestimmung aller überhaupt möglichen Bewegungsformen des Systems, denn es sind durch die Matrix auch alle überhaupt möglichen Strahlungsvorgänge erfasst. Was in einem konkreten Fall dann wirklich geschieht, hängt naturgemäss noch von "Anfangsbedingungen" ab, d. h. man muss wissen, wieviel Atome sich in einem bestimmten Zustand befinden. Dann kann man die von ihnen ausgesandte Strahlung berechnen.)[12]

105 Zunächst müssen wir die Rechenregeln der Matricen aufsuchen. | (Wir gelangen zu ihnen, indem wir fragen, was jedesmal dem Rechnen mit Fourierreihen entspricht. So werden wir dann stets den asymptotischen Anschluss an die alte Mechanik erreichen, da ja für grosse Quantenzahlen nach dem Korrespondenzprinzip die Glieder der Matrizen gleich denen der entsprechenden klassischen Fourierreihen werden.

Diese Theorie gilt also zunächst nur für Systeme, die sich durch solche Matrizen beschreiben lassen, die also in der alten Mechanik mehrfach periodisch wären. Es sei aber schon hier bemerkt, dass sie sich in naturgemässer Weise auf beliebige Systeme verallgemeinern lässt, im Gegensatz zur alten Quantenmechanik.

[11] *Ritz 1908*. Walter Ritz (1878–1909) had been *Privatdozent* in Göttingen from 1908 until his early death in 1909.

[12] This bracket and the corresponding opening one were added with pencil.

Für unsere Matrizen müssen wir jetzt von vornherein noch eine Einschränkung machen,[13] nämlich dass

$$q_{nm} = \overline{q_{mn}}$$

ist, wobei der Strich den konjugiert komplexen Wert angeben soll. Dies entspricht der klassischen Forderung, dass für eine reelle Bewegung, die durch

$$q = \sum_m q_m e^{2\pi i m\nu t}$$

dargestellt wird,

$$q_m = \overline{q_{-m}}$$

sein muss. Man nennt Matrizen, die der obigen Bedingung genügen, hermitisch.)[14] Es bedeutet die[15] Forderung, dass die der Matrix zugeordnete quadratische Form

$$\sum_{mn} q_{mn} x_m \overline{x_n},$$

wo die x_n ein beliebiges System komplexer Grössen sein dürfen, reell werden soll, denn es ist dann eben

$$\sum_{mn} q_{mn} x_n \overline{x_m} = \sum_{nm} \overline{q_{nm}}\ \overline{x_n} x_m = \sum_{nm} \overline{q_{nm}}\ \overline{x_m} x_n.$$

(Jene Form erhalten wir formal, indem wir

106 $$x_n = e^{2\pi i \frac{W_n}{h} t}$$

setzen. Da als Intensitäten nur die Quadrate der absoluten Beträge der q_{mn} erscheinen, so treten also doch noch eine Art Phasen in den Matrizen auf, die zwar bis jetzt nicht direkt beobachtet werden können, aber nötig sind, um ein Rechnen mit den Matrizen zu ermöglichen.

⟨Hermitesche Matrizen⟩

Solche Matrizen sind ja dem Mathematiker wohlbekannt. Sie stellen eine Art höherer komplexer Zahlen in einem Raume von unendlich viel Dimensionen dar, und auch die Rechengesetze, zu denen wir jetzt übergehen, sind ganz analog dem, was sonst in der Mathematik üblich ist.

Zur Verdeutlichung wollen wir noch das Uebereinkommen treffen, Matrizen selbst fett zu schreiben, zum Unterschied von ihren Komponenten und gewöhnlichen Grössen. Natürlich haben auch alle Matrizen, die sich auf Grössen eines Atoms beziehen, dieselben W_n bzw. ν_{nm}.)[16]

[13] "Einschränkung machen" was corrected by Hilbert with pencil to "Bedingung einfügen".

[14] The brackets were added with pencil.

[15] Added with pencil: "obige".

[16] The brackets were added with pencil.

Wir wollen uns dabei zunächst auf Systeme mit einem einzigen Freiheitsgrad beschränken, sodass wir nur eine Koordinate q haben, und alle entsprechenden klassischen Grössen auch nur von einer Quantenzahl abhängen.

⟨Addition und Multiplikation⟩

Zunächst[17] definieren wir die Addition. Seien

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= \left(a_{nm}e^{2\pi i\nu_{nm}t}\right)\\ \mathbf{b} &= \left(b_{nm}e^{2\pi i\nu_{nm}t}\right)\end{aligned}$$

zwei Matrizen, so ist offenbar für

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} = \left((a_{nm} + b_{nm})e^{2\pi i\nu_{nm}t}\right)$$

zu setzen. D. h. die Glieder einer Matrixsumme sind gleich der Summe der entprechenden Glieder der Einzelmatrizen. Diese Regel erfüllt alle Axiome der gewöhnlichen Addition.

$$\begin{aligned}\mathbf{a} + \mathbf{b} &= \mathbf{b} + \mathbf{a} && \text{(kommutatives Gesetz)}\\ (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} &= \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) && \text{(associatives Gesetz).}\end{aligned}$$

107 (Die klassische Multiplikation zweier Fourierreihen

$$a = \sum_n a_n e^{2\pi i n\nu t}, \qquad b = \sum_m a_m e^{2\pi i m\nu t}$$

würde liefern

$$\begin{aligned}ab &= \sum_{nm} a_n b_m e^{2\pi i(n+m)\nu t} = \sum_n c_n e^{2\pi i n\nu t}\\ c_n &= \sum_m a_m b_{n-m} = \sum_m a_{n-m} b_m,\end{aligned}$$

wobei offensichtlich $ab = ba$ ist. Haben wir nun statt dessen Matrizen, so ist nach dem Kombinationsprinzip

$$\nu_{nk} + \nu_{km} = \nu_{nm},$$

und es ist der einzig rationelle Weg, die Glieder, wie folgt zusammenzufassen)[18]

$$\begin{aligned}\mathbf{ab} = \mathbf{c} &= \left(c_{nm}e^{2\pi i\nu_{nm}t}\right) && \text{(I)}\\ c_{nm} &= \sum_k a_{nk} b_{km}.\end{aligned}$$

[17] In the left margin with pencil: "bis S. 114".

[18] The brackets were added with pencil. In the left margin, there is a reader's sign (⊤).

Diese Regel ist wieder wohl bekannt, denn es ist dieselbe, wie bei den Determinanten und Matrizen der Algebra, "Zeile mal Kolonne". Sie genügt den Axiomen:

$$\begin{aligned} (\mathbf{ab})\mathbf{c} &= \mathbf{a}(\mathbf{bc}) && \text{(associatives Gesetz)} \\ \mathbf{a}(\mathbf{b}+\mathbf{c}) &= \mathbf{ab}+\mathbf{ac} && \text{(distributives Gesetz)} \\ (\mathbf{a}+\mathbf{b})\mathbf{c} &= \mathbf{ac}+\mathbf{bc}. \end{aligned} \tag{II}$$

Dagegen,[19] und das ist der springende Punkt, ist das kommutative Gesetz nicht erfüllt, da im allgemeinen natürlich

$$\sum_k a_{nk} b_{km} \neq \sum_k b_{nk} a_{km},$$

und daher

$$\mathbf{ab} \neq \mathbf{ba}$$ ⟨[20]⟩

ist. Man muss daher bei Matrizenfunktionen stets genauestens auf die Reihenfolge der Faktoren achten.

Mit Hilfe von Addition und Multiplikation lassen sich | zunächst alle alge- 108
braischen und auch ganze transzendente Funktionen durch Potenzausdrücke bzw. Reihen aufbauen. ([21] Rationale Funktionen hat man entsprechend zu definieren, z. B. $\frac{1}{a} = c$ durch

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{1},$$ ⟨[22]⟩

wo **1** die häufig gebrauchte Einheitsmatrix

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

bedeutet. Wir setzen dabei voraus, dass alle praktisch vorkommenden Operationen an Matrizen, die eine physikalische Bedeutung haben, ausführbar sind, wenn wir auch nicht die Bedingung scharf formulieren können, unter denen dies der Fall ist.)

⟨Die Vertauschungsrelationen⟩

Der[23] wichtigste Schritt ist nun, die Vertauschungsrelationen aufzusuchen, die erst die Theorie zu einer bestimmten machen können. Es ergibt sich zunächst ohne weiteres: jede Matrix ist vertauschbar:

[19] In the left margin, Hilbert wrote with pencil: "fügt sich gut ein, wegen des Kombinationsprinzips: vgl. Beiblatt".

[20] Added by Hilbert with pencil: "Unterschied mit kl⟨assischer⟩ Mech. wo wir mit Zahlen u. Funktionen zu tun hatten."

[21] The brackets were added with pencil. In the left margin, there is a reader's sign (⊥).

[22] Added by Hilbert with pencil, then deleted: "ist die einfachste Annahme außer = 0, was aber trivial".

[23] In the left margin, there is a reader's sign (⊤).

mit jeder gewöhnlichen Zahl,
mit sich selber und mit jeder Funktion von sich,
ist sie mit einer anderen Matrix **b** vertauschbar, so auch mit jeder Funktion von **b**.

([24] Um nun die allgemeinen Vertauschungsrelationen herzuleiten, bedienen wir uns des Korrespondenzprinzips, d. h. wir berechnen den Wert von

$$\mathbf{ab} - \mathbf{ba}$$

für grosse Quantenzahlen und sehen, ob sich etwas daraus schliessen lässt, dass dieser Ausdruck dann mit dem entsprechenden der klassischen Mechanik übereinstimmen muss. Wir schreiben statt

a_{nm}[25] jetzt $a_{n\,n-\alpha}$ und setzen dementsprechend
$k = n - \alpha; \quad m = n - \alpha - \beta,$

wobei nun $\alpha, \beta \ll n$ sein soll. Dann wird das allgemeine Glied von **ab** − **ba**

109
$$\begin{aligned} c_{nm} &= \sum_k a_{nk} b_{km} - \sum_l b_{nl} a_{lm} \\ &= \sum_{\alpha+\beta=n-m} \left[a_{n\,n-\alpha}\, b_{n-\alpha\; n-\alpha-\beta} - b_{n\,n-\beta}\, a_{n-\beta\; n-\alpha-\beta}\right]. \end{aligned}$$

Nun ist das einzelne Glied hiervon gleich

$$\begin{aligned} &\left(a_{n\,n-\alpha} - a_{n-\beta\; n-\beta-\alpha}\right) b_{n-\alpha\; n-\alpha-\beta} \\ -&\left(b_{n\,n-\beta} - b_{n-\alpha\; n-\alpha-\beta}\right) a_{n-\beta\; n-\alpha-\beta}. \end{aligned}$$

$a_{n\,n-\alpha}$ gehört zu dem Quantensprung von der Quantenzahl n um α nach unten, also den Sprung der entsprechenden Wirkungsvariable $I = nh$ in $(n - \alpha)h$. Wir bezeichnen $a_{n\,n-\alpha}$ mit $a_\alpha(nh)$. In der Grenze geht nun offenbar der obige Differenzenausdruck in den Differentialausdruck

$$a_\alpha(nh) - a_\alpha\big((n-\beta)h\big) = h\beta \frac{\partial a_\alpha}{\partial I}$$

über, also wird

$$c_{nm} = \sum_{\alpha+\beta=n-m} h \left[\beta b_\beta \frac{\partial a_\alpha}{\partial I} - \alpha \frac{\partial b_\beta}{\partial I} a_\alpha\right].$$

Hier ist allerdings b_β und a_α für die Quantenzahlen $(n-\alpha)$ bzw. $(n-\beta)$ zu nehmen. Für $n \gg \alpha, \beta$ aber kann man in der Grenze einfach den Wert für n

[24] The bracket was added with pencil, the brackets don't close but obviously the line of argument ends at the bottom of p. 110. In the left margin, Hilbert wrote with pencil: "weiter S. 111".

[25] Should be "a_{nk}".

selbst statt dessen nehmen. Hierin steckt eine Stetigkeitsannahme hinsichtlich einer genügend langsamen Variation von a_α und b_β mit n. Nun ist *klassisch* mit der Winkelvariabeln $w = \nu t$

$$b = \sum_\beta b_\beta = \sum_\beta b^*_\beta e^{2\pi i\beta\nu t} = \sum_\beta b^*_\beta e^{2\pi i\beta w}$$
$$(b^*_\beta e^{2\pi i\beta\nu t} = b_\beta),$$

also

$$\beta b_\beta = \frac{1}{2\pi i}\frac{\partial b_\beta}{\partial w},$$

Also wird der klassische Ausdruck, der dem Uebergang $n \to m$ entspricht

$$\sum_{\alpha+\beta=n-m} \frac{h}{2\pi i}\left(\frac{\partial a_\alpha}{\partial I}\frac{\partial b_\beta}{\partial w} - \frac{\partial b_\beta}{\partial I}\frac{\partial a_\alpha}{\partial w}\right),$$

d. h. $\mathbf{ab} - \mathbf{ba}$ korrespondiert mit

$$\frac{h}{2\pi i}[a, b],$$

wo $[a, b]$ das Poissonsche Klammersymbol der Mechanik $\left(\frac{\partial a}{\partial I}\frac{\partial b}{\partial w} - \frac{\partial b}{\partial I}\frac{\partial a}{\partial w}\right)$ ist. Die einfachste Annahme, die wir nun überhaupt über die Vertauschungsrelationen machen können, ist, dass wir direkt

110 $$\mathbf{ab} - \mathbf{ba} = \frac{h}{2\pi i}[a, b]$$

setzen. Damit ist der Anschluss an die alte Mechanik mit Sicherheit gewährleistet. Wir führen nun zur Abkürzung das quantentheoretische Klammersymbol $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{2\pi i}{h}(\mathbf{ab} - \mathbf{ba})$ ein. Dann gelten sowohl für die quantentheoretischen Klammern $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ als auch für die klassischen Poissonschen Klammern $[a, b]$ dieselben Relationen, die man leicht aus ihren Definitionen ableitet.

$$\begin{array}{r|r}
(\mathbf{a}+\mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \mathbf{c}) + (\mathbf{b}, \mathbf{c}) & [a+b, c] = [a, c] + [b, c] \\
(\mathbf{ab}, \mathbf{c}) = \mathbf{a}(\mathbf{b}, \mathbf{c}) + (\mathbf{b}, \mathbf{c})\mathbf{a} & [ab, c] = a[b, c] + [b, c]a^{\langle 26\rangle} \\
(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -(\mathbf{b}, \mathbf{a}) & [a, b] = -[b, a] \\
\big((\mathbf{a}, \mathbf{b}), \mathbf{c}\big) + \big((\mathbf{b}, \mathbf{c}), \mathbf{a}\big) + \big((\mathbf{c}, \mathbf{a}), \mathbf{b}\big) = 0 & \big[[a, b], c\big] + \big[[b, c], a\big] + \big[[c, a], b\big] = 0,
\end{array} \qquad \text{(III)}$$

sodass unsere Annahme auf keine Widersprüche führen kann. Die letzte Zeile der rechten Seite ist die bekannte Jacobische Identität der Mechanik.

Von besonderer Wichtigkeit sind die elementaren Klammersymbole für die Koordinaten und Impulse selbst. In der klassischen Mechanik stellen sie gleichzeitig die charakteristischen Bedingungen für kanonische Variablen dar, und lauten

$$[p, q] = 1$$
$$[q, q] = 0; \quad [p, p] = 0,$$

[26]Should be: $(\mathbf{ab}, \mathbf{c}) = \mathbf{a}(\mathbf{b}, \mathbf{c}) + (\mathbf{a}, \mathbf{c})\mathbf{b}$ and $[ab, c] = a[b, c] + [a, c]b$.

d. h. erfüllen p und q diese Differentialgleichungen als Funktionen von I und w (oder irgend welcher anderer kanonischer Variable), so sind sie selbst kanonisch konjugiert. Diese Formulierung ist aequivalent mit unserer früheren Darstellung der kanonischen Transformation, doch ist der Beweis etwas umständlich, weshalb er hier weggelassen sei.

Wir fordern nun, wie gesagt, dass diese Beziehungen auch in der Quantenmechanik, also für die runden Klammern der Matrizenfunktionen gelten sollen,
111 dass also die den p, q entsprechenden Matrizen die Vertauschungsrelationen|

$$\begin{aligned}(\mathbf{p},\mathbf{q}) &= \frac{2\pi i}{h}(\mathbf{pq}-\mathbf{qp}) = \mathbf{1}\\ (\mathbf{p},\mathbf{p}) &= 0; \quad (\mathbf{q},\mathbf{q}) = 0^{\langle 27\rangle}\end{aligned} \tag{IV}$$

erfüllen sollen.

(Mit Hilfe der Rechenregeln III lassen sich dann die Vertauschungsrelationen für beliebige Funktionen der p und q berechnen, z. B.

$$\begin{aligned}(\mathbf{q}^2,\mathbf{p}^2) &= \mathbf{q}(\mathbf{q},\mathbf{p}^2) + (\mathbf{q},\mathbf{p}^2)\mathbf{q}\\ (\mathbf{q},\mathbf{p}^2) &= \mathbf{p}(\mathbf{q},\mathbf{p}) + (\mathbf{q},\mathbf{p})\mathbf{p} = -\frac{4\pi i}{h}\mathbf{p},\end{aligned}$$

also

$$(\mathbf{q}^2,\mathbf{p}^2) = -\frac{4\pi i}{h}(\mathbf{qp}+\mathbf{pq}).$$

Ferner nennen wir eine Transformation der p, q in neue Grössen P, Q kanonisch, wenn auch für die letzteren die Beziehungen IV[28] gelten. Darauf kommen wir noch zurück.)[29]

⟨Die Quantenbedingungen⟩

Die Bedeutung der Vertauschungsrelationen ist eine sehr grosse. Sie stellen nämlich nichts anderes dar, als die Quantenbedingungen der alten Quantentheorie. (Diese können wir in der Form schreiben

$$nh = I = \oint p\,dq = \int_0^{\frac{1}{\nu}} p\dot{q}\,dt.$$

[27] The equations and their tag (IV) were crossed out with pencil. Next to it, Hilbert added with pencil:

$\mathbf{pq}-\mathbf{qp} = \frac{h}{2i\pi}\cdot\mathbf{1}$ ist die einfachste Annahme, denn $= 0$ wäre trivial. $\mathbf{1} = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

[28] Added with pencil: "$\mathbf{pq}-\mathbf{qp} = \frac{h}{2i\pi}\cdot\mathbf{1}$".

[29] The brackets were added with pencil.

Setzen wir hier die Fourrierentwicklungen für q und p

$$q = \sum_\alpha q_\alpha = \sum_\alpha a_\alpha e^{2\pi i\alpha\nu t}, \quad p = \sum_\beta b_\beta e^{2\pi i\beta\nu t}$$

ein, so erhalten wir

$$I = \int_0^{\frac{1}{\nu}} \sum_{\alpha\beta} a_\alpha b_\beta 2\pi i\beta\nu e^{2\pi i(\alpha+\beta)\nu t}\, dt, ^{\langle 30\rangle}$$

oder

$$1 = 2\pi i \sum_\alpha \alpha \frac{\partial}{\partial I}(a_\alpha b_{-\alpha}) = 2\pi i \sum_\alpha \alpha \frac{\partial}{\partial I}(q_\alpha p_{-\alpha}).$$

Dieser Ausdruck ist nun in der Quantentheorie nach dem Korrespondenzprinzip umzusetzen in

$$\frac{2\pi i}{h} \sum_\alpha \big(q_{n+\alpha\, n}\, p_{n\, n+\alpha} - q_{n\, n-\alpha}\, p_{n-\alpha\, n}\big).$$

Wir erhalten also als korrespondenzmässige Umformung der Quantenbedingungen

112 $$\frac{h}{2\pi i}(\mathbf{p}, \mathbf{q})_{nn} = \sum_k \big(p_{nk} q_{kn} - q_{nk} p_{kn}\big) = \frac{h}{2\pi i},$$

was offensichtlich mit der Vertauschungsrelation übereinstimmt.

Mit den Vertauschungsrelationen haben wir nun die Axiome für die Matrizen vollständig. Man kann wohl sagen, dass sie die einfachst mögliche Abweichung von der klassischen Rechnung darstellen, indem sie nur das kommutative Gesetz nicht erfüllen, an dessen Stelle wieder die möglichst einfachen Relationen IV treten. Besonders befriedigend erscheint hier ferner, dass dadurch die Quantenbedingungen, die noch in der alten Theorie etwas höchst künstliches, absonderliches und Wesensfremdes hatten, hier in äusserst natürlicher Weise mit in die Grundlagen der Theorie eingehen.)[31]

⟨Differentiation⟩

Um aber zu der eigentlichen Mechanik übergehen zu können, müssen wir noch die Differentiationen in die Matrixsprache übersetzen:

Für die Differentiationen nach der Zeit ergibt sich zunächst naturgemäss die Definition

$$\dot{\mathbf{a}} = (2\pi i\nu_{nm} a_{nm}).$$

[30] '$2\pi i\beta\nu$' should be '$2\pi i\alpha\nu$'.

[31] The brackets were added with pencil.

Diese Operation kann man, und das ist auch ein Charakteristikum der neuen Mechanik, durch eine algebraische Operation ersetzen. Wegen

$$\nu_{nm} = \frac{W_n - W_m}{h}$$

und dem Diagonalmatrizencharakter von W, d. h. wegen

$$(\mathbf{Wa})_{nm} = W_n a_{nm}; \quad (\mathbf{aW})_{nm} = W_m a_{nm}{}^{\langle 32\rangle}$$

wird nämlich nach der obigen Definition

$$\dot{\mathbf{a}} = \frac{2\pi i}{h}(\mathbf{Wa} - \mathbf{aW}) = (\mathbf{W}, \mathbf{a}),{}^{\langle 33\rangle}$$

was wir nun als allgemeine Definition der Differentiation nach der Zeit nehmen. Wir nennen eine Matrize wie in der klassischen Mechanik konstant, wenn ihre
113 Ableitung nach t verschwindet. Wenn alle | W_n mit verschiedenem Index von einander verschieden sind, so bedeutet $\dot{\mathbf{a}} = \mathbf{0}$ offenbar, dass $\mathbf{a}$ eine Diagonalmatrix ist.

Die Definition der Differentiation einer Matrizenfunktion nach einer Matrix,[34] insbesondere unseren Grundmatrizen $\mathbf{p}$ und $\mathbf{q}$ geben wir ganz analog wie in der gewöhnlichen Analysis durch

$$\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}{\partial \mathbf{a}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{a} + \varepsilon \mathbf{1}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) - \mathbf{f}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}{\varepsilon},$$

wo ε eine gewöhnliche Zahl und $\mathbf{1}$ die Einheitsmatrix ist.

Hiermit lässt sich zunächst die Differentiation aller ganzer Potenzausdrücke durchführen, denn es gelten wie in der gewöhnlichen Analysis die Regeln für die Differentiation von Summe und Produkt. Sei $\mathbf{f} = \varphi + \psi$, so gilt wegen der Linearität der Differentialoperation offenbar

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial(\varphi + \psi)}{\partial \mathbf{x}},$$

und ist $\mathbf{f} = \varphi\psi$, so wird

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \varphi\psi}{\partial \mathbf{x}} = \varphi\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}}\psi,$$

[32] In the right margin written with pencil:

$$(\mathbf{Wa} - \mathbf{aW})_{nm} = W_n a_{nm}$$
$$(\mathbf{aW} - \mathbf{Wa})_{nm} = W_m a_{nm}$$

[33] The last term was deleted with pencil.

[34] In this occurrence, but not in the preceding paragraph, “Matrize” was corrected with ink to “Matrix”.

wobei nur stets genau auf die Reihenfolge der Faktoren zu achten ist. Der Beweis wird wie in der klassischen Analysis geführt. Es ist

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}(\varphi\psi) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\big\{\varphi(\mathbf{x}+\varepsilon\mathbf{1})\psi(\mathbf{x}+\varepsilon\mathbf{1}) - \varphi(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x})\big\}\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\big\{\varphi(\mathbf{x}+\varepsilon\mathbf{1})\psi(\mathbf{x}+\varepsilon\mathbf{1}) - \varphi(\mathbf{x}+\varepsilon\mathbf{1})\psi(\mathbf{x})\\ &\qquad\qquad + \varphi(\mathbf{x}+\varepsilon\mathbf{1})\psi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x})\big\}\\ &= \varphi\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{x}} + \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{x}}\psi.\end{aligned}$$

Damit erhält man für alle positiven ganzen Potenzen z. B. die gewöhnliche Formel

$$\frac{d\mathbf{a}^n}{d\mathbf{a}} = n\mathbf{a}^{n-1}.$$

Bei beliebigen Produkten muss man stets die Reihenfolge beachten, z. B. ist 114

$$\frac{\partial}{\partial\mathbf{a}}(\mathbf{aba}^2) = \mathbf{ba}^2 + 2\mathbf{aba}.$$

Negative Potenzen hat man wie folgt zu behandeln:

$$\frac{d}{d\mathbf{a}}\left(\frac{1}{\mathbf{a}}\cdot\mathbf{a}\right) = \frac{d}{d\mathbf{a}}(\mathbf{1}) = \mathbf{0} = \frac{d}{d\mathbf{a}}\left(\frac{1}{\mathbf{a}}\right)\cdot\mathbf{a} + \frac{1}{\mathbf{a}}; \quad \frac{d}{d\mathbf{a}}\left(\frac{1}{\mathbf{a}}\right) = -\frac{1}{\mathbf{a}^2}.$$

Es gilt auch n i c h t die Regel für die Diff⟨erentiation⟩ mittelbarer Funktionen; z. B. ist klassisch für $f = (ba)^2 = g^2$

$$\frac{df}{da} = \frac{df}{dg}\frac{dg}{da} = 2bab = 2b^2a,$$

aber quantenmechanisch dagegen für $\mathbf{f} = (\mathbf{ba})^2 = \mathbf{baba}$

$$\frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{a}} = \mathbf{bba} + \mathbf{bab}.$$

Nur, wenn alle Faktoren miteinander vertauschbar sind, ist dies mit den klassischen Formeln identisch.

Meistens braucht man übrigens die obige Definition nicht, denn man kann fast immer die Differentialformeln durch Differenzenformeln ersetzen. Z. B. ist

$$\frac{\partial\mathbf{f}(\mathbf{qp})}{\partial\mathbf{q}} = (\mathbf{f},\mathbf{p}); \quad \frac{\partial\mathbf{f}(\mathbf{qp})}{\partial\mathbf{p}} = -(\mathbf{f},\mathbf{p}).$$

Beweis: Diese Formeln sind nach den Vertauschungsrelationen IV richtig für die $\mathbf{p}$ und $\mathbf{q}$ selbst. Sind sie nun richtig für zwei Funktionen $\varphi(\mathbf{pq})$ und $\psi(\mathbf{pq})$, so auch für $\varphi+\psi$ (trivial) und für $\varphi\psi$, denn es ist

$$\begin{aligned}\varphi\psi\mathbf{q} - \mathbf{q}\varphi\psi &= \varphi(\psi\mathbf{q} - \mathbf{q}\psi) + (\varphi\mathbf{q} - \mathbf{q}\varphi)\psi\\ &= \left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{p}} + \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{p}}\psi\right)\frac{h}{2\pi i} = \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial(\varphi\psi)}{\partial\mathbf{p}}.\end{aligned}$$

Nach Besprechung der wichtigsten Rechengesetze können wir jetzt zur Mechanik übergehen, d. h. zu den Gesetzen, welche die Matrizen | für wirkliche 115
Systeme beherrschen. In der klassischen Mechanik haben wir die kanonischen Gleichungen

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \qquad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q},$$

wo H die Energie eine bekannte Funktion von q, p und ev⟨entuell⟩ t ist. Man wird versuchen, diese Gleichungen ungeändert in die Quantenmechanik zu übernehmen. Das ist die einfachste Hypothese, die wir machen können. Dass sie wohlberechtigt ist, zeigt sich zunächst daran, dass sich sofort mit ihrer Hilfe der Energiesatz ableiten lässt.

⟨Die kanonischen Gleichungen, der Energiesatz⟩

Mit unseren Formeln für die Differentiation nach der Zeit und den kanonischen Koordinaten und Impulsen schreiben sich die kanonischen Gleichungen

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{p}}$$
$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{q}}$$

quantenmechanisch einfach

$$\mathbf{W}\mathbf{q} - \mathbf{q}\mathbf{W} = \mathbf{H}\mathbf{q} - \mathbf{q}\mathbf{H}$$
$$\mathbf{W}\mathbf{p} - \mathbf{p}\mathbf{W} = \mathbf{H}\mathbf{p} - \mathbf{p}\mathbf{H}$$

oder auch

$$(\mathbf{W} - \mathbf{H})\mathbf{q} - \mathbf{q}(\mathbf{W} - \mathbf{H}) = \mathbf{0}$$
$$(\mathbf{W} - \mathbf{H})\mathbf{p} - \mathbf{p}(\mathbf{W} - \mathbf{H}) = \mathbf{0}.$$

$(\mathbf{W} - \mathbf{H})$ ist also mit $\mathbf{q}$ und $\mathbf{p}$, also auch mit jeder Funktion von ihnen, also auch mit $\mathbf{H}$ selbst vertauschbar:

$$(\mathbf{W} - \mathbf{H})\mathbf{H} - \mathbf{H}(\mathbf{W} - \mathbf{H}) = \mathbf{0},$$

also ist auch $\mathbf{H}$ mit $\mathbf{W}$ vertauschbar:

116 $$\mathbf{W}\mathbf{H} - \mathbf{H}\mathbf{W} = \mathbf{0}.$$

Folglich ist auch

$$\dot{\mathbf{H}} = (\mathbf{W}, \mathbf{H}) = \mathbf{0}.$$

Damit ist der Energiesatz bewiesen.

In dem Falle, dass alle W_n voneinander verschieden sind, kann man noch darüber hinaus die Bohrsche Frequenzbedingung aus unseren Axiomen herleiten. Dann folgt nämlich aus $\dot{\mathbf{H}} = \mathbf{0}$, dass $\mathbf{H}$ eine Diagonalmatrix wird,

$$H_{nm} = H_n \delta_{nm}, \quad \delta_{nm} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } n = m \\ 0 & \text{wenn } n \neq m, \end{cases}$$

und die erste kanonische Gleichung fordert dann für die Matrixglieder

$$q_{nm}(W_n - W_m) = q_{nm}(H_n - H_m),$$

d. h.

$$H_n - H_m = W_n - W_m = h\nu_{nm}.$$

([35] Die Energiematrix wird also mit der Termmatrix identisch.[G] Dass dies alles ohne neue Hypothesen herauskommt, ist eine starke Stütze für die Richtigkeit unserer Ansätze.

Ein Punkt ist allerdings noch besonders zu beachten. Ist uns die klassisch mechanische Energiefunktion gegeben, so lässt sich die quantentheoretische nicht immer eindeutig daraus ableiten, da die Reihenfolge der Faktoren nicht mehr gleichgültig ist. Man wird also eine Art Symmetrisierung vorzunehmen haben. Diese Schwierigkeit tritt jedoch nicht auf, wenn die Hamiltonsche Funktion sich additiv in eine Funktion von $\mathbf{q}$ und eine von $\mathbf{p}$ zer|legen lässt. 117

$$H(pq) = H_1(q) + H_2(p),$$

also auch, wenn man das mechanische Problem vorher durch eine kanonische Transformation auf eine solche Form gebracht hat. Damit kommt man bereits für alle praktisch wichtigen Fälle aus. Uebrigens ist es keineswegs eine denknotwendige Forderung, dass die quantenmechanische Energiefunktion sich aus der gewöhnlich mechanischen ableiten lassen muss.)

⟨Der Oscillator⟩

Die[36] Methode, wie man Matrizengleichungen zu behandeln hat, wird am besten aus einem praktischen Beispiel hervorgehen. Als solches nehmen wir

[G] Um der Gültigkeit der fundamentalen Frequenzbedingung auf alle Fälle sicher zu sein, werden wir später die Grundaxiome noch etwas anders formulieren.

[35] The brackets were added with pencil. In the left margin, Hilbert wrote with pencil: "Nun Haas 74–80. Dann S. 122". The reference is to *Haas 1928*, the preface to which is dated February 1928. Arthur Erich Haas (1884–1941), extraordinary professor of physics at the University of Vienna, had been a student in Göttingen from 1903 to 1906 and was the author of an essay on the "axiomatics of modern physics" (*Haas 1919*) and of a monograph on atomic theory (*Haas 1924*).

[36] In the left margin, Hilbert wrote with pencil: "Statt dessen Haas 74–80 und dann S. 122", see note 35 above.

den Oscillator, den wir auch schon in der klasssichen Theorie als einfachstes Beispiel hatten. Seine Hamiltonsche Funktion, d. h. die Energie als Funktion der Koordinaten und Impulse, entnehmen wir aus der gewöhnlichen Mechanik:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2\mu}\mathbf{p}^2 + \frac{\kappa}{2}\mathbf{q}^2,$$

wo μ die Masse des schwingenden Teilchens und κ ein Mass für die Stärke der elastischen Kraft bildet. Hier tritt also die obige Schwierigkeit nicht auf.

Die kanonischen Gleichungen sind hier

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{p}} = \frac{1}{\mu}\mathbf{p}$$
$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{q}} = -\kappa\mathbf{q}.$$

Aus ihnen folgt wie in der klasssichen Mechanik die Bestimmungsgleichung für $\mathbf{q}$ allein

$$\dot{\mathbf{p}} = \mu\ddot{\mathbf{q}}$$
$$\mu\ddot{\mathbf{q}} + \kappa\mathbf{q} = \mathbf{0},$$

118 wofür wir mit der Abkürzung $2\pi\nu_0 = \sqrt{\frac{\kappa}{\mu}}$ |

$$\ddot{\mathbf{q}} + (2\pi\nu_0)^2\mathbf{q} = \mathbf{0} \tag{I}$$

schreiben. Dazu tritt noch die Vertauschungsrelation

$$\frac{h}{2\pi i}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \mu(\dot{\mathbf{q}}\mathbf{q} - \mathbf{q}\dot{\mathbf{q}}) = \frac{h}{2\pi i}\mathbf{1}. \tag{II}$$

Gehen wir zunächst in I mit dem Matrizenansatz

$$\mathbf{q} = (q_{nm}e^{2\pi i\nu_{nm}t}),$$

so erhalten wir für die Glieder der Matrizen die Beziehungen

$$\left[-(2\pi\nu_{nm})^2 + (2\pi\nu_0)^2\right]q_{nm} = 0.$$

Hieraus folgt für alle Uebergänge $n \to m$, deren $q_{nm} \neq 0$ sein sollen

$$\nu_{nm} = \pm\nu_0 = \frac{W_n - W_m}{h}$$
$$W_n = W_m \pm h\nu_0.$$

Wir suchen nun zunächst eine Lösung, bei der alle W_n voneinander verschieden sind. Für diese folgt, dass in jeder Reihe, d. h. bei festgehaltenem n, höchstens zwei $q_{nm} \neq 0$ sein können, da es nur zwei ν_{nm} Werte gibt, die $\neq 0$

sind, und zwar gleich $\pm\nu_0$. Nun ist die Numerierung der Quantenzustände, d. h. der W_n offenbar gleichgültig, und wir können sie daher möglichst bequem wählen. Wir greifen zunächst ein W heraus und bezeichnen es mit W_0, und setzen weiter

$$\begin{aligned} W_1 &= W_0 + h\nu_0, \quad & W_n &= W_0 + nh\nu_0 \\ W_{-1} &= W_0 - h\nu_0, \quad & W_{-n} &= W_0 - nh\nu_0 \end{aligned}$$

$$\nu_{mn} = -\nu_{nm}.$$

Dann sind die nichtverschwindenden Glieder der Matrix $\mathbf{q}$ 119

$$q_{n+1\,n} \quad \text{und} \quad q_{n\,n-1},$$

d. h. es sind nur die ersten beiden Parallelen zur Diagonale der Matrix mit von Null verschiedenen Gliedern besetzt.

Dies ist alles, was uns die kanonischen Gleichungen liefern. Sie geben zwar die Werte der Schwingungszahlen, aber nicht die der q_{nm} selbst. Doch wir haben ja noch die Vertauschungsrelation II.

Diese lautet ausführlich geschrieben

$$2\pi i \sum_k \left(\nu_{nk} q_{nk} q_{km} - q_{nk} \nu_{km} q_{km}\right) = \frac{h}{2\pi i \mu} \delta_{nm},$$

d. h.

$$\sum_k (\nu_{nk} - \nu_{km}) q_{nk} q_{km} = -\frac{h}{4\pi^2 \mu} \delta_{nm}.$$

Zunächst sehen wir, dass diese Beziehung für alle $n \neq m$ nach unseren bisherigen Ergebnissen von selbst erfüllt ist, denn für alle $m > n+2$, $m < n-2$, $m = n \pm 1$ verschwindet stets in jedem Glied ein q_{nk} oder q_{km}, und für $m = n \pm 2$ ist für das einzige Glied $q_{n\,n\pm1}\, q_{n\pm1\,n\pm2}$ der andere Faktor $\nu_{n\,n\pm1} - \nu_{n\pm1\,n\pm2} = 0$. Für $n = m$ reduziert sich andererseits die Summe auf

$$(\nu_{n\,n+1} - \nu_{n+1\,n}) q_{n\,n+1}\, q_{n+1\,n} + (\nu_{n\,n-1} - \nu_{n-1\,n}) q_{n\,n-1}\, q_{n-1\,n} = -\frac{h}{4\pi^2 \mu}.$$

Da nun alle $\nu = -\nu_0$ bzw. $+\nu_0$, und $q_{n\,n-1} = \overline{q_{n-1\,n}}$ usw. sind, wird

$$|q_{n\,n+1}|^2 - |q_{n\,n-1}|^2 = \frac{h}{8\pi^2 \mu \nu_0}.$$

Für die Werte der $|q_{n\,n+1}|^2$ bekommen wir aber eine aequidistante Reihe. Da die Quadrate ja notwendig positiv sind, muss es nun einen kleinsten Wert | unter ihnen geben, d. h. die Reihe muss nach unten abbrechen. Für ein 120
bestimmtes n muss also $|q_{n\,n-1}|^2 = 0$ werden. Wir nehmen also diesen Index $n = 0$, womit wir die Numerierung ganz festgelegt haben. Dann wird

$$|q_{01}|^2 = \frac{h}{8\pi^2 \nu_0 \mu},$$

und allgemein

$$|q_{n\,n+1}|^2 = |q_{n+1\,n}|^2 = (n+1)\frac{h}{8\pi^2\nu_0\mu}.$$

Damit ist die Lösung vollständig erhalten. Da nur die $q_{n\,m}$, für die $m = n \pm 1$ ist, von 0 verschieden sind, so können also auch nur Sprünge vorkommen, bei denen die Quantenzahl sich um 1 ändert. Dies ist ein Charakteristikum des harmonischen Oscillators. [[37] Wir können auch noch verifizieren, dass unsere Lösung für $\mathbf{q}$ und $\mathbf{p}$ (letzterer ergibt sich aus der Beziehung $\mathbf{p} = \mu\dot{\mathbf{q}}$) $\mathbf{H}$ tatsächlich zur Diagonalmatrix macht. Es wird

$$\begin{aligned}
\mathbf{H} &= \frac{1}{2\mu}\mathbf{p}^2 + \frac{\kappa}{2}\mathbf{q}^2 = \frac{\mu}{2}\dot{\mathbf{q}}^2 + \frac{\kappa}{2}\mathbf{q}^2,\\
H_{nm} &= -4\pi^2\frac{\mu}{2}\sum_k \nu_{nk}q_{nk}\nu_{km}q_{km} + \frac{\kappa}{2}\sum_k q_{nk}q_{km}, \qquad (m \neq n),\\
H_{nn} &= 4\pi^2\frac{\mu}{2}\nu_0^2\left(|q_{n\,n+1}|^2 + |q_{n\,n-1}|^2\right) + \frac{\kappa}{2}\left(|q_{n\,n+1}|^2 + |q_{n\,n-1}|^2\right)\\
&= \frac{\mu}{2}\left(|q_{n\,n+1}|^2 + |q_{n\,n-1}|^2\right)\left(4\pi\nu_0^2 + \frac{\kappa}{\mu}\right) = 4\pi\nu_0\mu\left(|q_{n\,n+1}|^2 + |q_{n\,n-1}|^2\right)\\
&= 4\pi^2\nu_0\mu\frac{h}{8\pi^2\nu_0\mu}(2n+1) = \nu_0 h(n+\tfrac{1}{2}).
\end{aligned}$$

Alle H_{nm} $(n \neq m)$ werden gleich Null, wie man leicht sieht. Die Diagonalglieder haben wir eben berechnet. An Stelle von

$$W_n = \nu_0 I = \nu_0 hn$$

in der früheren Quantentheorie erhalten wir hier

$$W_n = \nu_0 h(n+\tfrac{1}{2})$$

121 mit dem charakteristischen Zusatzglied $\frac{1}{2}$. Wir erhalten also eine Nullpunktsenergie $W_0 = \nu_0\frac{h}{2}$ für den untersten Quantenzustand. Damit ist ein schon früher aus der Analyse der Bandenspektren erschlossenes Resultat abgeleitet worden, wo man eine halbzahlige Numerierung einführen musste, um den Anschluss an die Erfahrung zu gewinnen.[38]

Wir haben hier eine Lösung gefunden, für die alle W_n voneinander verschieden sind, und aus der Herleitung ist ersichtlich, dass sie, abgesehen von belanglosen Aenderungen der Numerierung auch die einzige dieser Art ist. Lässt man diese Beschränkung fallen, so kann man dies nicht mehr behaupten. Z. B. ist dann die Matrix, die durch Ersetzen jedes Matrixgliedes q_{nm} durch 4 Glieder, nämlich durch $\left(\begin{smallmatrix} q_{nm} & 0 \\ 0 & q_{nm}\end{smallmatrix}\right)$ aus ihr hervorgeht, offenbar auch eine Lösung. Abgesehen hiervon kann man aber mit der später zu entwickelnden Transformationstheorie die Einzigkeit der Lösung beweisen. Diese Schwierigkeit fällt ausserdem fort bei der Theorie von Schrödinger, der die zweite Hälfte der Vorlesung gewidmet werden wird.

[37] The corresponding closing bracket is missing, probably it should be placed at the end of the first section of page 121.

[38] In the left margin, there is a reader's sign (⊥).

Wir bekamen durch unsere Gleichungen nur die absoluten Beträge der q_{nm}, aber nicht diese selbst. Die Winkelabweichungen werden jedoch nicht bestimmt. Sie entsprechen genau den Phasen in der alten Mechanik. Im allgemeinen Fall kann man zeigen, dass in jeder Zeile einer Matrize eine solche Phase willkürlich ist, d. h. dass man jede Zeile nur mit einer beliebigen komplexen Zahl von dem Betrag 1 multiplizieren darf.

⟨Die allgemeine Theorie der Matrizengleichungen⟩

⟨Neue Formulierungen des Integrationsproblems⟩

Nachdem[39] wir an einem speziellen einfachen Beispiel die Möglichkeit und die Schwierigkeiten der Auflösung der quantentheoretischen Gleichungen gezeigt haben, gehen wir jetzt zur allgemeinen Integrationstheorie über, die erst einen vollen Einblick in die Natur der vorliegenden Probleme liefert.

Zunächst[40] behaupten wir: Wenn wir zwei Matrizen $\mathbf{p}$ und $\mathbf{q}$ haben, – das soll bedeuten, ein System von Koeffizienten p_{nm} und q_{nm} – , die einerseits die Vertauschungsrelation 122

$$\mathbf{pq} - \mathbf{qp} = \frac{h}{2\pi i}\mathbf{1}$$

erfüllen, und andererseits die vorgelegte Energiefunktion $\mathbf{H}(\mathbf{pq})$, die ja eine Matrixfunktion von $\mathbf{p}$ und $\mathbf{q}$ ist, zu einer Diagonalmatrix $H_{nm} = \delta_{nm} \cdot W_n$ machen, so stellen sie auch eine Lösung der kanonischen Gleichungen

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{p}}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{q}}$$

dar, wenn man die Frequenzen

$$\nu_{nm} = \frac{W_n - W_m}{h}$$

[39] In the left margin, there is a reader's sign (⊤).

[40] On the left hand page, Hilbert wrote with pencil:
Man hat H als Matrizenfunktion von $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ (variable Matrizen). Nun nehme man 2 bestimmte Matrizen $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, die erstens die Vertauschungsrelation

$$\mathbf{pq} - \mathbf{qp} = \frac{h}{2\pi i}\mathbf{1}$$

erfüllen und 2.) so beschaffen sind, dass $H(\mathbf{p},\mathbf{q}) = (\delta_{nm} W_n)$ (als Diagonalmatrix wird), dann befriedigen diese Matrizen $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ die kanoni⟨schen⟩ Gl.

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{p}}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{q}}$$

und es ist

$$\nu_{nm} = \frac{W_n - W_m}{h}.$$

setzt.
(Die Forderung, dass eine Matrixfunktion eine Diagonalmatrix ergeben soll, wie wir es bei der Vertauschungsrelation und der eben gestellten Forderung, dass die Energie eine Diagonalmatrize werden soll, verlangten, stellt nämlich lediglich eine Bedingung für die Koeffizienten und nicht für die Exponentialfaktoren, d. h. die ν_{nm} dar, da eben die Eigenschaft einer Matrix Diagonalmatrix zu sein, unabhängig von den ν_{nm} ist. Schreiben wir dann die kanonischen Gleichungen in der schon früher abgeleiteten Gestalt

$$\mathbf{Wp} - \mathbf{pW} = \mathbf{Hp} - \mathbf{pH}$$
$$\mathbf{Wq} - \mathbf{qW} = \mathbf{Hq} - \mathbf{qH},$$

so sieht man, dass sie eben erfüllt sind, wenn man

$$W_n = H_{nn}$$

setzt.
123 Umgekehrt kann man demnach auch als Grundaxiome für die $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ | verlangen, dass sie die Vertauschungsrelation erfüllen und die Energiefunktion zu einer Diagonalmatrix machen sollen. Dann sind nach dem eben Bewiesenen die kanonischen Gleichungen von selbst mit erfüllt, wenn wir noch die Frequenzbedingung als drittes Postulat hinzunehmen. Diese Formulierung wollen wir, wie schon oben angekündigt, als die endgültige beibehalten. Dies bedeutet eine Verschärfung der Grundgleichungen, da man ja aus den kanonischen Gleichungen die Frequenzbedingung nur unter der Voraussetzung der Nichtentartung beweisen konnte. Es ist aber sehr naheliegend und naturgemäss, die allgemeine Gültigkeit dieses fundamentalen Erfahrungssatzes anzunehmen.)[41]

⟨Kanonische Transformationen⟩

Wir brauchen jetzt noch den Begriff der kanonischen Transformation. Wir verstehen unter einer solchen eine Transformation der Variablen $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ in neue Variable $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$, bei welcher aus

$$\mathbf{pq} - \mathbf{qp} = \frac{h}{2\pi i}\mathbf{1}$$

die Vertauschungsrelation für $\mathbf{P}$ und $\mathbf{Q}$, nämlich

$$\mathbf{PQ} - \mathbf{QP} = \frac{h}{2\pi i}\mathbf{1}^{\langle 42\rangle}$$

folgt. Wegen der Differentiationsregeln aus Seite 112 und 114, die erhalten bleiben, gelten nämlich dann auch die kanonischen Gleichungen für die neuen Variabeln.

[41] The brackets were added with pencil. In the right margin, there is a reader's sign (⊤).
[42] Added by Hilbert with pencil: "erhalten bleibt".

(Da durch die obige Forderung die ν_{nm} wieder nicht berührt werden, so ist die Eigenschaft einer Transformation, kanonisch zu sein, für diese charakteristisch und unabhängig von dem speziellen mechanischen System.)[43]
Die allgemeinste kanonische Transformation ist nun gegeben durch

$$\mathbf{P} = \mathbf{TpT}^{-1}$$
$$\mathbf{Q} = \mathbf{TqT}^{-1},$$

wo $\mathbf{T}$ eine beliebige Matrix ist, die nur der Bedingung genügen muss, dass 124
die zu ihr reziproke Matrix $\mathbf{T}^{-1}$ existiert.[44] Dabei ist als gegeben wieder nur das Koeffizientenschema T_{nm} zu denken, während als Frequenzen die des gerade zu behandelnden Systems zu nehmen sind. Dass diese Transformation kanonisch ist, ist ohne weiteres klar, denn es ist ja

$$\begin{aligned}\mathbf{PQ} - \mathbf{QP} &= \mathbf{TpT}^{-1}\mathbf{TqT}^{-1} - \mathbf{TqT}^{-1}\mathbf{TpT}^{-1} \\ &= \mathbf{T}(\mathbf{pq} - \mathbf{qp})\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}\frac{h}{2\pi i}\mathbf{1}\mathbf{T}^{-1} = \frac{h}{2\pi i}\mathbf{1}.\end{aligned}$$

Dass sie auch die allgemeinste ist, hat Jordan Zs. f. Physik 38, 513, 1926[45] bewiesen. Wie in der klassischen Mechanik die allgemeinste kanonische Transformation von einer willkürlichen Funktion abhängt, so hier von einer willkürlichen Matrix. Man kann übrigens auch nach Jordan die Analogie noch weiter treiben, der gezeigt hat, dass man auch in der Quantenmechanik die Transformationen durch Differentiation einer weitgehend willkürlichen Matrizenfunktion bekommen kann.
Unsere kanonische Transformation hat noch die einfache Eigenschaft, dass sich irgend eine Funktion $f(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ wie folgt transformiert:

$$\mathbf{f}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = \mathbf{T}\mathbf{f}(\mathbf{p}, \mathbf{q})\mathbf{T}^{-1},$$

wobei $\mathbf{f}(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$ aus $\mathbf{f}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ dadurch hervorgeht, dass bei ungeänderter Funktionsform $\mathbf{p}$ durch $\mathbf{P}$ und $\mathbf{q}$ durch $\mathbf{Q}$ ersetzt wird. Der Beweis ergibt sich aus der Bemerkung, dass der Satz einerseits für $\mathbf{p}$ und $\mathbf{q}$ selbst gilt, und andererseits für Summe und Produkt gilt, denn es wird für $\mathbf{f} = \varphi\psi$

$$\varphi(\mathbf{PQ})\psi(\mathbf{PQ}) = \mathbf{T}\varphi\mathbf{T}^{-1}\mathbf{T}\psi\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}\varphi\psi\mathbf{T}^{-1}.$$

Nach diesen Vorbereitungen können wir zu der allgemeinen Fragestellung 125

[43] The brackets were added with pencil.

[44] In the left margin, added with pencil: "$\mathcal{T}\mathcal{T}^{-1} = 1$". It is remarkable that Hilbert, following *Jordan 1926a* and *Jordan 1926d*, does not consider here the more restrictive condition that T should be unitary. This would guarantee that $\mathbf{P}$ and $\mathbf{Q}$ are Hermitean (see p. 105) if $\mathbf{p}$ and $\mathbf{q}$ are so. A few pages later (p. 126) unitarity of T is used where T diagonalizes the Hamiltonian $\mathbf{H}(\mathbf{pq})$. Also in the paper *Hilbert, von Neumann and Nordheim 1928*, unitarity of the operator T generating canonical transformations is postulated and justified.

[45] See *Jordan 1926b* and *Jordan 1926c*.

übergehen, wie man ein solches Wertsystem $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ findet, das eine vorgelegte Energiefunktion $\mathbf{H}(\mathbf{pq})$ zu einer Diagonalmatrix macht. Die Antwort lautet folgendermassen. Man nehme irgend welche Koeffizienten p_{nm}, q_{nm},[46] die nur der Bedingung

$$\mathbf{pq} - \mathbf{qp} = \frac{h}{2\pi i}\mathbf{1}$$

genügen, z. B. die Koeffizienten des Oscillatorproblems. Dann setze man sie mit noch nicht festgelegten ν_{nm} in $\mathbf{H}(\mathbf{pq})$ ein und bestimme eine Matrix $\mathbf{T}$ so, dass

$$\mathbf{TH}(\mathbf{pq})\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{W}$$

eine Diagonalmatrix wird, eine Forderung, die ja die ν_{nm} nicht berührt. Endlich setze man nun

$$\begin{aligned} \nu_{nm} &= \frac{1}{h}(W_n - W_m) \\ \mathbf{P} &= \mathbf{TpT}^{-1} \\ \mathbf{Q} &= \mathbf{TqT}^{-1}, \langle 47 \rangle \end{aligned}$$

und hat hiermit nach dem oben Bewiesenen eine Lösung des Problems. Diese ist also darauf zurückgeführt, eine Transformation zu finden, die eine vorgelegte Matrix $\mathbf{H}(\mathbf{pq})$ zu einer Diagonalmatrix macht.

⟨Zusammenhang mit der Transformationstheorie quadratischer Formen⟩

Dieses Problem hat nun eine sehr enge Beziehung zu einer sehr bekannten algebraischen Aufgabe. Zu jeder Matrix $\mathbf{a}$ haben wir schon früher eine bilineare Hermitische Form

$$\sum_{nm} a_{nm} x_n \overline{x_m}, \quad a_{nm} = \overline{a_{nm}}$$

zugeordnet. Das obige Problem, ein $\mathbf{T}$ zu finden, so dass $\mathbf{TH}(\mathbf{p}, \mathbf{q})\mathbf{T}^{-1}$ zu einer Diagonalmatrix wird, ist nun identisch mit dem Problem, die zu $\mathbf{H}(p, q)$ zugehörige Hermitsche Bilinearform

$$\sum_{nm} H_{nm} x_n \overline{x_m}$$

126 auf Hauptachsen, d. h. in eine Quadratsumme zu transformieren, und zwar durch eine orthogonale Transformation t der x_n in neue Variable y_n. Der Unterschied zu der gewöhnlichen Algebra ist nur, dass wir hier ein Problem mit unendlich vielen Variablen vor uns haben, doch sind diese auch von den

[46] Here and in the following three equations, Hilbert corrected with pencil "$\mathfrak{p}$", "$\mathfrak{q}$" to "$\mathbf{p}$", "$\mathbf{q}$", respectively.

[47] On the left hand side, "$\mathbf{P}$", $\mathbf{Q}$ were corrected by Hilbert with pencil from "$\mathbf{p}$", "$\mathbf{q}$", respectively.

Mathematikern insbesondere im Zusammenhang mit den Integralgleichungen schon sehr ausführlich untersucht worden.

Wir gehen jetzt zum Beweise unseres Satzes über. Sei also

$$x_n = \sum_l t_{ln} y_l$$

eine orthogonale Transformation der x_n, – d. h. es bestehen zwischen den t_{ln} die Relationen

$$\sum_l t_{nl}\overline{t_{nl}} = 1$$
$$\sum_l t_{nl}\overline{t_{ml}} = 0 \quad (n \neq m),$$

– so entspricht diese Operation angewandt auf die obige Hermitsche Form genau einer kanonischen Transformation mit

$$\mathbf{T} = (t_{nm}),$$

denn es ist

$$\sum_{nm} H_{nm} x_n \overline{x_m} = \sum_{nm} \left(\sum_{kl} t_{nk} \overline{t_{ml}} H_{kl} \right) y_n \overline{y_m}.$$

Nun bedeuten die Orthogonalitätsrelationen für die t_{nm} in der Matrizensprache nichts anderes, als dass

$$\mathbf{T}\overline{\tilde{\mathbf{T}}} = \mathbf{1}, \quad \text{d. h.} \quad \sum_l t_{nl}\overline{\widetilde{t_{lm}}} = \delta_{nm}$$

sein soll, wo das Zeichen $\sim$ den Uebergang zu der transponierten Matrix andeuten soll, – d. h. ist $\mathbf{a} = (a_{nm})$, so ist $\tilde{\mathbf{a}} = (a_{mn})$. Es ist also

$$\overline{\tilde{\mathbf{T}}} = \mathbf{T}^{-1},$$

und daher 127

$$\sum_{kl} t_{nk}\overline{t_{ml}} H_{kl} = \sum_{kl} t_{nk} H_{kl} \overline{\widetilde{t_{lm}}} = \left(\mathbf{T}\mathbf{H}\mathbf{T}^{-1}\right)_{nm}.$$

Dass die lineare Transformation der x_n orthogonal sein soll,[48] bedeutet also nichts anderes, als dass die entsprechende Matrizentransformation kanonisch ist.

Damit ist aber schon unsere Behauptung bewiesen, denn dass die transformierte H-Matrix eine Diagonalmatrix werden soll, heisst jetzt nichts

[48] In modern notation, T is called a ’unitary operator’, see note 44.

anderes, als dass die zugehörige Hermitsche Form nur die Quadratglieder enthalten soll.

$$\sum_{nm} H_{nm} x_n \overline{x_m} = \sum_n W_n y_n \overline{y_n}$$
$$W_n = \sum_{lk} t_{nk} \overline{t_{nl}} H_{lk}$$
$$\sum_{lk} t_{nk} \overline{t_{ml}} H_{kl} = 0 \quad (n \neq m).$$

Die Energiewerte W_n der stationären Zustände sind also die Eigenwerte der Hamiltonschen Funktion H. Das Termspektrum der Physik ist also identisch mit dem mathematischen Spektrum der unendlichen Hermitschen Form.

Die Spektren unendlicher Formen sind nun unter gewissen Konvergenzvoraussetzungen ausführlich untersucht worden. Es hat sich gezeigt, dass unter ziemlich allgemeinen Voraussetzungen (beschränkte Formen) das Spektrum sich aus 2 Teilen zusammensetzt, einem gewöhnlichen diskreten Punktspektrum und einem Integralrest, dem Streckenspektrum, sodass also im allgemeinen

$$\sum_{nm} H_{nm} x_n \overline{x_m} = \sum_n W_n y_n \overline{y_n} + \int W(s) y(s) \overline{y(s)}\, ds$$

wird. Dieses Resultat ist augenscheinlich den wirklichen physikalischen Verhältnissen sehr konform, da sich, wie wir aus der Erfahrung wissen, an die diskreten Termspektren der Serien, im allgemeinen stets eine kontinuierliche
128 Mannigfaltigkeit möglicher | Zustände, also ein kontinuierliches Spektrum anschliesst. Allerdings wird man diese Zustände nicht mit der hier entwickelten Matrizenmechanik erfassen können, sondern gezwungen sein, zu allgemeineren Darstellungen quantentheoretischer Grössen überzugehen.

Das Streckenspektrum fällt nur fort unter sehr viel einschneidenderen Voraussetzungen (Vollstetigkeit), sodass hier die entwickelte Matrizenmechanik nur einen kleinen speziellen Querschnitt aus der allgemeinen Quantenmechanik bilden kann. Er umfasst nämlich nur die periodischen und mehrfachperiodischen Bewegungen, die allerdings auch eine besonders wichtige Rolle spielen. Es wird daher sehr willkommen sein, wenn wir später zu einem allgemeinen Zugang zur Quantenmechanik, nämlich der Schrödingerschen Theorie gelangen.

⟨Mehrere Freiheitsgrade⟩

Wir haben uns zunächst auf Systeme von einem einzigen Freiheitsgrad, also mit nur einem Paar **pq** beschränkt. Wir haben aber unsere Darstellung gleich so eingerichtet, dass die Uebertragung auf beliebig viele Freiheitsgrade keinerlei Schwierigkeiten mit sich bringt. Dies müssen wir zunächst ausführen.

In der ursprünglichen Quantenmechanik hing die Energie des einzelnen stationären Zustandes von f Grössen I_k, d. h. f Quantenzahlen $n_1, \ldots, n_f$ ab, wo f die Zahl der Freiheitsgrade bedeutet, und auch die Bewegung wurde durch Fourierreihen mit f Parametern dargestellt. Daher ist die nächstliegende Verallgemeinerung die Einführung $2f$- dimensionaler Matrizen, z. B.;

$$\mathbf{a} = \left(a_{m_1 \ldots m_f}^{n_1 \ldots n_f} \cdot e^{2\pi i \nu_{m_1 \ldots m_f}^{n_1 \ldots n_f} t} \right)$$

mit dem Multiplikatengesetz[49]

$$(\mathbf{ab})_{m_1 \ldots m_f}^{n_1 \ldots n_f} = \sum_{k_1 \ldots k_f} a_{k_1 \ldots k_f}^{n_1 \ldots n_f} b_{m_1 \ldots m_f}^{k_1 \ldots k_f},$$

Das Rechnen hiermit ist jedoch meistens unbequem. Man kann aber | bekanntlich jedes f-dimensionale Schema auch eindimensional ordnen. Wir ordnen deshalb jedem Wertsystem $n_1, \ldots, n_f$ eine bestimmte Zahl N zu, was ja immer möglich ist (die Numerierung ist natürlich wieder gleichgültig) und können also für 129

$$\nu_{m_1 \ldots m_f}^{n_1 \ldots n_f} = \frac{1}{h} \big[W(n_1, \ldots, n_f) - W(m_1, \ldots, m_f) \big]$$

einfacher

$$\nu_{NM} = \frac{1}{h} (W_N - W_M)$$

schreiben. Dann werden wieder alle Matrizen zweidimensional, die Multiplikationsregel lautet wie früher

$$(\mathbf{ab})_{NM} = \sum_K a_{NK} b_{KM},$$

und alle Rechengesetze bleiben erhalten. Wir nehmen deshalb als Indices wie früher kleine Buchstaben, womit dann auch die Schreibweise erhalten bleibt.

Nur ein fundamentaler Unterschied ist natürlich vorhanden, indem wir jetzt natürlich f Paare $\mathbf{p}_k$, $\mathbf{q}_k$ haben. Wir müssen deshalb zunächst die Vertauschungsaxiome erweitern. Die Analogie zu den klassischen Poissonschen Klammern, die wie früher erhalten bleibt, legt die folgenden nahe:

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}_k \mathbf{q}_l - \mathbf{q}_l \mathbf{p}_k &= \frac{h}{2\pi i} \delta_{kl} \mathbf{1} \\
\mathbf{p}_k \mathbf{p}_l - \mathbf{p}_l \mathbf{p}_k &= 0 \\
\mathbf{q}_k \mathbf{q}_l - \mathbf{q}_l \mathbf{q}_k &= 0.
\end{aligned}$$

Jedes $\mathbf{q}_k$ ist also mit allen Koordinaten und Impulsen vertauschbar ausser mit dem eigenen Impuls, und ebenso ist jeder Impuls $\mathbf{p}_k$ nicht vertauschbar

[49] Should be "Multiplikationsgesetz".

nur mit der eigenen Koordinate. Hieraus folgen wie früher die Differentiationsregeln für eine beliebige Funktion $\mathbf{f}(\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_f, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_f)$ nach den $\mathbf{p}_k$ und $\mathbf{q}_k$

130
$$\begin{aligned} \mathbf{f}\mathbf{p}_k - \mathbf{p}_k\mathbf{f} &= -\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}_k} \\ \mathbf{f}\mathbf{q}_k - \mathbf{q}_k\mathbf{f} &= +\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{p}_k}. \end{aligned}$$

Als mechanische Grundaxiome nehmen wir dann die folgenden:

1) die Vertauschungsrelationen,
2) $\mathbf{H}(\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_f, \mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_f)$ soll eine Diagonalmatrix werden
3) Es soll die Frequenzbedingung $H_n = W_n$ d. h.

$$\nu_{nm} = \frac{H_n - H_m}{h}$$

bestehen, d. h. die Energiematrix mit der Termmatrix identisch werden.

Daraus folgt dann das Bestehen der kanonischen Gleichungen in der Form

$$\begin{aligned} \mathbf{W}\mathbf{q}_k - \mathbf{q}_k\mathbf{W} &= \mathbf{H}\mathbf{q}_k - \mathbf{q}_k\mathbf{H} \\ \mathbf{W}\mathbf{p}_k - \mathbf{p}_k\mathbf{W} &= \mathbf{H}\mathbf{p}_k - \mathbf{p}_k\mathbf{H} \end{aligned}$$

und mit den Differentiations-Regeln auch in der Form

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}_k &= \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{p}_k} \\ \dot{\mathbf{p}}_k &= -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{q}_k}, \end{aligned}$$

und es bleiben auch alle weiteren Folgerungen, also auch die Theorie der kanonischen Transformationen und der Hermitischen Formen erhalten.[50]

⟨Theorie der unendlich vielen Variablen und Integralgleichungen⟩

⟨Rückblick auf die Entwicklung der Quantenmechanik⟩

Ehe wir weiter gehen, wollen wir uns noch einmal die drei grossen Entwicklungsepochen der theoretischen Physik vor Augen führen. Die 1. war die klassische Mechanik. Es schien, dass nur in ihrem Rahmen Naturkräfte, wie die Newtonschen Anziehungskräfte, aber auch elektrische Kräfte heranzuziehen wären, um damit die Gesetze der Materie zu beherrschen. Dass dem nicht so

131 sei, | zeigte die zweite Entwicklungsstufe, die klassische Elektrodynamik. Auch sie bildet ein geschlossenes System mit einem vollendeten mathematischen Aufbau. Sie erklärte die ganze reiche Fülle der makroskopischen Tatsachen und gewann auch denen der Mechanik neue Seiten ab. Ihre teilweise ganz neuartigen Begriffsbildungen erhielten dabei eine unerhörte Höhe durch die Relativitätstheorie. Die mechanischen Prinzipien waren hiernach nur grobe Annäherungen, nur gültig für makroskopische Vorgänge, jedoch keinesfalls definitive Naturgesetze. Aber als Aufklärungsinstrument für die Vorgänge und den Aufbau der Atome und Moleküle versagte auch die Elektrodynamik, und hier hat uns erst die dritte Epoche Aufklärung gebracht, nämlich die Quantentheorie. Diese griff merkwürdigerweise – und für den Theoretiker jedenfalls ganz unerwartet – zunächst wieder auf die klassische Mechanik und deren Begriffsbildungen zurück, die in der eigenartigen Form der Hamilton-Jacobischen Theorie benutzt werden. Dazu treten die beiden grundlegenden Axiome der Quantentheorie 1) die Quantelungsvorschrift $I = nh$ 2) Die Frequenzbedingung $h\nu =$ Energiedifferenz, wozu dann noch das Korrespondenzprinzip als Lückenbüsser trat. Dieser Zustand dauerte eine geraume Zeit, ohne dass wesentliche Fortschritte erzielt wurden. Auch die neue Quantentheorie knüpfte wieder an die Methoden der Jacobischen Dynamik an, aber die p, q sind nicht mehr gewöhnliche Zahlen, sondern Matrizen.

Wie wir zeigten, lief das Integrationsproblem der Quantenmechanik auf die Aufgabe hinaus, eine aus der Energiefunktion $H(p, q)$ des mechanischen Systems zu konstruierende quadratische Funktion von unendlich vielen Variablen orthogonal auf eine Quadratsumme zu transformieren. Dies ist nun ein bekanntes und viel behandeltes Problem der Mathematik, ein Problem, das mit den einfachsten und wichtigsten Fragen der Differential- und Integral|gleichungen 132
zusammenhängt. Wir müssen es zunächst genauer erörtern, zumal die neueste Entwicklung der Quantentheorie diese mathematische Theorie ganz in ihren Dienst gestellt hat und ihr Verständnis gebieterisch fordert.

⟨Bilineare und quadratische Formen⟩

Quadratische bzw. bilineare Formen mit endlich vielen Variablen spielen auf allen Gebieten eine grosse Rolle, so in der Algebra (Gleichungstheorie) der Invariantentheorie (lineare Transformationen), der Geometrie (Kegelschnitte, Komplexe, Cykliden), der Mechanik (Schwingungen usw.) den Differentialgleichungen. Daher ist schon an sich die Bedeutung der Ausdehnung dieser Theorie auf unendliche Zahl der Variabeln einleuchtend.

Wir können natürlich hier nur eine Übersicht über die Ergebnisse geben, wobei wir uns zunächst auch noch auf reelle Formen beschränken. Der Übergang zu

[50] There is some space in the typescript between this and the following paragraph. In that space, Hilbert wrote with pencil, and later erased it again:
"Nun S. 117–121 Vgl. Haas S. 75–79 unten". The reference is to *Haas 1928*, cf. note 35 above.

den hermitischen Formen bringt im allgemeinen keine neuen Komplikationen. Hinsichtlich der Literatur und genauerer Ausführungen sei ausser auf mein Buch auf den Encyklopaedieartikel von Hellinger und Töplitz verwiesen.[51] Unter einer unendlichen quadratischen Form verstehen wir den Ausdruck

$$K(x) = \sum_{(n,m=1,\dots)} k_{nm} x_n x_m,$$

der reellen Variablen $x_1, x_2, \dots$, wobei die Koeffizienten $k_{nm} = k_{mn}$ feste gegebene Konstante sind, und die Indices n und m die Reihe aller ganzen Zahlen $1, 2, \dots$ durchlaufen. Daneben betrachten wir noch Bilinearformen der Gestalt

$$A(x,y) = \sum_{nm} a_{nm} x_n y_m.$$

Zu jeder quadratischen Form $K(x)$ gehört eine korrespondierende Bilinearform $K(x,y)$. Lassen wir die Indices, n, m nur die Werte $1, \dots, r$ durch-
133 laufen, | wo r eine natürliche Zahl bedeutet, so nennen wir die so entspringende endliche Form

$$K_r(x) = \sum_{nm=1,\dots,r} k_{nm} x_n x_m \qquad \text{bzw.} \qquad A_r(x,y) = \sum_{nm=1,\dots,r} a_{nm} x_n y_m$$

den r.ten Abschnitt von $K(x)$ bzw. $A(x,y)$. Ausserdem führen wir noch die speziellen Formen

$$(x,x) = x_1^2 + x_2^2 + \dots$$
$$(x,y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots$$

ein.

⟨Das Hauptachsenproblem für endliche Formen⟩

Die oben gestellte Aufgabe ist nun die, durch eine lineare Transformation der x die Form K in eine Quadratsumme

$$K(x) = \frac{X_1^2}{\lambda_1} + \frac{X_2^2}{\lambda_2} + \dots$$

überzuführen, wobei aber die Form der x selbst invariant bleiben soll

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots = X_1^2 + X_2^2 + \dots .$$

Für endliche Formen $K_r(x)$ ist die Lösung des Problems wohl bekannt und bereitet keine Schwierigkeiten. Man betrachtet die Form

$$(x,x)_r - \lambda K_r(x).$$

[51] See *Hilbert 1912c* and *Hellinger and Toeplitz 1927*.

Ihre Diskriminante, d. h. die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda k_{11} & -\lambda k_{12} & \dots & -\lambda k_{1r} \\ -\lambda k_{21} & 1-\lambda k_{22} & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\lambda k_{r1} & \dots & \dots & 1-\lambda k_{rr} \end{vmatrix}$$

ist bekanntlich eine ganze rationale Funktion r.ten Grades in λ mit lauter reellen Nullstellen $\lambda_1^{(r)}, \dots, \lambda_r^{(r)}$. | Diese heissen die Eigenwerte[52] der Form 134
K_r, und diese lässt sich selbst stets auf nur eine Weise durch eine lineare orthogonale Transformation auf die Gestalt

$$K_r(x) = \frac{X_1^2}{\lambda_1^{(1)}} + \dots + \frac{X_r^2}{\lambda_r^{(r)}}$$

bringen, sodass auch

$$(x,x)_r = (X,X)_r$$

ist. Ferner hat das inhomogene[53] Gleichungssystem

$$\begin{aligned} (1-\lambda k_{11})x_1 - \quad\quad \lambda k_{12}x_2 - \dots - \lambda k_{1r}x_r &= 0 \\ -\lambda k_{21}x_1 + (1-\lambda k_{22})x_2 - \dots \quad\quad &= 0 \\ \vdots \quad\quad\quad\quad\quad\quad &\vdots \end{aligned}$$

nur eine Lösung, wenn λ ein Eigenwert ist. Das inhomogene Gleichungssystem, das entsteht, wenn man die linken Seiten der obigen Gleichungen gleich beliebigen Konstanten setzt, von denen mindestens eine $\neq 0$ ist, hat nur eine Lösung, und zwar eine einzige Lösung, wenn die homogene Gleichung nicht lösbar ist. Dies ist die bekannte Alternative.[54]

⟨Beschränkte Formen⟩

Es fragt sich nun, inwieweit sich diese Resultate auf unendliche Formen übertragen lassen, bzw. was sich hierbei ändert. Natürlich kann man nicht ganz beliebige Formen zulassen, da solche unendlichen Summen jeden Sinn verlieren können, sondern man muss passende Einschränkungen machen.

In der Physik wird man erwarteten, dass nur solche Formen vorkommen werden, bei denen sich unsere früheren Rechenregeln, d. h. insbesondere die Multiplikation, unbeschränkt ausführen lassen und dies ist dort die eigentlich

[52] In modern notation, the inverse values $1/\lambda_i^{(r)}$ are called the 'eigenvalues' of K_r. In later parts of the lecture, however, Hilbert's use of the term "Eigenwert" conforms with the modern notation, see, e.g. 646ff.

[53] Should be: 'homogene'.

[54] Cf. p. 649 below.

wesentliche Voraussetzung. Man hat nun auch in der Mathematik einen gewissen recht allgemeinen Bereich abgegrenzt, und für den dieses erfüllt ist, und für ihn die Theorie durchgeführt. Dies ist der Bereich der beschränkten For-
135 men, der | wahrscheinlich auch schon alles für die Physik Wesentliche enthält, und den wir hier deshalb allein erörtern wollen.

Die Bedingungen für die Beschränktheit sind zweierlei Art. Erstens dürfen wir natürlich auch den Wertebereich, den die Variabeln x_n durchlaufen können, nicht ganz beliebig lassen, wenn nicht sofort alles divergent werden soll. Wir fordern

$$(x, x) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots \leq 1,$$

was natürlich noch keine Einschränkung für die Form $K(x)$ bzw. die Bilinearform $A(x, y)$ selbst bedeutet. Diese wird erst durch die zweite Bedingung berührt, die besagt: Es sollen alle Abschnitte der Form unter einer endlichen Grenze bleiben

$$|A_r(x, y)| \leq \mathfrak{M}$$

sein, wo $\mathfrak{M}$ eine von der Wahl des Abschnitts unabhängige Konstante bedeutet, sobald nur die Variable x_n, y_n den obigen Bedingungen

$$(x, x) \leq 1, \quad (y, y) \leq 1$$

genügen. Ist diese Forderung erfüllt, so nennt man die Form $A(x, y)$ eine beschränkte Form. Der wesentliche Punkt hierbei ist, dass eine beschränkte Form eine wirkliche Funktion der Variablen x_n, y_n darstellt. Ein nichttriviales Beispiel ist etwa

$$K(x) = \sum_{nm} \frac{x_n x_m}{n + m}.$$

136 Unter der Voraussetzung der Beschränktheit ist die | Multiplikation zweier Formen stets ausführbar. Dabei entspricht dem Matrizenprodukt vom Standpunkt der Formen der Prozess der Faltung, die durch

$$A(x, \cdot)B(\cdot\,, y) = \sum_n \frac{\partial A(x, y)}{\partial y_n} \frac{\partial B(x, y)}{\partial x_n}$$

definiert ist. Sind A und B beschränkt, so ist also auch immer $A(x, \cdot)B(\cdot\,, y)$ eine beschränkte Form. Der Begriff der Beschränktheit lässt sich natürlich auch auf Linearformen übertragen. Wir nennen eine Linearform

$$L(x) = l_1 x_1 + l_2 x_2 + \ldots$$

beschränkt, wenn die Summe der Quadrate der Koeffizienten

$$l_1^2 + l_2^2 + \ldots$$

konvergiert. Das ist natürlich die Bedingung, dass L einen endlichen Wert hat, wenn

$$(x, x) \leq 1$$

ist.

⟨Orthogonale Transformationen unendlich vieler Variabeln⟩

Wir entwickeln nunmehr noch den Begriff der orthogonalen Transformation unendlich vieler Variablen. Eine lineare Transformation

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}x'_1 + a_{12}x'_2 + \dots \\ x_2 &= a_{21}x'_1 + a_{22}x'_2 + \dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

nennen wir orthogonal, wenn die Bedingungen

$$\begin{aligned} \sum_m a_{nm}^2 &= \sum_n a_{nm}^2 = 1 \\ \sum_l a_{nl}a_{ml} &= \sum_l a_{ln}a_{lm} = 0 \qquad (n \neq m) \end{aligned}$$

bestehen. In diesem Falle ist die zugehörige Bilinearform

$$O(x, x') = \sum_{nm} a_{nm}x_n x'_m$$

beschränkt und man erhält die inverse Transformation durch Transponierung 137
der Matrix O_{nm}

$$\begin{aligned} x'_1 &= O_{11}x_1 + O_{21}x_2 + \dots \\ x'_2 &= O_{12}x_1 + O_{22}x_2 + \dots \\ &\vdots \qquad\qquad . \end{aligned}$$

⟨Hauptachsentransformation beschränkter Formen⟩

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun das Analogon zu dem Transformationssatz der endlichen Formen aussprechen. Wir geben dabei eine etwas vereinfachte Form, die noch gewisse Differenzierbarkeitsvoraussetzungen erfordert. Das Theorem lautet dann: Jede beschränkte quadratische Form unendlich vieler Variablen lässt sich stets und nur auf eine Weise durch eine orthogonale Transformation auf die Gestalt

$$K = k_1x_1^2 + k_2x_2^2 + \dots + \int\limits_S \frac{\left[\psi_1(\lambda)\xi_1 + \psi_2(\lambda)\xi_2 + \dots\right]^2}{\lambda}\, d\lambda$$

bringen. Hierbei sind die $k_1, \dots, k_n, \dots$ gewisse, absolut unterhalb einer endlichen Grenze liegenden Grössen (die reziproken Eigenwerte[55]), den Integrationsbereich S bilden gewisse Stücke der λ-Achse, die auch ins Unendliche

[55] See note 52 above.

gehen dürfen, und die Funktionen $\psi_1, \psi_2, \ldots$ geben ein vollständiges Orthogonalsystem über dem Grundgebiet S. D. h. es gilt für sie die Orthogonalitätsbedingung

$$\int\limits_S \psi_n \psi_m \, d\lambda = \delta_{nm},$$

und die Vollständigkeitsrelation, d. h. aus

$$\int\limits_S f(\lambda)\psi_n \, d\lambda = 0 \qquad \text{(für alle } n\text{)}$$

folgt $f(\lambda) = 0$. [[56]Dass das obige Integral eine beschränkte Form der ξ_n ist,
138 ist leicht | einzusehen. Sei s_1 der kleinste Wert, den λ annehmen kann also die untere Grenze des Integrationsintervalls, die ja $\neq 0$ ist, so ist

$$\left| \int\limits_S \frac{[\psi_1\xi_1 + \ldots]^2}{\lambda} \, d\lambda \right| < \frac{1}{s_1} \int (\psi_1\xi_1 + \ldots)^2 \, d\lambda$$
$$= \frac{1}{s_1}(\xi_1^2 + \ldots) \leq \frac{1}{s_1},$$

w. z. b. w.

Die Form zerfällt also in 2 Teile, den diskreten Teil $K(x)$ und den Integralrest. Wir haben also ein diskretes Punktspektrum der Eigenwerte, nämlich $\lambda_n = \frac{1}{k_n}$, und das Streckenspektrum S. Diese Darstellung ist dabei äusserst allgemein, z.B. können die λ_n überall ausser bei 0 Verdichtungsstellen aufweisen. Interessant sind natürlich die Fälle, in denen nur eines dieser Spektren vorhanden ist.

⟨Stetige Formen⟩

Stellt die Form $K(x)$ eine stetige Funktion dar (Vollstetigkeit der Form), d. h. ist

$$\lim_{\varepsilon_1=0,\varepsilon_2=0,\ldots} K(x_1+\varepsilon_1, x_2+\varepsilon_2, \ldots) = K(x_1, x_2, \ldots),$$

wie man auch immer die $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ für sich zu null werden lässt so fällt das Streckenspektrum ganz fort und es bleibt nur das Punktspektrum. Die stetigen Formen stellen so in allen Stücken das Analogon zu den endlichen Formen dar. [[57]Dass andererseits eine Form mit einem Streckenspektrum niemals eine stetige Funktion sein kann, sieht man wie folgt ein. Verstehen wir unter s_2

[56] The closing bracket is missing, it should be placed after the following proof.

[57] The closing bracket is missing, it should be placed after after the first break of p. 140.

die obere Grenze des Integrationsintervalls von λ, so ist der Koeffizient von ξ_n^2

$$\int\limits_S \frac{\psi_n^2}{\lambda}\, d\lambda > \frac{1}{s_2}.$$

Eine Form mit dieser Eigenschaft, dass alle k_{nm} grösser als | ⟨ein⟩ bestimmter 139
$\neq 0$ Wert sind, kann keine stetige Funktion darstellen. Wählen wir z. B. nacheinander für die Variabeln ξ die Wertsysteme

$$\begin{array}{llll} \xi_1 = 1, & \xi_2 = 0, & \xi_3 = 0, & \dots \\ \xi_1 = 0, & \xi_2 = 1, & \xi_3 = 0, & \dots \\ \vdots & & & \\ \xi_1 = 0, & \xi_2 = 0, & \xi_3 = 0, & \dots, \end{array}$$

so ist jedesmal $K(x) > \frac{1}{s_2}$. In der Grenze nach unten wird aber $K(x) = 0$, was der Stetigkeitsvoraussetzung widerspricht. Diesselbe Überlegung zeigt auch, dass die k_n selbst sich an keiner Stelle ausser bei Null verdichten dürfen (die Eigenwerte λ_n also nicht im Endlichen); d. h. die k_{nm} müssen bei einer stetigen Form gegen null konvergieren.

Ein Beispiel andererseits für eine beschränkte Form, bei der nur ein Streckenspektrum auftritt, ist

$$K(x) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + \dots\ .$$

Das Integrationsgebiet für λ läuft hierbei von $-\infty$ bis -1 und von $+1$ bis $+\infty$, und die Eigenfunktionen sind

$$\psi_n(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{\cos t}{\sqrt{\sin t}} \sin nt$$
$$\text{wo} \quad t = \arccos \tfrac{1}{\lambda}.$$

Die entsprechenden Eigenwertgleichungen

$$\begin{aligned} x_1 - \tfrac{\lambda}{2} x_2 \qquad\quad &= 0 \\ x_2 - \tfrac{\lambda}{2}(x_1 + x_3) &= 0 \\ x_3 - \tfrac{\lambda}{2}(x_2 + x_4) &= 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

haben entsprechend unserem Satze daher für keinen Wert von λ Lösungen 140
$x_1, x_2, x_3, \dots$, deren Quadratsumme endlich bleibt.

Das volle Analogon zu den endlichen Formen bilden wie gesagt, die stetigen Formen. Hier gilt auch wieder die Alternative, dass die inhomogenen linearen

Gleichungen nur lösbar sind, wenn die homogenen Gleichungen lösbar[58] sind. Letztere können mehrere voneinander linear unabhängige Lösungen haben. Dann ist natürlich auch der entsprechende Eigenwert vielfach. Hat ein System einen Eigenwert mit der Vielfachheit e, so hat auch das transponierte System einen Eigenwert von derselben Vielfachheit. Dagegen ist eine Vielfachheit unendlich hoher Ordnung offenbar ausgeschlossen, da dann wie oben gezeigt, die Stetigkeit nicht gewahrt bleiben kann.

Die Theorie der unendlich vielen Variablen liefert auch den einfachsten Weg zu der Theorie der Integralgleichung, denen wir uns jetzt zuwenden. Von den letzteren kann man dann weiter leicht zu den Eigenwertproblemen der Differentialgleichungen gelangen, die unser eigentliches Ziel bilden. Dabei sind alle Beweise, die wir aber nicht alle durchführen, ausserordentlich einfach und elegant.

⟨Orthogonale Funktionensysteme⟩

Das Bindeglied zwischen der Theorie der unendlich vielen Variablen und der Integralgleichungen bilden die vollständigen Orthogonalsysteme von Funktionen, die uns schon bei dem Darstellungssatz begegneten, d. h. ein System von unendlich vielen Funktionen $\psi_1, \psi_2, \ldots$ einer Variabeln s, die in einem Intervall $s = a$ bis $s = b$ folgende Eigenschaften erfüllen.
1) die Orthogonalitätseigenschaft

$$\int_a^b \psi_n(s)\psi_m(s)\, ds = \delta_{nm},$$

141 2) die Vollständigkeitsrelation, d. h. die Eigenschaft, dass aus

$$\int_a^b f(s)\psi_n\, ds = 0$$

für alle n, $f = 0$ folgt.
Ist $f(s)$ irgendeine Funktion von s im Intervall $a-b$, so nennt man die Integrale

$$\int_a^b f(s)\psi_n\, ds$$

die Fourierkoeffizienten oder die Komponenten der Funktion $f(s)$ in Bezug auf das Orthogonalsystem. Aus dem Verschwinden der Komponenten folgt also nach der Vollständigkeitsrelation das Verschwinden von f selbst.

[58] Should be: “nicht lösbar”, cf. p. 637 and p. 649.

⟨Lineare Integralgleichungen, die Fredholmschen Sätze⟩

Die Sätze über Integralgleichungen teilen sich nach ihrer historischen Entwicklung in zwei Gruppen, die Fredholmschen Sätze über die Lösungen, und andererseits die Entwicklungssätze, die von mir herrühren.[59]

Unter einer gewöhnlichen linearen Integralgleichung zweiter Art versteht man die Gleichung

$$f(s) = \varphi(s) + \int_a^b K(s,t)\varphi(t)\,dt,$$

wo $K(s,t)$ eine gegebene Funktion der 2 Variablen s und t, der sogenannte Kern, und $f(s)$ eine ebenfalls gegebene Funktion von s ist. Gesucht ist die Funktion φ. Ist f identisch null, so nennt man die Integralgleichung homogen, sonst inhomogen.

Wir konstruieren uns nun zu jeder Integralgleichung eine Bilinearform vermittels eines vollständigen Orthogonalsystems $\psi_1, \psi_2, \ldots$ nach der Definition

$$a_{nm} = \int_a^b \int_a^b K(s,t)\psi_n(s)\psi_m(t)\,ds\,dt; \quad A(x,y) = \sum_{nm} a_{nm}x_n y_m.$$

Diese Bilinearform ist sogar vollstetig, denn man kann leicht | zeigen, dass 142

$$\sum_{nm} a_{nm}^2 \leq \int_a^b \int_a^b K(s,t)^2\,ds\,dt.$$

Setzt man nun noch

$$a_n = \int_a^b f(s)\psi_n(s)\,ds$$

$$x_n = \int_a^b \varphi(s)\psi_n(s)\,ds,$$

so bekommt man für die Koeffizienten x_n das System unendlich vieler linearer Gleichungen

$$a_n = x_n + \sum_m a_{nm}x_m.$$

Wenn nun ein System von x_n gefunden ist, das diesen Gleichungen genügt, so stellt

$$\varphi = \sum_n x_n\psi_n$$

[59]See *Fredholm 1903* and *Hilbert 1912c*.

eine Lösung der Integralgleichung dar.

Wegen der Vollstetigkeit von $A(x, y)$ sind hier alle oben ausgesprochenen Sätze anwendbar. Also ist die Integralgleichung für alle Funktionen $f(s)$ lösbar, es sei denn, dass die homogene Gleichung eine Lösung hat. Diese selbst kann höchstens eine endliche Anzahl e linear unabhängiger Lösungen haben. In diesem Falle gibt es auch, wie leicht zu zeigen, einen Satz von l Funktionen

$$\chi_1(s), \ldots, \chi_l(s),$$

sodass

$$\int f(s)\chi_1(s)\,ds = 0\,, \ldots, \int f(s)\chi_l(s)\,ds = 0$$

die Bedingungen dafür darstellen, dass die inhomogene Gleichung eine Lösung
143 besitzt. Erfüllt $f(s)$ diese Bedingung nicht, | so hat die Integralgleichung keine Lösung. Dies sind die Fredholmschen Sätze. Die so erhaltenen Lösungen der Integralgleichungen sind übrigens von der Wahl des Orthogonalsystems wesentlich unabhängig. Der Uebergang zu einem anderen entspricht nur einer orthogonalen linearen Transformation der Bilinearform.

⟨Das Eigenwertproblem orthogonaler Integralgleichungen, Entwicklungssätze⟩

Wir kommen nun zu den Entwicklungssätzen, die sich ebenso einfach erledigen lassen. Wir legen dabei die sogenannte orthogonale Integralgleichung

$$\varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s,t)\varphi(t)\,dt = f(s)$$

zu Grunde, die sich durch den Faktor λ von der bisherigen unterscheidet. Ausserdem soll der Kern jetzt symmetrisch in s und t sein. Das entsprechende System linearer Gleichungen ist genau das Eigenwertsystem

$$\begin{aligned} (1-\lambda k_{11})x_1 - \quad \lambda k_{12}x_2 - \ldots &= a_1 \\ -\lambda k_{21}x_1 + (1-\lambda k_{22})x_2 - \ldots &= a_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad &\vdots \end{aligned}$$

mit den Koeffizienten

$$k_{nm} = \int_a^b\int_a^b K(s,t)\psi_n(s)\psi_m(t)\,ds\,dt,$$

die wieder eine stetige quadratische Form bilden. Die Eigenwerte d. h. die Werte, für die die homogenen Gleichungen lösbar sind, sind dabei unabhängig von der Wahl des Orthogonalsystems. Zu jedem Eigenwert λ_n gehört

eine Lösung der homogenen Gleichung: die zugehörige Eigenfunktion φ_n (Ist der Eigenwert mehrfach, so gehört zu ihm eine entsprechende Anzahl unabhängiger Eigenfunktionen. Ihre Zahl ist stets endlich). Die Eigenfunktionen φ_n bilden selbst wieder ein orthogonales | Funktionensystem. D. h. es gelten 143a
für sie die Orthogonalitätsrelationen

$$\int\limits_a^b \varphi_n \varphi_m \, ds = \delta_{nm},$$

sowie die Vollständigkeitsrelation, die auch in der Form

$$\int\limits_a^b f^2 \, ds = \sum_n \left(\int\limits_a^b f \varphi_n \, ds \right)^2$$

geschrieben werden kann. (Aus dieser Form folgt die früher angegebene natürlich sofort, da das Integral über das Quadrat einer Funktion nur verschwinden kann, wenn diese selbst identisch null ist).

Nimmt man für λ einen Eigenwert λ_n an, so ist die inhomogene Gleichung nur lösbar, wenn die Funktion $f(s)$ der Relation

$$\int f(s)\varphi_n(s) \, ds = 0$$

genügt (bei mehrfachen Eigenwerten muss diese Relation natürlich für alle zugehörigen Eigenfunktionen erfüllt sein).

Wir fragen nun, wann sich willkürliche Funktionen nach den Eigenfunktionen φ_n entwickeln lassen. Die Antwort liefert der Hilbertsche Entwicklungssatz:

Es lässt sich jede Funktion $f(s)$ nach den Eigenfunktionen φ_n einer Integralgleichung mit dem Kern $K(s,t)$ entwickeln, wenn sie in der Form

$$f(s) = \int\limits_a^b K(s,t) g(t) \, dt$$

darstellbar ist, wo $g(t)$ eine ganz beliebige stetige Funktion sein kann. Dann gilt also für $F(s)$ eine Reihenentwicklung

$$f(s) = \sum_n c_n \varphi_n(s),$$

wobei die Koeffizienten durch

$$c_n = (f\varphi_n) = \int\limits_a^b f(s)\varphi_n(s) \, ds$$

geliefert werden. Die obige Forderung verlangt nun sehr wenig für die Funktion $f(s)$, so dass das Theorem einen sehr weiten Geltungsbereich hat. Insbesondere ist es auch keineswegs auf einfache Integrale beschränkt, sondern es überträgt sich auch ohne weiteres auf Integralgleichungen mit beliebig viel Veränderlichen und entsprechend mehrfachen Integralen. 144

⟨Lineare Differentialgleichungen, die Parametrix⟩

Wir gehen jetzt zu der Theorie der linearen Differentialgleichungen über. Diese ist eigentlich schon ganz in der Theorie der Integralgleichungen enthalten, und zwar an sich sowohl für beliebige Ordnung der Differentialgleichungen, wenn man auch gewöhnlich in der Physik mit der zweiten Ordnung auskommt, als auch für beliebige Variabelnzahl, d. h. partielle Differentialgleichungen. Um diese Übertragung so einfach und leicht wie möglich zu gestalten, geben wir ein möglichst einfaches Beispiel, das aber durchaus typisch ist, und alle wesentlichen Punkte bereits deutlich macht. Die dabei angewandte Methode ist leicht auf die allgemeinsten Fälle zu erweitern.

Wir betrachten die Differentialgleichungen

$$u''(x) + k(x)u = g(x) \tag{1}$$

$$L(u) + \overline{\lambda}u = 0,^{\langle 60\rangle} \tag{2}$$

wobei $L(u)$ die linke Seite von 1, also ein linearer Differentialausdruck zweiter Ordnung sein soll.

1) entspricht der inhomogenen Integralgleichung

2) dagegen der homogenen mit dem Eigenwertparameter λ.

In der gewöhnlichen Theorie der Differentialgleichungen sucht man die Lösungen und bestimmt die Integrationskonstanten derart, dass die Anfangs- bzw.
145 Randbedingungen befriedigt werden. | Der Einfachheit halber spezialisieren wir auch die letztere, indem wir

$$u(0) = 0, \quad u'(1) = 0$$

nehmen. Das Grundgebiet, für das die Lösung gesucht ist, ist also die Strecke von 0 bis 1.

Nun setzen wir dieses Differentialgleichungsproblem in eines der linearen Integralgleichungen um. Dabei erzielt man gleichzeitig den Vorteil, dass die Randbedingungen gewissermassen mit in diese hineingezogen wird, und nicht mehr gesondert auftritt.

Die Vermittlung geschieht durch eine in ihren Argumenten x und ξ symmetrische Funktion $v(x, \xi)$, die Parametrix genannt wird, und die folgenden Eigenschaften besitzen muss: Sie soll die Randbedingungen erfüllen und zwar

[60] Should be: $L(u) + \lambda u = 0$, cf. 649.

für alle Werte von ξ, und sie soll zweitens stetig und regulär sein mit Ausnahme des Punktes $x = \xi$, an dem sie eine vorgeschriebene Singularität besitzen soll. Diese soll so beschaffen sein, dass zwar v selbst an dieser Stelle stetig ist, jedoch ihre erste Ableitung

$$v' = \frac{dv(x,\xi)}{dx}$$

an dieser Stelle $x = \xi$ einen Sprung um -1 macht. Dagegen braucht nicht verlangt werden, dass sie der Differentialgleichung selbst genügt, wie dies von der sogenannten Greenschen Funktion, der man sich meistens bedient, gefordert wird.

Für unsere Randbedingungen nimmt man als Parametrix die Funktion

$$\begin{aligned} v &= x \quad \text{für} \quad x \leq \xi \\ v &= \xi \quad \text{für} \quad x \geq \xi, \end{aligned}$$

die in der Tat alle unsere Bedingungen erfüllt, denn es ist in der Tat

146 $$v' = 1 \quad \text{für} \quad x < \xi, \qquad v' = 0 \quad \text{für} \quad x > \xi.$$

Für Differentialausdrücke der obigen Form gilt nun die sogenannte Greensche Formel

$$\int_0^1 \big(uL(v) - vL(u)\big)\,dx = \int_0^1 \frac{d}{dx}(uv' - u'v)\,dx.$$

Die Bedingung für diese Formel ist, dass der Differentialausdruck selbstadjungiert ist, was im wesentlichen darauf hinaus läuft, dass er als Variationsableitung eines Variationsprinzips gewonnen werden kann. Für unsere spezielle Form ist dies erfüllt.

Als Funktion v, die in obiger Formel noch ganz beliebig ist, nehmen wir jetzt die Parametrix. Dann wird die rechte Seite wegen der Unstetigkeit des Integranden

$$\begin{aligned} \int_0^\xi \frac{d}{dx}(uv' - u'v)\,dx + \int_\xi^1 \frac{d}{dx}(uv' - u'v)\,dx &= \big[uv' - vu'\big]_0^\xi + \big[uv' - vu'\big]_\xi^1 \\ &= u(\xi) - \xi u'(\xi) + \xi u'(\xi) = u(\xi), \end{aligned}$$

und die Greensche Formel erhält die Gestalt

$$u(\xi) - \int_0^1 L(v)u(x)\,dx = -\int_0^1 vL(u)\,dx.$$

Fassen wir u als die gesuchte Funktion auf, die der obigen Differentialgleichung (1) Seite 144 genügen soll, so wird die rechte Seite ihr zufolge ein bekannter

Ausdruck in ξ

$$f(\xi) = -\int_0^1 v(x)g(x)\,dx$$

und wir erhalten gerade eine lineare Integralgleichung für u

$$u(\xi) - \int_0^1 L(v)u(x)\,dx = f(\xi),$$

147 deren Kern $K(x,\xi) = L\big(v(x,\xi)\big)$ ist. | Die Randbedingungen sind also dabei, wie schon angekündigt, in die Integralgleichung mit hineingezogen und zwar mit Hilfe der Parametrix.

Man sieht nun auch, wie dieses Verfahren auf beliebige Randbedingungen zu verallgemeinert ist. Man hat die Parametrix so zu wählen, d. h. ihre Singularität so abzupassen, dass auf der rechten Seite der Greenschen Formel gerade $u(\xi)$ herauskommt.

Nachdem wir nun die Lösung der Differentialgleichung auf eine Integralgleichung zurückgeführt haben, können wir die Entwicklungs- und Existenzsätze der letzteren ohne weiteres übertragen. Daher haben wir folgende Fälle zu unterscheiden:

Erster Fall: Die homogene Integralgleichung

$$u(\xi) = \int_0^1 L(v)u(x)\,dx$$

hat k e i n e Lösung (ausser $u(x) = 0$). Dann hat nach unseren allgemeinen Sätzen die inhomogene Integralgleichung

$$u(\xi) - \int_0^1 L(v)u(x)\,dx = f(x)$$

eine Lösung, die wir $u^*(x)$ nennen wollen. Für diese gilt dann wegen

$$L(v) = k(x)x \quad \text{für} \quad x \leq \xi, \quad L(v) = k(x)\xi \quad \text{für} \quad x \geq \xi$$

auf Grund der Integralgleichung

$$\begin{aligned} u^*(\xi) = &\int_0^\xi u^*(x)k(x)x\,dx + \xi\int_\xi^1 u^*(x)k(x)\,dx \\ &- \int_0^\xi g(x)x\,dx - \xi\int_\xi^1 g(x)\,dx. \end{aligned}$$

Damit bekommen wir für die erste Ableitung

$$\frac{du^*(\xi)}{d\xi} = u'^*(\xi) = \int_\xi^1 u^*(x)k(x)\,dx - \int_\xi^1 g(x)\,dx,$$

da sich alle anderen Glieder wegheben. Weiter bekommen wir für die zweite Ableitung

148 $$u^{*\prime\prime}(\xi) = -u^*(\xi)k(\xi) + g(\xi).$$

Die letzte Gleichung sagt aber nichts anderes, als dass u^* tatsächlich eine Lösung der Differentialgleichung ist.

Im zweiten Falle, dass die homogene Integralgleichung l ö s b a r ist, also eine Lösung $u^* = 0$ besitze,[61] zeigt man auf dieselbe Weise, dass diese Funktion auch eine Lösung der homogenen Differentialgleichung ist.

Wir erhalten also für die Lösung des Randwertproblems dieselbe Alternative. Entweder ist das inhomogene Problem lösbar, dann ist es das homogene nicht, und umgekehrt.[62]

Auf diese Weise kann man nun das Eigenwertproblem mit einem Parameter

$$L(u) + \lambda u = 0$$

behandeln, das natürlich auf die orthogonale Integralgleichung

$$u(\xi) = \lambda \int L(v)u(x)\,dx$$

führt. Das aus der Integralgleichungstheorie folgende Resultat ist dann folgendes: Jede solche Differentialgleichung (N.B. wenn sie selbstadjungiert ist) gestattet eine Lösung des Randwertproblems nur für spezielle Werte des Parameters λ, die sogenannten Eigenwerte, die jedoch in unendlicher Anzahl vorhanden sind

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots$$

Die entsprechenden Lösungen der Differentialgleichung, die Eigenfunktionen

$$u_1, u_2, \ldots\ .$$

bilden dann ein vollständiges, orthogonales Funktionensystem, nach dem also alle beliebigen Funktionen im Grundgebiet entwickelt werden können, wenn | 149
sie nur „quellenmässig“, d. h. in der Form

$$f(\xi) = \int L(v)f(x)\,dx$$

darstellbar sind. Alle diese Resultate sind, wie schon gesagt, sehr allgemein und nicht auf unser spezielles Beispiel beschränkt.

[61] Should be: $u^* \neq 0$.

[62] Cf. p. 637 above.

⟨Die Schrödingersche Differentialgleichung⟩

Wir haben jetzt die Zusammenhänge zwischen den Theorien der unendlich vielen Variabeln, den Integralgleichungen und den Eigenwertproblemen der Differentialgleichungen klargelegt. Der Hauptzweck unserer Darlegungen war dabei, Klarheit über das mathematische Problem der Transformation einer unendlichen quadratischen Form auf Hauptachsen zu erhalten, dass sich als das Grundproblem der Quantenmechanik erwiesen hatte. Wir werden also erwarten können, dass sich auch den Quantenproblemen eine Differentialgleichung zuordnen lässt. Dies ist in der Tat auch der Fall, und man gelangt so zu der berühmten Theorie von Schrödinger, der aber selbst auf einem anderen, ganz merkwürdigen Wege zu ihr gekommen war.[63]

Die Grundlage der ganzen Überlegung ist wie bisher die Hamiltonsche Funktion, d. h. die Energie als Funktion der Koordinaten und Impulse. Aus ihr werden die klassischen Bewegungsgleichungen in der kanonischen Form

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

gewonnen. In der Matrizenmechanik übernahmen wir diese Gleichungen, nur dass wir jetzt an Stelle der gewöhnlichen Variablen die Matrizen $\mathbf{q}, \mathbf{p}$ hatten, die noch der zusätzlichen Vertauschungsrelation

$$\mathbf{pq} - \mathbf{qp} = \varepsilon \mathbf{1}, \quad \left(\varepsilon = \frac{h}{2\pi i}\right)$$

genügen mussten. Für diese wurden die kanonischen Gleichungen ein algebraisches Gleichungssystem mit unendlich vielen Unbekannten, dessen Lösung eben auf eine Hauptachsentransformation hinauslief.

⟨Zuordnung von Operatoren zu Matrizen durch Orthogonalsysteme⟩

150 Der Grundgedanke der folgenden Ueberlegungen ist nun ein | ganz ähnlicher, wie bei den Integralgleichungen. Man kann einer jeden Funktion von p und q formal eine Matrix zuordnen, die allen früher aufgestellten Rechenregeln genügt. Zur Vermittlung bedient man sich dabei wieder eines vollständigen Orthogonalsystems d. h. einer abzählbaren Reihe von Funktionen

$$u_1(q), u_2(q), \ldots,$$

die die Orthogonalitätsrelation

$$\int u_n u_m \, dq = \delta_{nm}$$

[63] Cf. p. 678ff.

sowie die Vollständigkeitsrelation

$$\int f^2(q)\,dq = \sum_n \left(\int f u_n \, dq\right)^2$$

erfüllen.[64] Das Grundgebiet sei dabei der ganze zugängliche Bereich der Variabeln q, also im allgemeinen der ganze Raum.
Ein solches Orthogonalsystem zu finden ist übrigens keine schwierige Aufgabe. Man kann sich ein solches aus jedem Funktionensystem, mit dessen Hilfe sich beliebige Funktionen approximieren lassen – z. B. die ganzen Potenzen – durch einen Orthogonalisierungsprozess herstellen.
Die Zuordnung der Matrix zu den Funktionen $F(qp)$ geschieht nun auf folgende Weise: Man schreibt sich diese geordnet hin, – es ist hier natürlich wie in der Matrizenmechanik die Reihenfolge der Funktionen wesentlich, z. B. sei

$$F(pq) = q^2 p q^3 p^2 q,$$

und ersetzt jedesmal p durch das Differentialsymbol

$$\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial q} \equiv \varepsilon \frac{\partial}{\partial q}, \quad \varepsilon = \frac{h}{2\pi i},$$

damit wird der Funktion F ein Differentialoperator zugeordnet, der in unserem Beispiel

$$F = q^2 \varepsilon \frac{\partial}{\partial q} q^3 \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial q^2} q$$

lautet. | Diesen Operator wenden wir nun auf die Orthogonalfunktion u_m an, 151
und definieren nun das zu F gehörige Matrixelement F_{nm} durch

$$F_{nm} = \int u_n F u_m \, dq,$$

d. h. als den n-ten Entwicklungskoeffizient von $F u_m$. Speziell wird

$$q_{nm} = \int q u_n u_m \, dq$$
$$p_{nm} = \varepsilon \int u_n \frac{\partial u_m}{\partial q} \, dq.$$

Um die Berechtigung dieser Zuordnung von Matrizen zu erweisen, müssen wir jetzt die Rechenregeln aus dieser Definition ableiten. Die Additionsregel ist natürlich trivial. Die Multiplikationsregel erörtern wir zunächst für 2 Funktionen von q alleine, $F(q)$ und $G(q)$. Es muss dann sein

$$(FG)_{nm} = \sum_k F_{nk} G_{km},$$

[64] Obviously, Hilbert here considers only real functions f, u_n.

also mit unserer Definition

$$\int FGu_n u_m \, dq = \int Fu_n Gu_m \, dq = \sum_k \int u_k (Fu_n) \, dq \int u_k (Gu_m) \, dq.$$

Dies ist aber nichts anderes als eine etwas andere Formulierung der Vollständigkeitsrelation des Orthogonalsystems. Haben wir nämlich 2 Funktionen f und g nach ihm entwickelt

$$f = \sum_k u_k \int f u_k \, dq = \sum_k c_k u_k$$
$$g = \sum_l u_l \int g u_l \, dq \ = \sum_l d_l u_l,$$

multiplizieren sie miteinander und integrieren über das Grundgebiet, so bekommt man

$$\int fg \, dq = \sum_{kl} c_k d_l \int u_k u_l \, dq = \sum_k c_k d_k,$$

152 und es ist die obige Multiplikationsformel genau diese Relation mit

$$f = Fu_n, \quad g = Gu_m.$$

Jetzt leiten wir ganz nach demselben Prinzip die Multiplikationsregel für pq ab, bei der nur der folgende Kunstgriff anzuwenden ist. Aus der Formel für

$$p_{nk} = \varepsilon \int u_n \frac{\partial u_k}{\partial q} \, dq$$

erhalten wir durch partielle Integration (die Randanteile verschwinden zufolge der Randbedingungen)

$$p_{nk} = -\varepsilon \int u_k \frac{\partial u_n}{\partial q} \, dq.$$

Damit wird, wieder nach der obigen Vollständigkeitsrelation,

$$\begin{aligned} \sum_k p_{nk} q_{km} &= -\varepsilon \int u_k \frac{\partial u_n}{\partial q} \, dq \int u_k (q u_m) \, dq \\ &= -\varepsilon \int q u_m \frac{\partial u_n}{\partial q} \, dq. \end{aligned}$$

Jetzt integrieren wir nochmals partiell, und erhalten damit

$$\varepsilon \int u_n \frac{\partial}{\partial q} (q u_m) \, dq = (pq)_{nm},$$

wie es sein muss. Auf genau dieselbe Weise beweist man die Multiplikationsregeln für beliebige Funktionen von p und q, wobei man sich immer nur dieser partiellen Integration zu bedienen hat.

Mit Hilfe der Multiplikationsregeln folgt nun auch sehr leicht die zweite Grundformel für die Matrizenrechnung nämlich die Vertauschungsrelation. Der zu $pq - qp$ nach unserer Vorschrift gehörige Operator ist nämlich bis auf den
153 Faktor ε nichts | anderes als der Einheitsoperator

$$\varepsilon\frac{\partial}{\partial q}q - q\varepsilon\frac{\partial}{\partial q} = \varepsilon\left(1 + q\frac{\partial}{\partial q} - q\frac{\partial}{\partial q}\right) = \varepsilon,$$

woraus sofort

$$(pq - qp)_{nm} = \int u_n \varepsilon u_m \, dq = \varepsilon\delta_{nm}$$

folgt.

⟨Die Schrödingersche Differentialgleichung⟩

Diese Matrizenzuordnung enthält, wie gesagt, eine grosse Freiheit dadurch, dass die Wahl der Orthogonalsysteme noch frei steht, und es fragt sich, ob man diese Freiheit nicht ausnutzen kann, um vorgesetzte Quantenprobleme zu lösen. Es gilt Matrizen p_{nm}, q_{nm} zu finden, die die Vertauschungsrelation erfüllen und in die Matrizenfunktion $\mathbf{H}(\mathbf{pq})$, die der Energie entspricht eingesetzt, diese zu einer Diagonalmatrix machen. Diese Forderungen besagen noch nichts über die Frequenzen ν_{nm} (Es war ja eigentlich eine Matrix erst durch ein Schema $\mathbf{q} = \left(q_{nm}e^{2\pi i\nu_{nm}t}\right)$, $\nu_{nm} = \frac{1}{h}(W_n - W_m)$ vollständig gegeben). Diese sind erst dadurch bestimmt, dass man nun

$$W_n = H_{nn}$$

setzt. Diese Matrizen erfüllen nämlich offensichtlich die kanonischen Gleichungen in der Form

$$\mathbf{Wq} - \mathbf{qW} = \mathbf{Hq} - \mathbf{qH}$$
$$\mathbf{Wp} - \mathbf{pW} = \mathbf{Hp} - \mathbf{pH},$$

aus denen rückwärts nach den Differentiationsregeln auf das Bestehen der ursprünglichen Form

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

geschlossen werden kann.

Es handelt sich also auch hier darum, ob man das Ortho|gonalsystem so wählen 154
kann, dass die zu einer vorgelegten Funktion $H(pq)$ gehörige Matrix zu einer Diagonalmatrix wird. Dies ist nun in der Tat leicht möglich. Wir setzen die Hamiltonsche Funktion H in einen Differentialoperator nach unserer obigen Vorschrift um, und betrachten die Differentialgleichung

$$(\mathbf{H} - W)\psi = 0,$$

wo W eine Konstante bedeutet. Dies ist aber, wegen der Form von $\mathbf{H}$ als quadratische Funktion von $\mathbf{p}$, eine Differentialgleichung vom Eigenwerttypus, wobei W die Rolle des Eigenwertparameters spielt. Das Grundgebiet ist dabei der ganze c-Raum, und die Grenzbedingung, dass ψ überall im ganzen Raum eindeutig und regulär sein soll, und im Unendlichen hinreichend stark verschwindet. Seien nun die Eigenwerte und Funktionen der Differentialgleichung

$$W_1, W_2, \ldots$$
$$\psi_1, \psi_2, \ldots,$$

und wählen wir diese Funktionen als Vermittler für unsere Matrizen, so wird gerade

$$H_{nm} = \int \psi_n(\mathbf{H}\psi_m)\, dq = W_m \int \psi_n \psi_m\, dq = W_m \delta_{nm},$$

also eine Diagonalmatrix, wie wir es wollten. Die mit Hilfe dieser Eigenfunktionen gefundenen Matrizen lösen gerade unser Quantenproblem.

Damit haben wir die Grundlagen der Schrödingerschen Theorie. Wir haben das dem Integrationsproblem der Quantenmechanik zu Grunde liegende Eigenwertproblem wirklich gefunden und können nun die ganze Theorie dieser Differentialgleichung verwerten.

⟨Symmetrisierung und Selbstadjunktion⟩

155 Hierbei ist nur noch auf einen Punkt besonders hinzuweisen. Zunächst besteht noch dieselbe Unbestimmtheit, wie in der Matrizenmechanik, wenn in der Energiefunktion Produkte des p und q auftreten, da dann das Resultat von der Reihenfolge der Faktoren abhängt. Diese Schwierigkeit tritt nur dann nicht auf, wenn die Energie in zwei Teile zerfällt:

$$H = H_1(p) + H_2(q),$$

die nur von den Impulsen bzw. den Koordinaten abhängen. Doch kann man jetzt hier auch eine eindeutige Symmetrisierung erreichen. Solche Differentialgleichungen geben nach der vorgetragenen Theorie nur dann Eigenfunktionen, wenn sie selbstadjungiert sind, d. h. sich aus einem Variationsprinzip ableiten lassen. Das müssen wir offenbar auch hier verlangen. Damit wird aber eine ganz bestimmte Reihenfolge der Faktoren festgelegt.

Die Energiefunktion, auf die ja alles ankommt, ist in der Mechanik die Summe von kinetischer und potentieller Energie

$$H = T + U.$$

Für einen Freiheitsgrad, auf den wir uns zunächst beschränken, ist dabei die allgemeine Form

$$H = f(q)p^2 + U(q).$$

Sie entsteht, wie leicht ersichtlich, wenn wir z. B. die rechtwinkligen Koordinaten als Funktion des einen Lageparameters q auffassen

$$x = x(q), \quad y = y(q), \quad z = z(q),$$

was für Systeme mit einem Freiheitsgrad ja stets möglich ist. Dabei wird dann die kinetische Energie | 156

$$T = \frac{1}{2\mu}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) = \frac{1}{2\mu}\left[\left(\frac{dx}{dq}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dq}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dq}\right)^2\right]\dot{q}^2 = \frac{1}{2\mu}g(q)\dot{q}^2$$
$$p = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = \frac{1}{\mu}g(q)\dot{q}$$
$$T = \frac{\mu}{2g(q)}p^2 = f(q)p^2.^{\langle 65\rangle}$$

Die formale Vorschrift, wie wir den zu dieser Energiefunktion gehörigen Operator selbstadjungieren können, besteht nun darin. Man bilde den Differentialausdruck

$$L(q)\psi = \frac{1}{\sqrt{f(q)}}\left\{\varepsilon^2 f(q)\left(\frac{d\psi}{dq}\right)^2 + U(q)\psi^2\right\} \qquad \left(\varepsilon = \frac{h}{2\pi i}\right),^{\langle 66\rangle}$$

– der Faktor $\frac{1}{\sqrt{f(q)}}$ ist dabei notwendig, damit der Ausdruck invariant gegen Koordinatentransformationen wird, wenn man ihn über den ganzen q-Raum integriert – und bilde von ihm die Lagrangesche Ableitung

$$\frac{d}{dq}\left(\frac{\partial L}{\partial \psi'}\right) - \frac{\partial L}{\partial \psi} = 2\varepsilon^2 \frac{d}{dq}\left(\sqrt{f(q)}\,\frac{d\psi}{dq}\right) + \langle 2\rangle \frac{U(q)}{\sqrt{f(q)}}\psi.$$

Diesen Ausdruck, der einen linearen Differentialoperator angewendet auf ψ bildet, hat man dann als $H\psi$ zu nehmen.
Vermittels dieser Ueberlegung kann man auch ein richtiges Variationsproblem für die Schrödingersche Theorie formulieren, nämlich

$$\delta \int \frac{1}{\sqrt{f(q)}}\left\{\varepsilon^2 f(q)\left(\frac{d\psi}{dq}\right)^2 + U(q)\psi^2\right\} dq = 0$$

unter der Nebenbedingung

$$\int \frac{1}{\sqrt{f(q)}}\psi^2\, dq = 1.$$

Fügt man diese nach der Lagrangeschen Vorschrift mit dem noch zu bestimmenden Faktor W zum Integranden des Variationsintegrals hinzu, so erhält man als Bedingung für das Extremum die volle | Schrödingersche Differential- 157

[65] The undefined parameter μ should be the inverse mass.

[66] The minus sign should be a plus sign.

gleichung in der selbstadjungierten Form

$$2\varepsilon^2\sqrt{f(q)}\,\frac{d}{dq}\left(\sqrt{f(q)}\,\frac{d\psi}{dq}\right)+\big(U(q)-W\big)\psi=0.^{\langle 67\rangle}$$

Mit der Schrödingerschen Gleichung ist natürlich auch eine eindeutige Normierung in der Matrizenmechanik erreicht, da diese ja einander völlig entsprechen. Für einen Freiheitsgrad erhält man so als symmetrisierte Hamiltonsche Funktion

$$\mathbf{H}=\sqrt{\mathbf{f}}\,\mathbf{p}\,\sqrt{\mathbf{f}}\,\mathbf{p}+\mathbf{U}(\mathbf{q}).$$

Hiermit ist auch diese, seinerzeit von uns noch offen gelassene Frage zufriedenstellend erledigt.

Wir müssen jetzt zur Erläuterung der allgemeinen Theorie spezielle Beispiele heranziehen, um ihren Mechanismus voll zu verstehen. Später werden wir noch auf die physikalische Bedeutung und Interpretation zurückkommen.

⟨Der Oscillator⟩

Als erstes Beispiel nehmen wir wieder den Oscillator, den wir ja auch nach den anderen Methoden schon behandelt haben. Seine kinetische Energie ist (wir setzen seine Masse $\mu=1$)

$$T=\tfrac{1}{2}\dot{q}^2,\quad p=\frac{\partial T}{\partial\dot{q}}=\dot{q},\quad T=\tfrac{1}{2}p^2.$$

Seine potentielle Energie

$$U(q)=2\pi^2\nu_0^2q^2,$$

wobei wir den Proportionalitätsfaktor $2\pi^2\nu_0^2$ so wählen, das wir Uebereinstimmung mit unseren früheren Formeln bekommen. Es ist also

$$H=T+U=\tfrac{1}{2}p^2+2\pi^2\nu_0^2q^2,$$

158 und demnach wird die Schrödingersche Differentialgleichung |

$$(H-W)\psi=\frac{\varepsilon^2}{2}\frac{d^2\psi}{dq^2}+2\pi^2\nu_0^2q^2\psi-W\psi=0$$

$$\frac{d^2\psi}{dq^2}+\frac{8\pi^2}{h^2}\big(W-2\pi^2\nu_0^2q^2\big)\psi=0.$$

Wir führen nun folgende Abkürzungen ein

$$a=\frac{8\pi^2W}{h^2},\quad b=\frac{16\pi^4\nu_0^2}{h^2}.$$

---

[67] The factor 2 should be 1.

Damit wird die Differentialgleichung

$$\frac{d^2\psi}{dq^2} + \left(a - bq^2\right)\psi = 0.$$

Wir führen nun als unabhängige Variable noch

$$x = q\sqrt[4]{b}$$

ein, und erhalten damit

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \left(\frac{a}{\sqrt{b}} - x^2\right)\psi = \frac{d^2\psi}{dx^2} + \left(c - x^2\right)\psi = 0, \qquad \left(c = \frac{a}{\sqrt{b}}\right),$$

und es sind nun diejenigen Lösungen dieser Gleichungen zu suchen, die überall regulär sind, und im Unendlichen verschwinden. Die Theorie dieser einfachen Differentialgleichung ist nun wohl bekannt. Es ergibt sich, dass sie nur für die "Eigenwerte"

$$c = 1, 3, 5, \ldots, (2n+1), \ldots$$

solche Lösungen besitzt, und zwar werden diese die sogenannten Hermiteschen Orthogonalfunktionen nämlich

$$\psi_n = e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x),$$

wo $H_n(x)$ das n-te Hermitesche Polynom bedeutet, welches wie folgt definiert werden kann

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}.$$

Es sind dies ganze rationale Funktionen n-ten Grades (e^{x^2} hebt sich natürlich 159
heraus), und zwar werden die ersten

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x, \quad H_2(x) = 4x^2 - 2, \quad \text{u. s. w.}$$

Dass diese ψ_n überall regulär sind, und im Unendlichen verschwinden, ist klar. Durch Einsetzen verifiziert man auch leicht, dass sie der Differentialgleichung genügen. Die Eigenwerte berechnen sich aus

$$c = \frac{a}{\sqrt{b}} = 2n + 1$$

zu

$$W_n = \tfrac{2n+1}{2} h\nu_0 = h\nu_0 \left(n + \tfrac{1}{2}\right).$$

Damit finden wir natürlich das Resultat der Matrizenmechanik wieder, insbesondere das Vorhandensein einer "Nullpunktsenergie"

$$W_0 = \tfrac{1}{2} h\nu_0.$$

Auch die Matrizen q_{nm} selbst bekommt man leicht nach der Definition

$$q_{nm} = \int u_n q u_m \, dq.$$ [68]

Wir wollen zunächst nur zeigen, dass alle q_{nm} mit $m > n+1$ verschwinden. Aus den oben angegebenen Eigenfunktionen folgt nämlich, dass $q\psi_n$ abgesehen von dem Faktor $e^{-\frac{x^2}{2}}$ eine Funktion $n+1$. Grades in q ist, sie ist also sicher darstellbar durch die $n+1$ ersten Eigenfunktionen

$$q\psi_n = c_1\psi_1 + c_2\psi_2 + \cdots + c_{n+1}\psi_{n+1},$$

wo die c_k irgendwelche Konstante sind. Damit folgt aber aus der Orthogonalitätsrelation

160

$$\int \psi_n \psi_m \, dq = 0$$

die obige Behauptung. Man kann auch die übrigen q_{nm} ohne Schwierigkeit ausrechnen, wir wollen aber hier nur das Resultat angeben. Man findet

$$\begin{aligned} q_{nn} &= 0 \\ q^2_{n\,n+1} &= (n+1)\frac{h}{8\pi^2\nu_0} \end{aligned}$$

ganz in Uebereinstimmung mit den Ergebnissen der Matrizenmechanik, wie es auch sein muss (Wir haben jetzt nur $\mu = 1$ gesetzt.).

Um die physikalische Bedeutung der q_{nm} zu erklären, sei daran erinnert, dass wir sie einführten, um zu einer Verschärfung des Korrespondenzprinzips zu gelangen. Sie sollten ein Mass für die Intensität des entsprechenden Quantenübergangs bilden, und sind im Geiste der Quantentheorie als Wahrscheinlichkeitskoeffizienten zu deuten. Es wird gut sein, dies noch etwas näher auszuführen. Nach der klassischen Elektrodynamik war die mittlere Energieausstrahlung in der Zeiteinheit eines Elektrons im Atom, dessen (reelle) Bewegung durch

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k e^{2\pi i k \nu_0 t} \qquad (a_{-k} = \overline{a_k})$$

gegeben ist, gleich

$$\begin{aligned} \Delta E &= \sum_k \Delta E_k \\ \Delta E_k &= \frac{4e^2}{c^3}(2\pi k \nu_0)^4 |a_k|^2 \Delta t. \end{aligned}$$

[68] The u_n are obviously the normalized eigenfunctions $u_n = (\sqrt{\pi} 2^n n!)^{-1/2}\psi_n$.

Es ist also die auf die k.te Oberschwingung entfallende Ausstrahlung N solcher Atome gleich $N\Delta E_k$. Korrespondenzmässig entspricht nun der k.ten Oberschwingung ein Quantensprung um k, d. h. es entspricht

161
$$\begin{aligned} k\nu_0 &: \nu_{nm} \qquad (n-m=k) \\ a_k &: q_{nm} \qquad (q_{nm}=\overline{q_{nm}}), \end{aligned}$$

und endlich der ausgestrahlten Energie

$$N\Delta E_k : n\nu_{nm}Z,$$

d. h. die Energieabgabe $n\nu_{nm}$ bei einem Sprung multipliziert mit der Zahl Z der Sprünge in der Zeiteinheit. Diese kann man auch gleich $N\Phi$ setzen, wo Φ dann die “Wahrscheinlichkeit” bedeutet, dass das Atom in der Zeiteinheit seinen Sprung ausführt. Man muss also, damit das Korrespondenzprinzip erfüllt ist, d. h. der asymptotische Anschluss an die alte Mechanik und Elektrodynamik erreicht wird,

$$\begin{gathered} N\Delta E_k \sim h\nu_{nm}N\Phi = N\frac{4e^2}{c^3}(2\pi\nu_{nm})^4|q_{nm}|^2 \\ \Phi = \frac{4e^2}{hc^3}(2\pi)^4\nu_{nm}^3|q_{nm}|^2 \end{gathered}$$

setzen. Diese Formel nehmen wir nun natürlich als streng gültig an, und nicht nur näherungsweise, wie in der alten Quantenmechanik. Diese Uebertragung hat sich bisher glänzend bewährt.

⟨Die Übergangswahrscheinlichkeiten⟩

Für unser Oscillatorbeispiel besagt nun die eben abgeleitete Formel, dass nur Sprünge mit der Aenderung 1 der Quantenzahl möglich sind, da alle anderen Uebergangswahrscheinlichkeiten mit den q_{nm} verschwinden. Dass man bei den Schwingungen der Atome in den Molekülen, die angenähert als elastische Schwingungen angesehen werden können, und die zu den Bandenspektren Anlass geben, fast stets auch höhere Uebergänge beobachtet, zeigt | dann, 162
dass auch das wirkliche Kraftgesetz von dem einfachen elastischen abweicht.

Als zweites Beispiel nehmen wir den Rotator. Ein solcher ist wieder z. B. durch ein zweiatomiges Molekül realisiert, wenn wir die Entfernung der beiden Atomkerne als fest annehmen können.

⟨Der ebene Rotator⟩

Wir nehmen zunächst an, dass die Drehachse im Raume festgehalten sei, und als Koordinate benutzen wir den Winkel um die Achse φ. Dann ist dies Problem das denkbar Einfachste, denn es ist überhaupt keine potentielle Energie vorhanden. Die kinetische Energie ist

$$T = \frac{a}{2}\dot{\varphi}^2, \quad p = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = a\dot{\varphi}$$
$$H = T = \frac{1}{2a}p^2,$$

wobei a das Trägheitsmoment ist. Die Differentialgleichung wird also

$$\frac{d^2\psi}{d\varphi^2} + \frac{8\pi^2 a}{h^2}W\psi = 0.$$

Sie hat als Lösung einfach

$$\psi = \frac{\sin}{\cos}\left(\sqrt{\frac{8\pi^2 Wa}{h^2}}\,\varphi\right).$$

Die Forderung der Eindeutigkeit verlangt hier nun offenbar, dass für $\varphi = \varphi^0 + 2\pi$, ψ wieder den Anfangswert annehmen muss. Hierzu müssen wir offensichtlich

$$\sqrt{\frac{8\pi^2 Wa}{h^2}} = m \qquad (m = 1, 2, \dots)$$
$$W_m = \frac{m^2 h^2}{8\pi^2 a}$$

setzen. Dies ist dasselbe Resultat, wie in der alten Quantentheorie. Dieses Beispiel ist nun aber in der Physik nicht realisiert, da natürlich eine starre
163 Achse für Molekeln nicht existiert. Um eine | Anwendungsmöglichkeit auf Moleküle zu haben, müssen wir einen Rotator mit freier Achse nehmen. Dabei kommt bemerkenswerterweise ein wesentlich verschiedenes Resultat heraus, obgleich die Rotationsachse im Raume bei der wirklichen Bewegung feststeht.

⟨Mehrere Freiheitsgrade⟩

Um nun dieses Problem und später auch das Wasserstoffatom behandeln zu können, müssen wir zunächst unseren Ansatz der Differentialgleichung auf mehrere Freiheitsgrade verallgemeinern, und nehmen dazu einen Massenpunkt, der unter Einfluss einer potentiellen Energie $U(x, y, z)$ sich irgendwie im Raume bewegen kann. Seine kinetische Energie ist zunächst in rechtwinkligen Koordinaten

$$T = \frac{\mu}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right), \quad p_x = \mu\dot{x},\ p_y = \mu\dot{y},\ p_z = \mu\dot{z}.$$
$$T = \frac{1}{2\mu}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right).$$

Nach der Schrödingerschen Vorschrift erhalten wir nun als Differentialgleichung

$$(H-W)\psi = 0,$$

wobei in H jedes p durch den entprechenden Differentialoperator $\varepsilon\frac{\partial}{\partial q}$ zu ersetzen ist. Damit wird die Differentialgleichung

$$\frac{\varepsilon^2}{2\mu}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right)+(U-W)\psi = 0,$$

oder mit $\varepsilon = \frac{h}{2\pi i}$

$$\Delta\psi + \frac{8\pi^2\mu}{h^2}(W-U)\psi = 0.$$

Für beliebige Koordinaten bedient man sich wieder am zweckmässigsten des Durchgangs durch ein Variationsprinzip. Dieses lautet dabei folgendermassen. Es wird T natürlich eine quadratische Form der Impulse $p_1, \dots, p_f$, – wir sprechen das Prinzip | gleich für eine beliebige Zahl von Parametern aus –, 164
und es sei D die Diskriminante dieser Form. Dann ersetze man in T jedes p_k durch $\varepsilon\frac{\partial\psi}{\partial q_\alpha}$, und bilde so den Ausdruck

$$\frac{1}{\sqrt{D}}\left\{T\left(\varepsilon\frac{\partial\psi}{\partial q_\alpha}\right)+(W-U)\psi^2\right\}.$$

Dann ist die Lagrangesche Ableitung dieses Ausdrucks die richtige Schrödingersche Differentialgleichung. Man sieht sofort, dass man für rechtwinklige Koordinaten auf die obige Form zurückkommt. Für orthogonale Koordinaten, mit denen man in der Regel auskommt, läuft das Verfahren auf das selbe hinaus, als ob man in der Differentialgleichung selbst die anderen Koordinaten einführt, denn dieses Variationsverfahren ist nichts anderes, als der bequemste Weg für solche Koordinatentransformationen. D. h. will man einen solchen Differentialausdruck wie $\Delta\psi$ auf krummlinige Koordinaten umrechnen, so macht man das eben so, dass man ihn aus einem Variationsprinzip ableitet, und in diesem transformiert. Dies ist aber nur der Sinn des hier gegebenen Verfahrens.

⟨Der räumliche Rotator⟩

Wir wenden uns zunächst dem Rotator mit freier Achse zu, d. h. es soll jetzt nicht mehr die Achse vorgeschrieben sein, wenn auch rein mechanisch ein solcher Rotator natürlich seine ihm einmal erteilte Drehrichtung beibehält. Gleichwohl ist hier das Resultat von dem ebenen Rotator wesentlich verschieden.

Wenn wir den Schwerpunkt als ruhend ansehen, so ist das mechanische Problem genau dasselbe wie die kräftefreie Bewegung eines Massepunktes auf der

Kugel, nur dass die Masse μ durch das Trägheitsmoment $\mathfrak{A}$ zu ersetzen ist. Da keine potentielle Energie vorhanden ist, wird die Differentialgleichung einfach

$$\Delta\psi + \frac{8\pi^2\mathfrak{A}}{h^2} W\psi = 0,$$

164a wobei zu fordern ist, dass die Lösung überall auf der Einheitskugel | eindeutig und ohne Singularität ist. Dies ist die einfachste Form, die die Differentialgleichung eines Eigenwertproblems überhaupt haben kann. Zur praktischen Behandlung für das Problem auf der Kugel führt man natürlich Polarkoordinaten ϑ, φ ein. (r ist hier gleich const. $= 1$ zu setzen). Dann erhält man bekanntlich

$$\frac{1}{\sin^2\vartheta}\left\{\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\,\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\right)\right\} + \lambda\psi = 0^{\langle 69\rangle} \qquad \left(\lambda = \frac{8\pi^2\mathfrak{A}}{h^2}W\right).$$

Die Eindeutigkeitsforderung verlangt dabei, dass für $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi$ ψ von φ unabhängig wird, und ausserdem in φ periodisch ist mit der Periode 2π. Dieses Eigenwertproblem ist eines der ältesten und am öftesten behandelten. Es ist bekannt, dass es nur für die Parameterwerte

$$\lambda = n(n+1), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Lösungen besitzt, und zwar sind diese die allgemeinen Kugelfunktionen

$$K_n(\varphi,\vartheta) = \sum_{m=0}^{n}\big(A_m\cos m\varphi + B_m\sin m\varphi\big)\sin^m\vartheta\,\frac{d^m P_n(\cos\vartheta)}{d(\cos\vartheta)^m}.$$

Dabei sind die A_m, B_m $\;2n+1$ willkürliche Konstante. Das Problem ist also entartet. Die P_n sind die gewöhnlichen Kugelfunktionen

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n},$$

und die Eigenwerte werden

$$\lambda_n = n(n+1) = \frac{8\pi^2\mathfrak{A}}{h^2}W_n; \quad W_n = \frac{n(n+1)h^2}{8\pi^2\mathfrak{A}}.$$

Der charakteristische Unterschied zu dem ebenen Rotator und der alten Quan-
165 tentheorie ist das Auftreten von $n(n+1)$ an der Stelle | von n^2. Gerade dies ist aber für das Experiment (d. h. für die Deutung der Bandenspektren) nötig und schon vor der theoretischen Begründung empirisch gefunden worden. Man musste damals, um diesem Umstand mit der alten Formel gerecht zu werden, formal eine halbzahlige Quantelung einführen, was natürlich ganz den eigentlichen Prinzipien der damaligen Quantentheorie widersprach.

[69] A factor of $\sin\theta$ is missing in front of the second summand.

⟨Das Wasserstoffatom⟩

Wir kommen jetzt zu dem wichtigsten Beispiel, nämlich das Wasserstoffatom, d. h. der Bewegung eines Elektrons um einen Atomkern unter Einfluss einer Coulombschen Kraft $\frac{e^2}{r^{\langle 2\rangle}}$, d. h. eines Potentials

$$U = -\frac{e^2}{r}.$$

Die Differentialgleichung lautet dementsprechend

$$\Delta\psi + \frac{8\pi^2\mu}{h^2}\left(W + \frac{e^2}{r}\right)\psi = 0.$$

Sie unterscheidet sich von dem Typus $\Delta\psi + \lambda\psi = 0$ nur durch das additive Glied $\frac{8\pi^2\mu e^2}{h^2 r}$. Wir führen wieder Polarkoordinaten ein: [70]

$$\frac{1}{r^2}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin^2\vartheta}\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\sin\vartheta\right)\right]\right\}+\frac{8\pi^2\mu}{h^2}\left(W+\frac{e^2}{r}\right)\psi = 0.$$

Machen wir jetzt den Ansatz

$$\psi = \chi(r)\psi(\varphi,\vartheta),$$

und multiplizieren wir mit $\frac{r^2}{\psi(\varphi,\vartheta)}$, so bekommen wir

$$\frac{1}{\psi(\varphi,\vartheta)}\left\{\frac{1}{\sin^2\vartheta}\left[\frac{\partial^2\psi(\varphi,\vartheta)}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta}\sin\vartheta\right)\right]\right\} = F(r),$$

d. h. eine Funktion von φ und ϑ allein soll gleich einer Funktion von r sein. 166
Das ist aber nur möglich, wenn sich letztere auf eine Konstante c reduziert. Damit bekommen wir eine Differentialgleichung für φ und ϑ alleine, und zwar ist es genau die gleiche, die für den räumlichen Rotator auftrat.

Auch die Randbedingungen sind genau dieselben, denn wir müssen natürlich auch hier von der Lösung fordern, dass sie für alle Werte von ϑ, φ d. h. auf der Kugel eindeutig und regulär sei. Damit können wir die dortigen Resultate übernehmen. Insbesondere wird die Konstante $c = n(n+1)$, und wir erhalten durch Einsetzen dieses Wertes eine Differentialgleichung für r alleine, und zwar wird diese

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\chi}{dr}\right) + \left[-\frac{(n+1)n}{r^2} + \frac{8\pi^2\mu}{h^2}\left(W + \frac{e^2}{r}\right)\right]\chi = 0,$$

oder auch

$$\frac{d^2\chi}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\chi}{dr} + \left(\frac{8\pi^2\mu}{h^2}W + \frac{8\pi^2\mu e^2}{h^2 r} - \frac{n(n+1)}{r^2}\right)\chi = 0.$$

[70] Again, a factor of $\sin\theta$ is missing in the following equation and in the one after next, cf. the previous footnote 69.

Diese haben wir nun zu diskutieren.

Das Grundgebiet für r ist der Bereich von 0 bis $+\infty$. In diesem Fall soll die Lösung regulär sein und im besonderen sowohl für $r = 0$ wie für $r = \infty$ verschwinden. Gesucht werden die Werte des Parameters W, für den es solche Lösungen gibt, und natürlich auch die zugehörigen "Eigenfunktionen".

Wir machen, um die Diskussion möglichst einfach zu gestalten, für W, r die Substitution

$$W = \pm\frac{2\pi^2\mu e^4}{h^2 l^2}, \qquad r = \frac{4\pi^2 l}{\mu e^2}x.^{\langle 71\rangle}$$

Die Funktion $\chi(r)$ gehe dabei in $f(x)$ über. Wir erhalten dann zwei ver-
167 schiedene Differentialgleichungen, je nachdem wir W als | positiv oder negativ ansehen, und zwar lauten diese

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{df}{dx} + \left(\ 1 + \frac{2l}{x} - \frac{n(n+1)}{x^2}\right) f(x) = 0 \qquad \text{für} \quad W > 0,$$

bzw.

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{df}{dx} + \left(-1 + \frac{2l}{x} - \frac{n(n+1)}{x^2}\right) f(x) = 0 \qquad \text{für} \quad W < 0.$$

Der Fall $W = 0$ wäre dann noch gesondert zu untersuchen. Wir untersuchen zuerst den zweiten Fall $W < 0$. Die Beseitigung des konstanten Gliedes (-1) in dem Koeffizienten von $f(x)$ gelingt durch die Substitution

$$f(x) = e^{-x} g(x),$$

die für $g(x)$ die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 g}{dx^2} + 2\left(\frac{1}{x} - 1\right)\frac{dg}{dx} + \left[\frac{2(l-1)}{x} - \frac{n(n+1)}{x^2}\right] g = 0$$

liefert.

Die allgemeine Lösung einer solchen Differentialgleichung ist nun stets eine lineare Kombination von zwei unabhängigen Fundamentallösungen. Die eine davon finden wir leicht durch einen Potenzreihenansatz. In der Nähe der Stelle $x = 0$ verhält sich die Lösung der obigen Differentialgleichung wie diejenige von

$$\frac{d^2 k}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dk}{dx} - \frac{n(n+1)}{x^2}k = 0,$$

in der nur die niedrigsten Glieder in x beibehalten sind. Diese abgekürzte Differentialgleichung hat die Lösungen

$$k_1(x) = x^n \quad \text{und} \quad k_2(x) = x^{-n-1}.$$

168 An jede von beiden schliesst sich eine Lösung der vollen Differen|tialgleichung

[71] Should be: "$r = \frac{h^2 l}{4\pi^2\mu e^2}x$".

an, die sich in der Umgebung von $x = 0$ wie x^n bzw. x^{-n-1} verhalten. Man kommt so dazu, die Lösungen in der Form

$$g_1 = x^n \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k; \qquad a_0 = 1$$

$$g_2 = x^{-n-1} \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k; \qquad b_0 = 1$$

anzusetzen, und die allgemeine Lösung würde sich linear aus ihnen zusammensetzen

$$g = \beta_1 g_1 + \beta_2 g_2.$$

Nun hat aber g_2 [H] an der Stelle $x = 0$ einen Pol von der Ordnung $n + 1$ und es ist daher $\beta_2 = 0$ zu nehmen, damit die Lösung für $x = 0$ beschränkt bleibt. Für die Koeffizienten a_k erhält man nun aus der Rekursionsformel, die aus der Differentialgleichung entspringt, den Ausdruck

$$a_k = \frac{2^k}{k!} \frac{(n+1-l)(n+2-l)\cdots(n+k-l)}{(2n+2)(2n+3)\cdots(2n+k+1)}.$$

Man sieht nun, dass für

$$l = n+1, n+2, n+3, \ldots$$

d. h. ganze Zahlen $> n$, die Reihe abbricht, und zwar wird

$$a_k = 0 \quad \text{für} \quad k \geq l - n$$

und für $k = 0, 1, \ldots, l - n - 1$

$$a_k = \frac{(-2)^k}{k!} \binom{l+n}{2n+k+1} \frac{1}{\binom{l+n}{2n+1}}.$$

$g(x)$ wird also ein einfaches Polynom, und $f(x) = e^{-x} g(x)$ verschwindet also für diese Werte von l im Unendlichen. D. h. $l = n+1, n+2, \ldots$ sind tatsächlich Eigenwerte der Differentialgleichung.

Es lässt sich nun aber auch zeigen, dass für $l \neq n+1, n+2, \ldots$ $f(x)$ im Un- 169
endlichen nicht mehr regulär ist, dass also diese Werte die einzigen Eigenwerte der Differentialgleichung sind. Dies sieht man folgendermassen durch eine Abschätzung ein.

[H] Nach der allgemeinen Theorie der linearen Differentialgleichungen hat man zu g_2 noch ein Glied $c \log x \, g_1(x)$ hinzuzufügen, damit die Rekursionsformel für die b_k lösbar wird. Das ändert jedoch an der obigen Betrachtung nichts.

Von einer gewissen Stelle an sind zunächst alle a_k positiv. Für genügend grosse k $(k > k_0)$ ist ferner

$$\frac{1+\frac{n-l}{k}}{1+\frac{2n+1}{k}} > e^{\left(\frac{n-l}{k} - \frac{(n-l)^2}{k^2} - \frac{2n+1}{k}\right)} > e^{\left(-\frac{n+l+1}{k} - \frac{(n-l)^2}{k^2}\right)}.^{\langle 72\rangle}$$

Daher ist (für $k > k_0$)

$$\left|\frac{(n+1-l)\cdots(n+k-l)}{(2n+2)\cdots(2n+k-1)}\right|^{\langle 73\rangle} = \left|\frac{\left(1+\frac{n-l}{1}\right)\cdots\left(1+\frac{n-l}{k}\right)}{\left(1+\frac{2n+1}{1}\right)\cdots\left(1+\frac{2n+1}{k}\right)}\right|$$

$$> \left|\frac{\left(1+\frac{n-l}{1}\right)\cdots\left(1+\frac{n-l}{k_0}\right)}{\left(1+\frac{2n+1}{1}\right)\cdots\left(1+\frac{2n+1}{k_0}\right)}\right| \cdot e^{-(n+l+1)\sum\limits_{s=2}^{k}\frac{1}{s} - (n-l)^2\sum\limits_{s=1}^{\infty}\frac{1}{s^2}}$$

$$> ae^{-(n+l+1)\log k} = ak^{-(n+l+1)} > ak^{-m},$$

wobei a eine von k unabhängige positive Grösse und m die kleinste ganze Zahl $\geq n+l+1$ bedeutet. Demnach ist für alle genügend grossen k

$$a_k > \frac{2^k a}{k!k^m} > \frac{a2^k}{(k+m)!}$$

und folglich

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k > a\sum_{k>0}^{\infty}\frac{2^k x^k}{(k+m)!} + G(x)$$
$$> \frac{a}{2x^m}\left(e^{2x} + R(x)\right),^{\langle 74\rangle}$$

wobei $G(x)$ eine gewisse ganze rationale, $R(x)$ eine rationale Funktion bedeutet. Daraus ergibt sich

$$|f(x)| = \left|bx^n e^{-x}\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right| > \frac{a|b|}{2^m}x^{n+m}\left(e^x + e^{-x}R^*\right)^{\langle 75\rangle}$$

$(R^* = \text{rationale Funktion in } x.)$.

170 Das Resultat ist also, dass für alle Werte $l \neq n+1, n+2, \ldots$ $f(x)$ im Unendlichen, wie e^x selbst unendlich wird. Damit ist der Fall $W < 0$ erledigt. Eigenwerte sind die ganzzahligen Werte $l = n+1, n+2, \ldots$, die sich linear im Unendlichen häufen.

Wir besprechen nun noch kurz den Fall $W > 0$. Hier verhalten sich in der Umgebung des Nullpunktes die Lösungen genau wie früher, und es gibt also

[72] The second “>” should be a “=”.

[73] The term “$(2n+k+1)$” in the denominator should be “$(2n+k-1)$”.

[74] The denominator should be “$(2x)^m$” instead of “$2x^m$”.

[75] The factor “x^{n+m}” should be “x^{n-m}”.

eine Lösung, die für $x = 0$ regulär ist und deren Potenzentwicklung mit x^n beginnt. Im Unendlichen verhalten sie sich aber ganz anders. Machen wir nämlich in der jetzt geltenden Differentialgleichung

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{df}{dx} + \left(1 + \frac{2l}{x} - \frac{n(n+1)}{x^2}\right) f(x) = 0$$

die Substitution

$$xf = g,$$

und vernachlässigen alle Terme mit höheren Potenzen von $\frac{1}{x}$ so erhalten wir

$$\frac{d^2 g}{dx^2} - g = 0,$$

d. h. $g = xf$ verhält sich im Unendlichen wie $\sin x$ bzw. $\cos x$; $f(x)$ also wie $\frac{1}{x}\sin x$, bzw. $\frac{1}{x}\cos x$. D. h. alle Integrale gehen unter Schwankungen im Unendlichen wie $\frac{1}{x}$ gegen Null. Das gilt natürlich auch speziell für diejenigen, die im Nullpunkt regulär sind, und da es für alle Werte des Parameters W eine solche gibt, so sind alle positiven Werte von W Eigenwerte. Wir erhalten also auch ein Streckenspektrum, dem in der Physik das | konstituierliche[76] 171
Termspektrum entspricht, das sich an die Seriengrenzen anschliesst, doch wollen wir hier nicht genauer darauf eingehen.

Stattdessen wollen wir vielmehr den physikalisch wichtigeren Fall des diskreten Spektrums noch etwas näher ausführen. Die Eigenfunktionen waren

$$\chi(r) = f(x) = x^n e^{-x} \sum_{s=0,1,\ldots,l-n-1} \binom{l+n}{2n+s+1} \frac{(-2x)^s}{s!}.$$

Die Summen rechter Hand lassen sich hier noch durch bekannte Funktionen, nämlich die sogenannten Laguerreschen Polynome darstellen. Es ist

$$\sum_{s=0,1,\ldots,l-n-1} \binom{l+n}{2n+s+1} \frac{(-2x)^s}{s!} = \frac{1}{(n+l)!}\frac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}} L_{n+l}(x),$$

wo

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}\left(x^n e^{-x}\right)$$

die Laguerreschen Polynome sind, die also ganze rationale Funktionen n-ten Grades in x sind.

Die Eigenwerte des diskreten Spektrums sind nach S. 164 durch

$$W = \frac{2\pi^2 \mu e^4}{h^2 l^2}, \quad l = n+1, n+2, \ldots$$

[76]Should be: “kontinuierliche”.

gegeben. n ist dabei die Ordnung der entsprechenden Kugelfunktion. Für die Werte W_l massgebend ist aber die Laufzahl l. Aus dem Termspektrum findet man das Linienspektrum nach der Frequenzbedingung

$$\nu_{nm} = \frac{W_n - W_m}{h} = \frac{2\pi^2 \mu e^4}{h^3} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

in Uebereinstimmung mit den Formeln der alten Quantentheorie.

172 Zu den eben genannten Eigenwerten gehören nun immer mehrere Eigenfunktionen. Das System ist also entartet. In jedem Wert von l sind zunächst die l Werte 0 bis $l-1$ für n möglich, und jede Kugelfunktion mit dem Index n lässt sich aus $2n+1$ linear unabhängigen Funktionen zusammensetzen. Im ganzen gehören also zu einem Wert l

$$1 + 3 + 5 + \cdots + 2l - 1 = l^2$$

linear unabhängige Eigenfunktionen. Diese selbst wird

$$\psi = b\chi(r)\psi(\varphi, \vartheta),$$

d. h. die oben angegebenen Funktionen $\chi(r)$ multipliziert mit den Kugelfunktionen, die zu φ und ϑ gehören. Dazu tritt noch ein Zahlenfaktor b zur Normierung der Orthogonalitätsrelation auf 1. Die unterste Eigenfunktion, die zu dem Normalzustand $l = 1$, $n = 0$ gehört, wird speziell

$$\psi_1 = b_1 e^{-\frac{4\pi^2 \mu e^2 r}{h^2}},$$

da die Kugelfunktion $\psi_0(\varphi, \vartheta) = 1$ wird. Sie hängt also nur von r ab, ist also zentralsymmetrisch. Dies ist ein grosser Vorzug gegenüber der alten Mechanik, denn auch nach allen sonstigen physikalischen Erfahrungen ist das Wasserstoffatom im Normalzustand isotrop.

Mit Hilfe der Eigenfunktionen kann man natürlich auch die Matrizen q_{nm} berechnen und damit die Intensität der Spektrallinien.

Nachdem wir die Schrödingersche Theorie an den wichtigsten Beispielen erläutert haben, wird es gut sein, daran zu erinnern, dass die ganze Theorie der Eigenwerte erst seit relativ kurzer Zeit überhaupt existiert, und eigentlich
173 noch gar nicht abgeschlossen ist. | Das Randwertproblem für $\Delta u = 0$ wurde erst von C. Neumann gelöst, und es war kurz darauf eine sehr grosse Leistung von H.A. Schwarz, auf das vorher auch in der Fragestellung gar nicht bekannte Eigenwertproblem $\Delta\psi + \lambda\psi = 0$ hingewiesen, und die Existenz des ersten Eigenwertes bewiesen zu haben.[77] Picard bewies dann mit ungefähr denselben Methoden, wie Schwarz, die Existenz des zweiten Eigenwertes und endlich Poincaré 1895 die Existenz unendlich vieler Eigenwerte.[78] Doch waren dessen

[77] See, e.g., *Neumann 1877* and *Schwarz 1885*.

[78] *Picard 1893* and *Poincaré 1895*.

Untersuchungen sehr schwierig und undurchsichtig, und erst mit der Theorie der Integralgleichungen ist man zu der vollen Erkenntnis dieser Zusammenhänge gelangt, jedoch beschränkte man sich bisher fast ausschliesslich auf reguläre Fälle mit endlichem Intervall, so dass die wirkliche Durcharbeitung für die in der Physik wichtigsten Probleme mit unendlichem Intervall noch aussteht.

Die verschiedene Natur und Regularität der behandelten Probleme wird sehr deutlich durch die Betrachtung des Termspektrums. Der einfachste Fall ist hier gewissermassen der Rotator, der ja auf die Differentialgleichung $\Delta\psi + \lambda\psi = 0$ führt, und dessen Eigenwerte nur so dicht wie die Quadrate der ganzen Zahlen auf der Zahlengeraden liegen, und sich nur im Unendlichen wie diese häufen. Dieses Verhalten ist auch das Normale.

Der Oscillator, mit der Differentialgleichung

$$\Delta\psi + (\lambda - x^2)\psi = 0$$

und unendlichem Intervall ist schon wesentlich irregulärer. Die Eigenwerte liegen ja hier wie die ganzen Zahlen selbst, also sehr viel dichter. In der Gleichung für den Radius r beim Wasserstoff haben wir dann einen Fall, bei dem sich die Eigenwerte im Endlichen häufen. Hiernach hatte man früher schon vielfach gesucht, aber noch nie ein Beispiel gefunden. Dies lag daran, dass man immer | Singularitäten im Endlichen, wie sie hier durch das Glied 174
mit $\frac{e^2}{r}$ hinzukommt, vermieden hatte. Diese sind nun, wie man jetzt erkennt, für dieses besondere Verhalten massgebend.

⟨Weiterer Ausbau der Theorie⟩

⟨Störungstheorie⟩

Mit Hilfe von elementaren Methoden, insbesondere der Separation der Variabeln, kommt man nun häufig nicht zu einer Integration von Eigenwertgleichungen, wie der Schrödingerschen. Es ist daher sehr wichtig und bemerkenswert, dass man ganz allgemein ein Störungsverfahren angeben kann, das es erlaubt, kleine Korrektionsglieder beliebiger Form zu berücksichtigen, wenn die ungestörte Gleichung gelöst ist.

Diese laute

$$L(y) + \lambda\rho(x)y = 0,$$

wo $L(y)$ ein selbstadjungierter, linearer Differentialausdruck zweiter Ordnung sei, sodass die obige Differentialgleichung eine Serie von Eigenwerten und dazu gehörigen Eigenfunktionen

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots$$

$$y_1, y_2, \dots$$

besitzt. Diese Eigenfunktionen bilden ein vollständiges Orthogonalsystem, das wir uns schon normiert denken, mit den Orthogonalitätsrelationen

$$\int \rho(x) y_i y_k \, dx = \delta_{ik}.$$

Natürlich kann man aus ihnen durch

$$u_n = \sqrt{\rho}\, y_n; \qquad \int u_i u_k \, dx = \delta_{ik}$$

ein Orthogonalsystem im gewöhnlichen Sinne machen.

175 Wir nehmen nun an, dass zu der Differentialgleichung ein | kleines Störungsglied $\kappa\mathfrak{r}(x)y$ hinzutritt, die Differentialgleichung also

$$L(y) + \lambda\rho y - \kappa\mathfrak{r}(x)y = 0$$

lautet, und suchen nun diese gestörte Differentialgleichung dadurch zu befriedigen, dass wir sowohl den Eigenwert, als auch die Eigenfunktion in eine Potenzreihe nach κ entwickelt denken, d. h.

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \lambda_i^0 + \kappa\mu_i + \dots \\ y_i &= y_i^0 + \kappa z_i + \dots, \end{aligned}$$

ersetzen, wobei λ_i^0, y_i^0 die Lösungen des ungestörten Problems sind. Gehen wir mit diesem Ansatz in die Differentialgleichung, so erhält man unter Vernachlässigung aller Glieder mit höheren Potenzen von κ

$$L(y_i^0 + \kappa z_i) + \lambda_i^0 \rho y_i^0 + \kappa\mu_i \rho y_i^0 + \kappa\lambda_i^{\langle 0\rangle} \rho z_i - \kappa\mathfrak{r} y_i^0 = 0.$$

Nun ist

$$L(y_i^0 + \kappa z_i) = L(y_i^0) + \kappa L(z_i),$$

und man erhält wegen $L(y_i^0) + \lambda_i^0 \rho y_i^0 = 0$, wenn man den Faktor κ fortkürzt, zur Bestimmung von μ_i und z_i die inhomogene Differentialgleichung

$$L(z_i) + \lambda_i^0 \rho z_i = -\mu_i \rho y_i^0 + \mathfrak{r} y_i^0 = f(x),$$

wo die linke Seite mit der ursprünglichen Differentialgleichung übereinstimmt, und die rechte Seite, abgesehen von der noch zu bestimmenden Konstanten μ_i eine bekannte Funktion von x ist. Damit nun diese inhomogene Gleichung eine Lösung hat, trotzdem schon die homogene lösbar ist, muss die Bedingung

176

$$\int y_i^0 f(x)\, dx = 0$$

erfüllt sein. Dies ergibt eine Bestimmung für die Störung des Eigenwertes μ_i, und zwar wird ersichtlich

$$\mu_i = \int v y_i^2 \, dx.$$ [⟨79⟩]

Hiernach kann man nun auch leicht die Störungen der Eigenfunktionen z_i bestimmen. Hierzu setzen wir z_i als eine Reihe nach den Eigenfunktionen des ungestörten Systems an

$$z_i = c_{k\,1} y_1^0 + c_{k\,2} y_2^0 + \dots,^{\langle 80\rangle}$$

und entwickeln die rechte Seite der Störungsgleichung ebenfalls nach diesen,

$$f(x) = -\mu_i \rho y_i^0 + r y_i^0 = \sum_l a_{li} y_l^0,$$

wobei

$$\begin{aligned} a_{li} &= \int \left\{-\mu_i \rho y_i^0 + r y_i^0\right\} y_l^0 \, dx \\ &= \begin{cases} \int r y_i^0 y_l^0 \, dx & (i \neq l) \\ 0 & (i = l). \end{cases} \end{aligned}$$

Da nun y_i^0 der Gleichung

$$L(y_i^0) + \lambda_i^0 y_i = 0^{\langle 81\rangle}$$

genügt, erhält man durch Gleichsetzen der Koeffizienten von y_i rechts und links in der inhomogenen Differentialgleichung das Resultat

$$\begin{aligned} c_{li} &= \frac{a_{li}}{\lambda_l - \lambda_i} \\ z_l &= \sum_i y_i^0 \frac{\int r y_i^0 y_l^0 \, dx}{\lambda_l - \lambda_i} \quad (l \neq i).^{\langle 82\rangle} \end{aligned}$$

Damit ist die erste Näherung vollkommen erledigt. Durch Fortsetzung der Entwicklung nach κ kann man sie beliebig weit fortführen.[83]

Wichtiger ist aber, dass man diese Betrachtungen ohne weiteres auf Systeme mit mehreren Freiheitsgraden, also partielle Differentialgleichungen ausdehnen kann. Hier kann jedoch ein neues Phänomen auftreten, es können nämlich einige Eigenwerte mehrfach sein, d. h. zu ihnen mehrere linear unabhängige Eigenfunktionen existieren. Sehen wir zunächst von diesem Fall ab, nehmen also an, dass alle Eigenwerte einfach seien, so überträgt sich die obige Betrachtung wörtlich auf diesen Fall, nur dass mehrere Variable x_κ als Argument in den Funktionen auftreten. 177

[79]"y_i^2" should be "${y_i^0}^2$".

[80]Should be: "$z_i = c_{1\,i} y_1^0 + c_{2\,i} y_2^0 + \dots$".

[81]Should be: "$L(y_i^0) + \lambda_i^0 \rho y_i = 0$".

[82]The denominators should be "$\lambda_l^0 - \lambda_i^0$".

[83]The calculations in this section suffer from the following inconsistency: The y_i^0 form an orthonormal function system with respect to the scalar product using the weight function ρ, but the coefficients a_{li} are calculated with respect to a different scalar product (without ρ). Hence the results are only valid for the case $\rho \equiv 1$.

⟨Entartete Systeme⟩

Der Fall der Entartung, wie wir das Auftreten von mehrfachen Eigenwerten bezeichnen wollen, bedarf jedoch einer besonderen Untersuchung, da in den Formeln für die c_{li} einige Nenner verschwinden. Es sei also $\lambda_i = \lambda_{i+1} = \cdots = \lambda_{i+\alpha-1}$ d. h. wir haben α miteinander übereinstimmende Eigenwerte, deren Eigenfunktionen

$$y_i, \ldots, y_{i+\alpha-1}$$

jedoch alle voneinander verschieden sind. Man kann dann durch eine geeignete orthogonale lineare Substitution der y_i

$$y_k^* = \sum g_{ik} y_i^0$$

neue Eigenfunktionen y_k^* einführen, wobei auch diese ein orthogonales Funktionensystem bilden. Durch geeignete Wahl dieser Substitution kann man dann die Näherungsgleichungen wieder lösbar machen, und zwar hat man so zu verfahren, dass die quadratische Form von α Variabeln

$$\sum \alpha_{nm} x_n x_m$$
$$\alpha_{nm} = \int r y_{i+n}^0 y_{i+m}^0 \, dx$$

178 auf Hauptachsen transformiert wird, da dann auch die Zähler, die zu | den Gliedern mit verschwindendem Nenner gehören, gleichfalls verschwinden. Bei Berücksichtigung der Störung spaltet dann der α-fache Eigenwert λ_i^0 in α verschiedene auf. Die Korrektionen, die an dem Eigenwertparameter λ_i^0 anzubringen sind, um $\lambda_i \ldots \lambda_{i+\alpha-1}$ zu erhalten, sind die α Wurzeln der Saekulargleichung

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} - \mu & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1\alpha} \\ \ldots & & & \\ \alpha_{\alpha 1} & \ldots & \ldots & \alpha_{\alpha\,\alpha} - \mu \end{vmatrix} = 0.$$

Die Berechnung der Störungen der Eigenfunktionen lässt sich dann ebenfalls ohne Schwierigkeit durchführen. Der Sinn dieses Verfahrens ist folgendes. Für $\kappa \neq 0$ ist das System nicht entartet, d. h. alle Eigenwerte und Eigenfunktionen ⟨sind⟩ von einander verschieden. Gesucht werden nun diejenigen Eigenfunktionen des ungestörten Systems, die in der Grenze $\lim \kappa = 0$ aus diesem nicht entarteten hervorgehen. Dies führt gerade auf das angedeutete Verfahren.

Mit Hilfe dieser Methode der Störungen lässt sich z. B. der Einfluss eines elektrischen Feldes auf das Wasserstoffatom berechnen, d. h. der Starkeffekt. Ist F die Feldstärke, und sei die Richtung des Feldes die z-Richtung, so lautet die Schrödingergleichung

$$\Delta\psi + \frac{8\pi^2\mu}{h^2}\left(W + \frac{e^2}{r} - eF\,z\right)\psi = 0.$$

Das Zusatzglied gegenüber dem Wasserstoff $-F\,z$ kann man dann als Störglied behandeln, und man kommt durch seine Berücksichtigung in der Tat wieder zu den beobachteten Resultaten.

Wenn wir nun den Zeemanneffekt, d. h. den Einfluss eines magnetischen Feldes, behandeln wollen, so müssen wir zuerst natürlich auch wieder die Schrödingergleichung für ihn | aufstellen. Hierzu ist es erforderlich, die Hamil- 179
tonsche Funktion für ihn aufzustellen, und wir haben daher zunächst die Hamilton-Jacobische Theorie auf den Fall des Vorhandenseins magnetischer Kräfte auszudehnen. Dieses Problem ist auch an sich wichtig und interessant, weshalb wir es in Verbindung mit dem Zeemanneffekt hier behandeln wollen.

⟨Die Hamiltonsche Funktion für beliebige elektromagnetische Felder⟩

Das allgemeinste elektromagnetische Feld lässt sich bekanntlich darstellen mit Hilfe von zwei Potentialen, dem skalaren elektrischen Potential φ und dem magnetischen Vektorpotential $\mathfrak{A}$, die beide auch explizit von der Zeit abhängen können wie z. B. bei Lichtwellen. Aus ihnen berechnen sich das elektrische und magnetische Feld nach den Formeln

$$\begin{aligned}\mathfrak{E} &= -\operatorname{grad}\varphi + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial t}\langle 84\rangle\\ \mathfrak{H} &= \operatorname{rot}\mathfrak{A}.\end{aligned}$$

Für ein konstantes Magnetfeld in der z-Richtung von der Stärke H wird dann z. B.

$$\varphi = 0, \quad \mathfrak{A}_x = -\frac{1}{2}yH, \quad \mathfrak{A}_y = \frac{1}{2}xH, \quad \mathfrak{A}_z = 0$$
$$\mathfrak{H}_z = \operatorname{rot}_z\mathfrak{A} = \frac{\partial\mathfrak{A}_y}{\partial x} - \frac{\partial\mathfrak{A}_x}{\partial y} = H, \quad \mathfrak{H}_y = \mathfrak{H}_z = 0.$$

Die Bewegung eines Elektrons in einem solchen Feld kann man mittels des Hamiltonschen Prinzips

$$\int L\,dt = \text{Extremum}$$

beschreiben, wenn man als Lagrangesche Funktion L, die für gewöhnliche Systeme durch

$$L = T - U$$

gegeben ist, den folgenden Ausdruck nimmt

180 $$L = T + e\varphi - \frac{e}{c}(\mathfrak{v}\mathfrak{A})$$

[84] Should be: “$-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial t}$”.

[($\mathfrak{v}\mathfrak{A}$) = skalares Produkt von $\mathfrak{A}$ mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$].
In rechtwinkligen Koordinaten wird dies

$$L = \frac{\mu}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) + e\varphi - \frac{e}{c}\left(\dot{x}\mathfrak{A}_x + \dot{y}\mathfrak{A}_y + \dot{z}\mathfrak{A}_z\right).$$

Die Richtigkeit dieses Ansatzes bestätigen wir durch Aufstellung der Bewegungsgleichungen, von denen es genügt, die x-Komponente aufzuschreiben

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0.$$

Durch Ausführung der Differentiationen bekommt man nämlich

$$\mu\ddot{x} - \frac{e}{c}\left(\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial z}\dot{z} + \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial t}\right)$$
$$+ \frac{e}{c}\left(\dot{x}\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial x} + \dot{z}\frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial x}\right) - e\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$$
$$\mu\ddot{x} = -e\left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial t}\right) - \frac{e}{c}\left\{\dot{y}\left(\frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial y}\right) - \dot{z}\left(\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial x}\right)\right\},$$

und dies ist nach den obigen Formeln für $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$

$$\mu\ddot{x} = -e\left(\mathfrak{E}_x + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{H}]\right)$$
$$\big([\mathfrak{v}\mathfrak{H}] = \text{Vektorprodukt von } \mathfrak{v} \text{ und } \mathfrak{H}\big).$$

Die rechte Seite ist aber gerade die Lorentzkraft eines elektromagnetischen Feldes auf ein Elektron, w. z. b. w.
Um von der Lagrangefunktion zu der Hamiltonschen Funktion und den kanonischen Gleichungen zu gelangen, hat man auf L die Legendresche Transformation anzuwenden. D. h. man setze

$$H = \sum_k \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L,$$

und führe hier an Stelle der $\dot{q}_k$ die Impulse

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$$

ein. Nach dieser Vorschrift erhält man

181 $$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \mu\dot{x} - \tfrac{e}{c}\mathfrak{A}_x, \quad \dot{x} = \frac{1}{\mu}\left(p_x + \tfrac{e}{c}\mathfrak{A}_x\right)$$
$$L = \frac{1}{2\mu}\sum_{xyz}\left(p_x + \tfrac{e}{c}\mathfrak{A}_x\right)^2 + e\varphi - \frac{e}{\mu c}\sum_{xyz}\mathfrak{A}_x\left(p_x + \tfrac{e}{c}\mathfrak{A}_x\right)$$
$$\mathcal{H} = \sum_k p_k\dot{q}_k - L = \frac{1}{\mu}\sum_{xyz} p_x\left(p_x + \tfrac{e}{c}\mathfrak{A}_x\right) - e\varphi - L,$$ ⟨85⟩

und es wird hiernach die Hamiltonsche Funktion einfach

$$\mathcal{H}(pq) = \frac{1}{2\mu} \sum_{xyz} \left(p_x + \tfrac{e}{c}\mathfrak{A}_x\right)^2 - e\varphi.$$

⟨Zeemaneffekt⟩

Wir betrachten jetzt speziell das Wasserstoffatom in dem oben angegebenen einfachen Magnetfeld, d. h. wir nehmen

$$\varphi = -\tfrac{e}{r},^{\langle 86\rangle} \quad \mathfrak{A}_x = -\tfrac{1}{2}yH, \quad \mathfrak{A}_y = \tfrac{1}{2}xH, \quad \mathfrak{A}_z = 0,$$

und erhalten

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2\mu}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) - \frac{e^2}{r} + \frac{eH}{2\mu c}(xp_y - yp_x) + \frac{\mu}{2}\left(\frac{eH}{2\mu c}\right)^2 (x^2 + y^2).$$

Nach Aufstellung der Hamiltonschen Funktion können wir jetzt in gewohnter Weise die Schrödingergleichung aufstellen, indem wir jedes p durch den Differentialoperator $\varepsilon\frac{\partial}{\partial q}$ ersetzen, und die Differentialgleichung

$$(H - W)\psi = 0$$

bilden. Wir erhalten so

$$\frac{\varepsilon^2}{2\mu}\Delta\psi - \frac{e^2}{r}\psi + \frac{\varepsilon eH}{2\mu c}\left(x\frac{\partial\psi}{\partial y} - y\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + \frac{\mu}{2}\left(\frac{eH}{2\mu c}\right)^2 (x^2 + y^2)\psi - W\psi = 0,$$

und zwar ist diese Bildung hier ganz eindeutig, da in den einzelnen Faktoren alle Grössen miteinander vertauschbar sind, was bei allgemeineren Magnetfeldern nicht mehr der Fall zu sein braucht. Natürlich wird man auch hier wieder Polarkoordinaten einführen. Dabei wird

$$x\frac{\partial\psi}{\partial y} - y\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial\varphi},$$

wie man durch Ausrechnen leicht bestätigt. Das Glied mit $\frac{H^2}{c^2}$ | können wir 182
ferner wegen dieses sehr kleinen Faktors vernachlässigen, und wir erhalten also schliesslich, wenn wir noch $\varepsilon = \frac{h}{2\pi i}$ einsetzen

$$\Delta\psi - \frac{2\pi i}{h}\frac{eH}{c}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} + \frac{8\pi^2\mu}{h^2}\left(W + \frac{e^2}{r}\right)\psi = 0.$$

Zum Unterschied gegen früher tritt hier das lineare Glied hinzu, das auch noch mit dem Faktor i behaftet ist.

---

[85] The term "$-e\varphi$" should be deleted.

[86] Should be: "$\varphi = -\frac{e}{r}$".

Dass hier ein imaginäres Glied auftritt, liegt im Grunde gar nicht in der Natur der Sache, sondern ist nur dadurch hineingekommen, dass wir von vornherein schon in der Matrizentheorie statt der reellen sin und cos die komplexe Exponentialfunktion genommen hatten, um alle Formeln und Regeln möglichst bequem und übersichtlich fassen zu können, während es sich im Grunde stets um reelle Grössen handelte. So ist es natürlich auch hier. Die Differentialgleichung ist also so zu verstehen, dass man $\psi = \psi_1 + i\psi_2$, wo ψ_1 und ψ_2 beide reell sind, zu setzen hätte, und dann zur Bestimmung dieser beiden Funktionen die beiden Differentialgleichungen, die durch Bildung des Real- und Imaginärteiles für sich entstünden, heranzöge; denn an sich sind ja nur reelle Eigenwerte und Funktionen sinnvoll. Formal kann man aber unter den nötigen Vorsichtsmassregeln⟨,⟩ die eine etwas andere Formulierung der Bedingung der Selbstadjunktion erfordern, auf die hier aber nicht weiter eingegangen sei, die komplexe Schreibweise beibehalten, womit man einfachere und übersichtlichere Formeln erhält.

Ausführlich geschrieben lautet nun unsere Differentialgleichung für den Zeemanneffekt

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\,\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} - \frac{2\pi i}{h}\frac{eH}{c}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} + \frac{8\pi^2\mu}{h^2}\left(W + \frac{e^2}{r}\right)\psi = 0.$$

183 Sie ist zunächst nicht im üblichen Sinne separierbar, wir können sie aber durch den einfachen Ansatz

$$\psi = \psi(\vartheta, r)e^{im\varphi}$$

lösen, wobei $\psi(\vartheta, r)$ jetzt nunmehr eine Funktion von r und ϑ alleine sein soll. Damit nun diese Lösung eindeutig ist, muss m offenbar eine (positive oder negative) ganze Zahl sein, da dann bei einer Vermehrung von φ um 2π ψ wieder den Ausgangswert annimmt. Die Differentialgleichung reduziert sich bei diesem Ansatz auf

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\,\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\right) - \frac{m^2}{\sin^2\vartheta}\right] + \frac{2\pi eHm}{hc}\psi + \frac{8\pi^2\mu}{h^2}\left(W + \frac{e^2}{r}\right)\psi = 0.$$

Hier hängt die eckige Klammer von ϑ ab, das ausserhalb nicht mehr vorkommt. Daher ist die Gleichung in ϑ und r separierbar. Mit dem Ansatz

$$\psi(r, \vartheta) = \chi(r)\psi(\vartheta)$$

bekommt man für $\psi(\vartheta)$ die Differentialgleichung

$$\frac{1}{\psi(\vartheta)}\left[\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\,\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\right) - \frac{m^2}{\sin^2\vartheta}\right] = -b.$$

Dies ist aber mit $b = n(n+1)$ die Gleichung für die zugeordneten Kugelfunktionen

$$P_n^m(\cos\vartheta) = \frac{d^m P_n(\cos\vartheta)}{d\cos\vartheta^{\,m}},$$

wo die P_n die gewöhnlichen Legendreschen Polynome sind. Die obige Wahl von b ist natürlich durch die Eindeutigkeitsforderung erzwungen. Bei dem gewöhnlichen Wasserstoffproblem trat hier an Stelle von m^2 : $\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}$, womit man die Diff⟨erential⟩Gl⟨eichung⟩ für die allgemeinen Kugelfunktionen erhält. Diese sind aber, wie wir schon sagten, beliebige lineare Aggregate von
$\sin m\varphi\, P_n^m$ und $\cos m\varphi\, P_n^m$ $\quad (m = \pm 0, 1, \ldots, n)$ | und die Wirkung des Mag- 184
netfeldes ist also, dass diese Unbestimmtheit (d. h. Entartung) aufgehoben wird. Um eine $\neq 0$ Lösung zu erhalten, muss natürlich $|m| \leq n$ sein.
Für $\chi(r)$ erhält man endlich die Diff⟨erential⟩Gl⟨eichung⟩

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \left[-\frac{n(n+1)}{r^2} + \frac{8\pi^2\mu}{h^2}\left(W + \frac{mehH}{4\pi c}\right) + \frac{8\pi^2\mu e^{\langle 2\rangle}}{h^2 r}\right]\psi = 0,$$

die genau mit der früheren für den Wasserstoff übereinstimmt, nur dass anstatt von W : $W + \frac{mehH}{4\pi c}$ steht, also der Eigenwertparameter etwas geändert wird. Dementsprechend wird nun (vgl. S. 171)

$$W_l + \frac{mehH}{4\pi c} = \frac{2\pi\mu e^4}{h^2 l^2}$$

$$W_{lm} = \frac{2\pi\mu e^4}{h^2 l^2} - \frac{mehH}{4\pi c}. \quad (m = \pm 0, \ldots, l-1)$$

Jeder Eigenwert W_l des ungestörten Wasserstoffatoms ist also in $2l+1$ verschiedene aufgespalten. Hiermit ist die Theorie des normalen Zeemanneffektes in Uebereinstimmung mit der Erfahrung erledigt, wenn man hinzunimmt, was sich ebenfalls ohne Schwierigkeiten beweisen lässt, dass m nur um 0 oder ± 1 springen kann.

⟨Die Analogie zwischen Optik und Mechanik⟩

Bevor wir nun zur Fortentwicklung der Quantentheorie übergehen, ist es gut einige allgemeine Bemerkungen über den Zusammenhang zwischen Optik und Mechanik zu machen, der der eigentliche Wegweiser Schrödingers bei der Aufstellung seiner Theorie war.
Die Analogie zwischen geometrischer Optik und Mechanik ist alt bekannt. Schon Hamilton hat sie benutzt, um seine Mechanik zu gewinnen. Der leitende Gedanke Schrödingers, der übrigens schon durch Arbeiten von De Broglie und Einstein[87] vorbereitet war, ist nun der, dass die Quantentheorie ein Seitenstück zu der Wellentheorie des Lichtes ist, in dem Sinne, dass wie die
| geometrische Optik ein Grenzfall der Wellenoptik ist, auch die klassische 185

[87] *De Broglie 1924* and *Einstein 1925*.

Mechanik nur ein Grenzfall der Quantenmechanik ist.

Die Analogie zwischen Optik und Mechanik erkennt man am Besten aus den Integralprinzipen. In der Mechanik lautet das Jacobische Prinzip der kleinsten Wirkung: Die Bahnkurve bestimmt sich durch das Minimalprinzip

$$\int \sqrt{F}\, ds = \text{Minimum}.$$

Dabei ist $F = W - U = T$ die kinetische Energie als Ortsfunktion (wir betrachten nur konservative Systeme) und das Streckenelement ds durch

$$T = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2$$

definiert. Das Jacobische Prinzip ist also an sich mit dem Eulerschen

$$\int T\, dt = \text{Minimum}$$

(unter der Nebenbedingung $T + U = W = \text{konst.}$) aequivalent.

In der Optik hat nun in einem inhomogenen Medium das Licht an jeder Stelle eine gewisse Geschwindigkeit, die durch eine Funktion Ω gegeben sei,

$$\frac{ds}{dt} = \Omega.$$

Der Weg des Lichtstrahles wird nun durch das Fermatsche Prinzip des kürzesten Lichtweges bestimmt. Dieses verlangt

$$\int dt = \int \frac{1}{\Omega}\, ds = \text{Minimum}.$$

Der "optischen Dichte"

$$\frac{1}{\Omega} = n,$$

186 wo n der Brechungsindex bedeutet, entspricht also $\sqrt{F}$ in der Mechanik. Dabei müssen wir dann den Lichtstrahl allgemein in einem nichteuklidischen Raume deuten, dessen Linienelement sich eben durch

$$ds^2 = T\, dt^2$$

bestimmt.

⟨Die Hamiltonsche Differentialgleichung als Grenzfall der Schrödingerschen⟩

Dieser Zusammenhang gibt nun auch eine Deutung der Lösung S der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung

$$H\left(\frac{\partial S}{\partial q}, q\right) = W.$$

Wir hatten ja seinerzeit gefunden,[88] dass

$$S = 2\int T\,dt = 2\int \sqrt{W-U}\,ds = 2\int \sqrt{F}\,ds$$

war. Die Flächen $S =$ konst. sind somit Flächen mit gleicher Lichtwegdifferenz in der Optik. Nehmen wir also eine dieser Flächen als Erregungsfläche eines optischen Vorganges, so sind die übrigen Flächen die nacheinander erreichten Wellenfronten im Sinne des Huyggenschen Prinzips der Optik. Den Ausbreitungsvorgang selbst bekommt man, wenn man die Hamiltonsche Differentialgleichung in der die Zeit enthaltenden Form

$$\frac{\partial J}{\partial t} = H\left(\frac{\partial J}{\partial q}, q\right)$$

mit der Lösung $J = S - Wt$ nimmt, durch die wir jeder Fläche $S =$ konst. $= a$ den Wert $t = \frac{a}{W}$ zuordnen.

Der Hamiltonschen Theorie in der klassischen Mechanik entspricht nun in der Quantentheorie die Schrödingergleichung. Um die Verwandtschaft beider zu erkennen, stellen wir die Rezepte zu ihrer Aufstellung noch einmal nebeneinander. Ausgangs|punkt ist in beiden Fällen die Hamiltonsche Funk- 187
tion der gewöhnlichen Mechanik

$$H(pq) = W; \quad \text{z.B.} \quad H = T + U = \frac{1}{2\mu}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) + U(x,y,z).$$

In der klassischen Mechanik setzt man nun

$$p = \frac{\partial S}{\partial q}$$

und erhält damit eben die Differentialgleichung erster Ordnung

$$H\left(\frac{\partial S}{\partial q}, q\right) = W, \tag{I}$$

die z. B. für einen Massenpunkt μ in rechtwinkligen Koordinaten

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 + 2\mu U(x,y,z) = 2\mu W$$

lautet. In der Quantenmechanik dagegen ersetzt man p durch den Operator $\varepsilon\frac{\partial}{\partial q}$, und wendet den so entstehenden Operator $H - W$ auf ψ an

$$H\left(\varepsilon\frac{\partial}{\partial q}, q\right)\psi - W\psi = 0 \tag{II}$$

$$\text{z.B.} \quad \varepsilon^2\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right) + 2\mu(U-W)\psi = 0$$

[88]Cf. 540.

$$\Delta\psi + \frac{8\pi^2\mu}{h^2}(W-U)\psi = 0. \tag{IIa}$$

Zwischen den beiden Differentialgleichungen besteht nun ein einfacher Zusammenhang. Setzen wir

$$\psi = e^{\frac{2\pi i}{h}S} = e^{\frac{S}{\varepsilon}} \quad \text{d. h.} \quad S = \varepsilon \log\psi,$$

so wird

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\psi}{\partial x} &= \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial S}{\partial x} e^{\frac{S}{\varepsilon}} \\
\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} &= \left(\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{1}{\varepsilon^2}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2\right) e^{\frac{S}{\varepsilon}}.
\end{aligned}$$

188 Nun ist ε eine sehr kleine Grösse. Setzen wir daher diesen | Wert von $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$ in II bzw. IIa ein, und multipliziert ⟨man⟩ mit ε^2, so kann man die noch mit ε behafteten Glieder vernachlässigen und man kommt dann, da man den gemeinsamen Faktor $e^{\frac{S}{\varepsilon}}$ fortheben kann, genau zu der Differentialgleichung I bzw. Ia.[89] Dieser Grenzübergang kann natürlich für beliebige Koordinaten und Systeme in dieser Weise ausgeführt werden. Es ist dies derselbe Gedanke, der den Grenzübergang von der Wellentheorie des Lichtes zu der geometrischen Optik vermittelt, indem an sich ein Wellenvorgang durch eine Differentialgleichung zweiter Ordnung bestimmt wird. Für die Ausbreitung der Wellenfronten jedoch genügt es in der Approximation der geometrischen Optik, die Flächen konstanter Phase zu kennen, die durch die Differentialgleichung erster Ordnung geliefert werden. Aehnlich kann man auch die Schrödingersche Gleichung als eine Schwingungsgleichung auffassen.

⟨Anwendung der Quantenmechanik auf die statistische Mechanik⟩

⟨Zwei gleiche Systeme⟩

Wir gehen jetzt zu einer sehr wichtigen und interessanten Anwendung der Quantenmechanik über, durch die die eigentliche Bedeutung zweier schon früher aus empirischen Gründen aufgestellter Theoreme erklärt wird, nämlich das Paulische Verbot gleicher Quantenbahnen für mehrere Elektronen im Atom und die Unzulänglichkeit der Boltzmannschen Statistik, die zu der Bose-Einsteinschen Statistik geführt hatte.[90] Beide ordnen sich jetzt zwanglos in die allgemeine Theorie ein.

Der Weg, der uns hierzu führt, ist folgender. Man setze mehrere gleiche Systeme zu einem einzigen zusammen und untersuche die quantenmechanischen Eigenschaften des Gesamtsystems.

[89] Probably a reference to the unnumbered equation following equation (I).

[90] Cf. *Bose 1924* and *Einstein 1924*.

Der erste wichtigste Schritt hierzu ist natürlich zunächst die Zusammensetzung von zwei Systemen. Wir benutzen wieder die Methode von Schrödinger. Es sei die Energiefunktion des einen Systems $H^{(1)}\left(p^{(1)},q^{(1)}\right)$, die des anderen $H^{(2)}\left(p^{(2)},q^{(2)}\right)$, ihre Wechselwirkungsenergie $\kappa U\left(q^{(1)},q^{(2)}\right)$, also die | Hamil- 189
tonsche Funktion des Gesamtsystems

$$H = H^{(1)} + H^{(2)} + \kappa U,$$

wo κ ein kleiner Entwicklungsparameter ist. Die Eigenfunktionen und Eigenwerte des Einzelsystems

$$\psi_n^{(1)}\left(q^{(1)}\right), \quad W_n^{(1)} \quad \text{bzw.} \quad \psi_m^{(2)}\left(q^{(2)}\right), \quad W_n^{(2)}$$

seien bekannt. Sie genügen natürlich den Eigenwertgleichungen

$$\left(H^{(1)} - W_n^{(1)}\right)\psi_n^{(1)} = 0, \quad \left(H^{(2)} - W_m^{(2)}\right)\psi_n^{(2)} = 0.^{\langle 91\rangle}$$

Dabei sei jedes System für sich nicht entartet, d. h. alle Eigenwerte von einander verschieden. Für verschwindende Wechselwirkung ($\lim\kappa = 0$) ist dann die Differentialgleichung für das Gesamtsystem separierbar, und ergeben sich als Eigenfunktionen und Eigenwerte

$$\psi_{nm}^{(0)}\left(q^{(1)},q^{(2)}\right) = \psi_n^{(1)}\left(q^{(1)}\right)\psi_m^{(2)}\left(q^{(2)}\right)$$
$$W_{nm}^{(0)} = W_n^{(1)} + W_m^{(2)}.$$

Sie genügen der Differentialgleichung

$$\left(H^{(1)} + H^{(2)} - W_{nm}^{(0)}\right)\psi_{nm}^{(0)} = 0.$$

Die zweifache Skala der $W_{nm}^{(0)}$ kann man natürlich auch leicht eindimensional einorden, z. B. der Grösse nach. Es ist aber hier zweckmässiger die obige Schreibweise beizubehalten, und nur nm fortlaufend wie einen Index zu denken.

Sind zunächst die beiden Teilsysteme von einander verschieden, so kann man mit der Störungsrechnung leicht die Eigenwerte und Eigenfunktionen auch für endliche Wechselwirkung, d. h. für $\kappa \neq 0$ berechnen. Man erhält entsprechend dem Umstand, | dass dann alle Eigenwerte $W_{nm}^{(0)}$ voneinander verschieden also 190
einfach sind,

$$\psi_{nm} = \psi_{nm}^{(0)} + \kappa\chi_{nm} + \dots$$
$$W_{nm} = W_{nm}^{(0)} + \kappa V_{nm} + \dots,$$

[91] The second equation should have "$\psi_m^{(2)}$".

wobei

$$\chi_{nm} = \sum_{kl} a_{kl}^{nm} \psi_{kl}^{(0)}$$

$$a_{kl}^{nm} = \frac{\iint U \psi_{kl}^{(0)} \psi_{nm}^{(0)} \, dq^{(1)} dq^{(2)}}{W_{nm}^{(0)} - W_{kl}^{(0)}} \qquad (nm \neq k, l)$$

$$a_{nm}^{nm} = 0.$$

Ferner

$$V_{nm} = \iint U \left(\psi_{nm}^{(0)}\right)^2 dq^{(1)} dq^{(2)}.$$

Wesentlich für diese Lösung ist offenbar, dass alle Eigenwerte $W_{nm}^{(0)}$ voneinander verschieden sind, da sonst Nullnenner auftreten. Bei zwei gleichen Systemen, zu deren Behandlung wir jetzt übergehen, ist aber stets eine solche Entartung vorhanden, da die Vertauschung der Quantenzustände der beiden Atome stets einen Zustand gleicher Energie liefert, also stets

$$W_{nm}^{(0)} = W_{mn}^{(0)}$$

ist. Bei der Störungstheorie hatten wir das hierbei einzuschlagende Verfahren schon angedeutet. Man hat neue Eigenfunktionen Ψ_{nm} einzuführen, die bestimmte lineare Kombinationen der alten Eigenfunktionen sind. Man findet sie durch Grenzübergang von nichtentarteten gestörten Systemen her, und zwar ist hierzu eine algebraische Gleichung aufzulösen. In unserem Falle werden nun die neuen Eigenfunktionen

191
$$\Psi_{nm}^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\psi_{nm}^{(0)} + \psi_{mn}^{(0)}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\psi_n^{(1)} \psi_m^{(2)} + \psi_m^{(1)} \psi_n^{(2)}\right), \quad \text{für} \quad n \geq m$$

$$\Psi_{nm}^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\psi_{mn}^{(0)} - \psi_{nm}^{(0)}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\psi_m^{(1)} \psi_n^{(2)} - \psi_n^{(1)} \psi_m^{(2)}\right), \quad \text{für} \quad n < m.$$

Die Eigenwerte bleiben natürlich dieselben; der Uebergang von den $\psi_{nm}^{(0)}$ zu den $\Psi_{nm}^{(0)}$ ist in der Tat eine lineare, orthogonale Substitution mit der Determinante 1. Für $n \geq m$ erhalten wir also symmetrische Eigenfunktionen (in $q^{(1)}$, $q^{(2)}$) und für $n < m$ antisymmetrische.

Ersetzt man in den Störungsformeln für die a_{kl}^{nm} die ψ durch die Ψ, so kann man leicht durch Ausrechnen unter Berücksichtigung des Umstandes, dass $U\left(q^{(1)}, q^{(2)}\right)$ symmetrisch in den $q^{(1)}$, $q^{(2)}$ sein muss, bestätigen, dass auch gerade die Zähler verschwinden, wenn die Nenner gleich null werden. Die Eigenschaft der Symmetrie bzw. Antisymmetrie der Eigenfunktion bleibt übrigens erhalten, was für das folgende von entscheidender Bedeutung ist. Der Störungstheorie entsprechend haben wir diese a_{mn}^{nm} gleich null zu setzen, so dass nun das Verfahren zum Ziel führt. Auch die V_{nm} rechnen sich leicht aus, und zwar wird

$$V_{nm} = \iint U \left(\Psi_{nm}^{(0)}\right)^2 dq^{(1)}dq^{(2)}$$
$$= \begin{cases} \iint U \left(\psi_{nm}^{(0)}\right)^2 dq^{(1)}dq^{(2)} + \iint U\psi_{nm}^{(0)}\psi_{mn}^{(0)}\, dq^{(1)}dq^{(2)} & (n \geq m) \\ \iint U \left(\psi_{nm}^{(0)}\right)^2 dq^{(1)}dq^{(2)} - \iint U\psi_{nm}^{(0)}\psi_{mn}^{(0)}\, dq^{(1)}dq^{(2)} & (n < m). \end{cases}$$

Es ist also für $\kappa \neq 0 \quad W_{nm} \neq W_{mn}$, d. h. bei Wechselwirkung verschwindet die Entartung.

⟨Das Zerfallen der Terme in nicht-kombinierende Reihen⟩

Dies alles ist ganz erwartungsgemäss. Nun aber kommt das Merkwürdige. Diese zwei Termsysteme, nämlich W_{nm} mit $n \geq m$ und $n < m$ bilden mit den zugehörigen Eigenfunktionen vollständig unabhängige Lösungen unserer Differentialgleichung. Das ist so zu verstehen: Befindet sich das Gesamtsystem einmal in einem Zustand der einen Reihe, so kann es niemals in einen Zustand der anderen Reihe übergehen. Um dies zu beweisen, müssen | wir 192
uns erst klar werden, dass wir für das Gesamtsystem, zur Charakterisierung seiner Lage und seiner Eigenschaften, jetzt nur Funktionen nehmen dürfen, die symmetrische Funktionen der Lagekoordinaten der einzelnen Teilsysteme sind. Z. B. ist das elektrische Moment, das ja für die Ausstrahlung massgebend ist, eine solche symmetrische Funktion der Koordinaten $f\left(q^{(1)}, q^{(2)}\right)$. Um nun die Uebergangswahrscheinlichkeiten zu erhalten, müssen wir die Matrix des elektrischen Moments berechnen. Das einzelne Matrizenelement, das dem Uebergang vom Zustand nm in den Zustand kl zugeordnet ist, ist nach der allgemeinen Definition

$$f_{kl}^{nm} = \iint f\left(q^{(1)}, q^{(2)}\right) \Psi_{nm}\Psi_{kl}\, dq^{(1)}dq^{(2)}.$$

Nun nehmen wir einen Uebergang, der einer Interkombination zwischen beiden Reihen entspricht, also z. B. sei $n \geq m$, $k < l$. Dann sind f und Ψ_{nm} symmetrische Funktionen in $q^{(1)}$, $q^{(2)}$; Ψ_{kl} dagegen ist antisymmetrisch. Also ist der ganze Integrand antisymmetrisch. Das Integral über einen solchen verschwindet aber natürlich. Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Die beiden Lösungssysteme sind auch in der Hinsicht als vollständig zu bezeichnen, als jeder Satz der Eigenfunktion für sich es erlaubt, den Funktionen, die in $q^{(1)}$ und $q^{(2)}$ symmetrisch sind, Matrizen zuzuordnen und alle Rechenoperationen mit ihnen auszuführen. Bei den symmetrischen Eigenfunktionen versteht sich dieses von selbst. Aber auch bei den antisymmetrischen Eigenfunktionen ist dies möglich. Die Matrizenbildung F_{kl}^{nm} läuft ja auf eine Fourierentwicklung von $F\Psi_{kl}$ nach den Ψ_{nm} hinaus. Ist nun F symmetrisch Ψ_{kl}

antisymmetrisch so wird auch $f\Psi_{kl}$ antisymmetrisch, und ist daher nach den
193 antisymmetrischen Ψ_{nm} alleine entwickelbar.

⟨Die symmetrische und antisymmetrische Lösung bei beliebig vielen Teilsystemen⟩

Welche von den beiden Lösungssystemen nun in der Natur realisiert ist, darüber sagt die Theorie zunächst nichts aus. Nach ihr sind alle beide möglich. Aber wir haben hier einen fundamentalen Erfahrungssatz, der aus dem ganzen Material der Spektroskopie gewonnen und sehr fruchtbar und weitreichend ist, nämlich das Paulische Prinzip für Elektronen im Atom. Auf ihm beruht unsere ganze jetzige Theorie des periodischen Systems der Elemente. Es besagt, dass zwei Elektronen in einem Atom, die in unserem Sinne als zwei gleiche Systeme aufgefasst werden können, nie auf der gleichen Quantenbahn laufen dürfen. Es ist so, als ob auf einer Bahn nur für eines Platz wäre. In unserer Ausdrucksweise bedeutet dies, dass Eigenfunktionen mit Doppelindex, also Ψ_{nn} in der Natur nicht vorkommen. Dies schliesst aber die ganze symmetrische Reihe aus, da sonst von den übrigen stets Uebergänge in diesen Zustand möglich wären. In der antisymmetrischen Reihe kommen dagegen die Ψ_{nn} nicht vor, und wir werden so zu dem Schluss geführt, dass nur die antisymmetrischen Lösungen in der Natur realisiert sind. Dies ist also die wahre Bedeutung des Paulischen Prinzips. Damit ist nun auch wieder erreicht, dass zu jedem Eigenwert W_{nm} nur ein bestimmter Zustand, nämlich der durch die antisymmetrischen Eigenfunktionen charakterisierte gehört.

Die obigen Resultate für 2 gleiche Systeme können nun leicht auf beliebig viele ausgedehnt werden, und wir müssen dies, wenn wir unsere Theorie auf die Gastheorie anwenden wollen. Bei N Systemen ist jeder Eigenwert des Gesamtsystems $N!$ -fach, da jede Permutation zweier Atome zu demselben Energiewert führt. Es entstehen dementsprechend $N!$ Termreihen, die alle
194 von einander unabhängig sind, in dem Sinne, dass sie nicht | miteinander kombinieren.

Unter diesen Reihen sind nun zwei besonders ausgezeichnet, die genau den beiden Reihen beim 2-Teilchenproblem entsprechen. Seien $\psi_n^{(k)}$ die Eigenfunktionen des k-ten Teilsystems, so haben wir einerseits einen Satz "symmetrischer" Eigenfunktionen des Gesamtsystems

$$\Psi_{n_1 n_2 \ldots n_N} = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{k_1,\ldots,k_n} \psi_{n_1}^{(k_1)} \ldots \psi_{n_N}^{(k_N)},$$

wobei über alle Permutationen der k zu summieren ist. Der andere Grenzfall ist der der "antisymmetrischen" Eigenfunktionen, die wir in der Determinantenform[92]

$$\Psi_{n_1 n_2 \ldots n_N} = \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} \psi_{n_1}^{(1)} & \psi_{n_1}^{(2)} & \ldots & \psi_{n_1}^{(N)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \psi_{n_N}^{(1)} & & \ldots & \psi_{n_N}^{(N)} \end{vmatrix}$$

schreiben können. Beide sind lineare Kombinationen der Eigenfunktionen des Systems ohne Wechselwirkung, das sich in den einzelnen Variabeln separieren lässt, und deren Eigenfunktionen dementsprechend gleich dem Produkt der Eigenfunktionen der Einzelsysteme sind

$$\psi_{n_1 n_2 \ldots n_N} = \psi_{n_1}^{(1)} \ldots \psi_{n_N}^{(N)} \quad \text{u.s.w.}$$

Zwischen diesen beiden Extremfällen liegen nun die ganze Schar der übrigen Eigenfunktionen, die alle vermittelst einer orthogonalen linearen Substitution aus den $\psi_{n_1 \ldots n_N}$ gewonnen werden können.
Alle diese Reihen für sich geben, wie gesagt eine vollständige Lösung. Speziell bei den beiden extremen Reihen | können mit den Eigenfunktionen einer Reihe 195
allen Funktionen, die in den Koordinaten der Einzelsysteme symmetrisch sind, Matrizen angeordnet werden.

⟨Das Paulische Prinzip⟩

Welche der Lösungen in der Natur vorkommen, darüber sagt die allgemeine Theorie nichts aus. Jedoch gibt hier wieder das Paulische Prinzip die Entscheidung. Die antisymmetrischen Eigenfunktionen verschwinden nämlich nach dem bekannten Determinantensatz, wenn 2 oder mehr Teilsysteme in demselben Quantenzustand sind, d. h. zwei Indices z. B. n_1 und n_2 denselben Wert haben. Das bedeutet, dass die entsprechenden Zustände nicht vorkommen. D. h. die antisymmetrische Lösung genügt dem Paulischen Prinzip, während bei allen anderen Lösungen es nicht gewährleistet ist. Man wird also erwarten, dass für Atome und Elektronen gerade die antisymmetrische Lösung in der Wirklichkeit realisiert ist.
Auch die symmetrische Lösung ist von besonderem Interesse, denn sie führt gerade, worauf wir gleich zurückkommen, zu der Statistik von Bose-Einstein, die sich für die Lichtquanten bewährt hat, und es ist daher anzunehmen, dass sie für diese realisiert ist.

⟨Die Quantelung eines Gases⟩

Wir wollen nun unsere Theorie auf ein ideales Gas anwenden. Dieses kann man sich bestehend denken aus lauter gleichen punktförmigen Atomen der Masse μ, zwischen denen in der Grenze keine merkliche Wechselwirkung besteht.

[92]This determinant has become known in physics under the name 'Slater determinant', following Slater's later paper which was published two years after Hilbert's lecture (*Slater 1929*).

Um dies Problem behandeln zu können, müssen wir zunächst die Eigenwerte und Funktionen der Einzelsysteme, d. h. eines einzelnen freibeweglichen Atoms kennen. Die Energie eines solchen ist nur die kinetische Energie der fortschreitenden Bewegung

196
$$\frac{1}{2\mu}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) = W.$$

Die Schrödingergleichung ist daher wegen $U = 0$

$$\Delta\psi + \frac{8\pi^2\mu}{h^2}W\psi = 0, \quad (W > 0)$$

oder einfach

$$\Delta\psi + \lambda\psi = 0, \quad \lambda = \frac{8\pi^2\mu}{h^2}W.$$

Ist das Atom frei beweglich im ganzen Raum, so sind alle Werte von W Eigenwerte, und die Eigenfunktionen

$$\psi = e^{i(kr)} = e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)}, \quad k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \lambda.$$

Wir haben also ein kontinuierliches Spektrum, und alle Geschwindigkeiten, d. h. Energien und Richtungen der Translationsbewegung sind erlaubt.

Ist dagegen das Atom in einem bestimmten Volumen eingeschlossen (z. B. in einem Kasten $0 \leq x, y, z \leq 2\pi$), so wäre dem an sich durch eine potentielle Energie Rechnung zu tragen, die plötzlich an den Wänden einen sehr hohen Betrag annimmt. Dies bedeutet aber nur Spiegelung aller Vorgänge an den Wänden, und man kann daher ihr dadurch Rechnung tragen, dass man die obige Differentialgleichung nimmt, und eine Periodizität der Lösungen verlangt, deren Elementargebiet eben der Kasten ist. Dadurch werden (bei unserer Wahl der Dimensionen, die aber natürlich unwesentlich ist) die k_x, k_y, k_z auf ganzzahlige Werte eingeschränkt. Und daher auch die Eigenwerte W diskret.

197 Die Zahl der Quantenzustände in einem bestimmten In|tervall zwischen λ und $\lambda + d\lambda$ ist demnach gleich der Anzahl der Gitterpunkte in einer Kugelschale mit diesen Radien, und nach bekannten Sätzen[93] asymptotisch unabhängig von der Gestalt des Kastens. Nehmen wir allgemein ein Volumen V an, so wird sie

$$\frac{V}{2\pi^2}\lambda^{\frac{1}{2}}\Delta\lambda = \frac{4V(2\mu\pi)^{\frac{3}{2}}}{\pi^2 h^3}W^{\frac{1}{2}}\Delta W = A(W)\Delta W.^{\langle 94\rangle}$$

Diese Zahl brauchen wir später.

Wenn wir jetzt zu einer Gesammtheit von N Atomen übergehen, so lautet die Differentialgleichung für das ganze Gassystem

$$\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial q_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2\psi}{\partial q_N^2}\right) + \frac{8\pi^2\mu}{h^2}W\psi = 0.$$

---

[93] See, e.g., *Weyl 1915*.

[94] The second factor should be: “$\frac{2V(2\mu)^{\frac{3}{2}}}{h^3}W^{\frac{1}{2}}\Delta W$”.

Seine Lösung lässt sich nach unserem Verfahren durch Produktbildung aus den Eigenfunktionen der Einzelsysteme $\psi_n^{(k)}$ auffasssen, und die Eigenwerte sind die Summen der Eigenwerte der Einzelatome

$$W_{n_1 n_2 \ldots n_N} = W_{n_1}^{(1)} + \cdots + W_{n_N}^{(N)} = \sum W_n.$$

Wenn wir jetzt die statistische Methode anwenden wollen, so bekommen wir natürlich wesentlich verschiedene Resultate, ob man sich um die Entartung gar nicht kümmert, oder ob man eine der beiden ausgezeichneten Lösungen allein zulässt. Das Wesen dieser statistischen Methoden besteht eben darin, dass man nicht nach dem Zustand der einzelnen Moleküle, sondern nur nach dem der Quantensysteme fragt. Um dies zu erläutern, wollen wir zuerst besprechen, wie man vor der neuen Quantenmechanik (aber schon mit Berücksichtigung der alten Quantentheorie) vorging, und dann die Modifikationen, die man jetzt an|bringen muss, anschliessen. 198

⟨Die Boltzmannsche Statistik⟩

Nach der älteren Vorstellung ist der Zustand des ganzen Gangsystems[95] makroskopisch, d. h. thermodynamisch bekannt, wenn ich weiss, wieviel Atome in jedem Energieintervall W bis $W + \Delta W$ sich befinden. Um die Ideen zu fixieren, kann ich z. B. die Skale der W gleichmässig eingeteilt denken in die Intervalle

$$0 \text{ bis } \Delta W, \Delta W - 2\Delta W, \ldots, s\Delta W - (s+1)\Delta W, \ldots,$$

und die Zahlen N_s der Atome im s-ten Intervall angeben. Jeder Verteilungsfunktion $N(W)$ d. h. Angabe aller Zahlen N_s, entspricht ein bestimmter thermodynamischer Zustand des Gases. Die Gesamtzahl und Gesamtenergie sind dann durch

$$N = \sum_s N_s, \quad E = \sum_s N_s W_s$$

gegeben. Eine solche Verteilung kann nun auf sehr viele verschiedene Weisen realisiert werden durch entsprechende andere Verteilung der Atome auf die verschiedenen diskreten Zustände. Eine solche mikroskopische Konstellation ist dadurch gegeben, dass man von jedem einzelnen Atom angibt, in welchem Quantenzustand es sich befindet. Gefragt wird nun in der Statistik nach derjenigen Verteilung bei gegebener Gesamtzahl und Energie der Moleküle und Atome, die auf am meisten Weisen durch verschiedene Konstellationen realisiert werden kann. Diese Verteilung, so behauptet die statistische Mechanik, entspricht dann dem Gleichgewichtszustand des Gases, und wird fast immer in der Natur angetroffen. Auf die Begründung hiervon können wir hier natürlich nicht eingehen.

Diese Verteilung können wir leicht bestimmen. Zuerst berechnen wir die 199

[95] "Gangsystems" should be: "Gassystems".

Zahl Z, die die Anzahl der Konstellationen angibt, die zu einer bestimmten Verteilung gehören, d. h. einem Satz von Zahlen n_s gehören. Zunächst kann man die N_s Moleküle des s.ten Energieintervalls auf

$$A_s^{N_s}$$

Weisen auf die Zustände dieses Energiegebietes verteilen. Die Zahl A_s ist dabei die vorhin von uns angegebene.[96] Um die Gesamtzahl der Realisierungsmöglichkeiten bei gegebenen Zahlen N_s zu finden, haben wir nun also zunächst das Produkt über alle s zu bilden.

$$\prod_s A_s^{N_s}.$$

Nun kann man aber noch die Atome aus verschiedenen Energiegebieten miteinander vertauschen, und erhält dann im Boltzmannschen Sinne eine andere Realisierung. Dies gibt den Faktor

$$\frac{N!}{\prod\limits_s N_s!}$$

und man erhält insgesamt

$$Z = \prod A_s^{N_s} \frac{N!}{\prod N_s!}.$$

Nach der Statistik ist nun die Entropie eines solchen Gases

$$S = \log Z$$

(wir setzen $k = 1$) und unter Benutzung der Stirlingschen Formel $\log N! = N \log N - N$ [97]

$$S = N \log N + \sum_s \big(N_s \log A_s - N_s \log N_s\big).$$

200 Um den Gleichgewichtszustand zu erhalten, haben wir hiervon das Maximum als Funktion der einzelnen N_s zu nehmen, unter den Nebenbedingungen

$$\sum_s N_s = N, \quad \sum_s N_s W_s = E.$$

Die Bedingungen für das Maximum sind, unter Verwendung der Lagrangeschen Faktoren α^* und β

$$\frac{\partial}{\partial N_s}\Big(S - \alpha^* \sum N_s - \beta \sum N_s W_s\Big) = 0$$

[96] See p. 197 above.

[97] "$\log N! = N \log N - N$" should be "$\log N! \sim N \log N$" in the sense of an asymptotic limit $N \longrightarrow \infty$.

oder

$$\log A_s - \log N_s - 1 - \alpha^* - \beta W_s = 0,$$

d. h.

$$N_s = A_s e^{-\alpha} e^{-\beta W_s} = \frac{A_s}{e^{\alpha + \beta W_s}}, \quad (\alpha = 1 + \alpha^*).$$

Diese Formel stellt im Wesentlichen das Maxwellsche Verteilungsgesetz dar, da, wie man mit Hilfe der thermodynamischen Beziehung

$$\frac{dS}{dE} = \frac{1}{T}$$

beweisen kann, ⟨wo⟩ $\beta = \frac{1}{T}$ (T = Temperatur) wird. Die Entropie des Gleichgewichtszustandes erhält man durch Einsetzen von N_s und A_s in S. Sie wird offensichtlich eine Funktion von V und T und liefert damit auch die Zustandsgleichung des Systems.

Gehen wir jetzt zu der quantenmechanischen Auffassung über. Hier ist der genaue mikroskopische Zustand gegeben durch eine Eigenfunktion $\Psi_{n_1 n_2 \ldots n_N}$ mit dem Eigenwert

$$W_{n_1 n_2 \ldots n_N} = W_{n_1} + W_{n_2} + \cdots + W_{n_N}.$$

Jedoch können wir jetzt nicht mehr sagen, dass das erste Atom im Zustand n_1 201
ist usw. da wir als Bestimmungsstücke des Gesamtsystems nur symmetrische Funktionen der Koordinaten aller Atome nehmen dürfen. Jedoch können wir immerhin noch sagen, dass einem Indexwert n_1 ein bestimmter Energiewert W_{n_1} aus den möglichen Energiestufen eines einzelnen isolierten Atoms entspricht. Die Zahlen, die die Verteilungsfunktion $N(W)$ liefern, sind daher jetzt die A n z a h l der Indices, deren entsprechende Energien in das s.te Intervall der Energieabschnitte fallen. Mit dieser Definition kann man dann ganz analog wie bei der obigen Betrachtung vorgehen. Nimmt man aber auf die Entartung gar keine Rücksicht, und lässt alle Eigenfunktionen zu, die durch irgendwelche Produktbildung aus denen der Einzelatome entstehen, so kommt man genau zu der obigen Statistik, da einer Permutation zweier Indices eine andere Eigenfunktion entspricht. D. h. zwei Zustände, die durch Vertauschung irgend zweier Atome auseinander entstehen, sind als verschieden anzusehen.

⟨Die Bose-Einsteinsche Statistik⟩

Anders wird die Sachlage aber, wenn man nur Zustände aus einer der Reihen der unabhängigen Lösungen zulässt, insbesondere einer der beiden ausgezeichneten. Dann entspricht einer Indexverteilung ein⟨e⟩ und nur eine Eigenfunktion d. h.⟨ein⟩ mikroskopischer Zustand, und die im alten Sinne durch Vertauschung von Atomen auseinander hervorgehenden Zustände sind daher nicht als verschieden zu rechnen. Dies ist aber gerade der Grundgedanke

der Einstein Bose'schen Statistik, bei der ein mikroskopischer Zustand durch die Angabe charakterisiert wird, wieviele Atome in jedem stationären Zustand (Zelle des Phasenraumes) sich befinden. Die Hauptfrage lautet dann wie früher, auf wieviel Weisen dann eine thermodynamische Verteilung $N(W)$ sich
202 durch in diesem Sinne verschiedene Konstellationen realisieren lässt. Nimmt man dann noch das Paulische Prinzip hinzu, nimmt also die antisymmetrische Lösung, so sind auch alle Konstellationen nicht mitzuzählen, bei denen zwei oder mehr Indices übereinstimmen, und dementsprechend erhält man auch ein anderes Resultat. Der angenehmeren Ausdrucksweise wegen sagen wir im Folgenden wieder Atom statt "Indices", was jetzt, nach Erklärung der Bedeutung keine Missverständnisse mehr verursachen kann.

Bei der symmetrischen Lösung jedoch können beliebige Atome im gleichen Zustand sein (d. h. gleiche Indices vorkommen). Die Zahl der möglichen Verteilungen von N_s Atomen auf A_s Zustände (Zellen) ist dann die der Kombinationen $N_s$ter Ordnung von A_s Elementen mit Wiederholung, d. h. ich kann auf irgend welche Weise die A_s Zellen auf die N_s vorhandenen Atome verteilen, wobei ich also dieselbe Zelle mehreren Atomen zuordnen darf. (Die Zahl der Zellen ist dabei viel grösser als die Zahl der Atome. Es bleiben also immer sehr viele Zellen leer). Die Zahl dieser Kombinationen ist bekanntlich

$$\frac{(N_s - A_s - 1)!}{N_s!(A_s-1)!},^{\langle 98\rangle}$$

und daher die Gesamtzahl der Realisierungsmöglichkeiten einer bestimmten Verteilung $N(W)$

$$Z = \prod_s \frac{(N_s - A_s - 1)!}{N_s!(A_s-1)!}.^{\langle 99\rangle}$$

Hier ist nun nicht mehr, im Gegensatz zu früher, noch mit der Vertauschungszahl $\frac{N!}{\prod N_s!}$ zu multiplizieren, da wir ja zwei solche Zustände nicht als verschieden rechnen. Die Entropie wird nun

$$S = \log Z = \sum_s \bigl\{(N_s + A_s)\log(N_s + A_s) - N_s \log N_s - A_s \log A_s\bigr\}.$$

Infolgedessen wird die Bedingung für das Maximum

203 $$\frac{\partial}{\partial N_s}\Bigl(S - \alpha \sum N_s - \beta \sum N_s W_s\Bigr) = \log\left(\frac{A_s}{N_s} + 1\right) - \alpha - \beta W_s \langle = 0\rangle$$

$$N_s = \frac{A_s}{e^{\alpha + \beta W_s} - 1}.$$

Diese Formel erinnert in ihrem Bau schon sehr an die Plancksche Formel für die Energieverteilung der Hohlraumstrahlung, und in der Tat kann man durch geeignete Anwendung von ihr auf Lichtquanten nach Bose die Plancksche Formel erhalten.[100] Für Lichtquanten gilt also diese letzte Statistik.

[98] The numerator should be "$(N_s + A_s - 1)!$".

[99] The numerators should be "$(N_s + A_s - 1)!$".

[100] *Bose 1924*.

⟨Die Fermi-Diracsche Statistik⟩[101]

Für Atome und Elektronen dagegen haben wir nach dem Paulischen Prinzip die antisymmetrische Lösung zu erwarten. Die entsprechende Statistik unterscheidet sich von der vorigen dadurch, dass jetzt in jeder Zelle höchstens ein Atom sitzen darf. Dementsprechend haben wir jetzt Kombinationen *ohne* Wiederholung. Ihre Zahl ist

$$\frac{A_s!}{N_s!(A_s - N_s)!},$$

daher erhalten wir

$$Z = \prod \frac{A_s!}{N_s!(A_s - N_s)!}$$

$$S = \log Z =$$

$$= \sum_s \left\{ A_s(\log A_s - 1) - N_s(\log N_s - 1) - (A_s - N_s)\big(\log(A_s - N_s) - 1\big) \right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial N_s}\Big(S - \alpha \sum N_s - \beta \sum N_s W_s\Big) = \log\left(\frac{A_s}{N_s} - 1\right) - \alpha - \beta W_s$$

$$N_s = \frac{A_s}{e^{\alpha + \beta W_s} - 1}.^{\langle 102 \rangle}$$

In jedem der drei Fälle bekommen wir eine Verteilungsfunktion von ganz charakteristischem Bau. Sie unterscheiden sich durch den Summand ± 1 im Nenner. Dagegen wird in allen Fällen

$$\beta = \frac{1}{T}.$$

Die beiden letzten Fälle unterscheiden sich von dem ersten | hinsichtlich der 204
Entropie vorteilhaft durch das Fehlen des Gliedes $N \log N$, das dem Nernstschen Theorem[103] widerspricht, und daher früher auf mehr oder weniger künstliche Weise weggebracht werden musste. Sie liefern beide für genügend hohe Temperaturen, bei denen die 1 zu vernachlässigen ist, den richtigen Wert für die chemische Konstante. Bei tiefen Temperaturen liefern sie bestimmte Abweichungen von den Gasgesetzen, also eine "Entartung" der Gase, durch die experimentell zwischen ihnen und natürlich auch der alten Theorie wird entschieden werden können. Doch kann man jetzt schon verschiedene Gründe angeben, die für die Dirac-Paulische Statistik für Atome und Elektronen sprechen.[104]

---

[101] See *Fermi 1926a*, *Fermi 1926b*, and *Dirac 1926*.

[102] The minus sign should be a plus sign.

[103] See *Nernst 1906*.

[104] Note that Hilbert uses the term "Dirac-Paulische Statistik" in the text, and the term "Fermi-Diracsche Statistik" only in the Table of Contents.

⟨Die statistische Deutung der Quantenmechanik⟩

⟨Die Schrödingersche Bewegungsgleichung⟩

Mit der Schrödingerschen Differentialgleichung

$$\Delta\psi + \frac{8\pi^2\mu}{h^2}(W-U)\psi = 0$$

kann man nur die stationären Zustände behandeln. Zwar konnten wir formal nach der Matrizenvorschrift die Uebergangswahrscheinlichkeiten berechnen, doch war dies nur eine dem Korrespondenzprinzip nachgebildete Vorschrift. Für das eigentliche Bewegungsproblem, d. h. das Verhalten eines Systems unter beliebigen äusseren Kräften, müssen wir offenbar die Differentialgleichung selbst verallgemeinern. Einen Fingerzeig hierzu bietet zunächst die klassische Schwingungsgleichung in der gewöhnlichen Physik

$$\Delta\psi - \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0.$$

Durch den Ansatz

$$\psi = \psi(x,y,z)e^{2\pi i\nu t}$$

205 geht aus ihr die Eigenwertgleichung

$$\Delta\psi + 4\pi^2\nu^2\psi = 0$$

hervor, die ganz unserer obigen Schrödingergleichung entspricht. Für die Behandlung der allgemeineren Bewegungsprobleme werden wir also ein Analogon zu der eigentlichen Schwingungsgleichung zu suchen haben. Zwar können wir letztere offenbar nicht genau übernehmen, da hier als Eigenwert das Quadrat der Eigenfrequenz herauskommt, während unser Eigenwertparameter W linear auftritt, aber wir sehen, auf welche Weise man eine solche Erweiterung bekommt. Wenn wir die Schrödingergleichung als Folge einer allgemeineren Gleichung, die die Zeit enthält und also das Bewegungsproblem löst, haben wollen, so müssen wir nach einer Gleichung suchen, die den Eigenwertparameter nicht mehr enthält. Wir müssen also diesen eliminieren. Der einfachste Weg ist nun, dass wir annehmen, dass die Lösung der allgemeinen Gleichung, die auch von t abhängt, die Form

$$\psi(x,y,z,t) = e^{2i\pi\frac{W}{h}t}\psi(x,y,z)$$

hat, d. h. hinsichtlich t der Differentialgleichung

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{2\pi i W}{h}\psi$$

genügt. Damit können wir W nun eliminieren, und erhalten als vermutliche "Bewegungsgleichung"

$$\Delta\psi - \frac{8\pi^2\mu}{h^2}U\psi - \frac{4\pi i\mu}{h}\frac{\partial\psi}{\partial t} = 0.$$

Dass hier imaginäre Koeffizienten auftreten, wird uns nicht weiter beunruhigen, da ja dies schon beim Zeemanneffekt der Fall war, und dort erklärt wurde, wie ihr Vorkommen zu verstehen ist.[105]

Diese Differentialgleichung, die wir zunächst geraten haben, kann natürlich 206
nur bestätigt werden durch Vergleich von Folgerungen mit der Erfahrung. Dazu ist eine physikalische Interpretation nötig, auf die wir noch genauer zu sprechen kommen. Vorher können wir aber noch als Stütze weitere elegante formale Zusammenhänge heranziehen. Unsere Gleichung entsteht nämlich auch durch Operatorbildung aus der Hamiltonschen Gleichung

$$H(pq) - W = 0, \quad \left\{\text{z. B. } H = \frac{1}{2\mu}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) + U(x,y,z)\right\},$$

indem wir für $p\,:\ \varepsilon\frac{\partial}{\partial q}$ und für $W\,:\ -\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}$ einsetzen und das ganze auf $\psi(x,y,z,t)$ anwenden, ähnlich wie wir die ursprüngliche Gleichung durch Operatorbildung aus der Hamiltonschen Funktion $H(pq)$ erhielten. Dies ist ganz analog zu der gewöhnlichen Mechanik, wo man die Zeit auch als eine kanonische Variable auffassen kann, zu der $-W = -H(pq)$ als Impuls kanonisch konjugiert ist. Als Hamiltonsche Funktion hat man dann $H(p,q) - W$ zu nehmen, wie hier ohne Beweis nur angegeben sei, und es erscheint dann offenbar sehr naturgemäss, auch den zu der jetzt kanonischen Variabeln t konjugierten Impuls $-W$ durch den Operator ε mal Differentiation nach dieser Variablen zu ersetzen, wie bei den übrigen Variabeln q. Dieser Zusammenhang besteht übrigens schon genau so in der Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung der klassischen Mechanik. Hier hatten wir

$$H\left(\frac{\partial S}{\partial q}, q\right) = W,$$

die durch den Ansatz $J = S - Wt$ aus der allgemeinen Differentialgleichung

$$H\left(\frac{\partial J}{\partial q}, q\right) + \frac{\partial J}{\partial t} = 0$$

hervorging, bei der H auch von t abhängen darf. Die zweite entspricht genau 207
der ersten, wenn man in dem obigen Sinne t und $-W$ als kanonisches Paar auffasst, und daher in der Hamiltonschen Gleichung den "Impuls" $-W$ durch $\frac{\partial J}{\partial t}$ ersetzt. Wenn man nun aus der klassischen Differentialgleichung die quantentheoretische bilden will, so haben wir eben ganz wie früher statt $\frac{\partial J}{\partial q}\,:\ \varepsilon\frac{\partial}{\partial q}$, und nun auch statt $\frac{\partial J}{\partial t}\,:\ \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}$ zu setzen.

[105] See p. 182 (this Volume, p. 675) above.

⟨Allgemeinste Form der Bewegungsgleichung für ein Elektron⟩

Bevor wir weiter zu der Interpretation übergehen, wird es gut sein, die Schrödingergleichung nach diesem Formalismus in ihrer allgemeinsten Form, d. h. unter Berücksichtigung der speziellen Relativitätstheorie unter ganz allgemeinen elektrischen und magnetischen Feldern wenigstens für ein einzelnes Elektron zu bilden. Man hat dann $l = ict$ wie eine Koordinate zu behandeln. Es besteht nun zwischen den Komponenten der Vierergeschwindigkeit die Relation

$$v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 + v_l^2 = -1,$$

die der Energiegleichung der gewöhnlichen Mechanik entspricht. Aus ihr erhält man für die Viererimpulse

$$p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 + p_l^2 + \mu^2 c^2 = 0.$$

Nun sind im elektromagnetischen Feld, das allgemein durch ein Viererpotential $\frac{e}{c}(\Phi_{x,y,z}, \Phi_l)$ dargestellt werden kann, die Impulse die Impulse p plus der Feldenergie. Also besteht für die Viererimpulse im Feld die Gleichung

$$\left(p_x - \frac{e}{c}\Phi_x\right)^2 + \cdots + \left(p_l - \frac{e}{c}\Phi_l\right)^2 + \mu^2 c^2 = 0.$$

208 Die dreidimensionalen elektrischen und magnetischen Feldvektoren | bestimmen sich dabei aus Φ in der bekannten Weise

$$\mathfrak{E}_x = i\left(\frac{\partial \Phi_l}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_x}{\partial l}\right), \quad \mathfrak{H}_x = \frac{\partial \Phi_z}{\partial y} - \frac{\partial \Phi_y}{\partial z}.$$

Die relativistische Hamilton-Jacobische Differentialgleichung wird demnach

$$\left(\frac{\partial J}{\partial x} - \frac{e}{c}\Phi_x\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial J}{\partial l} - \frac{e}{c}\Phi_l\right)^2 + \mu^2 c^2 = 0,$$

und daher die verallgemeinerte Schrödingersche Differentialgleichung[106]

$$\left\{\left(\varepsilon\frac{\partial}{\partial x} - \frac{e}{c}\Phi_x\right)^2 + \cdots + \left(\varepsilon\frac{\partial}{\partial l} - \frac{e}{c}\Phi_l\right)^2 + \mu^2 c^2\right\}\psi = 0,$$

oder auch

$$\Box\psi + \frac{2e}{\varepsilon^2}\left(\Phi_x\frac{\partial\psi}{\partial x} + \cdots + \Phi_l\frac{\partial\psi}{\partial l}\right) + \frac{1}{\varepsilon^2}\left(\frac{e^2}{c^2}\sum_{xyz}\Phi^2 + \mu^2 c^2\right)\psi = 0.^{\langle 107\rangle}$$

[106]This equation is nowadays known under the name “Klein-Gordon equation” or “Maxwell-Klein-Gordon equation”, after Walter Gordon (1893–1939) and Oskar Benjamin Klein (1894–1977). According to *Kragh 1984*, several physicists in 1926, including Klein, Vladimir A. Fock, Erwin Schrödinger, and Louis de Broglie, announced this equation as a candidate for a relativistic generalization of the usual, non-relativistic Schrödinger equation.

Die zunächst vorhandene Unbestimmtheit, ob man im zweiten Glied $\sum \Phi_x \frac{\partial \psi}{\partial x}$ oder $\sum \frac{\partial}{\partial x}(\Phi\psi)$ zu schreiben hat, wird gerade dadurch beseitigt, dass das elektromagnetische Vierpotential stets die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \Phi_x}{\partial x} + \cdots + \frac{\partial \Phi_l}{\partial l} = 0$$

erfüllt.[108]

Von der "Bewegungsgleichung", die die Zeit mit enthält, kommt man für Potentiale U, die von t unabhängig sind, zu der alten Gleichung durch den Ansatz

$$\psi(x,t) = \psi_n(x) e^{\frac{2\pi i}{h} W_n t}$$

zurück. Durch Superposition dieser Teillösungen erhält man als allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung

$$\psi(x,t) = \sum_n c_n \psi_n(x) e^{\frac{2\pi i}{h} W_n t},$$

und es ist nun die Frage, wie man diese Funktion physikalisch interpretieren 209
kann. Um hierzu zu gelangen, wollen wir aber ein wirkliches Bewegungsproblem betrachten.

Dazu denken wir uns noch eine äussere, zeitlich variable Einwirkung ausgeübt, die dadurch beschrieben werde, dass wir zu der inneren potentiellen Energie $U(x)$ ein Störungsglied $\kappa F(x,t)$ hinzunehmen, also

$$U(x,t) = U(x) + \kappa F(x,t)$$

setzen, wo κ ein kleiner Entwicklungsparameter sei. Ausserdem sei angenommen, dass diese Störung nur in dem endlichen Zeitintervall von $t = 0$ bis $t = T$ von Null verschieden sei.

⟨Die Bornsche Interpretation der Bewegungsgleichung⟩

Die Auffassung, die man sich von der Schrödingergleichung gebildet hat, ist nun folgende. Ueber das, was im Einzelnen wirklich geschieht, lassen sich keine genauen Ausagen machen. Wiederholt man dagegen den Prozess sehr oft, so bestimmt die Theorie, was wahrscheinlich geschieht, d. h. wie vielmal eine bestimmte Erscheinung eintritt. Dies ist für die Erklärung der physikalischen Vorgänge auch ausreichend, da wir bisher immer nur solche Massenerscheinungen beobachten.

Anstatt anzugeben, wie oft bei einem bestimmten Prozess dies und dies passiert, kann man sich, was für die Ausdrucksweise etwas bequemer ist, auch

[107] Above "Φ^2" Hilbert wrote with pencil: "$\Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2$". The factor in front of the second term should be "$-\frac{2e}{\varepsilon c}$".

[108] Usually, the latter equation is considered as a special gauge condition ("Lorenz gauge").

eine Gesamtheit sehr vieler gleicher Systeme denken, die gleichzeitig derselben Störung unterwerfen werden. Diese Gesamtheit wollen wir kurz einen Körper nennen. Dann bestimmt die Theorie, wieviel Systeme einen bestimmten Prozess ausführen, und gibt damit den Zustand dieses Körpers in jedem Augenblick. Dabei ist allerdings zu beachten, dass ein solcher Körper kein physikalisches System im eigentlichen Sinne ist, da die einzelnen Teilsys-
210 teme als voll|ständig voneinander unabhängig angesehen werden müssen, und auch nicht die oben dargestellte Entartungstheorie angewandt werden darf.

Formelmässig drückt sich dieser Gedankengang folgendermassen aus. Vor Beginn der Störung, d. h. für $t < 0$, ist die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung

$$\psi(x,t) = \sum_n c_n \psi_n(x) e^{2\pi i \frac{W_n}{h} t}.$$

Diese Funktion sehen wir als bestimmend für den Zustand des Körpers an. Sie soll bedeuten, dass sich $|c_n|^2$ Atome im Zustand W_n, ψ_n befinden. Die c_n selbst sind dabei im allgemeinen komplexe Grössen, deren Arcus ein Analogon zu den Phasen der Bewegung in der gewöhnlichen Mechanik sind. Lassen wir nun die Störung $\kappa F(x,t)$ wirken, so schliesst sich an diese Anfangslösung eine ganz bestimmte Lösung der gestörten Differentialgleichung an, die sich auch relativ einfach durch Störungsrechnung auffinden lässt. In der Zeit T, wenn die Störung zu Ende ist, geht sie dann wieder in eine Lösung der ungestörten Diff⟨erential⟩Gl⟨eichung⟩ über. Es lässt sich also $\psi(x,t)$ wie folgt darstellen.

$$\begin{aligned}
\psi(x,0) &= \sum c_n \psi_n(x) \\
\psi(x,t) &= \sum \gamma_n(t) \psi_n(x) e^{2\pi i \frac{W_n}{h} t} \\
\psi(x,T) &= \sum b_n \psi_n(x) e^{2\pi i \frac{W_n}{h} T},
\end{aligned}$$

wo die b_n wieder konstant sind, und sich aus den c_n berechnen lassen. Nach unserer Interpretation sind dann zur Zeit $t = T \quad |b_n|^2$ Atome im Zustand
211 W_n, ψ_n. Wie die Rechnung zeigt, lassen sich die b_n als lineare Funktionen | der c_n darstellen.

$$b_n = \sum_{mn} b_{mn} c_m \quad \text{oder} \quad |b_n|^2 = \Big| \sum_m b_{mn} c_m \Big|^2,$$

wo die b_{mn} aus der Störung berechenbare Grössen sind. Bemerkenswert hieran ist, dass nicht die Teilchenzahlen selbst hier auftreten, sondern die Grössen c_n oder b_n, die erst quadriert werden müssen, um erstere zu ergeben. Doch kann man in gewissen Fällen aus den b_n^2 Rückschlüsse auf die c_n selbst machen, da das Resultat auch von dem Arcus abhängt. Ferner sieht man aus diesem Verhalten, dass die hier auftretenden "Wahrscheinlichkeiten" keine unabhängigen Wahrscheinlichkeiten im Sinne der Wahrscheinlichkeitsrechnung sind, da sich die $|b_n|^2$ nicht additiv aus den $|c_n|^2$ berechnen. Man bezeichnet dies auch als Interferenz der Wahrscheinlichkeiten.

⟨Der Erhaltungssatz⟩

Damit nun unsere Deutung überhaupt möglich ist, ist offenbar notwendig, dass die Gesamtzahl der Teilchen, also $\sum\limits_n |c_n|^2$ selbst bei allen Störungen erhalten bleibt, dass also

$$\sum_n |c_n|^2 = \sum_n |b_n|^2$$

ist. Dieser Erhaltungssatz lässt sich nun in der Tat aus der Differentialgleichung ableiten, ganz ähnlich wie der Energiesatz in der Elektrodynamik. Wir multiplizieren die Differentialgleichung

$$\Delta\psi - \frac{8\pi^2\mu}{h^2}U(x,t)\langle\psi\rangle - \frac{4\pi i\mu}{h}\frac{\partial\psi}{\partial t} = 0$$

mit $\overline{\psi}$, und ziehen hiervon die durch Uebergang zu den konjugiert komplexen Grössen entstehende ab. Dann erhält man durch | Anwendung der auch für 212
beliebige Koordinaten und mehrere Dimensionen gültige Idendität

$$\psi\Delta\varphi = \operatorname{div}(\psi \operatorname{grad}\varphi) - \operatorname{grad}\psi \operatorname{grad}\varphi$$

auf ψ und $\overline{\psi}$ die Formel

$$\operatorname{div}\left(\psi \operatorname{grad}\overline{\psi} - \overline{\psi}\operatorname{grad}\psi\right) + \frac{4\pi i\mu}{h}\frac{\partial|\psi|^2}{\partial t} = 0.$$

Diese integrieren wir über den ganzen Phasenraum der q. Das Raumintegral über die Divergenz lässt sich nun nach dem Gausschen Satz in ein Oberflächenintegral umwandeln. Dieses verschwindet aber, da im Unendlichen ψ genügend stark verschwindet, und man erhält also

$$\int \frac{\partial}{\partial t}|\psi|^2\,dq = \frac{d}{dt}\int |\psi|^2\,dq = 0.$$

ψ hatten wir nun als Ueberlagerung von Eigenfunktionen des freien Atoms dargestellt

$$\psi(x,t) = \sum_n \gamma_n(t)e^{2\pi i\frac{W_n}{h}t}\psi_n(x),$$

und es folgt also, dass die Grösse

$$\int |\psi|^2\,dq = \sum_n |\gamma_n(t)|^2$$

von der Zeit unabhängig ist. Dann ist aber der behauptete Invarianzsatz bewiesen, da

$$\gamma_n(0) = c_n, \quad \gamma_n(T) = b_n$$

ist. Durch diesen Satz wird eben die Deutung von $|c_n|^2$ als Anzahl an Stelle von c_n selbst erzwungen. Weiter folgt aus ihm, dass der Uebergang von den c_n zu den b_n eine | orthogonale Transformation ist, denn man hat 213

$$\sum_n |b_n|^2 = \sum_n \Big| \sum_m c_m b_{mn} \Big|^2 = \sum_n c_n^2,$$

oder

$$\sum_m \sum_k c_m \overline{c_k} \sum_n b_{mn} \overline{b_{kn}} = \sum_n c_n^2$$

und, da diese Relation identisch für alle c_n gelten muss, so folgt aus ihr

$$\sum_n b_{mn} \overline{b_{kn}} = \delta_{mk},$$

d. h. die b_{mn} bilden eine orthogonale Matrix, im Hermiteschen Sinne.[109]

Diese ganze hier dargestellte Auffasung kann natürlich nur geprüft werden durch den Vergleich mit der Erfahrung. Hier hat sie sich aber sehr gut bewährt, und zwar hauptsächlich in der Theorie des Comptoneffektes und der Theorie der Stosserscheinungen, die sich in sehr weitgehendem Masse mit ihr behandeln lassen.

Die Quantenmechanik, wie sie hier vorgetragen worden ist, gestattet also, wie gesagt, fast alle experimentellen Ergebnisse abzuleiten.[I] Nur die Verbindung mit der Elektrodynamik, d. h. eine vernünftige Theorie der spontanen Austrahlung und der Quantenstruktur des Strahlungsfeldes, ist noch nicht hergestellt. Doch sind hier gerade in der allerletzten Zeit durch Dirac sehr bemerkenswerte Fortschritte erzielt worden, so dass kaum zu zweifeln ist,
214 dass dies auch noch gelingen wird. | Bei der hohen Bedeutung der Quantenmechanik ist es natürlich, dass man ihre Prinzipien so klar und allgemein wie möglich, zu erfassen sucht. Hier hat nun Jordan zu ihrer Begründung eine Axiomatik ersonnen,[110] die auch eine noch weitere physikalische Interpretation, die die Schrödingergleichung durch Pauli und Dirac erfahren hat, einbegreift. Diese Betrachtungen und Gedankenbildungen fordern geradezu dazu heraus, eine Axiomatik nach den Prinzipien und Gesichtspunkten zu formulieren, die ich vor nunmehr einem Menschenalter zur Begründung der Geometrie benutzt habe. Ich glaube auch, dass dadurch manches leichter verständlich und präziser ausgedrückt werden kann, und dass vor Allem zum Verständnis dieser Gedanken kein physikalisches Hellsehertum, sondern nur reine formale Logik nötig ist.

[I] Für die Theorie der Spektren hat man auch noch die neue Erkenntnis, dass das Elektron nicht eine einfache Punktladung ist, sondern noch ein magnetisches Moment besitzt, hinzuzunehmen. Darauf können wir hier aber nicht näher eingehen.

---

[109] That is, in modern terminology, a unitary matrix. .

[110] See *Jordan 1926a*, *Jordan 1926d*, and *Jordan 1927*.

⟨Operatoren und Zahlenvariable⟩

Wir wollen nun hier versuchen, ohne Anspruch auf letzte Genauigkeit wenigstens die Grundgedanken möglichst klar zu formulieren.

Wir haben zwischen zwei verschiedenen Klassen von Objekten unserer Untersuchung zu unterscheiden, nämlich einerseits gewöhnlichen Zahlenvariabeln und Funktionen von ihnen und andererseits Operatoren und Funktion⟨en⟩ von Operatoren, die wir später nach bestimmten Vorschriften den mechanischen Grössen zuordnen werden. Unter einem Operator verstehen wir dabei in üblicher Weise einen bestimmten Prozess, der angewandt auf eine gewöhnliche Zahlenfunktion von x wieder eine solche gewöhnliche Funktion im allgemeinen einer anderen Variabeln y liefert, was wir symbolisch

$$\mathrm{O}\left|{}^{y}_{x}\right| f(x) = g(y)$$

schreiben wollen. Führt ein Operator speziell eine Funktion einer Variabeln in eine Funktion derselben Variabeln über, so lassen | wir auch das Zeichen 215
$\left|{}^{y}_{x}\right|$ weg, und schreiben

$$\mathrm{O}\left|{}^{x}_{x}\right| f(x) = \mathrm{O}\, f(x) = g(x).$$

Wir betrachten nun speziell zwei besondere Operatoren, nämlich

$$q = x \ldots, \quad \text{und} \quad p = \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \ldots \qquad \left(\varepsilon = \frac{h}{2\pi i}\right),$$

d. h. q bedeute Multiplikation mit x, und p bis auf den Faktor ε die Differentation nach x. Ferner betrachten wir noch Funktionen $f(p,q)$, $g(p,q)$ dieser Operatoren, die dann selbst wieder Operatoren sind. Wir denken uns solche Operatorfunktionen als Potenzreihen in p, wobei in den einzelnen Gliedern auf die Reihenfolge der Faktoren geachtet werden muss, da die Operationen x und $\frac{\partial}{\partial x}$ nicht vertauschbar sind. Vermittels dieser Vorschrift, die ja ganz der Schrödingerschen Theorie entspricht, kann man also jeder mechanischen Grösse, einen Operator zuordnen.[A]

Unter mechanischer Grösse verstehen wir hier Dinge, wie Entfernungen, Bahnradius, Energie, Impuls, d. h. eben allgemeine Funktionen der mechanischen Koordinate q und des zu ihm kanonisch konjugierten Impuls⟨es⟩ p.

Neben den Operatoren ordnen wir nun zweitens einer solchen mechanischen Grösse ihren Zahlenwert zu, der eben den beobachtbaren Wert dieser Grösse angeben soll, und der Formalismus, den wir nun entwickeln werden, stellt eine Vorschrift dar, wie man aus diesen Zahlenwerten für eine mechanische Grösse, Aussagen über Zahlenwerte anderer Grösse⟨n⟩ gewinnt.

[A]Es besteht hier natürlich noch eine Unbestimmtheit, wie bei der Aufstellung der Schrödingergleichung, die teilweise aufgehoben wird, wenn man fordert, dass die Wahrscheinlichkeiten ⟪??⟫ reell werden sollen⟨.⟩

⟨Die Jordanschen Axiome der Quantenmechanik⟩

216 Nach diesen Vorbereitungen können wir jetzt unsere Axiome aufstellen.

1.) Axiom:

Es gibt zwei Funktionenfunktionen zweier Zahlenvariabeln x und y und zweier Operatorfunktionen

$$f(pq) \quad \text{und} \quad g(pq)$$
$$\varphi(xy, fg), \quad \psi(xy, fg),$$

derart, dass

$$\varphi(xy, fg)\overline{\psi}(xy, fg) = W(xy, fg)$$

die relative "Wahrscheinlichkeit" dafür ist, dass für gegebenen Wert von y x einen Wert zwischen x und $x + dx$ hat. φ heisse die Wahrscheinlichkeitsamplitude und ψ die Ergänzungsamplitude. Beide sind im allgemeinen komplex.

Die Interpretation, die wir diesen Funktionen geben, ist nun natürlich die, dass die x, y die Zahlenwerte der mechanischen Grössen sein sollen, denen die Operatorfunktionen f und g zugeordnet sind. Bei bestimmter fester Wahl dieser Operatoren werden φ und ψ bestimmte Zahlenfunktionen, und es soll dann bei festem (beobachteten) y die Wahrscheinlichkeit, dass x einen Wert zwischen x_1 und $x_1 + dx_1$ hat, sich zu der Wahrscheinlichkeit, dass x einen Wert zwischen x_2 und $x_2 + dx_2$ hat, wie

$$\frac{W(x_1 y, fg)\, dx_1}{W(x_2 y, fg)\, dx_2}$$

verhalten. Nur Aussagen solcher Art sollen eine physikalische Bedeutung haben. Diese Interpretation hat natürlich nur einen Sinn wenn W reell wird, sonst läuft unser Formalismus gewissermassen leer.

217 2.) Axiom: Es ist

$$\psi(xy, fg) = \overline{\varphi}(yx, gf),$$

d. h. man braucht eigentlich nur eine Funktion φ. ψ ist nur zur Bequemlichkeit eingeführt. Hiermit stellt sich w auch wie folgt dar

$$W(xy, fg) = \varphi(xy, fg)\varphi(yx, gf) = W(yx, gf).$$

Die relative Wahrscheinlichkeit, dass y zwischen y und $y + dy$ bei gegebenem x liegt, wird also durch dieselbe Funktion W ausgedrückt.

3.) Axiom: Für φ gilt die Funktionalgleichung

$$\varphi(xz, fh) = \int \varphi(xy, fg)\varphi(yz, gh)\, dy.$$

Wählen wir hierin $h = g$, so wird

$$\varphi(xz, fg) = \int \varphi(xy, fg)\varphi(yz, gg)\, dy,$$

d. h. $\varphi(xy, gg)$ ist diejenige Funktion, die als Kern eines Integraloperators diesen zu dem Einheitsoperator macht. Eine solche Funktion gibt es nun natürlich nicht, doch kann man sie als Limes einer Folge von stetigen Funktionen auffassen und durch folgendes Grenzverhalten beschreiben, und dann mit ihr rechnen, als ob sie eine wirkliche Funktion wäre; dieses Grenzverhalten ist folgendes. Es sei

$$\int \delta_u\, du = \begin{cases} 1 & \text{wenn das Integrationsgebiet die Stelle } u = 0 \text{ enthält} \\ 0 & \text{wenn das Integrationsgebiet die Stelle } u = 0 \text{ nicht enthält.} \end{cases}$$

218

Dann hat δ_{xy} als Funktion von $u = x - y$ gedacht, die verlangten Eigenschaften. Sie ist der Limes einer Reihe von Funktionen, die an der Stelle $u = 0$ ein Maximum haben, das in der Grenze unendlich scharf und hoch wird, deren Integral jedoch endlich $= 1$ bleibt.

Mit dieser Definition wird also

$$\varphi(xy, ff) = \delta_{xy}.$$

Diese Relation ist natürlich notwendig, wenn unsere Theorie sinnvoll sein soll, und bedeutet nichts weiter, als dass eine Grösse wirklich einen bestimmten Zahlenwert hat.

Hiermit können wir nun noch eine weitere Folgerung aus Axiom 3 ziehen. Setzen wir $h = f$, so wird

$$\begin{aligned} \varphi(xz, ff) = \delta_{xz} &= \int \varphi(xy, fg)\varphi(yz, gf)\, dy \\ &= \int \varphi(xy, fg)\overline{\psi}(zy, fg)\, dy. \end{aligned}$$

Diese Beziehung bezeichnen wir als Orthogonalitätsrelation, da aus ihr später wirklich die Orthogonalitätsrelation für Eigenfunktionen folgt.

4.) Axiom: legt die Beziehungen für die Grundvariabeln p und q fest:

$$\begin{aligned} \varphi(xy, pq) &= e^{\frac{xy}{\varepsilon}} = \varrho(xy) \\ \psi(xy, pq) &= e^{\frac{xy}{\varepsilon}} = \varrho(xy). \end{aligned}$$

Nach ihm wird 219

$$W(xy, pq) = \varrho(xy)\overline{\varrho}(xy) = 1,$$

d. h. nach unserer Interpretation sind zu einem Werte der Koordinate q alle Werte des Impulses p gleichwahrscheinlich. Wir müssen natürlich zeigen, dass dieses Axiom nicht mit III. im Widerspruch steht. Es müssen dazu wenigstens ϱ und $\overline{\varrho}$ der Orthogonalitätsrelation genügen. Dies ist auch tatsächlich der Fall. Da ε rein imaginär ist, erhalten wir

$$\int_{-a}^{+a} \varrho(xy)\overline{\varrho}(zy)\, dy = \int_{-a}^{+a} e^{\frac{(x-z)y}{\varepsilon}}\, dy = \frac{h}{\pi(x-z)} \sin \frac{2\pi a(x-z)}{h} = \delta^{(a)}_{xz}.$$

gehen wir nun zum Limes $a \to \infty$ über, so hat die hier entspringende Funktion

$$\delta^{(a)}_u = \frac{\sin au}{u}$$

tatsächlich die verlangte Eigenschaft. Integrieren wir sie nach u über ein Intervall von α bis β

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sin au}{u}\, du = \int_{\alpha a}^{\beta a} \frac{\sin v}{v}\, dv,$$

so sehen wir, dass sie im $\lim_{a\to\infty}$ verschwindet, wenn Null nicht im Intervall $\alpha - \beta$ liegt, und dass sie anderenfalls einen endlichen konstanten Wert enthält. (Auf einen konstanten Faktor kommt es natürlich nicht an.)

⟨Die Funktionalgleichungen für die Wahrscheinlichkeiten⟩

Aus unseren Axiomen folgen nun gewisse Funktionalgleichungen für $\varphi(xy, fg)$, die für gegebene f, g wirklich die Bestimmung von $\varphi(xy, fg)$ tatsächlich
220 ermöglichen. | $\varrho(xy)$ genügt zunächst den beiden Differentialgleichungen

$$\left\{-x + \varepsilon \frac{\partial}{\partial y}\right\} \varrho(xy) = 0$$
$$\left\{+\varepsilon \frac{\partial}{\partial x} - y\right\} \varrho(xy) = 0,$$

die auch andererseits ϱ bis auf einen gleichgültigen Faktor vollständig bestimmen. Zwischen $\varphi(xy, fp)$ und $\varphi(xy, fq)$ besteht zunächst nach Axiom 3 die Funktionalgleichung

$$\varphi(xy, fq) = \int \varphi(xz, fp)\varrho(zy)\, dz,$$

d. h. wir können $\varphi(xy, fq)$ durch eine lineare Operation aus $\varrho(xy)$ erzeugen.

$$\varphi(xy, fq) = T^{\left|{z \atop x}\right|} \varrho(zy),$$

wobei T wie folgt definiert ist $Tk(xy) = \int \varphi(xz, fp)k(zy)\, dz$. T hängt also noch wesentlich von der Funktion f ab. Zu diesem Operator gibt es auch einen reziproken Operator T^{-1}, derart, dass

$$TT^{-1}k(xy) = k(xy),$$

d. h. TT^{-1} der Einheitsoperator wird, dessen Kern aber die Funktion δ_{xz} ist; und zwar ist

$$T^{-1}k(xy) = \int \overline{\psi}(xz, fp)k(zy)\,dz,$$

was man durch eine Grenzbetrachtung beweisen kann. Aus den Differentialgleichungen für ϱ folgt dann durch geeignete Anwendung der Operatoren T und T^{-1}

221

$$\begin{gathered}\left\{-x+\varepsilon\frac{\partial}{\partial y}\right\}T^{-1}T\varrho(xy)=0\\ \left\{+\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}-y\right\}T^{-1}T\varrho(xy)=0\\ \left\{-TxT^{-1}+T\varepsilon\frac{\partial}{\partial y}T^{-1}\right\}\varphi(xy,fq)=0\\ \left\{T\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}T^{-1}-TyT^{-1}\right\}\varphi(xy,fq)=0.\end{gathered}$$

Da nun aber T und T^{-1} Operatoren sind, die auf die Variable x wirken und daher mit y und $\frac{\partial}{\partial y}$ vertauschbar sind, so heben sie sich in den zweiten Gliedern heraus, und es bleiben die Funktionalgleichungen

$$\left\{-TxT^{-1}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial y}\right\}\varphi(xy,fq)=0 \tag{Ia}$$

$$\left\{T\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}T^{-1}-y\right\}\varphi(xy,fq)=0. \tag{Ib}$$

Ihre Lösung ist sofort bekannt, wenn der Operator T bekannt ist. Hierzu wäre also die Kenntnis von $\varphi(xy, fp)$ erforderlich, sodass zunächst noch nicht viel gewonnen scheint. Es ist aber nun der wesentliche Punkt, dass die Operatoren

$$TxT^{-1} \quad \text{und} \quad T\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}T^{-1}$$

auf eine andere unabhängige Weise gefunden werden können, sodass Ia und Ib richtige Differentialgleichungen für $\varphi(xy, fq)$ werden, wenn f vorgegeben ist. Hierzu dient uns die Theorie der kanonischen Transformationen.

Hiermit verhält es sich wie folgt: Sei S eine Funktion $S(pq)$ so ist dieser Operatorfunktion der Operator

$$S\left(\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}, x\right)$$

zugeordnet. Zu diesem gibt es, wie ich voraussetzen will, einen | reziproken Operator $S^{-1}\left(\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}, x\right)$ und auch eine entsprechende Operatorfunktion $S^{-1}(pq)$. 222

Vermittels S und S^{-1} stelle ich nun aus q und p zwei neue Operatoren Q und P nach dem Schema

$$\begin{aligned} Q &= SqS^{-1} \\ P &= SpS^{-1} \end{aligned}$$

her. Dieser Uebergang der p, q zu den P, Q stellt eine kanonische Transformation im Sinne der Quantenmechanik dar, weil aus

$$\begin{aligned} pq - qp &= \varepsilon 1 \qquad (1 = \text{Einheitsoperator}) \\ PQ - QP &= SpS^{-1}SqS^{-1} - SqS^{-1}SpS^{-1} \\ &= S(pq - qp)S^{-1} = S\varepsilon 1 S^{-1} = \varepsilon 1 \end{aligned}$$

folgt. Für diese Transformation gilt nun der Satz. Ist $Q(pq)$ eine gegebene Operatorfunktion, so gibt es gerade auch eine andere Operatorfunktion $S(pq)$, sodass

$$Q(pq) = SqS^{-1}$$

wird. S ist dabei noch nicht eindeutig bestimmt, doch gehen wir darauf hier nicht ein.

Nun sind wir endlich in der Lage, den Hauptsatz unserer Theorie zu formulieren. Er ist jetzt eine mathematische Behauptung, die sich aus unseren Axiomen ableiten lässt. Er besagt:

Ist

$$\begin{aligned} Q &= SqS^{-1} \\ P &= SpS^{-1}, \end{aligned}$$

so genügt die Funktion

$$\varphi(xy, Qq)$$

223 den Differentialgleichungen |

$$\left\{ P\left(\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}, x\right) + \varepsilon\frac{\partial}{\partial y} \right\} \varphi(xy, Qq) = 0 \tag{IIa}$$

$$\left\{ Q\left(\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}, x\right) - y \right\} \varphi(xy, Qq) = 0. \tag{IIb}$$

D. h. um die Differentialgleichungen für $\varphi(xy, fq)$ zu finden, hat man einfach $f(pq)$ als Q zu nehmen, und kann dann sofort IIb hinschreiben. Zur Aufstellung von IIa muss man dagegen erst den zu Q konjugierten Operator P berechnen.

Aus dem Vergleich von I und II findet man den Zusammenhang zwischen S und T

$$\begin{aligned} SxS^{-1} &= T\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}T^{-1} \\ S\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}S^{-1} &= -TxT^{-1}, \end{aligned}$$

d. h. T ist die Transformationsfunktion, die aus $p : Q$ und aus $-q : P$ macht. S selbst lässt sich, das ist eine weitere Behauptung der Theorie, auch als Integraloperator, nämlich durch

$$S\left(\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}, x\right)k(xy) = \int \varphi(xz, fq)k(z, y)\,dz$$

darstellen.

Die Ergänzungsamplitude $\psi(xy, fq)$ genügt ferner—das ist eine weitere, rein mathematische Behauptung der Theorie[111]—den zu IIa und IIb adjungierten Differentialgleichungen. Diese entstehen dadurch, dass man in $P(pq)$ und $Q(pq)$ alle Produkte rückwärts liest, zum konjugiert komplexen Ausdruck übergeht, und dann p durch $-\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}$ ersetzt. Wenn die adjungierten Differentialgleichungen mit den ursprünglichen identisch sind, so wird also $\varphi = \psi$, und damit die Wahrscheinlichkeiten reell. Wir wollen jedoch nicht auf die Bedingungen hierfür eingehen.

Hiermit haben wir die wichtigsten Sätze der Theorie zusammengestellt und wir 224
müssen nur noch die Verbindung mit den früheren Überlegungen herstellen.

⟨Die Wahrscheinlichkeitsinterpretation der Eigenfunktionen⟩

Wählt man als $f(pq)$ die Hamiltonsche Funktion $H(pq)$ des Systems, so wird IIb gerade die Schrödingersche Differentialgleichung, indem man für y den Zahlenwert W der Energie und für $f(pq)$ den zu ihr gehörigen Operator $H\left(\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}, x\right)$ einsetzt.

$$\left\{H\left(\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}, x\right) - W\right\}\psi(x, W) = 0.$$

Die Interpretation dieser Gleichung ist dann nach den anfangs festgelegten Gesichtspunkten folgende. $\varphi(xW, Hq)$ ist die Wahrscheinlichkeitsamplitude dafür, dass die wirkliche Lagekoordinate des Systems einen Wert zwischen x und $x + dx$ hat, wenn der Wert der Energie W vorgegeben ist. Da nun die Schrödingergleichung diskrete Eigenwerte und Eigenfunktionen hat, so entsteht in $\varphi(xW, Hq)$ statt der kontinuierlichen Abhängigkeit von W die Aufspaltung in die einzelnen Eigenfunktionen.[112] D. h. es ist

$$\varphi(xW_n, Hq) = \psi_n(x),$$

wo $\psi_n(x)$ die n.te zu dem Eigenwert W_n gehörige Eigenfunktion ist, damit haben wir eine physikalische Deutung der Eigenfunktionen gefunden.

---

[111] The sentence in parentheses is interlineated.

[112] There might be a problem with this argument: If $H = S\,q\,S^{-1}$ and S being unitary, as correctly assumed in *Hilbert, von Neumann and Nordheim 1928*, then H will have a purely continuous spectrum, consisting of the real line.

$|\psi_n(x)|^2 dx$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Lagekoordinate des Systems einen Wert zwischen x und $x + dx$ hat, wenn das System selbst im n.ten Zustand sich befindet. Durch diese von Pauli und Dirac stammende
225 Interpretation der Eigenfunktionen, wird verständlich, inwiefern man | sie als definierend für einen Zustand ansehen kann. Für $W \neq W_n$ gibt es hingegen keine überall regulär im Unendlichen verschwindende Funktion, die der Diff⟨erential⟩Gl⟨eichung⟩ genügt. D. h., die Wahrscheinlichkeit, dass für einen solchen Energiewert die Koordinate des Systems in einem endlichen Intervall angetroffen wird, ist verschwindend klein d. h. solche Zustände kommen eben nicht vor.

Die Schrödingersche Bewegungsgleichung mit eliminiertem W kommt heraus, indem man die zu $H(pq)$ kanonisch konjugierte Variable $t(pq)$ als unser $f(pq)$ nimmt. Dann wird nämlich aus IIa

$$\left\{ H\left(\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}, x\right) + \varepsilon\frac{\partial}{\partial y}\right\} \varphi(xy, tq) = 0,$$

also gerade die Bewegungsgleichung, wenn man für y die Zeit t einsetzt. Dies ist schon dadurch nahegelegt, dass auch in der gewöhnlichen Mechanik t immer als konjugierte Variable zu der Hamiltonschen Funktion auftritt. Die Lösung $\psi(x,t)$ der Bewegungsgleichung liefert also die Amplitude dafür, dass die Koordinate x in einem bestimmten Wertebereich fällt, wenn der Zeitpunkt t der Beobachtung vorgegeben ist.

Die Schrödingergleichung ist immer nur eine von den beiden Differentialgleichungen der Jordanschen Theorie. Die andere ist jedesmal als Identität erfüllt, doch sei darauf nicht näher eingegangen.

Description of the Text

Collection: Georg-August-Universität Göttingen, Mathematisches Institut, Inv. Nr. 16205q.

Size: Cover size 22.5 cm ×28.2 cm; page size approx. 22.2 cm × 27.6 cm.

Cover Annotations: On the spine, in gold lettering, is the notation, 'Hilbert. // Quantentheorie /W.S. 1926 = 27'.

Composition: 9 signatures of 8 to 16 sheets each (double pages); in all 208 sheets, inclusive front- and end-sheets.

Pagination: The title page is not numbered. The pages of the main text are continuously numbered from 1 to 225, except for the following irregularities: pages 12 to 25, and pages 98 to 100 are missing; after page 143 there is an additional page 143a, and after page 164 there is an additional page 164a. Starting with page 101, page numbers were initially typewritten as if the numbering started with 1, and were corrected in ink to page numbers starting with 101. Furthermore, the four pages with the table of contents (following the title page) are numbered in pencil from 2 to 5. The following first page of the main text carries also a page number 6 in pencil, next to the typewritten page number 1.

Original Title: On the title page: 'Mathematische Methoden der Quantentheorie. // Vorlesung gehalten im W.S. 1926/27. // von // Geheimrat Professor Dr. Hilbert. // Ausgearbeitet von L. W. Nordheim.'

Text: Typewritten text with handwritten equations and occasional handwritten corrections. The equations and most corrections were added with ink by the composer of the manuscript. Recto of pages have been used only, verso sides have generally been left blank. Occasional corrections and annotations were made by Hilbert with pencil. On the page 169 a written slip of paper (3,0 centimeters high and 7,5 centimeters broad) is glued hiding former text. Presumably this draft has been composed from two single scripts: The pagination and the change of manner of paper between pages no. 98 and no. 101 indicate this.

“*This page left intentionally blank.*”

Hilbert's Lecture Courses, 1886–1934[*]

The following table presents a systematic list of the lecture courses given by Hilbert throughout his teaching career. It also presents a list of those accompanying documents which exist in the Hilbert *Nachlaß* in the Handschriftenabteilung of the Staats- und Universitätsbibliothek of Göttingen University or in the library of the Mathematisches Institut in Göttingen. For instance, listed are Hilbert's own lecture manuscripts or approved notes taken by collaborators or students. A few comparable documents known to the Editors and kept in others archives or libraries are given in a Supplementary List, beginning on p. 723, below.

The main sources used in the compilation of this list are the official listings of the Universities of Königsberg and Göttingen. All of Hilbert's lectures that are listed there have been cited. Use was also made of two additional sources. The first is the *Kuratorialakten* in the archives of the University of Göttingen; the signatures for these *Akten* are 'UAG Kur 4.I.81' and 'UAG Kur 4.I.104 (II)', abbreviated here as 'UAG Kur'. These extend to the 'Herbstzwischensemester' of 1919, and list both the lecture courses announced and those actually held; they also give, where appropriate, the number of participants. The second source is a list contained in the Hilbert *Nachlaß* (*Hilbert 1934**) which bears the title, in Hilbert's hand, 'Verzeichnis meiner Vorlesungen (1886-1932)'. This list is abbreviated here as 'HVV', for 'Hilbert's *Vorlesungsverzeichnis*'.[1] When lecture courses given in UAG Kur or HVV could not be correlated with the titles in the official lecture listings, they have been entered in the list in *Sperrschrift* (i.e., s p a c e d   l e t t e r s).[2] If the source

[*] First published, May 2004; revised and augmented for this Volume in March 2009.

[1] This list records the lectures in chronological order. The entries up to the WS 1917/18 are in Käthe Hilbert's hand, and she clearly relied mainly on those manuscripts which were available in Hilbert's personal library. Consequently, a great many lectures listed in the first two sources specified are missing in this third source for the period up to 1917/18. The list was continued up to the WS 1926/27 by Paul Bernays; there is a further handwritten entry for the following summer semester added by Arnold Schmidt. The remainder of the list, which, *pace* Hilbert's title, extends to the WS 1933/34, is typed.

[2] The 'Verzeichnis der von Hilbert gehaltenen Vorlesungen' published in the third volume of Hilbert's *Gesammelte Abhandlungen* (*Hilbert 1935*, 430) is merely a list organized by subject matter of titles of some of Hilbert's lecture courses, and takes no account of how many times he lectured on a particular subject or under what title. The list was therefore of little use for our purposes.

indicates a reason for doubting whether a course of lectures announced was actually held, the title is written in *italics*, and the situation is explained in a footnote.

In order not to overburden this table with excessive detail, Hilbert's 'Übungen' and seminars have been omitted. Of these, only a few have been recorded in surviving documents, and these often present problems of dating. The third column in the table lists all the texts for lecture courses which survive in Göttingen; to one and the same lecture course, several documents may be correlated, for example, Hilbert's own manuscript, an official protocol, and/or notes by a participant. If a document is not a manuscript by Hilbert, the name of the author is given in parentheses after its title, and when the author is unknown, this is marked by 'N.N.'. The titles of the various documents sometimes differ significantly from the title announced for the lectures. If so, the new or additional title for the document is given; if not, the entry just records 'Title as announced'. Where there is, as far as is known, no extant document, the third column lists a horizontal line. Associated texts for lecture courses whose titles are preceded by a $\star$ are contained in the present volume.

The following abbreviations are used. In the first column (and in the Supplementary Manuscript List of documents not kept in Göttingen), 'WS' and 'SS' are short for 'Wintersemester' and 'Sommersemester', respectively. ('HZS 1919' denotes the exceptional *Herbstzwischensemester* in 1919.) In the central column, the indication 'nst.' following a title is short for 'n-stündig', and means that n academic 'hours' were planned each week for the lecture course, i.e., n periods of forty-five minutes each. The third column also contains the abbreviations 'SUB' and 'MI'; as usual, these stand respectively for the Handschriftenabteilung (Manuscript Division) of the Staats- und Universitätsbibliothek of the Georg-August Universität Göttingen, and the Mathematisches Institut in Göttingen. More particularly, 'SUB xyz' here is really short for '*Cod. Ms. D. Hilbert xyz*', the signature under which the Manuscript Division keeps the document in question.

Hilbert's Lecture Courses in Königsberg und Göttingen, 1886–1934

Semester	*Title Announced*	*Corresponding Documents*
Privatdozent in Königsberg		
WS 1886/87[3]	*Invariantentheorie*	*SUB 521: Invariantentheorie mit Uebungsstunde*
SS 1887	*Theorie der Determinanten, verbunden mit geometrischen Übungen, 2st.*	*SUB 523: Determinantentheorie und Uebungen*
	Theoretische Hydrodynamik, 3st.	*SUB 522: Hydrodynamik*
WS 1887/88	*Theorie der numerischen Gleichungen, 3st.*	*SUB 525: Numerische Gleichungen*
	Theorie der Kugelfunctionen, 1st.	*SUB 524: Kugelfunctionen*
SS 1888	*Darstellende Geometrie, verbunden mit Übungen, 2st.*[4]	———
	Theorie der höheren algebraischen Gleichungen, 2st.	*SUB 526: Höhere algebraische Gleichungen*
WS 1888/89	*Über Linien- und Kugelgeometrie, 3st.*	*SUB 527: Kugel- und Liniengeometrie*[5]
	Theorie der Determinanten, 1st.	———
SS 1889	*Zahlentheorie, 2st.*	*SUB 528: Zahlentheorie und Uebungen*
WS 1889/90	*Allgemeine Theorie der algebraischen Gebilde, 2st.*	*SUB 529: title as announced*
	Einleitung in die höhere Analysis, 2st.	*SUB 530: Einführung in das Studium der Mathematik*[6]
SS 1890	*Bestimmte Integrale, 2st.*	*SUB 531: title as announced*
	Theorie der krummen Linien und Flächen, 2st.	*SUB 532: Krumme Linien und Flächen*
WS 1890/91	*Theorie der ebenen algebraischen Curven, 2st.*	*SUB 534: title as announced*
	Theorie der algebraischen Zahlen und Functionen, 2st.	*SUB 533: title as announced*
SS 1891	*Geometrie der Lage, 2st.*	*SUB 535: Projektive Geometrie*
WS 1891/92	*Theorie der linearen Differentialgleichungen, 2st.*	*SUB 536: Lineare Differentialgleichungen und Uebungen*

[3] Not announced in the official *Vorlesungsverzeichnis*. The title follows HVV.
[4] Not in HVV.
[5] Added in parentheses: 'enthält die Theorie der quadratischen Formen'.
[6] Added in parentheses: 'Zahlbegriff, Höhere Analysis, Analytische Geometrie, Differential- und Integralrechnung'.

Hilbert's Lecture Courses (cont.)

Semester	*Title Announced*	*Corresponding Documents*
SS 1892	*Über die eindeutigen Functionen mit linearen Transformationen in sich, 2st.*	*SUB 537: Eindeutige Functionen mit linearen Transformationen in sich*
WS 1892/93	*Einleitung in das Studium der höheren Mathematik, 2st.*[7]	———
	Integralrechnung, 4st.[8]	*SUB 538: Integralrechnung und Uebungen*
	Theorie der partiellen Differentialgleichungen, 2st.	*SUB 539: Partielle Differentialgleichungen*
Promotion to Außerordentlicher Professor in Königsberg		
SS 1893	*Theorie der bestimmten Integrale, 4st.*	*SUB 540, pp. 67–149: Bestimmte Integrale*
	Die Grundlagen der Geometrie, *1st.*[9]	*SUB 541: Die Grundlagen der Geometrie.*[10]
	Ausgewählte Capitel aus der Invariantentheorie, 1st.	*SUB 521, pp. 353–369: title as announced*
WS 1893/94	*Theorie der Kettenbrüche, 2st.*[11]	———
	Theorie der elliptischen Functionen, 4st.[12]	———
	Analytische Geometrie des Raumes, 2st.[13]	*SUB 543, pp. 77ff.: Analytische Geometrie des Raumes*
	Einleitung in die Functionentheorie, 1st.[14]	*SUB 540, pp. 1–31: Einleitung in die Functionentheorie*

[7] Not in HVV.
[8] According to HVV.
[9] Not read, according to the title page of the manuscript.
[10] The manuscript was revised for the following semester; see the Introduction to Chapter 2.
[11] Not in HVV.
[12] Not in HVV.
[13] According to HVV.
[14] According to HVV.

Hilbert's Lecture Courses (cont.)

Semester	*Title Announced*	*Corresponding Documents*
Promotion to Ordentlicher Professor in Königsberg		
SS 1894	*Theorie der Functionen einer complexen Veränderlichen, 4st.*[15]	——
	Über die Axiome der Geometrie, 2st.	*SUB 541: Die Grundlagen der Geometrie*
WS 1894/95	*Analytische Geometrie der Ebene und des Raumes, 2st.*	*SUB 543: title as announced*
	Das Problem der Quadratur des Kreises, 1st.	*SUB 542: Die Quadratur des Kreises.*
	Die Dichtigkeit und Vertheilung der Primzahlen, 1–2st.	——
Appointment in Göttingen		
SS 1895	*Determinanten, 2st.*[16]	——
	Elliptische Functionen, 4st.	*SUB 544: Doppelperiodische Functionen* *MI: Vorlesung über die Theorie der elliptischen Functionen*
WS 1895/96	*Integralrechnung, 4st.*[17]	——
	Theorie der partiellen Differentialgleichungen, 4st.	*SUB 545: Partielle Differentialgleichungen* *MI: Partielle Differentialgleichungen*
SS 1896	*Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen, 4st.*	*SUB 546: Gewöhnliche Differentialgleichungen*
	Über die Quadratur des Kreises, 2st.[18]	——

[15] Not in HVV.
[16] Not in HVV.
[17] Not in HVV.
[18] Not in HVV.

Hilbert's Lecture Courses (cont.)

Semester	*Title Announced*	*Corresponding Documents*
WS 1896/97	*Theorie der algebraischen Gleichungen, 2st.*	*SUB 547: Algebraische Gleichungen*
	Theorie der Functionen einer complexen Veränderlichen, 4st.	*MI: Theorie der Functionen einer complexen Variablen (Dörrie, 2 copies)*
SS 1897	*Theorie der algebraischen Invarianten nebst Anwendungen auf Geometrie, 4st.*	*MI: Theorie der algebraischen Invarianten (Marxen, 2 copies)*
	Theorie der Functionen einer complexen Veränderlichen II. Teil, 2st.[19]	———
WS 1897/98	*Über die Focaleigenschaften der Curven und Flächen zweiter Ordnung, 2st.*	*SUB 548: Focaleigenschaften der Curven und Flächen zweiter Ordnung*
	Zahlentheorie, 4st.	*MI: title as announced (N.N.)*[20]
	Über den Begriff der Irrationalzahl und das Problem der Quadratur des Kreises, 2st.	*SUB 549: Zahlbegriff und Quadratur des Kreises*
SS 1898	*Einleitung in die Theorie der Differentialgleichungen, 4st.*[21]	
	Bestimmte Integrale und Fouriersche Reihen, 2st.	*SUB 550: title as announced*
	Ausgewählte Capitel aus der Zahlentheorie, 2st.[22]	*MI: Ausgewählte Kapitel der Zahlentheorie (N.N.)*[23]
WS 1898/99	*Determinantentheorie, 2st.*[24]	———
	Elemente der Euklidischen Geometrie, 2st.	*SUB 551: Grundlagen der Euklidischen Geometrie* *SUB 552: title as announced (v. Schaper)* *MI: title as announced (v. Schaper)*
	Mechanik, 4st.	*SUB 553: title as announced*

[19] Not in HVV.
[20] Published as *Hilbert 1990*.
[21] Not in HVV.
[22] Not in HVV.
[23] Published as *Hilbert 1990*.
[24] Not in HVV.

Semester	Title Announced	Corresponding Documents
SS 1899	Differentialrechnung, 4st.	SUB 554: title as announced
	Ausgewählte Capitel aus der Gruppentheorie, 2st.	SUB 556: title as announced
	Einführung in die Variationsrechnung, 2st.	SUB 555: title as announced
WS 1899/1900	Integralrechnung, 4st.[25]	———
	Zahlbegriff und Quadratur des Kreises, 2st.[26]	[27]
	Theorie der Flächenkrümmung, 2st.	SUB 557: Einleitung in die Flächentheorie
SS 1900	Theorie der Differentialgleichungen, 4st.[28]	———
	Ausgewählte Capitel aus der Flächentheorie, 2st.	SUB 557: title as announced
WS 1900/01	Theorie der analytischen Functionen, 4st.[29]	———
	Theorie der partiellen Differentialgleichungen, 4st.	SUB 558: title as announced
SS 1901	Algebra, 4st.[30]	———
	Anwendungen der Theorie der partiellen Differentialgleichungen, 2st.	MI: Vorlesung über lineare partielle Differentialgleichungen (Andrae)
WS 1901/02	Zahlbegriff und Quadratur des Kreises, 2st.[31]	SUB 549, pp. 52–54: only a 'Disposition' of the course
	Potentialtheorie, 4st.	MI: Vorlesung über Potentialtheorie (Andrae)
SS 1902	Differential- und Integralrechnung I. Teil, 4st.	Inserted in SUB 554 (SS 1899): title as announced
	Grundlagen der Geometrie, 2st.	MI: title as announced (Adler)
	Ausgewählte Capitel der Potentialtheorie, 2st.	MI: title as announced (Andrae)

[25] Not in HVV.

[26] Not in HVV.

[27] The manuscript of the lecture course from WS 1897/98 was probably used in this course, too. It contains many signs of revision, and in particular, on pp. 38–51, it contains additions which, at least in part, stem from a period later than 1897–1898.

[28] Not in HVV.

[29] Not in HVV.

[30] Not in HVV.

[31] Not in HVV.

Hilbert's Lecture Courses (cont.)

Semester	*Title Announced*	*Corresponding Documents*
WS 1902/03	*Differential- und Integralrechnung II. Teil, 4st.*	*Inserted in SUB 554: title as announced*
	Mechanik der Continua, 4st.	*MI: Mechanik der Continua. Teil I (Berkowski)*
SS 1903	*Theorie der Differentialgleichungen, 4st.*[32]	———
	Ausgewählte Capitel aus der Mechanik der Continua, 2st.	*MI: Mechanik der Continua. Teil II (Berkowski)*
WS 1903/04	Zahlbegriff und Quadratur des Kreises, *2st.*[33]	———
	Theorie der partiellen Differentialgleichungen, 4st.	*MI: Partielle Differentialgleichungen (Prinz)* *MI: title as announced (Tieffenbach)*
SS 1904	*Funktionentheorie, 4st.*[34]	
	Zahlbegriff und Quadratur des Kreises, 2st.	*MI: title as announced (Born)*
WS 1904/05	*Variationsrechnung, 4st.*	*MI: title as announced (Hellinger, 2 different documents, of different length)*
	Bestimmte Integrale, 2st.	*MI: Bestimmte Integrale und Fouriersche Reihen (Born)*
SS 1905	Zahlentheorie, *4st.*[35]	———
	Einführung in die Theorie der Integralgleichungen, 2st.[36]	*MI: Einführung in die Theorie der Integralgleichungen (Hellinger)*
	Logische Prinzipien des mathematischen Denkens, 2st.	*SUB 558a: title as announced (Born)*[37] *MI: title as announced (Hellinger)*

[32] Not in HVV.
[33] Not in HVV, or in UAG Kur.
[34] Not in HVV.
[35] Not in HVV, or in UAG Kur.
[36] According to HVV; UAG Kur has 'Theorie der Integralgleichungen'.
[37] This *Ausarbeitung* was acquired by the *Nachlaß* only in 1984.

Hilbert's Lecture Courses (cont.)

Semester	*Title Announced*	*Corresponding Documents*
WS 1905/06	*Einleitung in die Theorie der partiellen Differentialgleichungen, 2st.*	*MI: title as announced (Hellinger)*[38]
	Mechanik, 4st.	*MI: title as announced (Hellinger, 2 copies)*
SS 1906	*Differential- und Integralrechnung erster Teil mit Übungen, mit Carathéodory, 4st.*[39]	———
	Mechanik der Continua, *4st.*[40]	———
	Theorie der Integralgleichungen, 4st.[41]	*MI: Integralgleichungen (Hellinger)*
WS 1906/07	*Differential- und Integralrechnung II. Teil, 4st.*	*MI: title as announced (Ewald)*
	Mechanik der Continua, 4st.	*MI: title as announced (Hellinger)*
		MI: Vorlesung über die Mechanik der Continua (Marshall/Crathorne)[42]
SS 1907	*Theorie der Differentialgleichungen einer unabhängigen Variabeln, 4st.*	*MI: Theorie der Differentialgleichungen (Haar)*
WS 1907/08	*Theorie der partiellen Differentialgleichungen, 4st.*	*MI: title as announced (Haar)*
	Einführung in die Theorie der Funktionen unendlich vieler Variabler (Integralgleichungen), 2st.	*MI: title as announced (Haar)*

[38] For this lecture course, there exist in addition two partial *Ausarbeitungen* with the titles 'Quadratische Formen mit unendlich vielen Variablen. Aus der Vorlesung über partielle Differentialgleichungen' and 'Theorie der quadratischen Formen mit unendlich vielen Variablen. Auszug aus der Vorlesung über partielle Differentialgleichungen im WS 1905/06'.

[39] Not in HVV.

[40] Not in HVV, or in UAG Kur.

[41] According to UAG Kur; HVV has 'Integralgleichungen'.

[42] Not in HVV.

Hilbert's Lecture Courses (cont.)

Semester	*Title Announced*	*Corresponding Documents*
SS 1908	*Prinzipien der Mathematik, 4st.*	*MI: title as announced (N.N.)*
WS 1908/09	*Funktionentheorie, 4st.*	*MI: Funktionentheorie (Courant)*[43]
		MI: Funktionentheorie (N.N.)
	Prinzipien der Mathematik, *2st.*[44]	———
SS 1909	*Zahlentheorie, 4st.*	*MI: Vorlesung "uber Zahlentheorie (Courant)*
	Ausgewählte Fragen aus der Funktionentheorie, 2st.	*MI: Ausg. Kapitel der Funktionentheorie (Konforme Abbildungen) (Courant)*
WS 1909/10	*Allgemeine Theorie der partiellen Differentialgleichungen, 4st.*	*MI: Theorie der partiellen Differentialgleichungen (Courant)*
SS 1910	*Elemente und Prinzipienfragen der Mathematik, 4st.*	*MI: title as announced (Courant)*
	Ausgewählte Kapitel aus der Theorie der partiellen Differentialgleichungen, 2st.	*MI: title as announced (Courant)*
WS 1910/11	*Mechanik, 4st.*	*MI: title as announced (Behrens, 2 copies)*
SS 1911	*Mechanik der Kontinua, 4st.*	*MI: title as announced (Hecke)*
WS 1911/12	*Logische Grundlagen der Mathematik, 1st.*[45]	———
	Mechanik der Kontinua, 4st.	*MI: Kinetische Gastheorie (Hecke)*
SS 1912	*Gewöhnliche Differentialgleichungen, 4st.*	*MI: title as announced (N.N.)*
	⋆ *Mathematische Grundlagen der Physik, 4st.*	*MI: Strahlungstheorie (Hecke)*
WS 1912/13	*Einführung in die Theorie der partiellen Differentialgleichungen, 2st.*	*MI: Partielle Differentialgleichungen (Baule)*
	Mathematische Grundlagen der Physik, 2st.	*MI: Molekulartheorie der Materie (Hecke, 2 copies)*

[43] 2 copies, one in Courant's hand, entitled 'Vorlesung über Funktionentheorie' with the addition 'Ausgearbeitet von R. Courant (Abschrift)'.
[44] Not in HVV, or in UAG Kur.
[45] Not in HVV. UAG Kur has 'Grundlagen der Analysis und Geometrie', assigned 2 (academic) hours weekly and with 87 participants.

Hilbert's Lecture Courses (cont.)

Semester	*Title Announced*	*Corresponding Documents*
SS 1913	*Elemente und Prinzipien der Mathematik, 4st.*	*SUB 559: contains a draft as well as 'Einige Abschnitte aus der Vorlesung über die Grundlagen der Mathematik und Physik' (Baule)*
	Theorie der Elektronenbewegung, 2st.	*MI: Elektronentheorie (Hecke)*
WS 1913/14	*Analytische Mechanik, 4st.*[46]	*MI: Entwurf in Mechanik-Ausarbeitung WS 1910/11*
	Elektromagnetische Schwingungen, 2st.	*MI: title as announced (Hecke)*
SS 1914	*Differentialgleichungen, 4st.*	*Inserted in the document for the WS 1909/10: 'Theorie der partiellen Differentialgl. (1914)' (N.N.)*
	Ausgewählte Kapitel der statistischen Mechanik, 2st.	*MI: Statistische Mechanik (Lange)*
WS 1914/15	*Probleme und Prinzipienfragen der Mathematik, 4st.*	*SUB 559: contains a draft*
SS 1915	*Variationsrechnung, 4st.*	————————
	Ausgewählte Kapitel über Struktur der Materie, 2st.	*MI: Vorlesung über die Struktur der Materie*
WS 1915/16	*Differentialgleichungen, 4st.*	*MI: title as announced (N.N.)*
SS 1916	*Partielle Differentialgleichungen, 2st.*	*MI: title as announced (Bär)*
	⋆ *Einleitung in die Prinzipien der Physik, 2st.*	*MI: Die Grundlagen der Physik (N.N.)*
WS 1916/17	Mengenlehre, *4st.*[47]	————————
	⋆ *Die Grundlagen der Physik, 4st.*[48]	*MI: Die Grundlagen der Physik II (Bär)*[49]
SS 1917	*Mengenlehre, 4st.*	*MI: title as announced (Goeb, 2 copies)*

[46] There is a reference to this lecture course in the entry 'Mechanik mit Übungen: Prof. *Hilbert* und Dr. *Weyl*' under 'Theoretische, experimentelle und angewandte Physik'.

[47] Not in HVV. In UAG Kur the lecture course is listed, although in the column listing the number of participants a '*' appears, probably indicating that the course was not held.

[48] Not announced in the *Vorlesungsverzeichnis*. The title comes from HVV, and the number of hours assigned from UAG Kur.

[49] P. 107 of this copy is missing. However, see the entry for WS 1916/17 in the supplementary list beginning on p. 723, below.

Hilbert's Lecture Courses (cont.)

Semester	*Title Announced*	*Corresponding Documents*
WS 1917/18	*Prinzipien der Mathematik, 2st.*[50]	*MI: title as announced (Bernays, 2 copies)*
	Elektronentheorie, 2st.	*SUB 560: title as announced (Humm)*
		MI: = SUB 560
SS 1918	*Differentialgleichungen, 4st.*	———
WS 1918/19	*Partielle Integral- und Differentialgleichungen, 4st.*[51]	———
	Mengenlehre, *2st.*[52]	———
	Über Raum und Zeit (allgemeinverständlich), 1st.	*SUB 561: Raum und Zeit (Bernays)*
		MI: = SUB 561
SS 1919	*Zahlbegriff und Quadratur des Kreises, 4st.*	———
	Denkmethoden in den exakten Wissenschaften, 1st.	———[53]
HZS 1919	*Natur und mathematisches Erkennen, 2st.*	*MI: title as announced (Bernays)*[54]
WS 1920	*Formale Logik und ihr erkenntnistheoretischer Wert, 2st.*	*MI: Logik-Kalkül (Bernays)*
	Mechanik, 4st.	*MI: Mechanik und neue Gravitationstheorie (Kratzer)*
SS 1920	*Höhere Mechanik und neue Gravitationstheorie, 4st.*	*SUB 562: title as announced (Kratzer)*
		MI: = SUB 562
	Probleme der mathematischen Logik, 1st.	*MI: title as announced (Schönfinkel, Bernays)*
WS 1920/21	*Anschauliche Geometrie, 4st.*	*SUB 563: title as announced (Rosemann)*
		MI: = SUB 563 (2 copies)
SS 1921	*Einsteinsche Gravitationstheorie, 4st.*	———
	Grundgedanken der Relativitätstheorie (für Hörer aller Fakultäten), 1st.	*MI: title as announced (Bernays)*

[50] In HVV, the title is 'Prinzipien der Mathematik und Logik'.
[51] In HVV, the title is 'Partielle Differentialgleichungen'.
[52] Not in HVV, or in UAG Kur.
[53] *Verzeichnis 1943* lists notes for this (a 'Nachschrift') which are no longer traceable. According to HVV, Bernays was the *Ausarbeiter*.
[54] Published as *Hilbert 1992*.

Semester	Title Announced	Corresponding Documents
WS 1921/22	Grundlegung der Mathematik, 4st.	MI: Grundlagen der Mathematik (Bernays)
SS 1922	Statistische Methoden insbesondere der Physik, 4st.	SUB 565 (Nordheim) MI: = SUB 565
WS 1922/23	Wissen und mathematisches Denken (für Hörer aller Fakultäten), 1st.	MI: title as announced (Ackermann)
	Grundlagen der Arithmetik, 2st.[55]	SUB 567: Logische Grundlagen der Mathematik (Bernays)[56]
	⋆ Mathematische Grundlagen der Quantentheorie, 2st.	SUB 566: title as announced (Nordheim, Heckhausen) MI: = SUB 566
SS 1923	Anschauliche Geometrie, 4st.	——————[57]
WS 1923/24	Mengenlehre, 4st.[58]	——————
	L o g i s c h e G r u n d l a g e n d e r M a t h e m a t i k, 4st.	[59]
	Unsere Vorstellungen von Gravitation und Elektrizität (allgemeinverständlich), 1st.	SUB 568: Über die Einheit in der Naturerkenntnis SUB 569: title as announced[60] (Diestel) MI: = Typescript of SUB 568 (N.N.)
SS 1924	Mechanik, 4st.	SUB 570: Einleitung in die Vorlesung über Mechanik MI: Relativitätstheorie; Ergänzung zur Vorlesung über allgemeine Mechanik im SS 24 (Nordheim)[61]

[55] HVV gives the title of the extant document.

[56] In part, a typescript prepared by Bernays, in part a manuscript in Hilbert's hand.

[57] Addition in HVV, probably in Hilbert's hand: 's. 1920/21'.

[58] Not in HVV. See also footnote 72, below.

[59] Addition in HVV, probably in Hilbert's hand: 's. 1922/23'. Indeed, the handwritten part of *Hilbert 1922/23b** contains passages which could not have been composed before the end of 1923. This is clear from the paper on which they are written.

[60] Added in parentheses on the title page of SUB 569: '(Einheit in der Naturerkenntnis)'.

[61] HVV notes: 'teilweise ausgearb., Nordheim'.

Hilbert's Lecture Courses (cont.)

Semester		*Title Announced*	*Corresponding Documents*
WS 1924/25		*Quadratur des Kreises (Elementarmathematik nach höheren Methoden), 4st.*[62]	*MI: See Born's Ausarbeitung for the course 'Zahlbegriff und Quadratur des Kreises' for SS 1904*[63]
		Über das Unendliche (allgemeinverständlich), 1st.	*MI: title as announced (Nordheim, 2 copies)*
SS 1925		*Anschauliche Geometrie, 4st.*	———
WS 1925/26		*Über Raum und Zeit (allgemeinverständlich), 1st.*	———
		Zahlentheorie, 4st.	*SUB 570a: title as announced (Struik)*
SS 1926		*Theorie der algebraischen Zahlen, 4st.*[64]	*MI: Vorlesung über die Theorie der algebraischen Zahlen (N.N.)*
WS 1926/27	⋆	*Mathematische Methoden der Quantentheorie, 4st.*	*MI: title as announced (Nordheim)*
SS 1927		*Grundlagen der Geometrie, 4st.*	*MI title as announced (Schmidt)*
SS 1927/28		*Grundlagen der Mathematik, 4st.*	———
SS 1928		*Anschauliche Geometrie, 4st.*	———
WS 1928/29		*Zahlbegriff und Quadratur des Kreises, 4st.*	*MI: See Born's Ausarbeitung for the course 'Zahlbegriff und Quadratur des Kreises' for SS 1904*[65]
SS 1929		*Mengenlehre, 4st.*	———
WS 1929/30		*Theorie der algebraischen Invarianten, 4st.*	———
SS 1930		*Mathematische Methoden der neuen Physik, 2st.*	———
WS 1930/31		*Natur und Denken, 1st.*	———[66]
SS 1931		*Grundlagen der Mathematik, 1st.*[67]	———

[62] HVV gives only the subtitle in parentheses.

[63] Two pages of introductory remarks (in Hilbert's hand) for the course in 1924/25 have been pasted in at the end of the Born *Ausarbeitung* for 1904.

[64] HVV gives the title as 'Algebraische Zahlkörper'

[65] A few lines of introductory remarks (again in Hilbert's hand) for the course in 1928/29 were added to those for 1924/25; see footnote 63.

[66] *Verzeichnis 1943* lists notes for this course, but these could not be found.

[67] According to HVV, this was a seminar.

Hilbert's Lecture Courses (cont.)

Semester	*Title Announced*	*Corresponding Documents*
WS 1931/32	*Einleitung in die Philosophie auf Grund moderner Naturwissenschaft (für Hörer aller Fakultäten), 1st.*	*SUB 607/1: 'Einlage zu Vorl. Winter 31/32'*[68]
SS 1932	*Grundlagenfragen der Geometrie, 1st.*	———
WS 1932/33	*Grundlagen der Logik, allgemeinverständlich (für Hörer aller Fakultäten), 1st.*	*SUB 607/6: 'Einleitung zu Kolleg WS 32/33'*
SS 1933	*Wissen und Denken (für Hörer aller Fakultäten), 1st.*	———
WS 1933/34	*Grundlagen der Geometrie, mit Schmidt 2st.*	———

Supplementary List of Manuscripts

The following documents (listed in chronological order) relating to Hilbert's lecture courses are not in either of the two main official repositories of Hilbert's work. In most cases, the Editors are not directly acquainted with the documents themselves.

SS 1891: *Transcription or reworking by Julius Hurwitz of Hilbert's lectures on projective geometry with the title 'Geometrie der Lage', held in the Wissenschaftlich-historische Sammlung of the library of the Eidgenössische Technische Hochschule in Zürich,* Nachlaß *of Adolf Hurwitz, call-sign Hs. 582: 158.*

SS 1892: *Ausarbeitung by Julius Hurwitz of Hilbert's lectures on single-valued functions entitled 'Die eindeutigen Funktionen mit linearen Transformationen in sich, nach Vorlesungen in Königsberg 1892 SS', held in the Wissenschaftlich-historische Sammlung of the library of the Eidgenössische Technische Hochschule in Zürich,* Nachlaß *of Adolf Hurwitz, call-sign Hs. 582: 154. The catalogue entry states: 'Von Hilbert durchgesehen u. mit eigenhändigen Randbemerkungen versehen'.*

SS 1895: *Manuscript of notes on the lectures on elliptic functions bearing the title 'Theorie der elliptischen Functionen'; pp. 314–336 appear to have been added (in pencil) in 1942. Kept in the Rare Book and Special Collections section of the Library of the University of Illinois at Urbana-Champaign under the call-sign 515.983 H54T.*

[68] *Verzeichnis 1943* lists notes for this course, but these could not be found.

WS 1895/96: *Manuscript of notes on the lectures on partial differential equations bearing the title 'Partielle Differentialgleichungen'. Kept in the Rare Book and Special Collections section of the Library of the University of Illinois at Urbana-Champaign under the call-sign 515.353 H54P.*

WS 1896/97: *Manuscript of notes on the lectures on the theory of functions of a complex variable bearing the title 'Theorie der Functionen einer complexen Variablen', apparently in two parts of 271 and 105 pages respectively. (pp. 241–271 and pp. 104–105 appear to have been added in pencil in 1942.) Kept in the Rare Book and Special Collections section of the Library of the University of Illinois at Urbana-Champaign under the call-sign 515.93 H54T.*[69]

WS 1898/99: *3 copies of the autograph of the* Ausarbeitung *prepared by Hans von Schaper of Hilbert's lectures on the foundations of Euclidean geometry from 1898/99. These copies exist in university libraries in Berlin, Bremen and Oslo. See the Introduction to Chapter 4. In addition, the Widener Library at Harvard University in Cambridge, Massachussetts, possesses a copy of this autograph made in 1902.*

WS 1904/05: *Manuscript of notes on the lectures on the calculus of variations bearing the title 'Variations-rechnung'. The fly-leaf bears the autograph 'Arthur R. Crathorne', and there is also a note on the fly-leaf which reads: 'Up to page 68 where the red lines are drawn across the pages, these notes are as I took them during the lectures, with additions in pencil on the opposite page. From about page 69 the notes are copied from the Hefts in the Lesezimmer'. Kept in the Mathematics Section of the Library of the University of Illinois at Urbana-Champaign under the call-sign 515.64 H54V.*[70]

SS 1905: *(1) Manuscript (handwritten, 151 pages, bound) for the course 'Einführung in die Theorie der Integralgleichungen', and with this title; library of the Max-Planck-Institut für Wissenschaftsgeschichte in Berlin. The library stamp (bottom, centred) appears on the reverse of the title page. Above it is written in hand 'Rara', and below it the number '07-1568', standing for the year (2007) in which the document was first acquired by the library, and then the order of acquisition. In the upper left-hand corner (in what appears to be the same hand) is written 'Rara H641c', indicating the place where the document is to be found in the library's holdings. The page is otherwise blank. The title page carries an illegible handwritten signature; it is marked 'Göttingen', and appears to attribute the text to Ernst Hellinger, although the handwriting is not the same as*

[69] The two parts might well correspond to the two courses 'Theorie der Funktionen einer complexen Veränderlichen' in WS 1896/97 and 'Theorie der Funktionen einer complexen Veränderlichen, II Teil' in SS 1897.

[70] The Library of the University of Illinois at Urbana-Champaign also contains two documents listed under Hilbert which are possibly of relevance, bearing the titles 'Mechanik' (531 H54M), dated as 1905, and 'Mechanik der Continua' (532.5 H54M), no date listed. The first document might well be tied to the course 'Mechanik' for WS 1905/06, and 'Mechanik der Continua' is to be compared to the second document listed above for the WS 1906/07 lecture course 'Mechanik der Continua', namely 'Vorlesung über die Mechanik der Continua' (Marshall/Crathorne).

that of the Göttingen manuscript. It is also has only 151 pages, while the latter has 304 pages, and furthermore lacks the detailed table of contents which has clearly been added to the Göttingen manuscript.

(2) Notes and an incomplete Ausarbeitung by Otto Birck for the lecture course 'Logische Prinzipien des mathematischen Denkens'. Kept under this title in the Universitätsarchiv of the University of Bonn.

WS 1905/06: A copy of Hellinger's Ausarbeitung for the lecture course 'Mechanik', in the library of the Mechanics Centre of the Technische Universität Braunschweig.

WS 1906/07: 6 copies of Hellinger's Ausarbeitung for the lecture course 'Mechanik der Continua', in the library of the Mechanics Centre of the Technische Universität Braunschweig.

WS 1910/11: A copy of Frankfurter's Ausarbeitung for the lecture course 'Mechanik', in the library of the Mechanics Centre of the Technische Universität Braunschweig.

SS 1912: Ausarbeitung (handwritten, 149 pages of text, bound) of the lecture course 'Gewöhnliche Differentialgleichungen'; the manuscript is entitled 'Allgemeine Theorie der Gewöhnlichen Differentialgleichungen', and is by E. Wicke. At the bottom of the title page is the inscription 'Eigentum von E. Wicke, st. m.' written in the same hand as the other details. Library of the Max-Planck-Institut für Wissenschaftsgeschichte in Berlin. The library stamp (top, centred) appears on the reverse of the title page. Above it is written in hand 'Rara', and below it the number '08-1344', standing for the year (2008) in which the document was first acquired by the library and the order of acquisition. In the upper left-hand corner (in what appears to be the same hand) is written 'Rara H641a', indicating the place where the document is to be found in the library's holdings. The page is otherwise blank. The text appears to differ from that in the MI, Göttingen, this latter being of 175 typewritten pages. In all probability, therefore, it represents a different Ausarbeitung from the anonymous one in the MI.

SS 1913: A copy of Hecke's Ausarbeitung for the lecture course 'Elektronentheorie', in the library of the Fakultät für Mathematik und Informatik of the University of Heidelberg.

WS 1913/14: 2 copies of Hecke's Ausarbeitung for the lecture course 'Elektromagnetische Schwingungen', in the library of the Fakultät für Mathematik und Informatik of the University of Heidelberg.

WS 1914/15: Ausarbeitung by an unknown hand of the lecture course 'Probleme und Prinzipienfragen der Mathematik', held under this title in the library of the Institute for Advanced Study in Princeton.

WS 1916/17: (a) An unbound copy of Bär's Ausarbeitung for the lecture course 'Die Grundlagen der Physik' in the papers of Erich Hückel; Staatsbibliothek Preußischer Kulturbesitz, Berlin, Handschriftenabteilung, Nachl. Hückel 2.11. This copy exhibits exactly the same pagination as the Göttingen copy, and contains the same corrections; these are in Bär's hand up to p. 155, but in a different, unidentified hand thereafter. This copy possesses p. 107, which missing in the Göttingen copy. (b) Two additional bound copies (typewritten) with identical underlying text to, but different pagination from, the Bär Ausarbeitung, *and with the same corrections as in Bär's* Ausarbeitung, *but incorporated in the typewritten script. The title page attributes the* Ausarbeitung *to Paul Scherrer. One copy is in the Born* Nachlaß *in the Staatsbibliothek Preußischer Kulturbesitz, Berlin, Handschriftenabteilung, Nachl. Born 1818; the other forms part of the papers of Paul Epstein, which are now in the Archives of the California Institute of Technology, Pasadena. The document carries the Call No. QA401.H5.*

WS 1917/18: *Notes by Paul Bernays in (Gabelsberger shorthand) relating to the lecture course 'Prinzipien der Mathematik', in the Archives of the Eidgenössische Technische Hochschule in Zürich (call-sign: Hs. 973.184).*

WS 1921/22: *(a) Notes taken by Hellmuth Kneser for the lecture course 'Grundlegung der Mathematik' with the abbreviated title 'Grundl. d. Math.'; formerly in the possession of Hellmuth Kneser's son Martin Kneser, now in the SUB under* Cod. Ms. H. Kneser B8.

(b) Incomplete notes for the same lecture course in an unknown hand, in the Archiv of the University of Bonn under the title 'Grundlegung der Mathematik'.

WS 1922/23: *(a) Notes taken by Hellmuth Kneser for the lecture course announced as 'Grundlagen der Arithmetik'; formerly in the possession of Hellmuth Kneser's son Martin Kneser, now in the SUB under* Cod. Ms. H. Kneser B9.

(b) A polished Ausarbeitung (in large part typescript) by Walter Peterhans[71] *entitled 'Die Grundlagen der Arithmetik und Analysis' based on the course 'Grundlagen der Arithmetik' for WS 1922/23. In the possession of Frau Brigitte Peterhans of Chicago.*

WS 1923/24: *Notes by Hellmuth Kneser relating to lectures by Hilbert on the 21st, 25th and 28th February, 1924, probably from the course 'Logische Grundlagen der Mathematik';*[72] *formerly in the possession of Hellmuth Kneser's son Martin Kneser, now in the SUB under* Cod. Ms. H. Kneser B9.

---

[71] Walter Peterhans was a student of mathematics and philosophy in Göttingen between 1921 and 1924. He later became an architect.

[72] The dates named fall on Thursday, Monday and again Thursday, the weekdays on which Hilbert in these years ordinarily held his four hour lectures. These were the days for which the lecture course 'Mengenlehre' was also announced, which makes it likely that this latter course did not take place.

Bibliography

Entries marked with an asterisk refer to unpublished items, either from Hilbert's *Nachlaß*, or from the Mathematisches Institut of Göttingen University.

Abraham 1902a

Max Abraham: *Dynamik des Elektrons.* – Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-Physikalische Klasse (1902), 20–41.

Abraham 1902b

Max Abraham: *Prinzipien der Dynamik des Elektrons.* – Physikalische Zeitschrift 4 (1902), 57–63.

Abraham 1903

Max Abraham: *Prinzipien der Dynamik des Elektrons.* – Annalen der Physik 10 (1903), 105–179.

Abraham 1904a

Max Abraham: *Der Lichtdruck auf einen bewegten Spiegel und das Gesetz der schwarzen Strahlung.* – In *Festschrift Ludwig Boltzmann gewidmet*, Leipzig: Barth, 1904, 85–93.

Abraham 1904b

Max Abraham: *Zur Theorie der Strahlung und des Strahlungsdruckes.* – Annalen der Physik 14 (1904), 236–287.

Abraham 1905

Max Abraham: *Elektromagnetische Theorie der Strahlung. (Theorie der Elektrizität. Zweiter Band.).* – Leipzig: Teubner 1905.

Abraham 1908

Max Abraham: *Elektromagnetische Theorie der Strahlung. (Theorie der Elektrizität. Zweiter Band.).* – Zweite Auflage. Leipzig: Teubner 1908.

Arnol'd 1963

Vladimir A. Arnol'd: *Proof of a theorem by A. N. Kolmogorov on the invariance of quasi-periodic motions under small perturbations of the Hamiltonian.* – Russian Mathematical Surveys 18 (163), 9–36.

Ashtekar et al. 2003

Abhay Ashtekar, Robert S. Cohen, Don Howard, Jürgen Renn, Sahotra Sarkar, and Abner Shimony [eds.]: *Revisiting the Foundations of Relativistic Physics. Festschrift in Honor of John Stachel.* – Dordrecht: Kluwer, 2003 (Boston Studies in the Philosophy of Science; 234).

Baedeker 1911

K. Baedeker: *Die elektrischen Erscheinungen in metallischen Leitern. Leitung, Thermoelektrizität, galvanomagnetische Effekte, Optik.* – Braunschweig: Vieweg, 1911.

Bär 1916a

Richard Bär: *Über Green'sche Randwertaufgaben bei der Schwingungsgleichung.* – (Dissertation Universität Würzburg) Leipzig: Teubner, 1916.

Bär 1916b

Richard Bär: *Über Green'sche Randwertaufgaben bei der Schwingungsgleichung.* – Mathematische Annalen 78 (1916), 177–187.

Bär 1918

Richard Bär: *Über die atomistische Struktur der Elektrizität.* – Annalen der Physik 57 (1918), 161–182.

Balmer 1885

Johann Jakob Balmer: *Die Spectrallinien des Wasserstoffs.* – Verhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft in Basel 7 (1885), 548–560.

Barrow-Green 1997

June Barrow-Green: *Poincaré and the Three Body Problem.* – Rhode Island: American Mathematical Society, 1997 (History of Mathematics; Vol. 11).

Becker et al. 1998

Heinrich Becker, Hans-Joachim Dahms, Cornelia Wegeler [eds.]: *Die Universität Göttingen unter dem Nationalsozialismus.* Zweite, erweiterte Ausgabe. – München: K.G. Saur, 1998.

Behrens 1911

Wilhelm Behrens: *Ein mechanisches Problem aus der Theorie der Laval-Turbine, behandelt mit Methoden der Himmelsmechanik.* – Zeitschrift für Mathematik und Physik 59 (1911), 337–390.

Behrens and Hecke 1912

Wilhelm Behrens and Erich Hecke: *Ueber die geradlinige Bewegung des Bornschen starren Elektrons.* – Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-Physikalische Klasse (1912), 849–860.

Behrens 1915

Wilhelm Behrens: *Über die Lichtfortpflanzung in parallel-geschichteten Medien.* – Mathematische Annalen 76 (1915), 380–430.

Blaschke 1916

Wilhelm Blaschke: *Räumliche Variationsprobleme mit symmetrischer Transversalitätsbedingung.* – Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-physikalische Klasse 68 (1916), 50–55.

Blumenthal 1918

Otto Blumenthal: *Karl Schwarzschild.* – Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung 26 (1918), 56–75.

Blumenthal 1922

Otto Blumenthal: *David Hilbert.* – Die Naturwissenschaften 10 (1922), 67–72.

Blumenthal 1935

Otto Blumenthal: *Lebensgeschichte.* – In *Hilbert 1935*, 388–429.

Bohr 1913a

Niels Bohr: *On the Constitution of Atoms and Molecules.* – Philosophical Magazine 26 (1913), 1–25.

Bohr 1913b

Niels Bohr: *On the Constitution of Atoms and Molecules. Part II. Systems containing only a Single Nucleus.* – Philosophical Magazine 26 (1913), 476–502.

Bohr 1913c

Niels Bohr: *On the Constitution of Atoms and Molecules. Part III. Systems containing Several Nuclei.* – Philosophical Magazine 26 (1913), 857–875.

Bohr 1918

Niels Bohr: *On the quantum theory of line spectra.* – Det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter. 8. Række. Naturvidenskabelig og Mathematisk Afdeling 4 (1918), 1–100. Reprinted in *Bohr 1976*, 65–166.

Bohr 1976

Niels Bohr: *Collected Works. Vol. 3. The Correspondence Principle (1920–1923).* – J. Rud Nielsen [ed.]. Amsterdam: North-Holland, 1976.

Bohr 1977

Niels Bohr: *Collected Works. Vol. 4. The Periodic System (1920–1923)* – J. Rud Nielsen [ed.]. Amsterdam: North-Holland, 1977.

Boltzmann 1897

Ludwig Boltzmann: *Vorlesungen ueber die Principe der Mechanik. I. Theil enthaltend die Principe, bei denen nicht Ausdrücke nach der Zeit integrirt werden, welche Variationen der Coordinaten oder ihrer Ableitungen nach der Zeit enthalten.* – Leipzig: Barth, 1897.

Boltzmann 1898

Ludwig Boltzmann: *Vorlesungen über Gastheorie. II. Theil: Theorie van der Waals'; Gase mit zusammengesetzen Molekülen; Gasdissocation; Schlussbemerkungen.* – Leipzig: Barth, 1898.

Boltzmann 1904

Ludwig Boltzmann: *Vorlesungen ueber die Principe der Mechanik. II. Theil enthaltend: Die Wirkungsprincipe, die Lagrangeschen Gleichungen und deren Anwendungen.* – Leipzig: Barth, 1904.

Born 1909a

Max Born: *Die Theorie des starren Elektrons in der Kinematik des Relativitätsprinzips.* – Annalen der Physik 30 (1909), 1–56.

Born 1909b

Max Born: *Über die Dynamik des Elektrons in der Kinematik des Relativitätsprinzips.* – Physikalische Zeitschrift 10 (1909), 814–817.

Born 1910a

Max Born: *Zur Kinematik des starren Körpers im System des Relativitätsprinzips.* – Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse (1910), 161–179.

Born 1910b

Max Born: *Über die Definition des starren Körpers in der Kinematik des Relativitätsprinzips.* – Physikalische Zeitschrift 11 (1910), 233–234.

Born 1912

Max Born: *Lichtfortpflanzung in bewegten Medien.* – In *Korschelt et al. 1912*, 287–294.

Born 1914

Max Born: *Der Impuls-Energie-Satz in der Elektrodynamik von Gustav Mie.* – Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse (1914), 23–37.

Born 1922

Max Born: *Hilbert und die Physik.* – Die Naturwissenschaften 10 (1922), 88–93.

Born 1925

Max Born: *Vorlesungen über Atommechanik.* – Berlin: Springer, 1925.

Born 1926a

Max Born: *Zur Quantenmechanik der Stoßvorgänge.* – Zeitschrift für Physik 37 (1926), 863–867.

Born 1926b

Max Born: *Quantenmechanik der Stoßvorgänge.* – Zeitschrift für Physik 38 (1926), 803–827.

Born 1927

Max Born: *Physical aspects of quantum mechanics.* – Nature 119 (1927), 354–357.

Born and Minkowski 1910

Max Born and Hermann Minkowski: *Eine Ableitung der Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern vom Standpunkte der Elektronentheorie. Aus dem Nachlaß von Hermann Minkowski bearbeitet von Max Born in Göttingen.* – Mathematische Annalen 68 (1910), 526–551.

Born and Pauli 1922

Max Born and Wolfgang Pauli: *Über die Quantelung gestörter mechanischer Systeme.* – Zeitschrift für Physik 10 (1922), 137–158.

Bornemann 1978

Elke Bornemann: *Der Frieden von Bukarest 1918.* – Frankfurt/Main: Peter Lang, 1978.

Bose 1924

Satyendra Nath Bose: *Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese.* – Zeitschrift für Physik 26 (1924), 178–181.

Brading 2005

Katherine Brading: *A Note on General Relativity, Energy Conservation, and Noether's Theorems.* – In *Kox and Eisenstaedt 2005*, 125–135.

Brading and Ryckman 2008

Katherine Brading and Thomas Ryckman: *Hilbert's 'Foundations of Physics': Gravitation and Electromagnetism Within the Axiomatic Method.* – Studies in History and Philosophy of Modern Physics 39 (2008), 102–153.

De Broglie 1924

Louis de Broglie: *Recherches sur la théorie des quanta.* – Dissertation Faculté des Sciences de l'Université de Paris 1924. Published in: Annales de Physique 10 III (1925), 22–128.

Carathéodory 1924

Constantin Carathéodory: *Zur Axiomatik der speziellen Relativitätstheorie.* – Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften (Berlin). Physikalisch-mathematische Klasse (1924) 12–27.

Carson and Huber 2006

Emily Carson and Renate Huber [eds.]: *Intuition and the Axiomatic Method.* – Dordrecht: Springer, 2006.

Cartan 1923

Élie Cartan: *Sur les variétés à connection affine et la théorie de la relativité généralisée.* – Ecoles Normale Superieure (Paris). Annales 40 (1923), 325–412.

Christoffel 1869

Elwin Bruno Christoffel: *Ueber die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades.* – Journal für die reine und angewandte Mathematik 70 (1869), 46–70.

Corry, Renn and Stachel 1997

Leo Corry, Jürgen Renn, and John Stachel: *Belated Decision in the Hilbert-Einstein Priority Dispute.* – Science 278 (1997), 1270–1273.

Corry 1999a

Leo Corry: *Hilbert and Physics (1900–1915).* – In *Gray 1999*, 145–188.

Corry 1999b

Leo Corry: *David Hilbert between Mechanical and Electromagnetic Reductionism (1910–1915).* – Archive for History of Exact Sciences 53 (1999), 489–527.

Corry 2004

Leo Corry: *David Hilbert and the Axiomatization of Physics (1898–1918). From* Grundlagen der Geometrie *to* Grundlagen der Physik. – Dordrecht: Kluwer, 2004.

Courant and Hilbert 1924

Richard Courant and David Hilbert: *Methoden der mathematischen Physik.* – Berlin: Springer 1924.

Courant and Hilbert 1937

Richard Courant and David Hilbert: *Methoden der mathematischen Physik II.* – Berlin: Springer 1937.

CPAE2 1989

John Stachel et al. [eds.]: *The Collected Papers of Albert Einstein. Vol. 2. The Swiss Years: Writings, 1900–1909.* – Princeton: Princeton University Press, 1989.

CPAE3 1993

Martin Klein et al. [eds.]: *The Collected Papers of Albert Einstein. Vol. 3. The Swiss Years: Writings 1909–1911.* – Princeton: Princeton University Press, 1993.

CPAE4 1995

Martin J. Klein et al. [eds.]: *The Collected Papers of Albert Einstein. Vol. 4. The Swiss Years: Writings, 1912–1914.* – Princeton: Princeton University Press, 1995.

CPAE5 1993

Martin J. Klein et al. [eds.]: *The Collected Papers of Albert Einstein. Vol. 5. The Swiss Years: Correspondence, 1902–1914.* – Princeton: Princeton University Press, 1993.

CPAE6 1996

A.J. Kox et al. [eds.]: *The Collected Papers of Albert Einstein. Vol. 6. The Berlin Years: Writings, 1914–1917.* – Princeton: Princeton University Press, 1996.

CPAE7 2002

M. Janssen et al. [eds.]: *The Collected Papers of Albert Einstein. Vol. 7. The Berlin Years: Writings, 1918–1921.* – Princeton: Princeton University Press, 2002.

CPAE8-A 1998

Robert Schulmann et al. [eds.]: *The Collected Papers of Albert Einstein. Vol. 8, Part A. The Berlin Years: Correspondence, 1914–1917.* – Princeton: Princeton University Press, 1998.

CPAE8-B 1998

Robert Schulmann et al. [eds.]: *The Collected Papers of Albert Einstein. Vol. 8, Part A. The Berlin Years: Correspondence, 1918.* – Princeton: Princeton University Press, 1998.

CPAE9 2004

Diana Kormos Buchwald et al. [eds.]: *The Collected Papers of Albert Einstein. Vol. 9. The Berlin Years: Correspondence, January 1919–April 1920.* – Princeton: Princeton University Press, 2004.

CPAE9 2004

Diana Kormos Buchwald et al. [eds.]: *The Collected Papers of Albert Einstein. Vol. 10. The Berlin Years: Correspondence, May 1920–December 1920. Supplementary Correspondence 1909–1920.* – Princeton: Princeton University Press, 2004.

Crone 1923

C. Crone: *Matematisk Forening gennem 50 Aar.* – Copenhagen: Jul. Gjellerup, 1923.

Crowe 1994

Michael J. Crowe: *A History of Vector Analysis. The Evolution of the Idea of a Vectorial System.* – New York: Dover, 1994.

Darboux 1894

Gaston Darboux: *Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal. Troisième partie. Lignes géodésiques et courbure géodésique. Paramètres différentiels. Déformation des surfaces.* – Paris: Gauthiers-Villars, 1894.

Darrigol 2000

Olivier Darrigol: *Electrodynamics from Ampère to Einstein.* – Oxford: Oxford University Press, 2000.

Dirac 1926

Paul A. M. Dirac: *On the Theory of Quantum Mechanics.* – Procceedings of the Royal Society (London) A 112 (1926), 661–677.

Dyson et al. 1920

Frank Dyson, Arthur S. Eddington, and C. Davidson: *A Determination of the Deflection of Light by the Sun's Gravitational Field, from Observations Made at the Total Eclipse of May 29, 1919.* – Philosophical Transactions 22 (1920), 291–333.

Earman 1999

John Earman: *The Penrose-Hawking Singularity Theorems: History and Implications.* – In *Goenner et al. 1999*, 235–267.

Earman and Glymour 1978

John Earman and Clark Glymour: *Einstein and Hilbert: Two Months in the History of General Relativity.* – Archive for History of Exact Sciences 19 (1978), 291–308.

Earman and Janssen 1993

John Earman and Michel Janssen: *Einstein's Explanation of the Motion of Mercury's Perihelion.* – In *Earman et al. 1999*, 129–172.

Earman et al. 1999

John Earman, Michel Janssen, John D. Norton [eds.]: *The Attraction of Gravitation. New Studies in the History of General Relativity.* – Boston: Birkhäuser 1993 (Einstein Studies; 5).

Eddington 1921

Arthur S. Eddington: *A Generalisation of Weyl's Theory of the Electromagnetic and Gravitational Field.* – Royal Society of London. Proceedings. A99 (1921), 104–122.

Eddington 1923

Arthur S. Eddington: *The Mathematical Theory of Relativity.* – Cambridge: Cambridge University Press, 1923.

Ehrenfest 1911

Paul Ehrenfest: *Welche Züge der Lichtquantenhypothese spielen in der Theorie der Wärmestrahlung eine wesentliche Rolle?* – Annalen der Physik 36 (1911), 91–118.

Ehrenfest 1916

Paul Ehrenfest: *Adiabatische Invarianten und Quantentheorie.* – Annalen der Physik 51 (1916), 327–351.

Einstein 1905

Albert Einstein: *Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt.* – Annalen der Physik 17 (1905) 132–148. Reprinted in *CPAE2 1989*, 149–169.

Einstein 1907a

Albert Einstein: *Die Plancksche Theorie der Strahlung und die Theorie der spezifischen Wärme.* – Annalen der Physik 22 (1907) 180–190. Reprinted in *CPAE2 1989*, 378–391.

Einstein 1907b

Albert Einstein: *Über das Relativitätsprinzip und die aus demselben gezogenen Folgerungen.* – Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik 4 (1907), 411–462. Reprinted in *CPAE2 1989*, 432–488.

Einstein 1911

Albert Einstein: *Über den Einfluß der Schwerkraft auf die Ausbreitung des Lichtes.* – Annalen der Physik 35 (1911), 898–908. Reprinted in *CPAE3 1993*, 485–497.

Einstein 1912

Albert Einstein: *Lichtgeschwindigkeit und Statik des Gravitationsfeldes.* – Annalen der Physik 38 (1912), 355–369. Reprinted in *CPAE4 1995*, 129–145.

Einstein 1913

Albert Einstein: *Zum gegenwärtigen Stande des Gravitationsproblems.* – Physikalische Zeitschrift 14 (1913), 1249–1262. Reprinted in *CPAE4 1995*, 486–503.

Einstein 1914

Albert Einstein: *Die formale Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie.* – Sitzungsberichte der Könglichen Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin (1914), 1030–1085. Reprinted in *CPAE6 1996*, 72–130.

Einstein 1915a

Albert Einstein: *Zur allgemeinen Relativitätstheorie.* – Sitzungsberichte der Könglichen Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin (1915), 778–786. Reprinted in *CPAE6 1996*, 214–224.

Einstein 1915b

Albert Einstein: *Zur allgemeinen Relativitätstheorie (Nachtrag).* – Sitzungsberichte der Könglichen Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin (1915), 799–801. Reprinted in *CPAE6 1996*, 225–229.

Einstein 1915c

Albert Einstein: *Erklärung der Perihelbewegung des Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie.* – Sitzungsberichte der Könglichen Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin (1915), 831–839. Reprinted in *CPAE6 1996*, 233–243.

Einstein 1915d

Albert Einstein: *Die Feldgleichungen der Gravitation.* – Sitzungsberichte der Könglichen Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin (1915), 844–847. Reprinted in *CPAE6 1996*, 244–249.

Einstein 1916a

Albert Einstein: *Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie.* – Annalen der Physik 49 (1916), 769–822. Reprinted in *CPAE6 1996*, 283–339.

Einstein 1916b

Albert Einstein: *Näherungsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation.* – Sitzungsberichte der Könglichen Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin (1916), 688–696. Reprinted in *CPAE6 1996*, 347–357.

Einstein 1916c

Albert Einstein: *Hamiltonsches Prinzip und allgemeine Relativitätstheorie.* – Sitzungsberichte der Könglichen Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin (1916), 1111–1116. Reprinted in *CPAE6 1996*, 409–416.

Einstein 1917a

Albert Einstein: *Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie.* – Braunschweig: Vieweg, 1917. Reprinted in *CPAE6 1996*, 420–539.

Einstein 1917b

Albert Einstein: *Zum Quantensatz von Sommerfeld und Epstein.* – Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft 19 (1917), 82–92. Reprinted in *CPAE6 1996*, 555–567.

Einstein 1921

Albert Einstein: *Geometrie und Erfahrung.* Erweiterte Fassung des Festvortrages gehalten an der Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin am 27. Januar 1921. – Berlin: Springer 1921. Reprinted in *CPAE7 2002*, 382–405.

Einstein 1923a

Albert Einstein: *Zur allgemeinen Relativitätstheorie* – Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Physikalisch-mathematische Klasse (1923), 32–38.

Einstein 1923b

Albert Einstein: *Bemerkung zu meiner Arbeit 'Zur affinen Feldtheorie'* – Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Physikalisch-mathematische Klasse (1923), 76–77.

Einstein 1923c

Albert Einstein: *Zur affinen Feldtheorie* – Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Physikalisch-mathematische Klasse (1923), 137–140.

Einstein 1924

Albert Einstein. *Quantentheorie des einatomigen idealen Gases.* – Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Physikalisch-mathematische Klasse (1924), 261–267.

Einstein 1925

Albert Einstein. *Quantentheorie des einatomigen idealen Gases. Zweite Abhandlung.* – Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Physikalisch-mathematische Klasse (1925), 3–14.

Einstein and Grossmann 1913

Albert Einstein and Marcel Grossmann: *Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und einer Theorie der Gravitation.* – Leipzig: Teubner 1913. Reprinted in *CPAE4 1995*, 302–343.

Einstein and Grossmann 1914

Albert Einstein and Marcel Grossmann: *Kovarianzeigenschaften der Feldgleichungen der auf die verallgemeinerte Relativitätstheorie gegründeten Gravitationstheorie.* – Zeitschrift für Mathematik und Physik 63 (1914), 215–225. Reprinted in *CPAE6 1996*, 6–18.

Eisenstaedt 1982

Jean Eisenstaedt: *Histoire et Singularités de la Solution de Schwarzschild (1915–1923).* – Archive for History of Exact Sciences 27 (1982), 157–198.

Eisenstaedt 1987

Jean Eisenstaedt: *Trajectoires et Impasses de la Solution de Schwarzschild.* – Archive for History of Exact Sciences 37 (1987), 275–357.

Eisenstaedt 1989

Jean Eisenstaedt: *The Early Interpretation of the Schwarzschild Solution.* – In *Howard and Stachel 1989*, 213–233.

Eisenstaedt and Kox 1992

Jean Eisenstaedt and A.J. Kox [eds.]: *Studies in the History of General Relativity.* – Boston: Birkhäuser 1992 (Einstein Studies; 3).

Encyclopädie 1903–21

Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen. Band V. Physik. 1. Teil. – Leipzig: Teubner 1903–1921.

Encyclopädie 1924–22

Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen. Band V. Physik. 2. Teil. – Leipzig: Teubner 1904–1922.

Encyclopädie 1909–26

Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen. Band V. Physik. 3. Teil. – Leipzig: Teubner 1909–1926.

Epstein 1916a

Paul S. Epstein: *Zur Theorie des Starkeffektes.* – Annalen der Physik 50 (1916), 489–520.

Epstein 1916b

Paul S. Epstein: *Zur Quantentheorie.* – Annalen der Physik 51 (1916), 168–188.

Ericksen 1998

Robert P. Ericksen: *Kontinuitäten konservativer Geschichtsschreibung am Seminar für Mittlere und Neuere Geschichte: Von der Weimarer Zeit über die nationalsozialistische Ära bis in die Bundesrepublik.* – In *Becker et al. 1998*, 427–453.

Ewald 1912

Peter Paul Ewald: *Dispersion und Doppelbrechung von Elektronengittern (Kristallen).* – Dissertation Universität München, 1912.

Farwell and Knee 1990

Ruth Farwell and Christopher Knee: *The missing link: Riemann's "Commentatio," differential geometry and tensor analysis.* – Historia mathematica 17 (1990), 223–255.

Fermi 1926a

Enrico Fermi: *Sulla quantizzazione del gas perfetto monoatomico.* – Atti della Reale Accademia dei Lincei, Rendiconti 3 (1926), 181–185. Reprinted in *Fermi 1962*, 181–185.

Fermi 1926b

Enrico Fermi: *Zur Quantelung des idealen einatomigen Gases.* – Zeitschrift für Physik 36 (1926), 902–912. Reprinted in *Fermi 1962*, 186–195.

Fermi 1962

Enrico Fermi: *Collected Papers (Note e Memorie). Vol. 1. Italy 1921–1938.* – E. Amaldi et al. [eds.]. Chicago: Chicago University Press, 1962.

Fizeau 1851

Hippolyte Louis Fizeau: *Sur les hypothèses à l'éther lumineux, et sur une expérience qui paraît démontrer que le mouvement des corps change la vitesse avec laquelle la lumière se propage dans leur intérieur.* – Comptes Rendues Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences 33 (1851), 349–355.

Flamm 1916

Ludwig Flamm: *Beiträge zur Einsteinschen Gravitationstheorie.* – Physikalische Zeitschrift 17 (1916), 448–454.

Foeppl 1907

August Föppl: *Einführung in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität. Mit einem einleitenden Abschnitte über das Rechnen mit Vektorgrößen in der Physik.* Dritte, vollständig umgearbeitete Auflage hg. v. M. Abraham. – Leipzig: Teubner, 1907.

Folkerts et al. 2004

Mensor Folkerts, Ulf Hashagen, Rudolf Seising [eds.]: *Form, Zahl, Ordnung. Studien zur Wissenschafts- und Technikgeschichte. Ivo Schneider zum 65. Geburtstag.* – Stuttgart: Steiner, 2004.

Fredholm 1903

Erik Ivar Fredholm: *Sur une classe d'équations fonctionnelles.* – Acta Mathematica 27 (1903), 365–390.

Freundlich 1915a

Erwin Freundlich: *Über die Gravitationsverschiebung der Spektrallinien bei Fixsternen.* – Physikalische Zeitschrift 16 (1915), 115–117.

Freundlich 1915b

Erwin Freundlich: *Über die Gravitationsverschiebung der Spektrallinien bei Fixsternen.* – Astronomische Nachrichten 202 (1915), cols. 17–24.

Freundlich 1916

Erwin Freundlich: *Die Grundlagen der Einsteinschen Gravitationstheorie.* – Berlin: Springer, 1916.

Freundlich 1917

Erwin Freundlich: *Die Grundlagen der Einsteinschen Gravitationstheorie.* Zweite, erweiterte und verbesserte Auflage. – Berlin: Springer, 1917.

Friedrichs 1927

Kurt O. Friedrichs: *Eine invariante Formulierung des Newtonschen Gravitationsgesetzes und des Grenzüberganges zum Newtonschen Gesetz.* – Mathematische Annalen 98 (1927), 566–575.

Gauss 1828

Carl Friedrich Gauss: *Disquisitiones generales circa superficies curvas.* – Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores 6 (1828), 99–146. Reprinted in *Gauss 1873*, 216–258.

Gauss 1873

Carl Friedrich Gauss: *Werke.* – Hrsg. von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Vierter Band, 1873.

Gauss 1965

Carl Friedrich Gauss: *General Investigations of Curved Surfaces.* Transl. A. Hiltebeitel and J. Morehead. – Hewlett, New York: Raven Press, 1965.

Gödel 1949

Kurt Gödel: *An Example of a New Type of Cosmological Solutions of Einstein's Field Equations of Gravitation.* – Reviews of Modern Physics 21 (1949), 447–450. Reprinted in *Gödel 1990*, 190–198.

Gödel 1990

Kurt Gödel: *Collected Works*, Vol. 2. S. Fefferman et al. [eds.]. Oxford, Oxford University Press, 1990.

Goethe 1993a

Johann Wolfgang von Goethe: *Faust. Eine Tragödie.* – In *Goethe 1993b*, 7–145.

Goethe 1993b

Johann Wolfgang von Goethe: *Werke. Band III. Dramatische Dichtungen I.* Textkritisch durchgesehen und kommentiert von Erich Trunz. Fünfzehnte, durchgesehene Auflage. – München: Beck 1993.

Goenner 2004

Hubert Goenner: *On the History of Unified Field Theories.* – Living Reviews in Relativity 7 (2004), No. 2 [http://www.livingreviews.org/lrr-2004-2].

Goenner et al. 1999

Hubert Goenner, Jürgen Renn, Jim Ritter, and Tilman Sauer [eds.]: *The Expanding Worlds of General Relativity.* – Boston: Birkhäuser 1999 (Einstein Studies; 7).

Goldstein and Ritter 2003

Catherine Goldstein and Jim Ritter: *The Varieties of Unity: Sounding Unified Field Theories 1920–1930.* – In *Ashtekar et al. 2003*, 93–149.

Goldstine 1980

Herman H. Goldstine: *A History of Calculus of Variations from the 17th through the 19th Century.* – New York: Springer 1980.

Gray 1999

Jeremy J. Gray [ed.]: *The Symbolic Universe. Geometry and Physics 1890–1930.* – Oxford: Oxford University Press, 1999.

Gray 2000

Jeremy Gray: *The Hilbert Challenge.* – Oxford: Oxford University Press, 2000.

Grundmann 2004

Siegfried Grundmann: *Einstein's Akte.* Zweite Auflage. – Berlin: Springer, 2004.

Guye and Lavanchy 1916

Charles-Eugène Guye and Charles Lavanchy: *Vèrification expérimentale de la formule de Lorentz-Einstein par les rayons cathodiques de grande vitesse.* – Archives des sciences physiques et naturelles 42 (1916), 286–299, 353–373, 441–448.

Haas 1919

Arthur Haas: *Die Axiomatik der modernen Physik.* – Die Naturwissenschaften 7 (1919), 744–750.

Haas 1924

Arthur Haas: *Atomtheorie in elementarer Darstellung.* – Berlin and Leipzig: de Gruyter, 1924.

Haas 1928

Arthur Haas: *Materiewellen und Quantenmechanik.* – Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft, 1928.

Heidelberger and Stadler 2002

Michael Heidelberger and Friedrich Stadler [eds.]: *History of Philosophy of Science. New Trends and Perspectives.* – Dordrecht: Kluwer, 2002 (Vienna Circle Institute Yearbook; 9).

Held 1980

Alan Held [ed.]: *General Relativity and Gravitation: One Hundred Years after the Birth of Albert Einstein.* – New York: Plenum, 1980.

Hellinger and Toeplitz 1927

Ernst Hellinger and Otto Toeplitz: *Integralgleichungen und Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten*, – Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften II C 13 (1927) 1340–1597.

Helmholtz 1896

Hermann Helmholtz: *Handbuch der physiologischen Optik.* Zweite, umgearbeitete Auflage. – Hamburg: Voss, 1856.

Helmholtz 1884a

Hermann von Helmholtz: *Principien der Statik monocyklischer Systeme.* – Journal für die reine und angewandte Mathematik 97 (1884), 111–140.

Helmholtz 1884b

Hermann von Helmholtz: *Principien der Statik monocyklischer Systeme. Zweiter Aufsatz.* – Journal für die reine und angewandte Mathematik 97 (1884), 317–336.

Helmholtz 1903

Hermann Helmholtz: *Vorlesungen ueber theoretische Physik. Band 6. Vorlesungen über Theorie der Wärme.* – Leipzig: Barth, 1903.

Hendricks et al. 2006

Vincent F. Hendricks, Klaus Frovin Jørgensen, Jesper Lützen, and Stig Andur Pedersen [eds.]: *Interactions. Mathematics, Physics and Philosophy, 1860–1930.* – Boston: Springer, 2006.

Hentschel 1997

Klaus Hentschel: *The Einstein Tower.* – Stanford: Stanford University Press, 1997.

Hentschel 1998

Klaus Hentschel: *Zum Zusammenspiel von Instrument, Experiment und Theorie.* – Hamburg: Kovaĉ, 1998.

Herglotz 1910

Gustav Herglotz: *Über den vom Standpunkt des Relativitätsprinzips aus als „starr“ zu bezeichnenden Körper.* – Annalen der Physik 31 (1910), 393–415.

Hertz 1894

Heinrich Hertz: *Die Prinzipien der Mechanik: in neuem Zusammenhange dargestellt. (Gesammelte Werke. Band III.).* – Leipzig: Barth, 1894.

Hiemenz 1907

K. Hiemenz: *Katalog des mathematischen Lesezimmers der Universität Göttingen. Bearbeitet von K. Hiemenz. Mit einem Vorwort von F. Klein.* – Leipzig: Teubner, 1907.

Hilbert 1897

David Hilbert: *Zum Gedächtnis an Karl Weierstraß.* – Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Geschäftliche Mitteilungen (1897), 60–69.

Hilbert 1898/99*

David Hilbert: *Mechanik* – Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen, Handschriftenabteilung, *Cod. Ms. D. Hilbert 553.*

Hilbert 1900

David Hilbert: *Mathematische Probleme.* Vortrag gehalten auf dem internationalen Mathematiker-Kongreß zu Paris 1900. – Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse (1900), 253–297.

Hilbert 1905*

David Hilbert: *Logische Principien des mathematischen Denkens.* – Georg-August-Universität Göttingen, Mathematisches Institut, Lesesaal.

Hilbert 1910

David Hilbert: *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen.* – Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse (1910), 595–618.

Hilbert 1910/11*

David Hilbert: *Mechanik.* – Georg-August-Universität Göttingen, Mathematisches Institut, Lesesaal.

Hilbert 1911*

David Hilbert: *Mechanik der Kontinua.* – Georg-August-Universität Göttingen, Mathematisches Institut, Lesesaal.

Hilbert 1911/12*

David Hilbert: *Kinetische Gastheorie.* – Georg-August-Universität Göttingen, Mathematisches Institut, Lesesaal.

Hilbert 1912*

David Hilbert: *Strahlungstheorie.* – Georg-August-Universität Göttingen, Mathematisches Institut, Lesesaal (this Volume, Chapter 5, 441–500).

Hilbert 1912a

David Hilbert: *Begründung der elementaren Strahlungstheorie.* – Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse (1912), 773–789.

Hilbert 1912b

David Hilbert: *Begründung der kinetischen Gastheorie.* – Mathematische Annalen 72 (1912), 562–577.

Hilbert 1912c

David Hilbert: *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen.* – Leipzig: Teubner, 1912. (Fortschritte der mathematischen Wissenschaften in Monographien; Heft 3).

Hilbert 1912/13*

David Hilbert: *Molekulartheorie der Materie.* – Georg-August-Universität Göttingen, Mathematisches Institut, Lesesaal.

Hilbert 1913a

David Hilbert: *Begründung der elementaren Strahlungstheorie.* – Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 22 (1913), 1–20. New edition of *Hilbert 1912a* (mit Zusatz).

Hilbert 1913b

David Hilbert: *Bemerkungen zur Begründung der elementaren Strahlungstheorie.* – Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse (1913), 409–416.

Hilbert 1913c

David Hilbert: *Grundlagen der Geometrie.* Vierte, durch Zusätze und Literaturhinweise von neuem vermehrte und mit sieben Anhängen versehene Auflage. – Leipzig: Teubner, 1913.

Hilbert 1913*

David Hilbert: *Elektronentheorie.* – Georg-August-Universität Göttingen, Mathematisches Institut, Lesesaal.

Hilbert 1914

David Hilbert: *Zur Begründung der elementaren Strahlungstheorie.* ⟨Dritte Mitteilung.⟩. – Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse (1914), 275–298.

Hilbert 1915

David Hilbert: *Die Grundlagen der Physik. (Erste Mitteilung.).* – Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse (1915), 395–407 (this Volume, Chapter 1, 28–46).

Hilbert 1915*

David Hilbert: *Differentialgleichungen.* – Georg-August-Universität Göttingen, Mathematisches Institut, Lesesaal.

Hilbert 1916a*

David Hilbert: *Die Grundlagen der Physik.* – Georg-August-Universität Göttingen, Mathematisches Institut, Lesesaal (this Volume, Chapter 2, 79–161).

Hilbert 1916b*

David Hilbert: *Partielle Differentialgleichungen.* – Georg-August-Universität Göttingen, Mathematisches Institut, Lesesaal.

Hilbert 1916/17*

David Hilbert: *Die Grundlagen der Physik II.* – Georg-August-Universität Göttingen, Mathematisches Institut, Lesesaal (this Volume, Chapter 2, 162–307).

Hilbert 1917

David Hilbert: *Die Grundlagen der Physik. (Zweite Mitteilung.).* – Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse (1917), 53–76 (this Volume, Chapter 1, 47–72).

Hilbert 1917/18*

David Hilbert: *Elektronentheorie.* – Georg-August-Universität Göttingen, Mathematisches Institut, Lesesaal.

Hilbert 1918

David Hilbert: *Axiomatisches Denken.* – Mathematische Annalen 78 (1918), 405–415.

Hilbert 1918/19*

David Hilbert: *Raum und Zeit.* – Georg-August-Universität Göttingen, Mathematisches Institut, Lesesaal.

Hilbert 1919*

David Hilbert: *Natur und mathematisches Erkennen.* – Georg-August-Universität Göttingen, Mathematisches Institut, Lesesaal.

Hilbert 1920*

David Hilbert: *Höhere Mechanik und neue Gravitationstheorie.* – Georg-August-Universität Göttingen, Mathematisches Institut, Lesesaal.

Hilbert 1921/22*

David Hilbert: *Grundgedanken der Relativitätstheorie.* – Georg-August-Universität Göttingen, Mathematisches Institut, Lesesaal.

Hilbert 1922*

David Hilbert: *Statistische Mechanik.* – Georg-August-Universität Göttingen, Mathematisches Institut, Lesesaal.

Hilbert 1922/23a*

David Hilbert: *Mathematische Grundlagen der Quantentheorie.* – Georg-August-Universität Göttingen, Mathematisches Institut, Lesesaal (this Volume, Chapter 6, 507–601).

Hilbert 1922/23b*

David Hilbert: *Über die Einheit in der Naturerkenntnis.* – Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen, Handschriftenabteilung *Cod. Ms. D. Hilbert 567.*

Hilbert 1923/24a*

David Hilbert: *Über die Einheit in der Naturerkenntnis.* – Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen, Handschriftenabteilung *Cod. Ms. D. Hilbert 568*; Georg-August-Universität Göttingen, Mathematisches Institut, Lesesaal.

Hilbert 1923/24b*

David Hilbert: *Unsere Vorstellungen von Gravitation und Elektrizität (Einheit in der Naturerkenntnis).* – Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen, Handschriftenabteilung *Cod. Ms. D. Hilbert 569.*

Hilbert 1924

David Hilbert: *Die Grundlagen der Physik.* – Mathematische Annalen 92 (1924), 1–32.

Hilbert 1924*

David Hilbert: *Relativitätstheorie; Ergänzung zur Vorlesung über allgemeine Mechanik.* – Georg-August-Universität Göttingen, Mathematisches Institut, Lesesaal.

Hilbert 1924/25*

David Hilbert: *Über das Unendliche (allgemeinverständlich).* – Georg-August-Universität Göttingen, Mathematisches Institut, Lesesaal.

Hilbert 1926/27*

David Hilbert: *Mathematische Grundlagen der Quantentheorie.* – Georg-August-Universität Göttingen, Mathematisches Institut, Lesesaal (this Volume, Chapter 6, 507–601).

Hilbert 1930

David Hilbert. *Naturerkennen und Logik.* – Die Naturwissenschaften 1930, 959–963.

Hilbert 1934*

David Hilbert. *Verzeichniss meiner Vorlesungen.* – Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen, Handschriftenabteilung *Cod. Ms. D. Hilbert 520.*

Hilbert 1935

David Hilbert: *Gesammelte Abhandlungen. Dritter Band. Analysis, Grundlagen der Mathematik, Physik, Verschiedenes. Nebst einer Lebensgeschichte.* – Berlin: Springer 1935.

Hilbert 1990

David Hilbert: *Zahlentheorie.* Wintersemester 1897/98. – Göttingen: [no publisher], 1990.

Hilbert 1990

David Hilbert: *Ausgewählte Kapitel der Zahlentheorie.* Sommersemester 1898. – Göttingen: [no publisher], 1990.

Hilbert 1992

David Hilbert. *Natur und mathematisches Erkennen: Vorlesungen, gehalten 1919–1920 in Göttingen.* – David Rowe [ed.]. Basel: Birkhäuser, 1992 (published version of *Hilbert 1919**).

Hilbert 2004

Michael Hallett and Ulrich Majer [eds.]: *David Hilbert's Lectures on the Foundations of Geometry, 1891–1902.* – Heidelberg: Springer, 2004.

Hilbert 2005

David Hilbert: *The Foundations of Physics. (First communication)*. Engl. transl. of *Hilbert 1915* by D. Fine. – In *Hsu and Fine 2005*, 120–131.

Hilbert 2007a

David Hilbert: *The Foundations of Physics (First Communication)*. Engl. transl. of *Hilbert 1915*. – In *Renn and Schemmel 2007b*, 1003–1015.

Hilbert 2007b

David Hilbert: *The Foundations of Physics (Second Communication).* Engl. transl. of *Hilbert 1917.* – In *Renn and Schemmel 2007b*, 1017–1038.

Hilbert and Klein 1985

David Hilbert and Felix Klein: *Der Briefwechsel David Hilbert - Felix Klein* ⟨1886-1918⟩. Mit Anmerkungen herausgegeben von Günther Frei. – Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht 1985. (Arbeiten aus der Niedersächsischen Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen; 19).

Hilbert, von Neumann and Nordheim 1928

Davd Hilbert, John von Neumann, and Lothar Nordheim: *Über die Grundlagen der Quantenmechanik.* – Mathematische Annalen 98 (1928), 1–30.

Hochschulkurse 1917

Militärverwaltung in Rumänien, Verwaltungsstab. Druck- und Büchereistelle, Bildungswesen: *Deutsche Hochschulkurse zu Bukarest. 25. November bis 8. Dezember 1917. Bericht.* – Bukarest: Staatsdruckerei Bukarest, 1917.

Hochschulkurse 1918

Militärverwaltung in Rumänien, Verwaltungsstab. Druck- und Büchereistelle, Bildungswesen: *Deutsche Hochschulkurse zu Bukarest. 2. und 3. Reihe. 25. Februar bis 27. März 1918. Bericht.* – Bukarest: Staatsdruckerei Bukarest 1918.

Hoefer 2000

Carl Hoefer: *Energy Conservation in GTR.* – Studies in History and Philosophy of Modern Physics 31 (2000), 187–199.

Holl 1996

Frank Holl: *Produktion und Distribution wissenschaftlicher Literatur—Der Physiker Max Born und sein Verleger Ferdinand Springer 1913–1970.* – Frankfurt/Main: Buchhändler-Vereinigung, 1996.

Howard and Stachel 1989

Don Howard and John Stachel [eds.]: *Einstein and the History of General Relativity.* – Boston: Birkhäuser 1989 (Einstein Studies; 1).

Hsu and Fine 2005

Jong-Ping Hsu and Dana Fine [eds.]: *100 Years of Gravity and Accelerated Frames. The Deepest Insights of Einstein and Yang-Mills.* – Singapore: World Scientific 2005 (Advanced series on theoretical physical science; 9).

Jacobi 1996

Carl Gustav Jacob Jacobi: *Vorlesungen über analytische Mechanik. Gehalten an der Universität Berlin im Wintersemester 1847/48.* – Helmut Pulte [ed.]. Braunschweig: Vieweg, 1996.

Janssen and Mecklenburg 2007

Michel Janssen and Matthew Mecklenburg: *From Classical to Relativistic Mechanics: Electromagnetic Models of the Electron.* – In *Hendricks et al. 2006*, 221–290.

Janssen et al. 2007a

Michel Janssen, John D. Norton, Jürgen Renn, Tilman Sauer, John Stachel: *The Genesis of General Relativity* (ed. J. Renn). *Volume 1: Einstein's Zurich Notebook. Introduction and Source.* – Dordrecht: Springer, 2007.

Janssen et al. 2007b

Michel Janssen, John D. Norton, Jürgen Renn, Tilman Sauer, John Stachel: *The Genesis of General Relativity* (ed. J. Renn). *Volume 2: Einstein's Zurich Notebook. Commentary and Essays.* – Dordrecht: Springer, 2007.

Jeans 1905

James Jeans: *On the laws of radiation*, – Proceedings of the Royal Society (London) 76 (1905), 545–552.

Jordan 1926a

Pascual Jordan: *Ueber eine neue Begründung der Quantenmechanik.* – Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse (1926) [submitted: 14 January 1927, printed: 1927], 161–169.

Jordan 1926b

Pascual Jordan. *Über kanonische Transformationen in der Quantenmechanik II.* – Zeitschrift für Physik 37 (1926), 383–386.

Jordan 1926c

Pascual Jordan. *Über kanonische Transformationen in der Quantenmechanik II.* – Zeitschrift für Physik 38 (1926), 513–517.

Jordan 1926d

Pascual Jordan: *Ueber eine neue Begründung der Quantenmechanik.* – Zeitschrift für Physik 40 (1926), 809–838.

Jordan 1927

Pascual Jordan: *Ueber eine neue Begründung der Quantenmechanik II*, – Zeitschrift für Physik 44 (1927), 1–25.

Jungnickel and McCormmach 1986

Christa Jungnickel and Russell McCormmach: *Intellectual Mastery of Nature. Theoretical Physics from Ohm to Einstein. Vol. 2. The Now Mighty Theoretical Physics 1870–1925.* – Chicago: The University of Chicago Press 1986.

Kangro 1970

Hans Kangro: *Vorgeschichte des Planckschen Strahlungsgesetzes. Messungen und Theorien der spektralen Energieverteilung bis zur Begründung der Quantenhypothese.* – Wiesbaden: Steiner 1970. (Boethius. Texte und Abhandlungen zur Geschichte der exakten Wissenschaften; 11).

Kant 1956

Immanuel Kant: *Kritik der reinen Vernunft.* Nach der ersten und zweiten Original-Ausgabe neu herausgegeben von Raimund Schmidt. – Hamburg: Meiner 1956.

Kelvin 1909

Lord Kelvin (William Thomson): *Vorlesungen über Molekulardynamik.* Deutsch herausgegeben von B. Weinstein. – Leipzig: Teubner, 1909.

Kirchhoff 1860

Gustav Kirchhoff: *Ueber das Verhältnis zwischen dem Emissionsvermögen und dem Absorptionsvermögen der Körper für Wärme und Licht.* – Annalen der Physik und Chemie 109 (1860), 275–301.

Kirchhoff 1862a

Gustav Kirchhoff: *Ueber das Verhältniß zwischen dem Emissionsvermögen und dem Absorptionsvermögen der Körper für Wärme und Licht.* – In *Kirchhoff 1862b*, 22–39.

Kirchhoff 1862b

Gustav Kirchhoff: *Untersuchungen über das Sonnenspectrum und die Spectren der chemischen Elemente.* – Berlin: Dümmler, 1862.

Kiritescu 1989

Constantin Kiritescu: *Istoria Razboiului pentru Intregirea României 1916–1919.* – Bucuresti: Editura Stiintifica si Enciclopedica 1989. Bd. 2.

Klein 1917

Felix Klein: *Zu Hilberts erster Note über die Grundlagen der Physik.* – Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse (1917), 469–482.

Klein 1918

Felix Klein: *Über die Differentialgesetze für die Erhaltung von Impuls und Energie in der Einsteinschen Gravitationstheorie.* – Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse (1918), 171–189.

Klein 1927

Felix Klein: *Die Grundbegriffe der Invariantentheorie und ihr Eindringen in die mathematische Physik, für den Druck bearbeitet von R. Courant und St. Cohn-Vossen.* – Berlin: Springer, 1927.

Klein 1970

Martin J. Klein: *Paul Ehrenfest. The Making of a Theoretical Physicist.* – Amsterdam: North-Holland, 1970.

Kneser 1921

Hellmuth Kneser: *Untersuchungen zur Quantentheorie.* – Mathematische Annalen 84 (1921), 277–302.

Kohl 2000

Gunter Kohl: *Relativität in der Schwebe: Die Rolle von Gustav Mie.* – Staatsexamensarbeit, Universität Mainz 2000. Max-Planck-Institut für Wissenschaftsgeschichte (Berlin), preprint 209 (2002).

Kolmogorov 1954

Andrey N. Kolmogorov: *On the conservation of conditionally periodic motion for a small change in Hamilton's function.* – Dokl. Akad. Nauk SSSR 98 (1954), 527–530 (in Russian). English translation in: Lecture Notes in Physics 93, Springer, 1979.

Korschelt et al. 1912

E. Korschelt et al. [eds.]: *Handwörterbuch der Naturwissenschaften. Sechster Band.* – Jena: Fischer, 1912.

Kox 1988

A.J. Kox: *Hendrik Antoon Lorentz, the Ether, and the General Theory of Relativity.* – Archive for History of Exact Sciences 38 (1988), 67–78.

Kox and Eisenstaedt 2005

A.J. Kox and Jean Eisenstaedt [eds.]: *The Universe of General Relativity.* – Boston: Birkhäuser, 2005 (Einstein Studies; 11).

Krafft 1915

Maximilian Krafft: *Zur Theorie der Faberschen Polynome und ihrer zugeordneten Funktionen.* – Dissertation Universität Marburg, 1915.

Kragh 1984

Helge Kragh: *Equation with the many fathers. The Klein-Gordon equation in 1926.* – American Journal of Physics 52 (1984), 1024–1033.

Kretschmann 1917

Kretschmann, Erich: *Über den physikalischen Sinn der Relativitätspostulate, A. Einsteins neue und seine ursprüngliche Relativitätstheorie.* – Annalen der Physik 53 (1917), 575–614.

Kuhn 1978

Thomas Kuhn: *Black-body theory and the quantum discontinuity.* – New York: Oxford University Press, 1978.

Lacki 2000

Jan Lacki: *The Early Axiomatizations of Quantum Mechanics: Jordan, von Neumann and the Continuation of Hilbert's Program.* – Archive for History of Exact Sciences 54 (2000), 279–318.

Lagrange 1788

Joseph Louis Lagrange: *Méchanique analitique.* – Paris: Desaint, 1788.

Laub 1910

Jakob Laub: *Über die experimentellen Grundlagen des Relativitätsprinzips.* – Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik 7 (1910), 405–463.

Laue 1911

Max Laue: *Das Relativitätsprinzip.* – Braunschweig: Vieweg 1911.

Laue 1920

Max Laue: *Theoretisches über neuere optische Beobachtungen zur Relativitätstheorie.* – Physikalische Zeitschrift 21 (1920), 659–662.

Laue 1921

Max von Laue: *Die Relativitätstheorie. Zweiter Band. Die allgemeine Relativitätstheorie und Einstein's Lehre von der Schwerkraft.* – Braunschweig: Vieweg, 1921.

Lenard 1903

Philipp Lenard: *Über die Absorption von Kathodenstrahlen verschiedener Geschwindigkeit.* – Annalen der Physik 12 (1903), 714–744.

Levi-Civita 1917

Tullio Levi-Civita: *Nozione di parallelismo in una varietà qualcunque e conseguente specificazione geometrica della curvatura Riemanniana.* – Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 42 (1917), 381–391.

Logunov, Mestvirishvili and Petrov 2004

A.A. Logunov, M.A. Mestvirishvili, and M.A. Petrov: *How were the Hilbert-Einstein equations discovered?* – Physics-Uspekhi 47 (2004), 607–621.

Lorentz 1895

Hendrik A. Lorentz: *Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern.* – Leiden: Brill, 1895.

Lorentz 1909

Hendrik A. Lorentz: *The Theory of Electrons and its Applications to the Phenomena of Light and Radiant Heat.* – Leipzig: Teubner, 1909.

Lützen 2005

Jesper Lützen: *Mechanistic Images in Geometric Form. Heinrich Hertz's Principles of Mechanics.* – Oxford: Oxford University Press, 2005.

Lyman 1914a

Theodore Lyman: *The Spectroscopy of the Extreme Ultra-Violet.* – London: Longmans, Green and Co., 1914.

Lyman 1914b

Theodore Lyman: *An Extension of the Spectrum in the Extreme-Violet.* – Physical Review 3 (1914), 504–505.

Majer 2001

Ulrich Majer: *The Axiomatic Method and the Foundation of Science: Historical Roots of Mathematical Physics in Göttingen (1900–1930).* – In *Rédei and Stöltzner 2001*, 11–33.

Majer 2002a

Ulrich Majer: *Hilbert's Program to Axiomatize Physics (in Analogy to Geometry) and its Impact on Schlick, Carnap, and other Members of the Vienna Circle.* – In *Heidelberger and Stadler 2002*, 213–224.

Majer 2002b

Ulrich Majer: *Lassen sich phänomenologische Gesetze „im Prinzip" auf mikro-physikalische Theorien reduzieren?* – In *Pauen and Stephan 2002*, 368–401.

Majer 2006

Ulrich Majer: *Hilbert's Axiomatic approach to the Foundations of Science—A Failed Research Program?* – In *Hendricks et al. 2006*, 155–183.

Majer and Sauer 2006

Ulrich Majer and Tilman Sauer: *Intuition and the Axiomatic Method in Hilbert's Foundation of Physics.* – In *Carson and Huber 2006*, 213–233.

Malament 1987

David Malament: *A note about closed timelike curves in Gödel spacetime.* – Journal of Mathematical Physics 28 (1987), 2427–2430.

Maltese and Orlando 1995

Giulio Maltese and Lucia Orlando: *The Definition of Rigidity in the Special Theory of Relativity and the Genesis of the General Theory of Relativity.* – Studies in History and Philosophy of Modern Physics 26 (1995), 263–306.

Mehra 1974

Jagdesh Mehra: *Einstein, Hilbert, and The Theory of Gravitation: Historical Origins of General Relativity.* – Dordrecht: Reidel, 1974.

Mehra and Rechenberg 1982a

Jagdish Mehra and Helmut Rechenberg: *The Historical Development of Quantum Theory.* Volume 1 (in two parts). *The Quantum Theory of Planck, Einstein, Bohr and Sommerfeld: Its Foundations and the Rise of Its Difficulties 1900–1925.* – New York: Springer, 1982.

Mehra and Rechenberg 1982b

Jagdish Mehra and Helmut Rechenberg: *The Historical Development of Quantum Theory.* Volume 2. *The Discovery of Quantum Mechanics 1925.* – New York: Springer, 1982.

Mehra and Rechenberg 1982c

Jagdish Mehra and Helmut Rechenberg: *The Historical Development of Quantum Theory.* Volume 3. *The Formulation of Matrix Mechanics and Its Modifications 1925–1926.* – New York: Springer, 1982.

Mehra and Rechenberg 1982d

Jagdish Mehra and Helmut Rechenberg: *The Historical Development of Quantum Theory.* Volume 4. Part 1. *The Fundamental Equations of Quantum Mechanics 1925–1926.* Part 2. *The Reception of the New Quantum Mechanics 1925–1926.* – New York: Springer, 1982.

Mehra and Rechenberg 1987a

Jagdish Mehra and Helmut Rechenberg: *The Historical Development of Quantum Theory.* Volume 5. *Erwin Schrödinger and the Rise of Wave Mechanics.* Part 1. *Schrödinger in Vienna and Zürich 1887–1925.* – New York: Springer, 1987.

Mehra and Rechenberg 1987b

Jagdish Mehra and Helmut Rechenberg: *The Historical Development of Quantum Theory.* Volume 5. *Erwin Schrödinger and the Rise of Wave Mechanics.* Part 2. *The Creation of Wave Mechanics: Early Response and Applications 1825–1926.* – New York: Springer, 1987.

Mehra and Rechenberg 2000

Jagdish Mehra and Helmut Rechenberg: *The Historical Development of Quantum Theory*. Volume 6. *The Completion of Quantum Mechanics 1926–1941*. Part 1. *The Probability Interpretation and the Statistical Transformation Theory, the Physical Interpretation, and the Empirical and Mathematical Foundations of Quantum Mechanics 1926–1932*. – New York: Springer, 2000.

Mehra and Rechenberg 2001

Jagdish Mehra and Helmut Rechenberg: *The Historical Development of Quantum Theory*. Volume 6. *The Completion of Quantum Mechanics 1926–1941*. Part 2. *The Conceptual Completion and the Extensions of Quantum Mechanics 1932–1941. Epilogue: Aspects of the Further Development of Quantum Theory 1942–1999*. – New York: Springer, 2001.

Meyer 1940/1941

Edgar Meyer: *Richard Bär (1892–1940)*. – Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich 86 (1940/41), 356–366.

Michelson 1881

Albert A. Michelson: *The relative motion of the Earth and the Luminiferous ether*. – American Journal of Science 22 (1881), 120–129.

Michelson 1887

Albert A. Michelson: *On the Relative Motion of the Earth and the Luminiferous Ether*. – American Journal of Science 34 (1887), 333–345.

Michelson Livingston 1973

Dorothy Michelson Livingston: *The master of light. A biography of Albert A. Michelson*. – New York: Scribner, 1973.

Mie 1912a

Gustav Mie: *Grundlagen einer Theorie der Materie. Erste Mitteilung*. – Annalen der Physik 37 (1912), 511–534.

Mie 1912b

Gustav Mie: *Grundlagen einer Theorie der Materie. Zweite Mitteilung*. – Annalen der Physik 39 (1912), 1–40.

Mie 1913

Gustav Mie: *Grundlagen einer Theorie der Materie*. – Annalen der Physik 40 (1913), 1–66.

Minkowski 1908

Hermann Minkowski: *Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern*. – Nachrichten von der Königlichen

Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse (1908), 53–111.

Minkowski 1909

Hermann Minkowski: *Raum und Zeit.* – Physikalische Zeitschrift 10 (1909), 104–111.

Moser 1962

Jürgen Moser: *On invariant curves of area preserving mappings of an annulus.* – Nachrichten der Akademie der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse (1962), 1–20.

Nernst 1906

Walther Nernst: *Über die Berechnung chemischer Gleichgewichte aus thermischen Messungen.* – Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse (1906), 1–40.

Netzhammer 1995/1996

Raymund Netzhammer: *Bischof in Rumänien. Im Spannungsfeld zwischen Staat und Vatikan.* 2 vols. – München: Verlag Südostdeutsches Kulturwerk, 1995/1996.

Neumann 1877

Carl Gustav Neumann: *Untersuchungen über das logarithmische und Newton'sche Potential.* – Leipzig: Teubner, 1877.

von Neumann 1932

Johann von Neumann: *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik.* – Berlin: Springer, 1932.

Newcomb 1895

Simon Newcomb: *The Elements of the Four Inner Planets and the Fundamental Constants of Astronomy.* – Washington: Government Printing Office, 1895.

Newton 1872

Isaac Newton: *Mathematische Prinzipien der Naturlehre.* Mit Bemerkungen und Erläuterungen herausgegeben von J. Ph. Wolfers. – Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft 1963 (Unveränderter fotomechanischer Nachdruck der Ausgabe Berlin 1872).

Noether, E. 1918

Emmy Noether: *Invariante Variationsprobleme.* – Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse (1918), 235–257.

Norton 1984

John Norton: *How Einstein Found His Field Equations.* – Historical Studies in the Physical Sciences 14 (1984), 253–316. Reprinted in *Howard and Stachel 1989*, 101–159.

Norton 1992

John Norton: *The Physical Content of General Covariance.* – In *Eisenstaedt and Kox 1992*, 281–315.

Norton 1993

John Norton: *General covariance and the foundations of general relativity: eight decades of dispute* – Reports on Progress in Physics 56 (1993), 791–858.

Pais 1982a

Abraham Pais: *'Subtle is the Lord ...' The Life and Science of Albert Einstein.* – Oxford: Oxford University Press, 1982.

Pais 1982b

Abraham Pais: *Max Born's Statistical Interpretation of Quantum Mechanics.* – Science 218 (1982), 1193–1198.

Pauen and Stephan 2002

Michael Pauen and Achim Stephan [eds.]: *Phänomenales Bewusstsein—Rückkehr zur Identitätstheorie.* Paderborn: mentis, 2002.

Pauli 1921

Wolfgang Pauli: *Relativitätstheorie.* – In *Encyclopädie 1924–22*, 539–775 (completed December 1920, issued 15 September 1921).

Pauli 1958

Wolfgang Pauli: *Theory of Relativity.* – Oxford: Pergamon, 1958 (Dover reprint 1981).

Pérez 2009

Enric Pérez: *Ehrenfest's adiabatic hypothesis and the old quantum theory, 1916–1918.* – Archive for History of Exact Sciences 63 (2009), 81–125, 127.

Picard 1893

Charles Émile Picard: *Sur l'équation aus dérivées partielles qui se présente dans la théorie de la vibration des membranes.* – Comptes Rendues Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences 117 (1893), 502–507.

Planck 1906

Max Planck: *Vorlesungen über die Theorie der Wärmestrahlung.* – Leipzig: Barth, 1906.

Poincaré 1892ff

Henri Poincaré: *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste.* – 3 vols. Paris 1892, 1893, 1899. Reprinted New York: Dover, 1957.

Poincaré 1895

Henri Poincaré: *Sur la méthode de Neumann et le problème de Dirichlet.* – Comptes Rendues Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences 120 (1895), 347–352.

Poincaré 1912

Henri Poincaré: *Sur la théorie des quanta.* – Journal de Physique Théorique et Appliquée 2 (1912), 5–34.

Pound and Rebka 1960

Robert V. Pound and Glen A. Rebka: *Apparent Weight of Photons.* – Physical Review Letters 4 (1960), 337–341.

Pringsheim 1900

Ernst Pringsheim: *Sur l'émission des gaz,* – In: Rapport présentés au congrès international de physique reuni à Paris en 1900, Guillaume, Charles and Poincaré, Lucien [eds.], Paris, 1900.

Pringsheim 1901a

Ernst Pringsheim: *Einfache Herleitung des Kirchhoff'schen Gesetzes.* – Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft 3 (1901) 77, 81–84.

Pringsheim 1901b

Ernst Pringsheim: *Über die Strahlung der Gase.* – Archiv der Mathematik und Physik 1 (1901), 289–309.

Pringsheim 1903b

Ernst Pringsheim: *Die Strahlungsgesetze.* – Zeitschrift für Elektrochemie, 9 (1903) 716-718.

Pringsheim 1903c

Ernst Pringsheim: *Herleitung des Kirchhoffschen Gesetzes.* – Zeitschrift für wissenschaftliche Photographie 1 (1903), 360-364.

Pringsheim 1904

Ernst Pringsheim: *Die Strahlungsgesetze.* – Archiv der Mathematik und Physik, 7 (1904).

Pringsheim 1913a

Ernst Pringsheim: *Bemerkungen zu der Abhandlung des Herrn Hilbert: „Begründung der elementaren Strahlungstheorie".* – Physikalische Zeitschrift 14 (1913), 589–595.

Pringsheim 1913b

Ernst Pringsheim: *Über Herrn Hilberts axiomatische Darstellung der elementaren Strahlungstheorie.* – Physikalische Zeitschrift 14 (1913), 847–850.

Rayleigh 1900

John William Strutt Rayleigh: *Remarks upon the law of complete radiation.* – Philosophical Magazine 49 (1900), 539–540.

Rayleigh 1905

John William Strutt Rayleigh: *Theory of Gases and Radiation.* – Nature 72 (1905) 54–55.

Rédei and Stöltzner 2001

Miklos Rédei and Michael Stöltzner: *John von Neumann and the Foundations of Quantum Physics.* – Dordrecht: Kluwer 2001.

Reich 1994

Karin Reich: *Die Entwicklung des Tensorkalküls.* – Basel: Birkhäuser 1994.

Reichenbach 1924

Hans Reichenbach: *Axiomatik der relativistischen Raum-Zeit-Lehre.* Braunschweig: Vieweg, 1924.

Reid 1970

Constance Reid: *Hilbert.* – Berlin: Springer, 1970.

Renn 2005

Renn, Jürgen [ed.]: *Albert Einstein - Chief Engineer of the Universe. Documents of a Life's Pathway.* – Berlin: Wiley, 2005.

Renn and Schemmel 2007a

Jürgen Renn and Matthias Schemmel [eds.]: *The Genesis of General Relativity* (ed. J. Renn). *Volume 3: Gravitation in the Twilight of Classical Physics, Between Mechanics, Field Theory, and Astronomy.* – Dordrecht: Springer 2006.

Renn and Schemmel 2007b

Jürgen Renn and Matthias Schemmel [eds.]: *The Genesis of General Relativity* (ed. J. Renn). *Volume 4: Gravitation in the Twilight of Classical Physics, The Promise of Mathematics.* – Dordrecht: Springer 2006.

Renn and Stachel 2007

Jürgen Renn and John Stachel: *Hilbert's Foundation of Physics: From a Theory of Everything to a Constituent of General Relativity.* – In *Renn and Schemmel 2007b*, 857–974.

Richarz 1903a

Franz Richarz: *Bemerkungen zur Theorie des Kirchhoffschen Gesetzes*, – Zeitschrift für wissenschaftliche Photographie 1 (1903) 5–8.

Richarz 1903b

Franz Richarz: *[Richarz, Franz: Nochmalige Bemerkung zur Theorie des Kirchhoffschen Gesetzes*, – Zeitschrift für wissenschaftliche Photographie 1 (1903), 359–360.

Riemann 1861

Bernhard Riemann: *Commentatio mathematica, qua respondere tentatur quaestioni ab Ill$^{\text{ma}}$ Academia Parisiensi propositae.* – In *Riemann 1892*, 391–423.

Riemann 1892

Bernhard Riemann: *Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass.* Hrsg. unter Mitarbeit von Richard Dedekind von Heinrich Weber. Zweite Auflage bearbeitet von Heinrich Weber. Leipzig: Teubner, 1892.

Ritz 1908

Walther Ritz: *Über ein neues Gesetz der Serienspektren (Vorläufige Mitteilung).* – Physikalische Zeitschrift 9 (1908), 521–529

Roseveare 1982

N.T. Roseveare: *Mercury's perihelion. From Le Verrier to Einstein.* – Oxford: Clarendon Press, 1982.

Rowe 1999

David Rowe: *The Göttingen Response to General Relativity and Emmy Noether's Theorems.* – In *Gray 1999*, 189–233.

Rowe 2001

David Rowe: *Einstein Meets Hilbert: At the Crossroads of Physics and Mathematics.* – Physics in Perspective 3 (2001), 379–424.

Ryckman 2005

Thomas Ryckman: *The Reign of Relativity.* – Oxford: Oxford University Press, 2005.

Sartorius von Waltershausen 1856

Wolfgang Sartorius von Walterhausen: *Gauß zum Gedächtnis.* – Leipzig: Hirzel, 1856. Reprinted Wiesbaden: Sändig, 1956.

Sauer 1999

Tilman Sauer: *The Relativity of Discovery: Hilbert's First Note on the Foundations of Physics.* – Archive for History of Exact Sciences 53 (1999), 529–575.

Sauer 2000

Tilman Sauer: *Hilberts Ruf nach Bern.* – Gesnerus 57 (2000), 182–205.

Sauer 2002

Tilman Sauer: *Hopes and Disappointments in Hilbert's Axiomatic "Foundations of Physics."* – In *Heidelberger and Stadler 2002*, 225–238.

Sauer 2005

Tilman Sauer: *Einstein Equations and Hilbert Action: What is missing on page 8 of the proofs for Hilbert's First Communication on the Foundations of Physics?* – Archive for History of Exact Sciences 59 (2005), 577–590. Reprinted in *Renn and Schemmel 2007b*, 975–988.

Sauer 2007

Tilman Sauer: *Einstein's Unified Field Theory Program.* – To appear in *The Cambridge Companion to Einstein*, Michel Janssen and Christoph Lehner [eds.]. Cambridge: Cambridge University Press, forthcoming. [http://philsci-archive.pitt.edu/archive/00003293/]

Sauer and Majer 2005

Tilman Sauer and Ulrich Majer: *Hilbert's "World Equations" and His Vision of a Unified Science.* – In *Kox and Eisenstaedt 2005*, 259–276.

Schirrmacher 2003a

Arne Schirrmacher: *Experimenting theory: The proofs of Kirchhoff's radiation law before and after Planck.* – Historical Studies in the Physical and Biological Sciences 33 (2003) 299–335.

Schirrmacher 2003b

Arne Schirrmacher: *Planting in his Neighbor's Garden: David Hilbert and Early Göttingen Quantum Physics.* – Physics in Perspective 5 (2003) 4–20.

Schlick 1917

Moritz Schlick: *Raum und Zeit in der gegenwärtigen Physik. Zur Einführung in das Verständnis der allgemeinen Relativitätstheorie.* – Berlin: Springer, 1917.

Scholz 2001

Erhard Scholz [ed.]: *Hermann Weyl's* Raum-Zeit-Materie *and a General Introduction to his Scientific Work.* – Basel: Birkhäuser, 2001.

Scholz 2004

Erhard Scholz: *C.F. Gauß's Präzisionsmessungen terrestrischer Dreiecke und seine Überlegungen zur empirischen Fundierung der Geometrie in den 1820er Jahren.* – In *Folkerts et al. 2004*, 355–380.

Schouten 1918

Jan Arnoldus Schouten: *Die direkte Analysis zur neueren Relativitätstheorie.* – Verhandelingen der Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschapen, Amsterdam. 1. Sec., Teil 12, Nr. 6, 1918.

Schwarz 1885

Karl Hermann Amandus Schwarz: *Integration der partiellen Differentialgleichung* $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + p \cdot u = 0$ *unter vorgeschriebenen Bedingungen.* – In: Festschrift zum 70. Geburtstag des Herrn Karl Weierstraß, 2. Teil, Acta societatis scientiarum Fennicae XV (1885), 315–362. Reprinted in *Schwarz 1890*, 241–269.

Schwarz 1890

Karl Hermann Amandus Schwarz: *Gesammelte Mathematische Abhandlungen.* New York: Chelsea, 1890.

Schwarzschild 1916a

Karl Schwarzschild: *Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie.* – Sitzungsberichte der Königlichen Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin (1916), 189–196.

Schwarzschild 1916b

Karl Schwarzschild: *Über das Gravitationsfeld einer Kugel aus inkompressibler Flüssigkeit nach der Einsteinschen Theorie.* – Sitzungsberichte der Könglichen Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin (1916), 424–434.

Schwarzschild 1916c

Karl Schwarzschild: *Zur Quantenhypothese.* – Sitzungsberichte der Königlichen Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin (1916), 548–568.

Sieg 1999

Wilfried Sieg: *Hilbert's Programs: 1917–1922.* – The Bulletin of Symbolic Logic 5 (1999), 1–44.

de Sitter 1913a

Willem de Sitter: *Ein astronomischer Beweis für die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit.* – Physikalische Zeitschrift 14 (1913), 429.

de Sitter 1913b

Willem de Sitter: *Über die Genauigkeit, innerhalb welcher die Unabhängigkeit von der Bewegung der Quelle behauptet werden kann.* – Physikalische Zeitschrift 14 (1913), 1267.

Slater 1929

John C. Slater: *The Theory of Complex Spectra.* – Physical Review 34 (1929), 1293–1322.

Smeenk and Martin 2007

Christopher Smeenk and Christopher Martin: *Mie's Theories of Matter and Gravitation.* – In *Renn and Schemmel 2007b*, 623–632,

Sommerfeld 1910a

Arnold Sommerfeld: *Zur Relativitätstheorie. I. Vierdimensionale Vektoralgebra.* – Annalen der Physik 32 (1910), 749–776.

Sommerfeld 1910b

Arnold Sommerfeld: *Zur Relativitätstheorie. II. Vierdimensionale Vektoranalysis.* – Annalen der Physik 33 (1910), 649–689.

Sommerfeld 1915

Arnold Sommerfeld: *Zur Theorie der Balmerschen Serie.* – Sitzungsberichte der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München. Mathematisch-physikalische Klasse (1915), 425–458.

Sommerfeld 1916

Arnold Sommerfeld: *Zur Quantentheorie der Spektrallinien.* – Annalen der Physik 51 (1916), 1–94, 125–167.

Sommerfeld 1943

Arnold Sommerfeld: *Zum Andenken an David Hilbert.* – Die Naturwissenschaften 31 (1943), 213–214.

Stachel 1980

John Stachel: *Einstein and the Rigidly Rotating Disk.* In *Held 1980*, Vol. 1, 1–15. Reprinted in *Stachel 2002*, 245–260.

Stachel 1992

John Stachel: *The Cauchy Problem in General Relativity—The Early Years.* – In *Eisenstaedt and Kox 1992*, 407–418.

Stachel 1999

John Stachel: *New Light on the Einstein-Hilbert Priority Question.* – Journal of Astrophysics and Astronomy 20 (1999), 91–101. Reprinted in *Stachel 2002*, 353–364.

Stachel 2002

John Stachel: *Einstein from 'B' to 'Z'.* – Boston: Birkhäuser, 2002.

Stachel 2007

John Stachel: *The Story of Newstein or: Is Gravity Just Another Pretty Force?* – In *Renn and Schemmel 2007b*, 1041–1078.

Straubel 1903

R. Straubel: *Über einen allgemeinen Satz der geometrischen Optik und einige Anwendungen.* – Physikalische Zeitschrift 4 (1903), 114–117.

Thiele 1997

Rüdiger Thiele: *Über die Variationsrechnung in Hilberts Werken zur Analysis.* – Zeitschrift für Geschichte der Naturwissenschaften, Technik und Medizin 5 (1997), 23–42.

Tollmien 1991

Cordula Tollmien: *Die Habilitation von Emmy Noether an der Universität Göttingen.* – NTM-Schriftenreihe Geschichte der Naturwissenschaften, Technik und Medizin (Leipzig) 21 (1991), 13–32.

Treuhaft and Lowe 1991

R.N. Treuhaft and S.T. Lowe: *A measurement of planetary relativistic deflection.* – Astronomical Journal 102 (1991), 1879–1888.

Vermeil 1917

Hermann Vermeil: *Notiz über das mittlere Krümmungsmass einer n-fach ausgedehnten Riemann'schen Mannigfaltigkeit.* – Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse (1917), 334–344.

Vermeil 1918

Hermann Vermeil: *Bestimmung einer quadratischen Differentialform aus der Riemannschen und den Christoffelschen Differentialinvarianten mit Hilfe von Normalkoordinaten.* – Mathematische Annalen 79 (1918), 289–312.

Verzeichnis 1916

Verzeichnis der Vorlesungen auf der Georg-August-Universität Göttingen während des Sommerhalbjahres 1916. – Göttingen: Dieterich'sche Universitätsdruckerei (W.Fr. Kastner), 1916.

Verzeichnis 1943

Verzeichnis der von Geheimrat David Hilbert hinterlassenen Handschriften, Bücher, Sonderdrucke, Zeitschriften, [sic]. – Georg-August-Universität Göttingen, Mathematisches Institut, Lesesaal.

Vizgin 1994

Vladimir P. Vizgin: *Unified Field Theories in the First Third of the 20th Century.* – Basel: Birkhäuser 1994.

Vizgin 2001

Vladimir Vizgin: *On the Discovery of the Gravitational Field Equations by Einstein and Hilbert: New Materials.* – Physics-Uspekhi 44 (2001), 1283–1298.

Voigt 1912

Woldemar Voigt: *Physikalische Forschung und Lehre in Deutschland während der letzten hundert Jahre. Festrede zur Jahresfeier der Universität am 5. Juni 1912.* – Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht, 1912.

Voigt and Fréedericksz 1915

Woldemar Voigt and V. Frèedericksz: *Theoretisches und Experimentelles zu der piezoelektrischen Erregung eines Kreiszylinders.* – Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse (1915), 119–147.

Walter 1999

Scott Walter: *The Non-Euclidean Style of Minkowskian Relativity.* – In *Gray 1999*, 91–127.

Weber 1893

Heinrich Weber: *Leopold Kronecker.* – Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 2 (1891–92), 5–31. Printed also in Mathematische Annalen 43 (1893).

Weierstraß 1927

Karl Weierstraß: *Vorlesungen über Variationsrechnung (Mathematische Werke, Band 7). Bearbeitet von Rudolf Rothe.* – Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft, 1927.

Weyl 1915

Hermann Weyl: *Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenschwingung eines beliebig gestalteten Körpers.* – Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 39 (1915), 1–50.

Weyl 1918

Hermann Weyl: *Raum·Zeit·Materie. Vorlesungen über allgemeine Relativitätstheorie.* – Berlin: Springer, 1918.

Weyl 1918

Hermann Weyl: *Gravitation und Elektrizität.* – Sitzungsberichte der Königlichen Preußische Akademie der Wissenschaften zu Berlin (1918), 465–480.

Weyl 1919a

Hermann Weyl: *Eine neue Erweiterung der Relativitätstheorie.* – Annalen der Physik 59 (1919), 101–133.

Weyl 1919b

Hermann Weyl: *Raum·Zeit·Materie. Vorlesungen über allgemeine Relativitätstheorie.* Dritte Auflage. – Berlin: Springer, 1919.

Weyl 1944

Hermann Weyl: *David Hilbert and his Mathematical Work.* – Bulletin of the American Mathematical Society 50 (1944), 612–654.

Whittaker 1951

Sir Edmund Whittaker: *A History of the Theories of Aether and Electricity. Volume I: The Classical Theories.* – London: Nelson 1951. Reprinted New York: Dover, 1989.

Wiechert 1894

Emil Wiechert: *Die Bedeutung des Weltäthers.* – Schriften der physikalisch-ökonomischen Gesellschaft zu Königsberg in Pr., Sitzungsberichte 35 (1894), 4–11.

Wien 1893

Wilhelm Wien: *Eine neue Beziehung der Strahlung schwarzer Körper zum zweiten Hauptsatz der Wärmetheorie.* – Sitzungsberichte der Königlichen Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin (1893) 55–62.

Wien 1901

Wilhelm Wien: *Ueber die Möglichkeit einer elektromagnetischen Begründung der Mechanik.* – Annalen der Physik 5 (1901), 501–513.

Wien 1909

Wilhelm Wien: *Theorie der Strahlung.* – In *Encyclopädie 1909–26*, 282–357.

Wightman 1976

A. Wightman: *Hilbert's Sixth Problem: Mathematical Treatment of the Axioms of Physics.* – Proceedings of Symposia in Pure Mathematics 28 (1976), 147–240.

Zenneck 1901

Jonathan Zenneck: *Gravitation.* – In *Encyclopädie 1903–21*, 25–67, (completed August 1901). English translation in *Renn and Schemmel 2007a*, 77–112.

Index