LABORATORIO 10 - Modello di regressione lineare

STATISTICA E LABORATORIO (CDL in INTERNET OF THINGS, BIG DATA, MACHINE LEARNING)

Anno Accademico 2023-2024

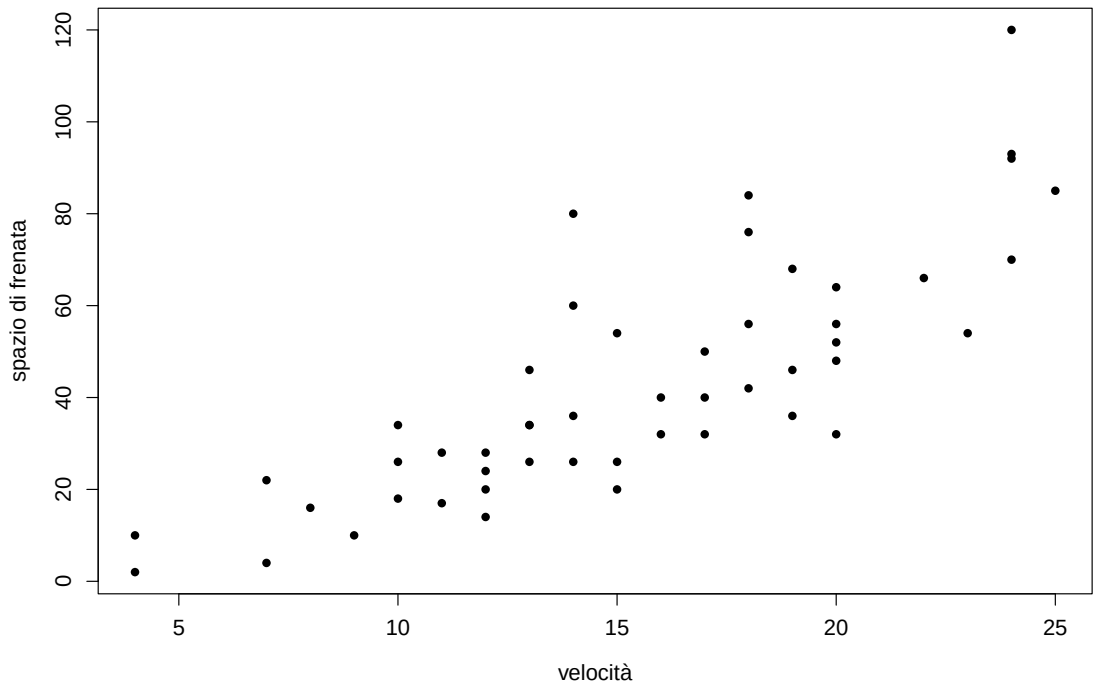
Section 1

Analisi di correlazione

Velocita'

Si considerano i dati sulla velocità X e sullo spazio di frenata Y di $n = 50$ automobili degli anni 20.

```
plot(cars$speed,cars$dist,main=" ",xlab="velocità",
     ylab="spazio di frenata",cex.axis=1.2,cex.lab=1.2,pch=16)
```



```r
ro <- cor(cars$speed,cars$dist) # coefficiente di correlazione
ro
```

```
## [1] 0.8068949
```

```r
# valore osservato per la statistica test sotto H_0
ro*sqrt(length(cars$speed)-2)/sqrt(1-ro^2)
```

```
## [1] 9.46399
```

```r
# soglia superiore: si rifiuta H_0
qt(0.01,length(cars$speed)-2,lower.tail=FALSE)
```

```
## [1] 2.406581
```

```r
# p-value
pt(ro*sqrt(length(cars$speed)-2)/sqrt(1-ro^2),length(cars$speed)-2,
   lower.tail=FALSE)
```

```
## [1] 7.449182e-13
```

```r
# in alternativa
cor.test(cars$speed,cars$dist,alternative="greater")
```

```
##
##  Pearson's product-moment correlation
##
## data:  cars$speed and cars$dist
## t = 9.464, df = 48, p-value = 7.449e-13
## alternative hypothesis: true correlation is greater than 0
## 95 percent confidence interval:
##  0.7054856 1.0000000
## sample estimates:
##       cor
## 0.8068949
```

```r
# test di correlazione utilizzando l'indice di Spearman e
# l'indice di Kendall
cor.test(cars$speed,cars$dist,
         method="spearman",alternative="greater")
```

```
## Warning in cor.test.default(cars$speed, cars$dist, method = "spea
## compute exact p-value with ties

##
##  Spearman's rank correlation rho
##
## data:  cars$speed and cars$dist
## S = 3532.8, p-value = 4.412e-14
## alternative hypothesis: true rho is greater than 0
## sample estimates:
##       rho
## 0.8303568
```

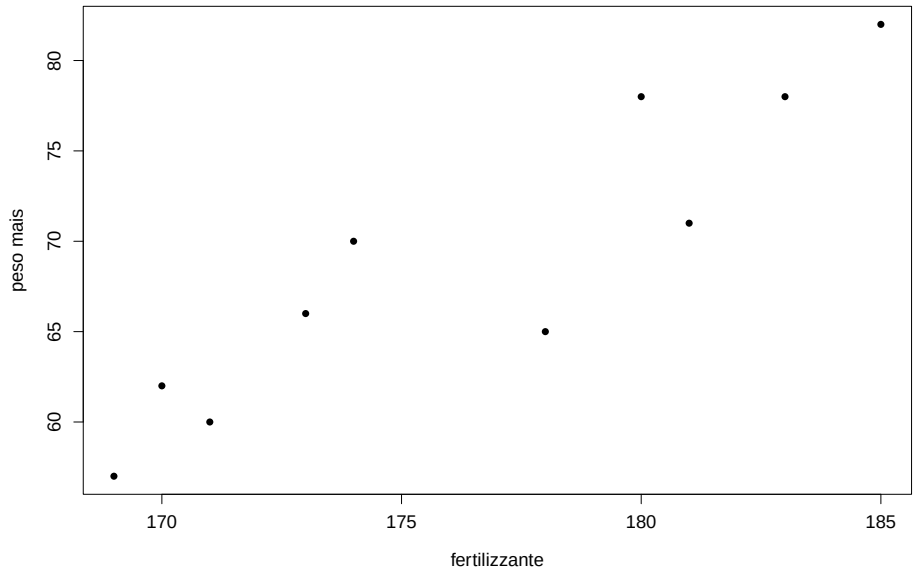
```
cor.test(cars$speed,cars$dist,
         method="kendall",alternative="greater")
```

```
##
##  Kendall's rank correlation tau
##
## data:  cars$speed and cars$dist
## z = 6.6655, p-value = 1.319e-11
## alternative hypothesis: true tau is greater than 0
## sample estimates:
##       tau
## 0.6689901
```

Mais

Si considerano i dati sulla dose di fertilizzate utilizzata x e sulla quantità di mais prodotta Y (peso della granella in Kg), con riferimento a $n = 10$ distinte parcelle sperimentali, simili per caratteristiche e della medesima dimensione.

```
x <- c(171,169,181,173,178,180,185,183,170,174)
y <- c(60,57,71,66,65,78,82,78,62,70)
plot(x,y,main=" ",xlab="fertilizzante",ylab="peso mais",
     cex.axis=1.2,cex.lab=1.2,pch=16)
```



```
mean(y)
```

```
## [1] 68.9
```

```
mean(x)
```

```
## [1] 176.4
```

```
cov(y,x)*9/10
```

```
## [1] 39.64
```

```
var(x)*9/10
```

```
## [1] 29.64
```

```
b <- cov(x,y)/var(x)
b
```

```
## [1] 1.337382
```

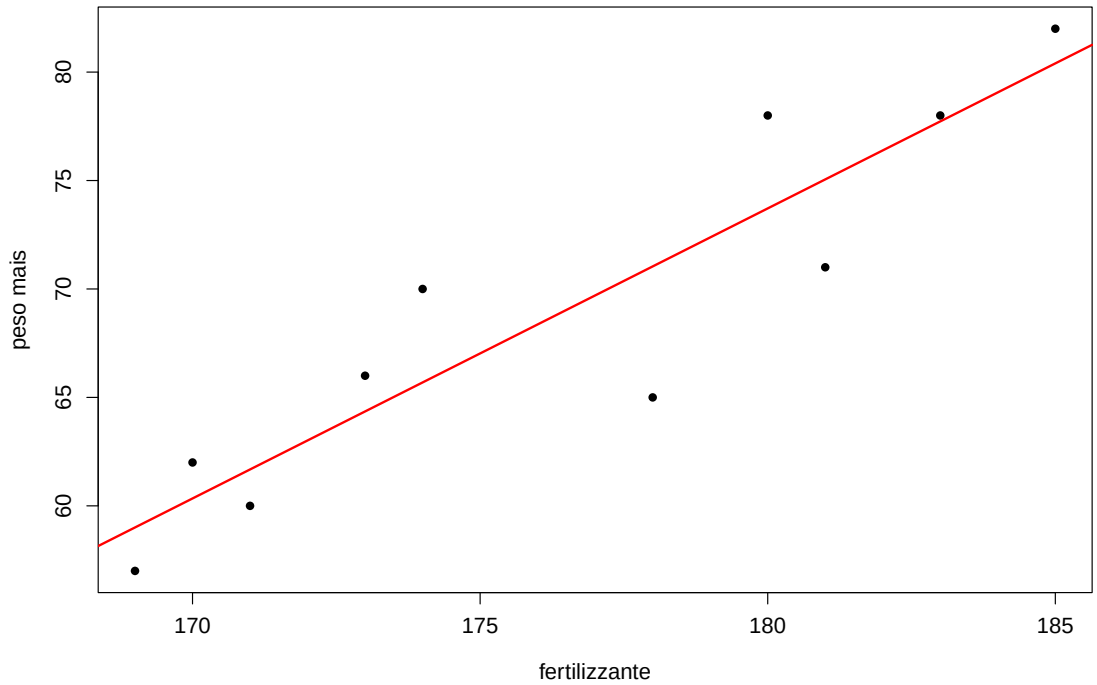
```
a <- mean(y)-b*mean(x)
a
```

```
## [1] -167.0142
```

```
# in alternativa si usa la funzione lm() che permette
# la stima di un modello lineare e fornisce un oggetto
# di classe 'lm'
lm_mais <- lm(y~x)
lm_mais$coefficients
```

```
## (Intercept)           x
## -167.014170    1.337382
```

```
plot(x,y,main=" ",xlab="fertilizzante",ylab="peso mais",
     cex.axis=1.2,cex.lab=1.2,pch=16)
# per aggiungere la retta di regressione stimata
abline(lm_mais,lwd=2,col='red')
```



```
# la funzione summary(), con argomento un oggetto di classe 'lm',
# fornisce: alcune statistiche riassuntive sui residui stimati,
# una tabella con le stime di a e b, gli associati standard error
# stimati, il valore della statistica test e del p-value per
# H_0: a=0 e H_0: b=0. Inoltre, una stima per la deviazione
# standard dei residui (residual standard error), che elevata
# al quadrato corrisponde
# alla stima per la varianza dei residui
```

```
summary(lm_mais)
```

```
##
## Call:
## lm(formula = y ~ x)
##
## Residuals:
##     Min      1Q  Median      3Q     Max
## -6.0398 -1.9221  0.9359  1.6562  4.3097
##
## Coefficients:
##             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept) -167.0142    37.0956  -4.502 0.001996 **
## x              1.3374     0.2102   6.363 0.000218 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 3.619 on 8 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.835,  Adjusted R-squared:  0.8144
## F-statistic: 40.48 on 1 and 8 DF,  p-value: 0.0002176
```

```
summary(lm_mais)$sigma^2 # stima della varianza dei residui
```

```
## [1] 13.09523
```

```
fitted.values(lm_mais) # valori stimati dal modello
```

```
##        1        2        3        4        5        6        7
## 61.67814 59.00337 75.05196 64.35290 71.03981 73.71457 80.40148 77
##        9       10
## 60.34076 65.69028
```

```
residuals(lm_mais) # residui stimati
```

```
##          1          2          3          4          5          6
## -1.6781377 -2.0033738 -4.0519568  1.6470985 -6.0398111  4.2854251
##          8          9         10
##  0.2732794  1.6592443  4.3097166
```

```r
# i residui stimati hanno media nulla
mean(residuals(lm_mais))
```

```
## [1] 5.00034e-17
```

```r
# stima della varianza dei residui
sum(residuals(lm_mais)^2)/(length(y)-2)
```

```
## [1] 13.09523
```

```
# matrice con stime, standard error, test e p-value
summary(lm_mais)$coefficients
```

```
##                 Estimate Std. Error  t value     Pr(>|t|)
## (Intercept) -167.014170 37.0956276 -4.50226 0.0019961194
## x              1.337382  0.2101926  6.36265 0.0002176421
```

```
# intervallo di confidenza per a di livello 0.95
summary(lm_mais)$coefficients[1,1]+c(qt(0.025,8),
qt(0.025,8,lower.tail=FALSE))*summary(lm_mais)$coefficients[1,2]
```

```
## [1] -252.5568  -81.4715
```

```
# intervallo di confidenza per b di livello 0.95
summary(lm_mais)$coefficients[2,1]+c(qt(0.025,8),
qt(0.025,8,lower.tail=FALSE))*summary(lm_mais)$coefficients[2,2]
```

```
## [1] 0.8526769 1.8220869
```

```
# la funzione predict(), con argomento un oggetto di classe 'lm',
# permette la stima della media della variabile risposta e il
# calcolo degli associati intervalli di confidenza. Inoltre si
# possono calcolare previsioni e intervalli di previsione
# valori stimati dal modello (senza argomenti aggiuntivi si
# considerano i valori osservati di x); stessi risultati di
# fitted.values(lm_mais)
predict(lm_mais)
```

```
##        1        2        3        4        5        6        7
## 61.67814 59.00337 75.05196 64.35290 71.03981 73.71457 80.40148 77
##        9       10
## 60.34076 65.69028
```

```r
# oltre ai valori stimati dal modello si ottengono gli estremi
# inferiore e superiore degli intervalli di confidenza (di livello
# 0.95) per la media delle Y
predict(lm_mais, interval="confidence")
```

```
##          fit      lwr      upr
## 1   61.67814 57.96136 65.39491
## 2   59.00337 54.55041 63.45633
## 3   75.05196 71.59726 78.50665
## 4   64.35290 61.24171 67.46409
## 5   71.03981 68.28935 73.79027
## 6   73.71457 70.55097 76.87818
## 7   80.40148 75.46796 85.33501
## 8   77.72672 73.57973 81.87371
## 9   60.34076 56.26808 64.41343
## 10 65.69028 62.80639 68.57418
```

```r
# definendo l'argomento newdata (che deve essere un dataframe con
# un elemento con lo stesso nome della variabile esplicativa), si
# possono ottenere previsioni per Y (che coincidono con stime
# della media di Y) riferite a nuovi valori di x, l'intervallo di
# di confidenza (di livello 0.95) per la media di Y e
# l'intervallo di previsione (di livello 0.95) per Y
xnew<-data.frame(x=c(176))
# stima della media di Y (con x=xnew) e intervallo di confidenza
# di livello 0.95
predict(lm_mais,newdata=xnew,interval="confidence")
```

```
##        fit      lwr      upr
## 1 68.36505 65.71907 71.01102
```

```r
# previsione per Y (con x=xnew) e intervallo di previsione
# di livello 0.95
predict(lm_mais,newdata=xnew,interval="prediction")
```

```
##        fit      lwr      upr
## 1 68.36505 59.61079 77.11931
```

```r
# stima della media di Y e previsione per Y coincidono ma
# l'intervallo di previsione e' piu' ampio
var(residuals(lm_mais))*9/10 # varianza residua
```

```
## [1] 10.47618
```

```r
var(y)*9/10 # varianza totale
```

```
## [1] 63.49
```

```r
1-var(residuals(lm_mais))/var(y) # indice di determinazione lineare
```

```
## [1] 0.8349948
```

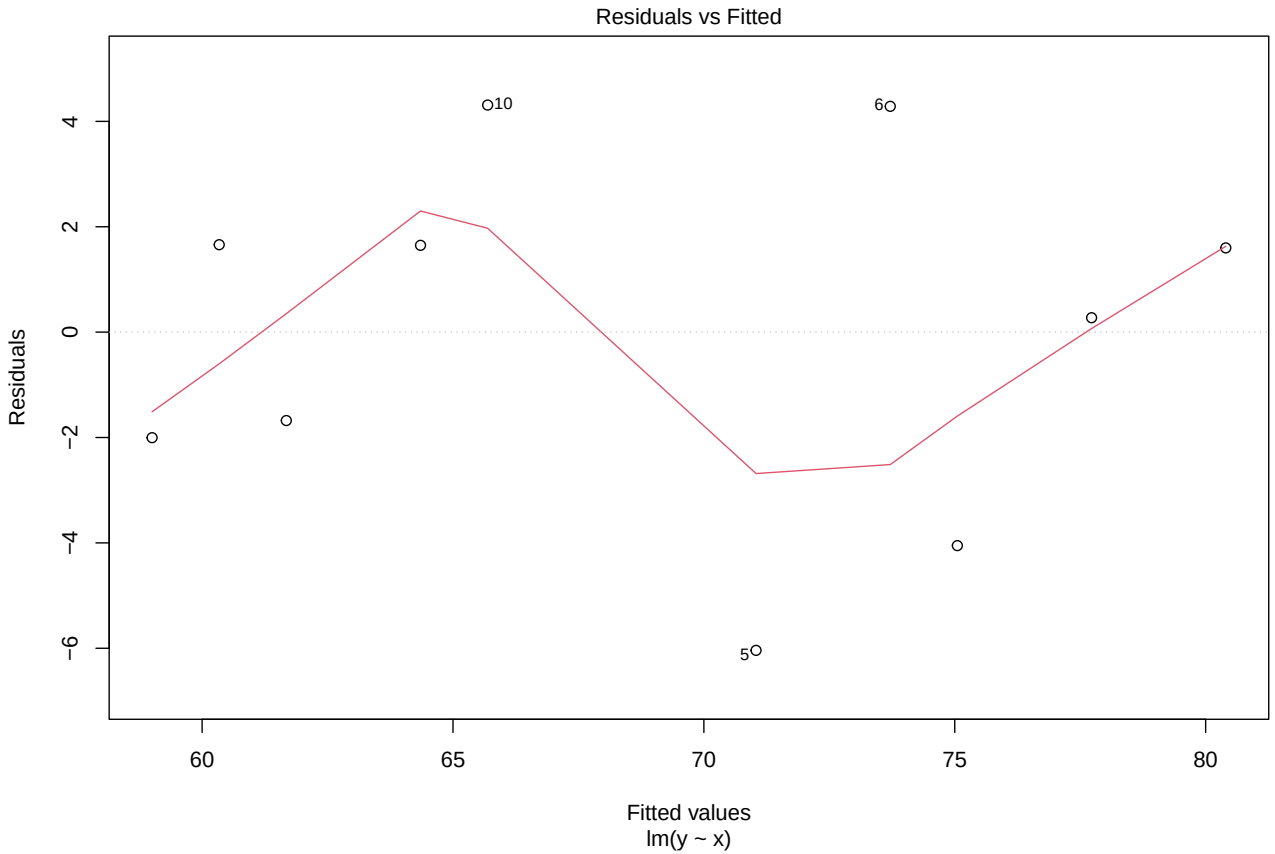
```
cor(x,y)^2 # # indice di determinazione lineare come quadrato di co
```

```
## [1] 0.8349948
```

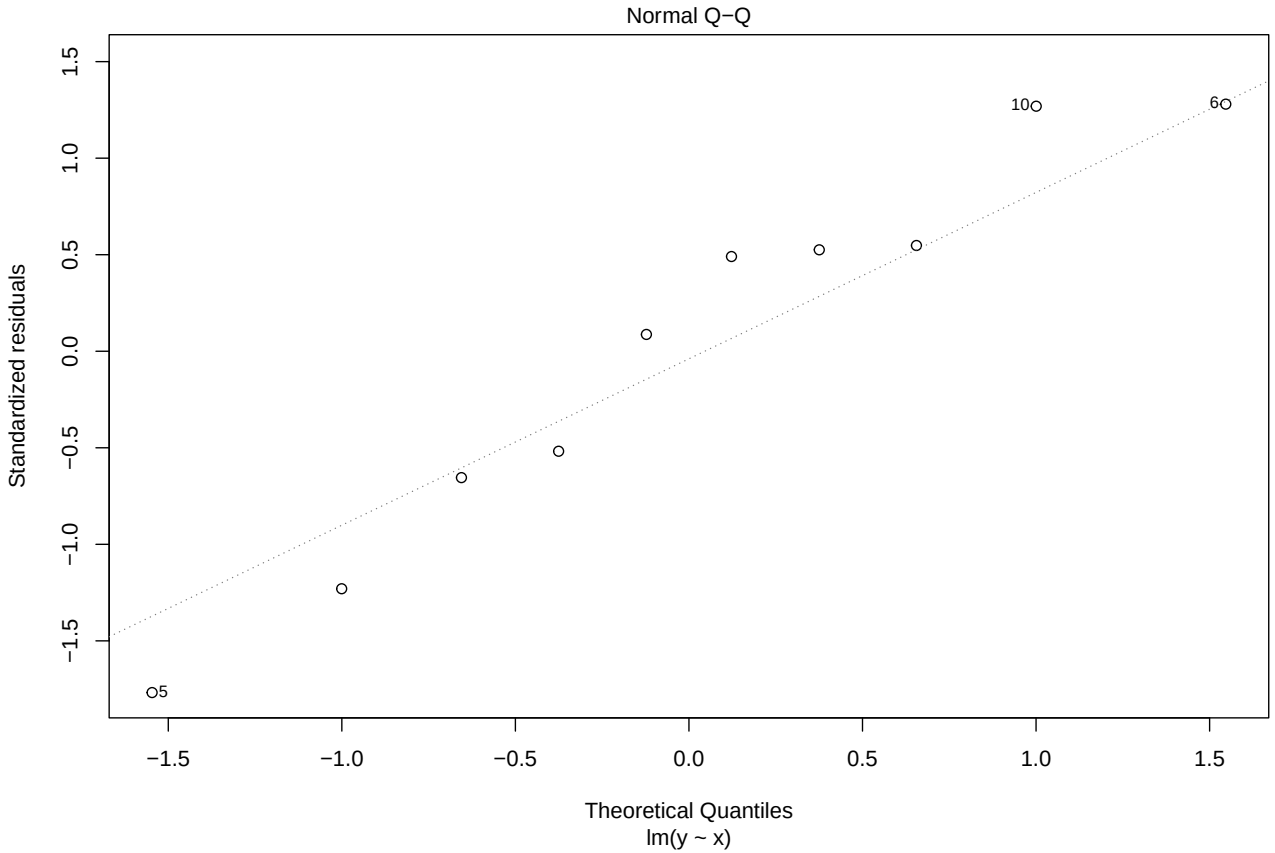
```
# alternativa
summary(lm_mais)$r.squared
```

```
## [1] 0.8349948
```

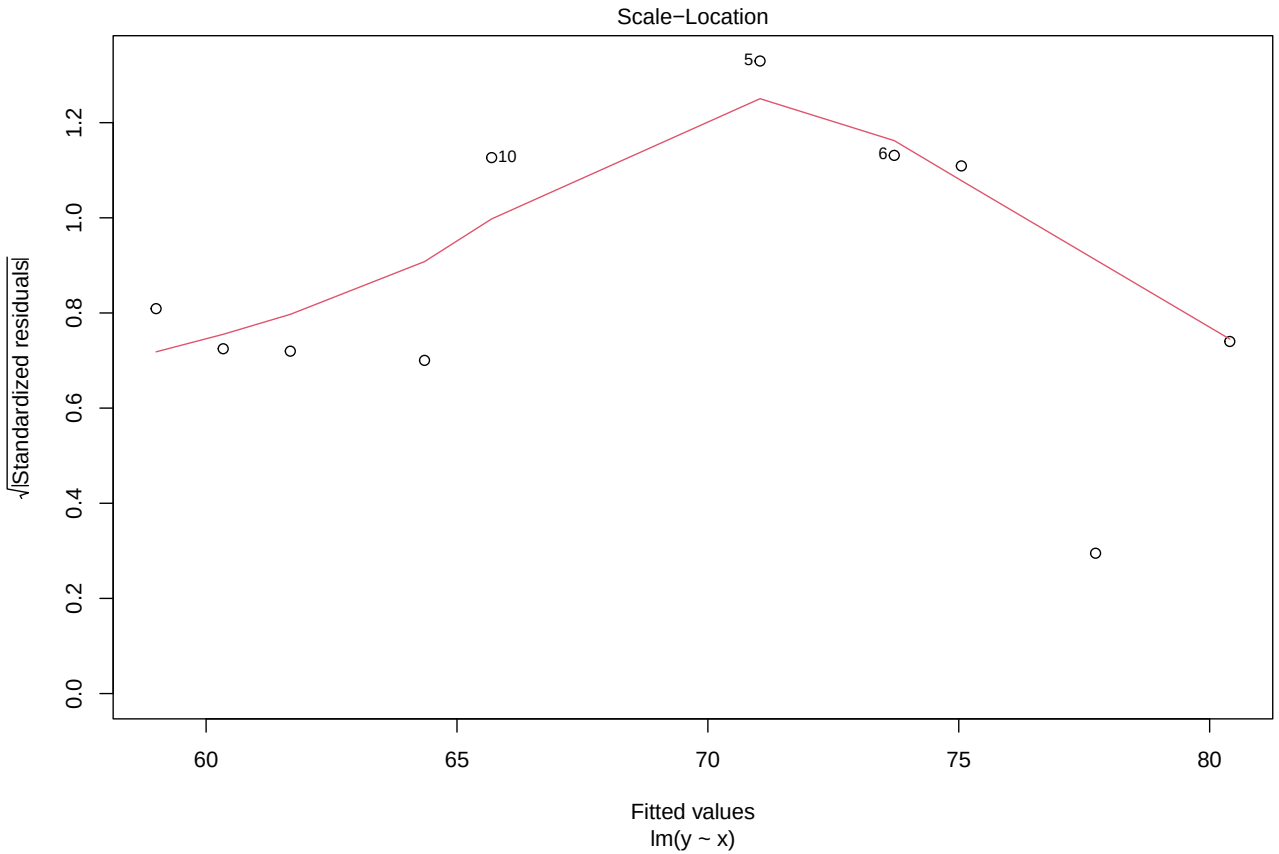
```r
# grafici per le diagnostiche
plot(lm_mais,which=1)
```



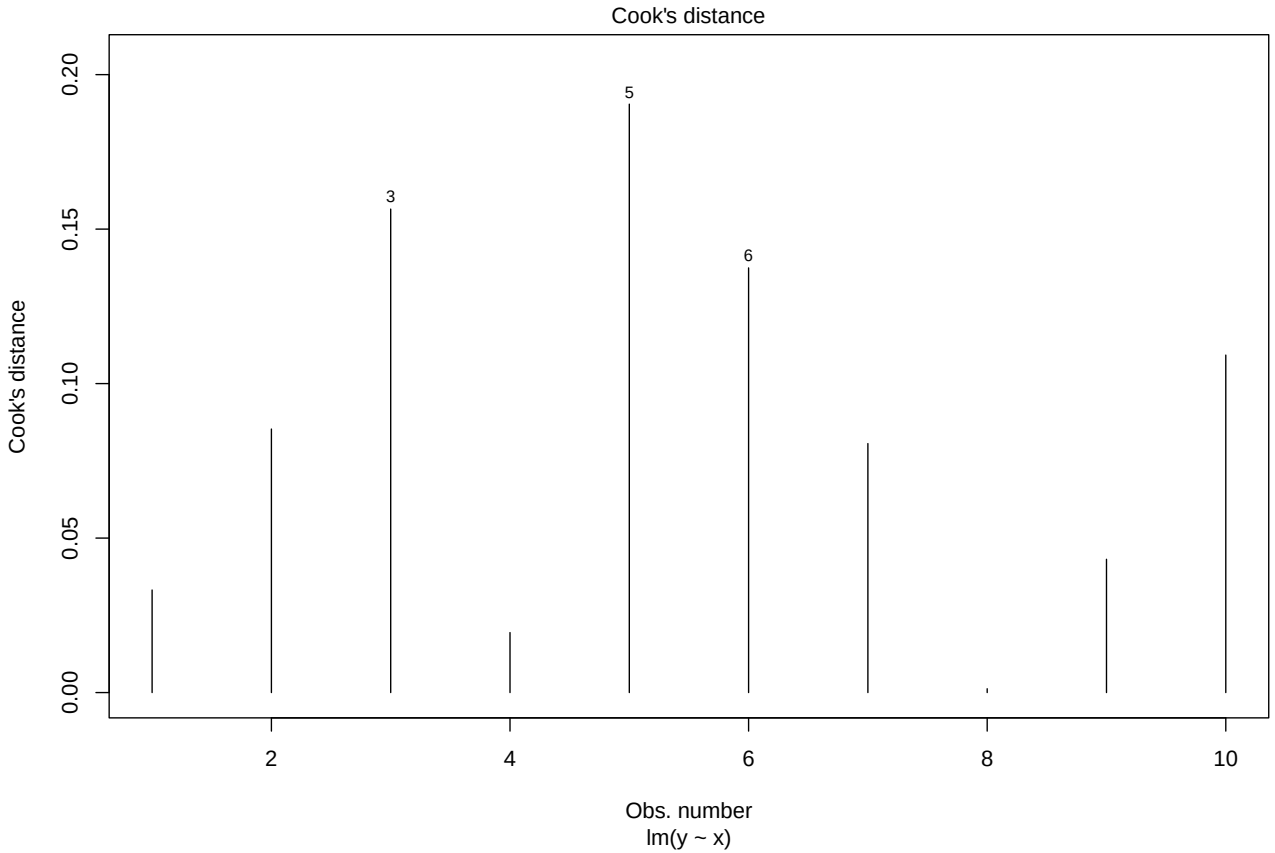
```
plot(lm_mais,which=2)
```



```
plot(lm_mais,which=3)
```



```
plot(lm_mais,which=4)
```

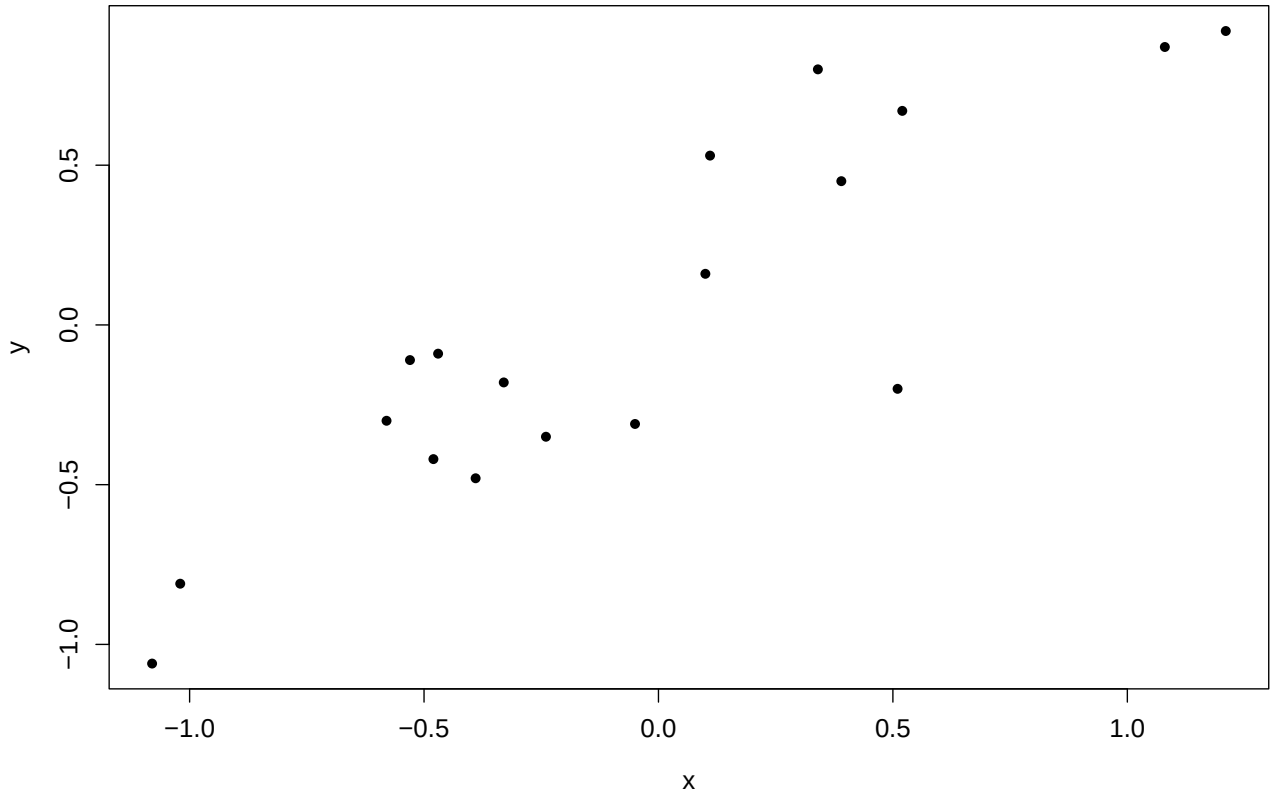


Misurazioni

Per valutare la qualità di un prodotto si può utilizzare una procedura precisa ma costosa, descritta dalla variabile casuale Y , oppure una procedura meno precisa ma anche meno costosa, descritta dalla variabile x. Si considerano le misurazioni, effettuate con entrambe le procedure, riferite a $n = 18$ prodotti.

```
x <- c(-1.08,-1.02,-0.39,-0.48,-0.58,-0.24,-0.05,-0.33,0.51,-0.53,
       -0.47,0.1,0.39,0.11,0.52,0.34,1.08,1.21)
y <- c(-1.06,-0.81,-0.48,-0.42,-0.30,-0.35,-0.31,-0.18,-0.20,
       -0.11,-0.09,0.16,0.45,0.53,0.67,0.80,0.87,0.92)
```

```
plot(x,y,lwd=2,xlab="x", ylab="y", pch=16,cex.axis=1.2,cex.lab=1.2)
```



```
mean(y)
```

```
## [1] 0.005
```

```
mean(x)
```

```
## [1] -0.05055556
```

```
cov(y,x)*17/18
```

```
## [1] 0.3121583
```

```
var(x)*17/18
```

```
## [1] 0.3889608
```

```
b <- cov(x,y)/var(x)
b
```

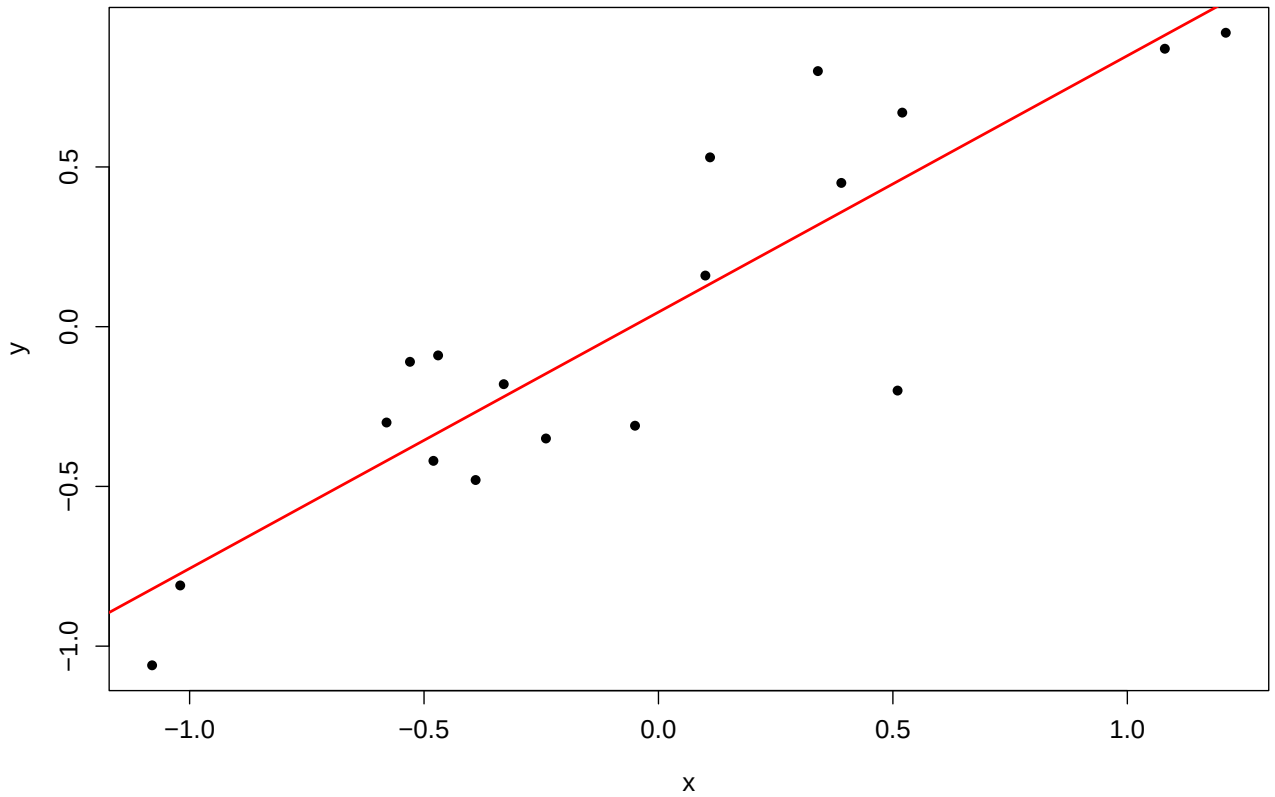
```
## [1] 0.8025445
```

```
a <- mean(y)-b*mean(x)
a
```

```
## [1] 0.04557308
```

```
lm_mis <- lm(y~x) # stima del modello lineare
```

```
plot(x,y,lwd=2,xlab="x", ylab="y", pch=16,cex.axis=1.2,cex.lab=1.2)
abline(lm_mis,lwd=2, col="red")
```



```
fitted.values(lm_mis) # valori stimati dal modello
```

```
##           1           2           3           4           5
## -0.821174926 -0.773022259 -0.267419255 -0.339648256 -0.419902701
##           7           8           9          10          11
##  0.005445858 -0.219266588  0.454870750 -0.379775478 -0.331622811
##          13          14          15          16          17
##  0.358565416  0.133852970  0.462896195  0.318438194  0.912321087
```

```
residuals(lm_mis) # residui stimati
```

```
##           1           2           3           4           5
## -0.23882507 -0.03697774 -0.21258074 -0.08035174  0.11990270 -0.20
##           7           8           9          10          11
## -0.31544586  0.03926659 -0.65487075  0.26977548  0.24162281  0.03
##          13          14          15          16          17
##  0.09143458  0.39614703  0.20710381  0.48156181 -0.04232109 -0.09
```

```
# stima della varianza dei residui
sum(residuals(lm_mis)^2)/(length(y)-2)
```

```
## [1] 0.07994207
```

```
# in alternativa
summary(lm_mis)$sigma^2
```

```
## [1] 0.07994207
```

```
# matrice con stime, standard error, test e p-value
summary(lm_mis)$coefficients
```

```
##                Estimate Std. Error   t value     Pr(>|t|)
## (Intercept) 0.04557308 0.06686112 0.6816081 5.052341e-01
## x           0.80254445 0.10685590 7.5105298 1.245564e-06
```

```
# intervallo di confidenza per a di livello 0.95
summary(lm_mis)$coefficients[1,1]+c(qt(0.025,16),
qt(0.025,16,lower.tail=FALSE))*summary(lm_mis)$coefficients[1,2]
```

```
## [1] -0.09616616  0.18731232
```

```
# intervallo di confidenza per b di livello 0.95
summary(lm_mis)$coefficients[2,1]+c(qt(0.025,16),
qt(0.025,16,lower.tail=FALSE))*summary(lm_mis)$coefficients[2,2]
```

```
## [1] 0.5760201 1.0290688
```

```
var(residuals(lm_mis))*17/18 # varianza residua
```

```
## [1] 0.07105962
```

```
var(y)*17/18 # varianza totale
```

```
## [1] 0.3215806
```

```
1-var(residuals(lm_mis))/var(y) # indice di determinazione lineare
```

```
## [1] 0.7790301
```

```
# alternativa
summary(lm_mis)$r.squared
```

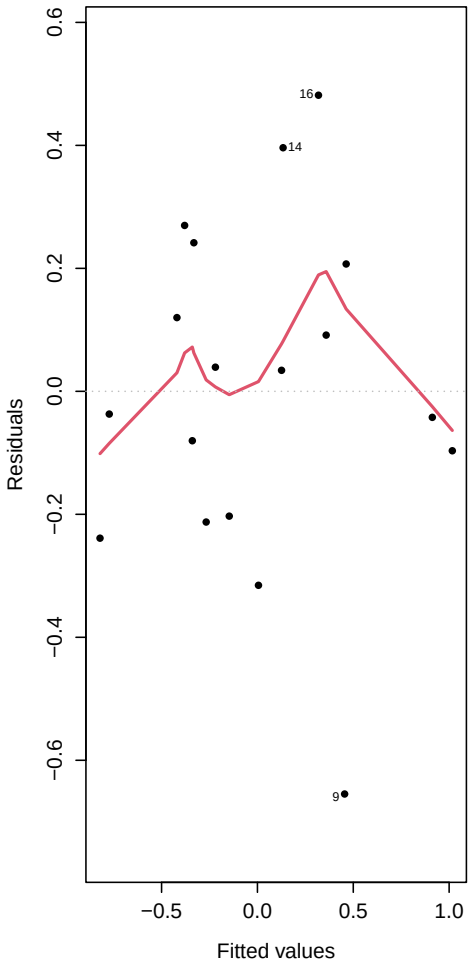
```
## [1] 0.7790301
```

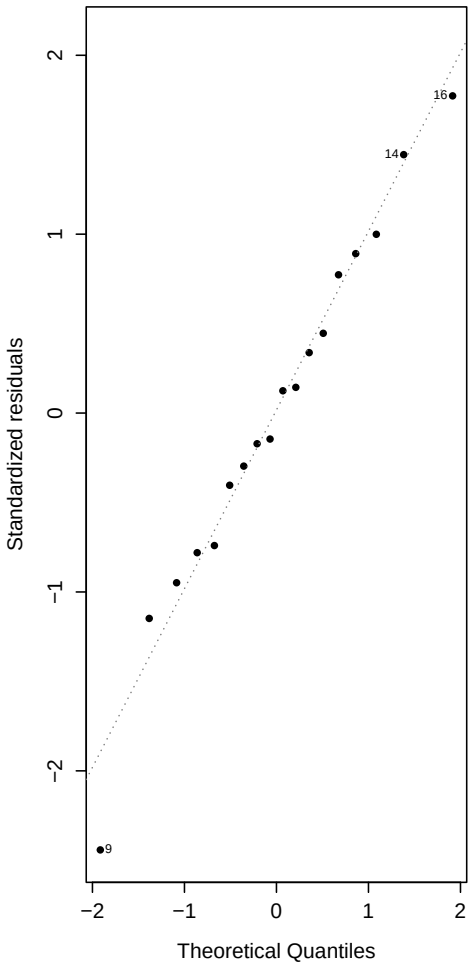
```
summary(lm_mis) # sintesi dei principali risultati
```

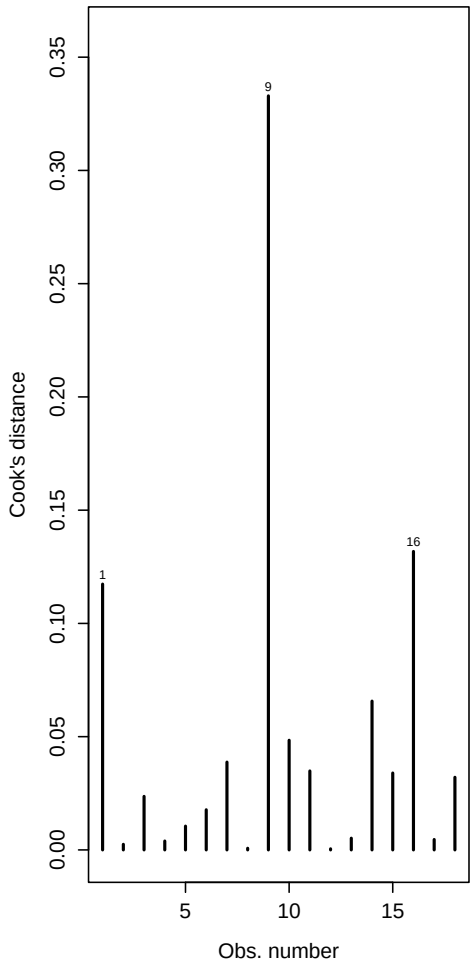
```
##
## Call:
## lm(formula = y ~ x)
##
## Residuals:
##     Min      1Q  Median      3Q     Max
## -0.6549 -0.1764 -0.0014  0.1853  0.4816
##
## Coefficients:
##             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)  0.04557    0.06686   0.682    0.505
## x            0.80254    0.10686   7.511 1.25e-06 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 0.2827 on 16 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.779,  Adjusted R-squared:  0.7652
## F-statistic: 56.41 on 1 and 16 DF,  p-value: 1.246e-06
```

```
# plot diagnostici; l'opzione "which = " individua il
# grafico che si vuole rappresentare
par(mfrow=c(1,3))
plot(lm_mis, which = 1, lwd=2, pch = 16, cex.lab=1.2,cex.axis=1.2,
     caption="")
plot(lm_mis, which = 2, lwd=2, pch = 16, cex.lab=1.2,cex.axis=1.2,
     caption="")
plot(lm_mis, which = 4, lwd=2, pch = 16, cex.lab=1.2,cex.axis=1.2,
     caption="")
```

```
par(mfrow=c(1,1))
```


Residuals
Fitted values
16
14
9
−0.5
0.0
0.5
1.0
0.6
0.4
0.2
0.0
−0.2
−0.4
−0.6


Standardized residuals
Theoretical Quantiles
16
14
9
−2
−1
0
1
2


Cook's distance
Obs. number
9
16
1
5
10
15
0.35
0.30
0.25
0.20
0.15
0.10
0.05
0.00