L3 S1 Logique
Séances 3 et 4 : Théorie des ensembles

Matteo Manighetti

20 octobre 2023

Exercices

1. Cet exercice est pris des notes du cours

   (a) Trouver des formules équivalentes à $\forall x\, x \notin \emptyset$ et à $\forall x\, \emptyset \subseteq x$ dans lesquelles ne figurent que des signes primitifs du langage $L_{\in}$.

   > **Solution :** Dans le premier cas, on rapelle que la definition de $\emptyset$ est $\forall x(\emptyset = x \leftrightarrow \forall y\, y \notin x)$. Si on remplace le symbole par une variable existentiellement quantifiée, on obtient $\exists y\, y \forall x(y = x \leftrightarrow \forall y\, y \notin x)$. On voudrait rajouter ensuite la proprieté $\forall x\, x \notin y$, mais en effet elle est déjà présente dans la formule.
   >
   > Dans le deuxième cas, on doit aussi réecrire la definition de $\subseteq$. On obtient donc $\exists x\, (\forall z\, z \notin x \wedge \forall y \forall z(z \in x \to z \in y))$.

   (b) Transcrire dans le langage L∈ les énoncés suivants :

      i. Si deux ensembles sont vides, alors ils sont identiques.

      > **Solution :** $\forall x \forall y((x = \emptyset \wedge y = \emptyset) \to x = y)$

      ii. Un ensemble est vide seulement s'il n'a aucun élément.

      > **Solution :** $\forall x(x = \emptyset \to \neg \exists y\, y \in x)$

2. Prouver assiociativité et transitivité de l'union d'ensembles :

   (a) $\forall x \forall y \forall z\, x \subseteq y \to y \subseteq z \to x \subseteq z$

   (b) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

> **Solution :**

(a) Soient x, y, z tels que $x \subseteq y$ et $y \subseteq z$. Soit a un élément de x. Par définition, $a \in x$ et $x \subseteq y$, et donc $a \in y$. De même, $a \in y$ et $y \subseteq z$, d'où $a \in z$. Donc $a \in x$ et $a \in z$. Comme a est arbitraire, on a montré que tout élément de x est un élément de z, c'est à dire $x \subseteq z$.

(b) Soient x, y, z des ensembles. On veut montrer que $x \in A \cup (B \cup C)$ si et seulement si $x \in (A \cup B) \cup C$. On montre les deux implications : $x \in A \cup (B \cup C)$ si et seulement si $x \in A$ ou $x \in B \cup C$, si et seulement si $x \in A$ ou $x \in B$ ou $x \in C$, si et seulement si $x \in A \cup B$ ou $x \in C$, si et seulement si $x \in (A \cup B) \cup C$. Comme chaque passage est une équivalence logique, on a montré l'énoncé initial.

3. Construir l'ensemble des parties de l'ensemble suivant : $\{1, 2, \{3, 4, \{5\}\}\}$.

Solution :
$\{\emptyset, \{1, 2, \{3, 4, \{5\}\}\}, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, \{3, 4, \{5\}\}\}, \{2\}, \{2, \{3, 4, \{5\}\}\}, \{\{3, 4, \{5\}\}\}\}$

4. Prouver que $\mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F) = \mathcal{P}(E \cap F)$

Solution : Soit x un ensemble. En utilisant l'axiome d'extensionalité, on peut obtenir l'énoncé si on montre que $x \in \mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$ si et seulement si $x \in \mathcal{P}(E \cap F)$. On montre les deux implication : $x \in \mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$ si et seulement si $x \subseteq E$ et $x \subseteq F$, si et seulement si $x \subseteq E$ et $x \subseteq F$

5. Soient A, B des ensembles tels que $A \subseteq E$ et $B \subseteq E$.

(a) Donner une propriété $\mathcal{P}$ telle que $\{x \in E \,|\mathcal{P}\,(x)\} = A \cup B$.

Solution : $x \in A \vee x \in B$

(b) De même pour $A \cap \overline{B}^E$.

Solution : $x \in A \wedge x \notin B$

(c) De même pour $\overline{A}^E \cup \overline{B}^E$.

Solution : $x \notin A \vee x \notin B$

(d) De même pour $\overline{A}^E \cup B$

Solution : $x \notin A \lor x \in B$. Equiv. $x \in A \to x \in B$

6. Soit E un ensemble et X, Y, Z des sous-ensembles de E. Vérifier que

   (a) $X \setminus (X \cap Y) = X \setminus Y$
   (b) $(X \cup Y) \setminus Z = (X \setminus Z) \cup (Y \setminus Z)$
   (c) $(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$
   (d) $(X \setminus Y) \cap Z = (X \cap Z) \setminus Y$

Solution :

(a) En utilisant l'axiome d'extensionalité, on veut montrer que tout element de $X \setminus (X \cap Y)$ est un element de $X \setminus Y$ et vice versa. Soit donc x un élément de $X \setminus (X \cap Y)$. Par définition, $x \in X$ et $x \notin X \cap Y$, c'est à dire $x \in X$ et en même temps $x \notin X$ ou $x \in Y$. Cela est équivalent à $x \in X$ et $x \notin Y$, c'est à dire $x \in X \setminus Y$. Comme chaque passage est une équivalence logique, on a montré en même temps l'enoncé initial et le vice versa.

(b) On fait le même raisonnement que pour la question précédente. Soit x un élément de $(X \cup Y) \setminus Z$. Par définition, $x \in X \cup Y$ et $x \notin Z$, c'est à dire $x \in X$ ou $x \in Y$ et $x \notin Z$. Cela est équivalent à $x \in X$ et $x \notin Z$ ou $x \in Y$ et $x \notin Z$, c'est à dire $x \in X \setminus Z$ ou $x \in Y \setminus Z$. Donc $x \in (X \setminus Z) \cup (Y \setminus Z)$.