L3 S1 Logique
Épreuve 1 : Langages formels et théorie des ensembles

Matteo Manighetti

23 octobre 2023

Exercices

1. (2 points) Traduire les frases suivantes dans le calcul des prédicats, en spécifiant le langage utilisé.
   (a) Les sages se taisent.
   (b) Les philosophes lisent, mais ce ne sont pas les seuls.
   (c) Seuls les sages sont heureux et les envieux ne sont pas sages.
   (d) Tout le monde qui possède un chat l'aime.

2. (4 points) Pour chaque formule, indiquer : i) si c'est une négation, une conjonction, une disjonction, une implication, une formule universelle ou une formule existentielle ; ii) la portée des quantificateurs ; iii) les variables libres
   (a) $\exists x(Axy \wedge Bx)$
   (b) $\exists x Axy \wedge Bx$
   (c) $\exists x(\exists y Axy \to Bx)$
   (d) $\neg\exists x\exists y Axy \to Bx$
   (e) $\neg Bx \to (\neg\forall y(\neg Axy \vee Bx) \to Cy)$
   (f) $\exists x(\exists y Axy \vee By)$
   (g) $\forall x\forall y((Axy \wedge By) \to \exists w Cxw)$
   (h) $\forall x\forall y Ayy \to Bx$

3. (2 points) Pour chaque formule φ, écrire $\varphi[c/x]$. Pour rappel, la substitution d'un terme à une variable revient à remplacer les occurrences libres de la variable par ce terme.
   (a) Axy
   (b) $\forall x Bxx$
   (c) $\exists x\exists y Axy \to Bx$
   (d) $\forall x\forall y Ayy \to Bx$

4. (4 points) Soient $A = \{1, 2, 5, \emptyset\}$ et $B = \{5, 7, 1\}$. Écrire les ensembles suivants :
   (a) $A \cup B$
   (b) $A \cap B$
   (c) $\mathcal{P}(A)$
   (d) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$
5. (4 points) Prouver que deux ensembles x et y sont égaux si chacun est sous-ensemble de l'autre : $x = y$ ssi $x \subseteq y \wedge y \subseteq x$
6. (4 points) Démontrer que $A \cap B \subseteq A \cup B$, et expliquer pourquoi l'inclusion réciproque est fausse.
7. (4 points (bonus)) On remplace l'axiome de l'ensemble vide par un axiome qui nous assure l'existence d'un ensemble non vide.

   En utilisant les autres axiomes de la théorie des ensembles, prouver l'existence de l'ensemble vide.

Question :	1	2	3	4	5	6	7	Total
Points :	2	4	2	4	4	4	0	20
Résultat :								