Fasores

April 29, 2014

1 Fasores

Contenido

1.1 Introducción

Un fasor es una representación de una oscilación a través de un número complejo. En física e ingeniería,un vector de fase o fasor, es una representación de una función sinusoidal con una amplitud (A), frecuencia (ω), fase (θ) y es invariente en el tiempo.

Segun la identidad de Euler se tiene

$$A \cdot \cos(\omega t + \theta) = A \cdot \frac{e^{i(\omega t+\theta)} + e^{-i(\omega t+\theta)}}{,} \tag{1}$$

seleccionando únicamente la parte real

$$A \cdot \cos(\omega t + \theta) = \mathrm{Re}\left\{A \cdot e^{i(\omega t+\theta)}\right\} \tag{2}$$
$$= \mathrm{Re}\left\{Ae^{i\theta} \cdot e^{i\omega t}\right\}. \tag{3}$$

El termino fasor se puede referir a $Ae^{i\theta}e^{i\omega t}$ o simplemente a la constante compleja, $Ae^{i\theta}$. Es importante notar que

$$\cos(\omega t) = \sin(\omega t + 90^{\mathrm{o}}) = \mathrm{Re}\left\{Ae^{i\theta+\frac{\pi}{2}} \cdot e^{i\omega t}\right\},$$

por lo que se puede afirmar que $A\cos(\omega t+\theta)$ puede representar a cualquier señal oscilatoria periodica simple.

1.2 Derivación e Integración del fasor

La derivada en tiempo de un fasor es

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\left\{\frac{d}{dt}(Ae^{i\theta} \cdot e^{i\omega t})\right\} &= \mathrm{Re}\{Ae^{i\theta} \cdot i\omega e^{i\omega t}\} \\
&= \mathrm{Re}\{Ae^{i\theta} \cdot e^{i\pi/2}\omega e^{i\omega t}\} \\
&= \mathrm{Re}\{\omega Ae^{i(\theta+\pi/2)} \cdot e^{i\omega t}\} \\
&= \omega A \cdot \cos(\omega t + \theta + \pi/2)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, en la representación fasorial la derivación en tiempo de una señal senoidal es soloamente multiplar el fasor por la constante,

$$i\omega = (e^{i\pi/2} \cdot \omega). \tag{4}$$

De forma similar, **integrar en tiempo** un fasor corresponde a la multiplicación por la constante

$$\frac{1}{i\omega} = \frac{e^{-i\pi/2}}{\omega}. \tag{5}$$

El factor dependiendte del tiempo, $e^{i\omega t}$, no es afectado.

1.3 Serie de Fourier

Una serie de Fourier es una *serie infinita* que converge puntualmente a una función periódica y continua a trozos (o por partes) Si $f(t)$ es una función (o señal) periódica y su período es T, la serie de Fourier asociada a $f(t)$ es:

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{2n\pi}{T} t + b_n \sin \frac{2n\pi}{T} t \right] \tag{6}$$

Donde a_0, a_n y b_n son los coeficientes de Fourier que toman los valores:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int\limits_{-T/2}^{T/2} f(t) dt, \qquad a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos\left(\frac{2n\pi}{T} t\right) dt, \qquad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin\left(\frac{2n\pi}{T} t\right) dt.$$

En ocasiones es más útil conocer la amplitud y la fase en términos cosinusoidales en lugar de amplitudes cosinusoidales y sinusoidal. Otra forma de expresar la compleja forma de la serie de Fourier es:

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\omega_n t - \theta_n) \tag{7}$$

donde

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{a_0}{2} \\ A_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\ \theta_n &= \tan^{-1} \frac{b_n}{a_n} \end{aligned}$$

Por la identidad de Euler, las fórmulas de arriba pueden expresarse también en su forma compleja:

$$f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{2\pi i \frac{n}{T} t}. \tag{8}$$

Los coeficientes ahora serían:

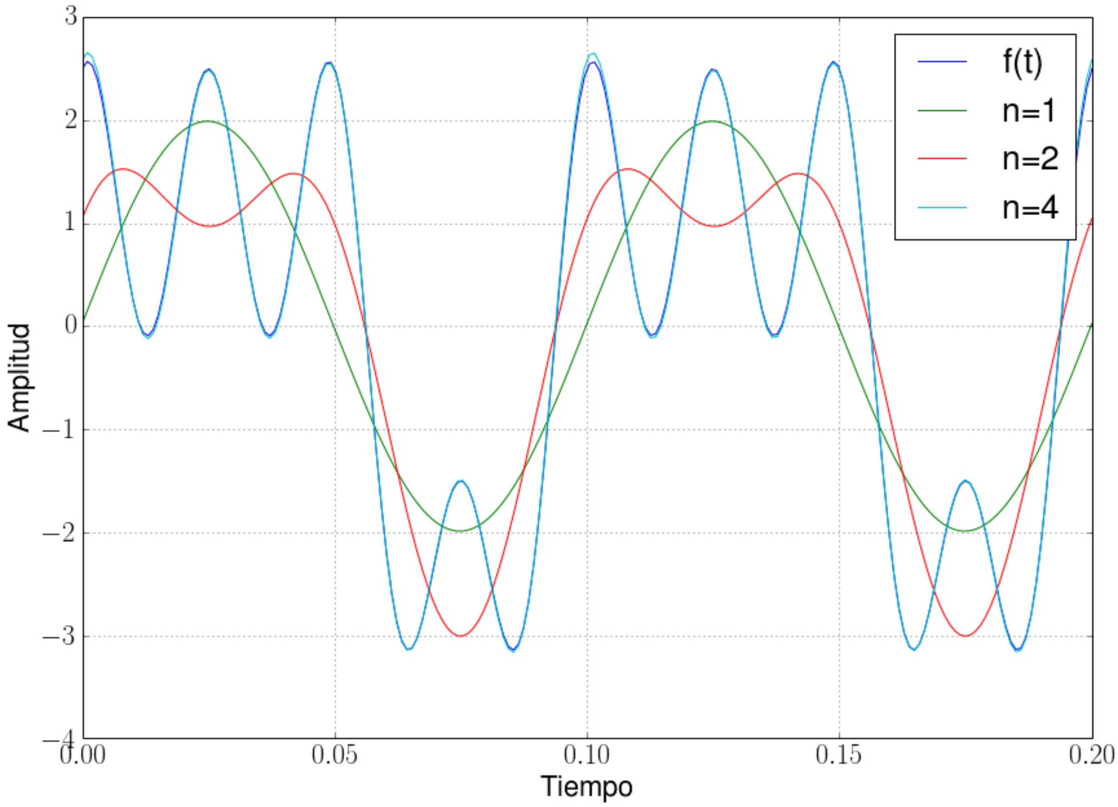
$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-2\pi i \frac{n}{T} t} \, dt.$$

1.3.1 Ejemplo

Considere

$$f(t) = \cos(2\pi 20t) + 2\sin(2\pi 10t) + 1.5\cos(2\pi 40t)$$

$$C_n = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{i=N-1} y(i) e^{-2\pi i \frac{nt}{T}}.$$



2 Analisis de circuitos con fasores

Consider el circuito que se muestra en la siguiente figura

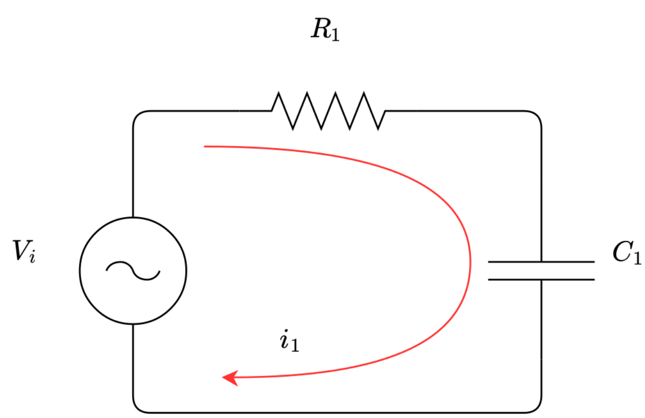


Figure 1: Circuito RC serie

utilizando las leyes de krichof se tiene que

$$i_R = i_C$$

utilizando las ley de ohm y las propiedades del capcitor de tiene

$$\frac{V_i(t) - V_C(t)}{R} = C\frac{dV_C(t)}{dt}$$

despejando se tiene

$$C\frac{dV_C(t)}{dt} + \frac{V_C(t)}{R} = \frac{V_i(t)}{R} \tag{9}$$

Considerando $V_i(t)$ como

$$V_i(t) = V_P \cdot \cos(\omega t + \theta),$$

si se considera su representación en fasores

$$\begin{aligned} V_i(t) &= \mathrm{Re}\{V_i \cdot e^{i\omega t}\} \\ V_C(t) &= \mathrm{Re}\{V_c \cdot e^{i\omega t}\} \end{aligned}$$

donde el fasor $V_i = V_P e^{i\theta}$, y el fasor V_c es desconocido y es la variable a encontrar. En notación fasorial la expresión (9) es

$$i\omega V_c + \frac{1}{RC}V_c = \frac{1}{RC}V_i$$

Resolviendo para el fasor de V_C se tiene

$$V_c = \frac{1}{1 + i\omega RC} \cdot (V_i) = \frac{1 - i\omega RC}{1 + (\omega RC)^2} \cdot (V_P e^{i\theta})$$

El factor que multiplica al fasor V_i representa la diferencia en amplitud y fase de $V_C(t)$ respecto a $V_i(t)$. Sin embargo, la representación de dicho factor en la expresión anterior resulta complicada de resolver como fasor, por lo que si se considera su representación polar se tiene

$$\frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \cdot e^{-i\phi(\omega)}$$

donde

$$\phi(\omega) = \arctan(\omega RC).$$

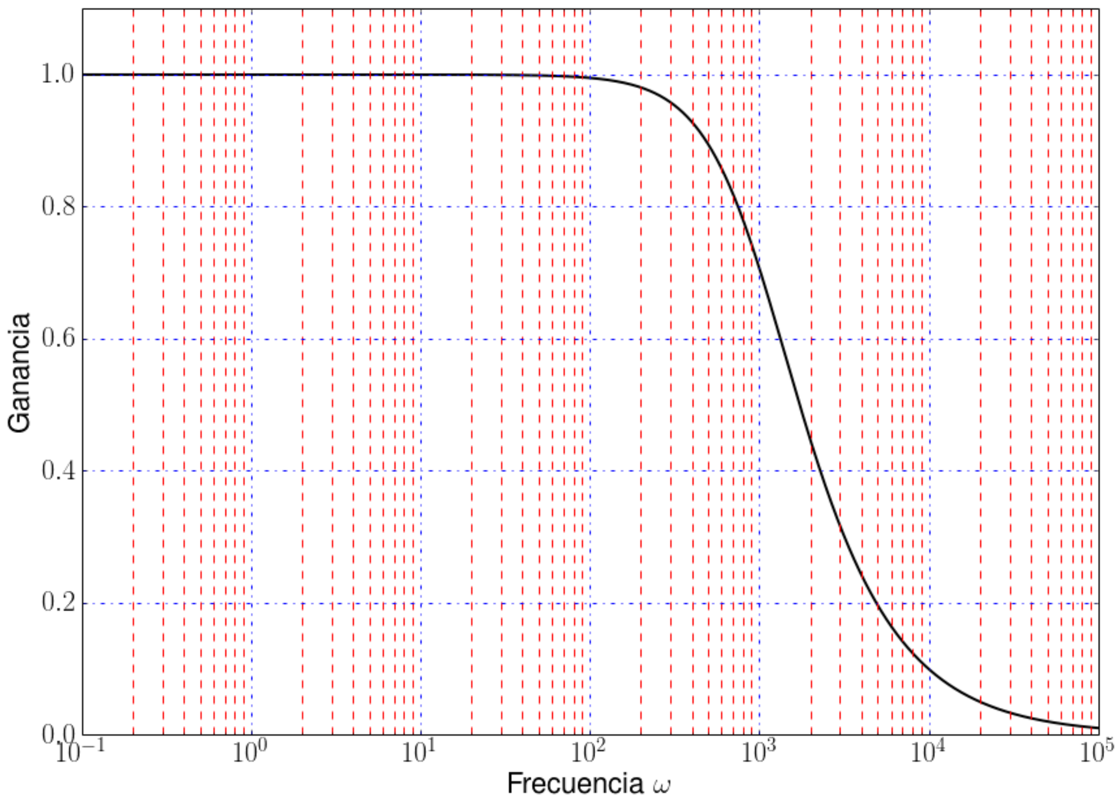
Considerando las expresiones anteriores se tiene

$$V_C(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \cdot V_P \cos(\omega t + \theta - \phi(\omega)) \tag{10}$$

Considerando la ganancia del sitema definida como la razón entre la señal de salida y la señal de entrada, en el circuito RC se tiene que la ganacia es

$$\frac{V_C}{V_i} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \cdot e^{-i\phi(\omega)} \tag{11}$$

de la expresión anterior se tiene que la ganacia nos indica que $V_C = V_i$ cuando $\omega = 0$, y teoricamente $V_C = 0$ cuando $\omega = \infty$



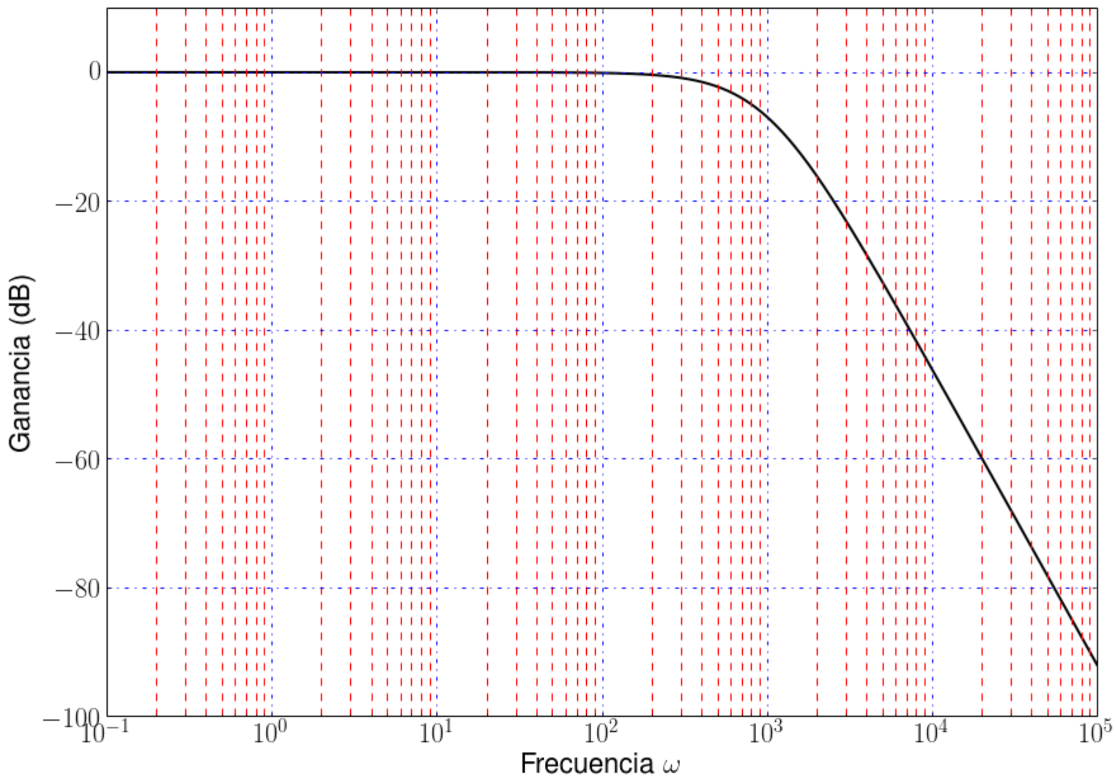
2.1 Decibel

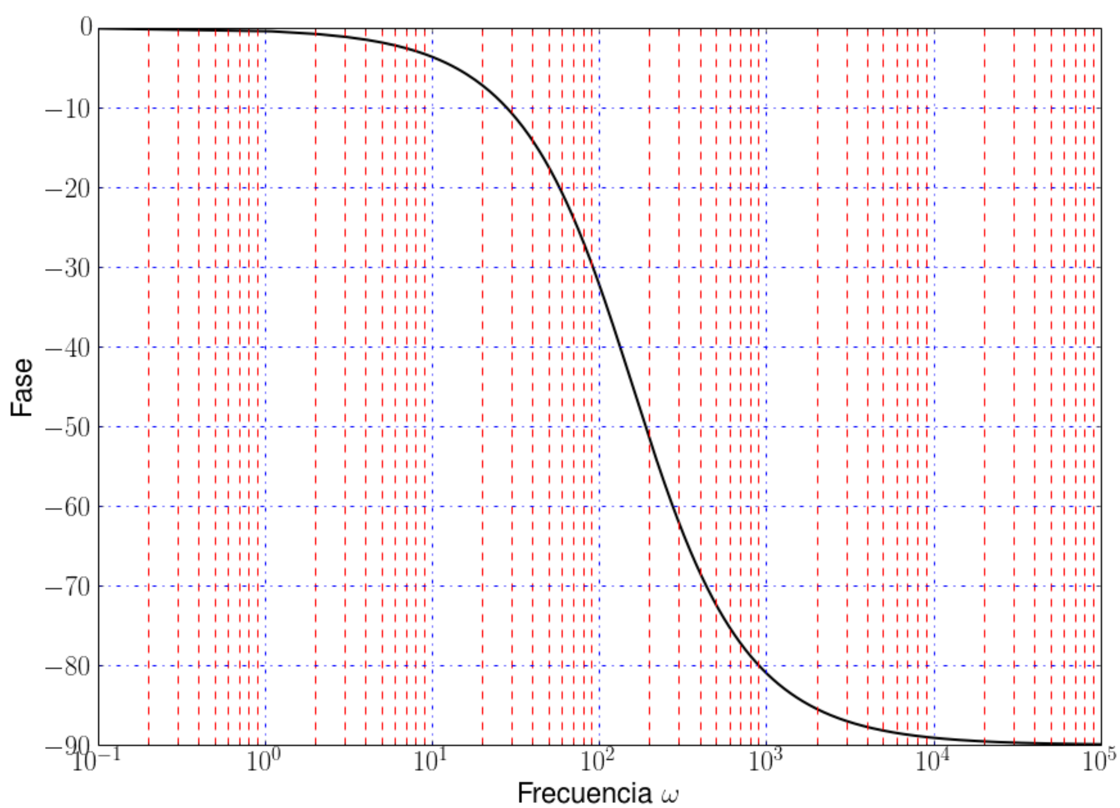
El decibelio (dB) es una unidad logarítmica utilizada para expresar la relación entre dos valores de una cantidad física, a menudo potencia o intensidad. Una de estas cantidades es a menudo el valor de referencia, y en este caso el decibelio se puede utilizar para expresar el nivel absoluto de la cantidad física. El decibel también se utiliza comúnmente como una medida de la ganancia o de atenuación, la relación de entrada y salida de potencias de un sistema, o de factores individuales que contribuyen a este tipo de coeficientes.

$$L_{\mathrm{dB}} = 10 \log_{10} \left(\frac{P_1}{P_0} \right)$$

En circuitos eléctricos, la potencia disipada es normalmente proporcional al cuadrado del voltaje o corriente cuando la impedancia se mantiene constante. Tomando el voltaje como un ejemplo, esto conduce a la ecuación:

$$G_{\mathrm{dB}} = 20 \log_{10} \left(\frac{V_o}{V_i} \right)$$


Ganancia (dB)
0
−20
−40
−60
−80
−100
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}
10^{4}
10^{5}
Frecuencia ω


Fase
0
−10
−20
−30
−40
−50
−60
−70
−80
−90
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}
10^{4}
10^{5}
Frecuencia ω

Pagina escrita en Ipython por *Manuel Moisés Miranda Velasco*