Filtros

April 29, 2014

1 Filtro

Un filtro eléctrico o filtro electrónico es un elemento que discrimina una determinada frecuencia o gama de frecuencias de una señal eléctrica que pasa a través de él, pudiendo modificar tanto su amplitud como su fase

Con independencia de la realización concreta del filtro, salvo que debe ser lineal, (analógico, digital o mecánico) su forma de comportarse se describe por su función de transferencia. Ésta determina la forma en que la señal aplicada cambia en amplitud y en fase, para cada frecuencia, al atravesar el filtro. La función de transferencia elegida tipifica el filtro.

1.1 Antecedentes

En está sección se dan algunas definiciones necesarias para el manejo de filtros.

1.1.1 Función de transferencía

Una función de transferencia es un modelo matemático que a través de un cociente relaciona la respuesta de un sistema (modelada) a una señal de entrada o excitación (también modelada). En la teoría de control, a menudo se usan las funciones de transferencia para caracterizar las relaciones de entrada y salida de componentes o de sistemas que se describen mediante ecuaciones diferenciales lineales e invariantes en el tiempo.

La función de trasferencia de un *sistema lineal e invariante en el tiempo (LTI)*, se define como el cociente entre la *transformada de Laplace* de la salida y la *transformada de Laplace* de la entrada, bajo la suposición de que las condiciones iniciales son nulas. De forma general se representa por la expresión:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \tag{1}$$

donde $H(s)$ es la función de transferencia (también notada como $G(s)$); $Y(s)$ es la transformada de Laplace de la respuesta y $X(s)$ es la transformada de Laplace de la señal de entrada.

La función de transferencia también puede considerarse como la respuesta de un sistema inicialmente inerte a un impulso como señal de entrada:

$$H(s) = \mathcal{L}\left\{h(t)\right\} = \int_0^{\infty} e^{-st} h(t)\, dt \tag{2}$$

Es importante señalar que un impulso de entrada normalmente se representa con la función *Delta de Dirac*, está señal ideal permite modelar un sistema ya que su *Transformada de Fourier* incluye infinitos componentes de frecuencia. Por lo que, se dice que un impulso a la entrada de un sistema permite obtener la respuesta del sistema a todas las frecuencias. Sin embargo, un impulso no es **Realizable en la practica** porque implicaría tener un sistema que puede producir todas las frecuencias en instante con duración 0, lo cual implicaria un sistema con infinita energía.

1.1.2 Diagrama de Bode

Un Diagrama de Bode es una representación gráfica que sirve para caracterizar la respuesta en frecuencia de un sistema. Normalmente consta de dos gráficas separadas, una que corresponde con la magnitud de dicha función y otra que corresponde con la fase. Recibe su nombre del científico senegalés que lo desarrolló, Hendrik Wade Bode.

Es una herramienta muy utilizada en el análisis de circuitos en electrónica, siendo fundamental para el diseño y análisis de filtros y amplificadores. De forma analitica, el diagrama de bode se obitene de la función de transferencia, la cual es una función compleja ya que $s = \sigma + j\omega$.

El diagrama de magnitud de Bode dibuja el módulo de la función de transferencia (ganancia) en decibelios en función de la frecuencia (o la frecuencia angular) en escala logarítmica. Se suele emplear en procesado de señal para mostrar la respuesta en frecuencia de un sistema lineal e invariante en el tiempo.

El diagrama de fase de Bode representa la fase de la función de transferencia en función de la frecuencia (o frecuencia angular) en escala logarítmica. Se puede dar en grados o en radianes. Permite evaluar el desplazamiento en fase de una señal a la salida del sistema respecto a la entrada para una frecuencia determinada. En sistemas eléctricos esta fase deberá estar acotada entre -90° y 90°.

El diagrama de bode permite de forma rapida análisar el comportamiento de un sistema ante entradas con difrentes frecuencias. Por ejemplo, tenemos una señal $A\sin(\omega t)$ a la entrada del sistema y asumimos que el sistema atenúa por un factor x y desplaza en fase $-\theta$. En este caso, la salida del sistema será $(A/x)\sin(\omega t - \theta)$. Generalmente, este desfase es función de la frecuencia y representa un retraso en tiempo, lo cual indica que el tiempo que toma a una señal de entrada x verse reflejada en la salida y depende de la frecuencia de la señal de entrada; esta dependencia es lo que nos muestra el Bode.

Transformada de Laplace La transformada de Laplace de una función $f(t)$ definida (en ecuaciones diferenciales, o en análisis matemático o en análisis funcional) para todos los números positivos $t \geq 0$, es la función $F(s)$, definida por:

$$F(s) = \mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt.$$

siempre y cuando la integral esté definida. ##Tipos de Filtros

1.1.3 Filtro paso bajo

Un filtro paso bajo corresponde a un filtro caracterizado por permitir el paso de las frecuencias más bajas y atenuar las frecuencias más altas. El filtro requiere de dos terminales de entrada y dos de salida, de una caja negra, también denominada cuadripolo o bipuerto, así todas las frecuencias se pueden presentar a la entrada, pero a la salida solo estarán presentes las que permita pasar el filtro. De la teoría se obtiene que los filtros están caracterizados por sus funciones de transferencia, así cualquier configuración de elementos activos o pasivos que consigan cierta función de transferencia serán considerados un filtro de cierto tipo.

En particular la función de transferencia de un filtro pasa bajo de primer orden corresponde a

$$H(s) = k\frac{1}{1 + \frac{s}{\omega_c}} \tag{3}$$

donde la constante k es sólo una ponderación correspondiente a la ganancia del filtro. En la función de transferencia anterior ω_c corresponde a la frecuencia de corte propia del filtro, aquel valor de frecuencia para el cual la amplitud de la señal de entrada se atenúa 3 dB.

Una tecnica de análisis es proponer funciónes de transferencia prototipo donde $\omega_c = 1$ y $K = 1$, aplicandolo a (3), se tiene que la función prototipo para un filtro paso bajo de primer orden es:

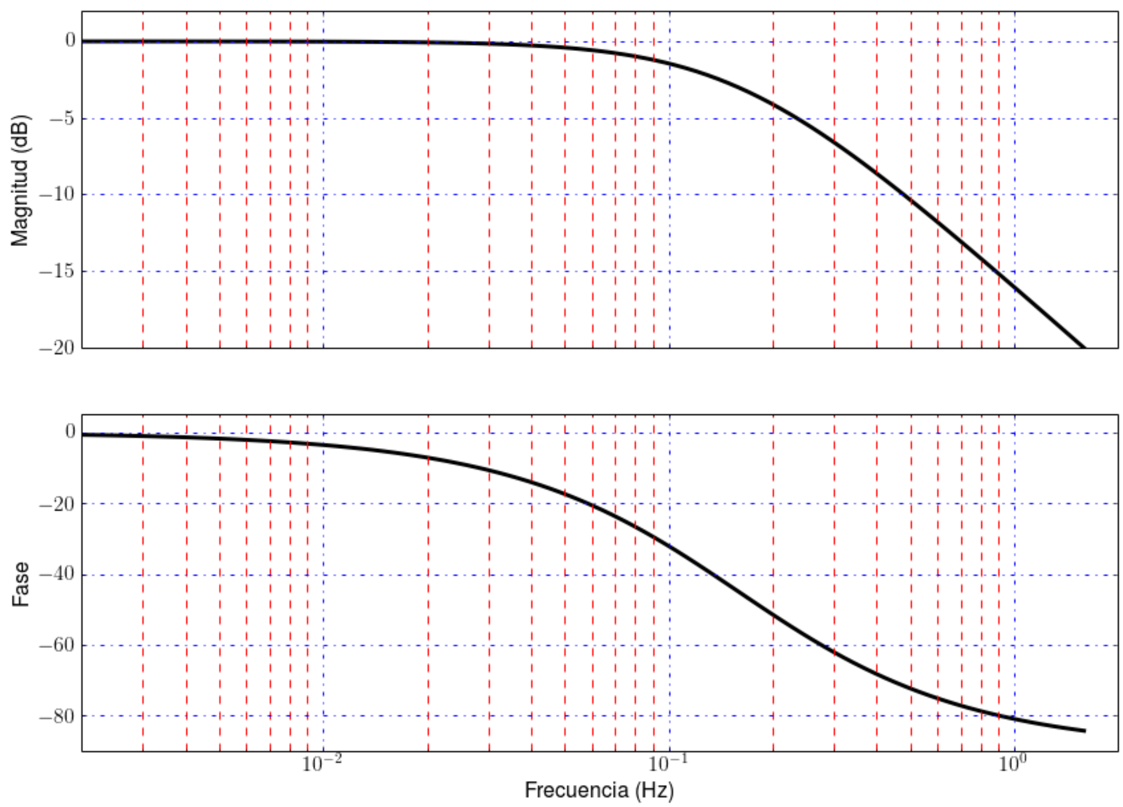
$$H(s) = \frac{1}{s+1} \tag{4}$$

luego posteriormente se rescala el filtro considerando una nueva variable

$$p = \frac{s}{a}$$

donde s es la variable de Laplace de la función prototipo, a es el parámetro de rescalamiento y p es la variable de Laplace de la función del filtro reescalado.

$$H(p) = G(P)|_{p=s/a} = G(s/a)$$



De forma análoga al caso de primer orden, los filtros de pasa bajo de mayor orden también se caracterízan por su función de transferencia, por ejemplo la función de transferencia de un filtro paso bajo de segundo orden corresponde a

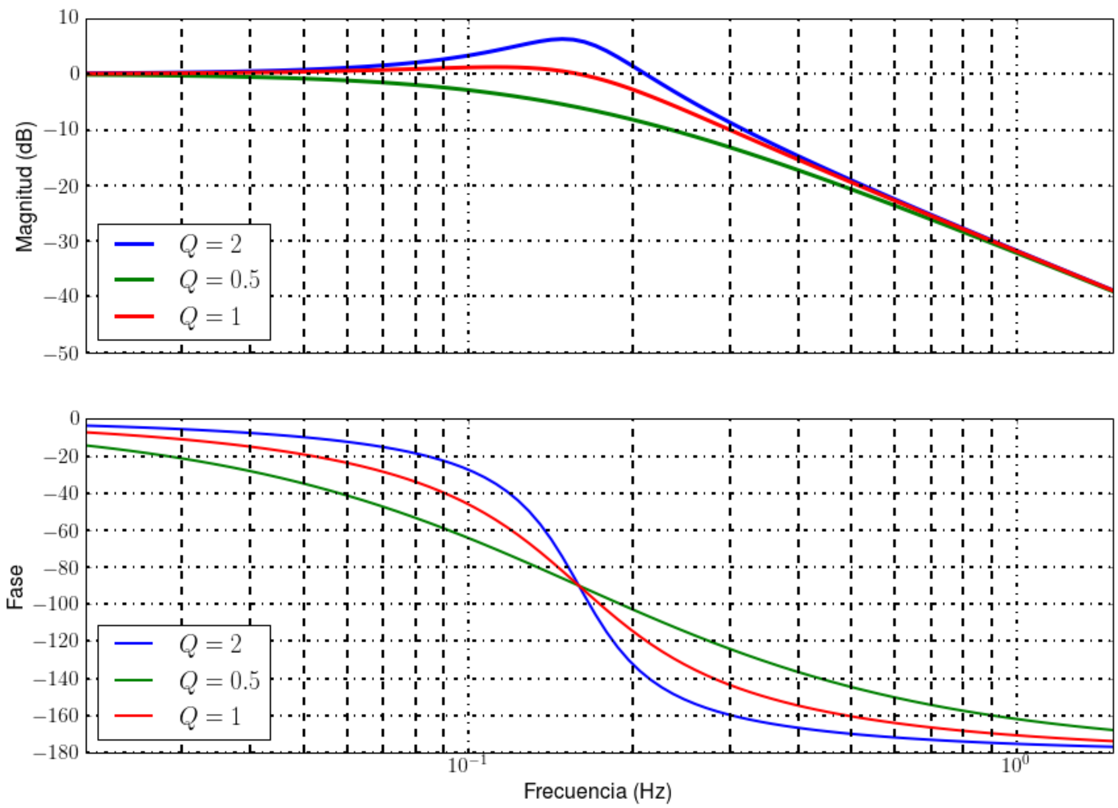
$$H(s) = K\frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2} \tag{5}$$

donde ω_0 es la frecuencia natural de resonancia (en radianes), α es la atenuación del sistema y se relación con el coefciente de amortiguamiento ξ y el factor de calidad Q a través de la expresión:

$$2\alpha = 2\omega_o\xi = \frac{\omega_o}{Q} \tag{6}$$

Es importante recordar que un para obtener un filtro Butterworth máximamente planar se requiere que $Q = 1/\sqrt{2}$. El factor de calidad Q es un parámetro que mide la relación entre la energía reactiva que almacena y la energía que disipa durante un ciclo completo de la señal. Un alto factor Q indica una tasa baja de pérdida de energía en relación a la energía almacenada por el resonador.

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + \frac{1}{Q}s + 1} \tag{7}$$



1.1.4 Filtro Paso Alto

Un filtro paso alto (HPF) es un tipo de filtro electrónico en cuya respuesta en frecuencia se atenúan las componentes de baja frecuencia pero no las de alta frecuencia, éstas incluso pueden amplificarse en los filtros activos. La alta o baja frecuencia es un término relativo que dependerá del diseño y de la aplicación.

1.2 Filtros de segundo orden

1.2.1 Filtro Sallem-Key

La estructura general del filtro salem-key se muestra en la figura Considerando que el OPAM es ideal, entonces se tiene que:

$$V_- = V_+ \quad = V_{out} \tag{8}$$
$$i_- = i_+ \quad = 0 \tag{9}$$

Si cosideramos la ley de krichoff de Nodos y la ley de Ohm en el nodo de V_x se tiene que:

$$\frac{v_{\text{in}} - v_x}{Z_1} = \frac{v_x - v_{\text{out}}}{Z_3} + \frac{v_x - v_-}{Z_2} \tag{10}$$

Mientras que en el nodo V_+ si se considera (8), se tiene que:

$$\frac{v_x - v_{\text{out}}}{Z_2} = \frac{v_{\text{out}}}{Z_4}, \tag{11}$$

despejando V_x

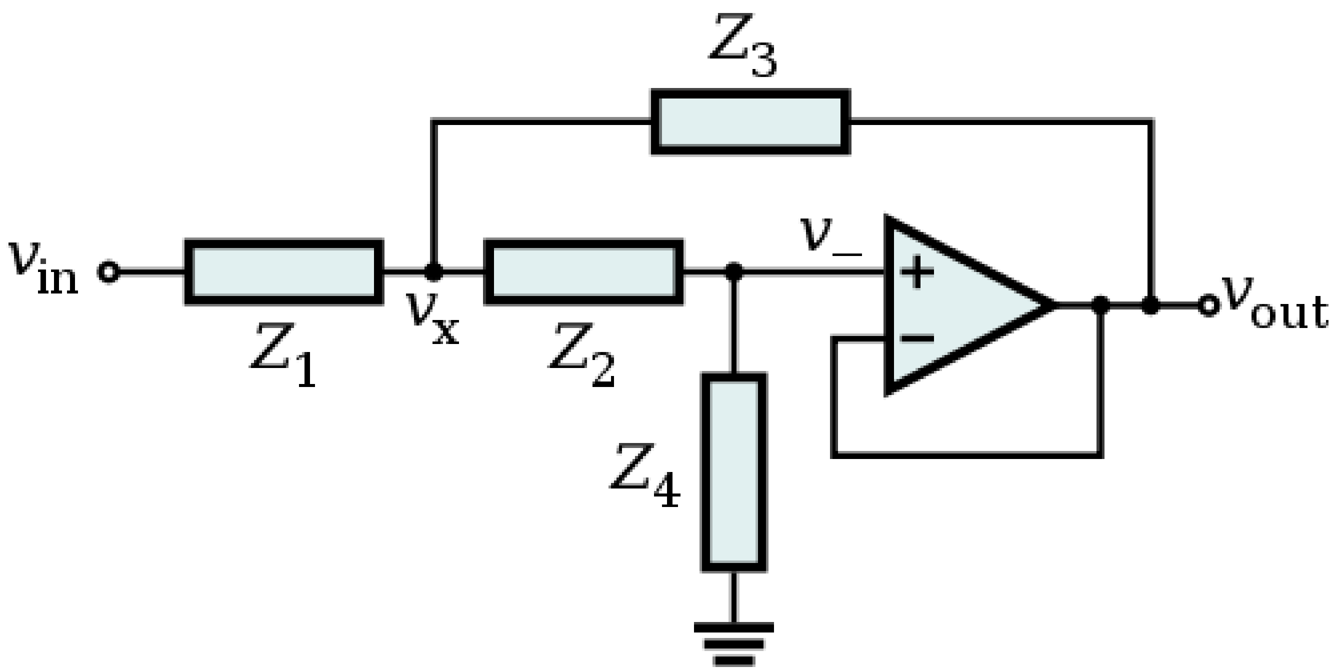


Figure 1: Sallem-Key

$$v_x = v_{\text{out}} \left(\frac{Z_2}{Z_4} + 1 \right). \tag{12}$$

Si consideramos las expresiones (8), (10) y (12) se tiene que la función de transferencia

$$\frac{v_{\text{out}}}{v_{\text{in}}} = \frac{Z_3 Z_4}{Z_1 Z_2 + Z_3(Z_1 + Z_2) + Z_3 Z_4} \tag{13}$$

1.2.2 Filtro pasabajas

En el caso de la celda de Sallem-Key para construir un filtro paso bajas es necesario que:

$$Z_1 = R_1, \quad Z_2 = R_2, \quad Z_3 = \frac{1}{sC_1}, \quad \text{y} \quad Z_4 = \frac{1}{sC_2}.$$

por lo que la función de transferencia (13) queda expresada como:

```
\frac{1}{C_{1} C_{2} R_{1} R_{2} s^{2} + C_{2} s \left(R_{1} + R_{2}\right) + 1}
```

$$\frac{1}{C_1 C_2 R_1 R_2 s^2 + sC_2 \left(R_1 + R_2\right) + 1} \tag{14}$$

de la expresión (14) tenemos que:

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{C_1 C_2 R_1 R_2}} \tag{15}$$

y

$$Q = \frac{\omega_0}{2\alpha} = \frac{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}{C_2 \left(R_1 + R_2\right)} \tag{16}$$

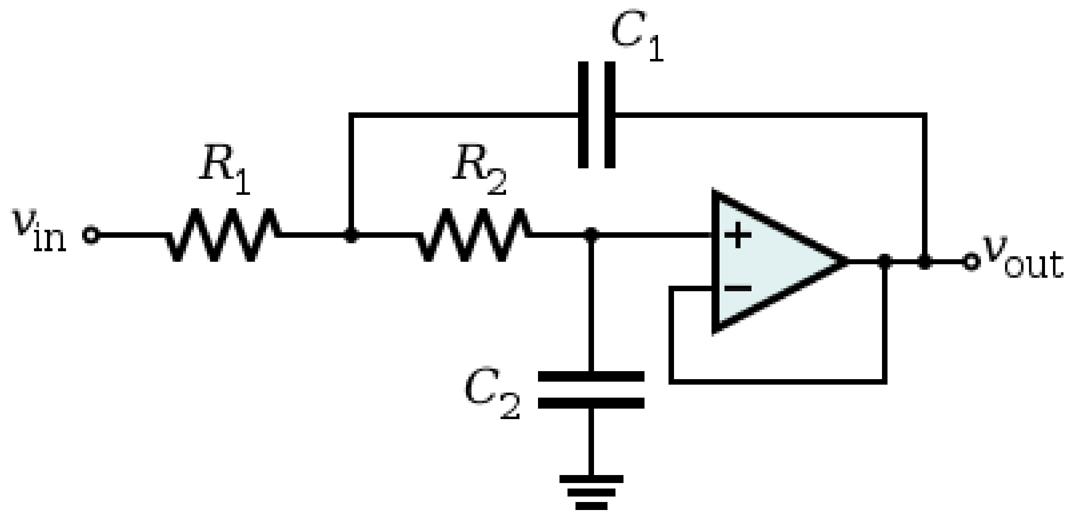


Figure 2: Sallem-Key LPF

de las expresiones (15) y (16), se tiene que multiples valores de C_1, C_2, R_1, R_2 permiten obtener la misma frecuencia ω_o y Q.

Una tecnica común es considerar que

$$R_1 = R_2, C_1 = C_2$$

por lo que se tiene que las expresiones (15) y (16) se reducen a

$$\omega_o = \frac{1}{RC}$$

y

$$Q = \frac{1}{2}$$

1.2.3 Ejemplo

Si consideramos un filtro pasabajas con una frecuencia de corte de $f_o = 15KHz$.

Si proponemos que $C = 1nF$, entonces de la expresión (15), se tiene que

$$R = \frac{1}{2\pi f_o C}$$

10610.32953945969

sustituyendo valores se tiene que:

$$R = 10.610k\Omega$$

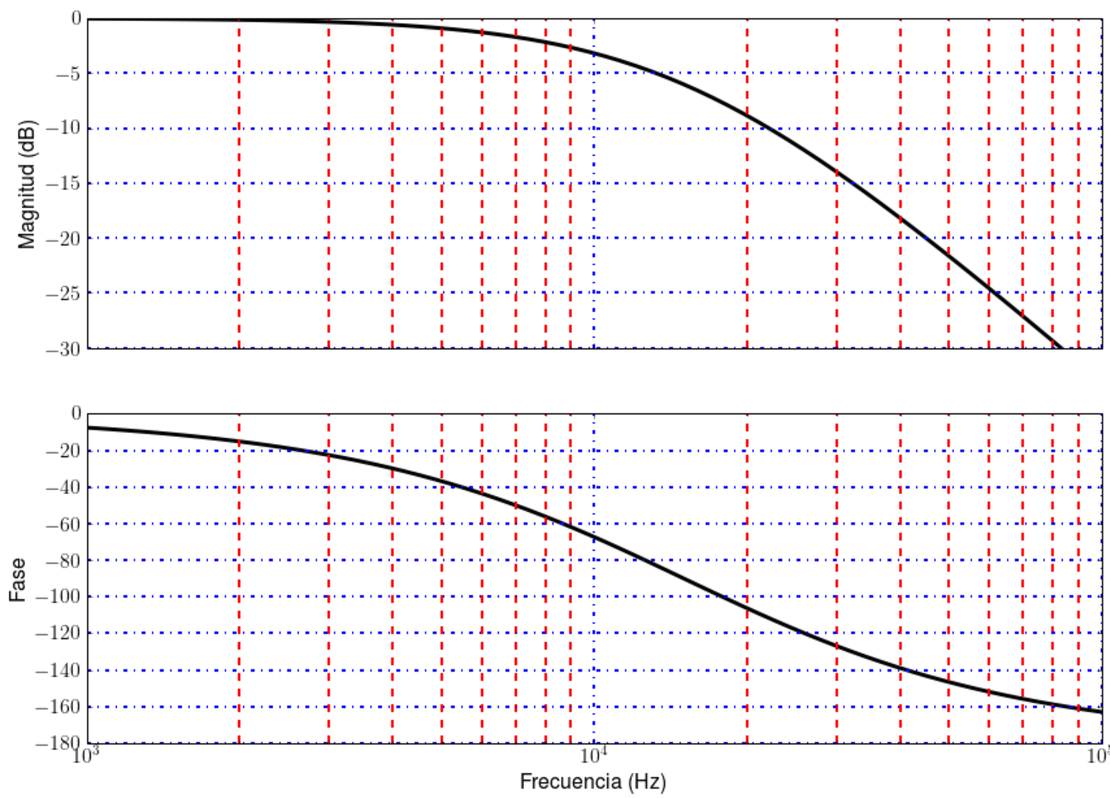
Considerando que la función de transferencia del filtro se puede representar como:

$$H = \frac{1}{b_0 s^2 + b_1 s + b_2} \tag{17}$$

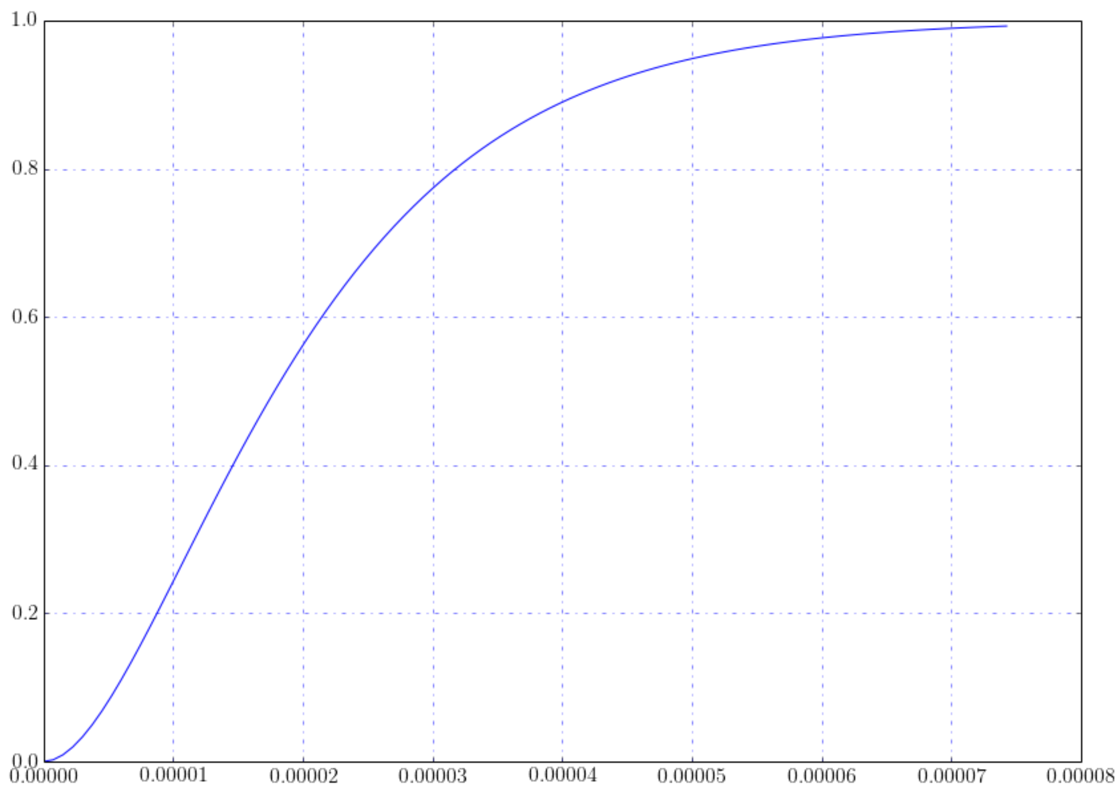
donde

\begin{bmatrix}1.1257909293593088e-10, & 2.122065907891938e-05, & 1\end{bmatrix}

$\begin{bmatrix} b_0 = 1.1257909293593088 \times 10^{-10}, & b_1 = 2.122065907891938 \times 10^{-05}, & b_2 = 1 \end{bmatrix}$ Si se obtiene la gráfica de bode del sistema se tiene que la respuesta del filtros es



Magnitud (dB)
Fase
Frecuencia (Hz)



$R_1 = mR$, $R_2 = R$, $C_1 = nC$, $C_2 = C$.
Therefore, the f_0, and Q, expressions are

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{1}{RC\sqrt{mn}},$$

and

$$Q = \frac{\sqrt{mn}}{m+1}.$$

1.3 Filtro Rauch

Filtro de segundo orden con un solo apmplificador operacional su estructura es

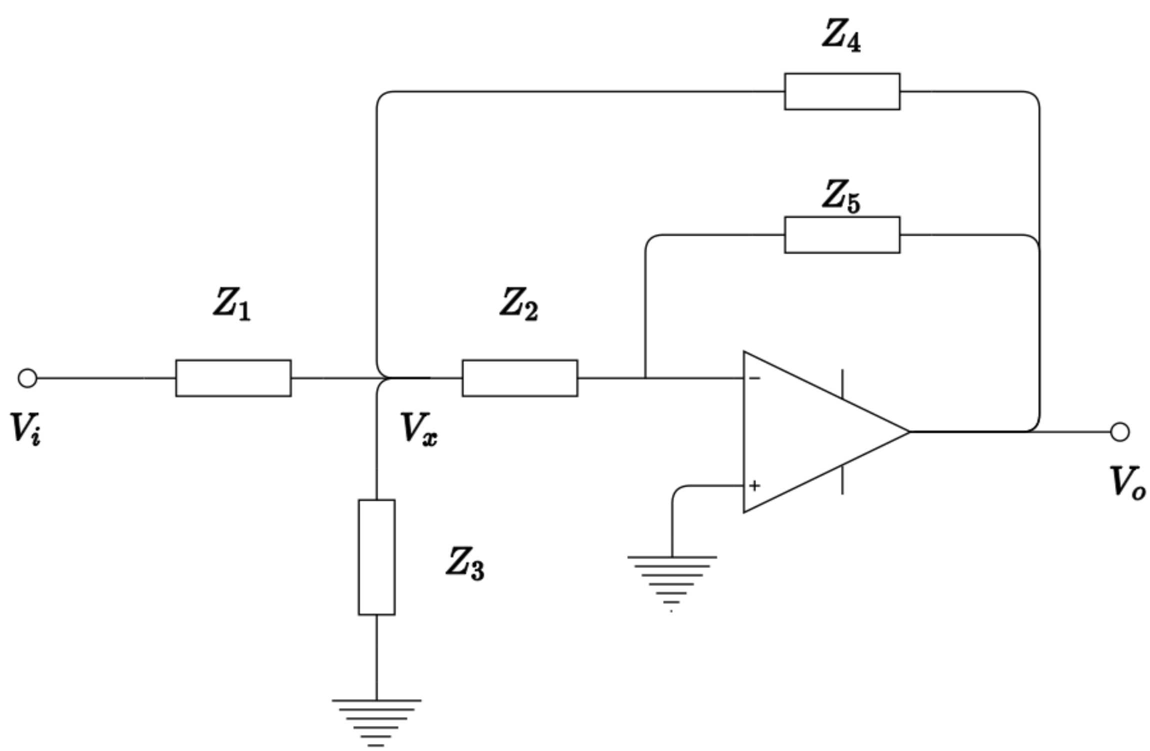


Figure 3: Filtro Rauch

en el nodo de V_x aplicando la ley de krichof de nodos se tiene que

$$\frac{V_x}{Z_2} + \frac{V_x}{Z_3} - \frac{V_i - V_x}{Z_1} - \frac{V_o - V_x}{Z_4} = 0 \tag{18}$$

si se considera que idealmente la corriente en la entrada del opam es 0, entonces en V_- se tiene que:

$$i_{Z2} = -i_{Z5} \tag{19}$$

por lo que se tiene que:

$$V_x = -\frac{V_o Z_2}{Z_5} \tag{20}$$

sustituyendo en (18)

```
- \frac{Vo Z_{2}}{Z_{3} Z_{5}} - \frac{Vo}{Z_{5}} - \frac{1}{Z_{4}} \left(\frac{Vo Z_{2}}{Z_{5}} + Vo\right
```

$$- \frac{V o Z_{2}}{Z_{3} Z_{5}} - \frac{V o}{Z_{5}} - \frac{1}{Z_{4}} \left(\frac{V o Z_{2}}{Z_{5}} + V o\right) - \frac{1}{Z_{1}} \left(V i + \frac{V o Z_{2}}{Z_{5}}\right) = 0$$

despejando V_o/V_i se tiene

```
'- \\frac{Z_{3} Z_{4} Z_{5}}{Z_{1} Z_{2} Z_{3} + Z_{1} Z_{2} Z_{4} + Z_{1} Z_{3} Z_{4} + Z_{1} Z_{3} Z_
```

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{-Z_3 Z_4 Z_5}{Z_1 Z_2 Z_3 + Z_1 Z_2 Z_4 + Z_1 Z_3 Z_4 + Z_1 Z_3 Z_5 + Z_2 Z_3 Z_4} \tag{21}$$

$$- \frac{R_{3}}{C_{1} C_{2} R_{1} R_{2} R_{3} s^{2} + C_{2} R_{1} R_{2} s + C_{2} R_{1} R_{3} s + C_{2} R_{2} R_{3} s + R_{1}}$$

$$- \frac{R_{3}}{C_{1} C_{2} R_{1} R_{2} R_{3} s^{2} + C_{2} s \left(R_{1} R_{2} + R_{1} R_{3} + R_{2} R_{3}\right) + R_{1}}$$

$$\frac{1}{C_{1} C_{2} R_{1} R_{2} s^{2} + \frac{C_{2} R_{1}}{R_{3}} R_{2} s + C_{2} R_{1} s + C_{2} R_{2} s + \frac{R_{1}}{R_{3}}}$$

$$\frac{1}{C_{1} C_{2} R_{2} R_{3}}$$

$$\frac{Z_{3} Z_{4} Z_{5}}{Z_{1} Z_{2} Z_{3} + Z_{1} Z_{2} Z_{4} + Z_{1} Z_{3} Z_{4} + Z_{1} Z_{3} Z_{5} + Z_{2} Z_{3} Z_{4}}$$