LÝ THUYẾT 4: ỨNG DỤNG MATLAB GIẢI GẦN ĐÚNG PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

Dạng toán giải phương trình vi phân bậc 1 có dạng như sau:

> Đề cho: $y' = f(x, y)$ và điều kiện ban đầu $y(x_0) =$ hằng số
>
> Yêu cầu tìm: $y = f(x)$

Khi việc giải bài toán trở nên phức tạp, việc tìm gần đúng là cần thiết. Ở đây, bài thực hành đề cập tới 4 phương pháp tính gần đúng dưới đây. Ý tưởng chung của cả 4 phương pháp này là: Từ đoạn $[x_0, x_n]$ chia thành N đoạn bằng nhau $h = \frac{x_n - x_0}{N}$. Mục đích chỉ là tính gần đúng giá trị của y_i tại những nút x_i tương ứng mà thôi, chứ không phải tại mọi $x \in [x_0, x_n]$. Từ đó, ta thu được các mảng x và y gồm các cặp giá trị $[x_i, y_i]$ tương ứng.

1.1. Phương pháp Ơ-le (Euler)

Phương pháp Ơ-le cho công thức vô cùng đơn giản như sau:

$$\boldsymbol{y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)}$$

Để tăng độ chính xác ta giảm bước nhảy h, nhưng nếu $h < h_0$, với h_0 là giá trị h tối ưu của phương pháp Ơ-le, thì sai số lại tăng.

1.2. Phương pháp hiện ẩn trung điểm

Hay còn gọi là phương pháp Ơ-le cải tiến. Ta sẽ tính y_{i+1} không phải một mà là hai lần:

$$y_{i+1}^{lần\ 1} = y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i)$$

$$\boldsymbol{y_{i+1} = y_i + hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_{i+1}^{lần\ 1}\right)}$$

1.3. Phương pháp hiện ẩn hình thang

Bước 1: Lấy xấp xỉ đầu bằng phương pháp Ơ-le:

$$y_{i+1}^{lần\ lặp\ thứ\ 0\ (chưa\ lặp)} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

Bước 2: Thực hiện vòng lặp theo công thức sau (mỗi lần lặp sẽ tạo ra y_{i+1} mới):

$$\boldsymbol{y_{i+1}^{lần\ lặp\ thứ\ m} = y_i + \frac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) + f\left(x_{i+1}, y_{i+1}^{lần\ lặp\ thứ\ m-1}\right)\right]}$$

Bước 3: Hàm lặp dừng khi:

$$\left|y_{i+1}^{lần\ lặp\ thứ\ m} - y_{i+1}^{lần\ lặp\ thứ\ (m-1)}\right| \le \varepsilon$$

Trong đó, ε là sai số cho trước, m = 1, 2, 3, … (số lần lặp, sẽ càng nhỏ khi h càng nhỏ).

1.4. Phương pháp R-K (Runge – Kutta)

Phương pháp này có công thức như sau:

$$\boldsymbol{y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)}$$

Với:

$$k_1 = hf(x_i\,, y_i)$$

$$k_2 = hf(x_i + 0.5h\,, y_i + 0.5k_1)$$

$$k_3 = hf(x_i + 0.5h\,, y_i + 0.5k_2)$$

$$k_4 = hf(x_i + h\,, y_i + k_3)$$