Práctica 1

Manuel Díaz Castro

04 de Marzo de 2024

Ejercicio 1

Calcula como debes cambiar la escala para trabajar en una hoja con la unidad en cm. Para poder cambiar la escala en una hoja tenemos que utiizar el comando *scala*, con los valores en *Notación Polaca Inversa (RPN)*. Por ejemplo para cambiar la escala a pulgadas tenemos que escribir *72 72 scale* ya que como nos explica el libro de texto de la asignatura donde nos dice que la unidad de medida por defecto es el punto Adobe. El punto Adobe tiene una medida exacta respecto las pulgadas inglesas, inch (se expresan con ") que es ésta:

$$1 Adobepoint = 1/72 \ inch.$$

> Si tenemos que encontrar la relación que existe entre un centímetro y una pulgada, lo podemos lograr realizando la división del factor de la escala de punto Adobe en pulgadas entre el factor de escala de pulgadas a centímetros.
>
> $$72 \div 2,54 = 28,34645669$$
>
> Este resultado que por aproximación establecemos en 28,35 es el factor de escala que necesitamos para cambiar la escala de punto Adobe a centímetros.

¿Que dimensión tiene un folio *A4* en puntos *Adobe*? Para poder calcular la dimensión de un folio *A4* en puntos *Adobe* tenemos que saber que la dimensión de un folio *A4* es de 210x297 mm.

> Si queremos saber la dimensión de un folio *A4* en puntos *Adobe* tenemos que realizar la siguiente operación:
>
> $$210 \times 28,35 = 595,5$$
>
> $$297 \times 28,35 = 841,5$$
>
> Donde podemos ver que se realiza la operación de multiplicar las dimensiones de un folio *A4* en milímetros por el factor de escala que hemos determinado en la respuesta anterior.

Por lo tanto la dimensión de un folio *A4* en puntos *Adobe* es de 595,5x841,5.

¿Y un *A3*? Para poder calcular la dimensión de un folio *A3* en puntos *Adobe* tenemos que saber que la dimensión de un folio *A3* es de 297x420 mm.

Si queremos saber la dimensión de un folio *A3* en puntos *Adobe* tenemos que realizar la misma operación que hemos precisado anteriormente:

$$297 \times 28,35 = 841,5$$

$$420 \times 28,35 = 1190,5$$

Por lo tanto la dimensión de un folio *A3* en puntos *Adobe* es de 841,5x1190,5.

Ejercicio 7

Demuestra que la cantidad $\frac{-C}{\sqrt{A^2+B^2}}$ es la distancia con signo desde la recta $Ax + By = 0$ a la recta $Ax + By + C = 0$. Sugerencia: Mira el dibujo y calcula la distancia con signo s de la proyección de u sobre $[A, B]$

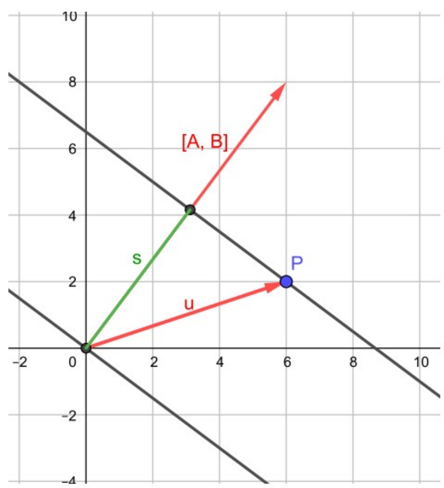

Figura 1: Dibujo del ejercicio 6

Para entender por qué la expresión $\frac{-C}{\sqrt{A^2+B^2}}$ representa la distancia con signo de la línea $Ax + By + C = 0$ de la línea $Ax + By = 0$, podemos utilizar el concepto de proyecciones y considerar la distancia perpendicular entre las dos líneas.

Primero, observemos que la línea $Ax + By = 0$ es simplemente la misma línea $Ax+By+0 = 0$, pero que pasa a través del origen $(0, 0)$

y no hay distancia C. Entonces, la distancia entre estas dos líneas es básicamente la distancia entre la línea $Ax + By + C = 0$ y el origen.

Para encontrar esta distancia, podemos proyectar el vector que une un punto P en la línea $Ax+By+C = 0$ sobre el vector perpendicular de la línea $Ax + By = 0$ que pasa por la línea $Ax + By + C = 0$ que es $[A, B]$, que nos calculará la distancia s entre ambas líneas .

La proyección del vector $[A, B]$ sobre sí mismo es su magnitud:

$$||[A, B]|| = \sqrt{A^2 + B^2}$$

La proyección del vector en el punto sobre la línea $Ax + By + C = 0$ sobre el vector normal $[A, B]$ es el producto escalar (punto) entre los dos vectores, dividido por la magnitud de $[A, B]$:

$$\frac{-C \bullet [A, B]}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{-C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Dado que esta es la proyección del vector $\vec{u}$ sobre el vector $[A, B]$, que es la distancia con signo entre la línea $Ax + By + C = 0$ y el origen, se observa que $\frac{-C}{\sqrt{A^2+B^2}}$ representa la distancia con signo entre las dos líneas.

Para poder comprender porqué hablamos de signo en esta distancia entre las dos líneas consideradas, hemos de observar que la longitud con signo en valor absoluto equivale a la longitud de s en el dibujo y es positiva cuando la proyección coincide con la dirección $[A, B]$, y negativa cuando se proyecta en sentido contrario. Queda perfectamente determinada mediante: $s = |\overrightarrow{[A, B]}| \cos(\alpha)$.

Ahora bien si ponemos $\cos(\alpha)$ en función del vector [A,B] que denominaremos para el desarrollo de la explicación como un vector $\vec{v}$ y el vector $\vec{u}$ tenemos:

$$s = |\vec{u}| \cos(\alpha) = |\vec{u}| \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{ax + by}{|\vec{v}|}$$

Y según la explicación de la asignatura ahora podemos poner a s en función de [A,B] como

$$s = \frac{s\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{x\mathbf{a} + y\mathbf{b}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{x\mathbf{a} + y\mathbf{b}}{\|\mathbf{v}\|^2}[a, b]$$

Para determinar el signo de la distancia hemos de saber si el ángulo (θ) es agudo, obtuso o recto. Si el ángulo (θ) es agudo, la proyección es positiva, si el ángulo (θ) es obtuso, la proyección es negativa y si el ángulo (θ) es recto, la proyección es cero. Para saber si el ángulo (θ) es agudo, obtuso o recto, hemos visto que se debe utilizar el producto escalar de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, que está definido como el producto de los módulos de ambos vectores por el coseno del ángulo menor (θ) que forman sus direcciones, por lo que siempre tendremos en cuenta a π como máxima medida del ángulo mediante $cos(\pi - \theta)$.

Por ejemplo en el dibujo que nos consulta el problema, vemos que la proyección del vector $\vec{u}$ $(6, 2)$ sobre el vector [A,B] $(6, 8)$ al que denominaremos $\vec{v}$ se puede calcular utilizando la fórmula de la proyección escalar vista anteriormente, que es:

$$\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}\mathbf{v}$$

Donde:

— $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son los vectores.

— $\vec{u} \bullet \vec{v}$ es el producto escalar de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

— $|\vec{v^2}|$ es el cuadrado de la magnitud (o longitud) del vector $\vec{v}$.

Primero, calculamos el producto escalar de $\vec{u}$ y $\vec{v}$:

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = u_1 \bullet v_1 + u_2 \bullet v_2 = 6 \bullet 6 + 2 \bullet 8 = 36 + 16 = 52$$

Luego, calculamos el cuadrado de la magnitud del vector $\vec{v}$

$$\|\mathbf{v}\|^2 = v_1^2 + v_2^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$$

Finalmente, sustituimos estos valores en la fórmula de la proyección para obtener el vector de proyección:

$$\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \frac{52}{100}\mathbf{v} = \left(\frac{52}{100} \cdot 6, \frac{52}{100} \cdot 8\right) = (3{,}12, 4{,}16)$$

Por lo tanto, la proyección del vector $\vec{u} = (6, 2)$ sobre el vector $\vec{v} = (6, 8)$ es aproximadamente (3.12 , 4.16).

Que nos da el punto de intersección del segmento $\vec{v}$ con signo + o $-$ según que el ángulo θ sea agudo u obtuso, que en este caso al observar el dibujo del problema será agudo (Figura 2) y la distancia será un valor positivo.

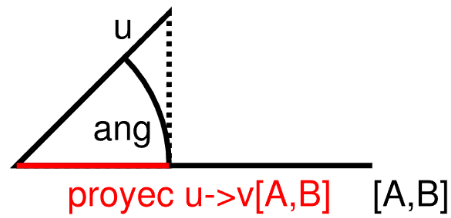

Figura 2: Proyección del vector

Ejercicio 8

Dada la línea (recta) $Ax + By + C = 0$ y un punto P, encuentra en Internet o en un libro de geometria analítica la formula para la proyección perpendicular de P en la línea. Pon un ejemplo.

La fórmula para encontrar la proyección perpendicular de un punto P en una línea $Ax + By + C = 0$ en geometría analítica es la siguiente:

Dado el punto $P(x_0, y_0)$, la proyección perpendicular Q de P en la línea se puede encontrar de la siguiente manera:

1. Calculamos la pendiente de la recta perpendicular a la línea dada. La pendiente de una recta perpendicular es el negativo del inverso de la pendiente de la línea dada. Entonces, la pendiente de la recta perpendicular es $-\frac{B}{A}$.

2. Utilizamos la ecuación punto-pendiente para encontrar la ecuación de la recta perpendicular que pasa por el punto $P(x_0, y_0)$. La ecuación punto-pendiente es $y - y_0 = m(x - x_0)$, donde m es la pendiente de la recta. Sustituye $m = -\frac{B}{A}$ y también (x_0, y_0) por las coordenadas del punto P.

3. Resuelvemos finalmente el sistema de ecuaciones formado por la ecuación de la línea original y la ecuación de la recta perpendicular para encontrar las coordenadas del punto de intersección Q. Esto se puede hacer sustituyendo la ecuación de la recta perpendicular en la ecuación de la línea original y resolviendo para x y y.

Por ejemplo, consideremos la línea $2x + 3y - 6 = 0$ y el punto $P(4, 2)$.

1. La pendiente de la recta perpendicular es $-\frac{B}{A} = -\frac{3}{2}$.
2. La ecuación de la recta perpendicular es $y - 2 = -\frac{3}{2}(x - 4)$.
3. Sustituyendo la ecuación de la recta perpendicular en la ecuación de la línea original, obtenemos:

$$2x + 3\left(-\frac{3}{2}(x - 4) + 2\right) - 6 = 0 \tag{1}$$

Resolviendo esta ecuación, encontramos las coordenadas del punto de intersección Q, que es la proyección perpendicular de P en la línea.

la ecuación que obtuvimos al sustituir la ecuación de la recta perpendicular en la ecuación de la línea original:

$$2x + 3\left(-\frac{3}{2}(x-4) + 2\right) - 6 = 0 \quad (1)$$

Se resuelve de la siguiente manera:
Primero, distribuyamos el término 3 dentro del paréntesis:

$$\begin{aligned}
&2x + 3\left(-\frac{3}{2}x + 6 - 6\right) - 6 = 0 \\
&2x + 3\left(-\frac{3}{2}x\right) - 6 = 0 \\
&2x - \frac{9}{2}x - 6 = 0
\end{aligned}$$

Ahora, combinamos términos semejantes:

$$\begin{gathered}
\left(2 - \frac{9}{2}\right)x - 6 = 0 \\
\left(\frac{4}{2} - \frac{9}{2}\right)x - 6 = 0 \\
\left(\frac{-5}{2}\right)x - 6 = 0 \\
\frac{-5x}{2} - 6 = 0
\end{gathered}$$

Para despejar x, sumamos 6 a ambos lados de la ecuación:

$$\frac{-5x}{2} = 6$$

Para eliminar el denominador 2 en x, multiplicamos ambos lados de la ecuación por 2:

$$-5x = 12$$

Finalmente, para obtener x, dividimos ambos lados de la ecuación por -5:

$$x = \frac{12}{-5}$$

$$x = -\frac{12}{5}$$

Ahora que hemos encontrado el valor de x, podemos usarlo para encontrar el valor de y sustituyendo en la ecuación de la recta perpendicular. Luego, las coordenadas del punto intersección Q serán $(-\frac{12}{5}, \frac{14}{5})$.

Ejercicio 9

Dadas dos rectas $A1x + B1y + C1 = 0$ y $A2x + B2y + C2 = 0$ encuentra una formula para el punto de interseccion.

La fórmula para encontrar el punto de intersección de dos rectas en el plano:

Dadas las ecuaciones de las rectas:

Ecuacion 1. $A_1x + B_1y + C_1 = 0$

Ecuacion 2. $A_2x + B_2y + C_2 = 0$

El punto de intersección (x, y) puede ser encontrado usando las siguientes fórmulas:

$$x = \frac{B_1C_2 - B_2C_1}{A_1B_2 - A_2B_1} \tag{2}$$

$$y = \frac{A_2C_1 - A_1C_2}{A_1B_2 - A_2B_1} \tag{3}$$

Estas dos fórmulas son el resultado de resolver el sistema formado por las ecuaciones de las rectas. Sustituyendo x en cualquiera de las ecuaciones de las rectas, obtenemos y, y viceversa.

1. Despejamos y en términos de x en cada ecuación (1) (2):

Para la primera ecuación:

$$B_1y = -A_1x - C_1$$

$$y = \frac{-A_1x - C_1}{B_1}$$

Para la segunda ecuación:

$$B_2y = -A_2x - C_2$$

$$y = \frac{-A_2x - C_2}{B_2}$$

2. Igualamos las dos expresiones para y:

$$\frac{-A_1x - C_1}{B_1} = \frac{-A_2x - C_2}{B_2}$$

3. resolveremos esta ecuación para encontrar x y una vez que tenemos x, podemos encontrar y sustituyendo x en cualquiera de las ecuaciones de las rectas.

4. Una vez que hemos encontrado x e y, estas coordenadas formarán el punto de intersección de las dos rectas.

Debemos tener cuidado con los casos en los que las rectas pueden ser paralelas o coincidentes, ya que en esos casos no habrá un punto de intersección o no será único.

Ejercicio 10

Dados dos puntos P y Q, encuentra la ecuacion de la recta que los contiene.

La fórmula para encontrar la ecuación de la recta que contiene dos puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ en el plano es utilizando la fórmula de la pendiente-intersección la siguiente:

La ecuación de la recta en su forma más común es la forma pendiente-intersección:

$$y = mx + b$$

Donde:

- m es la pendiente de la recta.

- b es la intersección en y, es decir, el valor de y cuando $x = 0$, también conocido como la ordenada al origen.

La pendiente m de la recta se puede calcular utilizando la fórmula de la pendiente, que compara el cambio en y con el cambio en x entre dos puntos en la recta. Si tenemos dos puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$, la fórmula de la pendiente es:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Una vez que hemos calculado la pendiente m, podemos usar cualquiera de los dos puntos P o Q para encontrar el valor b de la intersección en y. Esto se puede hacer sustituyendo las coordenadas x e y de uno de los puntos en la ecuación de la recta:

$$y_1 = mx_1 + b$$

Luego, despejamos b para encontrar su valor.

Una vez que hemos encontrado m y b, podemos escribir la ecuación de la recta que pasa por los puntos P y Q.

Ejercicio 11

Una función afín $f(x, y) = Ax + By + C$ vale -4 en el punto $(0, 0)$ y 7 en el punto $(1, 2)$.

$$f(0, 0) = -4$$
$$f(1, 2) = 7$$

En que punto del segmento entre los puntos anteriores tenemos $f(x, y) = 0$?

Para encontrar el punto en el segmento entre los puntos dados donde la función $f(x, y)$ es igual a 0, podemos usar la ecuación de la función afín y resolver para x e y.

Dado que la función afín es $f(x, y) = Ax + By + C$, podemos utilizar los puntos dados $(0, 0)$ y $(1, 2)$ para formar un sistema de ecuaciones.

Para $(0, 0)$:

$$f(0, 0) = -4 = A(0) + B(0) + C$$
$$C = -4$$

Para $(1, 2)$:

$$f(1, 2) = 7 = A(1) + B(2) - 4$$
$$A + 2B = 11$$

Entonces, tenemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} A + 2B = 11 \\ C = -4 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema con unos valores que lo cumplan, obtenemos los valores de A, B y C:

$$A = 3, \quad B = 4, \quad C = -4$$

La función afín se convierte en:

$$f(x, y) = 3x + 4y - 4$$

Para encontrar el punto en el que $f(x, y) = 0$, sustituimos en la ecuación y resolvemos:

$$3x + 4y - 4 = 0$$

$$3x + 4y = 4$$

Ahora, para encontrar el punto (x, y) en el segmento entre $(0, 0)$ y $(1, 2)$ donde $f(x, y) = 0$, podemos usar la ecuación paramétrica de la línea que pasa por los dos puntos.

La ecuación paramétrica de una línea que pasa por dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es:

$$x = x_1 + t(x_2 - x_1)$$

$$y = y_1 + t(y_2 - y_1)$$

Donde t es un parámetro que varía de 0 a 1.

Sustituyendo los puntos dados:

$$x = 0 + t(1 - 0) = t$$

$$y = 0 + t(2 - 0) = 2t$$

Sustituimos estas expresiones en la ecuación de $f(x, y)$:

$$3(t) + 4(2t) - 4 = 0$$

$$3t + 8t - 4 = 0$$

$$11t - 4 = 0$$

$$11t = 4$$

$$t = \frac{4}{11}$$

Por lo tanto, el punto donde $f(x, y) = 0$ en el segmento entre $(0, 0)$ y $(1, 2)$ es $(\frac{4}{11}, \frac{8}{11}) \equiv (0.36\ ,\ 0.72)$.