THE BUILDING EVACUATION PROBLEM WITH SHARED INFORMATION

Masterseminar Optimierung im WS 2012/13
27.11.2012

vorgetragen von:
Manuel Schwarz

INHALT

- Motivation
- Modellierung als MIP
- Exaktes Lösungsverfahren nach Bender
- Beispiel anhand eines 4-stöckigen Hauses
- Ergebnisse
- Fazit

MOTIVATION

- Bestimmen von Evakuierungsrouten aus z.B. brennenden Gebäuden
- Ziel: Minimierung der Gesamt-Evakuierungszeit
- Bisherige Ansätze:
  - statische Pläne
  - beliebiges Splitten von Gruppen
- Dieser Ansatz:
  - stärkere Berücksichtigung von Gruppendynamik
  - Einbeziehung von "Shared Information"

SHARED INFORMATION

- Evakuierungswege können situationsbedingt aktualisiert werden
- neue Informationen werde live weitergegeben
- Personen werden gleichzeitig mit neuen Informationen versorgt
- via veränderlichen Hinweisschildern, Sprachsystem

MODELLIERUNG ALS MIP

Definitionen und Problemformulierung

DEFINITIONEN (1)

Netzwerk: $\Im = (G, u, \tau)$ mit $G = (N, A, \{0, \ldots, T\})$

$N = \{1, ..., n\}$ Menge der Knoten

$A = \{(i, j) | i, j \in N\}$ Menge der ger. Kanten

T Zeitraum diskretisiert in $\{0, \ldots, T\}$

$u_{ij}(t)$ Kapazität der Kante (i, j)

$\tau_{ij}(t)$ Kosten (Zeit) der Kante (i, j)

$(i, i), \ \forall i \in N$ Pufferzonen / Wartekanten

M Anzahl der Quellknoten

$K = \{k_1, k_2, \ldots, k_M\}$ Menge der Quellknoten

l Senkeknoten (Exit)

DEFINITIONEN (2)

$b_{k_m}(t)$ Supply bei Quellknoten $k_m \in K$ zur Zeit t

Bei $t = T$ entspricht der Supply im Knoten l dem Gesamtsupply B

$$B = \sum_{k_i \in K} \sum_{t=1}^{T} b_{k_i}(t) \quad \text{, sodass} \quad b_l(T) = -B$$

MODELLIERUNG ALS MIP (1)

$x_{i,j}(t)$ Fluss von Knoten i zum Zeitpunkt t entlang der Kante (i,j)

$\lambda_{i,j}(t)$ legt die zu wählenden Kanten fest

$\Gamma^-(i) = \{j|(j,i) \in A\}$ Menge der eingehenden Kanten

$\Gamma^+(i) = \{j|(i,j) \in A\}$ Menge der ausgehenden Kanten

Der Fluss $x_{i,j}(t)$ trifft zur Zeit $t + \tau_{i,j}(t)$ beim Knoten j ein.

MODELLIERUNG ALS MIP (2)

Zielfunktion

$$P : min \sum_{(i,j)\in A} \sum_{t\in\{0,...,T\}} \tau_{ij}(t) x_{ij}(t)$$

subject to:

Flusserhaltung

$$\sum_{j\in\Gamma^+(i)} x_{ij}(t) - \sum_{j\in\Gamma^-(i)} \sum_{\{\bar{t}|\bar{t}+\tau_{ji}(\bar{t})=t\}} x_{ji}(\bar{t}) = b_i(t),$$

$$\forall i \in N, t \in \{0, \ldots, T\}$$

MODELLIERUNG ALS MIP (3)

Kapazitätsbeschränkung

$$\lambda_{ij}(t) \leq x_{ij}(t) \leq \lambda_{ij}(t)u_{ij}(t),\ \forall (i,j) \in A, t \in \{0, \ldots, T\}$$

Shared Information

$$\sum_{j \in \Gamma^+(i), j \neq i} \lambda_{ij}(t) \leq 1, \quad \forall i \in N \backslash l, t \in \{0, \ldots, T\}$$

nicht-negativität Bedingung

$$x_{ij}(t) \geq 0,\ \lambda_{ij}(t) binary,\ \forall (i,j) \in A, t \in \{0, \ldots T\}$$

BENDERS DECOMPOSITION

allgemeines Konzept und Algorithmus

BENDERS DECOMPOSITION

- schnelle Lösung von Optimierungsproblemen mit sehr vielen Variablen
- Idee
    - LP dualisieren (in Binärproblem umformen)
    - Untere Schranke für Zielfunktionswert bestimmen (Benders Cut)
    - Untere Schranke dem Masterproblem hinzufügen

LP ZU DUAL

Allgemeines LP-Problem

$$\min\ z = cx$$
$$\text{s.t. } Ax \geq b$$
$$x \geq a$$

formuliert als Dual-Problem

$$\max\ w = ub$$
$$\text{s.t. } uA \leq c$$
$$u \geq a$$

ALLGEMEINE DUALITÄT

$$\max \ \beta$$

$$\text{s.t.} \ \ Ax \geq b \xrightarrow{D} cx \geq \beta$$

$$D = \{x | x \geq a\}$$

$Ax \geq b$ impliziert $cx \geq \beta$ unter Beachtung von D

Ziel: Ableiten einer unteren Schranke.

BEISPIEL DUALITÄT

Problem

$$\min\ z = 4x$$
$$\text{s.t. } x \geq 5$$
$$x \leq 10$$
$$x \geq 0$$

$$\max\ \beta$$
$$\text{s.t. } x \in S \xrightarrow{D} 4x \geq \beta$$
$$D = \{x | x \geq 0\}$$
$$S = \{x | x \geq 5 \wedge x \leq 10\}$$

Lösung: $x = 5$ mit $\beta = 20$

BD METHODIK (1)

- Fixieren bestimmter Variablen
  - hängt vom Problem und dem Wissen darüber ab
  - Kernstück von Benders Decomposition
  - resultierendes Subproblem ist einfach zu lösen

BD METHODIK (2)

Aufteilen der Variablen in 2 Gruppen

$$\min\ z = cx + f(y)$$
$$\text{s.t. } Ax + g(y) \geq b$$
$$x, y \in D$$

Fixierung der Variablen y mit den Testwerten $\overline{y}$

resultierendes Subproblem:

$$\min\ z = cx + f(\overline{y})$$
$$\text{s.t. } Ax \geq b - g(\overline{y})$$
$$x \in D$$

BD METHODIK (3)

BD allg. Dualität

$$\max \ \beta$$

$$\text{s.t.} \ \ Ax \geq b - g(\overline{y}) \xrightarrow{x,\overline{y} \in D} cx + f(\overline{y}) \geq \beta$$

(lineares) duales Sub-Problem

$$\max \ w = u(b - g(\overline{y})) + f(\overline{y})$$

$$\text{s.t.} \ \ uA \leq c$$

$$u \in D$$

Die Lösung des Sub-Problems liefert eine untere Schranke β^* für den Zielfunktionswert, angenommen $y = \overline{y}$.

BD METHODIK (4)

Ziel: eine Funktion $\beta_{\overline{y}}(y)$ bestimmen, die eine gültige untere Schranke für jedes y liefert.

$$\beta_{\overline{y}}(\overline{y}) = \beta^*$$

generalisierte Schranke (Benders Cut)

$$z \geq u(b - g(y)) + f(\overline{y}) = \beta_{\overline{y}}(y)$$

Masterproblem

$$\begin{aligned} \min\ & z \\ \text{s.t.}\ & z \geq \beta_{y^k}(y), \quad k = 1, \ldots, K \\ & y \in D_y \end{aligned}$$

BD ALGORITHMUS

Algorithm 1 BENDERSDECOMPOSITION()

Choose $\bar{y}$ in original problem
$\bar{z} \leftarrow -\infty$
$k \leftarrow 0$
while (sub-problem dual has feasible solution $\beta \geq \bar{z}$) **do**
    Derive lower bound function $\beta_{\bar{y}}(y)$ with $\beta_{\bar{y}}(\bar{y}) = \beta$
    $k \leftarrow k + 1$
    $y^k \leftarrow \bar{y}$
    Add $z \geq \beta_{\bar{y}}(y)$ to master problem
    if (master problem is infeasible) **then**
        Stop. The original problem is infeasible.
    else
        Let $(\bar{z}, \bar{y})$ be the optimal value and solution to the master problem.
return $(\bar{z}, \bar{y})$

BENDERS DECOMPOSITION

konkret am Beispiel BEPSI

BENDERS SUBPROBLEM (1)

- Subproblem bestimmt den Fluss entlang der Kanten
- Fixieren der Werte von λ ($\tilde{\lambda} \in \Lambda$)
- aufteilen der Kantenmenge A in drei disjunkte Teilmengen (zur Laufzeitoptimierung)

$$I_1(A) = \{(i,j)|i,j \in N \,\text{and}\, \Gamma^+(i) \geq 2\}$$
$$I_2(A) = \{(i,j)|i,j \in N \,\text{and}\, \Gamma^+(i) = 1\}$$
$$I_3(A) = \{(i,i)|i \in N\}$$

BENDERS SUBPROBLEM (2)

Subproblem

$$\mathrm{RS_p}(\tilde{\lambda}):\ \min \sum_{(i,j)\in A}\ \sum_{t\in\{0,...,T\}} \tau_{ij}(t)x_{ij}(t)$$

subject to:

Flusserhaltung

$$\sum_{j\in\Gamma^+(i)} x_{ij}(t) - \sum_{j\in\Gamma^-(i)}\ \sum_{\{\bar{t}|\bar{t}+\tau_{ji}(\bar{t})=t\}} x_{ji}(\bar{t}) = b_i(t),$$

$$\forall i \in N, t \in \{0, \ldots, T\}$$

BENDERS SUBPROBLEM (3)

Kapazitätsbeschränkung

$$x_{ij}(t) \leq \tilde{\lambda}_{ij}(t)u_{ij}(t), \quad \forall(i,j) \in I_1, t \in \{0,\ldots,T\}$$

$$x_{ij}(t) \leq u_{ij}(t), \quad \forall(i,j) \in I_2, t \in \{0,\ldots,T\}$$

nicht-negativ Bedingung

$$x_{ij}(t) \geq 0, \;\; \lambda_{ij}(t) binary, \;\; \forall(i,j) \in A, t \in \{0,\ldots T\}$$

BENDERS DUAL SUBPROBLEM

$$\mathrm{DRS}_p(\tilde{\lambda}) : \max \sum_{t\in\{0,...,T\}} \left(\sum_{i\in N} \pi_i(t) b_i(t) + \right.$$

$$\left. \sum_{(i,j)\in I_2(A)} u_{ij}(t) m_{ij}(t) + \sum_{(i,j)\in I_1(A)} \tilde{\lambda}_{ij}(t) u_{ij}(t) m_{ij}(t) \right)$$

BENDERS DUAL SUBPROBLEM

subject to:

Flusserhaltung

$$\pi_i(t) - \pi_j(t + \tau_{ij}(t)) + m_{ij}(t) \leq \tau_{ij}(t),$$

$$\forall (i,j) \in A \backslash I_3(A), t \in \{0, \ldots, T\}$$

Kapazitätsbeschränkung

$$m_{ij}(t) \leq 0, \quad \forall (i,j) \in A \backslash I_3(A), t \in \{0, \ldots, T\}$$

BENDERS MASTERPROBLEM

$$(\overline{\mathrm{P}}) : \min \quad Z$$

subject to:

Optimalitäts-Cuts

$$Z - \sum_{t \in \{0, \ldots, T\}} \sum_{(i,j) \in I_1(A)} u_{ij}(t) m_{ij}(t) \lambda_{ij}(t) \geq$$

$$\sum_{t \in \{0, \ldots, T\}} \left(\sum_{i \in N} \pi_i(t) b_i(t) + \sum_{(i,j) \in I_2(A)} u_{ij}(t) m_{ij}(t) \right),$$

$$(\pi, m) \in P_D$$

BENDERS MASTERPROBLEM

Gültigkeits-Cuts

$$\sum_{t\in\{0,...,T\}} \sum_{(i,j)\in I_1(A)} u_{ij}(t)m_{ij}(t)\lambda_{ij}(t) \leq$$

$$-\sum_{t\in\{0,...,T\}} \left(\sum_{i\in N} \pi_i(t)b_i(t) + \sum_{(i,j)\in I_2(A)} u_{ij}(t)m_{ij}(t) \right),$$

$$(\pi, m) \in R_D$$

BENDERS MASTERPROBLEM

Kantenwahl

$$\sum_{j \in \Gamma^+(i), j \neq i} \lambda_{ij}(t) \leq 1, \quad \forall i \in N \backslash l, t \in \{0, \ldots, T\}$$

$$\lambda_{ij}(t) \text{binary}, \quad \forall (i,j) \in A, t \in \{0, \ldots, T\}$$

BD ALGORITHMUS

- Lösung für das Masterproblem => Kantenauswahl (Input für das Subproblem)
- Subproblem lösen
    - Ist der neue Zielfunktionswert kleiner als der alte und alle Constraints sind erfüllt => fertig. (insb. Splitting)
    - sonst: Lösungsraum einschränken (Cuts, neue Constraints)
- wiederholen, bis eine Lösung gefunden wurde

BEISPIEL

anhand eines 4-stöckigen Gebäudes

EXPERIMENT (1)

- A.V. Williams Gebäude
  - 4 identische Stockwerke
  - 612 Knoten
  - 1.480 Kanten
  - 5 Exit-Knoten

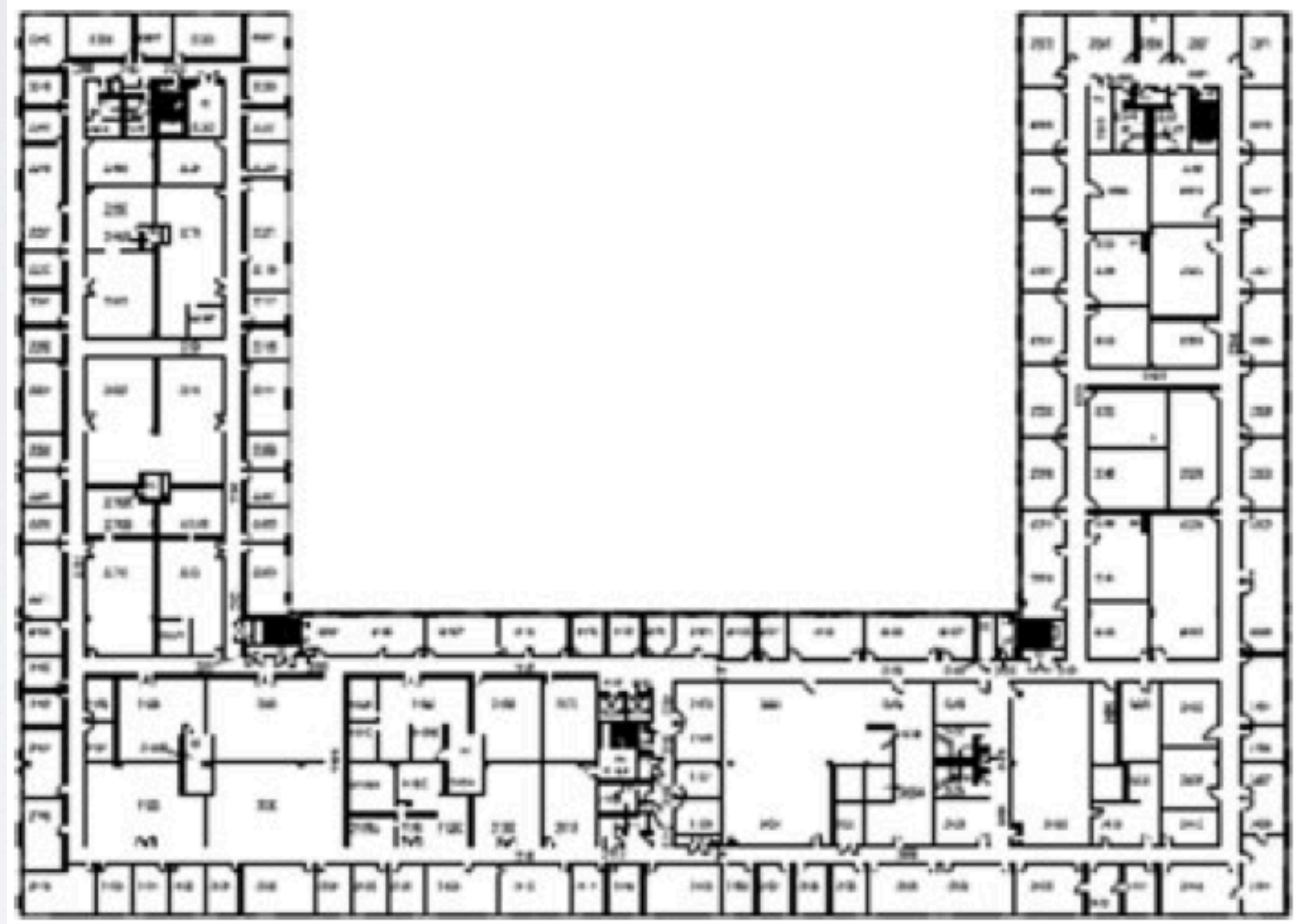

Figure 4. The A. V. Williams building second floor layout.

EXPERIMENT (2)

Table 2. Crowd movement parameters for various facilities.[a]

Facility	Density (person/ft^2)	Speed (ft/min)	Flow (person/min/ft)
Doorway	0.22	120	26
Pathway	0.20	120	24
Stairwell	0.19	95	18

[a]Ref. [7]

Table 3. Characteristics of test scenarios.

Scenario	Capacities	Travel times	Supply level	Severity of conditions
1	1	1	1	Ideal conditions
2	1	1	3	Ideal conditions
3	0.98	1.02	1	Slightly impacted
4	0.98	1.02	2	Slightly impacted
5	0.96	1.04	3	Impacted
6	0.95	1.06	3	Severely impacted, some links disabled

ERGEBNISSE

Table 4. Computational results for the real-world network.

Scenario	$\Delta(Z_{\mathrm{BEPSI}} - Z_{\mathrm{TDQFP}})$	Number of cuts	Computational time (CPU seconds) BD To 95% optimality	BD To optimality	Branch-and-cut
1	0	4	—	3.0	4.6
2	0	4	1.6	3.3	21.7
3	0	12	1.9	30.8	80.0
4	32	36	6.0	31.2	178.7
5	0	32	19.6	58.5	221.3
6	224	44	17.7	94.8	> 0.5 h

Microsoft Visual Studio C++ 6.0

Pentium 4, 3.2 GHz und 2 GB Ram

FAZIT (1)

- BEPSI wurde als MIP formuliert
- Ein exakter Algorithmus zur Lösung wurde präsentiert
- Beispiel anhand eines realen 4-stöckigen Gebäudes
- stärkere Berücksichtigung von Gruppendynamik (kein Splitten)
- Vermeiden von möglichen Gefahrensituationen (ständige live-Updates)

FAZIT (2)

- Einbeziehung von sich verschlechterden Bedingungen
- Verbesserung: Abhängigkeit der Kantenkosten (Reisezeit) von Personen pro Kante
- Übertragung auf andere Einsatzgebiete
- HeuristischeVerfahren testen und verbessern

VIELEN DANK

für die Aufmerksamkeit.