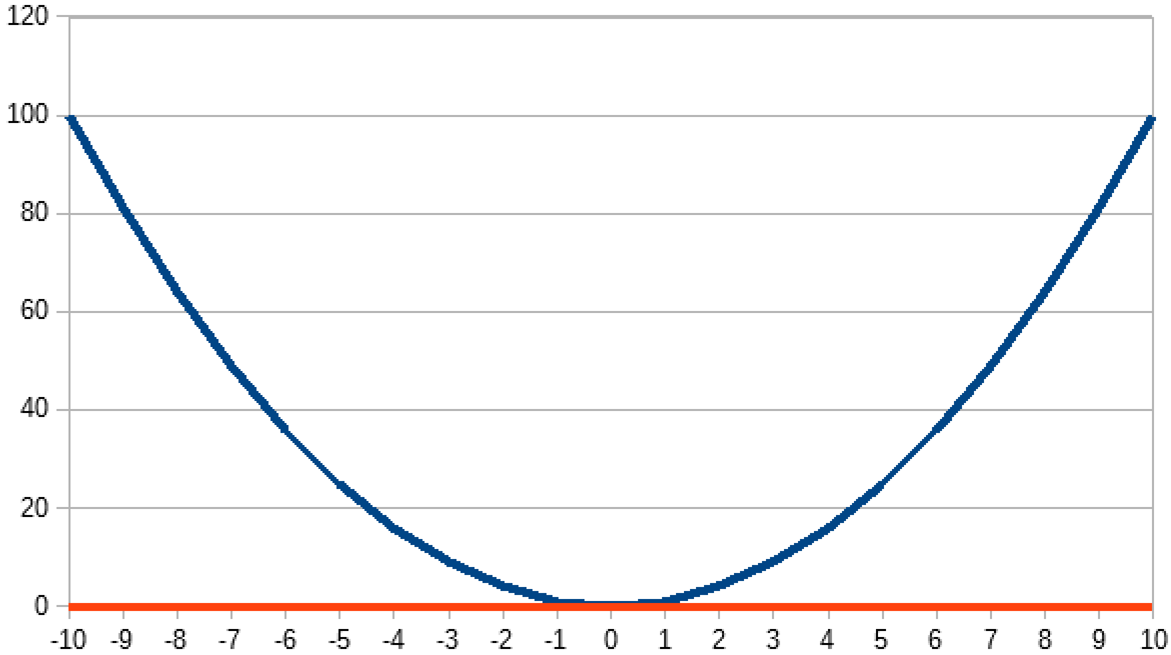
作成　眞野宏伸

1. 微分概要

微分とはある関数の導関数を求めることである。導関数は、関数の接線の傾きを表す関数で、あるグラフと一点のみを共有する直線を表します。関数 $f(x)$ の導関数は、「´」をつけて「 $f'(x)$ 」と表す。また、「 d/dx 」表すこともある。

例えば $y=x^2$ における導関数は $f'(x)=2x$ である。この式を用いて $y=x^2$ のにおける $x=0$ 接線の傾きを求めると、導関数は、ある値 x における接線の傾きを表すので、 $f'(x)$ に $x=0$ を代入すると傾きは 0 であることが分かります。



2. 偏微分概要

偏微分とは、多変数関数 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ の変数のうち、ある一つの変数 x_i 以外の n−1 個の変数の値を固定することで、 f を x_i だけの関数とみなし、この関数を x_i について微分することである。このような操作を「関数 f をで x_i 偏微分する」という。

偏微分によって得られる微分係数と導関数のことをそれぞれ、変数 x_i に関する偏微分係数、偏導関数という。また、関数 $z=f(x,y)$ で偏微分した偏導関数を、次のように表す。 $f_x(x,y)$

例として、2 変数関数 $f(x,y)=x^2y+3xy^5+x^3$ を変数 x と y でそれぞれ偏微分行う。変数 x で偏微分するには、他の変数、この問題では変数 y を定数とみて、関数を x で微分する。

$$f_x=(y)\cdot 2x+(3y^5)\cdot 1+3x^2$$
$$=2xy+3y^5+3x^2$$

同様に、変数 y で偏微分すると以下になる。

$$f_y=(x^2)\cdot 1+(3x)\cdot 5y^4+0$$
$$=x^2+15xy^4$$

3. 微分/偏微分の機械学習、深層学習における使用について

機械学習、深層学習では関数の傾きからのみから、関数の最小値を探索する最急降下法を実装する上で微分、偏微分が用いられる。

最急降下法は、ある適当な初期パラメータから始めて、その値を繰り返し更新することにより、最適なパラメータの値を求める方法の最も基本的で簡単な方法である。

4. 合成関数の微分

例題 1.

$y=(x^2+3x+1)^4$
$y=u^4$
$u=x^2+3x+1$

と2つの関数に分け，それぞれを微分する。

$$\frac{dy}{du}=4u^3$$
$$=4(x^2+3x+1)^3$$
$$\frac{du}{dx}=2x+3$$

よって、

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dy}{dx}$$
$$=4(x^2+3x+1)^3\cdot(2x+3)$$
$$=4(x^6+9x^5+30x^2+9x+1)\cdot(2x+3)$$
$$=8x^7+84x^6+348x^5+720x^4+780x^3+432x^2+116x+12$$

例題 2.

$y=\log(\sin(x^3-2))$
$y=logn(u)$
$u=\sin(t)$
$t=x^3-2$

と3つの関数に分け，それぞれを微分する。

$$\frac{dy}{du}=\frac{1}{u}$$
$$=\frac{1}{\sin(t)}$$
$$=\frac{1}{\sin(x^3-2)}$$
$$\frac{du}{dt}=\cos(t)$$
$$=\cos(x^3-2)$$
$$\frac{dt}{dx}=3x$$

よって、

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}$$
$$=\frac{1}{\sin(x^3-2)}\cdot\cos(x^3-2)\cdot 3x$$
$$=\frac{3xcos(x^3-2)}{\sin(x^3-2)}$$

5. 合成関数の偏微分

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)\sin(xy)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2)\sin(xy) + (x^2 + y^2)\frac{\partial}{\partial x}\sin(xy)$$

$$= 2x sin(xy) + (x^2 + y^2) ycos(xy)$$