Semántica de Lógica Proposicional

Laboratorio 2
Lógica para Computación

1 Interpretación y evaluación

En el laboratorio anterior nos limitamos a codificar *sintaxis*, es decir a definir qué cosas son fórmulas de Lógica Proposicional. En esta oportunidad queremos codificar la *semántica*, es decir, la manera de determinar qué valor tiene cada fórmula. Ahora, consideremos una fórmula como $p \wedge q$; ella será verdadera si y solo si p y q son verdaderas. Es decir, para saber el valor de una fórmula nos hace falta saber el valor de sus variables. Es por esto que la codificación de la semántica no sólo debe recibir una fórmula, sino también una *interpretación* de sus variables, y su codificación más inmediata es como función de tipo $\mathsf{Var} \rightarrow \mathsf{Bool}$ [1].

Ejercicios

1. Definir la función $\mathbf{eval :: (Var \rightarrow Bool) \rightarrow L \rightarrow Bool}$ tal que $\mathsf{eval\ i\ e}$ es el valor de verdad de la fórmula e cuando sus variables están determinadas por la interpretación i [2].
   Ejemplo: $\mathsf{eval}\ \lambda \mathsf{x}.\mathsf{True}\ (\mathsf{p} \wedge \neg\neg \mathsf{q}) \ = \ \mathsf{True}$

2. Definir la interpretación en la que todas las variables son verdaderas.

3. Definir la interpretación en la que todas las variables son falsas.

4. Definir la interpretación en la que sólo la variable r es falsa y todas las demás variables son verdaderas.

5. Evaluar el valor de verdad de las fórmulas codificadas en el Laboratorio 1 bajo las interpretaciones precedentes.

6. Definir la función $\mathbf{creari :: [(Var, Bool)] \rightarrow (Var \rightarrow Bool)}$, tal que:
   - La lista de entrada no contiene variables repetidas [3].
   - Interpretada como una función, la lista de entrada está comprendida en la función de salida.

7. Considerar la interpretación que se obtiene de

   $\mathsf{creari}\ [(\mathsf{r}, \mathsf{False}), (\mathsf{p}, \mathsf{True}), (\mathsf{q}, \mathsf{True})]$

   ¿Es igual a la interpretación del punto 4?

[1] *Interpretar* es dar un significado. A los efectos de validar razonamientos en esta lógica es suficiente considerar, como significado de cada variable, simplemente un valor de verdad.

[2] Diremos: el valor de verdad de e *bajo* i (notado $[\![\mathsf{e}]\!]^{\mathsf{i}}$).

[3] Por lo cual ella puede interpretarse como una *función*, dada por extensión.

2 Tabla de Verdad

La tabla de verdad es un formato conveniente para expresar la semántica de una fórmula mostrando el valor de verdad para cada interpretación posible de la fórmula. Cada fila en la tabla representa una interpretación, mencionando solo aquellas variables que ocurren en la fórmula.

Las filas y tablas de verdad se representan mediante los siguientes tipos:

```
type Fila = [(Var, Bool)]
type TV   = [(Fila, Bool)]
```

Ejercicios

1. Definir la función **filas :: [Var] → [Fila]** que, dada una lista de variables sin repeticiones, devuelve una lista conteniendo todas las filas de la tabla de verdad correspondiente a dichas variables.
   Ejemplo: $\mathsf{filas}\ [\mathsf{p}, \mathsf{q}] \ = \ [\,[(\mathsf{p}, \mathsf{False}), (\mathsf{q}, \mathsf{False})],\ [(\mathsf{p}, \mathsf{False}), (\mathsf{q}, \mathsf{True})],\ [(\mathsf{p}, \mathsf{True}),\ (\mathsf{q}, \mathsf{False})],\ [(\mathsf{p}, \mathsf{True}),\ (\mathsf{q}, \mathsf{True})]\,]$

2. Definir la función **tv :: L → TV** que devuelve la tabla de verdad de una fórmula dada.
   Ejemplo: $\mathsf{tv}\ (\mathsf{p} \wedge \neg\neg \mathsf{q}) \ = \ [\,([(\mathsf{p}, \mathsf{False}), (\mathsf{q}, \mathsf{False})],\ \mathsf{False}),\ ([(\mathsf{p}, \mathsf{False}), (\mathsf{q}, \mathsf{True})\,],\ \mathsf{False}),\ ([(\mathsf{p}, \mathsf{True}),\ (\mathsf{q}, \mathsf{False})],\ \mathsf{False}),\ ([(\mathsf{p}, \mathsf{True}),\ (\mathsf{q}, \mathsf{True})\,],\ \mathsf{True})\,]$

3. Considerar el tipo que enumera las clases de fórmulas:

   ```
   data Clase = Tau | Contra | Cont | Sat | Fal
   ```

   Definir la función **es :: L → Clase → Bool**, que determina si una fórmula pertenece a una clase dada.
   Ejemplo: $\mathsf{es}\ (\neg\neg\ \mathsf{p} \vee \neg\ (\mathsf{q} \wedge \mathsf{p}))\ \mathsf{Sat} \ = \ \mathsf{True}$

4. Utilizando la función anterior clasificar cada una de las fórmulas codificadas en el Laboratorio 1.

5. Definir la función **fnc :: L → L**, que convierte una fórmula a FNC usando el método semántico.
   Ejemplos: $\mathsf{fnc}\ (\mathsf{p} \vee \mathsf{q}) \ = \ (\neg \mathsf{p} \vee \mathsf{q}) \wedge (\mathsf{p} \vee \neg \mathsf{q}) \wedge (\mathsf{p} \vee \mathsf{q})$
   $\mathsf{fnc}\ (\mathsf{p} \supset \mathsf{q}) \ = \ \neg \mathsf{p} \vee \mathsf{q}$