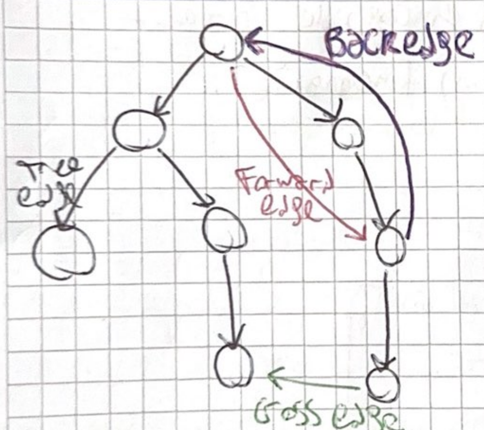
Intro a grafos: Definiciones y propiedades.
1c 2024

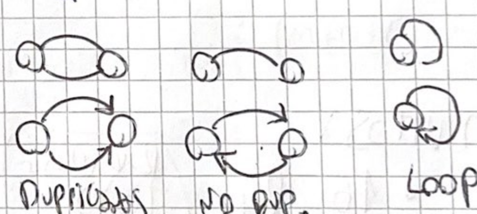
Grafos: definiciones y propiedades:

Edges de un árbol:



DAG (grafo dirigido acíclico)

Un grafo es DAG sii un DFS no deja back edges.



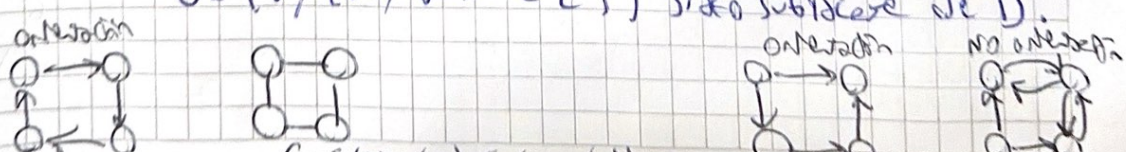
(di)Grafo Simple (grafo): Sin loops ni aristas duplicadas

Multidigrafo: Sin loops.

Pseudodigrafo: Puede contener loops.

Grafo subyacente: $D=(V,E)$ digrafo, entonces

$G=(V, \{vw / v \to w \in E\})$ grafo subyacente de D.



$G = Subyac(D) = Subyac(D') = $ "(D")"

Orientación: D orientación de G cuando G es subyacente a D y D no tiene aristas paralelas.

Grafo orientado: D grafo orientado cuando D es una orientación del grafo G.

Vecindario: El vecindario de un vértice es el conjunto $N(v)$ que contiene a todos los vértices adyacentes a v. El vecindario cerrado $N[v] = N(v) \cup \{v\}$. Existen, en un digrafo, los vecindarios de entrada $N_{in}(v)$ $(-)$ y de salida $N_{out}(v)$ $(+)$.

Grado: tamaño del vecindario de un vértice.

$d_G(v) = |N(v)|$, $d_G^-(v) = |N^-(v)|$, $d_G^+(v) = |N^+(G)|$

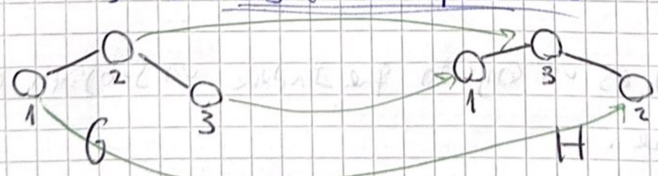
[Si D digrafo $\Rightarrow m = \sum_{v \in V} d^+(v) = \sum_{v \in V} d^-(v)$]

[$\sum d(v) = 2m$ (en grafos)]

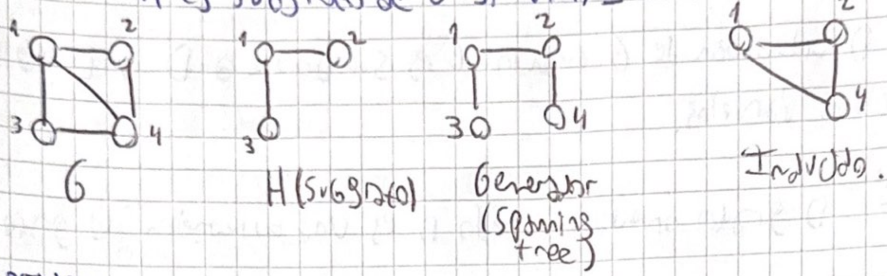
Igualdad: G es igual (idéntico) a H cuando $V(G) = V(H)$ y $E(G) = E(H)$. (y $\emptyset(G) = \emptyset(H)$ si existen pesos en las aristas).

Isomorfismo: G es isomorfo a H $(G \cong H)$ si $\exists f : V(G) \to V(H)$ biyectiva tal que $vw \in E(G)$ sii $f(v)f(w) \in E(H)$.

Esto es una relación de equivalencia.



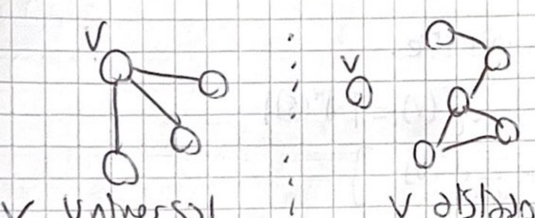
Subgrafo: H es subgrafo de G si $V(H) \subseteq V(G)$ y $E(H) \subseteq E(G)$



Generador: $V(H) = V(G) \Rightarrow$ H subgrafo generador (siendo H subgrafo).

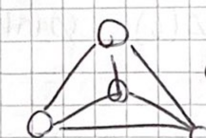
Subgrafo Inducido: $E(H) = \{vw \,/\, v,w \in V(H),\ vw \in E(G)\} \Rightarrow$ H inducido.

Universal y aislado: Vértice v es universal cuando $N[v] = V(G)$ $(d(v) = n-1)$.
Vértice v es aislado cuando $N(v) = \emptyset$ $(d(v) = 0)$.



[Es imposible que un grafo tenga un vértice v universal y un vértice u aislado] (por Palomar).

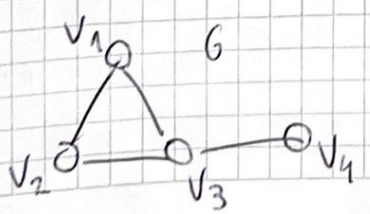
Completo: G es completo si todos sus vértices son universales.
K_n es el único grafo completo de n vértices.



Completo, es K_4.

$$\left[\ |E(K_n)| = \binom{n}{2} \quad , \sum_{v \in V} d(v) = n.(n-1) = 2m \ \right]$$

Clique: $Q \subseteq V(G)$ es un conjunto que induce un subgrafo completo es un clique.



Cliques: $\{ \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_4\}, \{v_1,v_2\}, \{v_2,v_3\}, \{v_1,v_4\}, \{v_3,v_4\}, \{v_1,v_2,v_3\} \}$

Maximal — $\{v_3,v_4\}$

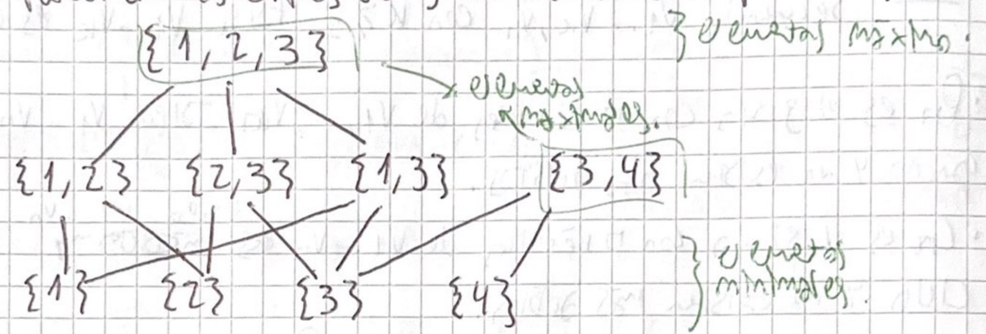
Máximo y maximal — $\{v_1,v_2,v_3\}$

Maximal (cliques):

Que no está incluido en otro subgrafo.

En el caso anterior, $\{V_3, V_4\}$ es maximal porque ese clique no está incluido en ningún otro clique. A su vez, $\{V_1, V_2, V_3\}$ es maximal por la misma razón, y máximo porque es de longitud máxima.

Orden parcial de los cliques del grafo (ordenado por "$\subseteq$")



[Un grafo completo tiene 1 clique maximal y 1 clique máximo.]

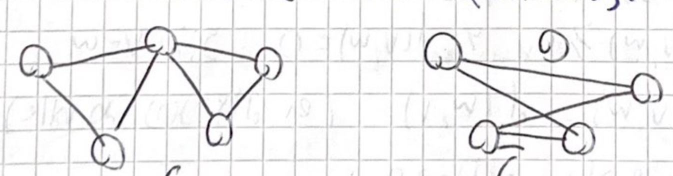
[Un grafo puede llegar a tener $2^n/2$ cliques maximales.]

Conj. Independiente: $S \subseteq V(G) / G[S]$ sólo tiene vértices aislados.

Complemento:

$\bar{G}$ es complemento de G cuando $V(G) = V(\bar{G})$

y $E(\bar{G}) = \{vw / vw \notin V(G)\}$.



G $\quad\quad$ $\bar{G}$

$$\left[\, |E(\bar{G})| = \binom{n}{2} - m \,\right]$$

Recorrido: Secuencia $p = v_1 \dots v_k$ / $v_i v_{i+1} \in E(G)$ $\forall$ $1 \le i < k$.

$v_i \to v_{i+1} \in E(G)$ en G grafo dirigido.

Circuito:

Recorrido $v_1 \dots v_k$ tal que $v_1 = v_k$.

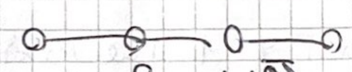
Camino simple:

~~Camino~~ Secuencia $v_1 \dots v_k$ tal que $v_i \neq v_j$ $\forall$ $i \neq j$

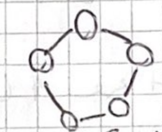
Ciclo:

Secuencia $v_1 \dots v_k, v_1$ con $k \geq 3$ tal que $v_1 \dots v_k$ es camino simple.

- P_n es el grafo con n vértices de $v_1, \dots, v_n$ tal que $v_1 \dots v_n$ es un camino y no existen más aristas.
- C_n es el grafo con n vértices de $v_1 \dots v_n$ tal que $v_1 \dots v_n$ es un ciclo y no existen más aristas.



P_4



C_5

Camino más corto: Longitud de un recorrido $v_0 \dots v_k$ es k. La distancia entre v y w es $d(v,w)$, y es la longitud del camino más corto entre v y w.

- La función distancia es una Métrica:

Una métrica satisface que

- $d(v,w) \geq 0$ y $d(v,w) = 0$ sii $v = w$
- $d(v,w) = d(w,v)$ (en dígrafos no vale).
- Desigualdad triangular:

$d(v,w) \leq d(v,m) + d(m,w)$ $\forall$ $m \in V$

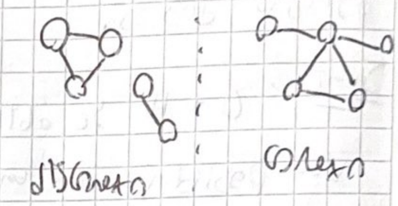
Si hay pesos en aristas esto no se satisface.

Grafo Conexo: Existe un camino entre todo par de vértices.

Componente Conexa: G es componente conexa de H si G es un subgrafo conexo maximal de H.

Un conjunto S es una componente de H cuando S induce un subgrafo conexo de H y es maximal respecto a la propiedad.

[G conexo sii tiene sólo 1 componente].



[Si $m \geq \frac{(n-1)(n-2)}{2} \Rightarrow G$ es conexo]

[Si G grafo, entonces $\exists\, v, w \in V(G)$ tales que $d(v) = d(w)$
(Por palomas, sobre el vector de $d(v)\ \forall v \in V(G)$).]

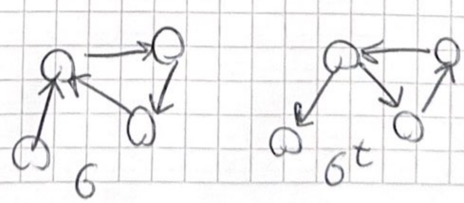
[Para cada n existe un único grafo orientado cuyos vértices tienen todos grados de salida distintos.]

Punto de articulación: Un vértice v de G es un punto de articulación si $G - \{v\}$ tiene más componentes conexas que G.

Biconexo: G es biconexo si es conexo y no tiene puntos de articulación.

[Todo grafo de n vértices con al menos $2 + \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ aristas es biconexo.]

Traspuesto: tiene las aristas invertidas



[P y Q dos caminos distintos que unen v con w. G tiene un ciclo cuyas aristas pertenecen a P o Q.]

[G conexo. Todo par de caminos simples de longitud máxima de G tiene un vértice en común.]

<u>Unión</u>: $G \cup H$ es el grafo con $V(G \cup H) = V(G) \cup V(H)$ y $E(G \cup H) = E(G) \cup E(H)$. $G \cup H$ se obtiene uniendo G con H sin agregar aristas.

<u>Junta</u>: $G + H$ se obtiene de $G \cup H$ agregando todas las aristas vw posibles entre un vértice $v \in V(G)$ y otro $w \in V(H)$.

[G es unión sii $\bar{G}$ es disconexo].

[G es junta sii $\bar{G}$ es grafo unión],

[G es junta sii $\bar{G}$ es disconexo].

[Sean $G_2 = K_2$, $G_{n+1} = \overline{G_n \cup K_1}$ $\forall n \geq 2$.
G_n tiene un único par de vértices de igual grado.]

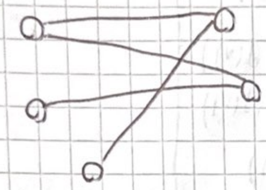
<u>Triángulos</u>

[Todo grafo de $2n$ vértices con más de n^2 aristas tiene algún triángulo.]

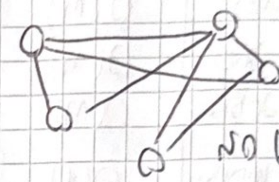
Para G bipartito, son equivalentes:

[(1) G es bipartito.
(2) todo subgrafo de G es bipartito.
(3) cada componente de G es bipartito.]

Bipartito: Un grafo bipartito es un grafo cuyos vértices se pueden separar en 2 conjuntos disjuntos, de forma tal que las aristas no puedan relacionar vértices de un mismo conjunto.



Grafo bipartito:



No bipartito

[$G-\{v\}$ es bipartito $\forall\, v \in V(G)$ si G es bipartito o un ciclo impar.]

Gemelos: u y v son vértices gemelos cuando $N(u)=N(v)$

Mellizos: u y v son mellizos cuando $N[u]=N[v]$

- Las relaciones de gemelos y mellizos son relaciones de equivalencia (son reflexivas, transitivas y simétricas).

Digrafo acíclico (DAG): No tiene ciclos dirigidos.

[Si todos los vértices en un digrafo D tienen grado de salida mayor a 0 (cero), entonces D tiene algún ciclo.]

[Un digrafo D es acíclico si D es trivial o D tiene un vértice con $d_{out}(v)=0$ tal que $D\setminus\{v\}$ acíclico.]

Operaciones de las representaciones (complejidades):

	Lista de aristas	Matriz de adyacencia	Lista de adyacencias
construcción	$O(m)$	$O(n^2)$	$O(n+m)$
adyacentes?	$O(m)$	$O(1)$	$O(d(v))$
vecinos	$O(m)$	$O(n)$	$O(d(v))$
agregar arista	$O(m)$	$O(1)$	$O(d(w)+d(v))$
remover arista	$O(m)$	$O(1)$	$O(d(w)+d(v))$
agregar vértice	$O(1)$	$O(n^2)$	$O(n)$
remover vértice	$O(m)$	$O(n^2)$	$O(n+m)$

- Sea T árbol generador de un grafo (conexo) G con raíz r, sean V y W vértices que están a distancia par e impar de r:

[Si existe una arista $\in E(G) \setminus E(T)$ tal que $v, w \in V$ o $v, w \in W$, entonces el único ciclo de $T \cup \{vw\}$ tiene longitud impar.]

[Si toda arista $vw \in E(G) \setminus E(T)$ une un vértice de V con otro de W entonces (V, W) es una bipartición de G y G es bipartito.]

[Un grafo G es bipartito sii sus componentes conexas son bipartitas.]

Puente: Arista de G, que cumple que su remoción de G aumenta la cantidad de componentes conexas.

- Sea T un árbol DFS de G conexo;

[vw es puente de G sii $vw \notin$ a ningún ciclo de G.]

[Si $vw \in E(G) \setminus E(T)$, entonces v es un ancestro de w en T o viceversa.]

[$vw \in E(G)$ tal que el nivel de v en T es $\leq$ al nivel de w en T. vw es puente sii v es padre de w en T y ninguna arista de $G \setminus \{vw\}$ une a un descendiente de w (θ a w) con un ancestro de v (θ con v).]

- Son equivalentes, para un grafo G, una orientación D de G, un árbol DFS T, G es conexo, $D(T)$ orientación de G tal que $v \to w$ es arista de $D(T)$ cuando v es el padre de w en T o w ancestro no padre de v en T:

(I) G admite orientación fuertemente conexa.

(II) G no tiene puentes.

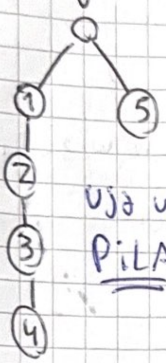
(III) $\forall$ árbol DFS de T ocurre que $D(T)$ es fuertemente conexo.

(IV) $\exists$ árbol DFS de T tal que $D(T)$ es fuertemente conexo.

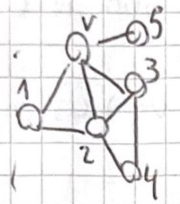
[Todo árbol BFS de G enraizado en v es v-geodésico:]

Un árbol generador T de G es v-geodésico si la distancia entre v y w en T es igual a la distancia entre v y w en G, $\forall\, w \in V(G)$.

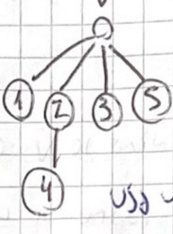
DFS



Usa una PILA



BFS



Usa una COLA

Opciones para demostrar:

- Inducción: Tomo un grafo G_{k+1} de k+1 vértices (o k+1 aristas) con ciertas características, y le saco un vértice (o arista) con alguna estrategia, y veo se cumple P. Luego, veo que agregando el vértice (o arista) sigue P cumpliéndose.
- Absurdo.
- Constructivamente $(P \rightarrow q)$
- Contrarrecíproco $(\neg q \rightarrow \neg P)$.

Árbol: grafo conexo sin ciclos (Bosque conexo).

Bosque: grafo sin ciclos.

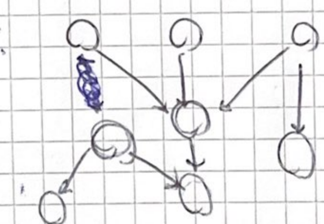
Hoja: vértice con grado 1 ($d(v)=1$).

[$n = m + k$, k = # componentes conexas, en un bosque].

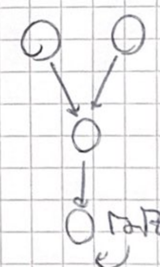
• Para un grafo G con k componentes, son equivalentes:

1. G es un bosque.
2. $\exists$ a lo sumo un camino simple de v a w $\forall\, v,w \in V(G)$.
3. $G - vw$ tiene $k+1$ componentes $\forall\, vw \in E(G)$.
4. Si v y w están en el mismo componente, entonces $G + vw$ tiene exactamente un ciclo que contiene a $vw \notin E(G)$.

Árbol orientado:



Árbol enraizado:



[Todo bosque enraizado tiene al menos un vértice v tipo $d_{out}(v)=0$.]

Ancestros de un vértice (v,w): vértices en el camino entre v y w.

Descendientes de un vértice: v es desc. de w si w es ancestro de v.

Altura: altura máxima de los niveles.

Árbol n-ario: todo vértice tiene $d_{out}(v) = n$.

Árbol balanceado: Toda hoja tiene la misma altura.

Para un grafo G, son equivalentes:

1. G es bipartito.
2. Todos los ciclos de G tienen longitud par.
3. Si T es un árbol generador enraizado de G, entonces toda arista de $E(G) \setminus E(T)$ une 2 vértices cuyos niveles tienen distinta paridad.
4. Todo subgrafo de G es bipartito.
5. Toda componente de G es bipartita.

Notación:

En conjuntos, si $A\{1,2,3,4\}$ y $B = \{2,3,5,6\}$

$A \setminus B = \{1,4\}$ (son los elementos en A que no están en B).