

Etude d'une poutre de module d'Young E

Détermination du module d'Young et relation avec les fréquences de résonance.

- | | |
|---|--|
| • Conceptions et réalisations mécaniques : | Christian Ollier (assistant ingénieur) |
| • Conceptions et réalisation électroniques : | Luc Floriot (assistant ingénieur) |
| • Travail expérimental et rédaction du document : | Jean-Baptiste Desmoulins (P.R.A.G.) |

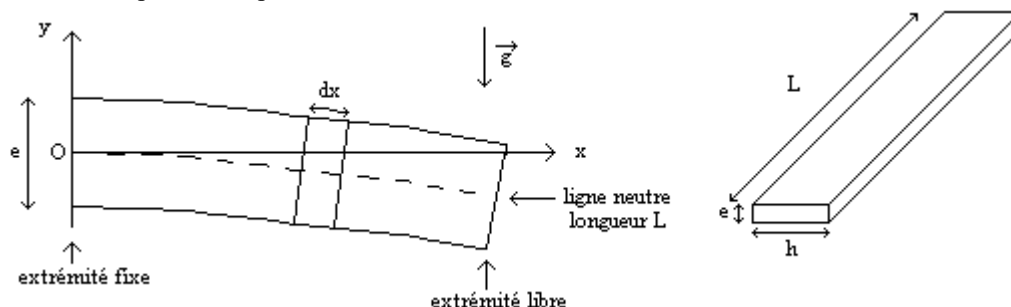
Ce travail expérimental comporte deux parties principales. Dans la première, on cherche à déterminer le module d'Young E d'une lame en faisant un essai en statique. Il s'agit de mesurer la flèche pour plusieurs longueurs de lame. Dans la seconde, on va chercher à déterminer les fréquences de résonance de la lame soumise à une excitation extérieure obtenue en couplant une bobine alimentée par un courant sinusoïdal avec un aimant fixé sur la lame.

Par la suite, le matériau sera supposé homogène de module d'Young E, masse volumique μ , de longueur L, d'épaisseur e, de largeur h, de section droite $S = e \cdot h$ et de masse globale m. L'accélération de la pesanteur sera notée g.

I. Approche statique du problème.

I.1. Système étudié.

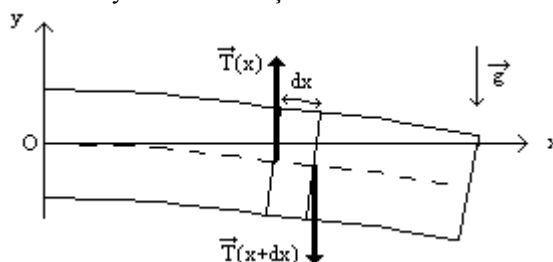
Le système étudié peut être représenté à travers le schéma suivant :



Placé dans le champ de pesanteur, la poutre, fixée à l'une de ses extrémités et laissée libre à l'autre, va fléchir sous l'action de son poids. Les forces élastiques mises en jeu en raison de la déformation vont jouer le rôle de forces de rappel et conduire à l'état d'équilibre. C'est à travers elles que nous allons faire intervenir le module d'Young E du matériau dont est constituée la poutre.

I.2. Forces tranchantes.

Les forces tranchantes sont la résultante, suivant l'axe Oy, des forces élastiques de rappel dues à la déformation de la poutre sous l'action de la pesanteur. On va s'intéresser à l'élément de longueur dx. Géométriquement, on peut représenter le système de la façon suivante :



- L'équilibre des forces, suivant l'axe Oy, pour l'élément de longueur dx conduit à la relation

$$T(x) \cdot \vec{j} - T(x+dx) \cdot \vec{j} - \mu \cdot S \cdot dx \cdot g \cdot \vec{j} = \vec{0}$$

soit

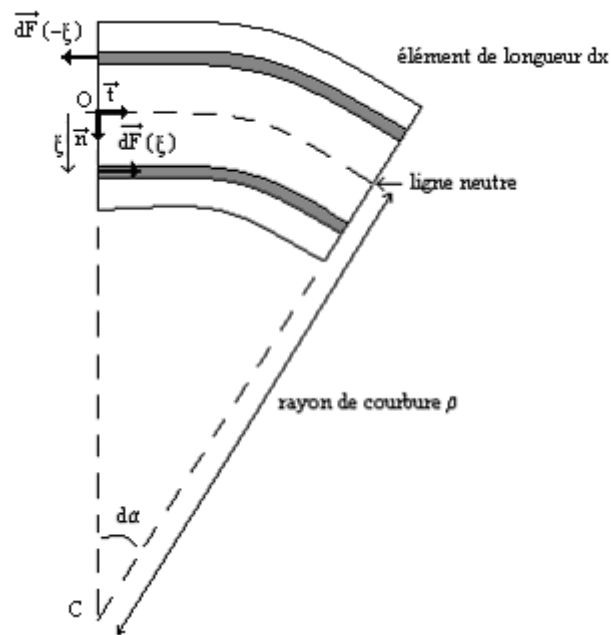
$$\frac{dT}{dx} = -\mu.S.g \quad (1)$$

• La force tranchante s'exerçant sur un élément de section S, sera à l'origine d'un moment élémentaire de couple tel que

$$d\vec{\Gamma} = -T(x).dx.\vec{k} \quad (2)$$

1.3. Forces élastiques axiales (axe principal de la poutre).

C'est principalement suivant l'axe de la poutre que s'exercent les forces élastiques lorsque cette dernière fléchit. En dessous d'une ligne, appelée ligne neutre, l'élément de longueur dx sur lequel nous avons travaillé précédemment, sera comprimé, alors qu'au-dessus de cette ligne, il sera étiré. La ligne neutre est le lieu des centres de gravité des éléments des sections de poutre. Elle reste de longueur L. Au-dessus, les lignes seront allongées, en dessous, elles seront raccourcies. Pour se représenter le problème, nous allons travailler avec le schéma suivant :



Sur la figure, on constate que lorsque ξ est positif, la force élémentaire $dF(\xi)$ comprime l'élément de longueur dx , alors que quand ξ est négatif, elle l'étire.

• *Loi de Hooke à l'élément repéré par la position ξ .*

Si E représente le module d'Young du matériau constituant la poutre, alors, pour un élément de longueur dx et de section $dS = h.d\xi$ (exemple d'élément gris sur le dessin précédent), en appliquant la loi de Hooke, si σ représente la contrainte appliquée à l'échantillon, on a la relation

$$\sigma = \frac{dF}{dS} = E. \frac{d(dx)}{dx}$$

Si ρ représente le rayon de courbure de l'élément dx étudié, compte tenu des orientations choisies, on peut écrire que

$$dx = \rho.d\alpha \quad \text{et} \quad dx + d(dx) = (\rho - \xi).d\alpha$$

On a donc

$$d(dx) = -\xi.d\alpha$$

La loi de Hooke conduit donc à

$$\sigma = \frac{dF}{dS} = E. \frac{d(dx)}{dx} = -E. \frac{\xi}{\rho}$$

• *Rayon de courbure.*

Nous allons travailler dans le repère de Frenet, en prenant les vecteurs tangent \vec{t} et normal \vec{n} tels que l'on ait la relation

$$\frac{\vec{n}}{\rho} = \frac{d\vec{t}}{ds}$$

où s est l'abscisse curviligne et où le vecteur normal est orienté vers le centre de courbure C pour que le rayon de courbure ρ soit positif.

Si la courbure que nous cherchons à établir est donnée par une formulation de type $y = f(x)$, alors, le rayon de courbure ρ de cette dernière est donné par la relation (le signe – est destiné à conserver un rayon de courbure positif, compte tenu des repère choisis pour x et y):

$$\frac{1}{\rho} = - \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{3/2}}$$

- *Moment de couple Γ exercé par les forces dF sur toute une section de poutre.*

Pour calculer ce moment de couple, on va intégrer sur une section S en prenant le centre de rotation en O . Alors, on peut écrire que

$$\vec{\Gamma} = \iint_{(S)} \vec{OM} \wedge d\vec{F} = \int_{-e/2}^{e/2} -\xi \cdot \vec{j} \wedge d\vec{F} = \int_{-e/2}^{e/2} -\xi \cdot \vec{j} \wedge E \cdot \left(\frac{\xi}{\rho} \cdot dS \right) \cdot \vec{i} = \vec{k} \cdot \frac{E}{\rho} \cdot \int_{-e/2}^{e/2} \xi^2 dS = \frac{E}{\rho} \cdot I \cdot \vec{k}$$

soit

$$\vec{\Gamma} = \frac{E}{\rho} \cdot I \cdot \vec{k} \quad (3)$$

où I est appelé moment quadratique. Compte tenu de la géométrie avec laquelle nous travaillons, on a

$$I = \int_{-e/2}^{e/2} \xi^2 h \cdot d\xi = h \left[\xi^3 / 3 \right]_{-e/2}^{+e/2} = \frac{h \cdot e^3}{12}$$

soit

$$I = \frac{h \cdot e^3}{12} \quad (4)$$

Si on suppose la flexion assez faible, on peut écrire que

$$1 \gg \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \quad (\text{hypothèse H1}) \quad \text{Soit} \quad \frac{1}{\rho} = - \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{3/2}} \approx - \frac{d^2 y}{dx^2}$$

Alors le moment de fléchissement peut s'écrire

$$\vec{\Gamma} = -E \cdot I \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} \cdot \vec{k} \quad (5)$$

- *Relations importantes déduites de ce qui précède.*

Sachant que d'après (2),

$$d\vec{\Gamma} = -T(x) \cdot dx \cdot \vec{k}$$

et que d'après (5)

$$d\vec{\Gamma} = -E \cdot I \cdot \frac{d^3 y}{dx^3} \cdot \vec{k} \cdot dx$$

On a

$$T(x) = E \cdot I \cdot \frac{d^3 y}{dx^3} \quad (6)$$

Par ailleurs, d'après (1), on peut écrire que

$$-E \cdot I \cdot \frac{d^4 y}{dx^4} = \mu \cdot S \cdot g \quad (7)$$

1.4. Etat de la poutre au repos sous l'action de son propre poids (pas de force d'extrémité).

Si la poutre est fixée à l'une de ses extrémités et qu'elle est libre à l'autre, on peut donner les conditions aux limites suivantes :

$$y(0) = 0 \quad ; \quad \frac{dy}{dx}(0) = 0 \quad ; \quad \Gamma(L) = 0 \quad ; \quad T(L) = 0$$

soit, compte tenu de (5) et (6)

$$y(0) = 0 \quad ; \quad \frac{dy}{dx}(0) = 0 \quad ; \quad \frac{d^2 y}{dx^2}(L) = 0 \quad ; \quad \frac{d^3 y}{dx^3}(L) = 0$$

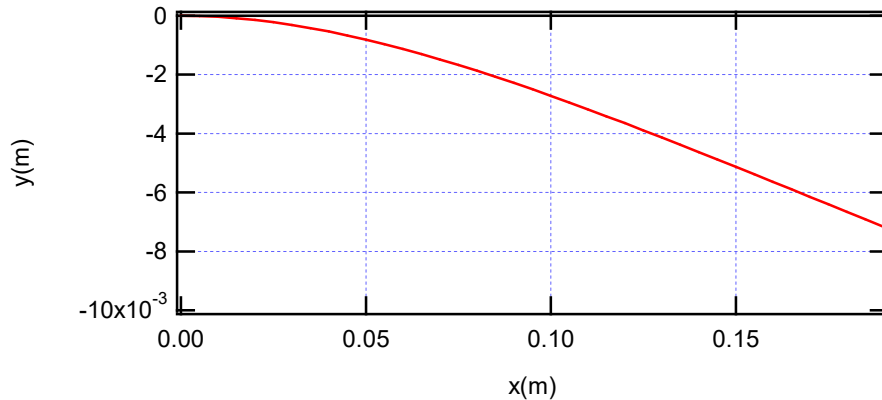
En intégrant la relation (7) et en tenant compte des conditions aux limites, on trouve que

$$\begin{aligned}\frac{d^3 y}{dx^3} &= -\frac{\mu.S.g}{E.I} \cdot (x-L) \\ \frac{d^2 y}{dx^2} &= -\frac{\mu.S.g}{E.I} \cdot \left(\frac{x^2}{2} - L.x + \frac{L^2}{2}\right) \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{\mu.S.g}{E.I} \cdot \left(\frac{x^3}{6} - L.\frac{x^2}{2} + \frac{L^2}{2}x\right)\end{aligned}$$

soit finalement

$$y = -\frac{\mu.S.g}{E.I} \cdot \left(\frac{x^4}{24} - L.\frac{x^3}{6} + L^2.\frac{x^2}{4}\right) = -\frac{12.\mu.g}{E.e^2} \cdot \left(\frac{x^4}{24} - L.\frac{x^3}{6} + L^2.\frac{x^2}{4}\right) \quad (8)$$

Pour un matériau de module d'Young E de l'ordre de 10^{11} N/m², de masse volumique 8.10^3 kg/m³ (ordres de grandeur commun pour les métaux), avec une poutre de 0.5 mm d'épaisseur et de longueur $L = 20$ cm on obtient une courbure d'allure suivante :



• *Exploitation concernant $y(L)$:*

En bout de poutre, on a

$$y(L) = -\frac{\mu.S.g}{E.I} \cdot \left(\frac{L^4}{8}\right) = -\frac{\mu.(h.e).g}{E.\frac{h.e^3}{12}} \cdot \left(\frac{L^4}{8}\right) = -\frac{3.\mu.g.L^4}{2.e^2} \cdot \frac{1}{E}$$

soit

$$y(L) = -\frac{3.\mu.g.L^4}{2.e^2} \cdot \left(\frac{1}{E}\right) \quad (9)$$

Pour déterminer le rayon de courbure, on peut mesurer la déviation par rapport à l'horizontale en L , pour différentes valeurs de L . On peut alors en déduire E .

• *Vérification de l'hypothèse (H1) :*

Pour les mêmes données que sur l'allure calculée précédemment, on a calculé $(dy/dx)^2$ afin de comparer sa valeur à 1. Sur une longueur de 20 cm, avec 0.5 mm d'épaisseur, l'hypothèse (H1) est vérifiée pour un module d'Young de 10^{11} N/m². En revanche, ça n'est plus vrai pour 10^{10} N/m². Si on diminue le module d'Young, il faudra augmenter l'épaisseur pour que l'hypothèse soit vérifiée.

1.5. Etat de la poutre au repos sous l'action de son propre poids et d'une force d'extrémité.

On va s'intéresser à l'écart y entre la position de l'extrémité de la lame avec force d'extrémité et sans force d'extrémité (la flexion ne dépend alors que du poids de la lame). On fera en sorte de travailler avec une longueur de poutre assez faible, pour que la flèche en l'absence de force d'extrémité soit quasiment nulle, et pour qu'en présence de force, la flèche reste assez faible.

Si on place une masse M à l'extrémité de la poutre, alors on peut dire que cette force va être à l'origine d'un moment qui va compenser le moment fléchissant. On aura alors en tout x la relation suivante :

$$-E.I.\frac{d^2 y}{dx^2} = F_e \cdot (L-x) = M.g \cdot (L-x)$$

On conserve les conditions aux limites suivantes

$$y(0) = 0 \quad ; \quad \frac{dy}{dx}(0) = 0$$

soit
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M \cdot g}{E \cdot I} \cdot \left(L \cdot x - \frac{x^2}{2} \right)$$

et donc
$$y = -\frac{M \cdot g}{E \cdot I} \cdot \left(L \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) = -\frac{M \cdot g \cdot L}{2 \cdot E \cdot I} \cdot x^2 \cdot \left(1 - \frac{x}{3 \cdot L} \right) = -\frac{M \cdot g \cdot L}{2 \cdot E \cdot \frac{h \cdot e^3}{12}} \cdot x^2 \cdot \left(1 - \frac{x}{3 \cdot L} \right) = -\frac{2 \cdot M \cdot g \cdot L}{E \cdot h \cdot e^3} \cdot x^2 \cdot \left(3 - \frac{x}{L} \right)$$

soit
$$y(L) = y_M(L) - y_o(L) = -\frac{4 \cdot g \cdot L^3}{E \cdot h \cdot e^3} \cdot M \quad (10)$$

On peut donc également relever la flèche en fonction de la masse M fixée à l'extrémité de l'échantillon pour récupérer le module d'Young connaissant les paramètres géométriques du matériau.

II. Approche dynamique : fréquences de résonance du système.

Nous allons maintenant nous intéresser au système en mouvement, lorsqu'il est sollicité par une excitation que nous supposons sinusoïdale, et étudier les fréquences de résonances observables.

L'excitation est réalisée en couplant un aimant solidaire de la poutre avec une bobine parcourue par un courant à la fréquence d'excitation.

L'amplitude de la vibration en extrémité de lame sera observée au moyen d'une jauge de contrainte collée en bout de lame. La variation de résistance de cette dernière, lors de étirements et des contractions dues à l'oscillation de la poutre, sera traduite en tension au moyen d'un pont résistif, tension qui sera amplifiée dans un amplificateur différentiel. Il faudra au préalable établir la relation entre la position du bout de la lame (mesurée avec un réglet), et la tension en sortie de l'ampli.

II.1. Modélisation du problème.

Nous allons reprendre la modélisation précédente concernant les forces tranchantes. Cette fois, nous allons négliger le poids de l'élément de longueur dx , et nous ne prendrons en compte que l'inertie de cet élément. Nous ne prendrons pas non plus en compte de phénomènes dissipatifs susceptibles d'amortir les oscillations. On peut alors écrire que

$$T(x) \cdot \vec{j} - T(x + dx) \cdot \vec{j} = \mu \cdot S \cdot dx \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} \cdot \vec{j}$$

Donc, dans ce cas, l'équation (1) se réécrit de la façon suivante :

$$-\frac{dT}{dx} = \mu \cdot S \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} \quad (11)$$

L'équation (6) reste valable. On en déduit donc que

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + \frac{\mu \cdot S}{E \cdot I} \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} = 0 \quad (12)$$

II.2. Calcul des fréquences propres du système excité avec une extrémité fixe et l'autre libre.

L'équation différentielle précédente admet des solutions de la forme

$$y(x, t) = Y(x) \cdot e^{j\omega \cdot t}$$

avec

$$\frac{d^4 Y}{dx^4} - \frac{\mu \cdot S \cdot \omega^2}{E \cdot I} \cdot Y = 0$$

On pose alors $k^4 = \frac{\mu \cdot S \cdot \omega^2}{E \cdot I}$

Les solutions de cette équation sont de la forme

$$Y(x) = A \cdot \cos(k \cdot x) + B \cdot \sin(k \cdot x) + C \cdot \text{ch}(k \cdot x) + D \cdot \text{sh}(k \cdot x)$$

Les conditions aux limites sont les suivantes :

$$Y(0) = 0 \quad ; \quad \frac{dY}{dx}(0) = 0 \quad ; \quad \frac{d^2 Y}{dx^2}(L) = 0 \quad ; \quad \frac{d^3 Y}{dx^3}(L) = 0$$

Sachant que

$$\frac{dY}{dx} = -A \cdot k \sin(k \cdot x) + B \cdot k \cos(k \cdot x) + C \cdot \text{sh}(k \cdot x) + D \cdot \text{ch}(k \cdot x)$$

$$\frac{d^2 Y}{dx^2} = -A.k^2 \cos(k.x) - B.k^2 .\sin(k.x) + C.k^2 .\text{ch}(k.x) + D.k^2 .\text{sh}(k.x)$$

$$\frac{d^2 Y}{dx^2} = A.k^3 \sin(k.x) - B.k^3 .\cos(k.x) + C.k^3 .\text{sh}(k.x) + D.k^3 .\text{ch}(k.x)$$

On est alors ramené à l'étude du système suivant

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -\cos(k.L) & -\sin(k.L) & \text{ch}(k.L) & \text{sh}(k.L) \\ \sin(k.L) & -\cos(k.L) & \text{sh}(k.L) & \text{ch}(k.L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pour obtenir les modes propres, on cherche les fréquences pour lesquelles le déterminant de la matrice est nul ce qui nous conduit à la relation

$$1 + \cos(k.L).\text{ch}(k.L) = 0 \quad (13)$$

Cette dernière n'est valable que pour quelques valeurs discrètes de k, que nous noterons k_i par la suite. A ces valeurs de k_i correspondent des fréquences, que nous appellerons fréquences propres de vibration notées f_i par la suite.

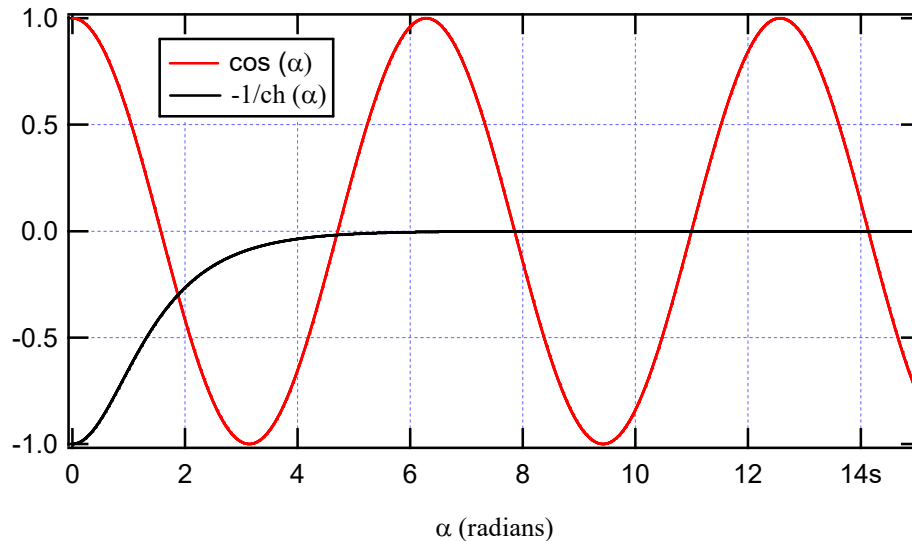
Si on pose $\alpha_i = k_i.L$ où les α_i représentent les valeurs de k.L pour lesquelles la condition (13) est vérifiée, alors on constate que

$$f_i = \frac{1}{2.\pi} .\alpha_i^2 .\sqrt{\frac{I}{S}} .\frac{1}{L^2} .\sqrt{\frac{E}{\mu}}$$

Avec la géométrie parallélépipédique choisie, on a

$$f_i = \frac{1}{2.\pi} .\alpha_i^2 .\sqrt{\frac{e^2}{12}} .\frac{1}{L^2} .\sqrt{\frac{E}{\mu}} \quad (14)$$

Pour déterminer les valeurs des α_i , on peut utiliser une approche graphique en recherchant l'intersection entre $\cos(\alpha)$ et $-1/\text{ch}(\alpha)$.



Graphiquement, on obtient que $\alpha_0 = 1.875$; $\alpha_1 = 4.694$; $\alpha_2 = 7.855$; puis $\alpha_i = (2.i+1).\pi/2$ pour $i \geq 3$

III. Détermination du module d'Young par un essai statique.

Lors de cet essai, nous allons étudier la déformation de l'échantillon sous l'effet de son propre poids ou d'un effort d'extrémité pour remonter au module d'Young. La lame utilisée est un régle métallique réalisé à base de matériaux ferromagnétiques.

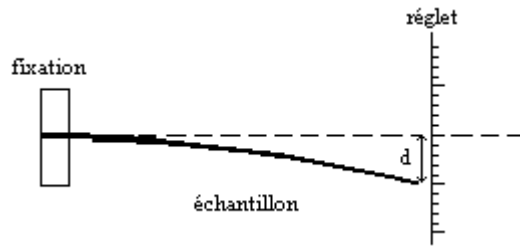
Pour ce régle, nous disposons des caractéristiques suivantes :

$$e = 0.48 \pm 0.01 \text{ mm} \quad h = 12.67 \pm 0.01 \text{ mm} \quad L_{\max} = 300 \pm 1 \text{ mm}$$

On donne l'accélération de pesanteur $g = 9.81 \pm 0.01 \text{ m.s}^{-2}$.

III.1. Présentation du dispositif expérimental.

Nous disposons d'une lame qui peut être fixée à l'une de ses extrémités. Avec un réglet, on observe l'amplitude de déviation d par rapport à l'horizontale.



Deux expériences sont envisagées.

- Expérience 1 : aucune contrainte n'est appliquée à l'extrémité libre, et on étudie d en fonction de la longueur L de lame entre l'extrémité de la fixation et le réglet.

On trace alors d en fonction de L^4 . On obtient une droite dont la pente conduit à E , connaissant l'épaisseur e de la lame, l'accélération de la pesanteur g et la masse volumique μ du matériau utilisé pour réaliser la lame. On rappelle que

$$d = \frac{3 \cdot \mu \cdot g}{2 \cdot e^2 \cdot E} \cdot L^4$$

- Expérience 2 : on applique un effort à l'extrémité libre. Il s'agit d'une simple masse M attachée en bout de lame. On travaille avec une longueur $L = 100 \pm 1 \text{ mm}$ de réglet qui est suffisamment faible pour qu'en l'absence de masse M , d puisse être considéré comme nul. On étudie l'évolution de la flèche d en fonction de la masse M pour une longueur de lame L donnée. On obtient une droite dont la pente conduit à E , connaissant l'accélération de la pesanteur g , l'épaisseur e , la largeur h et la longueur L de la lame puisque dans ce cas, on a

$$d = \frac{4 \cdot g \cdot L^3}{E \cdot h \cdot e^3} \cdot M$$

III.2. Résultats expérimentaux et exploitation.

- Masse volumique du matériau :

Pour le réglet, on a les données suivantes :

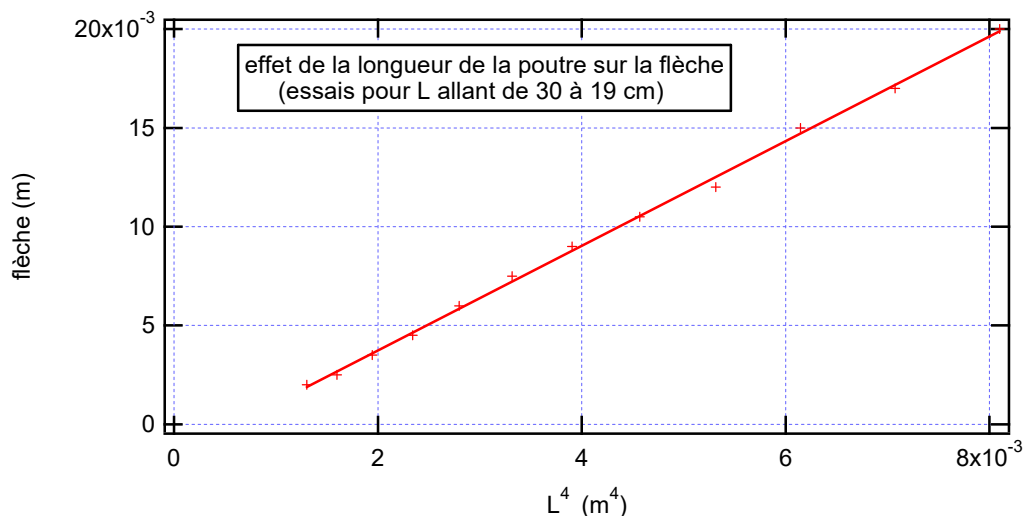
Longueur totale : $L_{\text{max}} = 311 \pm 1 \text{ mm}$; Masse : $m = 13.04 \pm 0.01 \text{ g}$; Epaisseur : $e = 0.48 \pm 0.01 \text{ mm}$;

Largeur : $h = 12.67 \pm 0.01 \text{ mm}$

On trouve donc une masse volumique $\mu = 6900 \pm 200 \text{ kg/m}^3$

- Expérience 1 :

En faisant varier la longueur L de la lame pour des valeurs allant de 30 cm à 19 cm, afin de travailler avec des flèches mesurables, on obtient les relevés expérimentaux suivants :



Si toutes les grandeurs sont exprimées en unités S.I., un ajustement sur les points expérimentaux conduit à la relation suivante :

$$d = (2.65 \pm 0.04).L^4$$

Compte tenu des caractéristiques de la lame, si toutes les grandeurs sont exprimées en unités S.I., on a théoriquement

$$d = (4.40 \pm 0.30).10^{11}.L^4/E$$

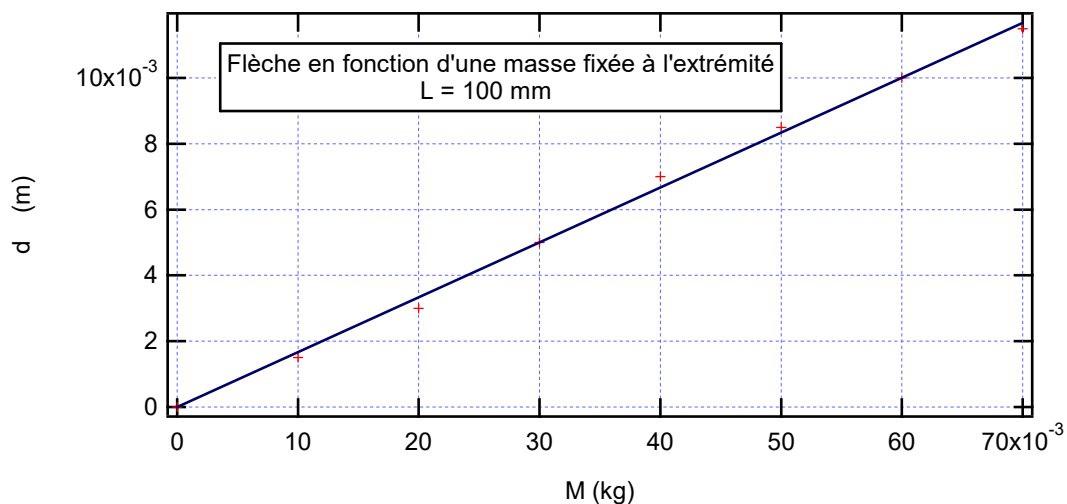
On en déduit donc que

$$E = (1.67 \pm 0.14).10^{11} \text{ N/m}^2 = (167000 \pm 14000) \text{ MPa}$$

rq : La droite obtenue ne passe pas par l'origine. Elle présente une légère flexion en l'absence force de gravité et il est possible que les résultats en soient affectés.

• Expérience 2 :

Dans les conditions décrites précédemment, expérimentalement, on obtient la courbe suivante :



Compte tenu des données géométriques du problème, en exprimant toutes les grandeurs en unités S.I., on doit avoir théoriquement

$$d = (2.80 \pm 0.25).10^{10}.M/E$$

Quantitativement, pour des grandeurs exprimées en unités S.I., on trouve, au moyen d'un ajustement sur les points expérimentaux que

$$d = (0.167 \pm 0.002).M$$

On en déduit que

$$E = (1.68 \pm 0.18).10^{11} \text{ N/m}^2 = 168000 \pm 18000 \text{ MPa}$$

III.3. Exploitation : calculs des fréquences propres de la lame étudiée

Les expériences précédentes nous ont conduits à un encadrement de la valeur du module d'Young E. Nous pouvons donc calculer la valeur des fréquences des modes propres de vibration de la poutre.

Pour une lame de longueur 300mm, compte tenu des caractéristiques de cette dernière, en régime forcé, on devra observer des résonances aux fréquences suivantes :

$$f_0 = 4,25 \pm 0,20 \text{ Hz} ; \quad f_1 = 26,7 \pm 1,2 \text{ Hz} ; \quad f_2 = 74,7 \pm 3,4 \text{ Hz}$$

IV. Détermination des fréquences de résonance.

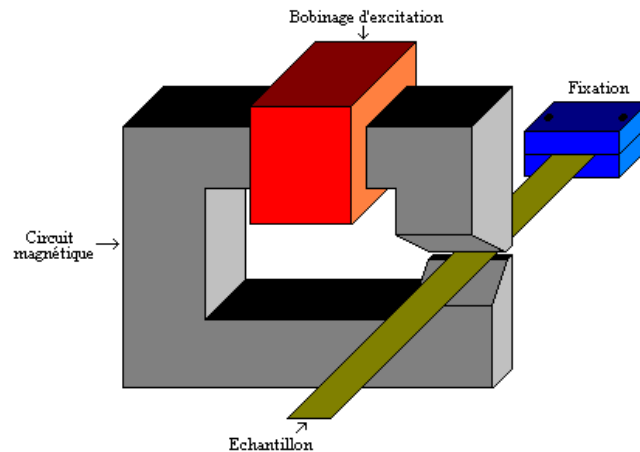
On va commencer par mesurer les fréquences de résonance de la lame. De ces fréquences, on va chercher à déterminer le module d'Young du matériau dont elle est constituée.

IV.1. Présentation du dispositif expérimental.

• Excitation de la lame :

Pour exciter la lame, on va utiliser un générateur amplifié en puissance, avec un pas de réglage en fréquence assez fin pour nous permettre d'observer une résonance de fort facteur de qualité. Cet ensemble alimente le bobinage de 1000 spires associé à un circuit magnétique. On supposera que, sur la plage de fréquence étudiée, la variation d'impédance du circuit d'excitation est assez faible, pour que le courant maximum soit constant à tension maximale fixée, afin que l'effort appliqué à la lame ne change pas avec la fréquence. La variation de flux

magnétique dans l'entrefer va permettre de créer un effort périodique sur la lame ferromagnétique. Globalement, l'ensemble présente la forme suivante :

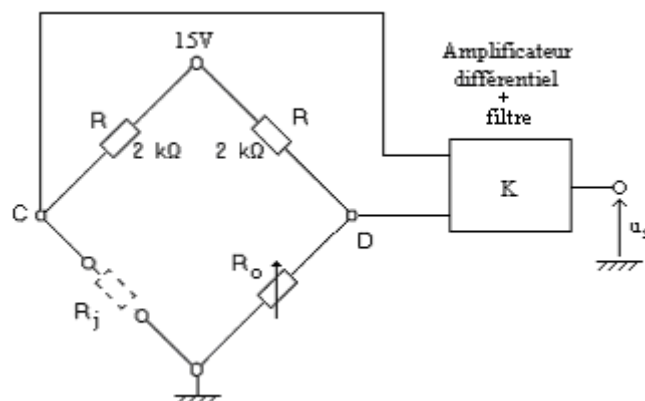


- Observation de la déviation d :

Pour récupérer une image de la déviation d , pour le mode 0, on va coller une jauge de contrainte au centre de la lame excitée, là où la courbure est la plus nette. Lorsque la lame vibre, la courbure de la lame va étirer ou contracter la jauge ce qui va provoquer une variation de résistance de cette dernière. Plus d sera important, plus la courbure sera importante et donc plus la jauge sera fortement contrainte, d'où une variation plus importante de la résistance de cette dernière.

Pour les modes suivants, on pourra également détecter les résonances à travers la variation de résistance de la jauge, mais le lien entre la variation de résistance obtenue et la déviation ne sera plus le même car la forme de la poutre aura changé.

Le variation de la résistance de la jauge est convertie en tension par l'intermédiaire d'un pont de Wheatstone, puis amplifiée au moyen d'un amplificateur différentiel. Un filtre de sortie coupant à 100 Hz environ permet de limiter le bruit de sortie. La structure de l'ensemble (pont+amplificateur+filtre) est la suivante :



Si V_{cc} est la tension de polarisation du pont, si R_o est la valeur de la résistance de la jauge en l'absence de contrainte, et si ΔR est l'écart entre la valeur de la résistance de jauge au repos et sous contrainte, on a, en sortie de l'amplificateur de gain K la tension suivante :

$$u_s = K \cdot u_{CD} \approx \frac{K \cdot R \cdot V_{cc}}{(R + R_o)^2} \cdot \Delta R$$

Pour R , on a pris des résistances de 2 kΩ de précision, pour R_o , on a placé une résistance de 118Ω en série avec un potentiomètre de 10Ω. La jauge a une résistance au repos de 120Ω. La tension V_{cc} est prise égale à 15V.

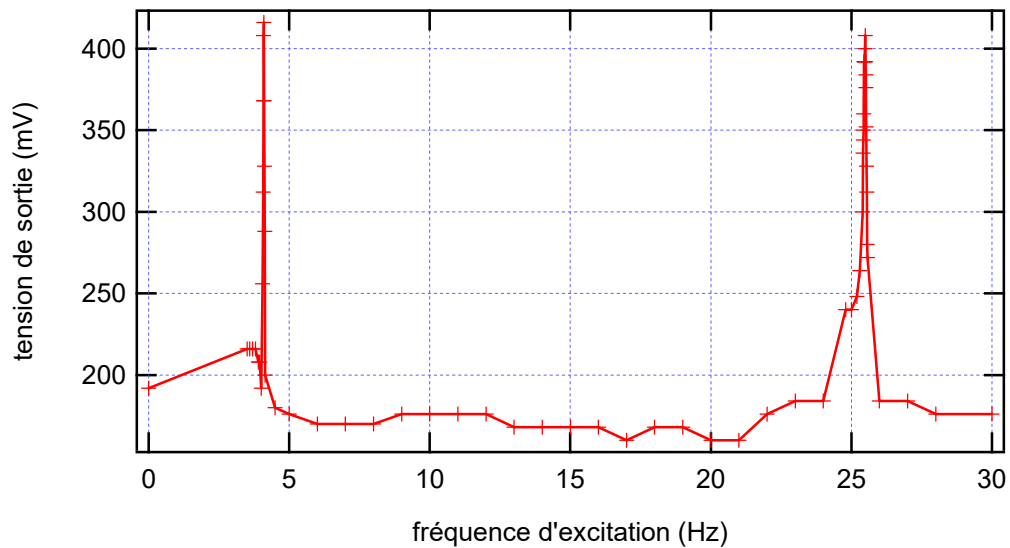
Le gain statique de l'ensemble amplificateur + filtre est 100 et sa fréquence de coupure est voisine de 160 Hz.

IV.2. Résultats expérimentaux : fréquence f_0 du premier mode propre.

Il faudra faire évoluer la fréquence d'excitation par pas assez faibles pour observer correctement la résonance. Entre deux mesures successives, on devra attendre assez longtemps pour que le système atteigne son régime permanent.

Pour obtenir la fréquence de résonance de la lame, on devra veiller à rendre l'ensemble du système de fixation le plus rigide possible. Un manque de rigidité abaisse la fréquence de résonance observée par rapport au résultat théorique attendu.

Expérimentalement, si on relève la tension de sortie du système associant la jauge à l'électronique de conditionnement en fonction de la fréquence, on obtient la courbe suivante :



On a travaillé en synchronisant sur le signal d'excitation et en moyennant. La fréquence est lue en sortie de l'amplificateur et on constate que cette dernière est le double de celle du courant d'excitation. Par ailleurs, le signal de sortie n'est pas strictement sinusoïdal.

Si on s'intéresse à cette courbe au voisinage des deux résonances, on peut en conclure que les deux fréquences de résonance sont

$$f_0 = 4.10 \pm 0.01 \text{ Hz} \quad \text{et} \quad f_1 = 25.49 \pm 0.03 \text{ Hz}$$

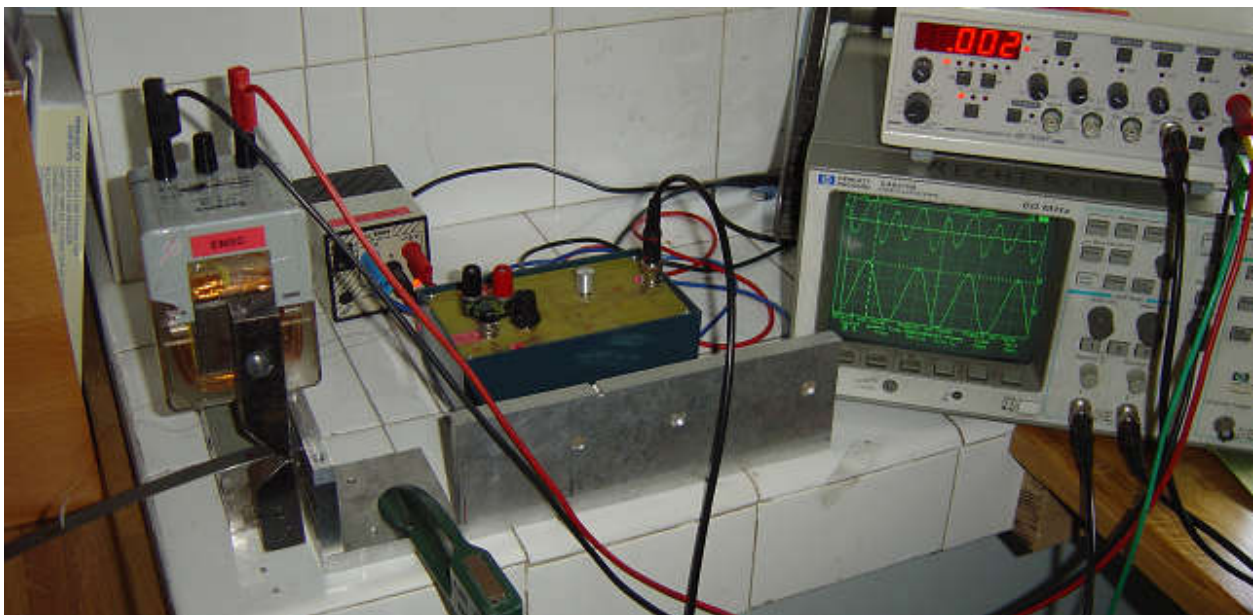
Avec les modules d'Young déterminé en statique, nous avons prévu les valeurs suivantes :

$$f_{0 \text{ calc}} = 4,25 \pm 0,20 \text{ Hz} \quad ; \quad f_{1 \text{ calc}} = 26,7 \pm 1,2 \text{ Hz}$$

On constate que les résultats sont concordants. Le fait de trouver des résultats un peu plus faibles que ceux attendus provient probablement du manque de rigidité de la fixation du réglet et de l'ensemble du système.

Photographies des différents éléments du dispositif expérimental.

- Dispositif expérimental complet.



- Système excitateur.



- Pont de jauge et amplificateur d'instrumentation.



| |
|-----------------|
| Matériel |
|-----------------|

Une balance électronique.
 Des masses de 10g, 20g, 50g avec des crochets pour le fixer au régle.
 Un oscilloscope
 Un générateur de puissance amplifié ou un générateur arbitraire associé à un ampli de puissance alimenté
 L'excitateur (U Leybold avec pôles spéciaux + bobine 1000 spires de 9.8Ω)
 L'ensemble intégrant le pont de résistances et l'amplificateur différentiel
 Un régle avec sa jauge de contrainte
 Un régle pour les mesures d'écart à l'horizontale en statique.
 Une alimentation stabilisée pour le circuit électronique d'amplification différentielle