

Μέθοδοι Αιτιοκρατικής και Στοχαστικής Βελτιστοποίησης και Εφαρμογές

Εργασία Αιτιοκρατικής Βελτιστοποίησης

Ζαχαριουδάκης Εμμανουήλ, Κατσιφής Ηλίας

1 Επεξεργασία Ερωτήματος Α

Η εξίσωση που επιλέχθηκε για το πρωτεύων πρόβλημα ήταν:

$$R = \frac{d^2 U}{dx^2} + b_4 U^3 + b_3(x^2 - x) - 2xU = 0 \quad (1)$$

Με οριακές συνθήκες:

$$U(x=0) = b_1 \quad (2)$$

$$\frac{dU}{dx}(x=0) = b_2 \quad (3)$$

με χωρίο επίλυσης το διάστημα $[0:2]$ και η προς ελαχιστοποίηση συνάρτηση κόστους είναι:

$$F = \frac{1}{2} \int_0^{0.5} (U - x^2)^2 dx \quad (4)$$

Με τη διακριτοποίηση της εξίσωσης (1):

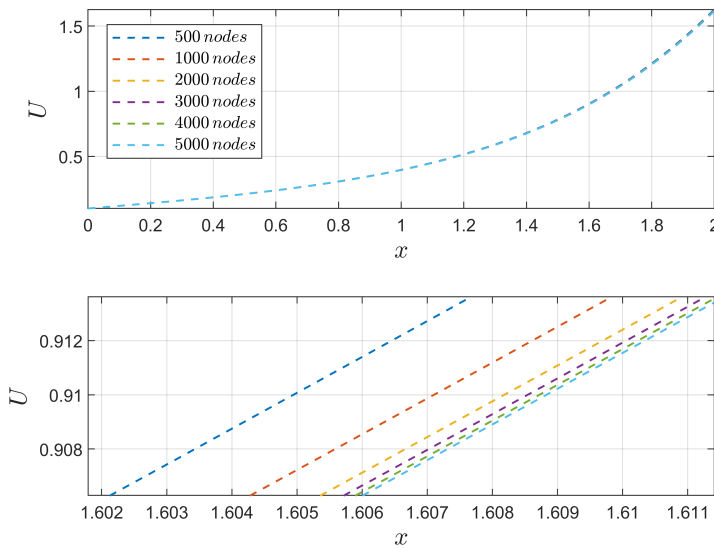
$$\frac{1}{\Delta x^2} U_{i-2} - \frac{2}{\Delta x^2} U_{i-1} + \left(\frac{1}{\Delta x^2} - 2x_i \right) U_i + b_4 U_i^3 + b_3(x_i^2 - x_i) = 0 \quad (5)$$

Συνεπώς προκύπτει ένα μη γραμμικό σύστημα εξισώσεων το οποίο επιλύεται με τη χρήση της δέλτα διατύπωσης:

$$\frac{\partial R}{\partial U} dU = -R \quad (6)$$

$$U^{new} = U^{old} + dU \quad (7)$$

Δοκιμάστηκαν διαφορετικές διαστάσεις πλέγματος και η ανεξαρτησία της λύσης από το πλέγμα φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα για $b = [0.1 \ 0.2 \ 0.3 \ 0.7]^T$:



Σχήμα 1: Ανεξαρτησία του πλέγματος για διαφορετικό αριθμό κόμβων σε όλο το χωρίο επίλυσης (πάνω) και σε ένα μικρό τμήμα του χωρίου επίλυσης, δηλαδή ύστερα από μεγέθυνση (κάτω)

Ο παρακάτω πίνακας δίνει την τιμή της συνάρτησης κόστους για διαφορετικά πλέγματα:

Συνάρτηση Κόστους	
Κόμβοι	F
500	0.0016869
1000	0.0016873
2000	0.0016875
3000	0.0016876
4000	0.0016877
5000	0.0016877
6000	0.0016877
7000	0.0016877

2 Επεξεργασία Ερωτήματος Β

Σε αυτό το κομμάτι της εργασίας έγινε εύρεση της παραγώγου $\frac{\delta F}{\delta b_i}$ με διαφορετικές μεθόδους.

Πεπερασμένες Διαφορές: Ο παρακάτω τύπος δίνει την παράγωγο $\frac{\delta F}{\delta b_i}$

$$\frac{\partial F}{\partial b_i} = \frac{F(b_1, \dots, b_i + \epsilon, \dots, b_N) - F(b_1, \dots, b_i - \epsilon, \dots, b_N)}{2\epsilon} \quad (8)$$

και η διερεύνηση ως προς το ϵ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα για πλέγμα με 1000 κόμβους:

ϵ	Πεπερασμένες Διαφορές			
	$\frac{\partial F}{\partial b_1}$	$\frac{\partial F}{\partial b_2}$	$\frac{\partial F}{\partial b_3}$	$\frac{\partial F}{\partial b_4}$
$1e-6$	0.03483	0.00579	$4.68e-5$	$-1.04e-6$
$1e-7$	0.03483	0.00579	$4.68e-5$	$-1.04e-6$
$1e-8$	0.03483	0.00579	$4.68e-5$	$-1.04e-6$
$1e-9$	0.03483	0.00579	$4.68e-5$	$-1.19e-6$
$1e-10$	0.03483	0.00579	$4.68e-5$	$-7.6e-7$
$1e-11$	0.03486	0.00579	$5.57e-5$	$5.096e-6$
$1e-12$	0.03466	0.00571	$8.69e-5$	$8.96e-5$
$1e-13$	0.03470	0.00602	$2.86e-4$	0

Μιγαδικές Μεταβλητές Ο παρακάτω τύπος δίνει την παράγωγο $\frac{\delta F}{\delta b_i}$

$$\frac{\partial F}{\partial b_i} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\text{imag}(F(b_i + i\epsilon))}{\epsilon} \quad (9)$$

και η διερεύνηση ως προς το ϵ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα για πλέγμα με 1000 κόμβους:

ϵ	Μιγαδικές Μεταβλητές			
	$\frac{\partial F}{\partial b_1}$	$\frac{\partial F}{\partial b_2}$	$\frac{\partial F}{\partial b_3}$	$\frac{\partial F}{\partial b_4}$
$1e-6$	0.03483	0.00579	$4.68e-5$	$-1.04e-6$
$1e-7$	0.03483	0.00579	$4.68e-5$	$-1.04e-6$
$1e-8$	0.03483	0.00579	$4.68e-5$	$-1.04e-6$
$1e-9$	0.03483	0.00579	$4.68e-5$	$-1.04e-6$
$1e-10$	0.03483	0.00579	$4.68e-5$	$-1.04e-6$
$1e-11$	0.03483	0.00579	$4.68e-5$	$-1.04e-6$
$1e-12$	0.03483	0.00579	$4.68e-5$	$-1.04e-6$
$1e-13$	0.03483	0.00579	$4.68e-5$	$-1.04e-6$

Συγκρίνοντας τις δύο μεθόδους με την μείωση του ϵ , στις πεπερασμένες διαφορές παρατηρείται ότι η ακρίβεια της παραγώγου μειώνεται ενώ με την μέθοδο μιγαδικών μεταβλητών οι παράγωγοι δεν επηρεάζονται.

Διακριτή Συζυγής Μέθοδος Στη διακριτή συζυγής μέθοδο επιλύεται η πρωτεύων εξίσωση (5) στη διακριτή μορφή της και βρίσκεται η μεταβλητή Υ . Εφαρμόζοντας τη μεθοδο του τραπεζιου για τον υπολογισμό της συνάρτησης στόχου F , υπολογίζεται και η παράγωγος $\frac{\partial F}{\partial \vec{u}}$.

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \vec{u}}\right)^T = [dx(U(1) - x^2(1)) \dots 2dx(U(i) - x^2(i)) \dots dx(U(N) - x^2(N))] \quad (10)$$

και επιλύεται η συζυγής εξίσωση για την εύρεση της μεταβλητής Ψ :

$$\left(\frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}}\right)^T \Psi = -\left(\frac{\partial F}{\partial \vec{u}}\right)^T \quad (11)$$

και η παράγωγος $\frac{\delta F}{\delta b_i}$:

$$\frac{\delta F}{\delta b_i} = \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{b}} + \vec{\Psi}^T \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{b}} = \vec{\Psi}^T \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{b}} \quad (12)$$

Ισχύει ότι $\frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{b}} = 0$ επειδή η διακριτή έκφραση της F δεν έχει όρους με το \vec{b} . Για 1000 κόμβους προκύπτουν οι εξής παράγωγοι με τη διακριτή συζυγής μέθοδο.

Διακριτή Συζυγής Μέθοδος				
Κόμβοι	$\frac{\partial F}{\partial b_1}$	$\frac{\partial F}{\partial b_2}$	$\frac{\partial F}{\partial b_3}$	$\frac{\partial F}{\partial b_4}$
1000	0.03483	0.00579	$4.68e - 5$	$-1.04e - 6$

Συνεχής Συζυγής Μέθοδος

Αρχικά υπολογίζεται η επαυξημένη αντικειμενική συνάρτηση:

$$F_{aug} = F + \int_0^2 (\Psi R) dx \quad (13)$$

και υπολογίζεται η παράγωγος:

$$\frac{\delta F_{aug}}{\delta b} = \frac{\delta F}{\delta b} + \int_0^2 \frac{\delta(\Psi R)}{\delta b} dx \quad (14)$$

εκτελώντας τις πράξεις προκύπτει η σχέση:

$$\begin{aligned} \frac{\delta F_{aug}}{\delta b} = & \int_0^{0.5} (U - x^2) \frac{\delta U}{\delta b} + \int_0^2 \left(\frac{d^2 \Psi}{dx^2} + 3b_4 U^2 \Psi - 2x \Psi \right) \frac{\delta U}{\delta b} dx + \int_0^2 U^3 \delta_4^n \Psi dx \\ & + \int_0^2 \delta_3^n (x^2 - x) \Psi dx + \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{\delta U}{\delta b} \right) \Psi \right]_0^2 - \left[\frac{\delta U}{\delta b} \frac{d \Psi}{dx} \right]_0^2 \end{aligned} \quad (15)$$

Η *adjoint* εξίσωση που επιλύεται είναι:

Για $0 \leq x \leq 0.5$:

$$\frac{d^2 \Psi}{dx^2} + 3b_4 U^2 \Psi - 2x \Psi + U - x^2 = 0 \quad (16)$$

Για $0.5 < x \leq 2$:

$$\frac{d^2 \Psi}{dx^2} + 3b_4 U^2 \Psi - 2x \Psi = 0 \quad (17)$$

Οι συνοριακές συνθήκες της *adjoint* εξίσωσης είναι:

$$[\Psi]_2 = 0 \quad (18)$$

$$\left[\frac{d \Psi}{dx} \right]_2 = 0 \quad (19)$$

Η διακριτοποιημένη μορφή της (16):

$$\frac{1}{\Delta x^2} \Psi_{i+2} - \frac{1}{\Delta x^2} \Psi_{i+1} + \left(\frac{1}{\Delta x^2} + 3b_4 U_i^2 - 2x_i \right) \Psi_i + U_i - x_i^2 = 0 \quad (20)$$

και η διακριτοποιημένη μορφή της (17):

$$\frac{1}{\Delta x^2} \Psi_{i+2} - \frac{1}{\Delta x^2} \Psi_{i+1} + \left(\frac{1}{\Delta x^2} + 3b_4 U_i^2 - 2x_i \right) \Psi_i = 0 \quad (21)$$

και συνεπώς προκύπτει ότι:

$$\frac{\delta F_{aug}}{\delta b} = \frac{\delta F}{\delta b} = \int_0^2 U^3 \delta_4^n \Psi dx + \int_0^2 \delta_3^n (x^2 - x) \Psi dx - \delta_2^n [\Psi]_0 + \delta_1^n \left[\frac{d\Psi}{dx} \right]_0 \quad (22)$$

οπότε:

Συνεχής Συζυγής Μέθοδος				
Κόμβοι	$\frac{\partial F}{\partial b_1}$	$\frac{\partial F}{\partial b_2}$	$\frac{\partial F}{\partial b_3}$	$\frac{\partial F}{\partial b_4}$
1000	0.03489	0.00584	$4.62e - 5$	$-1.04e - 6$

Συνεχής Μέθοδο Ευθείας Διαφόρισης

Γίνεται διαφόριση της σχέσης (1) ως προς \vec{b} :

$$\frac{\delta R}{\delta b} = \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\delta U}{\delta b} \right) + 3b_4 U^2 \frac{\delta U}{\delta b} + \delta_4^n U^3 + \delta_3^n (x^2 - x) - 2x \frac{\delta U}{\delta b} = 0 \quad (23)$$

Υστερα από διακριτοποίηση:

$$\frac{1}{\Delta x^2} \left(\frac{\delta U}{\delta b} \right)_{i-2} - \frac{2}{\Delta x^2} \left(\frac{\delta U}{\delta b} \right)_{i-1} + \left(\frac{1}{\Delta x^2} + 3b_4 U_i^2 - 2x_i \right) \left(\frac{\delta U}{\delta b} \right)_i + \delta_4^n U_i^3 + \delta_3^n (x_i^2 - x_i) = 0 \quad (24)$$

Από την επίλυση της (24) προκύπτουν τα αποτελέσματα στον πίνακα:

Συνεχής Μέθοδος Ευθείας Διαφόρισης				
Κόμβοι	$\frac{\partial F}{\partial b_1}$	$\frac{\partial F}{\partial b_2}$	$\frac{\partial F}{\partial b_3}$	$\frac{\partial F}{\partial b_4}$
1000	0.03483	0.00579	$4.68e - 5$	$-1.04e - 6$

Διακριτή Μέθοδο Ευθείας Διαφόρισης

Σε αυτή την περίπτωση επιλύεται το σύστημα:

$$\frac{\partial R}{\partial U} \frac{\delta U}{\delta b} = - \frac{\partial R}{\partial b} \quad (25)$$

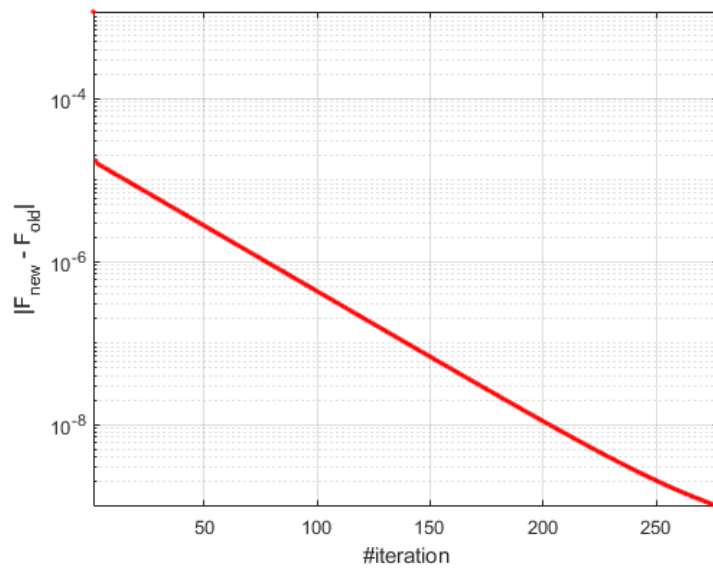
και τα αποτελέσματα που προκύπτουν:

Διακριτή Μέθοδος Ευθείας Διαφόρισης				
Κόμβοι	$\frac{\partial F}{\partial b_1}$	$\frac{\partial F}{\partial b_2}$	$\frac{\partial F}{\partial b_3}$	$\frac{\partial F}{\partial b_4}$
1000	0.03483	0.00579	$4.68e - 5$	$-1.04e - 6$

3 Επεξεργασία Ερωτήματος Γ

Μετά την εύρεση των παραγώγων ευαισθησίας, δημιουργήθηκε βρόγχος βελτιστοποίησης των μεταβλητών σχεδιασμού προς ελαχιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης F.

Ο βρόγχος βελτιστοποίησης δοκιμάστηκε με την μέθοδο της διακριτούς Συζυγούς εξίσωσης για την εύρεση των $\frac{\delta F}{\delta B}$. Η εξέλιξη της λύσης της αντικειμενικής συνάρτησης φαίνεται παρακάτω.



Σχήμα 2: Εξέλιξη του κριτηρίου σύγκλισης $|F_{new} - F_{old}|$ συναρτήσει του αριθμού επαναλήψεων του βρόγχου βελτιστοποίησης.

Στη συνέχεια επαναλήφθηκε η εκτέλεση του βρόγχου βελτιστοποίησης για τις διάφορες μεθόδους εύρεσης των παραγώγων ευαισθησίας.

Πεπερασμένες Διαφορές		
F_{new}	αρ. επαναλήψεων	συνολικός χρόνος(sec)
0.0000767	278	29.5
Μιγαδικές Μεταβλητές		
F_{new}	αρ. επαναλήψεων	συνολικός χρόνος(sec)
0.0000767	278	19.9
Συνεχής Συζυγής Μέθοδος		
F_{new}	αρ. επαναλήψεων	συνολικός χρόνος(sec)
0.0000767	276	10.2
Συνεχής Μέθοδος Ευθείας Διαφόρισης		
F_{new}	αρ. επαναλήψεων	συνολικός χρόνος(sec)
0.0000767	278	10.5
Διακριτή Συζυγής Μέθοδος		
F_{new}	αρ. επαναλήψεων	συνολικός χρόνος(sec)
0.0000767	278	8.69

4 ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Όλοι οι κώδικες γράφηκαν σε Matlab και μπορούν να βρεθούν στον παρακάτω σύνδεσμο:
https://github.com/manosZHR/optimization_hw2.git