Εφαρμοσμένα Μαθηματικά - 3η Σειρά Ασκήσεων

ΑΜ:3618 Ον/νυμο: Αναγνωστάκης Εμμανουήλ

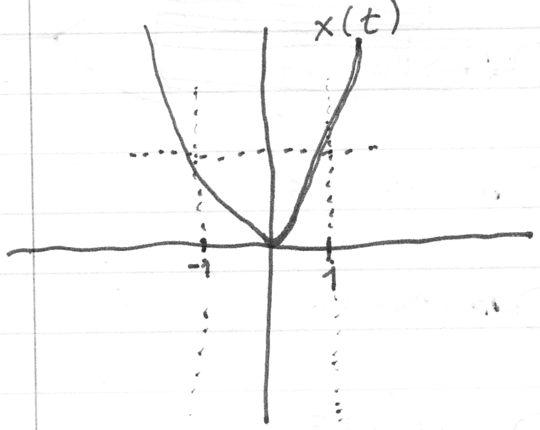
Άσκηση 2

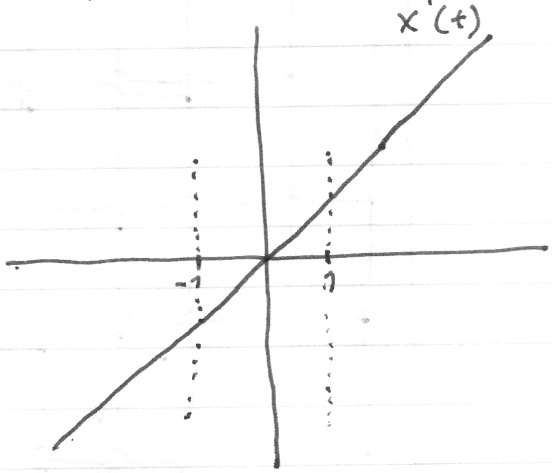
$x(t)=t^2/2$, $-1<t<1$

Η περίοδος όμως δεν μπορεί να είναι αρνητική συνεπώς παίρνουμε $0<t<1$

$x'(t)=t$

α)





$$\int_0^1 x(t)dt = \int_0^1 \frac{t^2}{2}dt = \left[\frac{t^3}{6}\right]_0^1 = \frac{1}{6} - \frac{0}{6} = \frac{1}{6}$$

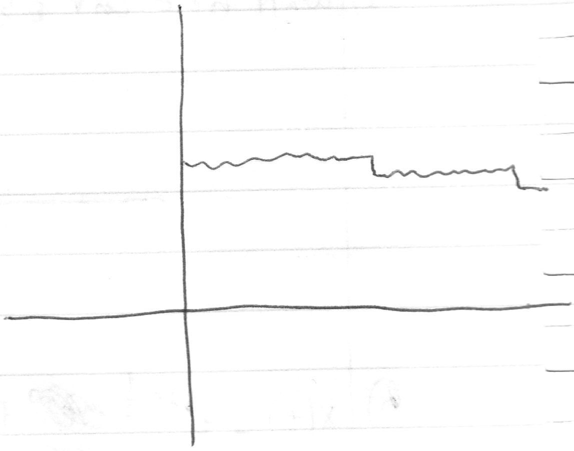
β) $x(t)=A\cos(2\pi$

$$X_k=\frac{2A}{\pi k}e^{-j\frac{\pi}{2}} = \frac{2\cdot\frac{1}{6}}{\pi k}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{3\pi k}(-1)$$

Ασκηση 10

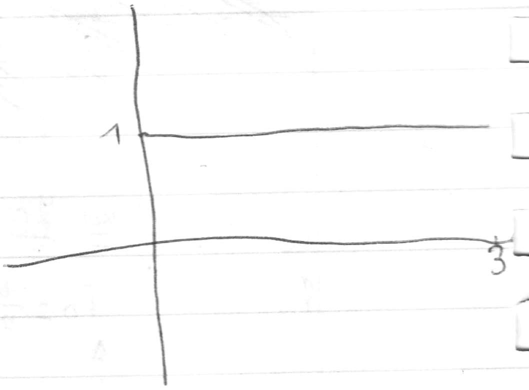
ασκ1.

```
A=2;
dt=0.01;
To=2;
t=0:dt:3*T0;
N=80;
k=[-N/2:1:-1 1::1:N/2]
X0=A/2;
Xk=A./(2*k*pi).*exp(j*pi)
x=X0+Xk*exp(j*2*pi*k'/T0*t+pi);
plot(t,real(x)); xlabel('Time(s)');
```



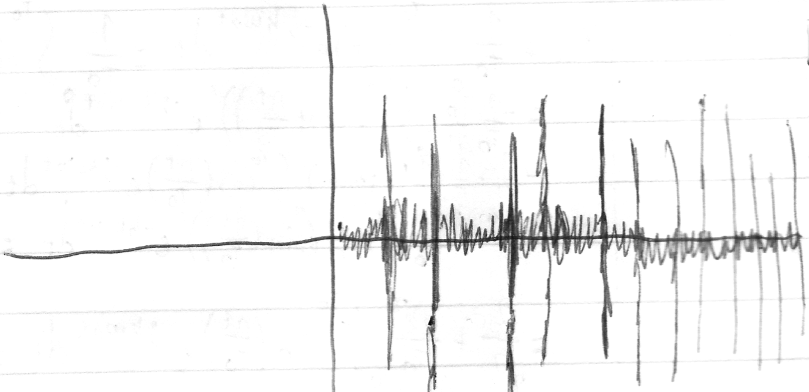
I.

```
A=2;
dt=0.01;
T0=1;
t=0:dt:3*T0;
N=80;
k=[-N/2:1:-1 1:1:N/2];
X0=A/2;
Xk=j*(-1).^k/k*pi;
x=X0+Xk*exp(j*2*pi*k'/T0*t+pi);
plot(t,real(x)); xlabel('Time(s)');
```



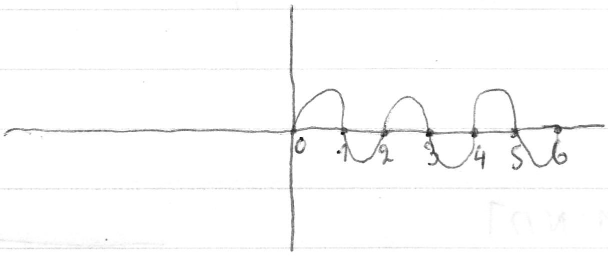
II.

```
A=1;
dt=0.01;
T0=6;
t=0:dt:3*T0;
N=80;
k=[-N/2:1:-1 1:1:N/2];
X0=A/2;
Xk=6.*sin(pi*k/2).*sin(pi*k/6)/(pi.^2).*(k.^2);
x=X0+Xk*exp(j*2*pi*k'/T0*t+pi);
plot(t,real(x)); xlabel('Time(s)');
```



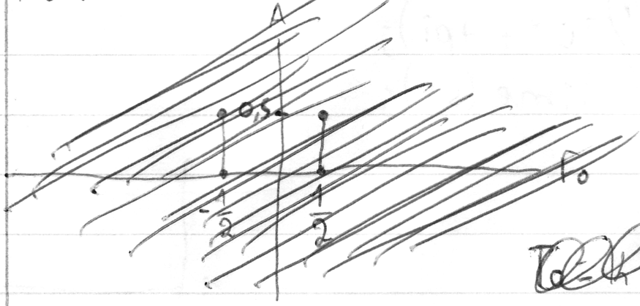
Ασκηση 1

α) ω=π από την εξίσωση άρα $T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{\pi}=2$.



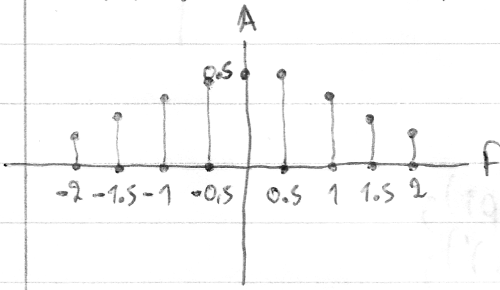
β) $x(t)=e^{j2\pi\frac{1}{2}}+e^{-j2\pi\frac{1}{2}}=e^{j\pi}+e^{-j\pi}$

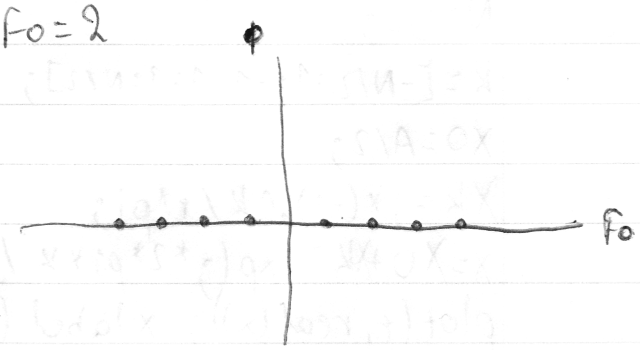
γ)



$\omega=k\cdot\frac{2\pi}{T_0}\overset{k=1}{=}\frac{2\pi}{2}=\pi$, $\omega=k\cdot\frac{2\pi}{2}\overset{k=2}{=}=2\pi$, $\omega=k\cdot\frac{2\pi}{2}\overset{k=3}{=}3\pi$, $\omega=k\cdot\frac{2\pi}{2}\overset{k=4}{=}4\pi$

$F_0=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{1}{2}$, $F_0=\frac{\omega}{2\pi}=1$, $F_0=1.5$, $F_0=2$





$$X_k=\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt=\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}\sin\left(\frac{\pi t}{T_0}\right)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

$$=-\frac{1}{T_0}\frac{T_0}{\pi}\int_0^{T_0}\left(\cos\left(\frac{\pi t}{T_0}\right)\right)'e^{-j2\pi kF_0 t}dt=-\frac{1}{\pi}\cos\left(\frac{\pi t}{T_0}\right)\Big|_0^{T_0}+\frac{1}{\pi}\int_0^{T_0}\cos\left(\frac{\pi t}{T_0}\right)\left(e^{-jk\omega_0 t}\right)'dt$$

$$=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi}(-jk\omega_0)\int_0^{T_0}\cos\left(\frac{\pi t}{T_0}\right)e^{-jk\omega_0 t}dt=\frac{2}{\pi}-\frac{2kj}{T_0}\int_0^{T_0}\cos\left(\frac{\pi t}{T_0}\right)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

$$=\frac{2}{\pi}-\frac{2jk}{T_0}\int_0^{T_0}\frac{T_0}{\pi}\left(\sin\left(\frac{\pi t}{T_0}\right)\right)'e^{-jk\omega_0 t}dt=\frac{2}{\pi}-\frac{2jk}{\pi}\sin\left(\frac{\pi t}{T_0}\right)e^{-jk\omega_0 t}\Big|_0^{T_0}+\frac{2jk}{T_0}\frac{T_0}{\pi}\left(-\frac{2j\pi k}{T_0}\right)$$

$$=\frac{2}{\pi}+\frac{4k^2}{T_0}\int_0^{T_0}\sin\left(\frac{\pi t}{T_0}\right)e^{-jk\omega_0 t}dt=\frac{2}{\pi}+4k^2\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}\sin\left(\frac{\pi t}{T_0}\right)e^{-jk\omega_0 t}dt\Big\}_0\int_0^{T_0}\sin\left(\frac{\pi t}{T_0}\right)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

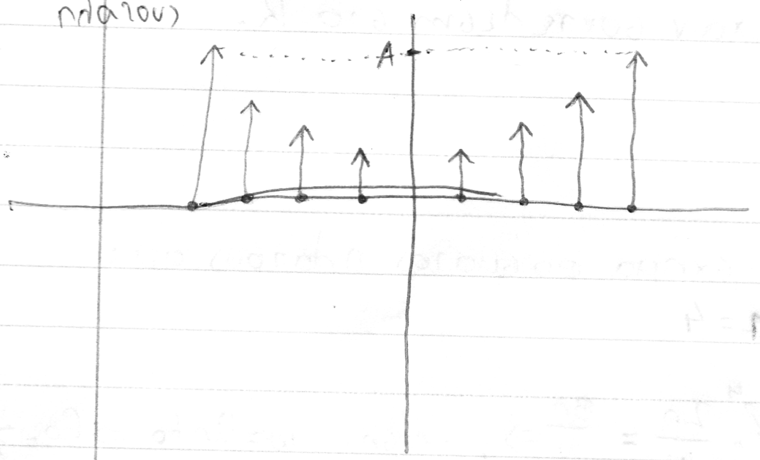
$$=\frac{2}{\pi}+4k^2X_k \Leftrightarrow$$

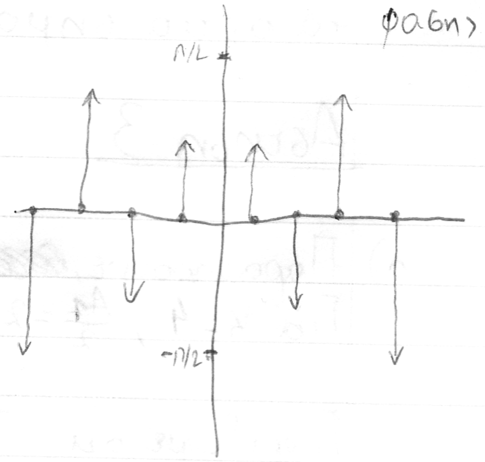
$$X_k-4k^2X_k=\frac{2}{\pi}\Leftrightarrow$$

$$X_k(1-4k^2)=\frac{2}{\pi}\Leftrightarrow$$

$$X_k=\frac{2}{(1-4k^2)\pi}\Leftrightarrow X_k=\frac{2}{\pi(1-4k^2)}$$

Για $k=\pm 1$ $X_{\pm 1}=-\frac{1}{\pi^2}$ Για $k=\pm 2$ $X_{\pm 2}=\frac{1}{4\pi^2}$
Για $k=\pm 3$ $X_{\pm 3}=-\frac{1}{9\pi^2}$ Για $k=\pm 4$ $X_{\pm 4}=\frac{1}{16\pi^2}$
Για $k=0$ δεν ορίζεται ο συντελεστής





Ασκηση 5

$$X_k=\begin{cases}2, & k=0\\ j\left(\frac{1}{2}\right)^{|k|}, & k\neq 0\end{cases}$$

α) Το περιοδικό σημα $x(t)$ δεν ειναι πραγματικό, γιατι από την ιδιότητα της συζηγής συμμετριας βλέπουμε, οτι για να ειναι ενα σημα πραγματικό πρέπει να ισχύουν κάποια πράγματα για τους συντελεστές. Παρατηρουμε παραπάνω, οτι π.χ. $R(X_k)\neq R(X_{-k})$ $(2\neq 1)$.

β) Το περιοδικο σημα $x(t)$ ειναι άρτιο, γιατι βλέπουμε από την ιδιότητα του άρτιου σήματος, ότι ο συντελεστής $X_k\in R$ πράγμα που ισχύει, διότι $2\in R$.

γ) Ένα σήμα $\frac{dx(t)}{dt}$ που έχει προέλθει μέσω χρήσης της ιδιότητας της παραγώγισης δεν μπορεί να είναι άρτιο, αφού ο συντελεστής ανήκει στο I ($j2\pi k f_0 X_k$), ενώ τα άρτια σήματα έχουν συντελεστή στο R.

Άσκηση 3

α) Παρατηρούμε, στο σχήμα φάσματος πλάτους ότι:
Για $k=4$, $\frac{A_1}{2}=2 \Rightarrow A_1=4$

Γνωρίζουμε ότι $T_0 = k\cdot\frac{2\pi}{\omega} = \frac{8\pi}{\omega} \Rightarrow \omega = 4\pi$, επίσης $\omega = 2\pi f_0 \Rightarrow f_0 = \frac{\omega}{2\pi}$
$\Rightarrow f_0 = \frac{4\pi}{2\pi} = 2$

Για $k=3$, $\frac{A_2}{2}=1 \Rightarrow A_2=2$
Με βάση τα παραπάνω $T_0 = k\cdot\frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \omega = \frac{6\pi}{2} \Rightarrow \omega = 3\pi$
$f_0 = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{3\pi}{2\pi} = \frac{3}{2}$

Παρατηρούμε στο σχήμα φάσματος φάσης ότι:
Για $k=3$ $\varphi_2 = -\pi/4$ και Για $k=4$ $\varphi_1 = \pi/4$

Εξίσωση σειράς Fourier: $x(t) = A_1\cos(2\pi f_0 t + \varphi_1) + A_2\cos(2\pi f_0 t + \varphi_2)$
Αντικαθιστούμε και παίρνουμε: $x(t) = 4\left(2\pi 2t + \frac{\pi}{4}\right) + 2\cos\left(2\pi\frac{3}{2}t - \frac{\pi}{4}\right)$

β) Η φάση 8π είναι μηδενική, όπως και η 6π, η 4π, η 2π.
Για $k=0,1,2,3,4$ έχουμε κοινό πλάτος

$\omega = \frac{2\pi k}{T} = 2\pi$ $\quad f_0 = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$ $(k=1)$
$\omega = 4\pi$ $\quad f_0 = 2$
$\omega = 6\pi$ $\quad f_0 = 3$ $\quad \omega = 0$ για $k=0$
$\omega = 8\pi$ $\quad f_0 = 4$

$$x(t) = \cos(2\pi t) + \cos(4\pi t) + \cos(6\pi t) + \cos(8\pi t) \rightarrow x(t) = \frac{\sin(9\pi t)}{\sin(\pi t)}$$