CHAPITRE 5

Variables aléatoires continue

5.1 Introduction

5.1.1 Définition

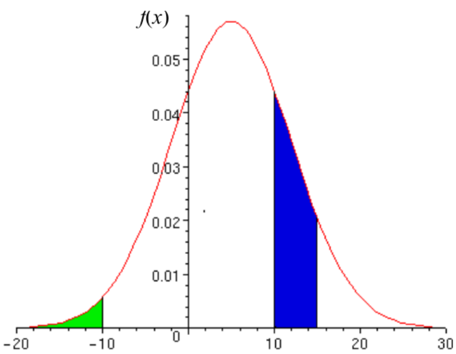
Une variable aléatoire est dite continue si elle peut prendre toutes les valeurs dans un intervalle donné (borné ou non borné). En règle générale, toutes les variables qui résultent d'une mesure sont de type continu.

Une variable aléatoire contenue est une fonction X allant de ω vers $\mathbb{R}$.

5.1.2 Densité d'une probabilité

Soit X une v.a. continue. On appelle densité de probabilité de X, une application positive $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$



- L'aire hachurée en vert correspond à la probabilité $P(X < -10)$.
- L'aire hachurée en bleu correspond à la probabilité $P(+10 < X < +15)$

5.2 Loi de variable aléatoire contenue

5.2.1 Fonction de répartition

La loi de probabilité d'une v.a. continue est déterminée par la fonction de répartition F, définie pour tout réel x par :

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

La probabilité d'un intervalle s'obtient en intégrant la densité de X, ou bien en utilisant la fonction de répartition:

$$P(X \in [x_1, x_2]) = P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = F(x_2) - F(x_1)$$

Une fonction de répartition est :

- Prend ses valeurs entre 0 et 1.

$$0 \leq F(X) \leq 1$$

- croissante
-

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$$

et

$$\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$$

5.3 Moments d'une variable aléatoire continue

5.3.1 Espérance

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

Pour tout réel a:

$$E(x + a) = E(x) + a$$

et

$$E(aX) = aE(x)$$

Si X et Y sont deux variables aléatoires qui admettent une espérance, alors :

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

5.3.2 Variance

$$V(X) = E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - E(X)^2$$

5.3.3 Moments non centrés

Le moment non centre d'ordre $r \in N^*$ d'une v.a. continue X est la quantité, lorsqu'elle existe:

$$m_r(X) = E(X^r) = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x)dx$$

5.3.4 Moments centrés

Le moment centre d'ordre $r \in N^*$ d'une v.a. continue X est la quantité, lorsqu'elle existe:

$$\mu_r(X) = E((X - E(X)^r) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X)^r f(x)dx$$

5.4 Lois continues

5.4.1 Loi uniforme

Une v.a. X suit une loi uniforme si sa densité est constante sur un intervalle [a, b] :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

On dit que $X \sim \mathcal{U}([a, b])$.

La fonction de répartition est:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 1, \text{ si non} \end{cases}$$

- Espérance:

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

- Variance:

$$V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

5.5 Lois exponentiel

La loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ est celle d'une variable positive de densité :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0, \text{ si non} \end{cases}$$

On dit que $X \sim (\lambda)$

La fonction de répartition:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0, \text{ si non} \end{cases}$$

- Espérance:

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

- Espérance:

$$E(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

5.6 Loi normal ou Laplace-Gauss

C'est la loi d'une v.a. X à valeurs dans $\mathbb{R}$, de densité:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$$

on note $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$,tell que: $E(X) = \mu$ et $V(X) = \sigma^2$.

Ainsi les paramètres d'une loi normale sont en fait son espérance mathématique et son écart-type.

5.7 Propriétés

Si $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$,$X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ et a,b deux nombre réel:

- $aX_1 + b \sim \mathcal{N}(a\mu_1 + b, |a|\sigma_1^2)$
- $X_1 + X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$
- $X_1 - X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_1 - \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$

Exemple:Si $X_1 \sim \mathcal{N}(1, \sqrt{5})$,$X_2 \sim \mathcal{N}(-1, 1)$ et a,b deux nombre réel:

- La variable aléatoire: $-2X + 1 \sim \mathcal{N}(-1, 2\sqrt{5})$.
- $X_1 + X_2 \sim \mathcal{N}(0, \sqrt{5^2 + (-1)^2})$
- $X_1 - X_2 \sim \mathcal{N}(-2, \sqrt{5^2 + (-1)^2})$

5.7.1 Loi normale centrée réduite

La loi normale centrée réduite est une loi normale de paramètre $\mu = 0$ et $\sigma = 1$. On la note par $\mathcal{N}(0, 1)$ et sa densité de probabilité est définie sur R par:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

La table de la loi normale centrée réduite

Cette table indique une valeur correspond une probabilité $P(z < t)$ tell que $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et $1 \leq t \leq 4$.

- La première colonne:le premier chiffre après la virgule de t.
- La première ligne : le second chiffre après la virgule.

Par exemple pour calculer $P(Z < 1,64)$, on cherche dans la première colonne 1.6 puis dans la première ligne 0.04, à l'intersection de cette ligne et de cette colonne, on trouve :

$$P(Z < 1.64) = 0.9495$$

La fonction de répartition de la loi centrée réduite:

- $P(Z \geq t) = 1 - F_Z(t)$.
- Si t est positive: $F_z(-t) = 1 - F_z(t)$.
- Pour touts $a, b \in \mathcal{R}$ et $a \leq b$:

$$P(a \leq Z \leq b) = FZ(b) - FZ(a).$$

- Pour $t \geq 0$, $P(-t \leq Z \leq t) = 2F_Z(t) - 1$

5.8 Loi gamma

Une variable aléatoire X de loi Gamma de paramètres $n > 0$ et $\lambda > 0$ est positive, de densité :

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^{n-1}}{\Gamma(n)} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0, \text{ si non} \end{cases}$$

La fonction Gamma est définie pour tout $n > 0$ par :

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x}\, dx = (n-1)!$$

Ont écrit $X \sim \Gamma(n, \lambda)$ Elle admet pour moments

- $E(X) = \frac{n}{\lambda}$
- $V(X) = \frac{n}{\lambda^2}$
- Si $X \sim \Gamma(n_1, \lambda)$ et $Y \sim \Gamma(n_2, \lambda)$ alors $X + Y \sim \Gamma(n_1 + n_2, \lambda)$;
- La loi Gamma $\Gamma(1, \lambda)$ est la loi exponentiel $\exp(\lambda)$

5.9 Loi du khi-deux

La loi du khi-deux à n degrés de liberté, notée $\chi^2(n)$, est la loi $\Gamma(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$ où n est un entier positif. Ses moments se déduisent de ceux de la loi Gamma:

- $E(X) = n$.
- $V(X) = 2n$

Si $X \sim \chi^2(n_1)$ et $Y \sim \chi^2(n_2)$ alors: $X + Y \sim \chi^2(n_1 + n_2)$