Математическое моделирование

Лабораторная работа № 2

Максим Новичков

2026-02-22

Содержание (i)

1. 1. Введение

Построить и исследовать математическую модель задачи преследования, позволяющую определить стратегию гарантированного перехвата цели.

Рассматривается ситуация: в условиях тумана катер береговой охраны преследует лодку нарушителей. В момент кратковременного улучшения видимости лодка фиксируется на расстоянии k км, после чего вновь скрывается и продолжает движение по прямой в неизвестном направлении. Скорость катера превышает скорость лодки в n раз. Необходимо определить траекторию катера, обеспечивающую встречу.

1.2 Задачи работы

1. Выполнить аналитический вывод дифференциальной модели движения при условии превышения скорости в n раз.

1.2 Задачи работы

1. Выполнить аналитический вывод дифференциальной модели движения при условии превышения скорости в n раз.
2. Построить траектории катера и лодки для двух вариантов начальных условий.

1. Выполнить аналитический вывод дифференциальной модели движения при условии превышения скорости в n раз.
2. Построить траектории катера и лодки для двух вариантов начальных условий.
3. По результатам моделирования определить точку перехвата.

2. 2. Теоретическая часть

Положим начальный момент времени $t_0 = 0$.

В момент обнаружения:

- лодка расположена в начале координат: $X_0 = 0$;

Для анализа переходим к полярной системе координат:

2.1 Исходные обозначения

Положим начальный момент времени $t_0 = 0$.

В момент обнаружения:

- лодка расположена в начале координат: $X_0 = 0$;
- катер удалён на расстояние k.

Для анализа переходим к полярной системе координат:

2.1 Исходные обозначения

Положим начальный момент времени $t_0 = 0$.

В момент обнаружения:

- лодка расположена в начале координат: $X_0 = 0$;
- катер удалён на расстояние k.

Для анализа переходим к полярной системе координат:

- полюс совпадает с положением лодки;

Положим начальный момент времени $t_0 = 0$.

В момент обнаружения:

- лодка расположена в начале координат: $X_0 = 0$;
- катер удалён на расстояние k.

Для анализа переходим к полярной системе координат:

- полюс совпадает с положением лодки;
- полярная ось направлена через исходное положение катера.

2.2 Определение начального радиуса манёвра

Пусть через некоторое время катер и лодка окажутся на одинаковом расстоянии x от полюса.

Из равенства времён движения получаем два возможных решения:

- case = plus

$$x_1 = \frac{k}{n+1}, \quad \theta_0 = 0$$

Эти значения определяют момент перехода катера к спиральному движению.

Пусть через некоторое время катер и лодка окажутся на одинаковом расстоянии x от полюса.

Из равенства времён движения получаем два возможных решения:

- case = plus

$$x_1 = \frac{k}{n+1}, \quad \theta_0 = 0$$

- case = minus

$$x_2 = \frac{k}{n-1}, \quad \theta_0 = -\pi$$

Эти значения определяют момент перехода катера к спиральному движению.

2.3 Формирование системы уравнений

Разложим скорость катера на компоненты:

- радиальная: $\frac{dr}{dt}$

Так как катер должен удаляться от полюса с той же радиальной скоростью, что и лодка:

$$\frac{dr}{dt} = v$$

Полная скорость катера равна nv, следовательно:

$$r\frac{d\theta}{dt} = v\sqrt{n^2 - 1}$$

Исключая время, получаем уравнение траектории:

$$\frac{dr}{\ } \quad \frac{r}{\ }$$

2.3 Формирование системы уравнений

Разложим скорость катера на компоненты:

- радиальная: $\frac{dr}{dt}$
- тангенциальная: $r\frac{d\theta}{dt}$

Так как катер должен удаляться от полюса с той же радиальной скоростью, что и лодка:

$$\frac{dr}{dt} = v$$

Полная скорость катера равна nv, следовательно:

$$r\frac{d\theta}{dt} = v\sqrt{n^2 - 1}$$

Исключая время, получаем уравнение траектории:

$$dr \qquad r$$

3. 3. Численное моделирование

Используем:

- $k = 20$ км,

Цель моделирования — построить траектории и определить точку пересечения.

3.1 Параметры расчёта

Используем:

- $k = 20$ км,
- $n = 5$.

Цель моделирования — построить траектории и определить точку пересечения.

4. 4. Результаты экспериментов


Базовый эксперимент (case=plus)
катер
лодка
90°
45°
135°
180°
0°
225°
315°
12
10
8
6
4
2
0

4.1 Базовый режим: case = plus


Базовый эксперимент (case=plus)
катер
лодка
90°
135°
45°
180°
0°
225°
315°
12
10
8
6
4
2
0


Базовый эксперимент (case=plus)
катер
лодка
90°
12
10
8
6
4
2
0
135°
45°
180°
0°
225°
315°


Базовый эксперимент (case=minus)
катер
лодка
90°
45°
0°
135°
180°
225°
315°
0
5
10
15
20

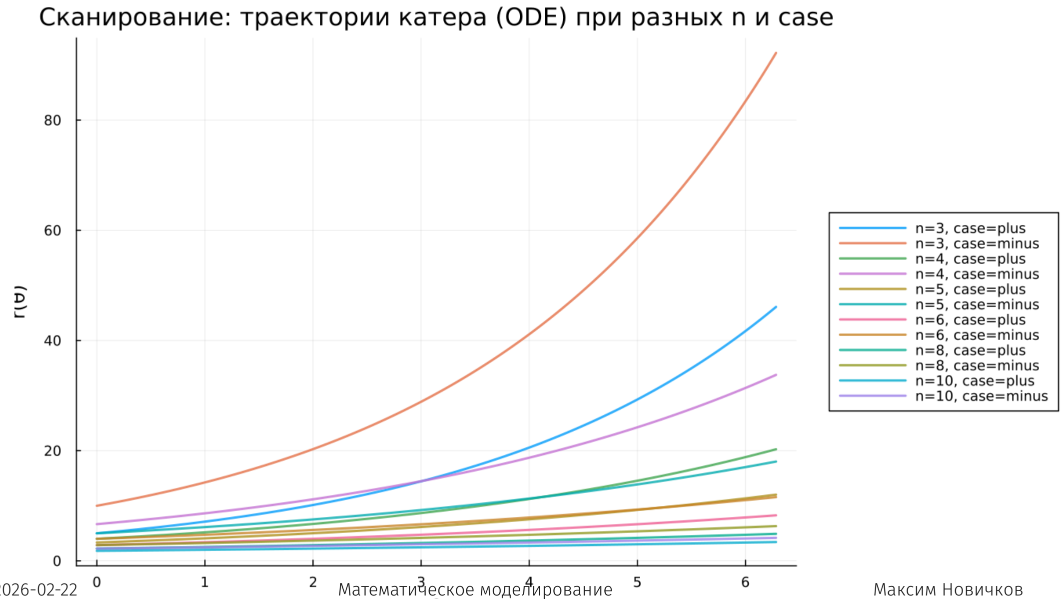
4.2 Базовый режим: case = minus


Базовый эксперимент (case=minus)
катер
лодка
90°
135°
45°
180°
0°
225°
315°
0
5
10
15
20

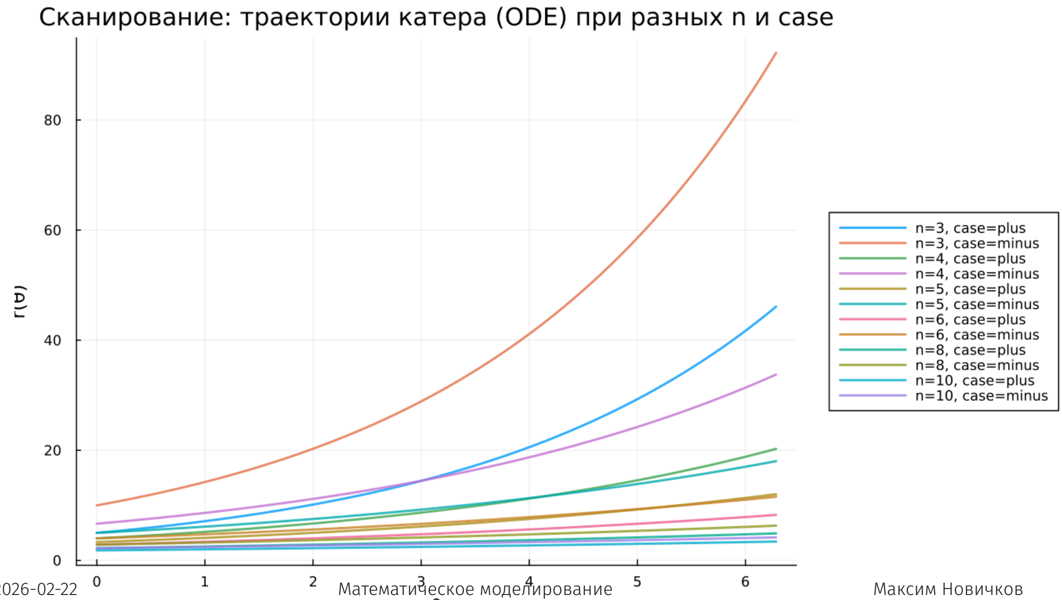

Базовый эксперимент (case=minus)
катер
лодка
90°
45°
0°
315°
225°
180°
135°
20
15
10
5
0

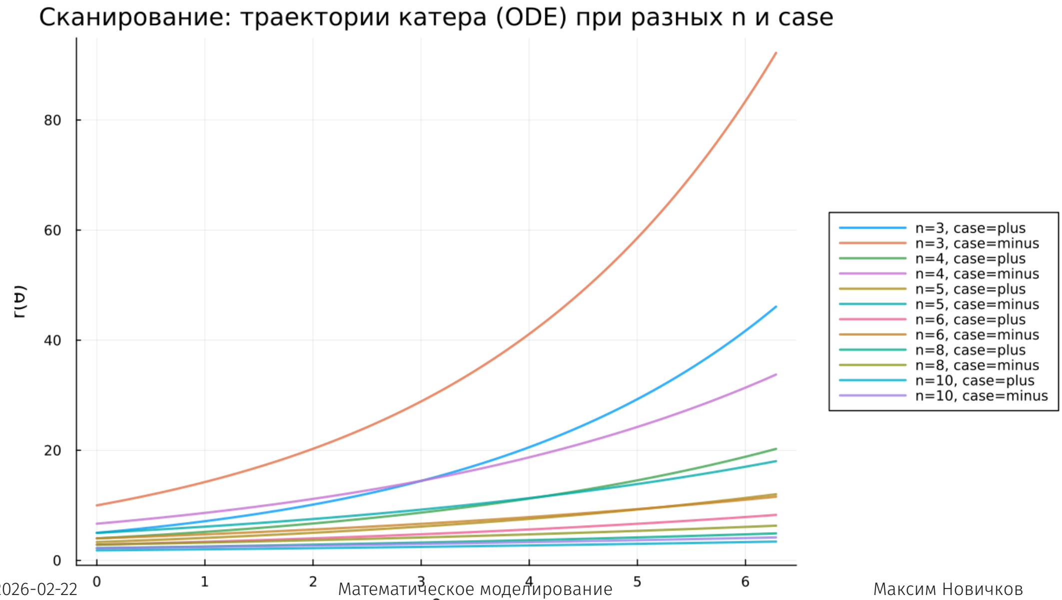
5. 5. Параметрическое исследование

5.1 Влияние параметра n



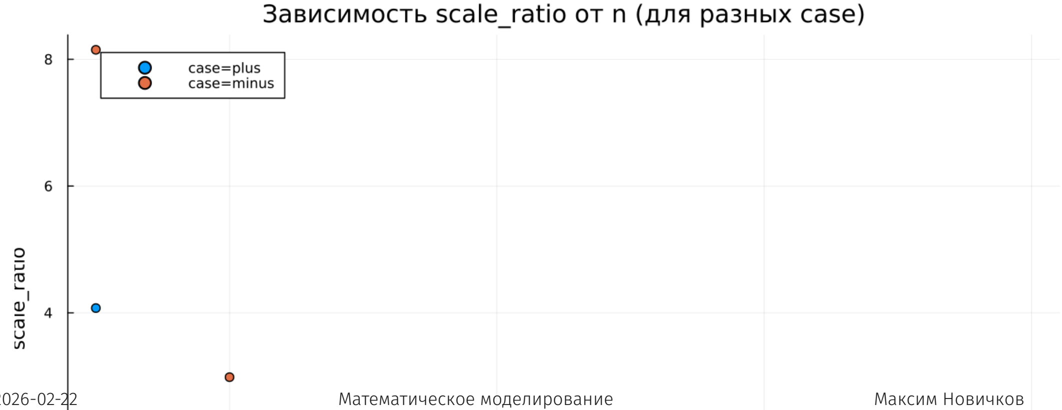
5.1 Влияние параметра n




Сканирование: траектории катера (ODE) при разных n и case
r(θ)
0
20
40
60
80
0
1
2
3
4
5
6
n=3, case=plus
n=3, case=minus
n=4, case=plus
n=4, case=minus
n=5, case=plus
n=5, case=minus
n=6, case=plus
n=6, case=minus
n=8, case=plus
n=8, case=minus
n=10, case=plus
n=10, case=minus

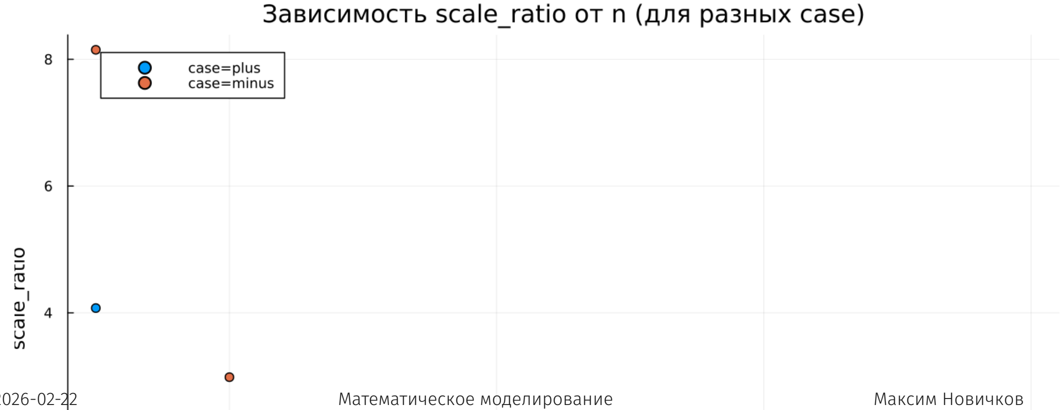
Введём показатель

$$\text{scale\_ratio} = \frac{r_{\text{final}}}{\max(r_{\text{boat}})}$$



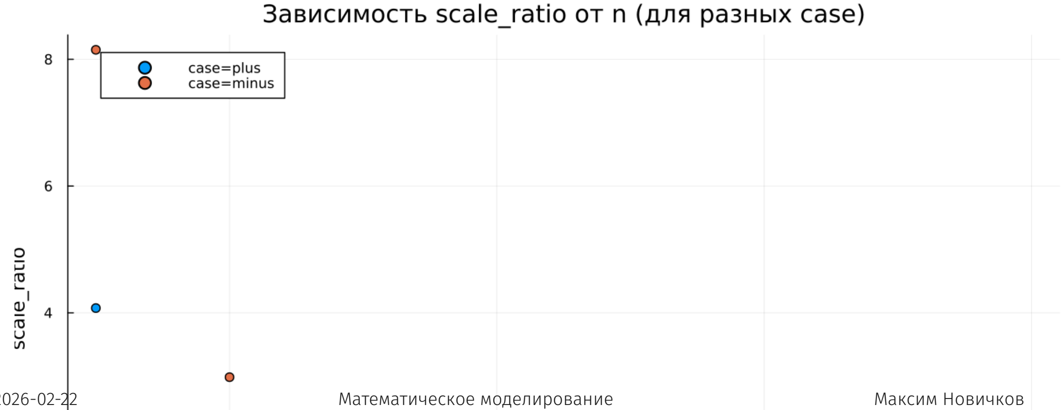
Введём показатель

$$\text{scale\_ratio} = \frac{r_{\text{final}}}{\max(r_{\text{boat}})}$$

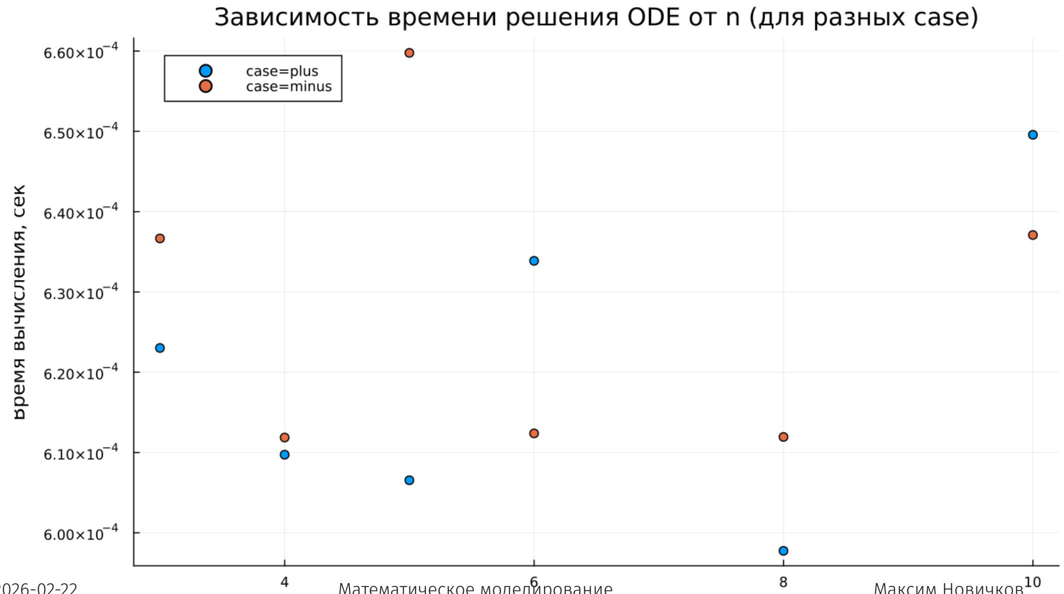


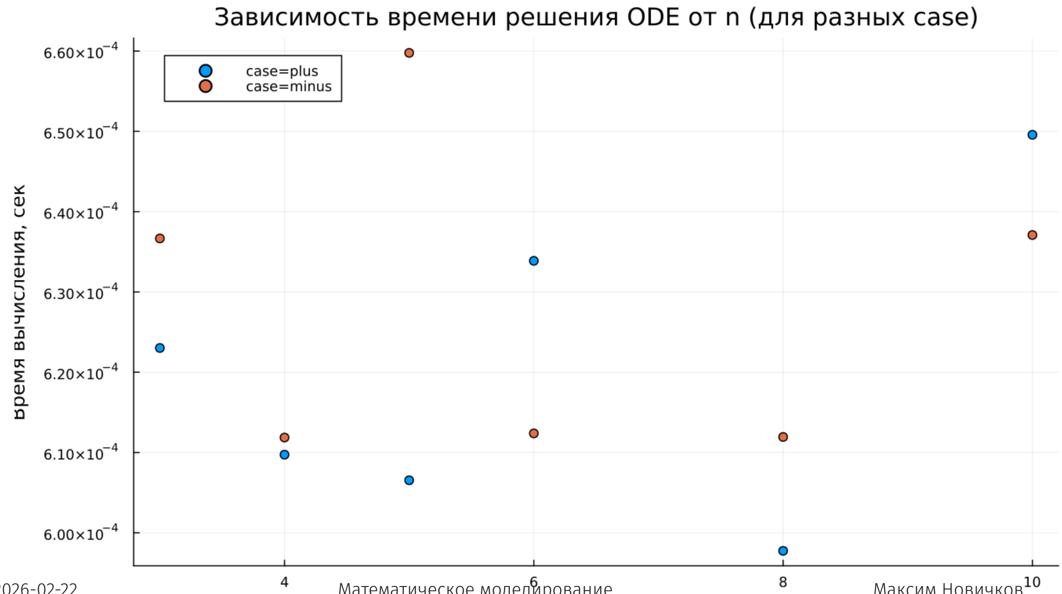
Введём показатель

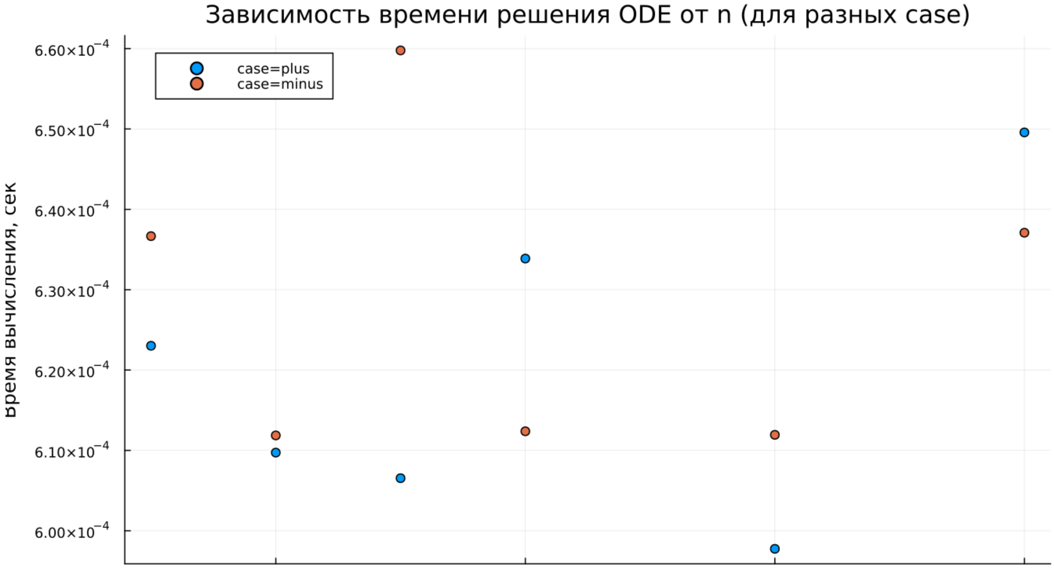
$$\text{scale\_ratio} = \frac{r_{\text{final}}}{\max(r_{\text{boat}})}$$



5.3 Оценка вычислительной сложности




Зависимость времени решения ODE от n (для разных case)
case=plus
case=minus
Время вычисления, сек
6.60×10^−4
6.50×10^−4
6.40×10^−4
6.30×10^−4
6.20×10^−4
6.10×10^−4
6.00×10^−4
4
6
8
10


Зависимость времени решения ODE от n (для разных case)
case=plus
case=minus
Время вычисления, сек
6.60×10^−4
6.50×10^−4
6.40×10^−4
6.30×10^−4
6.20×10^−4
6.10×10^−4
6.00×10^−4
4
6
8
10

6. 6. Заключение

1. Траектория катера описывается логарифмической спиралью.

Модель корректно отражает структуру аналитического решения и подтверждается результатами вычислительных экспериментов.

1. Траектория катера описывается логарифмической спиралью.
2. Параметр n определяет интенсивность радиального роста.

Модель корректно отражает структуру аналитического решения и подтверждается результатами вычислительных экспериментов.

1. Траектория катера описывается логарифмической спиралью.
2. Параметр n определяет интенсивность радиального роста.
3. Начальные условия влияют на масштаб траектории, но не изменяют её тип.

Модель корректно отражает структуру аналитического решения и подтверждается результатами вычислительных экспериментов.

1. Траектория катера описывается логарифмической спиралью.
2. Параметр n определяет интенсивность радиального роста.
3. Начальные условия влияют на масштаб траектории, но не изменяют её тип.
4. Численное решение демонстрирует устойчивость и низкие вычислительные затраты.

Модель корректно отражает структуру аналитического решения и подтверждается результатами вычислительных экспериментов.