Die Gauß-Funktion ist definiert als

$$f(x) = \exp(-x^2), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Abbildung 1 zeigt ausschnitthaft den Verlauf der Funktion. Es ist offensicht-

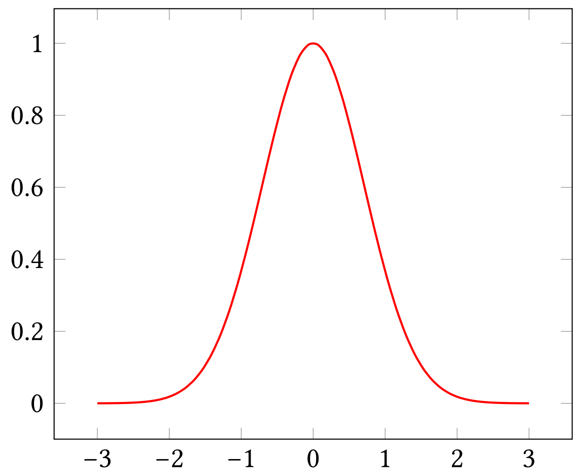


Abbildung 1: Funktionsplot der Gauß-Funktion auf dem Intervall $[-3, 3]$. Für $x \longrightarrow \pm\infty$ strebt die Funktion gegen 0.

lich, dass f stetig auf ganz $\mathbb{R}$ ist und unendlichen Träger besitzt, da die Funktion für alle $x \in \mathbb{R}$ ungleich 0 ist. Die Frage, die sich nun stellt, ist: »Wie groß ist die Fläche, die zwischen der x-Achse und der Gauß-Funktion eingeschlossen wird?« Um dies herauszufinden, müssen wir die Funktion uneigentlich integrieren. Es wird nun gezeigt, dass das Integral I definiert durch

$$I \coloneqq \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2)\,\mathrm{d}x$$

absolut konvergiert und dass f damit eine $L_1(\mathbb{R})$ Funktion ist. Dazu schätzen wir die Gauß-Funktion nach oben ab durch

$$g(x) \coloneqq \begin{cases} -x \cdot \exp(-x^2), & x < -1, \\ \exp(-x^2), & -1 \leq 0 \leq 1, \\ x \cdot \exp(-x^2), & x > 1, \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt nun $f(x) \leq g(x)$. Abbildung 2 veranschaulicht dies beispielhaft für die x aus dem Intervall $[-3, 3]$. Unter Verwendung der Tatsache, dass

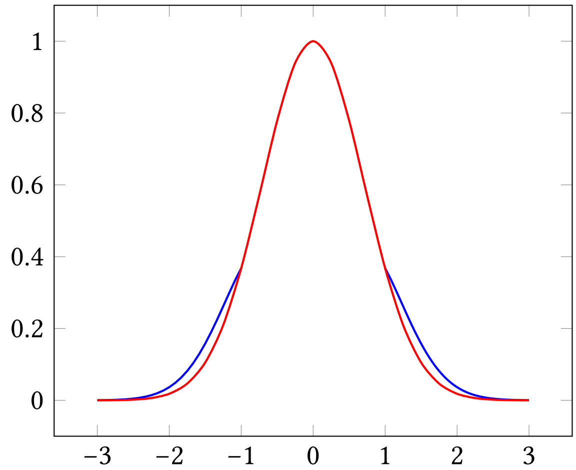


Abbildung 2: Abschätzung von f (rot gezeichnet) nach oben durch g (blau gezeichnet).

$f(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, und mit der Stetigkeit und Symmetrie von g erhalten wir folglich

$$\begin{aligned}
\|f\|_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} |\exp(-x^2)| \, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) \, \mathrm{d}x \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \, \mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{-1} -x \exp(-x^2) \, \mathrm{d}x + \int_{-1}^{1} \exp(-x^2) \, \mathrm{d}x + \int_{1}^{\infty} x \exp(-x^2) \, \mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{1} \exp(-x^2) \, \mathrm{d}x + 2 \int_{1}^{\infty} x \exp(-x^2) \, \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Wir betrachten das uneigentliche Integral $\int_1^\infty x \exp(-x^2) \, \mathrm{d}x$. Dieses konvergiert, da der Grenzwert

$$\lim_{n \to \infty} \int_1^n x \exp(-x^2) \, \mathrm{d}x = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2} \int_1^{n^2} \exp(-u) \, \mathrm{d}u = \frac{1}{2} \lim_{n \to \infty} -\exp(-u) \Big|_1^{n^2}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} -\exp(-n^2) - (-\exp(-1)) \\
&= \left(\frac{1}{2} + \exp(-1)\right) \lim_{n\to\infty} \underbrace{-\exp(-n^2)}_{\to 0} = \frac{1}{2} + \exp(-1)
\end{aligned}
$$

existiert. Man beachte dabei die Substitution $u \coloneqq x^2$, $\mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x$. Daraus folgt nun

$$\|f\|_1 < \infty.$$

Also ist f integrierbar und daher dürfen wir den Wert von I darstellen durch die Berechnung

$$I = \lim_{n\to\infty} I_n \coloneqq \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Da in jedem Fall $I_n \geq 0$ gilt, ist Quadrieren eine Äquivalenzumformung und man darf schreiben

$$I_n = \sqrt{(I_n)^2}.$$

Da zudem f auf dem Kompaktum $[-n, n]$ integriert wird, kann der Satz von Fubini angewendet werden, um die Integrationsreihenfolge zu vertauschen. Dies rechtfertigt

$$(I_n)^2 = \left(\int_{-n}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_{-n}^{n} f(y)\,\mathrm{d}y\right) = \int_{-n}^{n}\int_{-n}^{n} \exp(-(x^2 + y^2))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Wie man sieht, wurde von einem eindimensionalen Integral auf ein zweidimensionales Integral übergegangen. Abbildung 3 zeigt den Integranden, welcher nun die Gauß-Funktion in zwei Variablen ist. Die Integration in zwei Variablen und die Rotationssymmetrie des Integranden legen einen Wechsel zu Polarkoordinaten nahe, indem wir den Transformationssatz für Integrale in mehreren Variablen anwenden. Wir definieren eine Funktion

$$\Phi :\ [0, \infty) \times [0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad (r, \vartheta) \longmapsto (x \coloneqq r\cos(\vartheta), y \coloneqq r\sin(\vartheta)),$$

welche die gegebenen Polarkoordinaten mit Radius r und Winkel ϑ in kartesische Koordinaten (x, y) umwandelt. Das bedeutet, anstatt über Quadrate wollen wir nun über Kreise integrieren. Das Volumen der Funktion über einem Quadrat kann nach oben durch das Volumen über dem Umkreis und

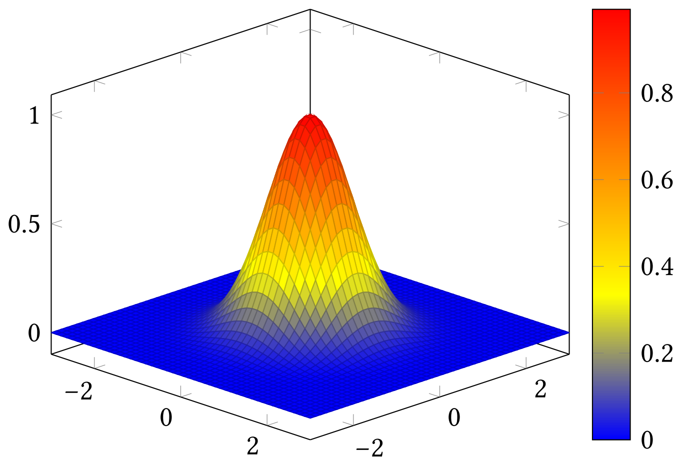


Abbildung 3: 3D-Plot der Gauß-Funktion in zwei Variablen auf dem Intervall $[-3,3] \times [-3,3]$.

nach unten durch das Volumen über Inkreis dieses Quadrats beschränkt werden. Siehe hierfür auch Abbildung 4. Wir berechnen zunächst das Volumen über dem Inkreis. Die Jacobi-Matrix von Φ ist gegeben durch

$$J_\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial r}(r,\vartheta) & \frac{\partial \Phi_1}{\partial \vartheta}(r,\vartheta) \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial r}(r,\vartheta) & \frac{\partial \Phi_2}{\partial \vartheta}(r,\vartheta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & -r\sin(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) & r\cos(\vartheta) \end{pmatrix}$$

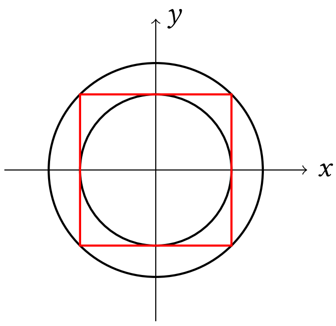
mit der Funktionaldeterminante

$$\det(J_\Phi) = r\cos^2(\vartheta) + r\sin^2(\vartheta) = r(\cos^2(\vartheta) + \sin^2(\vartheta)) = r.$$

Aus der Formel für $(I_n)^2$ erhält man mittels Variablensubstitution von $x = r\cos(\vartheta)$ und $y = r\sin(\vartheta)$ das Integral

$$\begin{aligned} V_I(n) &:= \int_0^{2\pi} \int_0^n |r| \exp\left(-\left(r^2\cos^2(\vartheta) + r^2\sin^2(\vartheta)\right)\right) \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^n r\exp(-r^2)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta \end{aligned}$$

Abbildung 4: Die Fläche des roten Quadrats mit Seitenlänge $2n$ lässt sich nach oben durch die Fläche des Umkreises mit Radius $2\sqrt{n}$ und nach unten durch die Fläche des Inkreises mit Radius n beschränken.



$$
\begin{aligned}
&= \left(\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\vartheta\right)\left(\int_0^{n} r\exp(-r^2)\,\mathrm{d}r\right) \\
&= 2\pi \int_0^{n} r\exp(-r^2)\,\mathrm{d}r.
\end{aligned}
$$

Um das verbleibende Integral auszuwerten, setze $u = r^2$. Dann ist $\mathrm{d}u = 2r\,\mathrm{d}r$. Substitution liefert weiter

$$
\begin{aligned}
2\pi \int_0^{n} r\exp(-r^2)\,\mathrm{d}r = \pi \int_0^{n^2} \exp(-u)\,\mathrm{d}u &= \pi\left(-\exp(-u)\right)\Big|_{u=0}^{n^2} \\
&= \pi(-\exp(-n^2)+1).
\end{aligned}
$$

Analog erhält man für das Volumen über dem Umkreis

$$V_U(n) \coloneqq \pi(-\exp(-2n^2)+1).$$

Also folglich

$$V_I(n) \leq (I_n)^2 \leq V_U(n).$$

Lässt man n gegen unendlich gehen, so erhält man

$$\lim_{n\to\infty} V_I(n) = \lim_{n\to\infty} \pi(-\exp(-n^2)+1) = \pi\left(\lim_{n\to\infty} -\exp(-n^2)+1\right) = \pi$$

und wiederum analog für das Volumen über dem Umkreis

$$\lim_{n\to\infty} V_U(n) = \pi.$$

Mit dem Einschnürungssatz folgt dann, dass auch

$$\lim_{n\to\infty} (I_n)^2 = \pi$$

gelten muss. Es folgt schließlich

$$I = \int_{\mathbb{R}} \exp(-x^2)\,\mathrm{d}x = \sqrt{\lim_{n\to\infty} (I_n)^2} = \sqrt{\pi}.$$

Alternativer, kurzer Beweis: Aus der Stochastik ist die Wahrscheinlichkeitsdichte der Standardnormalverteilung

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

mit der Eigenschaft

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

bereits bekannt. Substitution von $u = x/\sqrt{2}$, $\mathrm{d}x = \sqrt{2}\,\mathrm{d}u$ führt zu

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-u^2)\,\mathrm{d}u = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \int_{\mathbb{R}} \exp(-u^2)\,\mathrm{d}u = \sqrt{\pi}.$$