

Bildverarbeitung

Zusammenfassung

Manuel Pauli

Sebastian Schweikl

1. Juli 2016

Inhaltsverzeichnis

1. Mathematische Grundlagen der Signalverarbeitung	3
1.1. Signalräume	3
1.2. Fourier	7
1.3. Der Abtastsatz	19
1.4. Filter	22
Appendices	26
A. Satz von Tonelli	26
B. Dichtheit von L_p -Räumen	26
C. Sinus Cardinalis	26
C.1. Integrierbarkeit	26
C.2. Flächeninhalt	27

1. Mathematische Grundlagen der Signalverarbeitung

1.1. Signalräume

Definition 1.1 (Torus) Als *Torus* bezeichnet man die Menge der Äquivalenzklassen definiert durch

$$\mathbb{T} := \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z},$$

gesprochen » \mathbb{R} modulo $2\pi\mathbb{Z}$ «.

Bemerkung 1.2 (Torus) Einfach gesagt: Alle reellen Zahlen, die beim Teilen durch Vielfache von 2π den selben Rest lassen, sind äquivalent, und der Torus enthält alle möglichen Reste, die dabei auftreten können. Beispiel:

$$0/2\pi = 0 \text{ Rest } 0, \quad 2\pi/2\pi = 1 \text{ Rest } 0, \quad 4\pi/2\pi = 2 \text{ Rest } 0, \dots$$

D.h., die Zahlen 0 , 2π und 4π sind zueinander äquivalent, da sie alle den Rest 0 lassen. Man sagt, sie befinden sich in einer gemeinsamen *Äquivalenzklasse*. Da es unendlich viele Zahlen gibt, die beim Teilen durch 2π den Rest 0 lassen, befinden sich unendlich viele Zahlen in dieser Äquivalenzklasse. Daher sucht man sich einen Stellvertreter (einen sog. *Repräsentanten*), um vernünftig arbeiten zu können. Es bietet sich die einfachste Zahl in der Äquivalenzklasse an, in diesem Fall die 0 , und man schreibt dann häufig $[0]$, wenn alle Zahlen gemeint sind, die zur 0 äquivalent sind.

Nun wird dem einen oder anderen schon aufgefallen sein, dass der Torus auch unendlich viele Äquivalenzklassen besitzt (da es ja unendlich viele mögliche Reste beim Teilen gibt). Z.B. ist jede Zahl aus dem Intervall $[0, 2\pi)$ ein Repräsentant genau einer Äquivalenzklasse, und zu jeder Äquivalenzklasse kann man einen Repräsentanten in $[0, 2\pi)$ finden. Daher sagt man \mathbb{T} ist *isomorph* zu $[0, 2\pi)$, in Zeichen

$$\mathbb{T} \simeq [0, 2\pi).$$

Wichtig: Das heißt *nicht*, dass \mathbb{T} das Gleiche ist wie $[0, 2\pi)$! $[0, 2\pi)$ ist immer noch ein Intervall, und die Elemente aus \mathbb{T} können zwar mit denen aus $[0, 2\pi)$ identifiziert werden, aber \mathbb{T} hat *mehr Struktur* als $[0, 2\pi)$. Denn: Wenn ich z.B. die Zahl π aus dem Torus mit sich selber addiere, dann bekomme ich 0 , denn $\pi + \pi = 2\pi$ und $2\pi/2\pi = 1$ mit Rest $0 \in \mathbb{T}$. Das Ergebnis ist wieder ein Element aus dem Torus! Wenn ich aber $\pi \in [0, 2\pi)$ betrachte, und die selbe Rechnung wiederhole, dann bekomme ich immer noch 2π . Aber im Unterschied zu vorher gilt jetzt $2\pi \notin [0, 2\pi)$!

Übrigens gibt es unendlich viele Intervalle, die isomorph zu \mathbb{T} sind, z.B.

$$[-\pi, \pi), (-2\pi, 0], [-2\pi, 0], [42.5\pi, 44.5\pi), \dots$$

1. Mathematische Grundlagen der Signalverarbeitung

Jedes Intervall der Länge 2π ist isomorph zu \mathbb{T} ! Aber man sucht sich natürlich nur die hübschen Intervalle raus, und das sind im wesentlichen eh nur $[0, 2\pi)$ und $[-\pi, \pi)$.

Definition 1.3 (Funktionsräume)

1. Wir bezeichnen mit $L(\mathbb{R})$ die Gesamtheit aller reellwertigen Funktionen, d.h. die Menge aller Funktionen, die von \mathbb{R} nach \mathbb{R} abbilden:

$$L(\mathbb{R}) = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}.$$

Analog ist $l(\mathbb{Z})$ die Menge aller reellwertigen Folgen, also Funktionen, die von \mathbb{Z} nach \mathbb{R} abbilden:

$$l(\mathbb{Z}) = \{c: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}\}.$$

Wichtig: Die Indexmenge der Folge kommt aus \mathbb{Z} , das Bild einer Folge das aber selbstverständlich weiterhin eine Teilmenge von \mathbb{R} sein. Wir könnten also auch schreiben:

$$l(\mathbb{Z}) = \{(c_n)_{n \in \mathbb{Z}} \subseteq \mathbb{R}\}.$$

2. Die Menge aller summierbaren Funktionen $L_1(\mathbb{R})$ ist definiert durch

$$L_1(\mathbb{R}) := \left\{ f \in L(\mathbb{R}) : \|f\|_1 := \int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt < \infty \right\}$$

und die Menge aller summierbaren Folgen durch

$$l_1(\mathbb{Z}) := \left\{ c \in l(\mathbb{Z}) : \|c\|_1 := \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c(k)| < \infty \right\}$$

Bildlich Dargestellt kann man sich dies so vorstellen:



Abbildung 1.1.: Hinreichend schnelles Abklingverhalten von $L_1(\mathbb{R})$ -Funktionen.

3. Analog wird die Menge der quadratsummierbaren Funktionen $L_2(\mathbb{R})$ definiert durch

$$L_2(\mathbb{R}) := \left\{ f \in L(\mathbb{R}) : \|f\|_2 := \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt} < \infty \right\}$$

1. Mathematische Grundlagen der Signalverarbeitung

und die Menge der quadratsummierbaren Folgen durch

$$l_2(\mathbb{Z}) := \left\{ c \in l(\mathbb{Z}) : \|c\|_2 := \sqrt{\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c(k)|^2} < \infty \right\}$$

$\|\bullet\|_2$ bezeichnet man auch als die »Energie-Norm«.

Bildlich Dargestellt kann man sich dies so vorstellen:



Abbildung 1.2.: Geometrische Interpretation als Mittelwert einer Fläche.

4. Die Menge aller beschränkten Funktionen und Folgen definiert durch

$$L_\infty(\mathbb{R}) := \left\{ f \in L(\mathbb{R}) : \|f\|_\infty := \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)| < \infty \right\}$$

bzw.

$$l_\infty(\mathbb{Z}) := \left\{ c \in l(\mathbb{Z}) : \|c\|_\infty := \sup_{k \in \mathbb{Z}} |c(k)| < \infty \right\}.$$

5. Einer geht noch: Die Menge der Funktionen und Folgen mit *endlichem Träger*, geschrieben als $L_{00}(\mathbb{R})$ bzw. $l_{00}(\mathbb{Z})$. Was ist mit »endlichem Träger« gemeint? Das bedeutet, dass der Bereich, auf dem die Funktion bzw. Folge lebt, nicht unendlich groß sein darf. Formal: Es existiert ein $N \in \mathbb{N}$, sodass

$$\left. \begin{array}{l} \{t \in \mathbb{R} : f(t) \neq 0\} \\ \{k \in \mathbb{Z} : c(k) \neq 0\} \end{array} \right\} \subseteq [-N, N].$$

Bemerkung 1.4 ($L_1(\mathbb{R})$ -Funktionen und $l_1(\mathbb{Z})$ -Folgen) Wir betrachten nur Funktionen (bzw. Folgen, aber das werde ich jetzt nicht mehr dazu sagen), die »brav« sind. Damit ist gemeint, dass die Funktionen ein hinreichend schnelles Abklingverhalten gegen 0 besitzen müssen. Anschaulich gesprochen bewirkt der Betrag ja, dass wir einfach alles, was von der Funktion unterhalb der x -Achse liegt, nach oben »umklappen«, sodass es nun positiv ist. Und wenn wir jetzt darüber integrieren, darf nur was Endliches dabei herauskommen. Dies ist eine hinreichende Forderung, damit wir die Fourier-Transformation zu einer Funktion überhaupt vernünftig definieren können.

Wir stellen fest, dass in $l_1(\mathbb{Z})$ *nur* Nullfolgen (Folgen, deren Grenzwert 0 ist) zu finden sind, z.B. $(1/k^2)_{k \in \mathbb{Z}}$. Achtung! Die Folge $(1/k)_{k \in \mathbb{Z}}$ ist zwar auch eine Nullfolge, aber die Reihe dazu konvergiert nicht absolut (wir haben es hier ja mit der harmonischen Reihe zu tun), und ist daher ist die Folge auch nicht in $l_1(\mathbb{Z})$.

Bemerkung 1.5 ($L_2(\mathbb{R})$ -Funktionen und $l_2(\mathbb{Z})$ -Folgen) Unterschied zu den »normalen« summierbaren Funktionen ist, dass hier die Zwei-Norm der Funktion kleiner als unendlich sein muss anstatt der Eins-Norm (daher kommt ja auch der Name »quadratsummerbar«). Leider gibt es hierfür keine so schöne geometrische Anschauung, da wir über ganz \mathbb{R} integrieren, aber man kann versuchen, sich das Ganze so vorzustellen: Durch das Quadrieren des Betrags erhält man sozusagen eine Fläche, und durch das Integrieren erzeugen wir ein Volumen, welches dann so wie ein Schlauch an der x -Achse entlang wabert. Durch das Wurzelziehen brechen wir das Volumen wieder herunter auf eine Fläche. Und hier endet leider schon die Analogie. Auf dem Torus würde man jetzt noch durch 2π teilen (weil das die Länge eines Intervalls ist, welches isomorph zum Torus ist), und man könnte sich die Zwei-Norm vorstellen als Mittelwert der Fläche. Da wir aber über ganz \mathbb{R} integrieren und wir schlecht durch ∞ teilen können, lass ma das hier bleiben und geben uns mit dem zufrieden, was wir schon haben.

Das führt uns unweigerlich zu einer wichtigen Frage: Warum sollte man also überhaupt den Raum $L_2(\mathbb{R})$ definieren wollen? Die Antwort ist: Weil Mathematiker es immer cool finden, irgendwelche abgefahrenen Konzepte zu verallgemeinern. Außerdem kann man in $L_2(\mathbb{R})$ ein Skalarprodukt von Funktionen definieren, mit dem sich recht schön rechnen lässt, was eben in $L_1(\mathbb{R})$ nicht geht.

Für die mathematisch Interessierten unter uns: $L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$ liegt dicht¹ in $L_2(\mathbb{R})$, und es gilt:

$$L_1(\mathbb{R}) \not\subset L_2(\mathbb{R}) \quad \text{und} \quad L_2(\mathbb{R}) \not\subset L_1(\mathbb{R}).$$

Das heißt aber nicht, dass der Schnitt der beiden Funktionenräume leer ist! Darin befinden sich nämlich ziemlich coole Funktionen, für die man wieder eine Fourier-Transformierte und sogar ein Skalarprodukt² definieren kann.

Beispiel 1.6 (Beschränkte Folge) Betrachten wir als Beispiel einer Folge in $l_\infty(\mathbb{Z})$ die Folge $((-1)^n : n \in \mathbb{Z})$. Die Folge besitzt zwei Häufungspunkte -1 und 1 , zwischen denen sie immer hin- und herspringt. Das Supremum dieser Folge ist natürlich 1 , was kleiner als ∞ ist. Wäre diese Folge auch in $l_1(\mathbb{Z})$? Nein, wäre sie nicht, da sie ja nicht mal konvergiert.

Beispiel 1.7 ($L_0(\mathbb{R})$ -Funktion) Die Exponentialfunktion \exp wird niemals 0 , sie hat unendlichen Träger und deshalb keine $L_0(\mathbb{R})$ -Funktion. Die Rechtecksfunktion $\chi_{[-1,1]}$ hingegen ist nur im Intervall $[-1, 1]$ ungleich 0 und daher in $L_0(\mathbb{R})$.

Definition 1.8 (Dirac-Puls) Der Dirac-Puls

$$\delta(k) := \delta_{0k} := \begin{cases} 1, & k = 0, \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

ist eine lustige Funktion, die nur an der Stelle 0 gleich 1 ist und sonst überall 0 (siehe Abbildung 1.8).

¹Siehe dazu auch B

²Achtung: Ein Skalarprodukt auf Lebesgue-Räumen ist nur auf L_2 definiert, für alle anderen Lebesgue-Räume existiert kein Skalarprodukt.

1. Mathematische Grundlagen der Signalverarbeitung



Abbildung 1.3.: Der Dirac-Puls δ .

Definition 1.9 (Abtastoperator) Der Abtastoperator $S_h : L(\mathbb{R}) \rightarrow l(\mathbb{R})$ mit Schrittweite h ist für eine Funktion f definiert als

$$(S_h f)(k) := f(hk), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Bemerkung 1.10 (Abtastoperator) Anstatt die Funktion für alle reellen Zahlen zu betrachten, tasten wir die Funktion nur an abzählbar vielen Stellen im Abstand $h \in \mathbb{R}$ ab. Wir betrachten die Funktion also nur an den Stellen $0, h, -h, 2h, -2h, 3h, -3h \dots$, was effektiv zu einer Diskretisierung des gegebenen kontinuierlichen Signals führt. Diesen Prozess kann man auch als *Downsampling* bezeichnen.

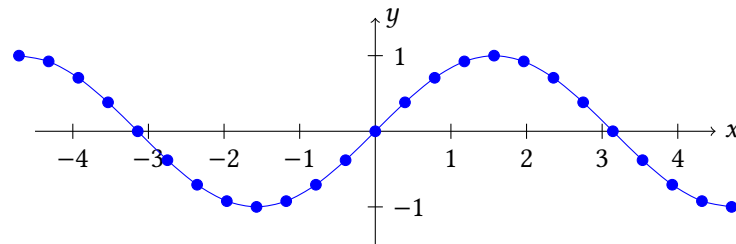


Abbildung 1.4.: Abtastung des Sinus an den hervorgehobenen Punkten.

1.2. Fourier

Definition 1.11 (Fourier-Transformation) Für Funktionen $f \in L_1(\mathbb{R})$ definieren wir mit

$$\widehat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \widehat{f}(\xi) := f^\wedge(\xi) := \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\xi t} dt, \quad \xi \in \mathbb{R}$$

die Fourier-Transformierte von f und für Folgen $c \in l_1(\mathbb{Z})$

$$\widehat{c} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \widehat{c}(\xi) := c^\wedge(\xi) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} c(k) e^{-i\xi k}, \quad \xi \in \mathbb{R}$$

die Fourier-Transformierte von c .

Bemerkung 1.12 (Fourier-Transformation)

1. Mathematische Grundlagen der Signalverarbeitung

- Was machen wir hier eigentlich? Schreiben wir einfach mal \widehat{f} als

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\xi t} dt &= \int_{\mathbb{R}} f(t) (\cos(\xi t) - i \sin(\xi t)) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(t) \cos(\xi t) dt - i \int_{\mathbb{R}} f(t) \sin(\xi t) dt\end{aligned}$$

dann sehen wir, dass wir lediglich versuchen, f auszudrücken als Kombination von Sinus- und Cosinus-Termen. Wir schauen einfach, wo f und der \sin bzw. \cos eine große Ähnlichkeit zueinander haben (an der Stelle wird das Integral dann groß) und finden so heraus, welchen »Anteil« die Frequenz ξ am Signal f hat. Man kann es auch so sehen: Der Cosinus gibt immer den Gewichtungsfaktor der jeweiligen Frequenz vor, und der Sinus die Phasenverschiebung. Dass wir hier die doofe imaginäre Einheit i mit drin haben, liegt halt einfach daran, dass wir die Identität

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$$

ausgenutzt haben, um die Fourier-Transformation besonders elegant zu schreiben. Man hätte auch für Real- und Imaginärteil zwei gesonderte Fourier-Transformationen definieren können. Aber das soll uns hier nicht weiter stören. Außerdem kann man halt mit einer Exponentialfunktion schöner rechnen (z.B. ist die Stammfunktion der Exponentialfunktion wieder die Exponentialfunktion). Das ist eigentlich alles, was dahinter steckt. Will man die imaginäre Einheit ganz wegbekommen, geht man im diskreten Fall einfach über zur *Diskreten Cosinus-Transformation*.

- Wichtig: Mit der Fourier-Transformation finden wir zwar heraus, welche Frequenzen im Singal stecken, aber wir wissen nicht, an welcher Stelle bzw. zu welchem Zeitpunkt die entsprechende Frequenz auftritt! Wir haben keine Lokalität, da wir ja über ganz \mathbb{R} integrieren. Das ist ein wichtiger Unterschied zur *Gabor-Transformation*, wo wir unser einer Fensterfunktion bedienen, um so Frequenzen besser lokalisieren zu können ☺.
- Warum brachen wir $L_1(\mathbb{R})$ -Funktionen? Wie vorher schon erwähnt, ist das eine hinreichende Bedingung, dass \widehat{f} überhaupt existiert:

$$\widehat{f} \leq |\widehat{f}| = \left| \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\xi t} dt \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(t)| \underbrace{|e^{-i\xi t}|}_{=1} dt = \int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt < \infty.$$

Das Argument lässt sich analog auf $l_1(\mathbb{Z})$ -Folgen übertragen.

Definition 1.13 (Translations- und Skalierungsoperator)

1. Der Translationsoperator τ_y mit $y \in \mathbb{R}$ angewendet auf eine Funktion f ist definiert als

$$\tau_y f := f(\bullet + y).$$

1. Mathematische Grundlagen der Signalverarbeitung



Abbildung 1.5.: Verschiebung der grün gezeichneten Funktion um y Einheiten nach rechts führt zur orange dargestellten Funktion.

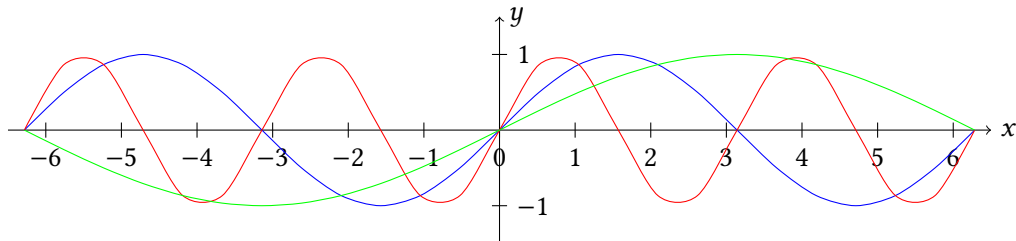


Abbildung 1.6.: Skalierung der Sinus-Funktion (blau) mit dem Faktor 2 führt zu doppelt so schneller Schwingung (roter Graph). Skalierung mit dem Faktor 0.5 bewirkt halb so schnelle Schwingung (grüner Graph).

- Der Skalierungsoperator σ_h mit $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ angewendet auf eine Funktion f ist definiert als

$$\sigma_h f := f(h \cdot \bullet).$$

Bemerkung 1.14 (Translations- und Skalierungsoperator)

- der Translationsoperator verschiebt eine Funktion auf der x -Achse um y Einheiten nach links oder rechts:

Wert von y	Effekt auf f
$y > 0$	Verschiebung nach <i>links</i>
$y = 0$	Keine Verschiebung
$y < 0$	Verschiebung nach <i>rechts</i>

- Der Skalierungsoperator streckt oder staucht eine Funktion um den Faktor h und kann sie sogar an der y -Achse spiegeln:

1. Mathematische Grundlagen der Signalverarbeitung

Wert von h	Effekt auf f
$h > 1$	Stauchung
$h = 1$	Kein Effekt
$0 < h < 1$	Streckung
$h = 0$	Um Gottes Willen! Das ist pfui-gack.
$-1 < h < 0$	Streckung und Spiegelung an der y -Achse
$h = -1$	Nur Spiegelung an der y -Achse
$h < -1$	Stauchung und Spiegelung an der y -Achse

- Die Definition des Skalierungsoperators ist recht ähnlich zur der des Abtastoperators mit Schrittweite h . An dieser Stelle sollte betont werden, dass beide Operatoren nicht miteinander zu verwechseln sind! Der Abtastoperator liefert zu einem kontinuierlichen Signal f ein diskretes Signal $S_h f = (f(h \cdot \bullet))_{h \in \mathbb{Z}}$. Das h ist hier variabel. Der Skalierungsoperator überführt ein kontinuierliches Signal f wieder in ein kontinuierliches Signal $\sigma_h f = f(h \cdot \bullet)$, welches eben um den Faktor h gestreckt bzw. gestaucht wurde. h ist hier ein fester Wert.
- Translation und Skalierung sind invertierbar, d.h. man kann ihre Auswirkungen wieder rückgängig machen:

$$\tau_y (\tau_{-y} f) = \tau_{-y} (\tau_y f) = f \quad \text{und} \quad \sigma_h (\sigma_{1/h} f) = \sigma_{1/h} (\sigma_h f) = f.$$

Definition 1.15 (Faltung) Seien $f, g \in L(\mathbb{R})$ und $c, d \in l(\mathbb{Z})$. Dann ist die Faltung zweier Funktionen definiert als

$$f * g := \int_{\mathbb{R}} f(\bullet - t) \cdot g(t) dt \in L(\mathbb{R})$$

und die Faltung zweier Folgen als

$$c * d := \sum_{k \in \mathbb{Z}} c(\bullet - k) \cdot d(k) \in l(\mathbb{Z}).$$

Die Faltung einer Funktion f mit einer Folge c ist definiert durch

$$c * f := f * c := \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(\bullet - k) \cdot d(k) \in L(\mathbb{R}).$$

Bemerkung 1.16 (Eigenschaften der Faltung) Aus der Linearität des Integrals und den Gruppenoperationen auf \mathbb{R} lassen sich folgende Eigenschaften der Faltung für Funktionen oder Folgen f, g, h herleiten:

- Kommutativität: $f * g = g * f$
- Assoziativität: $(f * g) * h = f * (g * h)$
- Distributivität: $f * (g + h) = f * g + f * h$

1. Mathematische Grundlagen der Signalverarbeitung

- Skalare Multiplikation: $a \cdot (f * g) = (a \cdot f) * g = f * (a \cdot g)$, wobei $a \in \mathbb{C}$ eine beliebige Konstante ist.

Bemerkung 1.17 (Interpretation der Faltung) Die Faltung kann aufgefasst werden als Produkt zweier Funktionen oder Folgen, welches wieder eine Funktion bzw. Folge liefert. Wie kann man sich die Faltung geometrisch vorstellen? Betrachten wir als Beispiel zwei Funktionen f und g und die Faltung $f * g$. Was dabei passiert, ist Folgendes: Zunächst wird f durch $f(\bullet - t)$ *vertikal* gespiegelt. Wir halten anschließend die Funktion g fest und lassen f einmal komplett von ganz links nach ganz rechts über die x -Achse wandern. Dort, wo sich f und g überlagern und eine große »Gemeinsamkeit« miteinander haben, wird auch das Integral groß. Dort, wo beide Funktionen keine große Gemeinsamkeit miteinander haben, wird das Integral klein. Die Faltung ist also eine Methode, um feststellen zu können, wie *lokal* ähnlich (nicht global!) sich zwei Funktionen sind.

Je nachdem, welche Funktion man für g wählt, lassen sich mit der Faltung unterschiedliche interessante andere Funktionen erzeugen. Wikipedia meint, dass eine Faltung $f * g$ einen »gewichteten Mittelwert« von f darstellt, wobei die Gewichtung durch g vorgegeben ist. Diese Argumentation versteht man eigentlich erst, wenn man sich *zyklische Faltungen* anschaut, wo nicht über ganz \mathbb{R} integriert wird, sondern über ein Kompaktum. Dann wird das Integral nämlich noch durch die Länge des Kompaktums dividiert, sodass man tatsächlich eine Art Durchschnitt hat. Und hey, das kommt uns doch jetzt irgendwie von der Definition der $L_2(\mathbb{R})$ -Funktionen bekannt vor!

Beispiel 1.18 (Faltung) Falten wir doch einmal die Rechtecksfunktion $\chi_{[-1,1]}$ mit sich selbst. Man definiert

$$\chi_{[-1,1]}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-1, 1] \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} (\chi_{[-1,1]} * \chi_{[-1,1]})(x) &= \int_{\mathbb{R}} \chi_{[-1,1]}(x-t) \cdot \chi_{[-1,1]}(t) dt = \int_{\mathbb{R}} \chi_{[x-1, x+1]}(t) \cdot \chi_{[-1,1]}(t) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \chi_{[x-1, x+1] \cap [-1,1]}(t) dt = \int_{[x-1, x+1] \cap [-1,1]} 1 dt \\ &= \begin{cases} \int_{-1}^{x+1} 1 dt = 2+x, & -2 \leq x \leq 0, \\ \int_{x-1}^1 1 dt = 2-x, & 0 < x \leq 2, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \\ &=: \Delta_{[-2,2]}(x). \end{aligned}$$

Man erhält also die Dreiecksfunktion auf dem Intervall $[-2, 2]$. Was bedeutet das? Naja, die $\Delta_{[-2,2]}(x)$ an der Stelle x gibt genau die Fläche an, die zwischen den beiden Rechtecksfunktionen gerade eingeschlossen wird, wenn man eine Rechtecksfunktion um x Einheiten verschiebt. Im Fall von $x = 0$ überlappen sich beide Rechtecksfunktionen ganz genau, und deren Flächeninhalt ist 2. Dies ist genau der Wert von $\Delta_{[-2,2]}(0)$! Verschiebt man eine Rechtecksfunktion um 1

1. Mathematische Grundlagen der Signalverarbeitung

Einheit nach links oder rechts, dann wird nur noch die Hälfte der Fläche zwischen beiden Rechtecksfunktionen eingeschlossen, also Flächeninhalt 1. Und genau das kommt bei $\Delta_{[-2,2]}(x)$ heraus, wenn man $x = 1$ oder $x = -1$ einsetzt.

Die geometrische Interpretation einer Faltung ist also sehr vielfältig und hängt sehr stark von den beiden Funktionen ab, die miteinander gefaltet werden, siehe Abbildung 1.7.

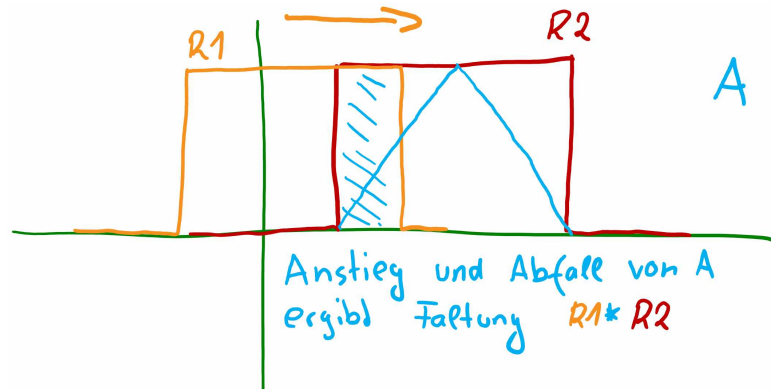


Abbildung 1.7.: Faltung der Rechtecksfunktion (orange und rot) mit sich selbst ergibt die Dreiecksfunktion (blau).

Nun kommen wir zu einem sehr wichtigen Teil der Vorlesung, nämlich zu den Eigenschaften der Fourier-Transformation. Insbesondere wollen wir uns mit deren graphischer Deutung beschäftigen. Faltungen werden in diesem Kontext auch eine sehr wichtige Rolle spielen, wenn wir die Fourier-Transformierte besonders schnell berechnen wollen.

Bemerkung 1.19 (Eigenschaften der Fourier-Transformation und deren graphische Deutung)

Linearität Die Fourier-Transformierte ist linear. Dies folgt sofort aus der Linearität des Integrals. Seien also $f, g \in L_1(\mathbb{R})$ und $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$(a \cdot f + b \cdot g)^\wedge = a \cdot \hat{f} + b \cdot \hat{g}.$$

Bildliche Vorstellung: Multiplizieren wir eine Funktion f mit einer Konstanten a , so ändert sich lediglich die Amplitude von f . Die Frequenzen in der Funktion bleiben gleich, es kommen keine neuen Frequenzen hinzu und es fallen keine weg. Der »Anteil« der bereits vorhandenen Frequenzen wird nur anders gewichtet, nämlich mit dem Faktor a versehen. Deshalb gilt $(a \cdot f)^\wedge = a \cdot \hat{f}$ (siehe hierfür auch Abbildung 1.8, linker Teil).

Was hat es aber mit der Addition zweier Funktionen auf sich? Nun, wenn wir zwei Funktionen addieren, so sollten sich auch die Anteile der Frequenzen addieren. Dies spiegelt sich genau in der Identität $(f + g)^\wedge = \hat{f} + \hat{g}$ wider (Abbildung 1.8, rechter Teil).

Was passiert, wenn wir $f = g$ setzen? Dann sollte der Anteil jeder Frequenz doppelt so groß sein wie vorher. Und in der Tat: Wir können jetzt entweder sagen $(f + f)^\wedge = \hat{f} + \hat{f} = 2\hat{f}$ oder $(f + f)^\wedge = (2f)^\wedge = 2\hat{f}$. In beiden Fällen kommt das gleiche raus.

1. Mathematische Grundlagen der Signalverarbeitung

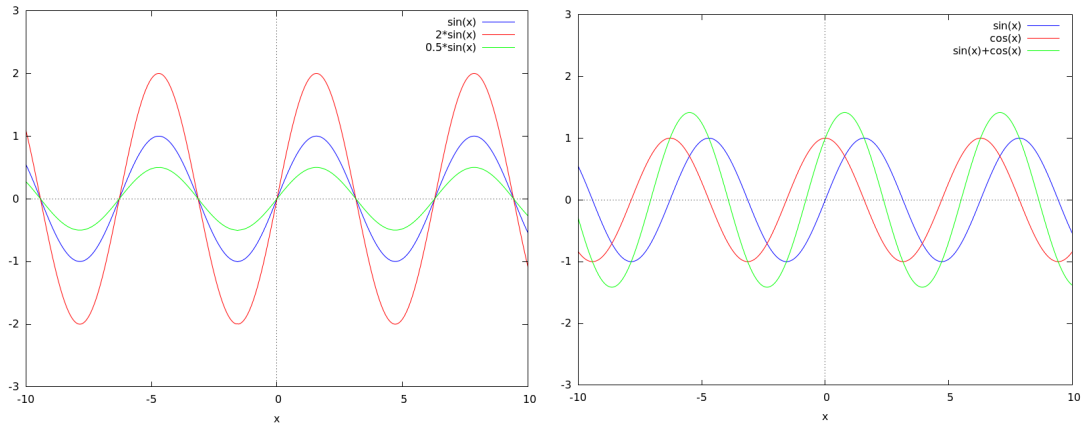


Abbildung 1.8.: Links: Änderung der Amplitude der Sinus-Funktion bei gleichbleibender Frequenz. Rechts: Bei Addition der Sinus- und Cosinus-Funktion addieren sich auch die Frequenzen.

Translation (Zeitverschiebung) Für $f \in L_1(\mathbb{R})$ und $y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$(\tau_y f)^\wedge(\xi) = (f(\bullet + y))^\wedge(\xi) = e^{iy\xi} \widehat{f}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Wie bereits oben erwähnt verschiebt eine Translation eine Funktion um den Wert y . Verschiebt man nun die ursprüngliche Funktion des Signal, sollte sich an den Anteilen der Frequenzen ξ nichts ändern. Wo kommt aber nun dieser seltsame Faktor $e^{iy\xi}$ her? Dazu müssen wir uns wieder in Erinnerung rufen, dass sich die Fourier-Transformation auch so schreiben lässt: $\int_{\mathbb{R}} f(t) \cos(\xi t) dt - i \int_{\mathbb{R}} f(t) \sin(\xi t) dt$.

→ Es gibt einen Imaginärteil und einen Realteil. Durch die Translation ändert sich nur die Aufteilung zwischen diesen zwei Teilen. Der Gesamtanteil bleibt gleich. Diese Umverteilung geschieht durch den Vorfaktor $e^{iy\xi}$. (Dies bezeichnet man auch als *Frequenz-Modulation*).

Betrachten wir \widehat{f} als Vektor in der komplexen Zahlenebene, so führt der Faktor $e^{iy\xi}$ lediglich dazu, dass die der Vektor um den Winkel $y \cdot \xi$ im Uhrzeigersinn gedreht wird. D.h. an den Anteilen der Frequenzen ändert sich im Absolutbetrag nichts. Schließlich ist ja auch $|e^{iy\xi}| = 1$.

Als veranschaulichendes Beispiel diene hier die Rechtecks-Funktion $\chi_{[-1,1]}$ mit ihrer Fourier-Transformierten $2 \sin(x)/x$. Wird die Rechtecks-Funktion um eine Einheit nach links verschoben, so wird die Fourier-Transformierte mit dem Vorfaktor $e^{i\xi}$ versehen, also

$$(\tau_1 \chi_{[-1,1]})^\wedge(\xi) = (\chi_{[-1,1]}(\bullet + 1))^\wedge(\xi) = \widehat{\chi}_{[-2,0]}(\xi) = e^{i\xi} \cdot \frac{2 \sin(\xi)}{\xi}.$$

Abbildung 1.9 zeigt die Rechtecksfunktion und die verschobene Rechtecksfunktion, sowie deren Fourier-Transformierte. Wir stellen zunächst fest, dass die Rechtecksfunktion eine vollständig reelle Fourier-Transformierte besitzt und die verschobene Rechtecksfunktion eine reell- und komplexwertige Fourier-Transformierte. Dies zeigt ganz deutlich, dass

1. Mathematische Grundlagen der Signalverarbeitung



Abbildung 1.9.: Links: Rechtecksfunktion und deren Fourier-Transformierte. Rechts: Die um 1 nach links verschobene Rechtecksfunktion und deren Fourier-Transformierte mit Real- und Imaginärteil separat geplottet (Realteil rot, Imaginärteil grün). Gut sichtbar ist die Phasenverschiebung zwischen Sinus und Cosinus.

sich die Aufteilung der Frequenzen zwischen Sinus und Cosinus verschoben hat. Die interessante Frage ist aber nun: Hat sich an den Anteilen der Frequenzen im Ganzen etwas geändert? Die Antwort liefert Abbildung 1.10. Im Absolutbetrag sind nämlich beide Fourier-Transformationen identisch. D.h. die Frequenzanteile sind im Ganzen gleich geblieben. Dies hätte man auch schon so sehen können:

$$\left| (\tau_1 \chi_{[-1,1]})^\wedge(\xi) \right| = \left| e^{i\xi} \cdot \widehat{\chi}_{[-1,1]}(\xi) \right| = \left| e^{i\xi} \right| \cdot \left| \widehat{\chi}_{[-1,1]}(\xi) \right| = 1 \cdot \left| \widehat{\chi}_{[-1,1]}(\xi) \right| = \left| \widehat{\chi}_{[-1,1]}(\xi) \right|.$$

Also ganz kurz und knapp: Verschiebung im Zeit-/Ortsbereich führt zu Modulation im Frequenzbereich.

Übrigens: Der Realteil der Fourier-Transformierten ist immer achsensymmetrisch zur y -Achse, weil der Cosinus achsensymmetrisch zur y -Achse ist, und der Imaginärteil ist punktsymmetrisch um den Ursprung, weil der Sinus punktsymmetrisch um den Ursprung ist.

(Zeit-)Skalierung Sei $f \in L_1(\mathbb{R})$ und $h \neq 0$. Dann gilt

$$(\sigma_h f)^\wedge(\xi) = f(h \cdot \bullet)^\wedge(\xi) = \frac{1}{|h|} \widehat{f}\left(\frac{\xi}{h}\right), \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Durch den Skalierungsoperator wird eine Funktion im Zeit-/Ortsbereich in Richtung der x -Achse gestaucht oder gestreckt (anders ausgedrückt: Die Periodenlänge ändert sich). Damit ändern sich auch die im Signal enthaltenen Frequenzen. Beispiel anhand des Sinus: Wird die Periodenlänge halbiert, so verdoppelt sich doch die Frequenz, denn der Sinus schwingt jetzt doppelt so schnell. In diesem Kontext ist die Frequenz der Reziprokwert der Periodenlänge.

1. Mathematische Grundlagen der Signalverarbeitung



Abbildung 1.10.: Links: Fourier-Transformierte der Rechteckfunktion (blau) und der verschobenen Rechteckfunktion (Realteil rot, Imaginärteil grün). Rechts: Fourier-Transformation der Rechteckfunktion (blau) und der verschobenen Rechteckfunktion im Absolutbetrag (rot).

Können wir diese Analogie auch auf die Fourier-Transformation übertragen? Betrachten wir ein weiteres Mal die Rechteckfunktion. Skalieren wir diese mit einem Faktor von $h = 2$ und bilden davon die Fourier-Transformation, so erhalten wir:

$$(\sigma_2 \chi_{[-1,1]})^\wedge(\xi) = \frac{1}{2} \widehat{\chi}_{[-1,1]} \left(\frac{\xi}{2} \right) = \frac{2}{\xi} \sin \left(\frac{\xi}{2} \right).$$

Abbildung 1.11 zeigt die eben angesprochenen Funktionen. Das $\xi/2$ im Argument von $(\sigma_2 \chi_{[-1,1]})^\wedge$ führt dazu, dass die Fourier-Transformation auseinander gezogen wird. Durch den Vorfaktor $2/\xi$ verringert sich zudem die Amplitude. Dies macht auch Sinn, denn durch das Zusammenstauchen einer Funktion im Ortsbereich schwingt sie ja schneller, sie wird hochfrequenter. Das entspricht genau dem Auseinanderziehen der Fourier-Transformation. Es wird mehr Anteil in den hochfrequenten Bereich verlagert. Gleichzeitig wird der Anteil der niedrigen Frequenzen (die sich im Frequenzbereich um den Ursprung konzentrieren) geringer, was dem Plattdrücken der Fourier-Transformierten entspricht.

Man stellt fest: Für große Werte von h konzentriert sich die Funktion im Zeitbereich stark um den Ursprung, sie wird gestaucht und hochfrequenter. Im Frequenzbereich führt dies dazu, dass die Fourier-Transformation gestreckt (auseinander gezogen) und platt gedrückt wird. Umgekehrt führen kleine Werte von h dazu, dass die Funktion im Ortsbereich gestreckt wird, also niederfrequenter wird. Die Fourier-Transformation wird um den Ursprung zusammengedrückt und schlägt stärker aus.

Faltung Für $f, g \in L_1(\mathbb{R})$ bzw. $c, d \in l_1(\mathbb{Z})$ sind $f * g \in L_1(\mathbb{R})$, $c * d \in l_1(\mathbb{Z})$ und $f * c \in L_1(\mathbb{R})$ und es gilt:

$$(f * g)^\wedge(\xi) = \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\xi), \quad (c * d)^\wedge(\xi) = \widehat{c}(\xi) \widehat{d}(\xi) \quad \text{und} \quad (f * c)^\wedge(\xi) = \widehat{f}(\xi) \widehat{c}(\xi).$$

1. Mathematische Grundlagen der Signalverarbeitung

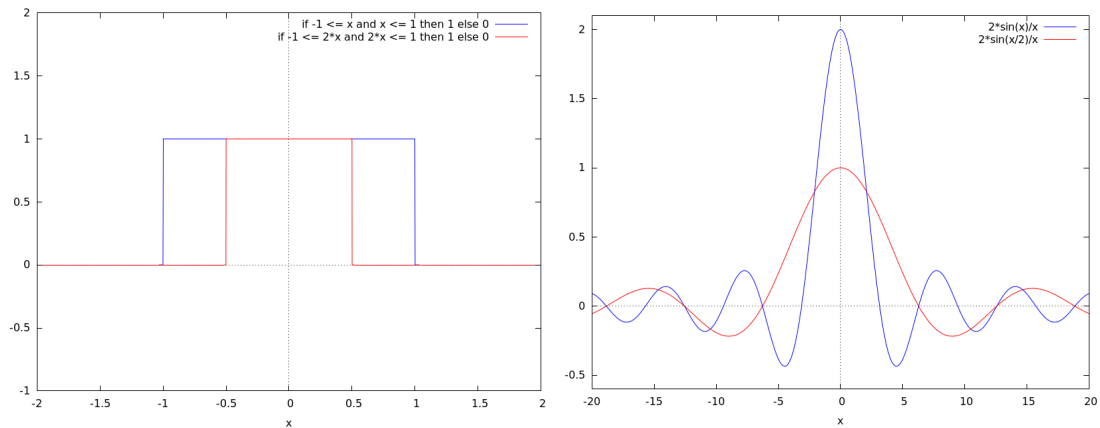


Abbildung 1.11.: Links: Rechtecksfunktion (blau) und gestauchte Rechtecksfunktion (rot). Rechts: Fourier-Transformationen zu den Rechtecksfunktionen (in gleicher Farbe).

Eine Faltung im Zeitbereich gibt ja so etwas wie die Übereinstimmung zwischen den beiden Funktionen an, und die Multiplikation im Frequenzbereich kann man sich nun vorstellen als Übereinstimmung der Frequenzen der beiden Funktionen.

Eine Faltung im Zeitbereich wird also überführt in eine Multiplikation im Frequenzbereich. Dies ist eine extrem wichtige Eigenschaft der Fourier-Transformation. Dies hat im Wesentlichen zwei Gründe:

1. Die Berechnung einer Faltung zweier Funktionen ist normalerweise viel aufwendiger als die beiden Funktionen einfach punktweise zu multiplizieren (es sind hier weniger Operationen auszuführen).
2. Außerdem weist das Produkt eine höhere numerische Stabilität auf als die Faltung.

Diese Eigenschaften kann man sich zunutze machen, um Filter effizient zu implementieren, und dabei ist von der Schnellen Fourier-Transformation (FFT) noch gar nicht die Rede.

Weil es so schön ist, hier der Faltungsbeweis für den Fall, dass zwei Funktionen $f, g \in L_1(\mathbb{R})$ gegeben sind:

$$\begin{aligned}
 (f * g)^\wedge(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} (f * g)(x) e^{-i\xi x} dx && \text{(Def. Fourier-Transf.)} \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(t) g(x-t) dt \right) e^{-i\xi x} dx && \text{(Def. Faltung)} \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(t) g(x-t) e^{-i\xi x} dx dt && \text{(Tonelli)} \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(t) g(s) e^{-i\xi(t+s)} ds dt && \text{(Subst. } s := x - t, ds = dx) \\
 &= \left(\int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\xi t} dt \right) \left(\int_{\mathbb{R}} g(s) e^{-i\xi s} ds \right) && \text{(Arithmetik \& Tonelli)}
 \end{aligned}$$

1. Mathematische Grundlagen der Signalverarbeitung

$$= \widehat{f}(\xi) \cdot \widehat{g}(\xi). \quad (\text{Def. Fourier-Transf.})$$

Ableitungseigenschaften Sind $f, f' \in L_1(\mathbb{R})$, dann gilt

$$\left(\frac{df}{dx} \right)^\wedge(\xi) = i\xi \widehat{f}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Sind $f, xf \in L_1(\mathbb{R})$, dann ist \widehat{f} differenzierbar und es gilt

$$\frac{d\widehat{f}(\xi)}{d\xi} = (-ixf)^\wedge(\xi).$$

Diese Eigenschaften sind vor allem nützlich fürs Rechnen.

Inverse Fourier-Transformation Sind $f, \widehat{f} \in L_1(\mathbb{R})$, dann ist

$$f(x) = (\widehat{f})^\vee(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\vartheta) e^{ix\vartheta} d\vartheta.$$

Die Operation $f \mapsto f^\vee := \frac{1}{2\pi} f^\wedge(-\bullet)$ bezeichnet man als inverse Fourier-Transformation.

Dass die Nützlichkeit einer Transformation stark davon abhängt, ob bzw. unter welchen Voraussetzungen diese wieder rückgängig gemacht werden kann, braucht an dieser Stelle nicht weiter betont zu werden. In unserem Fall müssen beide Funktionen $f, \widehat{f} \in L_1(\mathbb{R})$ sein. Setzen wir beispielsweise $f = \chi_{[-1,1]}$, so erhalten wir i.W. die sinc-Funktion als Fourier-Transformierte. Diese ist aber keine $L_1(\mathbb{R})$ -Funktion mehr und deshalb ist die Fourier-Transformation hier insbesondere nicht invertierbar! Aber das kommt Gott sei Dank nicht so häufig vor.

Dass die Formel für die Inverse Fourier-Transformation den Vorfaktor $1/2\pi$ beinhaltet, liegt daran, dass wir die Formel für die Fourier-Transformation in Definition 1.11 mit keinen Vorfaktor versehen haben. Dies ist aber nur Normierung. Wir hätten auch in Definition 1.11 mit $1/\sqrt{2\pi}$ normieren können, dann wäre dieser Faktor jetzt auch bei der Inversen Fourier-Transformation aufgetaucht und wir hätten eine schöne Isometrie.

Beispiel 1.20 (Inverse Fourier-Transformation) Wir berechnen die Fourier-Transformation der Gauß-Funktion

$$f(x) = \exp(-x^2), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Der Nachweis $f \in L_1(\mathbb{R})$ sei dabei dem Leser zur Übung überlassen. Es sei aber soviel gesagt, dass

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \sqrt{\pi}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} f(x) \exp(-i\xi x) dx = \int_{\mathbb{R}} \exp(-x^2) \exp(-i\xi x) dx = \int_{\mathbb{R}} \exp(-(x^2 + i\xi x)) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \exp(-(x^2 + i\xi x - \xi^2/4) - \xi^2/4) dx = \int_{\mathbb{R}} \exp(-(x + i\xi/2)^2) \exp(-\xi^2/4) dx. \end{aligned}$$

1. Mathematische Grundlagen der Signalverarbeitung

Die Substitution $u := x + i\xi/2$, $du = dx$ liefert weiter

$$\exp(-\xi^2/4) \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \exp(-u^2) du}_{=\sqrt{\pi}} = \sqrt{\pi} \exp(-\xi^2/4).$$

Wir haben also gezeigt, dass $\widehat{f}(\xi) = \sqrt{\pi} \exp(-\xi^2/4)$. Die Fourier-Transformierte der Gauß-Funktion ist also i.W. bis auf Normierung die Gauß-Funktion selbst. Man kann sich leicht überlegen, dass auch $\widehat{f}(\xi) \in L_1(\mathbb{R})$. Damit können wir die Inverse Fourier-Transformation berechnen. Dabei sollte wieder die ursprüngliche Funktion f herauskommen. Also:

$$\begin{aligned} (\widehat{f})^\vee(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) \exp(i\xi x) d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \sqrt{\pi} \exp(-\xi^2/4) \exp(i\xi x) d\xi \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp(-\xi^2/4 + i\xi x) d\xi = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp(-(\xi^2/4 - i\xi x - x^2) - x^2) d\xi \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp(-(\xi/2 - ix)^2) \exp(-x^2) d\xi \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \exp(-x^2) \int_{\mathbb{R}} \exp(-(\xi/2 - ix)^2) d\xi. \end{aligned}$$

Die Variablensubstitution $u := \xi/2 - ix$, $d\xi = 2 du$ liefert daraus schließlich

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \exp(-x^2) \underbrace{\int_{\mathbb{R}} 2 \exp(-u^2) du}_{=\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi} \exp(-x^2) = \exp(-x^2) = f(x),$$

wie behauptet.

Satz 1.21 (Riemann-Lebesgue-Lemma) *Ist $f \in L_1(\mathbb{R})$, so ist*

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \widehat{f}(\xi) = 0.$$

Bemerkung 1.22 (Riemann-Lebesgue-Lemma) Die Kernessenz von Lemma 1.21 ist, dass die Fourier-Transformation \widehat{f} einer Funktion f im Unendlichen verschwindet. Der Anteil der sehr großen Frequenzen nimmt immer weiter ab, je größer die Frequenzen werden. Aber Achtung: Der Satz macht keine Aussage darüber, wie schnell das Abklingverhalten von \widehat{f} ist! Daher gilt im allgemeinen *nicht*, dass $\widehat{f} \in L_1(\mathbb{R})$, wenn $f \in L_1(\mathbb{R})$. Das haben wir ja bereits gesehen anhand der charakteristischen Funktion.

Satz 1.23 (Parseval/Plancherel) *Für $f, g \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$ ist*

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) g(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\vartheta) \overline{\widehat{g}(\vartheta)} d\vartheta.$$

Insbesondere gilt mit $f = g$

$$\|f\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\widehat{f}\|_2.$$

Bemerkung 1.24 (Parseval/Plancherel) Aus dem vorherigen Satz lassen sich gleich mehrere interessante Schlüsse ziehen:

- Die Fourier-Transformation ist bis auf Normierung eine Isometrie auf L_2 . Hätten wir in Definition 1.11 die Normierung $1/\sqrt{2\pi}$ verwendet, so könnten wir nun schreiben:

$$\|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2$$

und wir hätten die perfekte Symmetrie. Dies ließe auch die Interpretation zu, dass die Fourier-Transformation energieerhaltend ist (die Zwei-Norm wird ja auch als Energienorm bezeichnet). Da lacht der Physiker ☺.

- Der Satz von Parseval/Plancherel liefert ein Skalarprodukt von Funktionen $f, g \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$:

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t) g(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\vartheta) \overline{\widehat{g}(\vartheta)} d\vartheta.$$

Das bedeutet, wir dürfen uns insbesondere der schönen Rechenregeln für Skalarprodukte bedienen (Linearität, Symmetrie usw.).

- Wie wir bereits gesehen haben, gibt es Funktionen in $L_1(\mathbb{R})$, für die die Inversionsformel der Fourier-Transformation nicht gilt. Daher wäre es schön, die Fourier-Transformation auf andere Funktionenräume wie den $L_2(\mathbb{R})$ zu verallgemeinern. Dabei können wir ausnutzen, dass $L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$ dicht in $L_2(\mathbb{R})$ liegt. Wir definieren zu $f \in L_2(\mathbb{R})$ eine Folge

$$f_n := \chi_{[-n,n]} \cdot f \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R}), \quad n \in \mathbb{N},$$

welche für $n \rightarrow \infty$ in der Norm $\|\bullet\|_2$ gegen f konvergiert. \widehat{f}_n ist dann eine Cauchy-Folge, die wegen der Dichtheit von $L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$ in $L_2(\mathbb{R})$ gegen eine Funktion in $L_2(\mathbb{R})$ konvergiert. Diese Funktion nennen wir \widehat{f} :

$$\widehat{f} := \lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{f}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\chi_{[-n,n]} \cdot f)^\wedge = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n f(x) \exp(-i\xi x) dx, \quad f \in L_2(\mathbb{R}).$$

TODO: Sollen wir mal ein Beispiel rechnen zu einer FT in L_2 ?

1.3. Der Abtastsatz

Definition 1.25

1. Eine Funktion $f \in L_1(\mathbb{R})$ heißt *bandbeschränkt* mit *Bandbreite* T oder kurz *T -bandbeschränkt*, wenn

$$\widehat{f}(\xi) = 0, \quad \xi \notin [-T, T].$$

Oder anders formuliert: Eine Funktion $f \in L_1(\mathbb{R})$ ist bandbeschränkt, wenn \widehat{f} endlichen Träger besitzt.

1. Mathematische Grundlagen der Signalverarbeitung

2. Der *Sinus Cardinalis* oder sinc-Funktion ist definiert als

$$\text{sinc}(x) := \begin{cases} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Bemerkung 1.26 (Bandbeschränktheit) Ist eine Funktion T -bandbeschränkt, dann ist sie auch gleichzeitig $T + n$ -bandbeschränkt für jedes $n > 0$. D.h. es gibt eigentlich gar nicht *die* Bandbreite einer Funktion.

Bemerkung 1.27 (Sinus Cardinalis)

- Der Name stammt daher, dass die Funktion an allen ganzzahligen Stellen entweder den Wert 0 oder 1 annimmt. Abbildung 1.12 zeigt den Verlauf der sinc-Funktion.

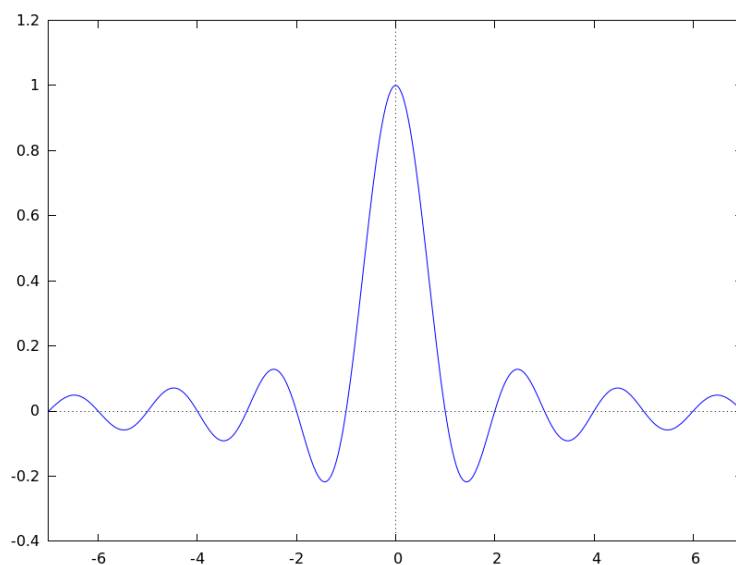


Abbildung 1.12.: Plot der sinc-Funktion auf dem Intervall $[-7, 7]$.

- Fun fact: Es gilt

$$\int_{\mathbb{R}} \text{sinc}(x) \, dx = 1 \quad \text{und damit} \quad \int_{\mathbb{R}} \text{sinc}(x/\pi) \, dx = \pi.$$

- Die sinc-Funktion ist i.W. bis auf Normierung die Fourier-Transformierte der Rechteckfunktion. Damit ist der sinc der ideale Tiefpassfilter (aus Sicht des Frequenzbereichs).
- Es kann aber gezeigt werden, dass $\text{sinc} \notin L_1(\mathbb{R})$, weswegen der ideale Tiefpassfilter nur näherungsweise implementiert werden kann. Es gilt aber $\text{sinc} \in L_2(\mathbb{R})$, was u.a. ein Grund dafür ist, die Fourier-Transformation auf dem $L_2(\mathbb{R})$ einzuführen. Für Beweis siehe Anhang C.

1. Mathematische Grundlagen der Signalverarbeitung

Satz 1.28 (Abtastsatz von Shannon) Ist $f \in L_1(\mathbb{R})$ eine T -bandbeschränkte Funktion und ist $h < h^* = \pi/T$, dann ist

$$f(x) = \left((S_h f) * \text{sinc} \right) \left(\frac{x}{h} \right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(hk) \frac{\sin \left(\pi \left(\frac{x}{h} - k \right) \right)}{\pi \left(\frac{x}{h} - k \right)}.$$

Bemerkung 1.29 (Abtastsatz von Shannon) Ein paar Anmerkungen dazu:

- Der Abtastsatz liefert uns eine Formel, wie man das ursprüngliche Signal f aus einer Abtastung $S_h f$ mithilfe der sinc-Funktion³ rekonstruieren kann. Allerdings besitzt der sinc unendlichen Träger und fällt nur linear ab, sodass man in der Praxis wohl lieber mit anderen Funktionen arbeiten sollte.
- Voraussetzung dafür, dass die Rekonstruktion wie gewünscht funktioniert, ist, dass...
 - f nicht zu große Frequenzen enthalten darf (das ist die Forderung der T -Bandbeschränktheit). Sonst könnte es potentiell unendlich hohe Frequenzen geben und dann müsste die Schrittweite für die Abtastung unendlich nahe bei der 0 liegen, was nicht wirklich Sinn macht.
 - die Schrittweite h an den Parameter T angepasst wird, um eine ausreichend große Zahl an Abtastpunkten zu erreichen. Sonst hat man zu wenig Information, um f eindeutig rekonstruieren zu können (siehe Abbildung 1.13). Die unerwünschten Effekte, die aus einer Unterabtastung resultieren, bezeichnet man als *Aliasing*. Bei Bildern können dadurch z.B. neue Strukturen auftreten, die im Original gar nicht enthalten sind.

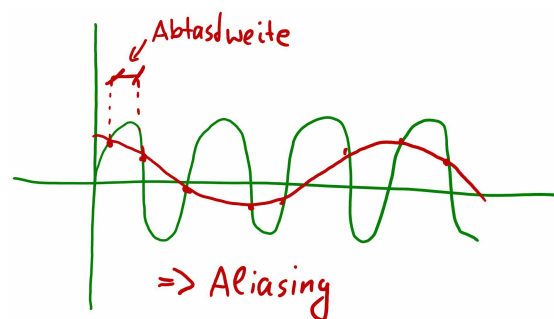


Abbildung 1.13.: Aus der gegebenen Menge an äquidistanten Abtastpunkten kann die hochfrequente grüne Funktion nicht rekonstruiert werden, da auch eine zweite Funktion (rot) gefunden werden kann, welche den Punkten genau entspricht. Die Abtastweite wurde zu groß gewählt.

Die Kopplung von Bandbreite und Abtastfrequenz ist also wirklich essentiell.

³Der sinc ist schließlich der ideale Interpolationskern für ganzzahlige Stützstellen. Sagt zumindest Wikipedia.

1. Mathematische Grundlagen der Signalverarbeitung

- Die Abtastfrequenz $1/h^*$ wird auch als *Nyquist-Frequenz* bezeichnet. Da f laut Voraussetzung bandbeschränkt ist, können wir \hat{f} periodisieren. Jede periodische Funktion lässt sich *ohne Informationsverlust* als 2π -periodische Funktion darstellen, indem man geeignet skaliert (in unserem Fall mit h). Auf den passenden Wert von h kommt man durch eine sehr einfache Rechnung:

$$h[-T, T] \subseteq [-\pi, \pi] \Leftrightarrow [-hT, hT] \subseteq [-\pi, \pi] \Leftrightarrow hT \leq \pi \Leftrightarrow h \leq \pi/T.$$

Darüber hinaus kann jede 2π -periodische Funktion f der Gestalt $f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma_k e^{ikx}$ *exakt* als Fourier-Reihe dargestellt werden. Der Clou beim Beweis und auch im Verständnis des Abtastsatzes ist nun folgende Formel:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} (\sigma_h f)^\wedge(\theta + 2\pi k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\hat{f}\left(\frac{\theta + 2\pi k}{h}\right)}{h} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(hk) e^{-ik\theta} = (S_h f)^\wedge(\theta), \quad \theta \in \mathbb{T}.$$

Sie verknüpft unsere 2π -Periodisierung von \hat{f} mit der Fourier-Transformation der Abtastfolge, $(S_h f)^\wedge$, welche genau eine Fourier-Reihe ist. Abbildung 1.14 erklärt den Fall, wenn h ungeeignet gewählt ist.

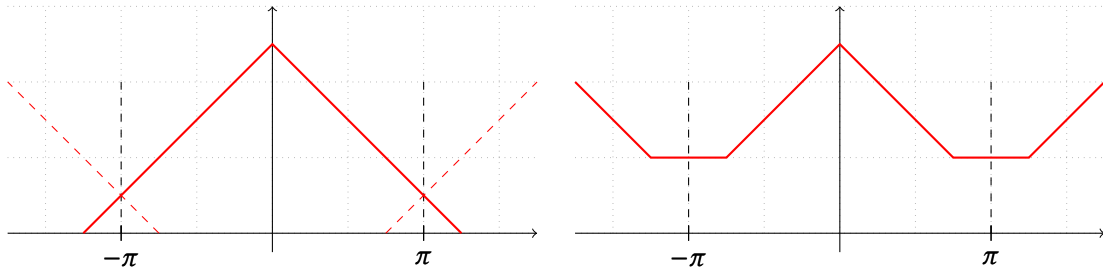


Abbildung 1.14.: Links: Der Träger der skalierten Fourier-Transformation (fetter roter Graph) von f ragt über das Intervall $[-\pi, \pi]$ hinaus. Rot gestrichelt dargestellt ist die 2π -Periodisierung der skalierten Fourier-Transformation. Rechts: Da Frequenzen modulo 2π betrachtet werden, summieren sich Frequenzen auf, die eigentlich nichts miteinander zu tun haben, und verfälschen damit unser Ergebnis. Das Resultat ist der rot eingezeichnete Graph.

- Wählt man die Abtastfrequenz k -mal so hoch wie nötig, so spricht man auch von k -fachem Oversampling.

1.4. Filter

Definition 1.30 (Filter) Ein Filter F ist eine Abbildung von einem Signalraum in einen anderen, oder anders formuliert, ein Operator, der eine Folge $c \in l(\mathbb{Z})$ in $Fc \in l(\mathbb{Z})$ abbildet.

Definition 1.31 (Impulsantwort) Die Impulsantwort eines Filters F ist definiert als

$$f(k) := (F\delta)(k), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Bemerkung 1.32 (Filtertypen) Es gibt verschiedene Kategorien von Filtern:

Energieerhaltender Filter In diesem Fall ist $F : l_2(\mathbb{Z}) \rightarrow l_2(\mathbb{Z})$ so, dass

$$\|F\|_2 := \sup_{\|c\|_2=1} \|Fc\|_2 = 1.$$

Linearer Filter Der Filter ist ein linearer Operator, d.h.

$$F(\alpha c + \beta c') = \alpha Fc + \beta Fc', \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad c, c' \in l(\mathbb{Z}).$$

Zeitinvarianter Filter Der Operator ist *stationär*, d.h. es ist egal, ob

- das Signal zuerst in der Zeit verschoben wird und dann Operator darauf angewendet wird,
- oder zuerst das Signal gefiltert und das Resultat in der Zeit verschoben wird.

Formal:

$$F(c(\bullet + k)) = (Fc)(\bullet + k), \quad c \in l(\mathbb{Z}), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Oder kürzer über die Kommutativität

$$F\tau_k = \tau_k F.$$

Kausaler Filter Das Ergebnis des Filters zum Zeitpunkt k hängt nur von den Eingaben in der Vergangenheit (also $c(j)$ mit $j \leq k$) ab. Der Filter kann nicht in die Zukunft sehen. Kausalität lässt sich auch auffassen als Anforderung an die Impulsantwort des Filters: Für alle $k > 0$ muss $f(k) = (F\delta)(k) = 0$ gelten. Einen Filter mit der Eigenschaft $f(k) = 0$ für alle $k < 0$ bezeichnet man übrigens als *antikausal*.

Bemerkung 1.33 (Lineare und zeitinvariante Filter)

- Lineare und zeitinvariante Filter (sog. *LTI-Filter*) können immer realisiert werden als *Faltungen mit der Impulsantwort*. Sei also $c \in l(\mathbb{R})$ ein gegebenes diskretes Signal, dann gilt

$$Fc = c * f,$$

wie man mit ein wenig Rechnerei nachweisen kann: Unser gegebenes Signal lässt sich auch schreiben als

$$c = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c(k) \delta(\bullet - k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c(k) \tau_{-k} \delta$$

und unter Verwendung der Linearität und Zeitinvarianz ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned} Fc &= F\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} c(k) \tau_{-k} \delta\right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c(k) F(\tau_{-k} \delta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c(k) \tau_{-k} F\delta = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c(k) \tau_{-k} f \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} c(k) f(\bullet - k) = c * f. \end{aligned}$$

Das bedeutet, ein LTI-Filter lässt sich vollständig durch seine Impulsantwort charakterisieren.

1. Mathematische Grundlagen der Signalverarbeitung

- Das Tolle daran ist: Dank der Faltung lassen sich LTI-Filter effizient am Rechner über eine Multiplikation der Fourier-Transformierten des Filters, der sog. *Transferfunktion*, mit der Fourier-Transformierten des Signals implementieren. Konkret:

$$Fc = \left((Fc)^\wedge \right)^\vee = \left((f * c)^\wedge \right)^\vee = \left(\widehat{f} \cdot \widehat{c} \right)^\vee$$

ist sehr schnell! Denn eine Multiplikation ist wesentlich schneller und vor allem auch numerisch stabiler durchzuführen als eine Faltung. Weiteren Zeitgewinn kann man durch Vorberechnen der Fourier-Transformation der Impulsantwort herauschlagen. Und nicht zuletzt ist die Darstellung im Frequenzbereich nützlich (Filterdesign funktioniert so).

Von jetzt an soll die Bezeichnung *digitaler Filter* immer für einen LTI-Filter stehen.

Definition 1.34 (Weitere Filtertypen) Ein digitaler Filter F heißt

1. *FIR-Filter* (Finite Impulse Response, Filter mit endlicher Impulsantwort), wenn die Impulsantwort endlichen Träger hat, d.h. $F\delta \in l_{00}(\mathbb{Z})$.
2. *IIR-Filter* (Infinite Impulse Response, Filter mit unendlicher Impulsantwort), wenn die Impulsantwort keinen endlichen Träger hat.

Beispiel 1.35 (FIR-Filter in der Praxis) In der Praxis sind kausale, digitale FIR-Filter weit verbreitet. Was eigentlich nicht sehr verwunderlich ist, wenn man bedenkt, dass man ohne all diese Eigenschaften Filter gar nicht realisieren könnte⁴.

⁴Na gut, das ist natürlich abhängig von der Domäne. So könnte man bei Bildern, die man vollständig auf der Festplatte liegen hat, auch sehr gut auf Kausalität verzichten. In diesem Fall wäre es sogar schlecht, einen kausalen Filter zu verwenden.

Appendices

A. Satz von Tonelli

Der Satz von Fubini-Tonelli ist eine Verallgemeinerung des Satzes von Fubini.

Die Aussage hier ist, dass wir für integrierbare Funktionen (was also für Funktionen aus Signalräumen immer gilt) die Reihenfolge der Integraalauswertungen vertauschen können.

Formal:

Sei $f(x, y)$ eine reelle⁵ meßbare⁶ Funktion.

Falls eines der Integrale

$$\int_{\Omega_2} \int_{\Omega_1} |f(x, y)| d\mu_1(x) d\mu_2(y),$$
$$\int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} |f(x, y)| d\mu_2(y) d\mu_1(x)$$

existiert, dann existiert auch das andere und $f(x, y)$ ist bezüglich des Produktmaßes integrierbar und es gilt:

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int_{\Omega_2} \int_{\Omega_1} f(x, y) d\mu_1(x) d\mu_2(y) = \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} f(x, y) d\mu_2(y) d\mu_1(x)$$

B. Dichtheit von L_p -Räumen

Wir zeigen nun, dass speziell für unsere Zwecke gilt, dass $L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$ dicht in $L_2(\mathbb{R})$ liegt.

Beweis. Sei $f \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$.

Dann ist f auch aus $L_1(\mathbb{R})$ (da es im Schnitt liegt). Das Lemma von *Riemann-Lebesgue* liefert uns, dass f dann im Unendlichen verschwindet. Bei integrierbaren Funktionen (also Funktionen aus unseren Signalräumen) ist die Fourier-Transformation außerdem stetig. D.h., f ist eine C_0 -Funktion.

Es gilt, dass C_0 dicht in L_2 und dicht in L_1 liegt⁷. Da dies für beide Räume gilt, so liegt C_0 auch dicht in $L_1 \cap L_2$.

Mit den Ergebnissen, dass $C_0 \subset L_2$ dicht, $C_0 \subset L_1 \cap L_2$ dicht und $L_1 \cap L_2 \subset L_2$ ist, so folgt, dass $L_1 \cap L_2$ dicht in L_2 liegt. \square

C. Sinus Cardinalis

C.1. Integrierbarkeit

Es wird gezeigt, dass die sinc-Funktion nicht integrierbar ist.

⁵Da der Körper \mathbb{C} ein zweidimensionaler \mathbb{R} -Vektorraum ist (reelle und komplexe Ebene), gilt dies auch für komplexwertige Funktionen.

⁶Dafür braucht man natürlich geeignete σ -endliche Maßräume, die wir hier mal als gegeben hinnehmen, da unsere Signalräume die geforderten Eigenschaften erfüllen müssten. Es ist mir aber deutlich zu anstrengend dies nachzuweisen, und es interessiert anscheinend sowieso niemanden.

⁷Dies ist ein Resultat, welches ich im Netz gefunden habe und hier einfach so verwende.

Beweis. Wir stellen zunächst fest, dass der sinc symmetrisch um die y -Achse ist. Außerdem besitzt er seine Nullstellen nur an den ganzzahligen Werten. Dies rechtfertigt

$$\|\text{sinc}\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |\text{sinc}(x)| dx = 2 \int_0^\infty |\text{sinc}(x)| dx = 2 \sum_{k=0}^\infty \int_k^{k+1} |\text{sinc}(x)| dx.$$

Wir schätzen das Integral

$$\begin{aligned} \int_k^{k+1} |\text{sinc}(x)| dx &= \int_k^{k+1} \left| \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \right| dx = \int_k^{k+1} \frac{|\sin(\pi x)|}{\pi x} dx \\ &\geq \int_k^{k+1} \frac{|\sin(\pi x)|}{\pi(k+1)} dx \end{aligned}$$

nach unten ab und erhalten mit der Substitution $t := \pi x$, $dt = \pi dx$

$$\begin{aligned} \int_k^{k+1} \frac{|\sin(\pi x)|}{\pi(k+1)} dx &= \frac{1}{\pi^2(k+1)} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(t)| dt \\ &= \frac{1}{\pi^2(k+1)} \left(-\cos(x) \operatorname{sgn}(\sin(x)) \right) \Big|_{t=k\pi}^{(k+1)\pi} \\ &= \frac{1}{\pi^2(k+1)} \underbrace{(\cos(k\pi) + \cos((k+1)\pi))}_{=1+1=2} \\ &= \frac{2}{\pi^2(k+1)}. \end{aligned}$$

Die Reihe

$$\sum_{k=0}^\infty \frac{2}{\pi^2(k+1)} = \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k} \not\prec \infty$$

divergiert und damit ist auch $\|\text{sinc}\|_1 \not\prec \infty$, also $\text{sinc} \notin L_1(\mathbb{R})$. □

Auf ähnliche Weise lässt sich übrigens zeigen, dass $\text{sinc} \in L_2(\mathbb{R})$.

C.2. Flächeninhalt

Gesucht ist der Wert des Integrals

$$\int_{\mathbb{R}} \text{sinc}(x) dx,$$

also der Flächeninhalt, der zwischen der x -Achse und der sinc-Funktion eingeschlossen wird. Dazu machen wir uns zuerst klar, dass für beliebige $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt

$$\int_0^\infty e^{-xt} dt = \left(-\frac{e^{-xt}}{x} \right) \Big|_{t=0}^\infty = 0 - \left(-\frac{1}{x} \right) = \frac{1}{x}.$$

Danach verwenden wir den Satz von Fubini, um zu erhalten:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(x)}{x} dx = 2 \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx = 2 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-xt} \sin(x) dx dt.$$

Partielle Integration liefert uns

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty e^{-xt} \sin(x) \, dx &= \left(-\frac{e^{-xt}}{t} \sin(x) \right) \Big|_{x=0}^\infty - \int_0^\infty -\frac{e^{-xt}}{t} \cos(x) \, dx \\
 &= 0 + 0 + \int_0^\infty \frac{e^{-xt}}{t} \cdot \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \, dx \\
 &= \frac{1}{2t} \left(\int_0^\infty e^{-x(t-i)} \, dx + \int_0^\infty e^{-x(t+i)} \, dx \right) \\
 &= \frac{1}{2t} \left(-\frac{e^{-x(t-i)}}{t-i} \Big|_{x=0}^\infty + \frac{e^{-x(t+i)}}{t+i} \Big|_{x=0}^\infty \right) \\
 &= \frac{1}{2t} \left(0 + \frac{1}{t-i} + 0 + \frac{1}{t+i} \right) = \frac{1}{2t} \cdot \frac{2t}{t^2+1} \\
 &= \frac{1}{t^2+1}.
 \end{aligned}$$

Folglich ist

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(x)}{x} \, dx = 2 \int_0^\infty \frac{1}{t^2+1} \, dt = 2 \arctan(t) \Big|_{t=0}^\infty = 2 \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = \pi.$$

Schließlich erhält man

$$\int_{\mathbb{R}} \text{sinc}(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(t)}{t} \, dt = \frac{1}{\pi} \cdot \pi = 1$$

mit Substitution von $t := \pi x$, $dt = \pi \, dx$.