Aufgaben zur vollständigen Induktion

Aufgabe 1

Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass

a) $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ für alle $n\in\mathbb{N}$

b) $2^0+2^1+\ldots+2^n=\sum_{k=0}^{n}2^k=2^{n+1}-1$ für alle $n\in\mathbb{N}_0$

c) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$ für alle $n\in\mathbb{N}$

Lösung	Tipp

Aufgabe 2

Man zeige, dass für festes $x\neq 1$ und jede natürliche Zahl $n\in\mathbb{N}_0$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n}x^k=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

Lösung	Tipp

Aufgabe 3

Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass ($n\in\mathbb{N}$)

a) $2^n\leq n!$ für jedes $n\geq 4$

b) $2n+1\leq 2^n$ für $n\geq 3$

c) $n^2\leq 2^n$ für jedes $n\neq 3$

Lösung	Tipp

Aufgabe 4

Beweisen Sie durch vollständige Induktion:

a) $\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{k})=(1+1)\cdot(1+\frac{1}{2})\cdot(1+\frac{1}{3})\cdot\ldots\cdot(1+\frac{1}{n})=n+1$ für alle $n\geq 1$.

b) $\sum_{i=1}^{n}(2i-1)=1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$ für alle $n\geq 1$.

c) $\sum_{i=2}^{n}(i-1)^3=\frac{1}{4}(n-1)^2n^2$ für alle $n\geq 2$.

d) $\sum_{i=6}^{n+5}i=\frac{1}{2}n(n+11)$ für alle $n\geq 1$.

e) $\sum_{i=1}^{n}(4i-1)=3+7+11+\ldots+(4n-1)=2n^2+n$ für alle $n\geq 1$.

Lösung

Aufgabe 5

a) Berechnen Sie die folgenden Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{n}; \ \binom{3}{1}, \binom{3}{2}; \ \binom{4}{0}, \binom{4}{1}, \binom{4}{2}, \binom{4}{3}, \binom{4}{4}; \ \binom{5}{0}, \ldots, \binom{5}{5}.$$

b) Entwickeln Sie die folgenden Binome $(x+4)^5$ $\quad (1-5y)^4$ $\quad (a^2-2b)^3$

Lösung	Tipp

Aufgabe 6

Zeigen Sie durch Nachrechnen

$$\sum_{k=1}^{n} a_{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \qquad\qquad \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Lösung

Aufgabe 7

Man zeige durch Nachrechnen, dass $\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \le \frac{1}{k!}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$

Lösung

10-Minuten-Aufgaben

Aufgabe	Lösung

Lösungen

Eine Aussage A(n), die in Form einer Gleichung vorliegt, wird mit vollständiger Induktion bewiesen, indem man in zwei Schritten vorgeht:

1. Man beginnt mit der kleinst möglichen Zahl (oftmals $n=1$), setzt diese Zahl auf der rechten und linken Seite der Gleichung ein und zeigt somit explizit, dass linke Seite gleich rechter Seite ist.

2. Man nimmt an, dass die Aussage für n gilt. Man beweist anschließend die Aussage für n+1, indem man die Gleichung für n geeignet verwendet.

a) $1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

Induktionsanfang für $n=1$: $1^2=\frac{6}{6}=1$

Induktionsschluss $n \to n+1$:

$$1^2+2^2+...+n^2+(n+1)^2 \overset{Ind.Vor.}{=} \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+(n+1)^2$$

$$=(n+1)\left(\frac{1}{6}n(2n+1)+(n+1)\right) \quad \text{Ausklammern von } (n+1)$$

$$=(n+1)\frac{1}{6}(2n^2+n+6n+6)$$

$$=\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3) \qquad \text{q.e.d.}$$

b) $2^0+2^1+...+2^n=2^{n+1}-1$

Induktionsanfang für $n=0$: $2^0=2^{(0+1)}-1=1$

Induktionsschluss $n \to n+1$:

$$(2^0+2^1+...+2^n)+2^{n+1} \overset{Ind.Vor.}{=} (2^{n+1}-1)+2^{n+1}=2\cdot 2^{n+1}-1=2^{n+2}-1 \qquad \text{q.e.d.}$$

c) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$

Induktionsanfang für $n=1$: $\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$

Induktionsschluss $n \to n+1$:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{n(n+1)}\right)+\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$\overset{Ind.Vor.}{=}\left(\frac{n}{n+1}\right)+\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$=\frac{1}{n+1}\left[n+\frac{1}{n+2}\right]=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{n(n+2)+1}{n+2}=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{n^2+2n+1}{n+2}=$$

$$=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{(n+1)^2}{n+2}=\frac{n+1}{n+2} \qquad \text{q.e.d.}$$

Tipps

Tipps zur Vollständigen Induktion

Eine Aussage A(n), die in Form einer Gleichung vorliegt, wird mit vollständiger Induktion bewiesen, indem man in zwei Schritten vorgeht:

1. Man beginnt mit der kleinst möglichen Zahl (oftmals $n=1$), setzt diese Zahl auf der rechten und linken Seite der Gleichung ein und zeigt somit explizit, dass linke Seite gleich rechter Seite ist.
2. Man nimmt an, dass die Aussage für n gilt. Man beweist anschließend die Aussage für n+1, indem man die Gleichung für n geeignet verwendet.

Beispiel zur Erklärung der obigen Aussage:

Beh: Für jede natürliche Zahl n gilt: $\boxed{1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}.}$

1. Die Aussage gilt für $n=1$. Dies prüft man explizit nach, indem man die natürliche Zahl $\boxed{n=1}$ in die linke und in die rechte Seite der Gleichung einsetzt und feststellt, dass beide Seiten gleich sind:

$$1=\frac{1\cdot(1+1)}{2}=1 \quad \text{richtig!!}$$

2. Wir nehmen an, dass die Aussage für ein beliebiges n gilt. D.h. wir nehmen an, dass die Aussage

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

richtig ist und müssen nun die Formel für n+1 zeigen. Hierzu beginnen wir mit der rechten Seite der Formel; ersetzen aber n durch n+1:

$$1+2+3+\ldots+n+(n+1)=\left[1+2+3+\ldots+n\right]+(n+1) \;=$$

Durch die Induktionsvoraussetzung können wir den Term in [...] ersetzen durch $\frac{n(n+1)}{2}$, so dass wir weiterrechnen können mit

$$=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1) \;=\; \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Dies ist aber gerade die behauptete Formel für n+1.

Ende des Beweises

Lösungen

Eine Aussage A(n), die in Form einer Gleichung vorliegt, wird mit vollständiger Induktion bewiesen, indem man in zwei Schritten vorgeht:

1. Man beginnt mit der kleinst möglichen Zahl (oftmals $n=1$), setzt diese Zahl auf der rechten und linken Seite der Gleichung ein und zeigt somit explizit, dass linke Seite gleich rechter Seite ist.

2. Man nimmt an, dass die Aussage für n gilt. Man beweist anschließend die Aussage für n+1, indem man die Gleichung für n geeignet verwendet.

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}}$$

Induktionsanfang für $n=0$:

rechte Seite = $\sum_{k=0}^{0} x^k = 1 = \frac{1-x}{1-x} = 1$ = linke Seite

Induktionsschluss $n \to n+1$:

$$\left(x^0 + x^1 + \ldots + x^{n+1} = x^0 + x^1 + \ldots + x^n\right) + x^{n+1} \overset{Ind.Vor.}{=}$$

$$= \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + x^{n+1}$$

$$= \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + \frac{x^{n+1}(1-x)}{1-x}$$

$$= \frac{1}{1-x}\left(1-x^{n+1}+x^{n+1}(1-x)\right) = \frac{1-x^{n+2}}{1-x}$$

q.e.d.

iMath pro

Lösungen

Eine Aussage A(n), die in Form einer Ungleichung vorliegt, wird mit vollständiger Induktion bewiesen, indem man in zwei Schritten vorgeht:

1. Man beginnt mit der kleinst möglichen Zahl (oftmals $n=1$), setzt diese Zahl auf der rechten und linken Seite der Gleichung ein und zeigt somit explizit, dass linke Seite gleich rechter Seite ist.

2. Man nimmt an, dass die Aussage für n gilt. Man beweist anschließend die Aussage für n+1, indem man die Ungleichung für n geeignet verwendet.

a) $\boxed{2^n \leq n!}$ für jedes $n \geq 4$.

Induktionsanfang für $n=4$:

Linke Seite: $2^4 = 16$

Rechte Seite: $4! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 24$ $\Rightarrow$ Aussage ist für $n=4$ ist richtig!

Induktionsschluss $n \to n+1$:

$$2^{n+1} = 2\cdot 2^n \leq 2\cdot n! \leq (n+1)n! = (n+1)!$$ q.e.d.

b) $\boxed{2n+1 \leq 2^n}$ für $n \geq 3$

Induktionsanfang für $n=3$:

Linke Seite: $2\cdot 3+1=7$

Rechte Seite: $2^3 = 8$ $\Rightarrow$ Aussage ist für $n=3$ ist richtig!

Induktionsschluss $n \to n+1$:

$$2n+3 = 2n+1+2 \leq 2^n + 2 \leq 2^n + 2^n = 2\cdot 2^n = 2^{n+1}$$ q.e.d.

c) $\boxed{n^2 \leq 2^n}$

Induktionsanfang für $n=4$:

Linke Seite: $4^2 = 16$

Rechte Seite: $2^4 = 16$ $\Rightarrow$ Aussage ist für $n=4$ ist richtig!

Induktionsschluss $n \to n+1$:

Unter Verwendung von Teilaufgabe b) gilt:

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \leq 2^n + 2n + 1 \overset{b)}{\leq} 2^n + 2^n = 2\cdot 2^n = 2^{n+1}$$ q.e.d.

Tipps zur Vollständigen Induktion

Eine Aussage A(n), die in Form einer *Ungleichung* vorliegt, wird mit vollständiger Induktion bewiesen, indem man in zwei Schritten vorgeht:

1. Man beginnt mit der kleinst möglichen Zahl (oftmals $n = 1$), setzt diese Zahl auf der rechten und linken Seite der Gleichung ein und zeigt somit explizit, dass linke Seite gleich rechter Seite ist.

2. Man nimmt an, dass die Aussage für n gilt. Man beweist anschließend die Aussage für n+1, indem man die Ungleichung für n geeignet verwendet.

Lösungen

Eine Aussage A(n), die in Form einer Gleichung vorliegt, wird mit vollständiger Induktion bewiesen, indem man in zwei Schritten vorgeht:

1. Man beginnt mit der kleinst möglichen Zahl (oftmals $n=1$), setzt diese Zahl auf der rechten und linken Seite der Gleichung ein und zeigt somit explizit, dass linke Seite gleich rechter Seite ist.
2. Man nimmt an, dass die Aussage für n gilt. Man beweist anschließend die Aussage für n+1, indem man die Gleichung für n geeignet verwendet.

a) IA für n=1: linke Seite=$1+1=2$ und rechte Seite=$1+1=2$ Stimmt!

IS: Zu zeigen ist: $\prod_{k=1}^{n+1}(1+\frac{1}{k})=(n+1)+1=n+2$:

$$\prod_{k=1}^{n+1}(1+\frac{1}{k})=\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{k})\cdot(1+\frac{1}{n+1})=(n+1)\cdot(1+\frac{1}{n+1})=n+1+\frac{n+1}{n+1}=n+2$$ O.K.

b) IA für n=1: $2\cdot1-1=1$und $1^2=1$ Stimmt!

IS: Zu zeigen ist: $\sum_{i=1}^{n+1}(2i-1)=(n+1)^2$:

$$\sum_{i=1}^{n+1}(2i-1)=\sum_{i=1}^{n}(2i-1)+2(n+1)-1=n^2+2(n+1)-1=(n+1)^2$$ O.K.

c) IA für n=1: $(2-1)^3=1$ und $(2-1)^2\cdot2^2\cdot\frac{1}{4}=1$ Stimmt!

IS: Zu zeigen ist: $\sum_{i=1}^{n+1}(i-1)^3=((n+1)-1)^2\cdot(n+1)^2\cdot\frac{1}{4}=\frac{n^2}{4}(n+1)^2$:

$$\sum_{i=1}^{n+1}(i-1)^3=\sum_{i=2}^{n}(i-1)^3+((n+1)-1)^3=(n-1)^2\cdot n^2\cdot\frac{1}{4}+n^3$$

$$=\frac{n^2}{4}((n-1)^2+4n)=\frac{n^2}{4}(n^2-2n+1+4n)=\frac{n^2}{4}(n+1)^2$$ O.K.

d) IA für n=6: $6=6$ und $1\cdot(1+11)\cdot\frac{1}{2}=6$ Stimmt!

IS: Zu zeigen ist: $\sum_{i=6}^{n+6}i=(n+1)((n+1)+11)\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(n^2+13n+12)$:

$$\sum_{i=6}^{n+6}i=\sum_{i=1}^{n+5}i+(n+6)=n\cdot(n+11)\cdot\frac{1}{2}+n+6=\frac{1}{2}(n^2+11n+2n+12)$$ O.K.

e) IA für n=1: $4\cdot1-1=3$ und $2\cdot1^2+1=3$ Stimmt!

IS: Zu zeigen ist: $\sum_{i=1}^{n+1}(4i-1)=2(n+1)^2+n+1=2n^2+5n+3$:

$$\sum_{i=1}^{n+1}(4i-1)=\sum_{1}^{n}(4i-1)+4\cdot(n+1)-1=2n^2+2+4\cdot(n+1)-1=2n^2+5n+3$$ O.K.

Lösungen

a) Die Binomialkoeffizienten sind festgelegt durch die Definition

$$\boxed{\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!\left(n-k\right)!}}; \qquad \text{und} \quad 0! := 1$$

Daraus folgt:

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!n!} = 1 \text{ und } \binom{n}{n} = \frac{n!}{n!0!} = 1.$$

Die Koeffizienten lassen sich über diese Formel berechnen oder aus dem Pascalschen Dreieck ablesen.

Pascalsches Dreieck:

						1					
1:					1		1				
2:				1		2		1			
3:			1		3		3		1		
4:		1		4		6		4		1	
5:	1		5		10		10		5		1

Damit ergibt sich beispielsweise für $\binom{5}{1} = \frac{5!}{1!4!} = 5$ bzw. aus Zeile n=5 an der Stelle k=1 ebenfalls der Wert 5.

b) Durch Anwenden der binomischen Formeln mit den Binomialkoeffizienten erhält man

$$\left(x+4\right)^5 = 1\cdot x^5 + 5\cdot 4\cdot x^4 + 10\cdot 4^2\cdot x^3 + 10\cdot 4^3\cdot x^2 + 5\cdot 4^4\cdot x + 1\cdot 4^5$$

$$= x^5 + 20x^4 + 160x^3 + 640x^2 + 1280x + 1024$$

$$(1-5y)^4 = 1 - 20y + 150y^2 - 500y^3 + 625y^4$$

$$(a^2-2b)^3 = a^6 - 6a^4b + 12a^2b^2 - 8b^3$$

Tipps zu Binomialkoeffizienten

Die Binomialkoeffizienten kann man übersichtlich im Pascal'schen Dreieck anordnen:

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 \\
 & & & & & & & \vdots & & & & & & &
\end{array}
$$

oder in Binomialkoeffizienten-Schreibweise:

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & \binom{0}{0} & & & & & & & \\
 & & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & & & \\
 & & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & & & \\
 & & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & & & \\
 & & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & & & \\
 & & \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} & & \\
 & \binom{6}{0} & & \binom{6}{1} & & \binom{6}{2} & & \binom{6}{3} & & \binom{6}{4} & & \binom{6}{5} & & \binom{6}{6} & \\
\binom{7}{0} & & \binom{7}{1} & & \binom{7}{2} & & \binom{7}{3} & & \binom{7}{4} & & \binom{7}{5} & & \binom{7}{6} & & \binom{7}{7} \\
 & & & & & & & \vdots & & & & & & &
\end{array}
$$

Die einzelnen Binomialkoeffizienten lassen sich mit Hilfe folgender Formel berechnen:

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}}$$ (sprich „n über k")

Mit Hilfe der Binomialkoeffizienten lassen sich binomische Formeln sehr einfach berechnen. Die Koeffizienten in den Formeln entsprechen nämlich genau den Binomialkoeffizienten:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots + \binom{n}{n} a^0 b^n$$

Beispiel: (entspricht der Zeile 1-4-6-4-1 aus dem Dreieck)

$$(a+b)^4 = \binom{4}{0} a^4 + \binom{4}{1} a^3 b^1 + \binom{4}{2} a^2 b^2 + \binom{4}{3} a^1 b^3 + \binom{4}{4} b^4 = a^4 + 4a^3 b^1 + 6a^2 b^2 + 4a^1 b^3 + b^4$$

Lösungen

Die beiden Formeln ergeben sich durch direktes Nachrechnen, indem man die Summen der linken und rechten Seiten der Gleichungen explizit auswertet.

a) $\sum_{k=1}^{n} a_{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k$:

linke Seite: $\sum_{k=1}^{n} a_{k-1} = a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1}$

rechte Seite: $\sum_{k=0}^{n-1} a_k = a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1}$

oder durch Ändern des Summationsindexes:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{k-1} \overset{m=k-1}{=} \sum_{m=0}^{n-1} a_m \overset{m\to k}{=} \sum_{k=0}^{n-1} a_k$$

b) $\sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} = \sum_{k=1}^{n} a_k$:

linke Seite: $\sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

rechte Seite: $\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

Lösungen

Mit der Definition für den Binomialkoeffizienten $\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}}$ ergibt sich

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-k)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-k)}\frac{(n-k+1)\cdot\ldots\cdot(n-1)n}{k!}$$

$$= \frac{1}{k!}\underbrace{(n-k+1)}_{\leq n}\cdot\ldots\cdot\underbrace{(n-1)}_{\leq n}\underbrace{n}_{\leq n}$$

$$\leq \frac{1}{k!} \quad n^k$$

10-Minuten-Aufgaben

1) Berechnen Sie:

   a) 8^3 b) $(-10)^3$ c) $(0{,}02)^2$

2) Wandeln Sie die Einheiten um

   a) 20m [km] b) 234m^2 [km^2] c) 15ha [m^2]

3) Berechnen Sie:

   a) $\log_2 16$ b) $\log_3(\frac{81}{9})$ c) $\log_5(125)^4$

Lösungen der 10-Minuten-Aufgaben

1) a) 512 ; b) -1000 ; c) 0,0004

2) a) 0,02km ; b) 0,000234km^2 ; c) 150000m^2

3) a) 4;

b) $\log_3(\frac{81}{9}) = \log_3(81) - \log_3(9) = 4 - 2 = 2$;

c) $\log_5(125)^4 = 4 \cdot \log_5(125) = 4 \cdot 3 = 12$