سیگنال‌ها و سیستم‌ها - دکتر سلیمی بدر

امیرحسین منصوری - ۹۹۲۴۳۰۶۹

تمرین سری ۴

سوال ۱

الف)

داریم $\sin^2(4t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(8t)$. در نتیجه داریم $\omega_0 = 8$. همچنین داریم

$$\cos(8t) = \frac{e^{8jt} + e^{-8jt}}{2}$$

در نتیجه

$$\sin^2(4t) = -\frac{1}{4}e^{-8jt} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^{8jt}$$

و ضرایب سری فوریه به سادگی مشخص می‌شود (بقیه ضرایب برابر صفر هستند).

$$a_{-1} = -\frac{1}{4}, a_0 = \frac{1}{2}, a_1 = -\frac{1}{4}$$

ب)

برای این سیگنال می‌توان دوره تناوب 2π را در نظر گرفت و در نتیجه $\omega_0 = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$. داریم

$$\begin{aligned} x_2(t) &= \cos(3t) + \cos(5t) \\ &= \frac{e^{3jt} + e^{-3jt}}{2} + \frac{e^{5jt} + e^{-5jt}}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(e^{j(3)(1)t} + e^{j(-3)(1)t} + e^{j(5)(1)t} + e^{j(-5)(1)t}\right) \end{aligned}$$

و ضرایب سری فوریه به سادگی مشخص می‌شوند (بقیه ضرایب برابر صفر هستند).

$$a_3 = a_{-3} = a_5 = a_{-5} = \frac{1}{2}$$

ج)

می‌توان دوره تناوب $T_0 = 2$ را برای این سیگنال در نظر گرفت:

$$x_3(t+2) = 2\sin(3\pi t + 6\pi) + \cos(4\pi t + 8\pi) = 2\sin(3\pi t) + \cos(4\pi t) = x_3(t)$$

در نتیجه $\omega_0 = \frac{2\pi}{2} = \pi$. داریم

$$\begin{aligned} 2\sin(3\pi t) &= \frac{e^{3\pi jt} - e^{-3\pi jt}}{j} \\ &= (-j)e^{j(3)(\pi)t} + je^{j(-3)(\pi)t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(4\pi t) &= \frac{e^{4\pi jt} + e^{-4\pi jt}}{2} \\ &= \frac{1}{2}e^{j(4)(\pi)t} + \frac{1}{2}e^{j(-4)(\pi)t} \end{aligned}$$

در نتیجه ضرایب سری فوریه مشخص می‌شوند (بقیه ضرایب برابر صفر هستند).

$$a_{-4} = a_4 = \frac{1}{2}, a_{-3} = j, a_3 = -j$$

د)

می‌توان مشاهده کرد که به جز زمانی که $t = 2m$ باشد، سری داده شده جملات صفر تولید می‌کند. در نتیجه:

$$x_4(t) = e^{j\left(\frac{2\pi}{7}\right)\left(\frac{t}{2}\right)} = e^{j\left(\frac{\pi}{7}\right)t}$$

می‌توان فرض کرد $\omega_0 = \frac{\pi}{7}$. با این فرض ضرایب سری فوریه به صورت زیر مشخص می‌شوند (بقیه ضرایب صفر هستند).

$$a_1 = 1$$

سوال ۲

با توجه به نمودار، می‌توان مشاهده کرد که $T_0 = 4$ و $\omega_0 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$. با استفاده از رابطه آنالیز سری فوریه داریم

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} x(t)e^{-j(0)(\frac{\pi}{2})t}dt \\
&= \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} x(t)dt \\
&= \frac{1}{4}\left(\int_{-2}^{-1} x(t)dt + \int_{-1}^{+1} x(t)dt + \int_{1}^{2} x(t)dt\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(1 + (2 + \frac{2\times 1}{2}) + 1\right) \\
&= \frac{5}{4}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_3 &= \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} x(t)e^{-j(3)(\frac{\pi}{2})t}dt \\
&= \frac{1}{4}\left(\int_{-2}^{-1} x(t)e^{-j(\frac{3\pi}{2})t}dt + \int_{-1}^{0} x(t)e^{-j(\frac{3\pi}{2})t}dt + \int_{0}^{1} x(t)e^{-j(\frac{3\pi}{2})t}dt + \int_{1}^{2} x(t)e^{-j(\frac{3\pi}{2})t}dt\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\int_{-2}^{-1} e^{-j(\frac{3\pi}{2})t}dt + \int_{-1}^{0} (t+2)e^{-j(\frac{3\pi}{2})t}dt + \int_{0}^{1} (-t+2)e^{-j(\frac{3\pi}{2})t}dt + \int_{1}^{2} e^{-j(\frac{3\pi}{2})t}dt\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3\pi}(1+j) + \int_{-1}^{0} (t+2)e^{-j(\frac{3\pi}{2})t}dt + \int_{0}^{1} (-t+2)e^{-j(\frac{3\pi}{2})t}dt + \frac{2}{3\pi}(1-j)\right)
\end{aligned}
$$

با استفاده از انتگرال جزء به جزء داریم

$$
\begin{aligned}
u = (t+2) &\Rightarrow du = dt \\
dv = e^{-j(\frac{3\pi}{2})t}dt &\Rightarrow v = \frac{2}{3\pi}je^{-j(\frac{3\pi}{2})t}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \int udv &= uv - \int vdu \\
&= \frac{2}{3\pi}(t+2)je^{-j(\frac{3\pi}{2})t} - \int \frac{2}{3\pi}je^{-j(\frac{3\pi}{2})t}du \\
&= \frac{2}{3\pi}(t+2)je^{-j(\frac{3\pi}{2})t} - \int \frac{2}{3\pi}je^{-j(\frac{3\pi}{2})t}dt \\
&= \frac{2}{3\pi}(t+2)je^{-j(\frac{3\pi}{2})t} + \frac{4}{9\pi^2}e^{-j(\frac{3\pi}{2})t}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \int_{-1}^{0}(t+2)e^{-j(\frac{3\pi}{2})t}dt &= \left(\frac{4}{3\pi}j + \frac{4}{9\pi^2}\right) - \left(\frac{2}{3\pi} + \frac{4}{9\pi^2}(-j)\right) \\
&= \left(\frac{4}{9\pi^2} - \frac{2}{3\pi}\right) + \left(\frac{4}{3\pi} + \frac{4}{9\pi^2}\right)j
\end{aligned}
$$

به طور مشابه

$$\int_0^1 (-t+2)e^{-j(\frac{3\pi}{2})t}dt = \left(\frac{2}{3\pi} - \frac{4}{9\pi^2}\right) + \left(-\frac{4}{3\pi} - \frac{4}{9\pi^2}\right)j$$

در نهایت

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3\pi}(1+j) + 0 + \frac{2}{3\pi}(1-j)\right) \\ &= \frac{1}{3\pi} \end{aligned}$$

سوال ۳

الف)

ضرایب سری فوریه با انجام مقیاس زمانی تغییر نمی‌کند. صرفا مقدار ω_0 تغییر می‌کند و دو برابر می‌شود.

$$\omega_{0_2} = 2\omega_{0_1} = 2 \times \frac{2\pi}{2} = 2\pi$$

$$b_k = c_k$$

ب)

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \\ \Rightarrow x'(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} jk\omega_0 c_k e^{jk\omega_0 t} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{jk\omega_0 t} \\ \Rightarrow b_k &= jk\omega_0 c_k = jk\pi c_k \end{aligned}$$

ج)

ضرایب سری فوریه در یک مقدار ثابت $e^{-jk\omega_0 t_0}$ ضرب خواهند شد.

$$b_k = e^{-jk\omega_0 t_0} c_k = e^{-jk(\pi)(\frac{1}{4})} c_k = e^{-j\frac{k\pi}{4}} c_k$$

د)

ضرایب سیگنال $\cos(2\pi t)$ را a_k در نظر می‌گیریم. برای a_k داریم

$$\cos(2\pi t) = \frac{e^{j(2)(\pi)t} + e^{-j(2)(\pi)t}}{2}$$

برای یکی بودن با $x(t)$، مقدار ω_0 را برابر π فرض می‌کنیم. در نتیجه مقادیر a_k به صورت زیر خواهد بود (بقیه ضرایب برابر صفر هستند).

$$a_2 = a_{-2} = \frac{1}{2}$$

حال بنا بر خاصیت مدولاسیون سری فوریه داریم

$$\begin{aligned} b_k &= a_k * c_k \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l c_{k-l} = \frac{1}{2}(c_{k-2} + c_{k+2}) \end{aligned}$$

سوال ۴

می‌توان دوره تناوب هر دو سیگنال $x(t)$ و $z(t)$ را برابر ۱ در نظر گرفت (دوره تناوب $z(t)$ در شکل مشخص است).

$$x(t+1) = 2\cos(2\pi t + 2\pi) + \sin(4\pi t + 4\pi) = 2\cos(2\pi t) + \sin(4\pi t) = x(t)$$

$$\begin{aligned} x_T(t) * z_T(t) &= z_T(t) * x_T(t) \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} z_T(\tau) x_T(t-\tau) d\tau \\ &= \int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}} x_T(t-\tau) d\tau \\ &= \int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}} 2\cos(2\pi(t-\tau)) + sin(4\pi(t-\tau)) d\tau \\ &= \frac{2}{\pi}\cos(2\pi t) \end{aligned}$$

سوال ۵

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{T}\int_T c_n e^{jn\omega_0 t} \times f(t)dt &= \frac{1}{T}\int_T c_n e^{jn\omega_0 t} \times \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} dt \\
&= \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_T c_n e^{jn\omega_0 t} \times c_k e^{jk\omega_0 t} dt
\end{aligned}
$$

از خاصیت تعامد در سری فوریه نتیجه می‌گیریم

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{T}\int_T c_n e^{jn\omega_0 t} \times c_{-n} e^{-jn\omega_0 t} dt \\
&= \frac{c_n \times c_{-n}}{T}\int_T e^{jn\omega_0 t} \times e^{-jn\omega_0 t} dt \\
&= \frac{c_n \times c_{-n}}{T}\int_T dt \\
&= c_n c_{-n}
\end{aligned}
$$

چون سیگنال حقیقی است

$$
\begin{aligned}
&= c_n c_n^* \\
&= |c_n|^2
\end{aligned}
$$

سوال ۶

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T}\int_T |f(t)|^2 dt &= \frac{1}{T}\int_T f(t)f^*(t)dt \\
&= \frac{1}{T}\int_T f(t)\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-jk\omega_0 t}dt \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T}c_k \int_T f(t)e^{-jk\omega_0 t}dt \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T}c_k c_{-k} \\
&= \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k c_k^* \\
&= \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \leq \frac{1}{T}\sum_{k=-m}^{m} |c_k|^2 (\forall m)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{T}\int_T |f(t)|^2 dt \leq \frac{1}{T}\sum_{k=-m}^{m} |c_k|^2 (\forall m)$$