سیگنال‌ها و سیستم‌ها - دکتر سلیمی بدر

امیرحسین منصوری - ۹۹۲۴۳۰۶۹

تمرین سری ۳

سوال ۱

پاسخ سیستم برابر کانوولوشن سیگنال $x[n]$ و $h[n]$ است.

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$
$$= \sum_{k=1}^{3} 2h[n-k] = 2 \times \sum_{k=1}^{3} h[n-k]$$

حال $y[n]$ را بازه‌بندی می‌کنیم.

$$n \leq 2 \Rightarrow y[n] = 0$$
$$3 \leq n \leq 4 \Rightarrow y[n] = 2 \times \sum_{k=1}^{n-2} 1 = 2(n-2)$$
$$5 \leq n \leq 7 \Rightarrow y[n] = 2 \times \sum_{k=1}^{3} 1 = 6$$
$$8 \leq n \leq 9 \Rightarrow y[n] = 2 \times \sum_{k=n-6}^{3} 1 = 2(10-n)$$
$$n > 9 \Rightarrow y[n] = 0$$

مشخص است که در بازه $5 \leq n \leq 7$، سیگنال بیشترین مقدار را دارد.

سوال ۲

الف)

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\tau|}e^{-2(t-\tau+1)}u(t-\tau+1)d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{1+t} e^{-|\tau|}e^{-2(t-\tau+1)}d\tau \\
&= e^{-2t-2}\int_{-\infty}^{1+t} e^{-|\tau|}e^{2\tau}d\tau
\end{aligned}
$$

حال $y(t)$ را بازه‌بندی می‌کنیم.

$$
\begin{aligned}
t<-1 \Rightarrow y(t) &= e^{-2t-2}\int_{-\infty}^{1+t} e^{-(-\tau)}e^{2\tau}d\tau \\
&= e^{-2t-2}\int_{-\infty}^{1+t} e^{3\tau}d\tau \\
&= \frac{1}{3}e^{-2t-2}(e^{t+1}) \\
&= \frac{1}{3}e^{-t-1} \\
t\geq -1 \Rightarrow y(t) &= e^{-2t-2}\int_{-\infty}^{1+t} e^{-\tau}e^{2\tau}d\tau \\
&= e^{-2t-2}\int_{-\infty}^{1+t} e^{\tau}d\tau \\
&= e^{-2t-2}e^{t+1} \\
&= e^{-t-1}
\end{aligned}
$$

ب)

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} 2e^{-3\tau}u(\tau)(e^{-t+\tau} - e^{-2t+2\tau})u(t-\tau)d\tau \\
&= \int_{0}^{t} 2e^{-3\tau}(e^{-t+\tau} - e^{-2t+2\tau})d\tau \\
&= 2\int_{0}^{t} e^{-t-2\tau} - e^{-2t-\tau}d\tau \\
&= 2(e^{-t}\int_{0}^{t} e^{-2\tau}d\tau + e^{-2t}\int_{0}^{t} e^{-\tau}d\tau) \\
&= 2(-\frac{1}{2}e^{-t}(e^{-2t}-1) - e^{-2t}(e^{-t}-1)) \\
&= -e^{-3t} + e^{-t} - 2e^{-3t} + 2e^{-2t} \\
&= -3e^{-3t} + 2e^{-2t} + e^{-t}
\end{aligned}
$$

سوال ۳

الف)

$$
\begin{aligned}
y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n} u[k]u[n-k] \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n} \\
&= \frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1})
\end{aligned}
$$

ب)

$$
\begin{aligned}
y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} u[k]h[n-k] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{n-k}(u[n-k+2] - u[n-k-3]) \\
&= (-1)^{n}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}(u[n-k+2] - u[n-k-3])
\end{aligned}
$$

حال $y[n]$ را بازه‌بندی می‌کنیم.

$$
\begin{aligned}
n \leq -3 \Rightarrow y[n] &= 0 \\
-2 \leq n \leq 2 \Rightarrow y[n] &= (-1)^n \sum_{k=0}^{n+2} (-1)^k \\
&= \begin{cases} 1 & n \in E \\ 0 & n \in O \end{cases} \\
n \geq 3 \Rightarrow y[n] &= (-1)^n \sum_{k=n-2}^{n+2} (-1)^k \\
&= \begin{cases} 1 & n \in E \\ 1 & n \in O \end{cases} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

سوال ۴

اگر $h[n]$ را سیگنال پاسخ ضربه در نظر بگیریم، داریم

$$
\begin{aligned}
s[n] &= h[n] * u[n] \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]u[n-k] \\
&= \sum_{k=-\infty}^{n} h[k] \\
&= \sum_{k=-\infty}^{n-1} h[k] + h[n] \\
&= s[n-1] + h[n] \\
\Rightarrow h[n] &= s[n] - s[n-1] \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1]
\end{aligned}
$$

سوال ۵

الف)

حافظه‌دار بودن برای این که سیستم بدون حافظه باشد، باید $h[n]$ در n های غیر صفر، مقدار صفر داشته باشد. اما $h[1] = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ و بنابراین سیستم حافظه‌دار است.

علّی بودن برای علّی بودن سیستم، برای n های منفی، $h[n]$ باید صفر باشد. اما $h[-1] = \sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$ و بنابراین سیستم علّی نیست.

پایداری برای پایداری، باید داشته باشیم $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < L_2$. اما

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\sin(\frac{\pi}{2}k)| = \infty$$

و چنین L_2 ای وجود ندارد. بنابراین سیستم پایدار نیست.

ب)

حافظه‌دار بودن برای این که سیستم بدون حافظه باشد، باید $h[n]$ در n های غیر صفر، مقدار صفر داشته باشد. اما $h[8] = \cos(\pi) = -1$. بنابراین سیستم حافظه‌دار است.

علّی بودن برای $n < 0$، داریم $u[n] - u[n-10] = 0$ و در نتیجه $h[n] = 0$. در نتیجه سیستم علّی است.

پایداری داریم

$$\begin{aligned} &\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\cos(\frac{\pi}{8}k)(u[k] - u[k-10])| \\ &= \sum_{k=0}^{9} |\cos(\frac{\pi}{8}k)| < 10 \end{aligned}$$

در نتیجه سیستم پایدار است.

سوال ۶

$$\begin{aligned} h[n] &= \sum_{k=0}^{n} e^{-2(n-k)}\delta[k-1] \\ &= \begin{cases} 0 & n < 0 \\ e^{-2(n-1)} & n \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

سیستم علّی است. زیرا در n های منفی، مقدار صفر دارد.

همچنین برای پایداری سیستم داریم

$$\begin{aligned}\sum_{k=-\infty}^{\infty} |e^{-2(n-1)}| &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-2(n-1)} = e^2 + e^0 + e^{-2} + ... \\ &= \frac{1}{1-\frac{1}{e^2}}\end{aligned}$$

در نتیجه سیستم پایدار است.

سوال ۷

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} z(\lambda)d\lambda &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(\lambda-\tau)d\tau d\lambda \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(\lambda-\tau)d\lambda\right)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(x(\tau)\int_{-\infty}^{+\infty} y(\lambda-\tau)d\lambda\right)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(x(\tau)A_2\right)d\tau \\ &= A_2\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)d\tau \\ &= A_1A_2\end{aligned}$$

سوال ۸

الف)

$$\begin{aligned}r_{xx}(t) &= x(t)*x(-t) = x(-t)*x(t) \\ &= x(-t)*x(-(-t)) \\ &= r_{xx}(-t)\end{aligned}$$

ب)

$$\begin{aligned}r_{xy}(t) &= x(t)*y(-t) = y(-t)*x(t) \\ &= y(-t)*x(-(-t)) \\ &= r_{yx}(-t)\end{aligned}$$