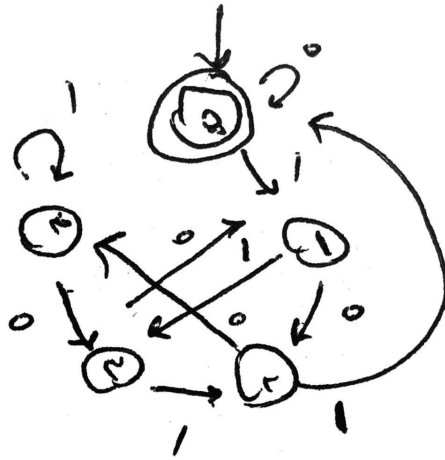


نظریه زبان و ماشین - دکتر قوامی زاده

امیرحسین منصوری - ۹۹۲۴۳۰۶۹ - تمرین سری ۵

سوال ۱

ابتدا DFA برای معکوس زبان گفته شده رسم می کنیم، یعنی DFAی که رشته های باینری بخش پذیر بر ۵ را پذیرش کند:



از روی این DFA، گرامر خطی راست می نویسیم:

$$S_0 \rightarrow 1S_0 \mid 0S_0 \mid \varepsilon$$

$$S_1 \rightarrow 1S_3 \mid 0S_2$$

$$S_2 \rightarrow 1S_0 \mid 0S_4$$

$$S_3 \rightarrow 1S_2 \mid 0S_1$$

$$S_4 \rightarrow 1S_4 \mid 0S_3$$

با برعکس کردن جای پایانه ها و ناپایانه ها، گرامر خطی چپ برای وارون زبان DFA بالا، که همان زبان مطلوب سوال است، به دست می آید:

$$S_0 \rightarrow S_01 \mid S_00 \mid \varepsilon$$

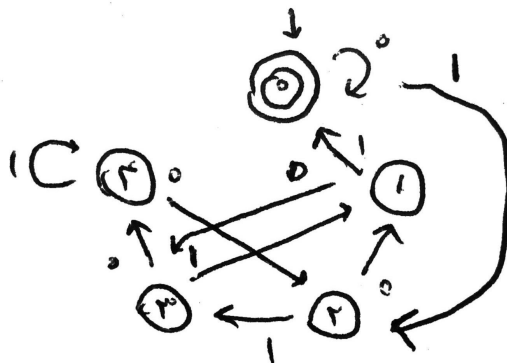
$$S_1 \rightarrow S_31 \mid S_20$$

$$S_2 \rightarrow S_01 \mid S_40$$

$$S_3 \rightarrow S_21 \mid S_10$$

$$S_4 \rightarrow S_41 \mid S_30$$

همچنین برای DFA زبان مطلوب سوال، کافیت DFA بالا را وارونه کنیم:



سوال ۲

گرامر داده شده به وضوح منظم نیست، چون در بعضی قواعد آن ناپایانه‌ها سمت چپ و در بعضی از آن‌ها سمت راست است.

اما زبان این گرامر منظم است. زیرا می‌توان برای آن عبارت منظم نوشت. برای هر قاعده می‌توان عبارات منظم زیر را نوشت:

$$B = a^*ba^*$$

$$A = a^*(a|ba)b^*$$

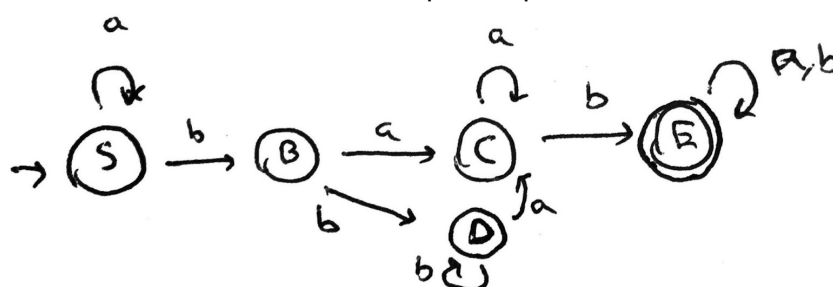
$$C = a^*(a|ba)b^*aa^*ba^*|a^*ba^*aa^*(a|ba)b^*$$

$$S = a^*ba^*aa^*(a|ba)b^*ab|a^*(a|ba)b^*aa^*ba^*|a^*ba^*aa^*(a|ba)b^*$$

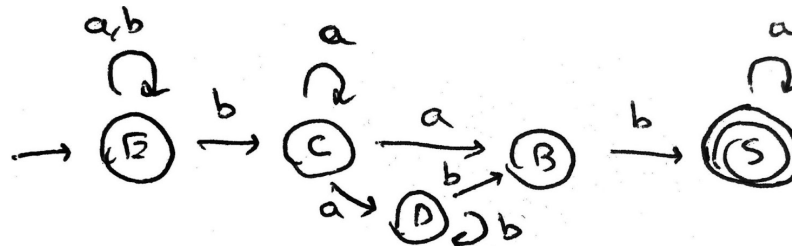
چون برای S که نماد شروع است، عبارت منظم می‌توان به دست آورد، پس زبان این گرامر منظم است.

سوال ۳

با استفاده از گرامر راست داده شده DFA رسم می‌کنیم:



حال با برعکس کردن گذرها، NFA زبان معکوس را رسم می‌کنیم:



برای این ماشین گرامر خطی راست می‌نویسیم:

$$E \rightarrow aE \mid bE \mid bC$$

$$C \rightarrow aC \mid aD \mid aB$$

$$D \rightarrow bB \mid bD$$

$$B \rightarrow bS$$

$$S \rightarrow aS \mid \varepsilon$$

با برعکس کردن جای پایانه‌ها و ناپایانه‌ها، گرامر معکوس معکوس زبان مطلوب سوال، که خود همان زبان است، به دست می‌آید:

$$E \rightarrow Ea \mid Eb \mid Cb$$

$$C \rightarrow Ca \mid Da \mid Ba$$

$$D \rightarrow Bb \mid Db$$

$$B \rightarrow Sb$$

$$S \rightarrow Sa \mid \varepsilon$$

سوال ۴

ابتدا ثابت می‌کنیم به ازای هر زبان منظم A ، زبان‌های زیر منظم هستند:

$$X = \{x \mid yx \in A\}$$

$$Y = \{y \mid yx \in A\}$$

$$X_i = \{x \in X \mid |x| = i\}$$

$$Y_i = \{y \in Y \mid |y| = i\}$$

نشان می‌دهیم می‌توان برای X گرامر خطی چپ نوشت. چون A منظم است، پس حتما دارای گرامر خطی چپ است. از روی این گرامر، گرامر جدیدی درست می‌کنیم که در آن، از هر قاعده مستقیما ε مشتق می‌شود. یعنی هر قاعده گرامر L به فرم‌های:

$$S \rightarrow Ba$$

$$S \rightarrow a$$

(که در آن S و B متغیری دلخواه و a نماد پایانه دلخواه هستند) را به فرم زیر می‌نویسیم:

$$S \rightarrow Ba \mid \varepsilon$$

$$S \rightarrow a \mid \varepsilon$$

این گرامر جدید، گرامر خطی چپ برای X خواهد بود. بنابراین X منظم است. به طور مشابه، چون A منظم است، پس حتما دارای گرامر خطی راست است. از روی این گرامر، گرامر جدیدی درست می‌کنیم که در آن، از هر قاعده مستقیما ε مشتق می‌شود. یعنی هر قاعده گرامر L به فرم‌های:

$$S \rightarrow aB$$

$$S \rightarrow a$$

را به فرم زیر می‌نویسیم:

$$S \rightarrow aB \mid \varepsilon$$

$$S \rightarrow a \mid \varepsilon$$

این گرامر جدید، گرامر خطی راست برای Y خواهد بود. بنابراین Y نیز منظم است. اگر مجموعه الفبای X را $\Sigma = \{a_1, a_2, \dots\}$ در نظر بگیریم و زبان عبارت منظم $(a_1|a_2|\dots)^i$ را R_i در نظر بگیریم، آن‌گاه:

$$X_i = X \cap R_i$$

و چون X و R_i منظم هستند، پس X_i نیز منظم است. به طور مشابه، Y_i نیز منظم است. حال به ازای زبان تک رشته‌ای $L_w = \{w\}$ و X و Y منظم هستند و چون زبان‌های منظم نسبت به عمل اجتماع و concat بسته هستند. پس:

$$\bigcup_{w \in L} \bigcup_{i=0}^{|w|} X_i \cdot Y_{|w|-i}$$

که همان زبان مطلوب سوال است، منظم است.