آمار و احتمال مهندسی - دکتر صفائی

امیرحسین منصوری - ۹۹۲۴۳۰۶۹ - تمرین سری ۶

سوال ۱

با تشکر!

سوال ۲

برای این که متحرک در 2k حرکت ۱۰ واحد به سمت راست برود، باید ۱۰ بار بیشتر از دفعاتی که به سمت چپ می‌رود، به سمت راست برود. یعنی اگر تعداد حرکات به سمت راست را x و تعداد حرکات به سمت چپ را y در نظر بگیریم، داریم:

$x + y = 2k,\ x - y = 10$

$\Rightarrow x = k + 5$

با استفاده از توزیع دوجمله‌ای، احتمال این که ۱۰ واحد به سمت راست جابه‌جا شود بر حسب k برابر است با:

$p_1(k) = C(2k,\ k + 5) \times p^{k+5} \times q^{k-5}$

به طور مشابه، احتمال این که ۱۰ واحد به سمت چپ جابه‌جا شود برحسب k برابر است با:

$p_2(k) = C(2k,\ k + 5) \times q^{k+5} \times p^{k-5}$

بنابراین احتمال خواسته شده برابر است با:

$p(k) = p_1(k) + p_2(k) = C(2k,\ k + 5) \times p^{k-5}q^{k-5} \times (p^{10} + q^{10})$

سوال ۳

چون X و Y مستقل هستند، بنابراین $P\{X = k \wedge Y = k\} = P\{X = k\}P\{Y = k\}$. اگر فرض کنیم احتمال موفقیت این دو توزیع به ترتیب p_1و p_2باشد، بنابراین:

$P\{X = Y\} = \sum_{k=0}^{\infty} P\{X = k\}P\{Y = k\} = \sum_{k=0}^{\infty} (1 - p_1)^k p_1(1 - p_2)^k p_2$

$p_1p_2 \sum_{k=0}^{\infty} (1 - p_1)^k(1 - p_2)^k = \frac{p_1p_2}{1-(1-p_1)(1-p_2)}$

سوال ۴ - الف)

$P\{X > s + t\} = 1 - P\{X \le s + t\} = 1 - \sum_{i=0}^{s+t}(1 - p)^i p = 1 - p \times \frac{1-(1-p)^{s+t}}{1-(1-p)} = (1 - p)^{s+t}$

$P\{X > s\} = (1 - p)^s,\ P\{X > t\} = (1 - p)^t$

$\Rightarrow P\{X > s + t \,|\, X > s\} = \frac{P\{X>s+t\}}{P\{X>s\}} = \frac{(1-p)^{s+t}}{(1-p)^s} = (1 - p)^t = P\{X > t\}$

سوال ۴ - ب)

با توجه به نمایی بودن توزیع تابع چگالی احتمال انتظار، و خاصیت بی‌حافظگی این توزیع:

$P\{X > 15 \,|\, X > 10\} = P\{X > 5\} = 1 - P\{X \le 5\} = 1 - (1 - e^{-0.1\times5}) = 0.61$

سوال ۵ - الف)

اگر متوسط از کار افتادگی در ماه ۴ باشد، متوسط از کار افتادگی در هفته برابر $\frac{28}{30} = 4 \times \frac{7}{30}$ خواهد بود.

بنابراین با $\lambda = \frac{28}{30}$:

$p = \frac{\lambda^0 e^{-\frac{28}{30}}}{0!} = 0.393$

سوال ۵ - ب)
تابع مولد گشتاور برابر است با:

$M_X(t) = e^{(\lambda(e^t-1))}$

$\Rightarrow E[X] = M'_X(0) = \lambda e^t e^{(\lambda(e^t-1))}]_{t=0} = \lambda = \frac{28}{30}$

$\Rightarrow E[X^2] = M''_X(0) = \lambda(e^t e^{(\lambda(e^t-1))} + \lambda e^t e^{(\lambda(e^t-1))} e^t)]_{t=0} = \lambda(1 + \lambda) = \lambda + \lambda^2$

$\Rightarrow VAR(X) = E[X^2] - E^2[X] = \lambda + \lambda^2 - \lambda^2 = \lambda = \frac{28}{30}$

سوال ۵ - ج)
در هر ۶۰ ثانیه ۱.۲ خطا رخ می‌دهد. بنابراین در هر ۴ ثانیه، ۰.۰۸ خطا رخ می‌دهد. با استفاده از توزیع پواسن و $\lambda = 0.08$ داریم:

$P(0) = \frac{(0.08)^0 e^{-0.08}}{0!} = 0.92$

سوال ۶

$E[X] = np = 3$

$VAR(X) = np(1 - p) = \sqrt{0.5} = 0.25$

$\Rightarrow 1 - p = \frac{VAR(X)}{E[X]} = \frac{1}{12} \Rightarrow p = \frac{11}{12}$

$\Rightarrow n = \frac{E[X]}{p} = \frac{3}{\frac{11}{12}} = 3.27$

سوال ۷
وجود تلفن را موفقیت، و عدم وجود تلفن را شکست فرض می‌کنیم. با استفاده از توزیع دوجمله‌ای منفی با $p = 0.3$، $n = 5$ داریم:

$p(5) = C(5 + 5 - 1, 5 - 1)\times (0.3)^5 \times (1 - 0.3)^5 = 0.051$

سوال ۸

$\frac{e^{-\lambda}\lambda^2}{2!} = 2 \times \frac{e^{-\lambda}\lambda^0}{0!}$

$\Rightarrow \lambda^2 = 4, \lambda > 0 \Rightarrow \lambda = 2$

$\Rightarrow p\{x^2 + x - 2 > 0\} = p\{(x + 2)(x - 1) > 0\} = p\{x <- 2 \lor x > 1\} = p\{x > 1\}$

$= 1 - p\{x \le 1\} = 1 - (p(0) + p(1)) = 1 - \frac{e^{-2}2^0}{0!} - \frac{e^{-2}2^1}{1!} = 0.594$

سوال ۹
می‌دانیم برای ۴ رقم باقی‌مانده، $6 = \frac{4!}{2!2!}$ حالت داریم. در نتیجه احتمال موفقیت در هر بار تلاش برای ورود، $\frac{1}{6}$ است. با استفاده از توزیع هندسی با $p = \frac{1}{6}$ داریم:

$p\{x \le 2\} = p\{0\} + p\{1\} + p\{2\} = (1 - \frac{1}{6})^0(\frac{1}{6})^1 + (1 - \frac{1}{6})^1(\frac{1}{6})^1 + (1 - \frac{1}{6})^2(\frac{1}{6})^1 = 0.421$

سوال ۱۰
اگر شکست را اصابت به هدف فرض کنیم، متغیر Q از توزیع دوجمله‌ای منفی پیروی خواهد کرد و داریم:

$p(k) = C(4 + k - 1, 4 - 1) \times (0.25)^k(1 - 0.25)^4$

$\Rightarrow E[Q] =- 2 \times \frac{pr}{1-p} =- 2 \times \frac{0.75\times 4}{0.25} =- 24$

سوال ۱۱

اگر $X + Y = m$، در این صورت: $Y = m - X$. بنابراین:

$$p\{X - k \mid X + Y = m\} = p\{Y = m - k) = C(n,\ m - k) \times p^{m-k} \times (1 - p)^{n-m+k}$$