آمار و احتمال مهندسی - دکتر صفائی

امیرحسین منصوری - ۹۹۲۴۳۰۶۹ - تمرین سری ۵

سوال ۱ - الف)

$$\mu = E[X] = \sum_{x=1}^{k} xf(x) = \frac{1}{k}\sum_{x=1}^{k} x = \frac{1}{k} \times \frac{k(k+1)}{2} = \frac{k+1}{2}$$

سوال ۱ - ب)

$$E[X^2] = \sum_{x=1}^{k} x^2 f(x) = \frac{1}{k}\sum_{x=1}^{k} x^2 = \frac{1}{k} \times \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} = \frac{(k+1)(2k+1)}{6}$$

$$\Rightarrow VAR(X) = E[X^2] - E^2[X] = \frac{(k+1)(2k+1)}{6} - \frac{(k+1)^2}{4}$$

$$= \frac{4k^2+6k+2}{12} - \frac{3k^2+6k+3}{12} = \frac{k^2-1}{12}$$

سوال ۲

$$h(x) = \sum_{y=1}^{x} \frac{2}{n(n+1)} = \frac{2x}{n(n+1)}$$

$$E[Y|X = x] = \sum_{y=1}^{x} y\frac{f(x,y)}{h(x)} = \sum_{y=1}^{x} y\frac{1}{x} = \frac{1}{x}\sum_{y=1}^{x} y = \frac{1}{x} \times \frac{x(x+1)}{2} = \frac{x+1}{2}$$

سوال ۳ - الف)

پارامترهای توزیع هندسی برابر است با: $N = 80,\ n = 3,\ k = 4$ و داریم:

$$f(1) = \frac{C(4,1)\times C(76,2)}{C(80,3)} = 0.139$$

سوال ۳ - ب)

پارامترهای توزیع دوجمله‌ای برابر است با: $n = 4,\ p = \frac{4}{80} = 0.05$ و داریم:

$$f(1) = C(4,1) \times (0.05)^1(1 - 0.05)^{4-1} = 0.171$$

سوال ۴

احتمال این که هر ۱۰ قسمت یک بسته به شکل صحیح به مقصد برسد و در نتیجه کل بسته سالم به مقصد برسد برابر $p = (0.8)^{10} = 0.107$ است. توزیع هندسی به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$p(k) = p.(1 - p)^{k-1}$$

که در آن p احتمال رسیدن بسته به مقصد و k تعداد ارسال‌های لازم برای سالم به مقصد رسیدن بسته است.
امید ریاضی این توزیع برابر است با:

$$E[X] = \frac{1}{p} = \frac{1}{(0.8)^{10}} = 9.31$$

در نتیجه به طور میانگین، باید ۹.۳۱ بار بسته را ارسال کنیم تا کل بسته سالم به مقصد برسد.

سوال ۵

داریم:

$$p(k;\lambda) = \frac{e^{-\lambda}.\lambda^k}{k!},\ p(k+1;\lambda) = \frac{e^{-\lambda}.\lambda^{k+1}}{(k+1)!}$$

$$\Rightarrow \frac{p(k+1;\lambda)}{p(k;\lambda)} = \frac{\lambda}{k+1}$$

$$\Rightarrow p(k+1;\lambda) = \frac{\lambda}{k+1}.p(k;\lambda)$$

$\Rightarrow p(k + 1; 2) = \frac{2}{k+1}. p(k; 2)$

سوال ۷ - الف)

تابع جرم احتمال برابر است با:

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \ , a < x < b$$
$$= 0 \quad , \#$$

$$p\{x < a + p(b - a)\} = \sum_{x=a}^{a+p(b-a)} \frac{1}{b-a} = \frac{1}{b-a} \sum_{x=a}^{a+p(b-a)} 1 = \frac{p(b-a)}{b-a} = p$$

سوال ۷ - ب)

برای سادگی، واریانس $Y \sim U(1, b - a + 1)$ را که با واریانس X برابر است حساب می‌کنیم:

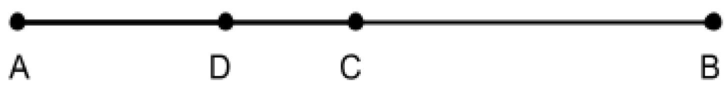
$$E[Y] = \sum_{x=1}^{b-a} \frac{x}{b-a} = \frac{1}{b-a} \sum_{x=1}^{b-a} x = \frac{1}{b-a} \times \frac{(b-a)(b-a+1)}{2} = \frac{b-a+1}{2}$$

$$E[Y^2] = \sum_{x=1}^{b-a} \frac{x^2}{b-a} = \frac{1}{b-a} \sum_{x=1}^{b-a} x^2 = \frac{1}{b-a} \times \frac{(b-a)(b-a+1)(2b-2a+1)}{6} = \frac{(b-a+1)(2b-2a+1)}{6}$$

$$\Rightarrow VAR(Y) = E[Y^2] - E^2[Y] = \frac{4(b-a)^2+6(b-a)+2}{12} - \frac{3(b-a)^2+6(b-a)+3}{12} = \frac{(b-a)^2-1}{12}$$

$$\Rightarrow VAR(X) = VAR(Y) = \frac{(b-a)^2-1}{12}$$

سوال ۸



داریم:

$\overline{AC} = \frac{a}{2}, \ \overline{AD} = x, \ \overline{BD} = a - x$

برای تشکیل مثلث، این ۳ نامساوی باید برقرار باشند:

$AC + AD > BD$

$\frac{a}{2} + x > a - x$

$\Rightarrow x > \frac{a}{4}$

$AC + BD > AD$

$\frac{3a}{2} - x > x$

$\Rightarrow x < \frac{3a}{4}$

$AD + BD > AC$

$a > \frac{a}{2}$ (بدیهی)

$\Rightarrow \frac{a}{4} < x < \frac{3a}{4}$

$$\Rightarrow P\{\frac{a}{4} < x < \frac{3a}{4}\} = \int_{\frac{a}{4}}^{\frac{3a}{4}} \frac{1}{a-0} dx = \frac{1}{2}$$

سوال ۹

$$E[X] = np = 3$$
$$VAR[X] = np(1 - p) = (0.5)^2 = 0.25$$
$$\Rightarrow 1 - p = \frac{0.25}{3} = \frac{1}{12}$$
$$\Rightarrow p = \frac{11}{12}$$
$$\Rightarrow n = \frac{3}{p} = \frac{3}{\frac{11}{12}} = \frac{36}{11} = 3.27$$

سوال ۱۰

$$E[X|X > 1] = \int_{x=1}^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x} = e^{-\lambda x}(- x - \frac{1}{\lambda})]_1^{\infty} = e^{-\lambda}(1 + \frac{1}{\lambda})$$

سوال ۱۱

برای این که معادله جواب داشته باشد، باید دلتا نامنفی باشد:

$$a^2 - 16 \geq 0 \Rightarrow a \geq 4 \vee a \leq - 4$$

در نهایت چون a نمی‌تواند منفی باشد: $a \geq 4$.

آزمایش گفته شده در سوال، از توزیع هندسی با $p = 0.5$ پیروی می‌کند. بنابراین:

$$f(k) = (0.5)^{k-1} \times (0.5) = (0.5)^k$$
$$\Rightarrow P\{a \geq 4\} = 1 - P\{a < 4\} = 1 - (f(3) + f(2) + f(1))$$
$$= 1 - ((0.5)^3 + (0.5)^2 + (0.5)^1) = 0.125$$

سوال ۱۲ - الف)

$$P\{X \geq 1\} = 1 - P\{X < 1\} = 1 - P(0) = 1 - C(2, 0)p^0(1 - p)^2 = \frac{5}{9}$$
$$\Rightarrow (1 - p)^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow 1 - p = \frac{2}{3} \Rightarrow p = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow P\{Y \geq 1\} = 1 - P\{Y < 1\} = 1 - P(0) = 1 - C(4, 0)p^0(1 - p)^4$$
$$= 1 - \frac{16}{81} = \frac{65}{81}$$

سوال ۱۲ - ب)

احتمال خواسته شده از توزیع دوجمله‌ای منفی با $p = 0.8$ و $k = 3$ پیروی می‌کند:

$$p\{x \geq 5\} = 1 - p\{x < 5\} = 1 - (p(4) + p(3))$$
$$= 1 - (C(4 - 1, 3 - 1) \times (0.8)^3(1 - 0.8)^{4-3} + C(3 - 1, 3 - 1) \times (0.8)^3(1 - 0.8)^{3-3})$$
$$0.18$$

سوال ۱۲ - ج)

احتمال خطا داشتن این ۵ بسته از توزیع دو جمله‌ای با $n = 5$ و $p = 0.1$ است.

$p\{1 \leq n \leq 4\} = 1 - p(0) - p(5)$

$= 1 - C(5, 0) \times (0.1)^0(1 - 0.1)^5 - C(5, 5) \times (0.1)^5(1 - 0.1)^0$

$= 0.41$
