آمار و احتمال مهندسی - دکتر صفائی

امیرحسین منصوری - ۹۹۲۴۳۰۶۹ - تمرین سری ۱

سوال ۱

داریم:

$$a_1 + a_2 + ... + a_n = (1 \times a_1) + (1 \times a_2) + ... + (1 \times a_n) = \sum_{i=1}^{n} 1 \times a_i$$

طبق نامساوی کوشی-شوارتز داریم:

$$(\sum_{i=1}^{n} 1 \times a_i)^2 \le (\sum_{i=1}^{n} 1^2)(\sum_{i=1}^{n} a_i^2)$$

$$\Rightarrow (a_1 + a_2 + ... + a_n)^2 \le n(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)$$

با تقسیم دو طرف بر n^2 داریم:

$$\Rightarrow \frac{(a_1+a_2+...+a_n)^2}{n^2} \le \frac{(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2)}{n}$$

با جذر گرفتن از طرفین داریم:

$$\Rightarrow \frac{(a_1+a_2+...+a_n)}{n} \le \sqrt{\frac{(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2)}{n}}$$

بنابراین حکم سوال درست است.

سوال ۲

با توجه به ساقه ۱۴، چهار داده وجود دارد که برابر ۱۴.۵ هستند. بنابراین $\frac{4}{50} \times 100 = 8\%$ داده‌ها دقیقا برابر ۱۴.۵ هستند.

سوال ۳

اگر میانگین داده‌های $x_1, x_2, ..., x_n$ را $\bar{x}$ بنامیم و a عددی ثابت و دلخواه باشد، برای داده‌های $x_1 - a, x_2 - a, ..., x_n - a$، میانگین برابر $\bar{x} - a$ و واریانس برابر خواهد بود با:

$$\sigma_2^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)^2}{n} - (\bar{x} - a)^2$$

همچنین بنا به رابطه‌ی دیگری برای واریانس، واریانس داده‌های اولیه برابر خواهد بود با:

$$\sigma_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}$$

همچنین با توجه به این که هر کدام از داده‌ها مقدار ثابتی تغییر کرده‌اند، در نتیجه واریانس این دو دسته داده با هم برابر است:

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

$$\Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)^2}{n} - (\bar{x} - a)^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}$$

با ضرب دو طرف در n:

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - a)^2 - n(\bar{x} - a)^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

با مرتب‌کردن تساوی به عبارت زیر می‌رسیم:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 + n(\bar{x} - a)^2$$

بنابراین حکم سوال درست است.

سوال ۴ - الف)

۷۰ - ۷۰ - ۷۳ - ۷۵ - ۷۷ - ۹۱ - ۹۱ - ۹۵ - ۹۵ - ۹۹ - ۱۰۰ - ۱۰۰ - ۱۰۰ - ۱۰۲ - ۱۰۴ - ۱۰۷ - ۱۱۲ - ۱۱۳ - ۱۱۵ - ۱۱۵ - ۱۱۹ - ۱۲۰ - ۱۲۰ - ۱۲۲ - ۱۲۵ - ۱۲۵ - ۱۲۸ - ۱۲۹

سوال ۴ - ب)

$$R = Max - Min = 129 - 70 = 59$$

سوال ۵

اگر در نمودار قبل از دسته‌ی اول، یک دسته‌ی فرضی دیگر قرار بدهیم، بازه آن برابر $[3, 9)$ خواهد بود و نقطه اول نمودار، روی مرکز این دسته‌ی فرضی قرار می‌گیرد. بنابراین طول نقطه‌ی اول برابر $6 = \frac{3+9}{2}$ است.

همچنین طول نقطه‌ی دوم برابر مرکز دسته‌ی اول یعنی $12 = \frac{9+15}{2}$ است.

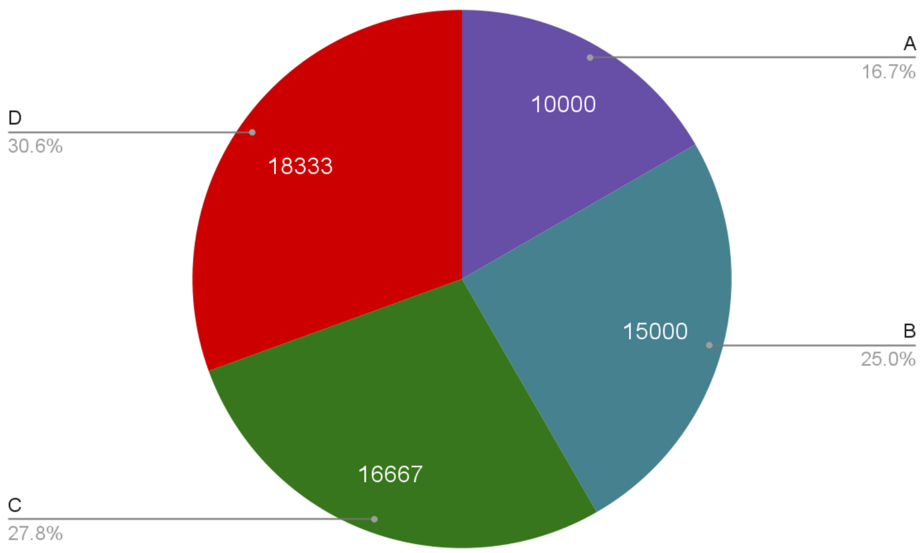
سوال ۶

طول دسته برابر است با

$$L = \frac{R}{K} = \frac{19-7}{4} = 3$$

بنابراین بازه دسته‌ها برابر با $[7, 10)$، $[10, 13)$، $[13, 16)$، و $[16, 19]$ است. سر انتهایی نمودار، در مرکز دسته‌ای فرضی که بعد از دسته آخر می‌آید، محور x را قطع می‌کند. این دسته‌ی فرضی برابر با $[19, 22)$ و مرکز این دسته برابر ۲۰.۵ است. پس در x=۲۰.۵ نقطه انتهایی نمودار، محور x را قطع می‌کند.

سوال ۷



تعداد در رده A:

$$n(A) = 60000 \times \frac{60}{360} = 10000$$

تعداد در رده B:

$$n(B) = 60000 \times \frac{90}{360} = 15000$$

تعداد در رده C:

$$n(C) = 60000 \times \frac{100}{360} = 16667$$

تعداد در رده D:

$$n(D) = 60000 \times \frac{110}{360} = 18333$$

سوال ۸

$$\overline{x} = 15 \Rightarrow x_1 + x_2 +\ldots + x_{20} = 20 \times 15 = 300$$

میانگین جدید برابر است با:

$$\overline{x'} = \frac{x_1+x_2+\ldots+x_{20}+(4+8+\ldots+80)}{20} = \frac{300+840}{20} = 57$$

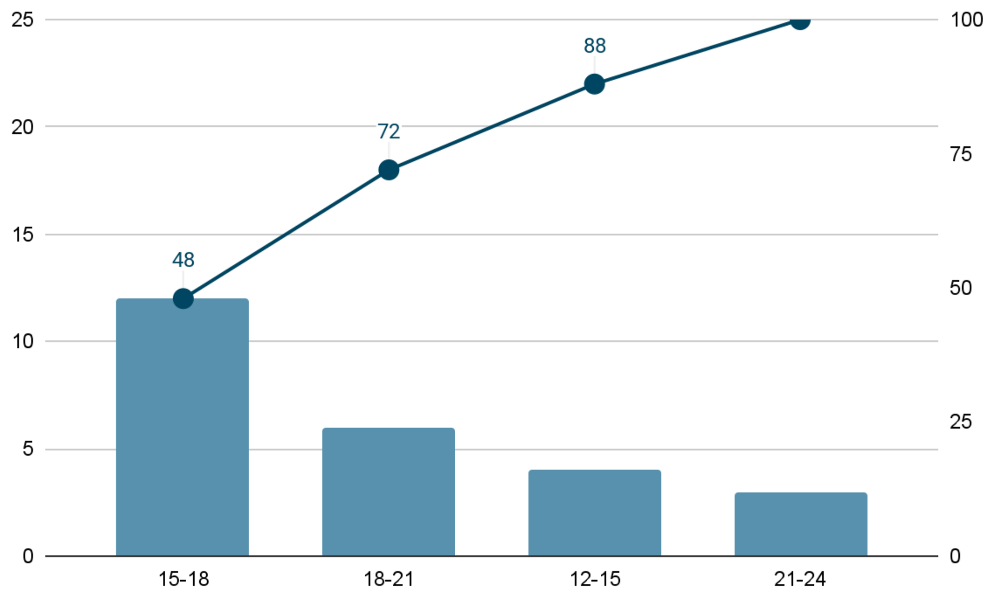
سوال ۹

مراکز دسته به ترتیب برابر هستند با 61, 64, 67, 70, و 73.

$$\overline{x} = \frac{(5\times61)+(18\times64)+(42\times67)+(27\times70)+(8\times73)}{5+18+42+27+8} = 67.45$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{n} = \frac{5(61-67.45)^2+18(64-67.45)^2+42(67-67.45)^2+27(70-67.45)^2+8(73-67.45)^2}{5+18+42+27+8} = 8.5275$$

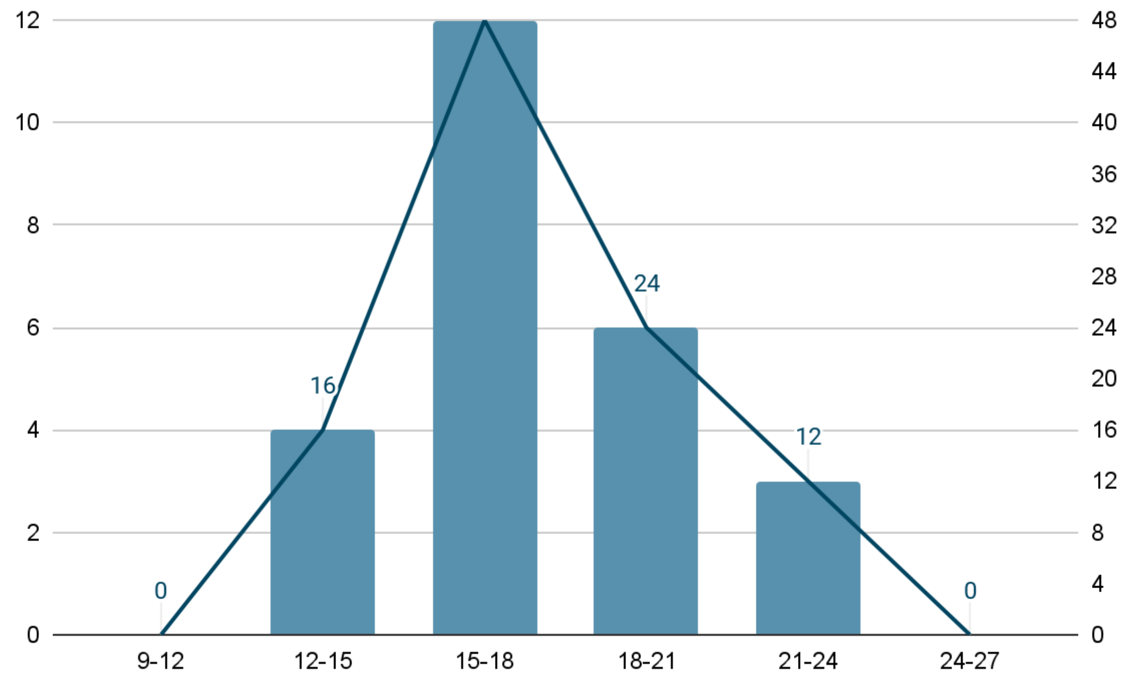
سوال ۱۰ - الف)



حدود طبقات	f	F	r
12-15	4	4	16%
15-18	12	16	48%

24%	22	6	18-21
12%	25	3	21-24

سوال ۱۰ - ب)



سوال ۱۰ - ج)

بر اساس جدول داده شده سه دسته آخر بالای ۱۶ وات مصرف دارند. پس در مجموع $12 + 6 + 3 = 21$ کامپیوتر بالای ۱۶ وات مصرف دارند.