

آمار و احتمال مهندسی - دکتر صفائی

امیرحسین منصوری - ۹۹۲۴۳۰۶۹ - تمرین سری ۳

سوال ۱ - الف)

داریم:

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0.5$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{8}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\Rightarrow 0.75 = P(A) + 0.25 - \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{5}{8}$$

$$\Rightarrow P(\bar{B}|\bar{A}) = \frac{P(\bar{B} \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{1 - P(A \cup B)}{1 - P(A)} = \frac{1 - 0.75}{1 - \frac{5}{8}} = \frac{2}{3}$$

سوال ۱ - ب)

داریم:

$$P(A)P(B) = \frac{5}{8} \times \frac{1}{4} = \frac{5}{32}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

بنابراین $P(A|B) \neq P(A)P(B)$ و این دو پیشامد مستقل نیستند.

سوال ۲

اگر احتمال اشتباه عمل کردن تابع آام را P_i در نظر بگیریم، احتمال درست عمل کردن برنامه برابر است با:

$$P = (1 - P_1)(1 - P_2)(1 - P_3) = 0.9 \times 0.8 \times 0.7 = 0.504$$

سوال ۳

تنها حالتی که در آن سیستم کار نمی‌کند، حالتی است که در آن هیچ کدام از مؤلفه‌ها کار نکنند. با توجه به این که احتمال خراب بودن مؤلفه i برابر $(1 - P_i)$ است، احتمال خراب بودن کل سیستم برابر است با:

$$P = 1 - \left(\prod_{i=1}^3 (1 - P_i) \right)$$

سوال ۴

با توجه به این که جمع احتمال نواحی با احتمال $\frac{1}{4}$ برابر یک است، بنابراین احتمال پیشامد نواحی هاشور زده برابر صفر است. پس با توجه به نمودار:

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$$

$$P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = \frac{1}{4}$$

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4}$$

داریم:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

$$P(A \cap C) = P(A)P(C)$$

$$P(B \cap C) = P(B)P(C)$$

پس پیشامدها دو به دو مستقل هستند. اما داریم:

$$P(A)P(B)P(C) \neq P(A \cap B \cap C)$$

پس هر سه پیشامد با هم مستقل نیستند.

سوال ۵

استقلال A از B را بررسی می‌کنیم:

$$P(A) = 0.06 + 0.06 + 0.24 + 0.24 = 0.6, P(B) = 0.18 + 0.14 + 0.24 + 0.24 = 0.8$$

$$P(A \cap B) = 0.24 + 0.24 = 0.48$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

پس A مستقل از B است. حال استقلال A از C را بررسی می‌کنیم:

$$P(C) = 0.06 + 0.06 + 0.14 + 0.24 = 0.5$$

$$P(A \cap C) = 0.24 + 0.06 = 0.3$$

$$\Rightarrow P(A \cap C) = P(A)P(C)$$

پس A مستقل از C است. حال استقلال A از $B \cap C$ را بررسی می‌کنیم:

$$P(B \cap C) = 0.14 + 0.24 = 0.38$$

$$P(A \cap B \cap C) = 0.24$$

$$\Rightarrow P(A \cap B \cap C) \neq P(A)P(B \cap C)$$

پس A از $B \cap C$ مستقل نیست. بنابراین استقلال A از B و استقلال A از C ربطی به استقلال A از $B \cap C$ ندارد.

سوال ۶

مجموع همه مقادیر f باید برابر ۱ باشد:

$$\sum_{i=1}^{\infty} c\left(\frac{1}{6}\right)^{i-1} = 1$$

$$\Rightarrow c \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^i = 1$$

$$\Rightarrow c \times \frac{1 - \left(\frac{1}{6}\right)^{\infty}}{1 - \frac{1}{6}} = 1 \Rightarrow c \times \frac{6}{5} = 1$$

$$\Rightarrow c = \frac{5}{6}$$

سوال ۷

با توجه به جدول داریم:

$$P(x \geq 2) = P(2) + P(3) = 0.2 + 0.1 = 0.3$$

$$P(0 < x \leq 2) = P(1) + P(2) = 0.4 + 0.2 = 0.6$$

$$P(|x - 1| \leq 1) = P(0) + P(1) + P(2) = 0.3 + 0.4 + 0.2 = 0.9$$

سوال ۸ - الف)

مجموع مقدار تابع چگالی احتمال باید در همه نقاط برابر ۱ باشد. یعنی:

$$\int_{-\infty}^{\infty} ke^{-3x} dx = 1$$

چون تابع در $x \leq 0$ برابر صفر است، پس داریم:

$$\int_{-\infty}^{\infty} ke^{-3x} dx = k \int_0^{\infty} e^{-3x} dx = k \left[-\frac{1}{3} e^{-3x} \right]_0^{\infty} = \frac{k}{3} = 1$$

$$\Rightarrow k = 3$$

در نتیجه:

$$P\{0.5 < X \leq 1\} = \int_{0.5}^1 3e^{-3x} dx = [-e^{-3x}]_{0.5}^1 = 0.173$$

سوال ۸ - ب)تابع توزیع $F(x)$ برابر است با:

$$F(x) = \int f(x) dx = \int 3e^{-3x} dx = -e^{-3x}$$

$$\Rightarrow P\{0.5 < X \leq 1\} = F(1) - F(0.5) = -e^{-3} + e^{-1.5} = 0.173$$

سوال ۹ - الف)

احتمال انتخاب هر جعبه $\frac{1}{2}$ است. احتمال این که هر دو توپ بیرون آورده شده از جعبه i آبی باشد برابر $\frac{2}{5} \times \frac{1}{5}$ است. همچنین احتمال این که هر دو توپ بیرون آورده شده از جعبه j آبی باشد برابر $\frac{3}{5} \times \frac{2}{4}$ است. بنابراین احتمال مطلوب برابر است با (در زیر B_i احتمال انتخاب جعبه i و A_i احتمال انتخاب i توپ آبی از جعبه A است):

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B_i)P(A_i) + P(B_j)P(A_j) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{11}{60} \end{aligned}$$

سوال ۹ - ب)

احتمال قرمز بودن توپ اول برابر $\frac{2}{5}$ و احتمال آبی بودن آن برابر $\frac{3}{5}$ است. اگر توپ اول قرمز باشد، احتمال قرمز بودن توپ بعدی $\frac{1}{4}$ و اگر توپ اول آبی باشد، احتمال قرمز بودن توپ بعدی $\frac{2}{4}$ است. بنابراین احتمال مطلوب برابر است با:

$$P = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{8}{20}$$

سوال ۱۰ - الف)

$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(x) &= 0 & (x < 0) \\ &= x & (0 \leq x < 1) \\ &= 2 - x & (1 \leq x < 2) \\ &= 0 & (x \geq 2) \end{aligned}$$

سوال ۱۰ - ب)

$$P\left(\frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}\right) = F\left(\frac{1}{2}\right) - F\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8} - \frac{1}{32} = \frac{3}{32}$$

سوال ۱۰ - ج)

$$P\left(\frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{2}\right) = P\left(\frac{1}{2} \leq x < 1\right) + P\left(1 \leq x < \frac{3}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{7}{8} - \frac{1}{2}\right) = \frac{6}{8}$$
