

آمار و احتمال مهندسی - دکتر صفائی

امیرحسین منصوری - ۹۹۲۴۳۰۶۹ - تمرین سری ۴

در همه سوالات، منظور از $C(n, r)$ ، تعداد حالات انتخاب r شی از n شی است.

سوال ۱

تابع جرم احتمال برابر است با:

$$f(x) = C(4, x) \times \frac{1}{2^4}, x = 0, 1, 2, 3, 4$$

$$\Rightarrow f(0) = C(4, 0) \times \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$$

$$\Rightarrow f(1) = C(4, 1) \times \frac{1}{2^4} = \frac{4}{16}$$

$$\Rightarrow f(2) = C(4, 2) \times \frac{1}{2^4} = \frac{6}{16}$$

$$\Rightarrow f(3) = C(4, 3) \times \frac{1}{2^4} = \frac{4}{16}$$

$$\Rightarrow f(4) = C(4, 4) \times \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$$

بنابراین تابع توزیع احتمال برابر است با:

$$F(x) = \sum_{i=0}^x f(i), x = 0, 1, 2, 3, 4$$

$$\Rightarrow F(0) = f(0) = \frac{1}{16}$$

$$\Rightarrow F(1) = f(0) + f(1) = \frac{5}{16}$$

$$\Rightarrow F(2) = f(0) + f(1) + f(2) = \frac{11}{16}$$

$$\Rightarrow F(3) = f(0) + f(1) + f(2) + f(3) = \frac{15}{16}$$

$$\Rightarrow F(4) = f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = 1$$

سوال ۲

$$f(0) = f(1) = 0$$

$$f(2) = \frac{1}{36}$$

$$f(3) = \frac{2}{36}$$

$$f(4) = \frac{3}{36}$$

$$f(5) = \frac{4}{36}$$

$$f(6) = \frac{5}{36}$$

$$f(7) = \frac{6}{36}$$

$$f(8) = \frac{5}{36}$$

$$f(9) = \frac{4}{36}$$

$$f(10) = \frac{3}{36}$$

$$f(11) = \frac{2}{36}$$

$$f(12) = \frac{1}{36}$$

متغیر تصادفی این تابع، می‌تواند حاصل جمع اعداد ظاهر شده در پیشامد پرتاب دو تاس سالم باشد.

سوال ۳ - الف)

اگر متغیر تصادفی X را برای سکه سالم در نظر بگیریم:

$$X = \{(0, \text{شیر}), (1, \text{خط})\}$$

تابع جرم احتمال آن برابر است با:

$$f = \{(0.5, \text{شیر}), (0.5, \text{خط})\}$$

$$E[X] = 0.5$$

داریم:

$$\sigma_X^2 = E[X^2] - E^2[X] = 0.5 - 0.25 = 0.25$$

از قانون اعداد بزرگ داریم:

$$VAR[\hat{P}] = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{0.25}{900}$$

از قضیه چبیشف داریم:

$$P(\{|\hat{P} - P| \geq 0.1\}) \leq 100 VAR[\hat{P}] = \frac{25}{900} = \frac{1}{36}$$

$$\Rightarrow P(\{|\hat{P} - P| \leq 0.1\}) \geq 1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36}$$

سوال ۳ - ب)

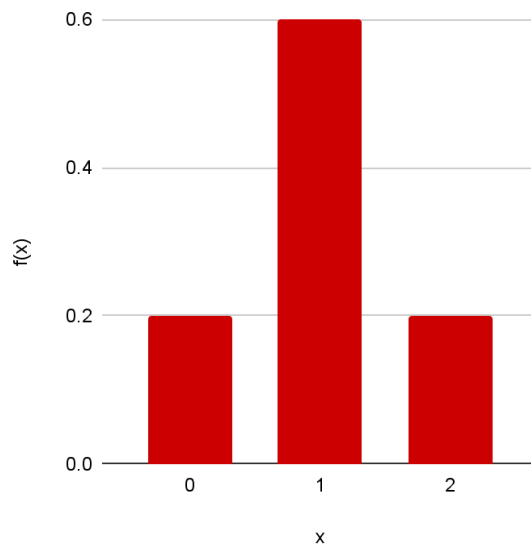
مشابه ۳-الف داریم:

$$VAR[\hat{P}] = \frac{0.25}{1000000}$$

$$P(\{|\hat{P} - P| \geq 0.003\}) \leq \frac{1000000}{9} VAR[\hat{P}] = \frac{0.25}{9} = \frac{1}{36}$$

$$\Rightarrow P(\{|\hat{P} - P| \leq 0.003\}) \geq 1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36}$$

سوال ۴ - الف)

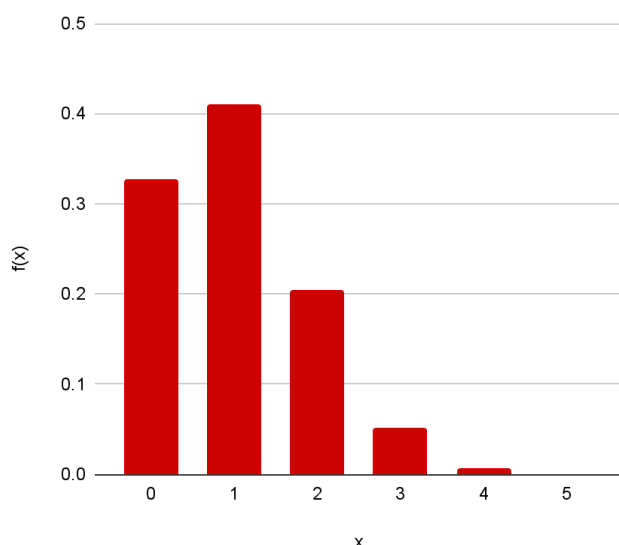


$$f(0) = \frac{C(2,0) \times C(4,3-0)}{C(6,3)} = \frac{4}{20}$$

$$f(1) = \frac{C(2,1) \times C(4,3-1)}{C(6,3)} = \frac{12}{20}$$

$$f(2) = \frac{C(2,2) \times C(4,3-2)}{C(6,3)} = \frac{4}{20}$$

سوال ۴ - ب



$$f(0) = C(5, 0) \left(\frac{1}{5}\right)^0 \left(\frac{4}{5}\right)^{5-0} = \frac{1024}{3125}$$

$$f(1) = C(5, 1) \left(\frac{1}{5}\right)^1 \left(\frac{4}{5}\right)^{5-1} = \frac{1280}{3125}$$

$$f(2) = C(5, 2) \left(\frac{1}{5}\right)^2 \left(\frac{4}{5}\right)^{5-2} = \frac{640}{3125}$$

$$f(3) = C(5, 3) \left(\frac{1}{5}\right)^3 \left(\frac{4}{5}\right)^{5-3} = \frac{160}{3125}$$

$$f(4) = C(5, 4) \left(\frac{1}{5}\right)^4 \left(\frac{4}{5}\right)^{5-4} = \frac{20}{3125}$$

$$f(5) = C(5, 5) \left(\frac{1}{5}\right)^5 \left(\frac{4}{5}\right)^{5-5} = \frac{1}{3125}$$

سوال ۵

$$VAR[X + Y] = VAR[X] + VAR[Y] + 2COV[X, Y] = 1$$

$$VAR[X - Y] = VAR[X + (-Y)] = VAR[X] + VAR[-Y] + 2COV[X, -Y]$$

$$= VAR[X] + VAR[Y] - 2COV[X, Y] = 2$$

$$\Rightarrow 4COV[X, Y] = -1 \Rightarrow COV[X, Y] = -\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow VAR[X] + VAR[Y] = \frac{3}{2}$$

چون توزیع دو متغیر تصادفی یکسان است، بنابراین:

$$VAR[X] = VAR[Y]$$

$$\Rightarrow VAR[X] = VAR[Y] = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow CORR[X, Y] = \frac{COV[X, Y]}{\sqrt{VAR[X]VAR[Y]}} = \frac{-\frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{3}{4} \times \frac{3}{4}}} = -\frac{1}{3}$$

سوال ۶ - الف

پیشامد A را crash نکردن سرور در طول سال در نظر می‌گیریم:

$$P(A) = 0.5 \times (1 - 0.3) + 0.2 \times (1 - 0.15) + 0.3 \times (1 - 0.05) = 0.805$$

سوال ۶ - ب

پیشامد A را crash کردن سرور در طول سال، و پیشامد B را crash کردن در سال قبل آن در نظر می‌گیریم.

چون این دو پیشامد مستقل هستند پس:

$$P(A|B) = P(A) = 0.5 \times 0.3 + 0.2 \times 0.15 + 0.3 \times 0.05 = 0.195$$

سوال ۷

بنا بر قضیه چبیشف داریم:

$$P(\{|\mu - X| \geq 5\}) \leq \frac{\sigma^2}{25} = \frac{16}{25}$$

$$\Rightarrow P(\{|\mu - X| \leq 5\}) \geq 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$$

بنابراین احتمال مطلوب برابر $1 - \frac{9}{25} \leq p \leq 1$ است.