سیگنال‌ها و سیستم‌ها - دکتر سلیمی‌بدر

امیرحسین منصوری - ۹۹۲۴۳۰۶۹

تمرین سری ۲

سوال ۱

با توجه به بسط تیلور داریم:

$$
\begin{aligned}
e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\
\Rightarrow e^{j\theta} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(j\theta)^n}{n!} \\
&= 1 + \frac{j\theta}{1!} + \frac{(j\theta)^2}{2!} + \frac{(j\theta)^3}{3!} + ... \\
&= 1 + \frac{j\theta}{1!} - \frac{\theta^2}{2!} - \frac{j\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \frac{j\theta^5}{5!} + ... \\
&= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - ...\right) + j\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - ...\right) \\
&= \cos(\theta) + j\sin(\theta)
\end{aligned}
$$

سوال ۲

الف)

با توجه به این که سیگنال شامل مساحتی غیر صفر است که بی‌نهایت بار تکرار شده است، انرژی سیگنال به بی‌نهایت میل می‌کند.

با توجه به این که سیگنال متناوب است، توان کل سیگنال برابر توان در یکی از دوره‌های سیگنال خواهد بود:

$$
\begin{aligned}
P(y(t)) &= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} |y(\tau)|^2 \, d\tau \\
&= \frac{1}{4}\int_{-2}^{+2} |y(\tau)|^2 \, d\tau
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{4}\left(\int_{-1}^{0} |y(\tau)|^2 \, d\tau + \int_{0}^{1} |y(\tau)|^2 \, d\tau\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\int_{-1}^{0} (\tau+1)^2 d\tau + \int_{0}^{1} (-\tau+1)^2 d\tau\right) \\
&= \frac{1}{4}\left((\frac{1}{3}) + (\frac{1}{3})\right) \\
&= \frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

ب)

انرژی سیگنال برابر است با:

$$
\begin{aligned}
E(x(t)) &= \int_{-\infty}^{\infty} |x(\tau)|^2 d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-6\tau} u(\tau) d\tau \\
&= \int_{0}^{\infty} e^{-6\tau} d\tau \\
&= \left[-\frac{1}{6} e^{6\tau}\right]_0^{\infty} \\
&= -\frac{1}{6}\,(0-1) \\
&= \frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

با توجه به متناهی بودن انرژی سیگنال، توان سیگنال برابر صفر خواهد بود:

$$
\begin{aligned}
P(x(t)) &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |x(\tau)|^2 d\tau \\
&= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{0}^{+T} e^{-6\tau} d\tau \\
&= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} (-\frac{1}{6} \left[e^{-6\tau}\right]_0^T) \\
&= \lim_{T\to\infty} -\frac{1}{12T} (e^{-6T} - 1) \\
&= -0(0-1) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

سوال ۳

۱)

فرض می‌کنیم $x_1(t) = t^2$ و $x_2(t) = (t-1)^2$. در این صورت داریم:

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t) = \begin{cases} t^2 & t^2 < t^2 - 4t + 4 \\ (t-1)^2 & t^2 \geq t^2 - 4t + 4 \end{cases}$$
$$\Rightarrow x_1(t) \rightarrow y_1(t) = \begin{cases} t^2 & t < 1 \\ (t-1)^2 & t \geq 1 \end{cases}$$

همچنین برای $x_2(t)$:

$$x_2(t) \rightarrow y_2(t) = \begin{cases} (t-1)^2 & t < 2 \\ (t-2)^2 & t \geq 2 \end{cases}$$

در نتیجه داریم:

$$x_3(t) = x_1(t) + x_2(t) = t^2 + (t-1)^2$$

و:

$$x_3(t) \rightarrow y_3(t) = \begin{cases} t^2 + (t-1)^2 & 2t^2 - 2t + 1 < (t-2)^2 + (t-3)^2 \\ (t-1)^2 + (t-2)^2 & 2t^2 - 2t + 1 \geq (t-2)^2 + (t-3)^2 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} t^2 + (t-1)^2 & t < 1.5 \\ (t-1)^2 + (t-2)^2 & t \geq 1.5 \end{cases}$$

اما:

$$y_1(t) + y_2(t) = \begin{cases} t^2 + (t-1)^2 & t < 1 \\ 2(t-1)^2 & 1 \leq t < 2 \\ (t-1)^2 + (t-2)^2 & t > 2 \end{cases}$$
$$\neq y_3(t)$$

در نتیجه سیستم خاصیت جمع‌پذیری ندارد و در نتیجه خطی نیست.

۳)

سیستم خاصیت همگنی دارد:

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t) = \begin{cases} tx_1(t+3) & t < 0 \\ 4\cos(t^2)x_1(\sqrt{t}) & t \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_2(t) = \alpha x_1(t) \to y_2(t) = \begin{cases} tx_2(t+3) & t < 0 \\ 4\cos(t^2)x_2(\sqrt{t}) & t \geq 0 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \alpha t x_1(t+3) & t < 0 \\ 4\alpha\cos(t^2)x_1(\sqrt{t}) & t \geq 0 \end{cases}$$
$$= \alpha y_1(t)$$

سیستم همچنین خاصیت جمع‌پذیری دارد:

$$x_1(t) \to y_1(t) = \begin{cases} tx_1(t+3) & t < 0 \\ 4\cos(t^2)x_1(\sqrt{t}) & t \geq 0 \end{cases}$$
$$x_2(t) \to y_2(t) = \begin{cases} tx_2(t+3) & t < 0 \\ 4\cos(t^2)x_2(\sqrt{t}) & t \geq 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow x_3(t) = x_1(t) + x_2(t) \to y_3(t) = \begin{cases} tx_3(t+3) & t < 0 \\ 4\cos(t^2)x_3(\sqrt{t}) & t \geq 0 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} tx_1(t+3) + tx_2(t+3) & t < 0 \\ 4\cos(t^2)x_1(\sqrt{t}) + 4\cos(t^2)x_2(\sqrt{t}) & t \geq 0 \end{cases}$$
$$= y_1(t) + y_2(t)$$

در نتیجه سیستم خطی است.

۴)

سیستم به وضوح علّی نیست. زیرا به عنوان مثال $y(-2) = x(-1)$. در نتیجه خروجی سیستم وابستگی به آینده دارد.

برای بررسی تغییرپذیری با زمان، داریم:

$$x_1(t) \to y_1(t) = x_1(\frac{t}{2})$$
$$x_2(t) = x_1(t - t_0) \to y_2(t) = x_2(\frac{t}{2}) = x_1(\frac{t}{2} - t_0)$$
$$y_1(t - t_0) = x_1(\frac{t - t_0}{2}) \neq y_2(t)$$

درنتیجه سیستم تغییرپذیر با زمان است.

۵)

سیستم علّی است. زیرا برای محاسبه $y(t)$ تنها به $x(t-2)$ نیاز داریم و به آینده وابستگی نداریم. مقدار $u(t+2)$ نیز به ازای هر t مشخص است.

برای بررسی تغییرپذیری با زمان، داریم:

$$\begin{aligned} x_1(t) \to y_1(t) &= x_1(t-2)u(t+2) \\ x_2(t) = x_1(t-t_0) \to y_2(t) &= x_2(t-2)u(t+2) = x_1(t-2-t_0)u(t+2) \\ \Rightarrow y_1(t-t_0) &= x_1(t-2-t_0)u(t+2-t_0) \neq y_2(t) \end{aligned}$$

در نتیجه سیستم تغییرپذیر با زمان است.

۶)

داریم:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{-t} x(-\tau)d\tau = \int_{t}^{\infty} x(\tau)d\tau$$

چون انتگرال را تا بی‌نهایت محاسبه می‌کنیم، پس به ازای هر t به مقدار سیگنال در زمان‌های جلوتر از t نیاز داریم. درنتیجه سیستم علّی نیست.

برای بررسی تغییرپذیری با زمان، داریم:

$$\begin{aligned} x_1(t) \to y_1(t) &= \int_{t}^{\infty} x_1(\tau)d\tau \\ x_2(t) = x_1(t-t_0) \to y_2(t) &= \int_{t}^{\infty} x_2(\tau)d\tau = \int_{t}^{\infty} x_1(\tau-t_0)d\tau \\ &= \int_{t-t_0}^{\infty} x_1(\tau)d\tau \\ y_1(t-t_0) &= \int_{t-t_0}^{\infty} x_1(\tau)d\tau \\ &= y_2(t) \end{aligned}$$

در نتیجه، سیستم تغییر ناپذیر با زمان است.

۷)

سیستم وارون پذیر است و می‌توان سیستم زیر را به عنوان معکوس آن در نظر گرفت:

$$y_i(t) = \begin{cases} y(t+2) & t \geq 0 \\ y(t-2) & t < 0 \end{cases}$$

درواقع همه قسمت‌های سیگنال $x(t)$ عینا در $y(t)$ نیز وجود دارد و تنها به مقدار ثابتی جابه‌جا شده‌اند. با اعمال معکوس این جابه‌جایی، می‌توان سیگنال $x(t)$ را از $y(t)$ به دست آورد.

۸)

سیستم وارون پذیر است و می‌توان سیستم زیر را به عنوان معکوس آن در نظر گرفت:

$$y_i(t) = \begin{cases} +\sqrt{y(t)} & y(t) > 0 \\ y(t) & y(t) \leq 0 \end{cases}$$

در واقع اگر خروجی سیستم داده شده در سوال، مثبت باشد، می‌دانیم که سیگنال داده شده نیز مثبت بوده است و از ضابطه اول استفاده شده است. در نتیجه برای به دست آوردن سیگنال ورودی (یا همان $x(t)$)، کافیست مقدار مثبت ریشه دوم سیگنال خروجی (یا همان $y(t)$) را در نظر بگیریم.

همچنین اگر سیگنال خروجی منفی باشد، می‌دانیم که از ضابطه دوم استفاده شده و بنابراین سیگنال خروجی، همان سیگنال ورودی است.

۹)

به ازای $x(t) = \sin^2(t)$، خواهیم داشت $y(t) = \frac{\sin(\sin^2(t)+2t)}{\sin^2(t-1)}$ و بنابراین $|x(t)| \leq 1$. اما داریم

$$\lim_{t\to 1} y(t) = \lim_{t\to 1} \frac{\sin(\sin^2(t)+2t)}{\sin^2(t-1)} = \infty$$

در نتیجه سیگنال پایدار نیست.

۱۰)

به ازای $x(t) = \sin(t)$، داریم $|x(t)| < 1$ و

$$\begin{aligned} y(t) &= \begin{cases} t\sin(t) & t < |\sin(t)| \\ \sin(-t) & t \geq |\sin(t)| \end{cases} \\ &= \begin{cases} t\sin(t) & t < 0 \\ \sin(-t) & t \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

اما داریم:

$$\lim_{t\to -\infty} y(t) = \lim_{t\to -\infty} t\sin(t) = -\infty$$

در نتیجه سیستم پایدار نیست.

برای بررسی علّی بودن، حالت‌های زیر را برای $y(t)$ درنظر می‌گیریم:

۱. شرط $t < |x(t)|$ برقرار باشد: در این صورت $y(t) = tx(t)$ که به وضوح وابستگی به آینده ندارد.

۲. شرط $t \geq |x(t)|$ برقرار باشد: در این صورت $t \geq 0$ و $y(t) = x(-t)$ و بنابراین خروجی باز هم وابستگی به آینده ندارد.

در نتیجه، سیستم علّی است.