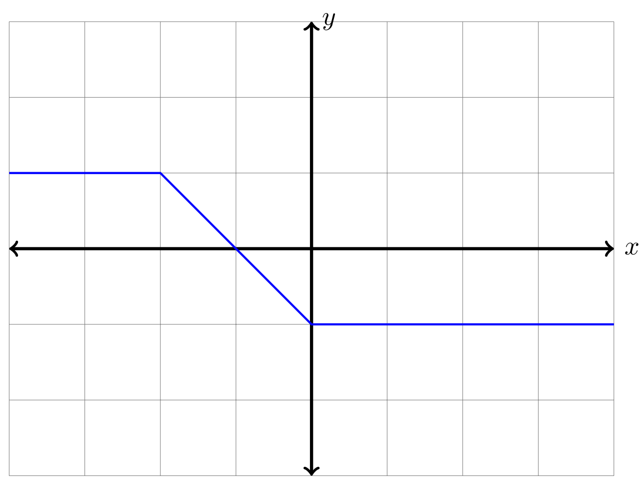
سیگنال‌ها و سیستم‌ها - دکتر سلیمی‌بدر

امیرحسین منصوری - ۹۹۲۴۳۰۶۹

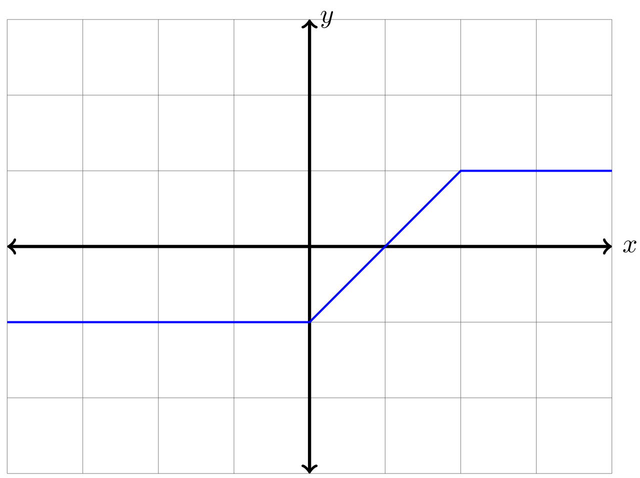
تمرین سری ۱

سوال ۱

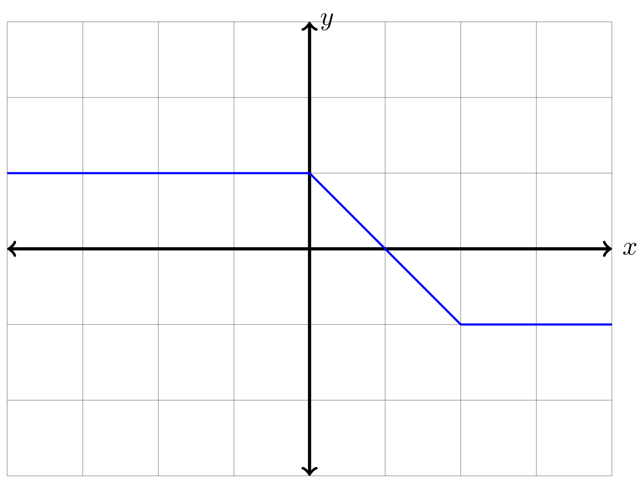
با ۱ واحد جابه‌جایی به چپ، $g(1+t)$ به دست می‌آید:



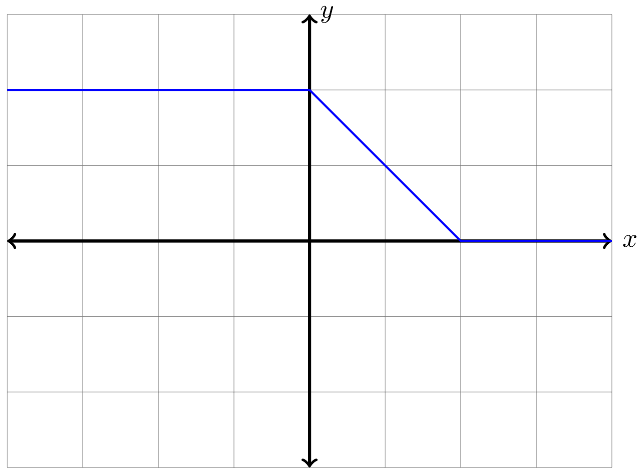
با اعمال تبدیل معکوس زمانی، $g(1-t)$ به دست می‌آید:



با قرینه کردن نسبت به محور xها، $-g(1-t)$ به دست می‌آید:



با ۱ واحد جابه‌جایی به سمت بالا، $1-g(1-t)$ به دست می‌آید:

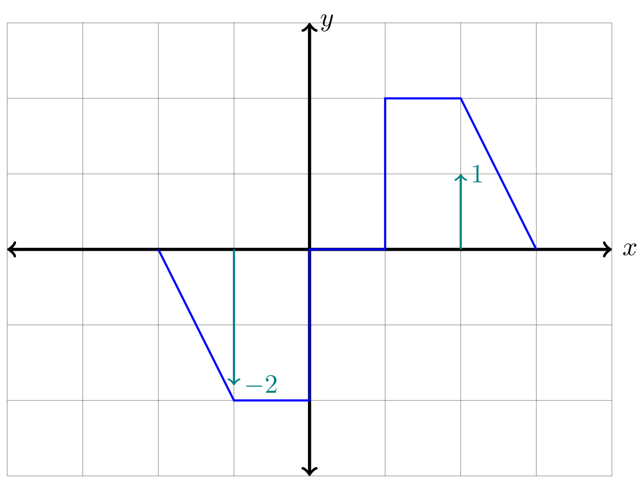


سوال ۲

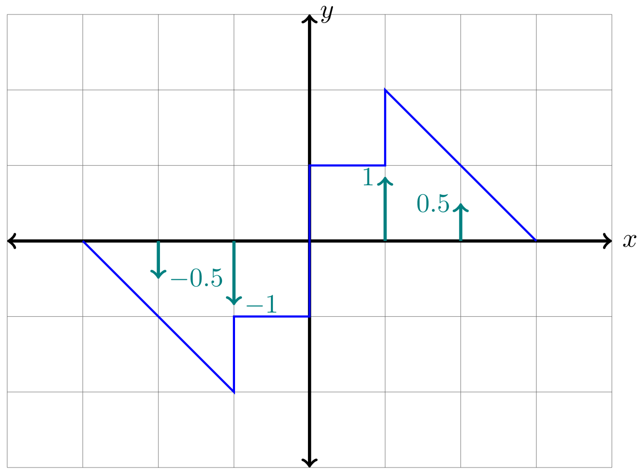
می‌دانیم

$$x_o(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2}$$

برای به دست آوردن $-x(-t)$، نمودار $x(t)$ را نسبت به مبدا مختصات، قرینه می‌کنیم:



حال می‌توانیم نمودار قسمت فرد را از روی نمودار $x(t)$ و $-x(-t)$ به دست بیاوریم. کافیست این دو را با هم جمع کنیم و عرض نقاط را نصف کنیم:



حال می‌توانیم انتگرال مورد نظر را حساب کنیم:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{\infty} x_o(t)dt \\
&= \int_0^{1^-} x_o(t)dt + \int_{1^-}^{1^+} x_o(t)dt + \int_{1^+}^{2^-} x_o(t)dt + \int_{2^-}^{2^+} x_o(t)dt + \int_{2^+}^{3} x_o(t)dt + \int_{3}^{\infty} x_o(t)dt \\
&= 1 + 1 + \frac{(2+1)\times 1}{2} + 0.5 + \frac{1\times 1}{2} + 0 \\
&= 4.5
\end{aligned}
$$

در بالا، حاصل هر انتگرال به سادگی از مساحت زیر نمودار مشخص شده در بالا به دست می‌آید.

سوال ۳

$$
\begin{aligned}
P(x(t)) &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |x(\tau)|^2 \, d\tau \\
&= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \left(\int_{-T}^{-10} 2^2 d\tau + \int_{-10}^{+10} 4^2 d\tau + \int_{+10}^{+T} 6^2 d\tau \right) \\
&= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \left(4(T-10) + 320 + 36(T-10)\right) \\
&= \lim_{T\to\infty} 2 + 18 + \frac{-40+320-360}{2T} \\
&= 20
\end{aligned}
$$

سوال ۴

الف)

$$\Omega_0 = \frac{3\pi}{7} \Rightarrow T' = \frac{2\pi}{\frac{3\pi}{7}} = \frac{14}{3}$$

اگر سیگنال پیوسته بود، دوره تناوب آن برابر T' می‌شد. اما چون سیگنال گسسته است، دوره تناوب آن باید صحیح باشد. در نتیجه باید کوچکترین مضرب صحیح از T' را به عنوان دوره تناوب اصلی انتخاب کنیم. واضح است که این مضرب برابر $T_0 = 14$ است.

ب)

برای سیگنال $\cos(\frac{2\pi}{3}t)$ داریم:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{3}} = 3$$

برای سیگنال $2\sin(\frac{16\pi}{3}t)$ داریم:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\frac{16\pi}{3}} = \frac{3}{8}$$

در نتیجه برای جمع این دو سیگنال، می‌توان گفت $T_0 = 3$. زیرا به نوعی ک.م.م دو عدد 3 و $\frac{3}{8}$ برابر 3 است.

همچنین برای سیگنال $\sin(\pi t)$ داریم:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\pi} = 2$$

در نتیجه برای سیگنال $z(t)$، تناوب اصلی برابر ک.م.م دو سیگنال قبلی است:

$$z(t) : T_0 = lcm(2,3) = 6$$

ج)

سیگنال متناوب نیست.

د)

برای سیگنال $e^{-j\frac{\pi}{3}n}$ داریم:

$$T' = \frac{2\pi}{\left|-\frac{\pi}{3}\right|} = 6$$

برای سیگنال $e^{j\frac{4\pi}{3}n}$ داریم:

$$T' = \frac{2\pi}{\frac{4\pi}{3}} = \frac{3}{2}$$

اگر سیگنال‌های بالا گسسته بودند، تناوب اصلی آن‌ها برابر مقدارهای بالا می‌شد. اما چون سیگنال گسسته است، باید کوچکترین مضرب مشترک صحیح بین این دو را به عنوان دوره اصلی $x[n]$ در نظر بگیریم. واضح است که این مقدار برابر $T_0 = 6$ است.

سوال ۵

طبق تعریف داریم:

$$u(t^2-1) = \begin{cases} 1 & t^2-1>0 \\ 0 & t^2-1<0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow u(t^2-1) = \begin{cases} 1 & t>1 \vee t<-1 \\ 0 & -1<t<1 \end{cases}$$

$$r(t-1) = \begin{cases} t-1 & t-1 \geq 0 \\ 0 & t-1<0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow r(t-1) = \begin{cases} t-1 & t \geq 1 \\ 0 & t<1 \end{cases}$$

$$r(-t-1) = \begin{cases} -t-1 & -t-1 \geq 0 \\ 0 & -t-1<0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow r(-t-1) = \begin{cases} -t-1 & t \leq -1 \\ 0 & t>-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow g(t) = u(t^2-1) + r(t-1) + r(-t-1)$$
$$= \begin{cases} -t & t<-1 \\ 0 & -1 \leq t \leq 1 \\ t & t>1 \end{cases}$$

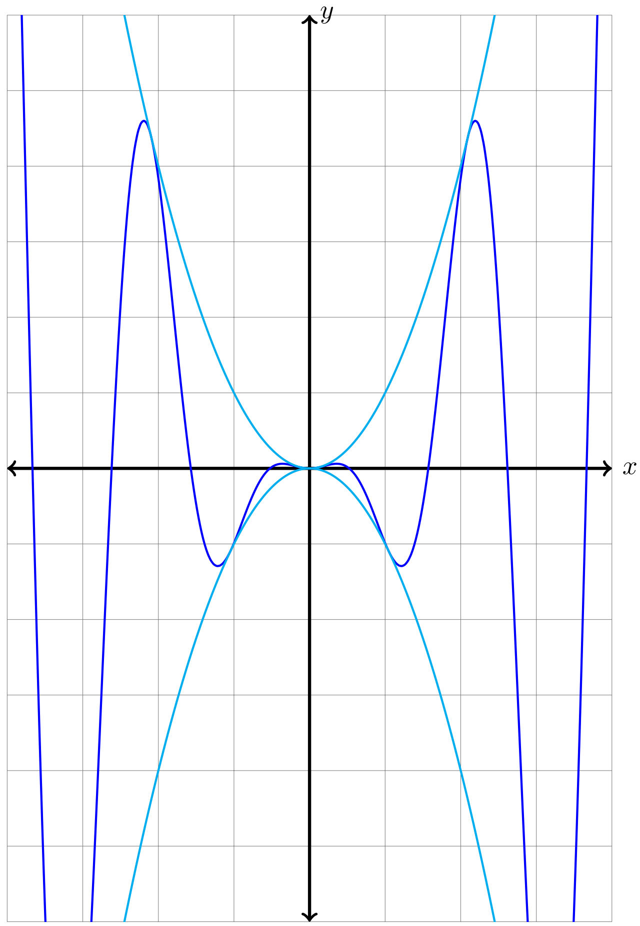
سوال ۶

الف)

بنا به رابطه اویلر:

$$Re\{x(t)\} = t^2 \cos(3t)$$

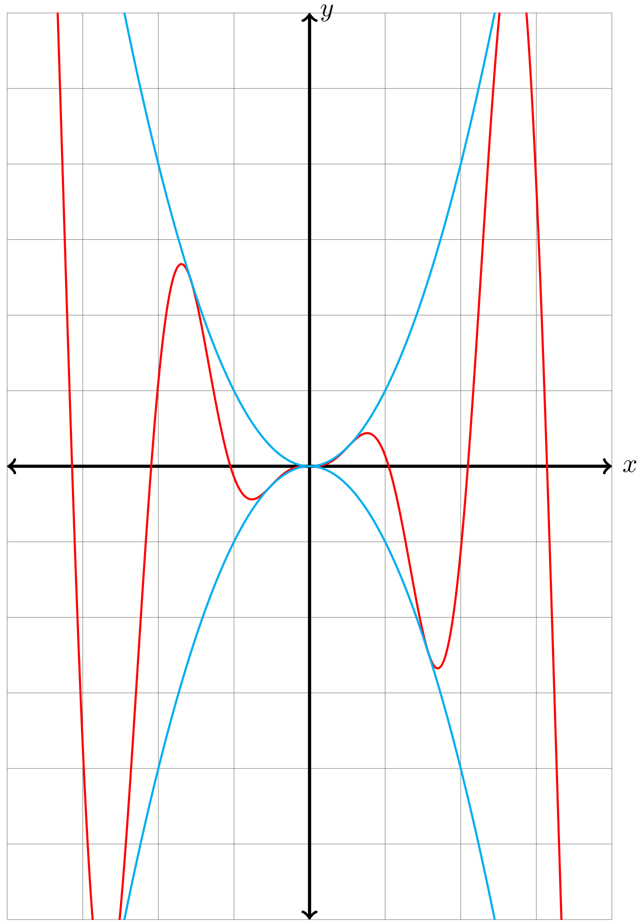
و نمودار آن، همان نمودار $\cos(3t)$ است که دامنه آن به صورت سهموی از دو طرف رشد می‌کند.



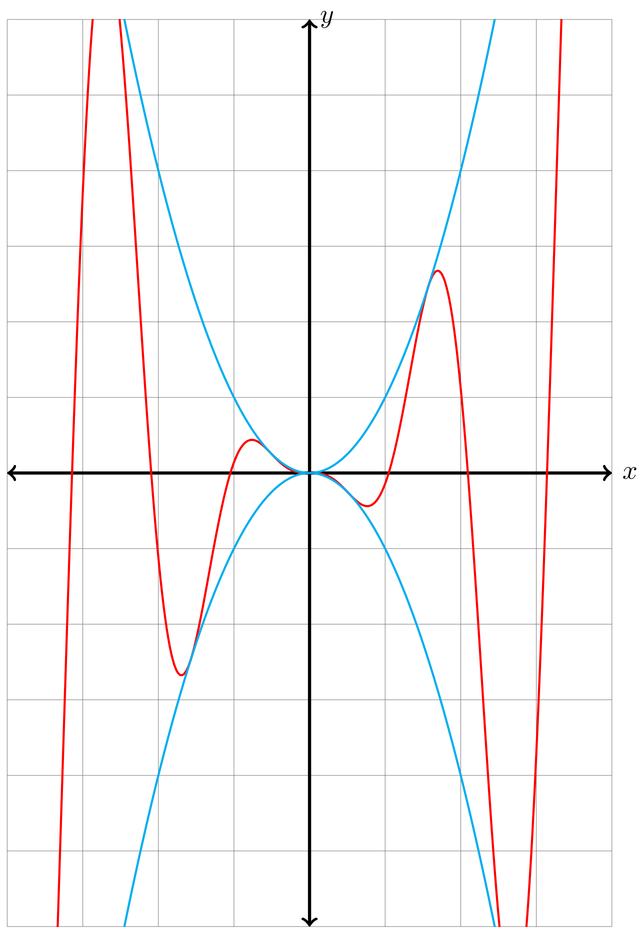
برای قسمت موهومی:

$$Im\{x(t)\} = j(t^2 \sin(3t))$$

و مشابه نمودار قبلی، نمودار آن همان نمودار $\sin(3t)$ است که دامنه آن به صورت سهموی از دو طرف رشد می‌کند.



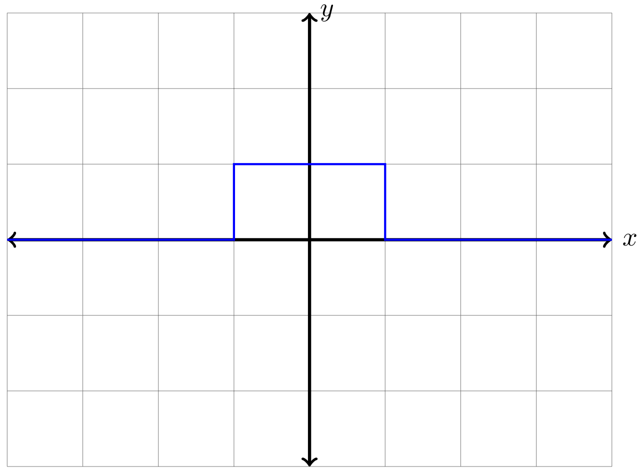
برای نمودار شکل مزدوج نیز کافیست نمودار قسمت موهومی را نسبت به محور x قرینه کنیم (نمودار قسمت حقیقی تفاوتی نخواهد کرد):



ب)

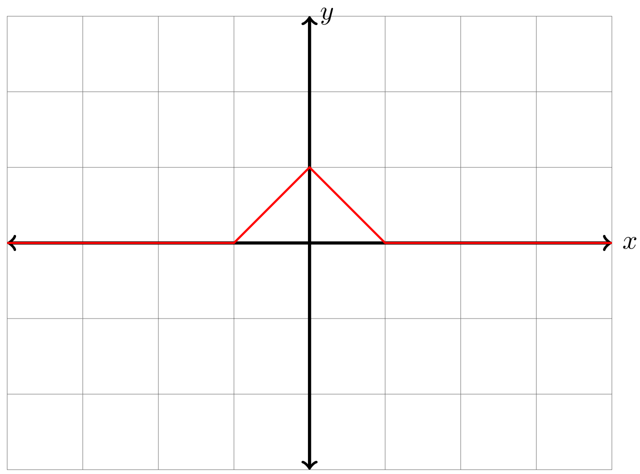
برای قسمت حقیقی $y(t)$:

$$Re\{y(t)\} = \Pi(\frac{t}{2}) = \begin{cases} 1 & |t| < 1 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$



برای قسمت موهومی:

$$Im\{y(t)\} = \Lambda(t) = \begin{cases} 1 - |t| & |t| < 1 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

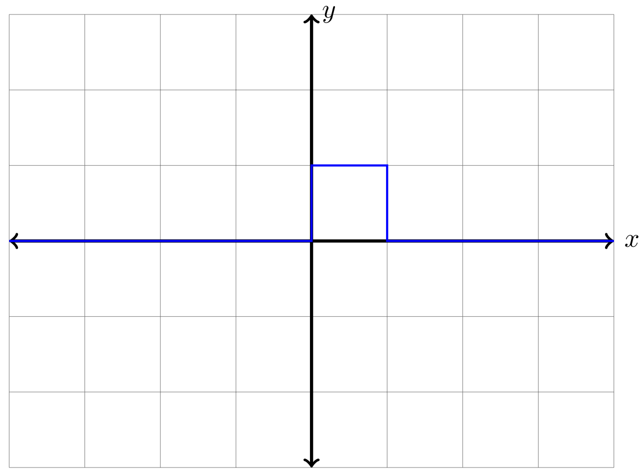


ج)

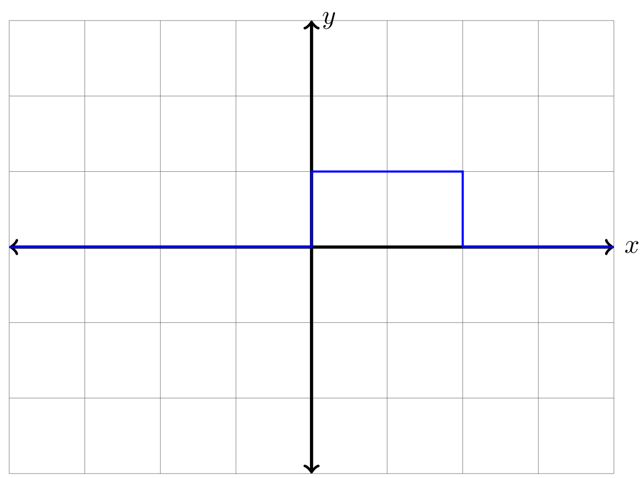
داریم:

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1 & |t| < \frac{1}{2} \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

بنابراین برای رسم نمودار سیگنال $z(t) = \Pi(\frac{t}{2} - \frac{1}{2})$ کافیست نمودار $\Pi(t)$ را $\frac{1}{2}$ واحد به راست جابه‌جا کرده:



و x هر نقطه را دو برابر کنیم:



با توجه به این که سیگنال حقیقی‌مقدار است، قسمت موهومی سیگنال ثابت صفر است (یا به عبارتی $Im\{z(t)\} = 0$). بنابراین شکل قسمت موهومی سیگنال z و z^* یکسان خواهد بود.