آمار و احتمال مهندسی - دکتر صفائی

امیرحسین منصوری - ۹۹۲۴۳۰۶۹ - تمرین سری ۷

سوال ۱ - الف)
نااریب - سازگار - کارآمد(واریانس کوچک) - MSE کمینه

سوال ۱ - ب)
این برآوردگر نااریب است:

$$E[\frac{1}{n}\sum a_i x_i] = \frac{1}{n}\sum E[a_i x_i] = \frac{1}{n}\sum a_i E[x_i] = \frac{1}{n}\sum a_i \mu = \frac{\mu}{n}\sum a_i = \frac{\mu}{n} \times n = \mu$$

این برآوردگر کارآمد است. زیرا:

$$Var(\frac{1}{n}\sum a_i x_i) = \frac{1}{n^2}\sum a_i^2 \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n^2}\sum a_i^2$$

و به ازای هر n ای، $\sum a_i^2 < n^2$ و بنابراین حد این عبارت وقتی $n \to \infty$، به صفر میل می‌کند.

این برآوردگر سازگار است. زیرا بنا بر نامساوی چبیشف $p\{|\hat{\theta} - \theta| > \varepsilon\} < \frac{Var(\hat{\theta})}{\varepsilon^2}$ و اگر $n \to \infty$، واریانس نیز به صفر میل می‌کند و احتمال بالا، به ازای هر $\varepsilon > 0$ به صفر میل می‌کند.

همچنین MSE این برآوردگر برابر است با:

$$MSE = VAR(\hat{\theta}) + (E[\hat{\theta}] - \theta)^2 = 0 + 0 = 0$$

که کاملا مطلوب است.

سوال ۲
خطای برآورد با اطمینان ۹۵٪ برابر است با:

$$E = Z_{1-\frac{0.05}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \times \frac{4000}{\sqrt{n}} < 1000$$
$$\Rightarrow \sqrt{n} > \frac{1.96\times4000}{1000}$$
$$\Rightarrow n \geq 62$$

سوال ۳

$$\bar{x} = 14.08,\ n = 8$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n-1}} = 1.92$$
$$\Rightarrow CI = (\bar{x} - Z_{1-\frac{0.05}{2}}\frac{s}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + Z_{1-\frac{0.05}{2}}\frac{s}{\sqrt{n}}) = (14.08 - 1.96 \times \frac{1.92}{\sqrt{8}}, 14.08 + 1.96 \times \frac{1.92}{\sqrt{8}})$$
$$= (12.75,\ 15.41)$$

سوال ۴

$$p\{x < c\} = p\{z < \frac{c-\bar{x}}{\frac{2}{5}}\} = 0.9$$

$$\Rightarrow \frac{c-\bar{x}}{\frac{2}{5}} = \Phi^{-1}(0.9) = 1.28 \Rightarrow c = 0.51 + \bar{x}$$

سوال ۵

فرض می‌کنیم H_0 درست است. p-value را حساب می‌کنیم:

$$pvalue = 2 * (1 - p\{z < \frac{788-800}{\frac{40}{\sqrt{30}}}\}) = 2 * (1 - \Phi^{-1}(1.64)) = 0.1$$

چون $pvalue > 0.05$، بنابراین فرض صفر را نمی‌توان رد کرد.

سوال ۶

هردو این آماره‌ها ناریب هستند. اما برای واریانس این دو داریم:

$$Var(\overline{X_1}) = Var(\frac{X_1}{3}) + Var(\frac{X_2}{3}) + Var(\frac{X_3}{3}) = \frac{1}{9} \times 3 \times 5 = 1.67$$

$$Var(\overline{X_2}) = Var(\frac{X_1}{4}) + Var(\frac{X_2}{2}) + Var(\frac{X_3}{4}) = (\frac{1}{16} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16}) \times 5 = 1.875$$

آماره اول واریانس کمتری می‌دهد. بنابراین MSE بهتری نیز دارد و آماره بهتری است.

سوال ۷

برای خطای نوع اول، با فرض این که H_0 درست است داریم:

$$\alpha = p\{z > \frac{11-10}{\frac{2}{5}}\} = 1 - \Phi^{-1}(2.5) = 1 - 0.9938 = 0.0062$$

برای خطای نوع دوم، با فرض این که H_1 درست است داریم:

$$\beta = p\{z < \frac{11-12}{\frac{2}{5}}\} = \Phi^{-1}(-2.5) = 1 - 0.9938 = 0.0062$$

سوال ۸

تنها حالت بحرانی، وقتی است که تمام مقادیر نمونه ۸ باشند. با فرض درست بودن H_0 داریم:

$$p(c) = \alpha = C(8, 8) \times (\frac{1}{2})^8 = \frac{1}{64} = 0.016$$

سوال ۹ - الف)

$$2 \times Z_{1-\frac{0.05}{2}}\frac{s}{\sqrt{n}} = 98$$

$$\Rightarrow 3.92 \times \frac{200}{\sqrt{n}} = 98$$

$$\Rightarrow n = 2\sqrt{2}$$

سوال ۹ - ب)

برآورد واریانس جامعه اول برابر است با:

$$s_1^2 = \frac{\sum(x_i-\overline{x})^2}{n-1} = 0.155$$

برآورد واریانس جامعه دوم برابر است با:

$$s_2^2 = 0.12$$

حال جامعه دوم را با اولی مقایسه می‌کنیم. فرض صفر را در نظر می‌گیریم:

$$H_0\colon\ \sigma_2^2 = 0.155$$

$$H_A\colon\ \sigma_2^2 < 0.155$$

$$\Rightarrow T = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} = \frac{6\times0.12}{0.155} = 4.64$$

$$\chi^2_{6,\,0.99} = 16.81$$

چون $T < \chi^2_{6,\,0.99}$، در نتیجه می‌توان H_0 را رد کرد و می‌توان ادعا کرد که واریانس (و در نتیجه انحراف معیار) جامعه اول از دوم بزرگ‌تر است.