آمار و احتمال مهندسی - دکتر صفائی

امیرحسین منصوری - ۹۹۲۴۳۰۶۹ - تمرین سری ۲

سوال ۱

میانگین داده‌ها برابر است با:

$$\bar{x} = \frac{10+38+38+...+92+98}{40} = 59.775$$

همچنین برای چارک اول داریم:

$$(n+1)p = 41 \times 0.25 = 10.25 \Rightarrow k = 10,\ r = 0.25$$

$$Q_{0.25} = (1-r)x_k + r.x_{k+1} = (1-0.25)(45) + (0.25)(47) = 45.5$$

برای چارک دوم داریم:

$$(n+1)p = 41 \times 0.5 = 20.5 \Rightarrow k = 20,\ r = 0.5$$

$$Q_{0.25} = (1-r)x_k + r.x_{k+1} = (1-0.5)(61) + (0.5)(61) = 61$$

برای چارک سوم داریم:

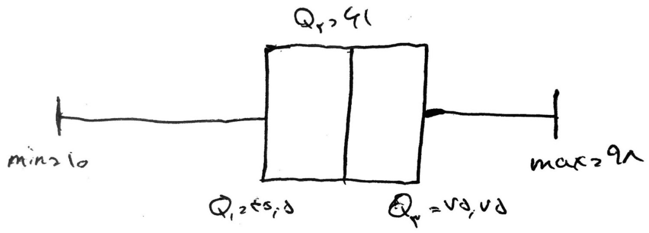
$$(n+1)p = 41 \times 0.75 = 30.75 \Rightarrow k = 30,\ r = 0.75$$

$$Q_{0.25} = (1-r)x_k + r.x_{k+1} = (1-0.75)(75) + (0.75)(76) = 75.75$$

همچنین برای انحراف معیار داده‌ها داریم:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}} = 18.34$$

در نتیجه نمودار نهایی به شکل زیر خواهد بود:



همچنین می‌دانیم داده‌های خارج از بازه $(\bar{x} - 3\sigma,\ \bar{x} + 3\sigma)$ ، داده‌های پرت هستند. این بازه برای داده‌های بالا، بازه $(4.755,\ 114.795)$ است. بنابراین داده پرتی وجود ندارد.

سوال ۲ - الف)

می‌دانیم اگر $h(x) = kx$ ، آنگاه $h^{-1}(x) = \frac{1}{k}x$. داریم:

$$M(a,b) = \frac{1}{k}(\frac{k(a+b)}{2}) = \frac{a+b}{2}$$

که همان میانگین حسابی a و b است.

سوال ۲ - ب)

می‌دانیم برای اعداد حقیقی مثبت اگر $h(x) = ln(x)$ ، آنگاه $h^{-1}(x) = e^x$. داریم:

$$M(a,b) = e^{\frac{ln(a)+ln(b)}{2}} = \sqrt{e^{ln(ab)}} = \sqrt{ab}$$

که همان میانگین هندسی a و b است.

سوال ۲ - ج)

می‌دانیم برای اعداد حقیقی مثبت اگر $h(x) = x^2$ ، آنگاه $h^{-1}(x) = \sqrt{x}$. داریم:

$$M(a,b) = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

که همان میانگین درجه دوم a و b است.

سوال ۲ - د)

می‌دانیم برای اعداد حقیقی مثبت اگر $h(x) = \frac{1}{x}$، آنگاه $h^{-1}(x) = \frac{1}{x}$. داریم:

$$M(a,b) = \frac{1}{\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}} = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$$

که همان میانگین هارمونیک a و b است.

سوال ۳

مراکز دسته به ترتیب برابر هستند با 61, 64, 67, 70, و 73.

$$\overline{x} = \frac{(5\times61)+(18\times64)+(42\times67)+(27\times70)+(8\times73)}{5+18+42+27+8} = 67.45$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{n} = \frac{5(61-67.45)^2+18(64-67.45)^2+42(67-67.45)^2+27(70-67.45)^2+8(73-67.45)^2}{5+18+42+27+8} = 8.5275$$

$$STD = 2.92$$

با توجه به جدول فراوانی تجمعی:

حدود طبقات	فراوانی	فراوانی تجمعی
60-62	5	5
63-65	18	23
66-68	42	65
69-71	27	92
72-74	8	100

بازه میانه همان بازه 66-68 است. بنابراین میانه برابر است با:

$$Q_{0.5} = L_{0.5} + \frac{0.5n-F_{0.5}}{f_{0.5}} \times w = 66 + \frac{50-23}{42} \times 2 = 67.29$$

و درنهایت ضریب چولگی پیرسن برابر است با:

$$b_2 = \frac{3(\overline{x}-m)}{STD} = \frac{3(67.45-67.29)}{2.92} = 0.16$$

سوال ۴

برای به دست آوردن متوسط زمان اجرای برنامه توسط این ۳ کامپیوتر، از میانگین هارمونیک استفاده می‌کنیم:

$$\overline{x_H} = \frac{3}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} = 3$$

هر کامپیوتر به طور میانگین یک برنامه را در ۳ دقیقه اجرا می‌کند. بنابراین ۳ کامپیوتر اگر به طور هم‌زمان کار کنند، یک برنامه را در **۱ دقیقه** اجرا می‌کنند.

سوال ۵

برای داده‌های با چولگی خفیف داریم:

$$Mean - Mode = 3(Mean - Median)$$
$$\Rightarrow 52.4 - Mode = 3(52.4 - 51.8)$$
$$\Rightarrow Mode = 50.6$$

سوال ۶

میانگین هندسی ۳ سیستم را حساب می‌کنیم:

$$\overline{x_A} = \sqrt[5]{x_V x_W x_X x_Y x_Z} = 346.57$$
$$\overline{x_B} = \sqrt[5]{x_V x_W x_X x_Y x_Z} = 579.94$$
$$\overline{x_C} = \sqrt[5]{x_V x_W x_X x_Y x_Z} = 840.72$$

حال نسبت به B نرمال می‌کنیم:

$$\overline{x_{An}} = \frac{346.57}{579.94} = 0.60$$
$$\overline{x_{Bn}} = 1$$
$$\overline{x_{Cn}} = \frac{840.72}{579.94} = 1.45$$

و حال نسبت به C نرمال می‌کنیم:

$$\overline{x_{An}} = \frac{346.57}{840.72} = 0.41$$
$$\overline{x_{Bn}} = \frac{579.94}{840.72} = 0.69$$
$$\overline{x_{Cn}} = 1$$

مشخص است که ترتیب این ۳ میانگین، جدا از این که به کدام سیستم نرمال کرده‌ایم ثابت مانده است.

سوال ۷

با توجه به فاصله زمانی هر اندازه گیری، به هر مشاهده وزن می‌دهیم و از میانگین هندسی وزن‌دار استفاده می‌کنیم:

$$\bar{x} = \sqrt[104]{45 \times 45 \times 45 \times 45 \times 20^{100}} = 20.63$$

سوال ۸

$$\bar{x} = 15 \Rightarrow x_1 + x_2 + \dots + x_{20} = 20 \times 15 = 300$$

میانگین جدید برابر است با:

$$\overline{x'} = \frac{x_1+x_2+\dots+x_{20}+(4+8+\dots+80)}{20} = \frac{300+840}{20} = 57$$

سوال ۹ - الف)

ابتدا ثابت می‌کنیم

$$GM \le AM$$

(GM همان میانگین هندسی و AM همان میانگین حسابی است)

می‌دانیم $ln(x) \le x - 1$. اگر داده‌ها را x_i بنامیم، داریم:

$$ln(\frac{x_i}{AM}) \le \frac{x_i}{AM} - 1 \qquad (1 \le i \le n)$$
$$\Rightarrow ln(\frac{x_1}{AM}) + ln(\frac{x_2}{AM}) + \dots + ln(\frac{x_n}{AM}) \le \frac{x_1+\dots+x_n}{AM} - n = 0$$
$$\Rightarrow ln(\frac{x_1x_2\dots x_n}{AM^n}) \le 0$$
$$\Rightarrow \frac{x_1x_2\dots x_n}{AM^n} \le 1$$
$$\Rightarrow x_1x_2\dots x_n \le AM^n$$
$$\Rightarrow \sqrt[n]{x_1x_2\dots x_n} \le AM$$

بنابراین میانگین هندسی کوچکتر مساوی میانگین حسابی است. حال ثابت می‌کنیم:

$$HM \le GM$$

اگر داده‌ها را x_i بنامیم، اثبات قبلی را برای داده‌های $\frac{1}{x_i}$ به کار می‌بریم:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{x_1x_2\dots x_n}} \le \frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\dots\frac{1}{x_n}}{n}$$

با معکوس کردن دو طرف نامساوی داریم:

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots\frac{1}{x_n}}$$

که نشان می‌دهد برای داده‌های x_i ، $HM \leq GM$.
پس حکم سوال درست است.

سوال ۹ - ب)
حالت تساوی زمانی برقرار است که همه داده‌ها برابر باشند.

سوال ۱۰
طبق رابطه چولگی پیرسن داریم:

$$b_2 = \frac{3(\bar{x} - median)}{std} = \frac{3(17.2-15)}{5} = 1.32$$

با توجه به مثبت بودن مقدار چولگی، چولگی داده‌ها به راست است.

سوال ۱۱
با توجه به جدول، رده ۳/۲-۲/۸ رده نما است. با توجه به رابطه نما داریم:

$$mode = L_m + \frac{d_1}{d_1+d_2} \times w = 2.8 + (\frac{(9-5)}{(9-5)+(9-4)} \times 0.4) = 2.98$$

با توجه به جدول، رده میانه، اولین رده‌ای است که فراوانی تجمعی آن از $\frac{n}{2} = 15$ بیشتر باشد. پس رده ۲/۸ تا ۳/۲ رده میانه است. با توجه به رابطه میانه داریم:

$$median = Q_{0.5} = L_p + (\frac{p \times n - F_p}{f_p} \times w) = 2.8 + (\frac{0.5 \times 30 - 10}{9} \times 0.4) = 3.02$$

با توجه به جدول، رده چارک اول اولین رده‌ای است که فراوانی تجمعی آن از $\frac{n}{4} = 7.5$ بیشتر باشد. پس رده ۲/۴ تا ۲/۸ رده چارک اول است. با توجه به رابطه چندک داریم:

$$Q_{0.25} = L_p + (\frac{p \times n - F_p}{f_p} \times w) = 2.4 + (\frac{0.25 \times 30 - 5}{5} \times 0.4) = 2.6$$

به همین ترتیب، رده چارک سوم برابر ۳/۲ تا ۳/۶ است:

$$Q_{0.75} = L_p + (\frac{p \times n - F_p}{f_p} \times w) = 3.2 + (\frac{0.75 \times 30 - 19}{4} \times 0.4) = 3.55$$