سیگنال‌ها و سیستم‌ها - دکتر سلیمی‌بدر

امیرحسین منصوری - ۹۹۲۴۳۰۶۹

تمرین سری ۵

سوال ۱

$$
\begin{aligned}
x(t) &= 2 \times \frac{e^{j(4)t} + e^{-j(4)t}}{2} + \frac{e^{j(2)t} - e^{-j(2)t}}{2j} \\
\Rightarrow y(t) &= H(4)e^{j(4)t} + H(-4)e^{j(-4)t} + \frac{1}{2j}H(2)e^{j(2)t} + \frac{1}{2j}H(-2)e^{j(-2)t} \\
&= e^{-6j}e^{2jt} - e^{6j}e^{-2jt} \\
&= 2j \times \frac{e^{(2t-6)j} - e^{-(2t-6)j}}{2j} \\
&= 2j\sin(2t-6)
\end{aligned}
$$

سوال ۲

$$
\begin{aligned}
\xrightarrow{I.F.T} y(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega)e^{j\omega t}d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} e^{j\omega t}d\omega \\
&= \frac{2\sin(t)\cos(t)}{\pi t} = x(t)\cos(t) \\
\Rightarrow x(t) &= \frac{2\sin(t)}{\pi t} = \frac{2}{\pi}sinc(\frac{t}{\pi})
\end{aligned}
$$

سوال ۳

معکوس پذیری از آنجایی که به عنوان مثال $H(\frac{\pi}{2}) = 0$، بنابراین $\frac{1}{H(\omega)}$ که پاسخ فرکانسی سیستم معکوس است، در بعضی نقاط تعریف نشده است. بنابراین سیستم معکوس‌پذیر نیست.

پایداری برای پایداری باید شرط زیر به ازای یک L_1 برقرار باشد.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} h(t)dt &\leq L_1\\ \Rightarrow H(0) &\leq L_1\\ \Rightarrow 1 &\leq L_1\end{aligned}$$

با انتخاب هر $L_1 \geq 1$ شرط بالا برقرار می‌شود. بنابراین سیستم پایدار است.

سوال ۴

سیگنال پالس مربعی با عرض w را با $y_w(t)$ نشان می‌دهیم. داریم

$$\begin{aligned}\int_{0}^{\infty} \left(\frac{\sin t}{\pi t}\right)^2 dt &= \frac{1}{2\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right|^2 dt\\ &= \frac{1}{2\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\, dt\\ &= \frac{1}{4\pi^3}\int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2\, d\omega\end{aligned}$$

برای محاسبه $X(\omega)$ داریم

$$\begin{aligned}x(t) &= \pi \times \frac{2}{2\pi} sinc(\frac{2}{2\pi}t)\\ \Rightarrow X(\omega) &= \pi y_2(\omega)\\ \Rightarrow \int_{0}^{\infty} \left(\frac{\sin t}{\pi t}\right)^2 dt &= \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |y_2(\omega)|^2\, d\omega\\ &= \frac{1}{4\pi}\int_{-1}^{+1} d\omega\\ &= \frac{1}{2\pi}\end{aligned}$$

سوال ۵

با استفاده از خاصیت کانوولوشن تبدیل فوریه داریم

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= X(\omega)H(\omega) \\ \Rightarrow Y(0) &= X(0)H(0) \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt\right)\left(\frac{1}{2+j(0)}\right) \\ &= (6)\left(\frac{1}{2}\right) = 3 \end{aligned}$$

سوال ۶

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\Omega n} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} 3^{-2n-2}e^{-j\Omega n} \\ &= \frac{1}{9}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{e^{-j\Omega}}{9}\right)^n \\ &= \frac{1}{9}\times\frac{1}{1-\frac{e^{-j\Omega}}{9}} \\ &= \frac{1}{9-e^{-j\Omega}} \end{aligned}$$

انتگرال بالا به سادگی از روی شکل نمودار به دست می‌آید.

سوال ۸

تعریف می‌کنیم $z[n] = 1$. داریم

$$Z(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\Omega - 2\pi k)$$

می‌دانیم $x[n] = z_{(8)}[n]$. بنابراین

$$X(\Omega) = Z(8\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\Omega - \frac{2\pi}{8}k)$$

از خاصیت کانوولوشن تبدیل فوریه می‌دانیم

$$Y(\Omega) = X(\Omega)H(\Omega) = 2\pi\left(\delta(\Omega + \frac{\pi}{4} - 2\pi k) + \delta(\Omega - 2\pi k) + \delta(\Omega - \frac{\pi}{4} - 2\pi k)\right)$$

درواقع $H(\Omega)$ یک فیلتر پایین‌گذر است و در هر دوره تناوب، تنها ۳ ضربه را از $X(\Omega)$ نگه می‌دارد.

در نهایت داریم

$$\begin{aligned} y[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Y(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega \\ &= \frac{1}{2\pi} (2\pi + 2\pi + 2\pi) \\ &= 3 \end{aligned}$$