



ترم پاییز ۱۴۰۰

سوال اول

حد بالا (big-O) پیچیدگی زمانی توابع بازگشتی زیر را محاسبه کنید. فرض کنید $T(n)$ برای n های کوچک عددی ثابت باشد. (۳۵ نمره)

- i) $T(n) = \sqrt{n}T\left(\frac{n}{2}\right) + \log(n)$
- ii) $T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + T\left(\frac{n}{4}\right) + T\left(\frac{n}{8}\right) + 1$
- iii) $T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + \frac{n}{\log(n)}$
- iv) $T(n) = T(n-1) + \binom{n}{n-1}$

.

.

.

$$T(n-i) = T(n-i-1) + \binom{n}{n-i}$$

.

.

$$T(1) = 1, T(0) = 1$$

- v) $T(n, m) = T(n-1, m) + T(n, m-1) + 1$
- vi) $T(n) = \sqrt{n}T(\sqrt{n}) + n \cdot \log(n)$
- vii) $T(n) = 2T(\lfloor \sqrt{n} \rfloor) + \log(n)$

سوال دوم

درخت بازگشت را رسم کنید و حد بالا (big-O) پیچیدگی زمانی را برای هرکدام از روابط بازگشتی به کمک آن پیدا کنید. برای همه موارد فرض کنید n توانی از عددی است که $T(n)$ به آن تقسیم می شود و $T(1)$ برابر عدد ثابت است. (۱۵ نمره)

$$T(n) = T\left(\frac{n}{4}\right) + T\left(\frac{3n}{4}\right) + n$$

$$T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n \log(n)$$

$$T(n) = 3T\left(\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor\right) + n^2$$



ترم پاییز ۱۴۰۰

سوال سوم

یک زیر برنامه ی بازگشتی برای یافتن بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد صحیح به روش اقلیدس نوشته و پس از به دست آوردن رابطه ی بازگشتی زیربرنامه، مرتبه ی آن را محاسبه کنید. (۱۵ نمره)

سوال چهارم

مسئله ی برج های هانوی محدود شده : فرض کنید در مسئله ی برج های هانوی، تنها بتوان حلقه ها را بین میله های مجاور حرکت داد. به عبارت دیگر، حلقه ها نمی توانند مستقیماً بین میله های مبدأ و مقصد جابه جا شوند. یک زیر برنامه ی بازگشتی برای حل این مسئله نوشته و مرتبه ی این زیر برنامه را حساب کنید. (۱۰ نمره)

سوال پنجم

رابطه های بازگشتی زیر را در صورت امکان، با قضیه مستر حساب کنید و در غیر این صورت دلیل خود را بنویسید. (۳۰ نمره)

- a) $T(n) = 27T\left(\frac{n}{3}\right) + n^3 \log^2(n)$
- b) $T(n) = 2^n T\left(\frac{n}{2}\right) + n^n$
- c) $T(n) = 3T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2$
- d) $T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + n(2 - \cos n)$
- e) $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2$
- f) $T(n) = 16T\left(\frac{n}{4}\right) - n \log(n)$

سوال ششم

یک حد پایین برای رابطه زیر با استفاده از روش جانشینی به دست آورید. حدس زده می شود که جواب به صورت $\Omega(\log n)$ باشد. (۱۵ نمره)

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + 1$$