طراحی الگوریتم - دکتر قوامی‌زاده

امیرحسین منصوری - ۹۹۲۴۳۰۶۹

تمرین سری دوم

سوال ۱

الف)

می‌دانیم وجود دارد $c_1, c_2, c_3, c_4, n_0, n_1$ به قسمی که

$$\forall n \geq n_0, c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$$
$$\forall n \geq n_1, c_3 h(n) \leq g(n) \leq c_4 h(n)$$

نامساوی‌های بالا به ازای همه

$$n \geq n_2 = \max(n_0, n_1)$$

نیز درست است. داریم

$$f(n) \leq c_2 g(n) \leq c_2 c_4 h(n) \; (\forall n \geq n_2)$$
$$f(n) \geq c_1 g(n) \geq c_1 c_3 h(n) \; (\forall n \geq n_2)$$
$$\Rightarrow c_1 c_3 h(n) \leq f(n) \leq c_2 c_4 h(n) \; (\forall n \geq n_2)$$

تعریف می‌کنیم $c_5 = c_1 c_3, c_6 = c_2 c_4$. بنابراین

$$c_5 h(n) \leq f(n) \leq c_6 h(n) \; (\forall n \geq n_2)$$

و بنابراین $f(n) \in \Theta(h(n))$.

ب)

طرف اول را اثبات می‌کنیم. می‌دانیم وجود دارد c_1, c_2, n_0 به قسمی که

$$c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n) \; (\forall n \geq n_0)$$
$$c_1, c_2, n_0 > 0$$

داریم

$$f(n) \leq c_2 g(n) \Rightarrow g(n) \geq \frac{1}{c_2} f(n)$$
$$f(n) \geq c_1 g(n) \Rightarrow g(n) \leq \frac{1}{c_1} f(n)$$

بنابراین

$$\frac{1}{c_2} f(n) \leq g(n) \leq \frac{1}{c_1} f(n) \; (\forall n \geq n_0)$$

پس $g(n) \in \Theta(n)$. اثبات طرف دیگر نیز کاملا مشابه اثبات بالا است.

ج)

به ازای $f(n) = \frac{1}{n}$ جمله نادرست می‌شود. زیرا اگر $\frac{1}{n} \in O(\frac{1}{n^2})$ آنگاه به ازای یک c_1, n_0 باید داشته باشیم

$$\frac{1}{n} \leq \frac{c_1}{n^2}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} n &\geq \frac{1}{c_1} n^2 \\ \Rightarrow 1 &\geq \frac{n}{c_1} \\ \Rightarrow n &\leq c_1 \end{aligned}$$

بنابراین نمی‌توان n_0ای پیدا کرد که به ازای هر $n \geq n_0$ نامساوی بالا برقرار باشد. پس $\frac{1}{n} \notin O(\frac{1}{n^2})$ و جمله در حالت کلی درست نیست.

د)

به ازای $f(n) = 2n$ و $g(n) = n$ جمله نادرست می‌شود. مشابه سوال قبل، اگر $3^{2n} \in O(3^n)$ آنگاه باید داشته باشیم

$$\begin{aligned} 3^{2n} &\leq c_1 3^n \\ \Rightarrow 3^n &\leq c_1 \\ \Rightarrow n &\leq \log_3 c_1 \end{aligned}$$

بنابراین نمی‌توان n_0ای پیدا کرد که به ازای هر $n \geq n_0$ نامساوی بالا برقرار باشد. پس نتیجه می‌گیریم $3^{2n} \notin O(3^n)$ و جمله در حالت کلی درست نیست.

سوال ۲

الف)

فرض می‌کنیم cای وجود دارد که

$$\lceil \lg n \rceil ! \in O(n^c)$$

در این صورت باید k و n_0ای وجود داشته باشد که

$$\lceil \lg n \rceil ! \leq k n^c \ (\forall n > n_0)$$

و بنابراین

$$\lg(\lceil \lg n \rceil !) \leq ck \lg n$$

بنا به تقریب استرلینگ می‌توان نشان داد

$$\begin{aligned} \lg(n!) &\approx \lg\left(\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right) \\ &= \lg\left(\sqrt{2\pi n}\right) + \lg\left(\frac{n}{e}\right)^n \\ &= \lg\sqrt{2\pi} + \lg\sqrt{n} + n\lg\left(\frac{n}{e}\right) \\ &= \lg\sqrt{2\pi} + \frac{1}{2}\lg n + n\lg n - n\lg e \\ &\in \Theta(n \lg n) \end{aligned}$$

به طور مشابه می‌توان نتیجه گرفت

$$\lg(\lceil \lg n \rceil !) \in \Theta(\lceil \lg n \rceil \lg \lceil \lg n \rceil)$$

چون به ازای $n \geq 2$ ، $n \leq [n] \leq \frac{1}{2}n$ بنابراین $[n] \in \Theta(n)$ و می‌توان از علامت کف صرف نظر کرد:

$$\lg([\lg n]!) \in \Theta(\lg n \lg\lg n)$$

چون به ازای $n > 4$ داریم $\lg n \lg\lg n > \lg n$ بنابراین

$$\lg([\lg n]!) \in \omega(\lg n)$$

و به عبارتی، پیچیدگی زمانی بالاتر از $\lg n$ داریم. پس نامساوی اولیه نمی‌تواند به ازای هیچ c, k, n_0ای درست باشد.

ب)

مشابه قسمت قبل

$$\begin{aligned}
\lg([\lg\lg n]!) &\in \Theta \lg([\lg\lg n] \lg[\lg\lg n]) \\
&\in \Theta(\lg\lg n \lg\lg\lg n) \\
&\in o(\lg\lg n \lg\lg n) \\
&\in o(\lg^2 \lg n)
\end{aligned}$$

لگاریتم (توانی) یک چیز، از خود آن چیز کندتر رشد می‌کند. پس

$$\lg([\lg\lg n]!) \in o(\lg^2 \lg n) \in O(\lg n)$$

پس می‌توان c, k, n_0ای پیدا کرد که در نامساوی قسمت قبل برقرار باشد. بنابراین $[\lg\lg n]! \in O(n^c)$.

سوال ۳

برای سادگی فرض می‌کنیم

$$\begin{aligned}
T(1) &= 0 \\
f(n) &= n^{\log_b a} \lg_k n
\end{aligned}$$

با جایگزینی داریم

$$\begin{aligned}
T(n) &= aT(\frac{n}{b}) + f(n) \\
&= a(aT(\frac{n}{b^2}) + f(\frac{n}{b})) + f(n) \\
&= a^2T(\frac{n}{b^2}) + a^1 f(\frac{n}{b^1}) + f(n) \\
&= \ldots \\
&= \sum_{i=0}^{\log_b n-1} a^i f(\frac{n}{b^i}) \\
&= \sum_{i=0}^{\log_b n-1} a^i \left(\frac{n}{b^i}\right)^{\log_b a} \left(\lg\left(\frac{n}{b^i}\right)\right)^k \\
&= \sum_{i=0}^{\log_b n-1} a^i \left(\frac{n^{\log_b a}}{b^{i\log_b a}}\right) \left(\lg\left(\frac{n}{b^i}\right)\right)^k \\
&= \sum_{i=0}^{\log_b n-1} a^i \left(\frac{n^{\log_b a}}{a^i}\right) \left(\lg\left(\frac{n}{b^i}\right)\right)^k
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{\log_b n - 1} n^{\log_b a} \left(\lg\left(\frac{n}{b^i}\right)\right)^k \\
&= \sum_{i=0}^{\log_b n - 1} n^{\log_b a} \left(\frac{\log_b\left(\frac{n}{b^i}\right)}{\log_b 2}\right)^k \\
&= n^{\log_b a} \log_b^{-k} 2 \sum_{i=0}^{\log_b n - 1} (\log_b n - i)^k \\
&= n^{\log_b a} \log_b^{-k} 2 \sum_{j=1}^{\log_b n} j^k
\end{aligned}
$$

می‌توان مجموع را با انتگرال تقریب زد.

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{\log_b n} j^k &\approx \int_0^{\log_b n} x^k dx \\
&= \left.\frac{x^{k+1}}{k+1}\right|_0^{\log_b n} \\
&= \frac{\log_b^{k+1} n}{k+1}
\end{aligned}
$$

درنهایت

$$T(n) \in \Theta(n^{\log_b a} \log_b^{k+1} n)$$

در نتیجه برای

$$T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + n^2 \lg^5 n$$

به دست می‌آید

$$T(n) \in \Theta(n^2 \lg^6 n)$$

سوال ۴

با توجه به این که

۱. این تابع بازگشتی است؛

۲. شرط خاتمه آن فقط به مقدار `m` بستگی دارد؛

می‌توان نتیجه گرفت که تابع هزینه `function` فقط تابعی از `m` است و به `n` بستگی ندارد.

همچنین در این تابع، خود تابع صدا زده می‌شود و عملیات دیگر همه پیچیدگی زمانی $O(1)$ دارند. بنابراین تابع هزینه `function` را می‌توان به صورت

$$T(m) = T(\frac{m}{2}) + c$$

نوشت (که در آن c یک ثابت و نشان‌دهندهٔ پیچیدگی زمانی عملیات دیگر است). با استفاده از قضیه‌ای که در سوال ۳ اثبات کردیم، با مقایسه $m^{\log_2 1} \in \Theta(1)$ و $c \in \Theta(1)$، نتیجه می‌گیریم $T(m) \in \Theta(\log m)$.

سوال ۵

الف)

با رسم درخت بازگشت، می‌توان دید که مجموع هزینه ردیف i، برابر $\left(\frac{5}{8}\right)^i n$ است. همچنین ارتفاع درخت حداکثر برابر $[\log_4 n]$ است. داریم

$$\begin{aligned} T(n) &\leq \sum_{i=0}^{[\log_4 n]} \left(\frac{5}{8}\right)^i n \\ &\leq n \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{5}{8}\right)^i \\ &\leq n \left(\frac{1}{1-\frac{5}{8}}\right) \end{aligned}$$

در نتیجه

$$T(n) \in O(n)$$

ب)

داریم

$$T(n) - 4T(n-1) + 5T(n-2) - 2T(n-3) = 0$$

این رابطه بازگشتی همگن خطی است. معادله مشخصه را به صورت زیر نوشته و حل می‌کنیم.

$$\begin{aligned} x^3 - 4x^2 + 5x - 2 &= 0 \\ (x-1)(x^2 - 3x + 2) &= 0 \\ (x-1)(x-1)(x-2) &= 0 \\ \Rightarrow &\begin{cases} x = 1, r_1 = 2 \\ x = 2, r_2 = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

جواب عمومی به صورت زیر خواهد بود.

$$T(n) = c_1 r 1^n + c_2 n 1^n + c_3 2^n$$

با فرض مثبت بودن همه ضرایب، $T(n) \in \Theta(2^n)$.

ج)

تغییر متغیر $S(n) = \frac{T(n)}{n}$ را انجام می‌دهیم. داریم

$$\begin{aligned} S(n) = \frac{T(n)}{n} &= 4\frac{T(\sqrt{n})}{\sqrt{n}} + \lg^2 n \lg^3 \lg n \\ &= 4S(\sqrt{n}) + \lg^2 n \lg^3 \lg n \end{aligned}$$

دوباره تغییر متغیر $P(i) = S(2^i)$ را انجام می‌دهیم. داریم

$$\begin{aligned} P(i) = S(2^i) &= 4S(2^{\frac{i}{2}}) + i^2 \lg^3 i \\ &= 4P(\frac{i}{2}) + i^2 \lg^3 i \end{aligned}$$

با توجه به قضیه‌ای که در سوال ۳ ثابت کردیم، داریم

$$P(i) \in \Theta(i^2 \lg^4 i)$$

چون $n = 2^i$، بنابراین $i = \lg n$ و

$$S(n) = P(\lg n) \in \Theta(\lg^2 n \lg^4 \lg n)$$

همچنین

$$T(n) = nS(n) \in \Theta(n \lg^2 n \lg^4 \lg n)$$