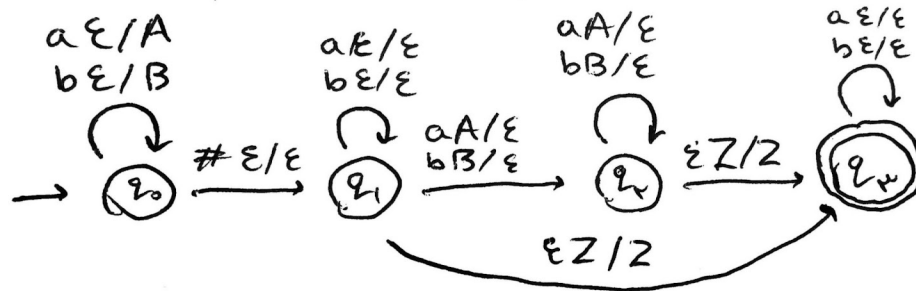


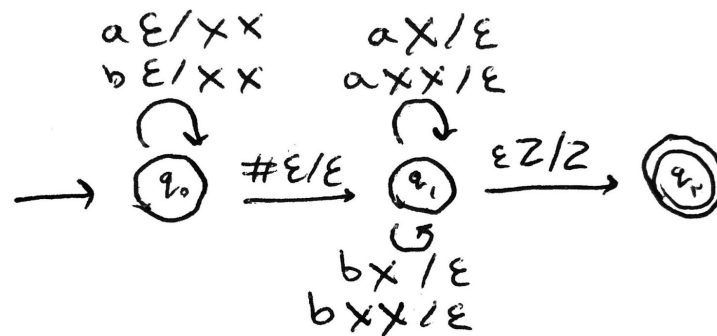
نظریه زبان‌ها و ماشین‌ها - دکتر قوامی‌زاده

امیرحسین منصوری - ۹۹۲۴۳۰۶۹ - تمرین سری ۱۰

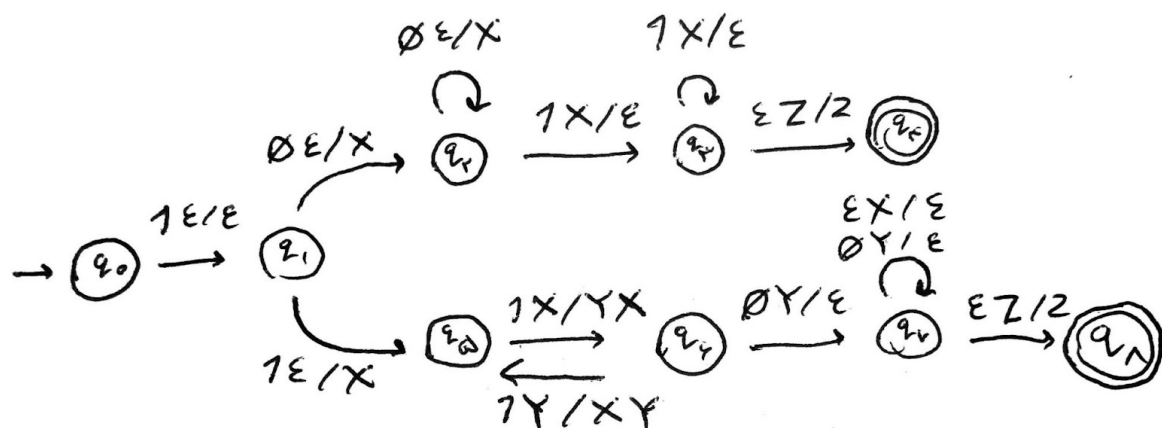
سوال ۱ - L_1



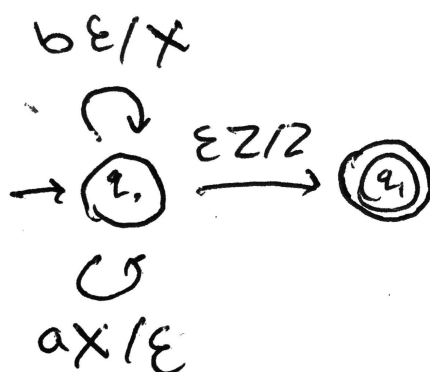
سوال ۱ - L_2



سوال ۱ - L_3



سوال ۱ - L₄

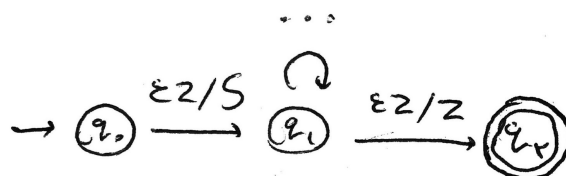


سوال ۲

گرامر مربوط به زبان زیر است:

$$L = \{a, b\}^* - \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$$

PDA این گرامر، سه وضعیتی است:



گذرهای از q_1 به q_1 به صورت زیر هستند:

$\epsilon S / CbCaC$
 $\epsilon S / A$
 $\epsilon S / B$
 aA / Ab
 $\epsilon A / Ab$
 bA / ϵ
 aB / Bb
 aB / B
 aB / ϵ
 $\epsilon C / CC$
 aC / ϵ
 bC / ϵ
 aa / ϵ
 bb / ϵ

سوال ۳ - L₁

بنا به لم تزریق برای زبانهای CF، می‌دانیم عدد k ای وجود دارد که به ازای هر رشته s که $|s| \geq k$ ، شرایط لم تزریق برقرار است. حال عدد اول $p > k$ و رشته $s = a^p$ را در نظر می‌گیریم. می‌دانیم می‌توان رشته را به صورت $s = xuvwy$ نوشت که $|uw| > 0$ و $|uvw| \leq k$. اگر داشته باشیم $u = a^n$ ، $w = a^m$ و $|xvy| = r$ ، آنگاه به ازای $i = r$ ، رشته $s' = xu^i vw^i y = xu^r vw^r y$ باید در زبان باشد. اما داریم:

$$|s'| = |xvy| + r(|u| + |w|) = r + r(n + m) = r(n + m + 1)$$

در نتیجه به ازای هر m و n ، طول s' بر r و $(n + m + 1)$ بخش پذیر است. بنابراین s' در زبان نیست. در نتیجه زبان CF نیست.

سوال ۳ - L_2

بنا به لم تزریق برای زبانهای CF، می‌دانیم عدد k ای وجود دارد که به ازای هر رشته s که $|s| \geq k$ ، شرایط لم تزریق برقرار است. حال رشته $s = 0^k 1^{2k} 0^{2k} 1^k$ را در نظر می‌گیریم. بنا به لم تزریق، می‌توان این رشته را به صورت $s = xuvw y$ نوشت که $|uw| > 0$ و $|uvw| \leq k$ و در این صورت رشته $s' = x u^i v w^i y$ به ازای هر i باید در زبان باشد. حالت‌های مختلف uvw را در نظر می‌گیریم:

- ۱- uvw در تکه 0^k اول رشته باشد: در این صورت با انتخاب $i = 0$ ، رشته به صورت $s' = 0^t 1^{2k} 0^{2k} 1^k$ که $t < k$ در می‌آید. اگر رشته بخواهد به فرم $ww^R w$ باشد، قسمت w اول آن باید t تا 0 و تعدادی 1 داشته باشد. در نتیجه ادامه رشته (یعنی قسمت $w^R w$) باید دقیقاً $2t < 2k$ کاراکتر 0 داشته باشد. اما می‌دانیم ادامه رشته دقیقاً $2k$ تا کاراکتر 0 دارد. پس به تناقض رسیدیم.
 - ۲- uvw در تکه $0^k 1^{2k}$ اول رشته باشد، طوری که u حداقل یک کاراکتر 0 داشته باشد: مشابه مورد قبلی، قسمت w اول رشته $t < k$ تا 0 و تعدادی 1 دارد، و بنابراین ادامه رشته باید دقیقاً $2t < 2k$ کاراکتر 0 داشته باشد. اما دقیقاً $2k$ تا کاراکتر 0 دارد. پس به تناقض رسیدیم.
 - ۳- uvw در تکه 1^{2k} وسط رشته باشد: در این صورت با انتخاب $i = 0$ ، رشته به صورت $s' = 0^k 1^t 0^{2k} 1^k$ که $t < 2k$ در می‌آید. اگر رشته بخواهد به فرم $ww^R w$ باشد، قسمت ww^R آن باید t تا کاراکتر 1 داشته باشد. در نتیجه ادامه رشته باید $k < \frac{t}{2}$ تا کاراکتر 1 داشته باشد. اما ادامه رشته دقیقاً k تا کاراکتر 1 دارد. بنابراین به تناقض می‌رسیم (اگر t فرد باشد، نمی‌توانیم $\frac{t}{2}$ کاراکتر داشته باشیم، پس باز به تناقض می‌رسیم).
 - ۴- uvw در تکه $1^{2k} 0^{2k}$ باشد، طوری که u حداقل یک کاراکتر 1 داشته باشد: مشابه مورد قبلی، قسمت ww^R رشته t کاراکتر 1 دارد. بنابراین ادامه رشته باید $k < \frac{t}{2}$ تا کاراکتر 1 داشته باشد. اما ادامه رشته دقیقاً k تا کاراکتر 1 دارد. بنابراین به تناقض می‌رسیم.
 - ۵- uvw در تکه 1^k آخر رشته باشد: در این صورت با انتخاب $i = 0$ ، رشته به صورت $s' = 0^k 1^{2k} 0^{2k} 1^t$ که $t < k$ در می‌آید. اگر رشته بخواهد به فرم $ww^R w$ باشد، قسمت w آخر آن باید t تا 1 و تعدادی 0 داشته باشد. در نتیجه بقیه رشته (یعنی ww^R اول رشته) باید دقیقاً $2t < 2k$ تا 1 داشته باشد. اما ادامه رشته دقیقاً $2k$ تا کاراکتر 1 دارد. بنابراین به تناقض می‌رسیم.
- در همه حالات به تناقض خوردیم. بنابراین زبان مورد نظر CF نیست.

سوال ۳ - L_3

بنا به لم تزریق برای زبانهای CF، می‌دانیم عدد k ای وجود دارد که به ازای هر رشته s که $|s| \geq k$ ، شرایط لم تزریق برقرار است. رشته $s = a^{2k} b^k c^{2k^2}$ را در نظر می‌گیریم. بنا به لم تزریق، می‌توان این رشته را به صورت $s = xuvw y$ نوشت که $|uw| > 0$ و $|uvw| \leq k$ و در این صورت رشته $s' = x u^i v w^i y$ به ازای هر i باید در زبان باشد. حالت‌های مختلف uvw را در نظر می‌گیریم:

- ۱- uvw در تکه a^{2k} باشد: در این صورت با انتخاب $i = 0$ ، رشته به صورت $s' = a^t b^k c^{2k^2}$ در می‌آید که $t < 2k$. برای این که این رشته در زبان باشد باید $tk = 2k^2$ و در نتیجه $t = 2k$ باشد. اما می‌دانیم $t < 2k$ است. بنابراین به تناقض می‌رسیم.

۲ و ۳- uvw در تکه b^k یا c^{2k^2} باشد: اثبات این مورد کاملاً مشابه مورد قبل است.

۴- uvw در تکه $a^{2k}b^k$ باشد، طوری که u حداقل یک a داشته باشد: در این صورت با انتخاب $i = 0$ ، رشته به صورت $s' = a^t b^p c^{2k^2}$ در می‌آید که $t < 2k$ ، $p < k$. برای این که این رشته در زبان باشد، باید $tp = 2k^2$ باشد. اما می‌دانیم $k = 2k^2$ است. بنابراین به تناقض می‌رسیم.

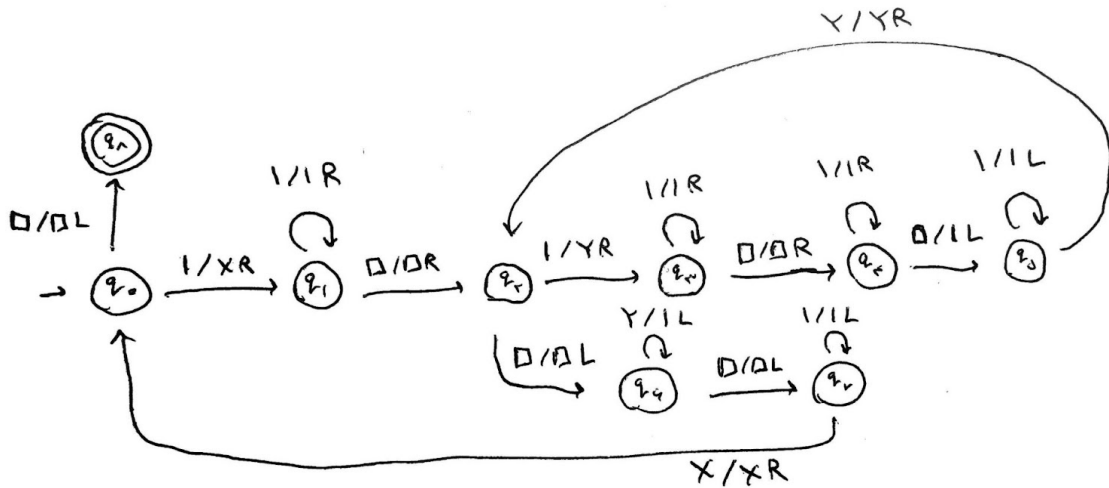
۵- uvw در تکه $b^k c^{2k^2}$ باشد، طوری که u حداقل یک b داشته باشد: در این صورت با انتخاب $i = 0$ ، رشته به صورت $s' = a^{2k} b^{k-t} c^{2k^2-t}$ در می‌آید که $t \geq 1$. برای این که این رشته در زبان باشد، باید $2k(k-t) = 2k^2 - t$ در این صورت:

$$2k^2 - 2kt = 2k^2 - t \Rightarrow 2k = 1 \Rightarrow k = 0.5$$

اما k عددی صحیح است. بنابراین به تناقض رسیدیم.

در همه حالات به تناقض رسیدیم. پس زبان CF نیست.

سوال ۴



سوال ۵

