UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI
NAPOLI FEDERICO II

Scuola Politecnica e delle Scienze di Base
Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Informatica

Vehicle Routing Problem with Time Windows

Elaborato di Algoritmi di Ottimizzazione Combinatoria e su Rete

Davide Mancinelli matr. M63001674

Angelo Caliolo matr. M63XXXX

Indice

Capitolo 1

Introduzione

Il Vehicle Routing with Time Windows (VRPTW) è una variante del Vehicle Routing Problem (VRP), in cui ogni flotta di veicoli con capacità limitata deve prelevare o consegnare merci (o persone) in differenti punti, ognuno dei quali accessibile solo in determinati intervalli di tempo. Quindi, a differenza del VRP standard, bisogna rispettare anche vincoli temporali per le consegne.

1.1 Assunzioni del problema

Prima di formalizzare il problema, è necessario elencare le seguenti assunzioni:

- E' presente un nodo deposito, da cui la flotta di veicoli inizia e termina il suo percorso
- Sono presenti dei nodi (chiamati punti vendita) in cui almeno un veicolo della flotta deve passare
- Ogni punto vendita deve essere transitato esclusivamente una volta
- Ogni punto vendita presenta un orario di apertura (prima del quale non è possibile ricevere consegne) e un orario di chiusura (oltre il quale non è possibile ricevere consegne)

- Nel caso in cui un veicolo arrivasse in un punto vendita prima dell'orario di apertura, tale veicolo deve attendere l'apertura del punto vendita
- Tutti i punti vendita devono essere serviti entro l'orario di chiusura
- L'obiettivo è minimizzare i costi di trasporto

1.2 Approcci per la risoluzione

Ci sono differenti approcci per la risoluzione del VRPTW; di seguito sono presentati quelli affrontati in questo elaborato:

- Algoritmi esatto: [CONTINUA]
- Algotimo euristico: [CONTINUA]

Capitolo 2

Definizione del problema

Il VRPWT può essere definito da:

- Flotta **V** di veicoli; con m=|V|
- Insieme **N** di nodi; tale insieme è costituito a sua volta da:
  - Insieme **P={1,...,p}** di punti vendita
  - Deposito **D={s,t}**; rappresentato da 2 nodi distinti: s come nodo di partenza, t come nodo di destinazione

  E' possibile quindi definire n=|N|=|P|+2, con N={s,1,...,p,t}
- Insieme **A** di archi orientati (i,j), dove $i \neq j$
- Grafo **G(V,N)** orientato e pieno

Altri elementi da prendere in considerazione sono:

- Il costo c_{ij} associato a ogni arco (i,j)
- Il tempo t_{ij} di percorrenza associato a ogni arco (i,j)
- La portata massima Q_k di ogni ogni veicolo k
- La richiesta d_i di merce da soddisfare per ogni punto vendita i
- La finestra di tempo $f_i = [a_i, b_i]$ in cui ogni punto vendita è aperto

- L'insieme di cluster $C = \{C_1, ..., C_m\}$; è possibile dividere l'insieme N in sottoinsiemi cluster C_k, ognuno associato al veicolo k

- Il tempo di servizio s_{ik} sul nodo i; in altre parole, è il tempo da attendere affinchè il nodo i sia totalmente servito. Ipotizziamo $s_{sk} = 0, s_{tk} = 0 \quad \forall k \in V$

2.1 Funzione obiettivo

L'obiettivo è quello di minimizzare i costi di ogni veicolo per servire tutti i punti vendita negli orari adeguati. Possiamo scrivere la funzione obiettivo come segue

$$min \sum_{k \in V} \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} c_{ij} x_{ijk}$$

2.2 Variabili di decisione

Definiamo quindi le seguenti variabili di decisione:

- $x_{ijk} = 1$ se l'arco (i,j) è percorso dal veicolo k, 0 altrimenti

- Il tempo di arrivo l_{ik} del veicolo k al nodo i. Ipotizziamo $l_{sk} = 0 \quad \forall k \in V$, con $s \in D$

2.3 Vincoli

Definiamo i seguenti vincoli:

- Vincolo di capacità; la somma di tutte le richieste soddisfatte non deve superare la capacità massima del singolo veicolo

$$\sum_{i \in N} \sum_{j \in N} d_i x_{ijk} \leq Q_k \qquad \forall k \in V$$

- Vincoli di routing
  - Vincolo di unicità dei punti vendità; ogni punto vendita i deve essere visitato una sola volta

$$\sum_{k \in V} \sum_{j \in N} x_{ijk} = 1 \qquad \forall i \in P$$

  - Vincolo sulla partenza del singolo veicolo; controlla che il veicolo sia partito dal deposito

$$\sum_{j \in P} x_{sjk} = 1 \quad \forall k \in V$$

    In alternativa, nel caso in cui decidessimo che non è necessario che partano tutti i veicoli, basta imporre tale sommatoria ≤ 1
  - Vincolo sull'arrivo del singolo veicolo; controlla che il veicolo sia arrivato dal deposito

$$\sum_{i \in P} x_{itk} = 1 \quad \forall k \in V$$

    In alternativa, nel caso in cui decidessimo che non è necessario che partano tutti i veicoli, basta imporre tale sommatoria ≤ 1
  - Vincolo di coerenza partenza-arrivo; tutti i veicoli che sono partiti, devono essere tornati

$$\sum_{j \in P} x_{stk} = \sum_{i \in P} x_{jik} \quad \forall k \in V$$

  - Vincolo sul flusso dei punti vendita; una volta che un veicolo è entrato in un punto vendita, deve anche uscirne. In

alternativa, possiamo dire che la somma dei nodi entrati in un punto vendita deve essere uguale a quella dei nodi uscenti

$$\sum_{i \in N} x_{ijk} = \sum_{i \in N} x_{jik} \quad \forall j \in P,\ \forall k \in V$$

Bisogna tenere conto del fatto che $j \in P$ e non N, poichè i nodi s e t (compatibili con il deposito) possono anche presentare solo nodi entranti o solo nodi uscenti

- Vincolo sui sottogiri; si vogliono evitare cicli, facendo in modo che, per ogni sottoinsieme di P, la somma degli archi con origine e destinazione in questo sottoinsieme non può superare la cardinalità di S-1, altrimenti si avrebbero cicli

$$\sum_{i,j \in S} x_{ijk} \leq |S| - 1 \quad S \subset P \quad |S| \geq 2 \quad \forall k \in V$$

Un esempio applicativo di questo vincolo è il seguente. Sia $P = 2, 3, 4, 5$ ed $S = 2, 3, 4$; il vincolo imporrebbe $\sum_{i,j \in S} x_{ijk} \leq 3 - 1 = 2$. Di conseguenza, se il percorso del veicolo fosse $2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 2$, la somma degli archi sarebbe pari a 3, violando il vincolo

- Vincoli temporali
  - Vincolo di inizio servizio; il tempo di inizio servizio l_{jk} deve essere almeno pari all'istante l_{ik} in cui si è attivati nel generico punti i, più il tempo per servire quel nodo, più il tempo per spostarsi lungo l'arco (i,j)

    $$l_{jk} \geq (l_{ik} + s_{ik} + t_{ij}) - (1 - x_{ijk})M \quad \forall i, j \in N \quad \forall k \in V$$

    con M costante sufficientemente grande. Tale costante viene aggiunta affinchè siano esclusi tutti gli archi non transitati
  - Vincolo sulla finestra temporale

    $$a_i \leq l_i \leq b_i$$

- Vincoli di dominio

- $x_{ijk} \in \{0, 1\}$
- $i, j \in N$
- $k \in V$
- $l_{ik} \in R^+ \cup \{0\}$
- $s_{ik} \in R^+ \cup \{0\}$

Capitolo 3

Risoluzione tramite algortimo esatto

Un problema VRPTW può essere risolto tramite un algoritmo esatto. Nel nostro caso è stato utilizzato **PuLP**, un modellatore scritto in Python

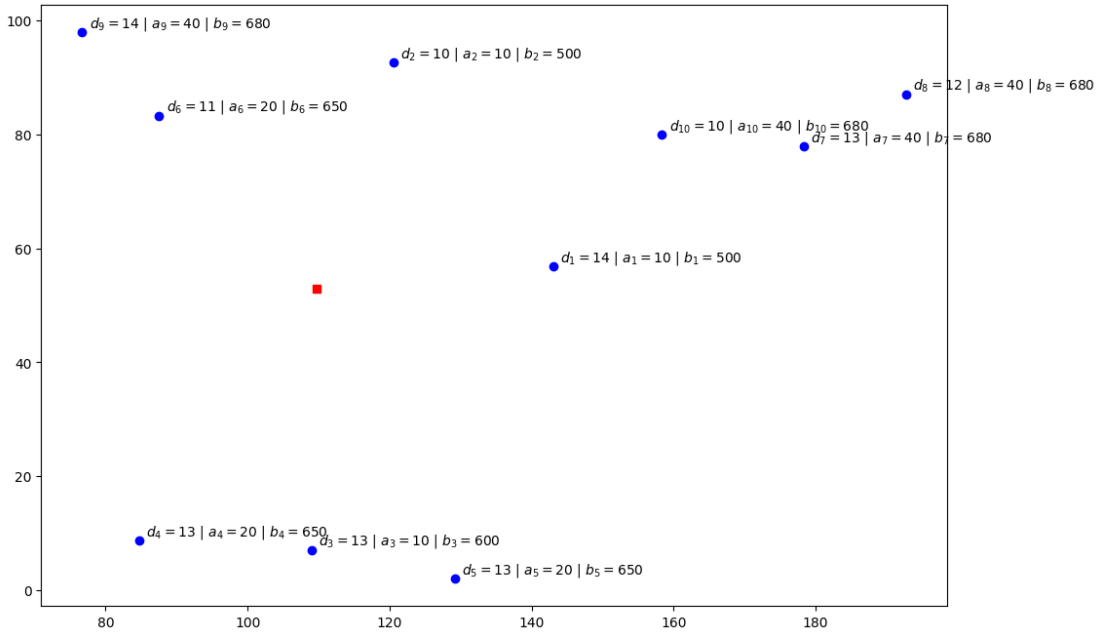
3.1 Creazione dei dati

I dati sono stati scritti secondo la seguente logica:

- Il numero dei punti vendita è stato scelto arbitrariamente da noi
- Le coordinate x e y di ogni punto vendita sono state scelte casualmente

```
n = 10
xc = rnd.rand(n+1)*200
xc = np.append(xc, xc[0])
yc = rnd.rand(n+1)*100
yc = np.append(yc, yc[0])
```

- L'insieme P dei punti vendita è un vettore che va da 1 a n
- L'insieme N dei nodi è costituito da P, preceduto da 0 e succeduto da n+1



- L'insieme A degli archi è un vettore dato dalle combinazione dei vari nodi
- I costi associati a ogni arco sono stati scelti casualmente
- Il tempo di percorrenza di ogni arco è pari alla distanza tra i nodi associati a ogni arco
- La richiesta di Ogni nodo è scelta casualmente
- Le finestre temporali di ogni nodo sono state scelte arbitrariamente da noi
- L'insieme Q della capacità è stato scelto arbitrariamente da noi
- I tempi di servizio di ogni nodo sono stati scelti casualmente

```
P = [il for il in range(1,n+1)]
N = [0] + P + [n+1]

A = [(i,j) for i in N for j in N if i!=j and
    (i,j)!=(n+1,0) and (i,j)!=(0,n+1)]

c = {(i,j): np.random.randint(2,15) for i,j
   in A}
t = {(i,j): int(np.hypot(xc[i]-xc[j], yc[i]-
   yc[j])) for i,j in A}
```

```
np.random.seed(0)
d = {i: np.random.randint(10,15) for i in P}
d[0] = 0
d[n+1] = 0

a = {0:0, 1:10, 2:10, 3:10, 4:20, 5:20,
   6:20, 7:40, 8:40, 9:40, 10:40, 11:0}
   # Orario di apertura
b = {0:200, 1:500, 2:500, 3:600, 4:650,
   5:650, 6:650, 7:680, 8:680, 9:680, 10:680,
    11:700} # Orario di chiusura

V = [1,2,3,4]
Q = {1: 50, 2:50, 3:25, 4:25}

s = {(i,k): np.random.randint(3,5) if i!=0
   and i!=n+1 else 0 for i in N for k in V}
```

3.2 Utilizzo di PuLP

Per prima cosa creiamo il modello tramite la libreria PuLP come segue:

```
model = pulp.LpProblem("VRPTW", pulp.LpMinimize)
```

3.2.1 Variabili di decisione

Si aggiungono le variabili di decisione:

```
arco_var = [(i,j,k) for i in N for j in N for k in V
   if i!=j and (i,j)!=(n+1,0) and (i,j)!=(0,n+1)]
arco_arrivo = [(i,k)for i in N for k in V]
x = pulp.LpVariable.dicts("x", arco_var, cat="Binary"
   )
l = pulp.LpVariable.dicts("x", arco_arrivo, lowBound
   = 0, cat="Continuous")
```

3.2.2 Funzione obiettivo

Si aggiuge la funzione obiettivo:

```
model += pulp.lpSum(c[i,j]*x[i,j,k] for (i,j,k) in
    arco_var)
```

In generale, è possibile anche cambiare la funzione obiettivo, ponendo per esempio all'interno della sommatoria il tempo di percorrenza invece dei costi

```
model += pulp.lpSum(t[i,j]*x[i,j,k] for (i,j,k) in
    arco_var)
```

3.2.3 Vincoli

Si aggiungono i vincoli precedentemente definiti:

```
# Vincolo di capacita'
for k in V:
  model += pulp.lpSum(d[i]*x[i,j,k] for i in P for j
     in N if i!=j) <= Q[k]

# Vincolo di unicita' dei punti di vendita
for i in P:
  model += pulp.lpSum(x[i,j,k] for j in N for k in V
     if (i,j) if i!=j) == 1

# Vincolo sulla partenza e arrivo del singolo veicolo
for k in V:
  model += pulp.lpSum(x[0,j,k] for j in P) == 1
  model += pulp.lpSum(x[i,n+1,k] for i in P) == 1

# Vincolo di coerenze partenza-arrivo
for k in V:
  model += pulp.lpSum(x[0,j,k] for j in P) == pulp.
     lpSum(x[i,n+1,k] for i in P)

# Vincolo sul flusso dei punti vendita
for j in P:
  for k in V:
    model += pulp.lpSum(x[i,j,k] for i in N if i!=j)
       == pulp.lpSum(x[j,i,k] for i in N if i!=j)

# Vincolo sui sottogiri
```

```
    for r in range(2, len(P)+1):
      for S in itertools.combinations(P,r):
        for k in V:
          model += pulp.lpSum(x[i,j,k] for i in S for j
             in S if i!=j and (i,j)!=(n+1,0) and (i,j)
             !=(0,n+1)) <= len(S)-1

    # Vincolo di inizio servizio
    M = 10000000
    for k in V:
      for j in N:
        for i in N:
          if i!=j and (i,j)!=(n+1,0) and (i,j)!=(0,n+1):
            model += l[j,k] >= (l[i,k]+s[i,k]+t[i,j]) - M
               *(1-x[i,j,k])


    # Vincolo sulla finestra temporale
    for (i, k) in arco_arrivo:
        model += l[i,k] >= a[i]
        model += l[i,k] <= b[i]

    # Inizializzazione del deposito
    for k in V:
      l[0,k] = a[0]
```

3.2.4 Esecuzione del modello

Possiamo quindi eseguire il modello:

```
    model.solve()
    print("Costo: ", pulp.value(model.objective))
```

Capitolo 4

Risoluzione tramite algoritmo euristico

Un altro approccio che può essere utilizzato per la risoluzione del VRPTW può essere l'utilizzo di un algoritmo di tipo euristico (precisamente greedy): **l'algoritmo di Clarke and Wright**. Per quanto riguarda la creazione dei dati, abbiamo utilizzato lo stesso codice presente nell'approccio tramite algoritmo esatto.

4.1 Descrizione dell'algoritmo

L'algoritmo di Clarke and Wright si basa sul concetto di saving, traducibile con risparmio.
Tale algoritmo definisce di volta in volta delle rotte. Inizialmente le rotte sono costituite da un unico punto vendita, successivamente esse sono unite in caso di potenziale risparmio.

Bibliografia