



UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI  
NAPOLI FEDERICO II

Scuola Politecnica e delle Scienze di Base  
Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Informatica

# *Vehicle Routing Problem with Time Windows*

Elaborato di Algoritmi di Ottimizzazione Combinatoria e  
su Rete

**Davide Mancinelli** matr. M63001674

**Angelo Caliollo** matr. M63XXXX

# Indice

<b>red1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
red1.1	Assunzioni del problema . . . . .	1
red1.2	Approcci per la risoluzione . . . . .	2
<b>red2</b>	<b>Definizione del problema</b>	<b>3</b>
red2.1	Funzione obiettivo . . . . .	4
red2.2	Variabili di decisione . . . . .	4
red2.3	Vincoli . . . . .	4
<b>red3</b>	<b>Risoluzione tramite algoritmo esatto</b>	<b>8</b>
red3.1	Creazione dei dati . . . . .	8
red3.2	Utilizzo di PuLP . . . . .	10
red3.2.1	Variabili di decisione . . . . .	10
red3.2.2	Funzione obiettivo . . . . .	11
red3.2.3	Vincoli . . . . .	11
red3.2.4	Esecuzione del modello . . . . .	12
<b>red4</b>	<b>Risoluzione tramite algoritmo euristico</b>	<b>13</b>
red4.1	Breve descrizione dell'algoritmo . . . . .	13
red4.2	Spiegazione del codice . . . . .	14

red4.2.1	Verifica della capacità . . . . .	14
red4.2.2	Verifica della finestra temporale . . . . .	14
red4.2.3	Verifica di un nodo estremo . . . . .	15
red4.2.4	Unione delle rotte . . . . .	15
red4.2.5	Conteggio delle rotte . . . . .	16
red4.2.6	Flusso principale . . . . .	16
<b>red5</b>	<b>Casi d'uso</b>	<b>22</b>
red5.1	Caso con 10 punti vendita . . . . .	22
red5.1.1	Algoritmo esatto . . . . .	23
red5.1.2	Algoritmo euristico . . . . .	24

# Capitolo 1

## Introduzione

Il Vehicle Routing with Time Windows (VRPTW) è una variante del Vehicle Routing Problem (VRP), in cui ogni flotta di veicoli con capacità limitata deve prelevare o consegnare merci (o persone) in differenti punti, ognuno dei quali accessibile solo in determinati intervalli di tempo. Quindi, a differenza del VRP standard, bisogna rispettare anche vincoli temporali per le consegne.

### 1.1 Assunzioni del problema

Prima di formalizzare il problema, è necessario elencare le seguenti assunzioni:

- E' presente un nodo deposito, da cui la flotta di veicoli inizia e termina il suo percorso
- Sono presenti dei nodi (chiamati punti vendita) in cui almeno un veicolo della flotta deve passare
- Ogni punto vendita deve essere transitato esclusivamente una volta
- Ogni punto vendita presenta un orario di apertura (prima del quale non è possibile ricevere consegne) e un orario di chiusura (oltre il quale non è possibile ricevere consegne)

- Nel caso in cui un veicolo arrivasse in un punto vendita prima dell'orario di apertura, tale veicolo deve attendere l'apertura del punto vendita
- Tutti i punti vendita devono essere serviti entro l'orario di chiusura
- L'obiettivo è minimizzare i costi di trasporto

## 1.2 Approcci per la risoluzione

Ci sono differenti approcci per la risoluzione del VRPTW; di seguito sono presentati quelli affrontati in questo elaborato:

- Algoritmi esatto: [CONTINUA]
- Algoritmo euristico: [CONTINUA]

## Capitolo 2

# Definizione del problema

Il VRPWT può essere definito da:

- Flotta  $\mathbf{V}$  di veicoli; con  $m=|\mathbf{V}|$
- Insieme  $\mathbf{N}$  di nodi; tale insieme è costituito a sua volta da:
  - Insieme  $\mathbf{P}=\{1,...,p\}$  di punti vendita
  - Deposito  $\mathbf{D}=\{s,t\}$ ; rappresentato da 2 nodi distinti:  $s$  come nodo di partenza,  $t$  come nodo di destinazione

E' possibile quindi definire  $n=|\mathbf{N}|=|\mathbf{P}|+2$ , con  $\mathbf{N}=\{s,1,...,p,t\}$

- Insieme  $\mathbf{A}$  di archi orientati  $(i,j)$ , dove  $i \neq j$
- Grafo  $\mathbf{G}(\mathbf{V},\mathbf{N})$  orientato e pieno

Altri elementi da prendere in considerazione sono:

- Il costo  $c_{ij}$  associato a ogni arco  $(i,j)$
- Il tempo  $t_{ij}$  di percorrenza associato a ogni arco  $(i,j)$
- La portata massima  $Q_k$  di ogni veicolo  $k$
- La richiesta  $d_i$  di merce da soddisfare per ogni punto vendita  $i$
- La finestra di tempo  $f_i = [a_i, b_i]$  in cui ogni punto vendita è aperto

- L'insieme di cluster  $C = \{C_1, \dots, C_m\}$ ; è possibile dividere l'insieme  $N$  in sottoinsiemi cluster  $C_k$ , ognuno associato al veicolo  $k$
- Il tempo di servizio  $s_{ik}$  sul nodo  $i$ ; in altre parole, è il tempo da attendere affinché il nodo  $i$  sia totalmente servito. Ipotizziamo  $s_{sk} = 0, s_{tk} = 0 \quad \forall k \in V$

## 2.1 Funzione obiettivo

L'obiettivo è quello di minimizzare i costi di ogni veicolo per servire tutti i punti vendita negli orari adeguati. Possiamo scrivere la funzione obiettivo come segue

$$\min \sum_{k \in V} \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} c_{ij} x_{ijk}$$

## 2.2 Variabili di decisione

Definiamo quindi le seguenti variabili di decisione:

- $x_{ijk} = 1$  se l'arco  $(i,j)$  è percorso dal veicolo  $k$ , 0 altrimenti
- Il tempo di arrivo  $l_{ik}$  del veicolo  $k$  al nodo  $i$ . Ipotizziamo  $l_{sk} = 0 \quad \forall k \in V$ , con  $s \in D$

## 2.3 Vincoli

Definiamo i seguenti vincoli:

- Vincolo di capacità; la somma di tutte le richieste soddisfatte non deve superare la capacità massima del singolo veicolo

$$\sum_{i \in N} \sum_{j \in N} d_i x_{ijk} \leq Q_k \quad \forall k \in V$$

- Vincoli di routing
  - Vincolo di unicità dei punti vendita; ogni punto vendita i deve essere visitato una sola volta

$$\sum_{k \in V} \sum_{j \in N} x_{ijk} = 1 \quad \forall i \in P$$

- Vincolo sulla partenza del singolo veicolo; controlla che il veicolo sia partito dal deposito

$$\sum_{j \in P} x_{sjk} = 1 \quad \forall k \in V$$

In alternativa, nel caso in cui decidessimo che non è necessario che partano tutti i veicoli, basta imporre tale sommatoria  $\leq 1$

- Vincolo sull'arrivo del singolo veicolo; controlla che il veicolo sia arrivato dal deposito

$$\sum_{i \in P} x_{itk} = 1 \quad \forall k \in V$$

In alternativa, nel caso in cui decidessimo che non è necessario che partano tutti i veicoli, basta imporre tale sommatoria  $\leq 1$

- Vincolo di coerenza partenza-arrivo; tutti i veicoli che sono partiti, devono essere tornati

$$\sum_{j \in P} x_{stj} = \sum_{i \in P} x_{jik} \quad \forall k \in V$$

- Vincolo sul flusso dei punti vendita; una volta che un veicolo è entrato in un punto vendita, deve anche uscirne. In



alternativa, possiamo dire che la somma dei nodi entrati in un punto vendita deve essere uguale a quella dei nodi uscenti

$$\sum_{i \in N} x_{ijk} = \sum_{i \in N} x_{jik} \quad \forall j \in P, \forall k \in V$$

Bisogna tenere conto del fatto che  $j \in P$  e non  $N$ , poichè i nodi  $s$  e  $t$  (compatibili con il deposito) possono anche presentare solo nodi entranti o solo nodi uscenti

- Vincolo sui sottogiri; si vogliono evitare cicli, facendo in modo che, per ogni sottoinsieme di  $P$ , la somma degli archi con origine e destinazione in questo sottoinsieme non può superare la cardinalità di  $S-1$ , altrimenti si avrebbero cicli

$$\sum_{i,j \in S} x_{ijk} \leq |S| - 1 \quad S \subset P \quad |S| \geq 2 \quad \forall k \in V$$

Un esempio applicativo di questo vincolo è il seguente. Sia  $P = 2, 3, 4, 5$  ed  $S = 2, 3, 4$ ; il vincolo imporrebbe  $\sum_{i,j \in S} x_{ijk} \leq 3 - 1 = 2$ . Di conseguenza, se il percorso del veicolo fosse  $2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 2$ , la somma degli archi sarebbe pari a 3, violando il vincolo

- Vincoli temporali
  - Vincolo di inizio servizio; il tempo di inizio servizio  $l_{jk}$  deve essere almeno pari all'istante  $l_{ik}$  in cui si è attivati nel generico punti  $i$ , più il tempo per servire quel nodo, più il tempo per spostarsi lungo l'arco  $(i,j)$

$$l_{jk} \geq (l_{ik} + s_{ik} + t_{ij}) - (1 - x_{ijk})M \quad \forall i, j \in N \quad \forall k \in V$$

con  $M$  costante sufficientemente grande. Tale costante viene aggiunta affinché siano esclusi tutti gli archi non transitati

- Vincolo sulla finestra temporale

$$a_i \leq l_i \leq b_i$$

- Vincoli di dominio

- $x_{ijk} \in \{0, 1\}$
- $i, j \in N$
- $k \in V$
- $l_{ik} \in R^+ \cup \{0\}$
- $s_{ik} \in R^+ \cup \{0\}$

## Capitolo 3

# Risoluzione tramite algoritmo esatto

Un problema VRPTW può essere risolto tramite un algoritmo esatto. Nel nostro caso è stato utilizzato **PuLP**, un modellatore scritto in Python

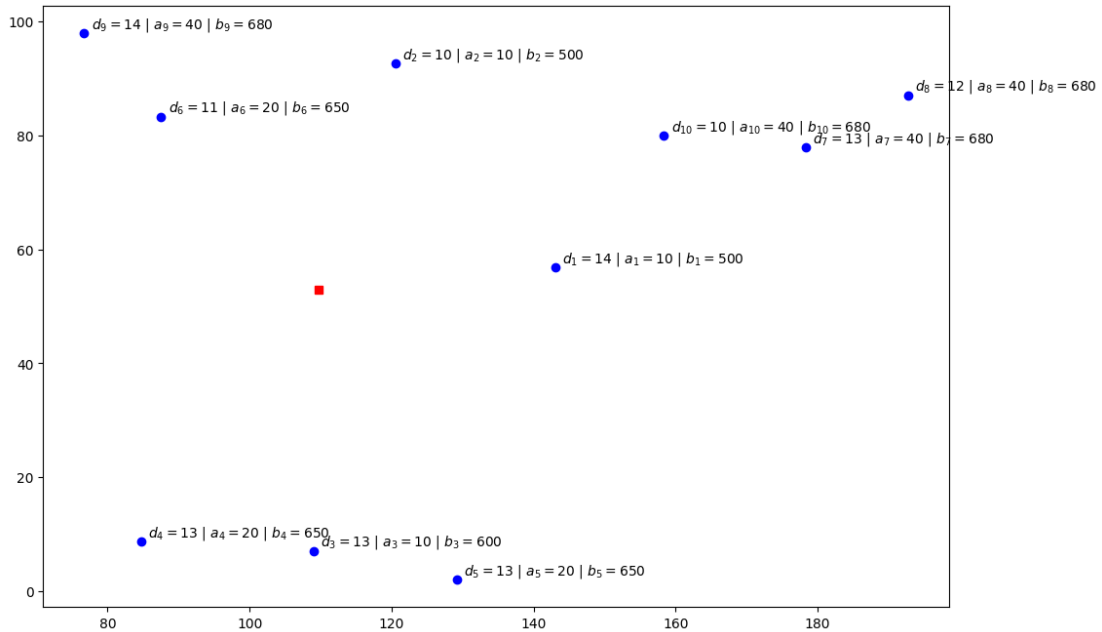
### 3.1 Creazione dei dati

I dati sono stati scritti secondo la seguente logica:

- Il numero dei punti vendita è stato scelto arbitrariamente da noi
- Le coordinate  $x$  e  $y$  di ogni punto vendita sono state scelte casualmente

```
n = 10
xc = rnd.rand(n+1)*200
xc = np.append(xc, xc[0])
yc = rnd.rand(n+1)*100
yc = np.append(yc, yc[0])
```

- L'insieme  $P$  dei punti vendita è un vettore che va da 1 a  $n$
- L'insieme  $N$  dei nodi è costituito da  $P$ , preceduto da 0 e succeduto da  $n+1$



- L'insieme A degli archi è un vettore dato dalle combinazioni dei vari nodi
- I costi associati a ogni arco sono stati scelti casualmente
- Il tempo di percorrenza di ogni arco è pari alla distanza tra i nodi associati a ogni arco
- La richiesta di Ogni nodo è scelta casualmente
- Le finestre temporali di ogni nodo sono state scelte arbitrariamente da noi
- L'insieme Q della capacità è stato scelto arbitrariamente da noi
- I tempi di servizio di ogni nodo sono stati scelti casualmente

```
P = [il for il in range(1,n+1)]
N = [0] + P + [n+1]

A = [(i,j) for i in N for j in N if i!=j and
      (i,j) != (n+1,0) and (i,j) != (0,n+1)]

c = {(i,j): np.random.randint(2,15) for i,j
      in A}
t = {(i,j): int(np.hypot(xc[i]-xc[j], yc[i]-
                        yc[j])) for i,j in A}
```

```

np.random.seed(0)
d = {i: np.random.randint(10,15) for i in P}
d[0] = 0
d[n+1] = 0

a = {0:0, 1:10, 2:10, 3:10, 4:20, 5:20,
     6:20, 7:40, 8:40, 9:40, 10:40, 11:0}
    # Orario di apertura
b = {0:200, 1:500, 2:500, 3:600, 4:650,
     5:650, 6:650, 7:680, 8:680, 9:680, 10:680,
     11:700} # Orario di chiusura

V = [1,2,3,4]
Q = {1: 50, 2:50, 3:25, 4:25}

s = {(i,k): np.random.randint(3,5) if i!=0
      and i!=n+1 else 0 for i in N for k in V}

```

## 3.2 Utilizzo di PuLP

Per prima cosa creiamo il modello tramite la libreria PuLP come segue:

```
model = pulp.LpProblem("VRPTW", pulp.LpMinimize)
```

### 3.2.1 Variabili di decisione

Si aggiungono le variabili di decisione:

```

arco_var = [(i,j,k) for i in N for j in N for k in V
             if i!=j and (i,j)!=(n+1,0) and (i,j)!=(0,n+1)]
arco_arrivo = [(i,k) for i in N for k in V]
x = pulp.LpVariable.dicts("x", arco_var, cat="Binary")
l = pulp.LpVariable.dicts("x", arco_arrivo, lowBound
                           = 0, cat="Continuous")

```

### 3.2.2 Funzione obiettivo

Si aggiunge la funzione obiettivo:

```
model += pulp.lpSum(c[i,j]*x[i,j,k] for (i,j,k) in
    arco_var)
```

In generale, è possibile anche cambiare la funzione obiettivo, ponendo per esempio all'interno della sommatoria il tempo di percorrenza invece dei costi

```
model += pulp.lpSum(t[i,j]*x[i,j,k] for (i,j,k) in
    arco_var)
```

### 3.2.3 Vincoli

Si aggiungono i vincoli precedentemente definiti:

```
# Vincolo di capacita'
for k in V:
    model += pulp.lpSum(d[i]*x[i,j,k] for i in P for j
        in N if i!=j) <= Q[k]

# Vincolo di unicità dei punti di vendita
for i in P:
    model += pulp.lpSum(x[i,j,k] for j in N for k in V
        if (i,j) if i!=j) == 1

# Vincolo sulla partenza e arrivo del singolo veicolo
for k in V:
    model += pulp.lpSum(x[0,j,k] for j in P) == 1
    model += pulp.lpSum(x[i,n+1,k] for i in P) == 1

# Vincolo di coerenze partenza-arrivo
for k in V:
    model += pulp.lpSum(x[0,j,k] for j in P) == pulp.
        lpSum(x[i,n+1,k] for i in P)

# Vincolo sul flusso dei punti vendita
for j in P:
    for k in V:
        model += pulp.lpSum(x[i,j,k] for i in N if i!=j)
            == pulp.lpSum(x[j,i,k] for i in N if i!=j)

# Vincolo sui sottogiri
```

```

for r in range(2, len(P)+1):
    for S in itertools.combinations(P,r):
        for k in V:
            model += pulp.lpSum(x[i,j,k] for i in S for j
                                in S if i!=j and (i,j)!=(n+1,0) and (i,j)
                                !=(0,n+1)) <= len(S)-1

# Vincolo di inizio servizio
M = 10000000
for k in V:
    for j in N:
        for i in N:
            if i!=j and (i,j)!=(n+1,0) and (i,j)!=(0,n+1):
                model += l[j,k] >= (l[i,k]+s[i,k]+t[i,j]) - M
                    *(1-x[i,j,k])

# Vincolo sulla finestra temporale
for (i, k) in arco_arrivo:
    model += l[i,k] >= a[i]
    model += l[i,k] <= b[i]

# Inizializzazione del deposito
for k in V:
    l[0,k] = a[0]

```

### 3.2.4 Esecuzione del modello

Possiamo quindi eseguire il modello:

```

model.solve()
print("Costo: ", pulp.value(model.objective))

```

## Capitolo 4

# Risoluzione tramite algoritmo euristico

Un altro approccio che può essere utilizzato per la risoluzione del VRPTW può essere l'utilizzo di un algoritmo di tipo euristico (precisamente greedy): **l'algoritmo di Clarke and Wright**. Per quanto riguarda la creazione dei dati, abbiamo utilizzato lo stesso codice presente nell'approccio tramite algoritmo esatto.

### 4.1 Breve descrizione dell'algoritmo

L'algoritmo di Clarke and Wright si basa sul concetto di saving, traducibile con risparmio.

Tale algoritmo definisce di volta in volta delle rotte (chiamate Tour). Inizialmente ogni rotta è costituita da un unico punto vendita, successivamente si prova a unire ogni coppia di rotte in presenza di un eventuale risparmio. La soluzione finale sarà costituita da 4 rotte, una per ogni veicolo. Ovviamente, devono essere anche fatti controlli per quanto riguarda il rispetto di vincoli, tra i quali quello di capacità, quelli temporali e del numero di giri per ogni veicolo.



## 4.2 Spiegazione del codice

Prima di spiegare i passi principali dell'algoritmo, bisogna fare una breve introduzione a ogni funzione utilizzata.

### 4.2.1 Verifica della capacità

Questa funzione ha il compito di verificare che sia rispettato il vincolo di capacità di ogni veicolo associato a una determinata rotta. Viene calcolata la domanda totale dei punti vendita appartenenti a una potenziale rotta, per poi essere confrontata con la capacità del veicolo:

```
def verifica_capacita (rotta, d, capacita):  
    domanda_totale = 0  
    for i in rotta:  
        domanda_totale += d[i]  
    return domanda_totale <= capacita
```

### 4.2.2 Verifica della finestra temporale

In questa funzione si vuole controllare che siano rispettato gli orari di apertura e di chiusura dei punti vendita.

Per ogni punto vendita della rotta calcoliamo il tempo corrente come somma del tempo impiegato fino a quel momento e il tempo di percorrenza dell'ultimo arco.

Controlliamo se tale tempo corrente sia minore dell'orario di apertura del punto vendita, in tal caso attendiamo l'orario di apertura.

Controlliamo quindi che il tempo corrente non sia superiore all'orario di chiusura, nel caso escludiamo il nodo.

Infine controlliamo che il veicolo sia tornato al deposito.

```
def verifica_finestra (rotta, t, s, a, b, veicolo_id):  
    tempo_corrente = 0  
    nodo_precedente = 0 # Deposito di  
                        partenza  
  
    for i in rotta:  
        tempo_corrente += t[nodo_precedente, i]  
  
        # Nel caso in cui arrivo prima dell'apertura,  
        # aspetto
```

```

        if tempo_corrente < a[i]:
            tempo_corrente = a[i]

        # Nel caso in cui arrivo dopo la chiusura, non è rispettato il vincolo
        if tempo_corrente > b[i]:
            return False

        # Aggiunta del tempo di servizio
        print(s[i, veicolo_id])
        tempo_corrente += s[i, veicolo_id]
        nodo_precedente = i

    # Verifico se è tornato al deposito
    if (nodo_precedente, n+1) in t:
        tempo_corrente += t[nodo_precedente, n+1]
        if tempo_corrente > b[n+1]:
            return False

    return True

```

### 4.2.3 Verifica di un nodo estremo

In questa funzione si vuole trovare la rotta che contiene un nodo estremo (iniziale o finale) e il suo eventuale indice. Scorrendo tra i punti vendita di ogni rotta attiva, si controlla se tale punto vendita sia un estremo. Nel caso in cui lo sia, viene restituita la rotta e il suo indice

```

def trova_rotta_contenente (i, rotte_attive):
    # Scorro tra i nodi delle rotte attive
    for r_attiva in rotte_attive:
        if i in r_attiva:
            indice = r_attiva.index(i)
            # Si controlla che sia un estremo
            if indice==0 or indice==len(r_attiva)-1:
                return r_attiva, indice
    return None, -1

```

### 4.2.4 Unione delle rotte

Questa funzione ha il compito di unire due rotte. Per fare ciò, si fanno vari controlli per validare un'eventuale unione tra rotte. In generale,

un'unione è validata se i punti vendita considerati sono estremi di tali rotte

```
def unisci_rotte (rotta_i, rotta_j, indice_i, indice_j):  
  
    # Sono effettuati vari controlli  
  
    # i e' l'ultimo di rotta_i, mentre j e' il primo di  
    # rotta_j  
    if indice_i==len(rotta_i)-1 and indice_j==0:  
        return rotta_i + rotta_j  
    # j e' l'ultimo di rotta_j, mentre i e' il primo di  
    # rotta_i  
    elif indice_j==len(rotta_j)-1 and indice_i==0:  
        return rotta_j + rotta_i  
    # i e' l'ultimo di rotta_i, mentre j e' l'ultimo di  
    # rotta_j  
    elif indice_i==len(rotta_i)-1 and indice_j==len(  
        rotta_j)-1:  
        return rotta_i + rotta_j[::-1]  
    # i e' il primo di rotta_i, mentre j e' il primo di  
    # rotta_j  
    elif indice_i==0 and indice_j==0:  
        return rotta_i[::-1] + rotta_j  
  
    return None
```

### 4.2.5 Conteggio delle rotte

Questa funzione deve contare le rotte per ognuno dei veicoli.

```
def conta_rotte_per_veicolo(assegnazione, V):  
    conteggio = {k: 0 for k in V}  
    for rotta, veicolo in assegnazione.items():  
        conteggio[veicolo] += 1  
    return conteggio
```

### 4.2.6 Flusso principale

Il flusso principale del codice può essere diviso in differenti step:

1. Inizializziamo ogni punto vendita come rotta separata, successivamente distribuiamo i nodi tra i veicoli disponibili secondo una

logica Round-Robin, in modo tale da bilanciare i punti vendita assegnati a ogni veicolo

```
# Inizializzazione di ogni punto vendita come
# rotta separata
rotte_attive = [[i] for i in P]

assegnazione = {} # Lista di
# associazione di ogni rotta al veicolo

# Distribuzione dei nodi tra i veicoli
# disponibili
indice_veicolo = 0
for r_attiva in rotte_attive:
    # Trova un veicolo con capacita sufficiente,
    # usando un round-robin per bilanciare
    assegnato = False
    for offset in range(len(V)):
        k = V[(indice_veicolo + offset)%len(V)]
        if verifica_capacita(r_attiva, d, Q[k]):
            assegnazione[tuple(r_attiva)] = k
            indice_veicolo = (indice_veicolo +
                              1) % len(V) # Si passa al
            # prossimo veicolo
            assegnato = True
            break
```

2. Calcoliamo il saving secondo questa formula:

$$sav_{ij} = c_{0,i} + c_{j,n+1} - c_{ij}$$

Devo però considerare il fatto che precedentemente non sono stati calcolati i costi  $c_{0,0}$ ,  $c_{0,11}$ ,  $c_{11,0}$ ,  $c_{11,11}$ .

```
savings = []
for i in range(len(N)):
    for j in range(i+1, len(N)):
        if (i,j) in A:
            # Il costo c precedentemente non era
            # stato calcolato per i nodi
            # (0,0), (0,11), (11,0) e
            # (11,11). Di conseguenza e'
            # stato necessario escludere
            # tali nodi
            if i==0 and j==0:
                sav = 0
            elif i==0:
```

```

        sav = c[j,n+1] - c[i,j]
    elif j==0:
        sav = c[0,i] - c[i,j]
    elif i==n+1 and j==n+1:
        sav = 0
    elif i==n+1:
        sav = c[j,n+1] - c[i,j]
    elif j==n+1:
        sav = c[0,i] - c[i,j]
    else:
        sav = c[0,i] + c[j,n+1] - c[i,j]
    savings.append((N[i], N[j]), sav))

```

Successivamente i saving sono ordinati in ordine decrescente

```
savings.sort(key=lambda x: x[1], reverse=True)
```

3. Per ognuno degli archi si controlla che il proprio saving sia maggiore di 0; successivamente si trovano le rotte contenenti il nodo  $i$  e il nodo  $j$  come estremi, e i veicoli assegnati a ognuno di queste rotte.

Si provano a unire le due rotte, e si assegna tale rotta a un veicolo: se i veicoli diversi, viene scelto quello con meno rotte o con più capacità se hanno lo stesso numero di rotte.

```

for (i,j),sav_ij in savings:
    if sav_ij <= 0: # I savings <= 0
        possono essere esclusi
        break

    iterazione += 1

    # Si trovano le rotte contenenti i e j come
    # estremi
    rotta_i, indice_i = trova_rotta_contenente(i, rotte_attive)
    rotta_j, indice_j = trova_rotta_contenente(j, rotte_attive)

    # Se non sono stati trovati, si saltano
    if rotta_i is None or rotta_j is None or rotta_i==rotta_j:
        continue

    # Ottieni i veicoli assegnati
    veicolo_i = assegnazione.get(tuple(rotta_i))

```

```

veicolo_j = assegnazione.get(tuple(rotta_j))

if veicolo_i is None or veicolo_j is None:
    continue

# Conta le rotte per veicolo
conteggio_rotte = conta_rotte_per_veicolo(
    assegnazione, V)

# Tentativo di unione
nuova_rotta = unisci_rotte(rotta_i, rotta_j,
    indice_i, indice_j)

if veicolo_i == veicolo_j:
    veicolo_scelto = veicolo_i
else:
    # Se veicoli diversi, viene scelto
    # quello con meno rotte
    # o con piu' capacita se hanno lo stesso
    # numero di rotte
    if conteggio_rotte[veicolo_i] <
        conteggio_rotte[veicolo_j]:
        veicolo_scelto = veicolo_i
    elif conteggio_rotte[veicolo_i] >
        conteggio_rotte[veicolo_j]:
        veicolo_scelto = veicolo_j
    else:
        # Scelta del veicolo con maggiore
        # capacita
        if Q[veicolo_i] >= Q[veicolo_j]:
            veicolo_scelto = veicolo_i
        else:
            veicolo_scelto = veicolo_j

```

4. Si verifica che siano rispettati i vincoli. In caso positivo, sono rimosse le vecchie rotte ed è aggiunta la nuova rotta.

```

if (verifica_capacita(nuova_rotta, d, Q[
    veicolo_scelto])) and (verifica_finestra(
    nuova_rotta, t, s, a, b, veicolo_scelto)):
    # Rimozione delle vecchie rotte
    rotte_attive.remove(rotta_i)
    rotte_attive.remove(rotta_j)
    del assegnazione[tuple(rotta_i)]
    del assegnazione[tuple(rotta_j)]

```

```
# Aggiunta della nuova rotta
rotte_attive.append(nuova_rotta)
assegnazione[tuple(nuova_rotta)] =
    veicolo_scelto
```

5. Controlliamo posteriormente il numero di rotte per ogni veicolo. Nonostante le prevenzioni attuate precedentemente (al momento dell'assegnazione delle rotte ai veicoli), è capitato che alcuni veicoli abbiano più di una rotta, mentre altri veicoli 0 rotte, non rispettando i vincoli precedentemente fissati. Di conseguenza, per risolvere questo problema, abbiamo deciso di effettuare un ulteriore controllo, seguendo le seguenti logiche

- (a) Se uno dei veicoli ha più di una rotta e un veicolo ha una sola rotta, assegno una delle 2 rotte al veicolo con 0 rotte
- (b) se uno dei veicoli ha più di una rotta e gli altri veicoli hanno tutti almeno una rotta, unisco le rotte di quel veicolo

```
# Punto 1
# Controllo quali veicoli hanno piu' di una
# rotta e quali hanno 0 rotte
veicoli_senza_rotte = [v for v, r in
    rotte_per_veicolo.items() if len(r) == 0]
veicoli_con_piu_rotte = [v for v, r in
    rotte_per_veicolo.items() if len(r) > 1]

# Se esistono veicoli con le caratteristiche
# sopra specificate, eseguiamo il punto 1
if veicoli_senza_rotte and veicoli_con_piu_rotte
:
    veicolo_vuoto = veicoli_senza_rotte[0]
    veicolo_con_rotte = veicoli_con_piu_rotte[0]
    # Spostamento della rotta
    rotta_da_spostare = rotte_per_veicolo[
        veicolo_con_rotte].pop()
    rotte_per_veicolo[veicolo_vuoto].append(
        rotta_da_spostare)
    assegnazione[tuple(rotta_da_spostare)] =
        veicolo_vuoto

# Punto 2
# Eventuale unione delle rotte
for veicolo, rotte in rotte_per_veicolo.items():
```

```
# Controllo la lunghezza delle rotte
if len(rotte) > 1:
    for i in range(len(rotte) - 1):
        rotta_attuale = rotte[i]
        rotta_successiva = rotte[i+1]

    # Unione delle rotte
    nuova_rotta = rotta_attuale +
        rotta_successiva

    # Controllo dei vincoli
    if (verifica_capacita(nuova_rotta, d
        , Q[veicolo]) and
        verifica_finestra(nuova_rotta, t,
            s, a, b, veicolo)):

        # Rimozione vecchie rotte
        rotte.remove(rotta_attuale)
        rotte.remove(rotta_successiva)
        del assegnazione[tuple(
            rotta_attuale)]
        del assegnazione[tuple(
            rotta_successiva)]

    # Aggiunta nuova rotta
    rotte.append(nuova_rotta)
    assegnazione[tuple(nuova_rotta)]
        = veicolo
```



# Capitolo 5

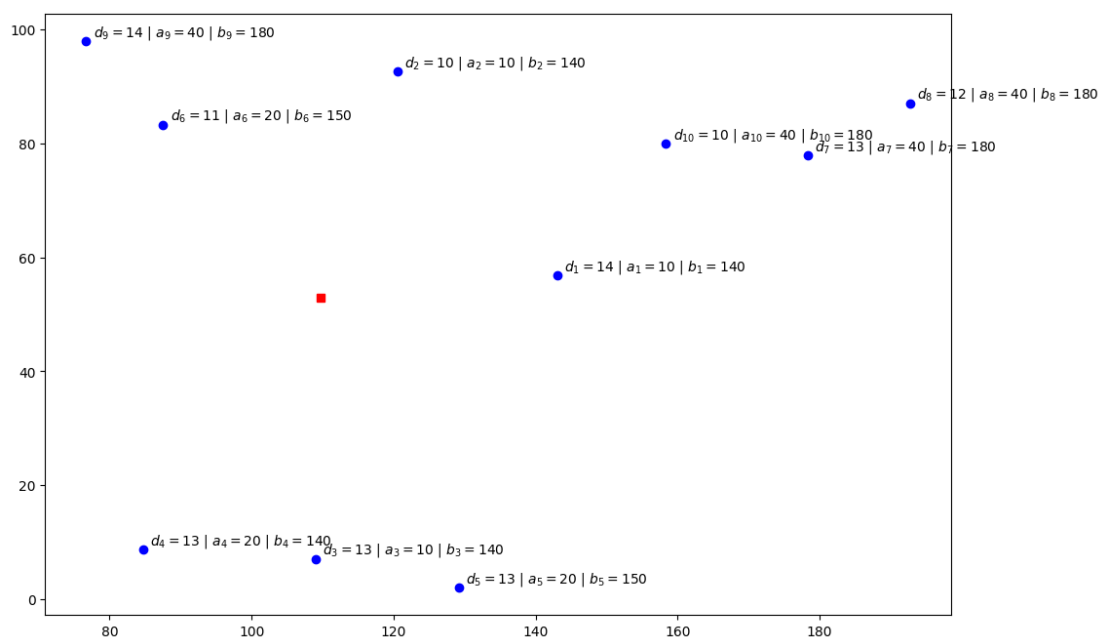
## Casi d'uso

Di seguito saranno mostrati diversi casi d'uso con ambedue gli approcci

### 5.1 Caso con 10 punti vendita

In questo caso d'uso, prendiamo in considerazione 10 punti vendita, con le seguenti caratteristiche:

- Le coordinate sono le seguenti:



- Come specificato precedentemente, i costi degli archi sono scelti randomicamente, e non sono simmetrici, così come la richiesta di ogni punto vendita e i tempi di servizio; mentre i tempi di percorrenza sono dati dalla distanza dei punti vendita
- Le finestre di apertura e chiusura dei punti vendita sono le seguenti:

```
a = {0:0, 1:10, 2:10, 3:10, 4:20, 5:20, 6:20,
     7:40, 8:40, 9:40, 10:40, 11:0}      # Orario
di apertura
b = {0:100, 1:140, 2:140, 3:140, 4:140, 5:150,
     6:150, 7:180, 8:180, 9:180, 10:180, 11:200} #
Orario di chiusura
```

- I veicoli sono 4
- Le capacità dei veicoli sono i seguenti:

```
Q = {1: 50, 2:50, 3:25, 4:25}
```

- La funzione obiettivo è quella di minimizzare i costi

### 5.1.1 Algoritmo esatto

L'algoritmo esatto fornisce una soluzione ottima con il seguente costo e i seguenti percorsi:

Percorso veicolo 1:

```
0 → 1
1 → 8
8 → 10
10 → 11
```

Percorso veicolo 2:

```
0 → 5
3 → 4
4 → 11
5 → 3
```

Percorso veicolo 3:

```
0 → 2
2 → 7
7 → 11
```

Percorso veicolo 4:

```
0 → 6
6 → 9
9 → 11
```

```
l[0,k] = a[0]

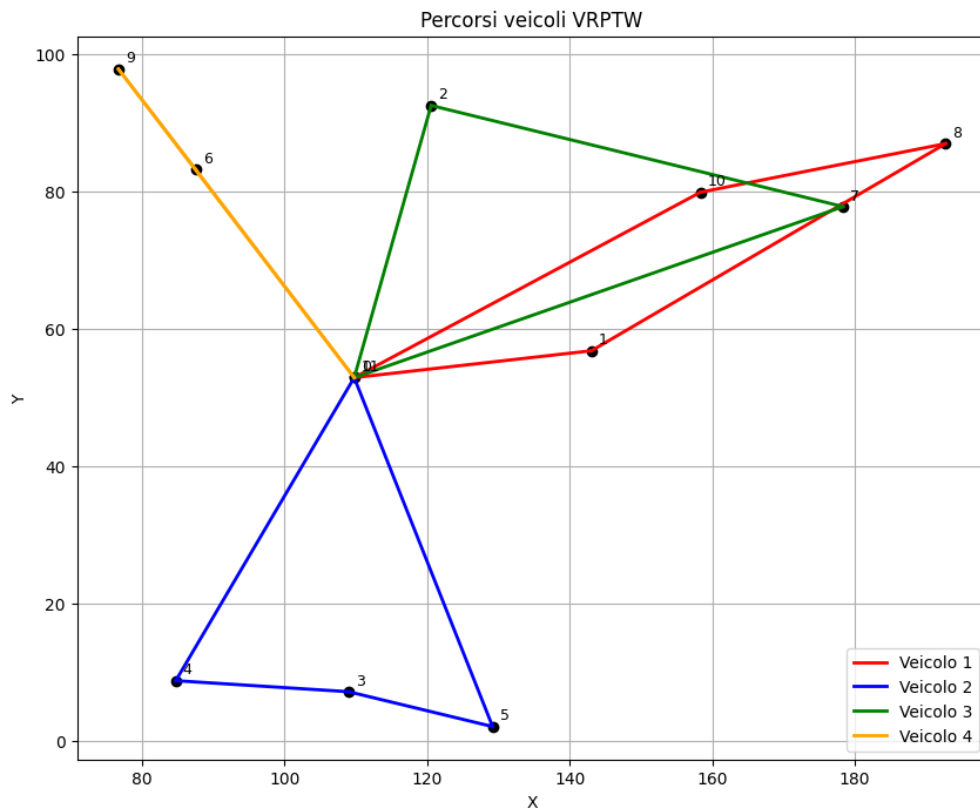
model.solve()

print("Costo: ", pulp.value(model.objective))

✓ 4m 2.3s

Costo: 65.0
```

Ottenendo quindi questo grafico:



Possiamo notare dalle immagini che il tempo di esecuzione tramite PuLP è pari a 4 minuti e 2 secondi.

### 5.1.2 Algoritmo euristico

Nel caso dell'algoritmo euristico, la situazione è più complessa e ha presentato varie problematiche descritte nel capitolo precedente. Per questo motivo dobbiamo fare una panoramica sulla soluzione prima e dopo il controllo del numero di rotte per ogni veicolo. Inizialmente otteniamo i seguenti percorsi:

```

rotte_per_veicolo
✓ 0.0s Open 'rotte_per_veicolo' in Data Wrangler Python
{1: [[4, 5]], 2: [[7, 8, 10], [1, 9, 6]], 3: [[2, 3]], 4: []}

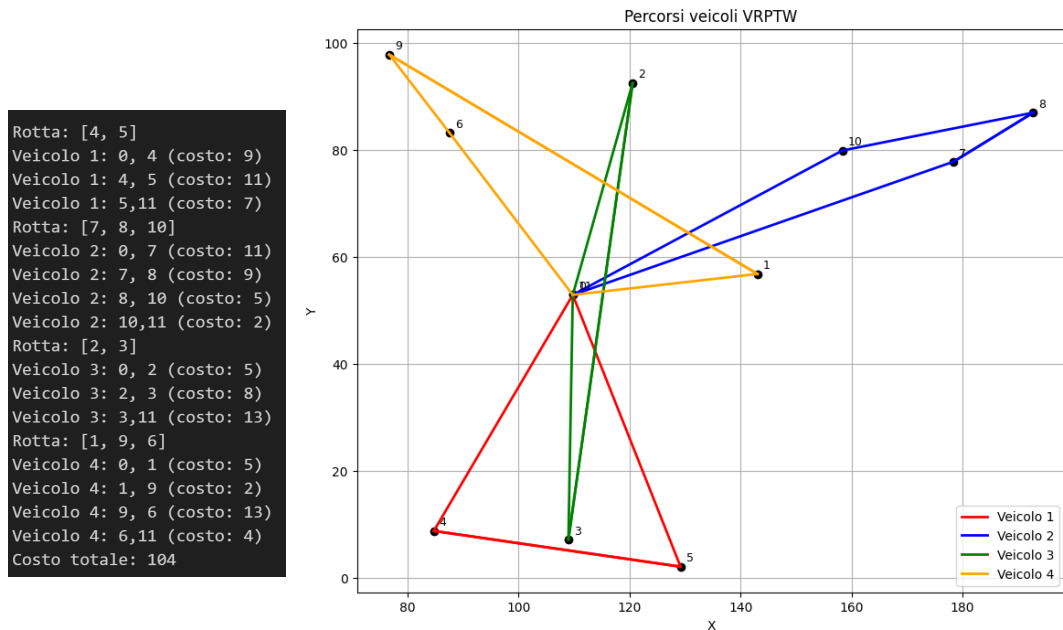
```

Possiamo notare la violazione del vincolo di partenza dei veicoli (cioè, tutti i veicoli devono partire una sola volta); infatti, il veicolo 2 presenta 2 rotte, mentre il veicolo 4 presenta 0 rotte.

Applicando il controllo sulle rotte dei veicoli, la situazione cambia, rispettando così il vincolo:

```
{1: [[4, 5]], 2: [[7, 8, 10]], 3: [[2, 3]], 4: [[1, 9, 6]]}
```

Ottenendo un costo pari a:



Possiamo affermare quindi che:

- Il tempo di esecuzione è notevolmente inferiore rispetto al metodo esatto, essendo addirittura pari a 0 secondi (come mostrato nell'immagine)
- Il risultato risulta però essere peggiore rispetto a quello ottenuto dal metodo esatto, avendo il seguente gap

$$gap = \left| \frac{UB(I) - EUR(I)}{UB(I)} \right| \cdot 100 = \left| \frac{63 - 104}{63} \right| \cdot 100 \approx 58.7\%$$

# Bibliografia