



UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI
NAPOLI FEDERICO II

Scuola Politecnica e delle Scienze di Base
Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Informatica

Vehicle Routing Problem with Time Windows

Elaborato di Algoritmi di Ottimizzazione Combinatoria e
su Rete

Davide Mancinelli matr. M63001674

Angelo Caliola matr. M63XXXX

Indice

red1	Introduzione	1
red1.1	Assunzioni del problema	1
red1.2	Approcci per la risoluzione	2
red2	Definizione del problema	3
red2.1	Funzione obiettivo	4
red2.2	Variabili di decisione	4
red2.3	Vincoli	4
red3	Risoluzione tramite algoritmo esatto	8
red3.1	Creazione dei dati	8
red3.2	Utilizzo di PuLP	10
red3.2.1	Variabili di decisione	10
red3.2.2	Funzione obiettivo	11
red3.2.3	Vincoli	11
red3.2.4	Esecuzione del modello	12
red4	Risoluzione tramite algoritmo euristico	13
red4.1	Breve descrizione dell'algoritmo	13
red4.2	Spiegazione del codice	14

red4.2.1	Verifica della capacità	14
red4.2.2	Verifica della finestra temporale	14
red4.2.3	Verifica di un nodo estremo	15
red4.2.4	Unione delle rotte	15

Capitolo 1

Introduzione

Il Vehicle Routing with Time Windows (VRPTW) è una variante del Vehicle Routing Problem (VRP), in cui ogni flotta di veicoli con capacità limitata deve prelevare o consegnare merci (o persone) in differenti punti, ognuno dei quali accessibile solo in determinati intervalli di tempo. Quindi, a differenza del VRP standard, bisogna rispettare anche vincoli temporali per le consegne.

1.1 Assunzioni del problema

Prima di formalizzare il problema, è necessario elencare le seguenti assunzioni:

- E' presente un nodo deposito, da cui la flotta di veicoli inizia e termina il suo percorso
- Sono presenti dei nodi (chiamati punti vendita) in cui almeno un veicolo della flotta deve passare
- Ogni punto vendita deve essere transitato esclusivamente una volta
- Ogni punto vendita presenta un orario di apertura (prima del quale non è possibile ricevere consegne) e un orario di chiusura (oltre il quale non è possibile ricevere consegne)

- Nel caso in cui un veicolo arrivasse in un punto vendita prima dell'orario di apertura, tale veicolo deve attendere l'apertura del punto vendita
- Tutti i punti vendita devono essere serviti entro l'orario di chiusura
- L'obiettivo è minimizzare i costi di trasporto

1.2 Approcci per la risoluzione

Ci sono differenti approcci per la risoluzione del VRPTW; di seguito sono presentati quelli affrontati in questo elaborato:

- Algoritmi esatto: [CONTINUA]
- Algoritmo euristico: [CONTINUA]

Capitolo 2

Definizione del problema

Il VRPWT può essere definito da:

- Flotta \mathbf{V} di veicoli; con $m=|\mathbf{V}|$
- Insieme \mathbf{N} di nodi; tale insieme è costituito a sua volta da:
 - Insieme $\mathbf{P}=\{1,...,p\}$ di punti vendita
 - Deposito $\mathbf{D}=\{s,t\}$; rappresentato da 2 nodi distinti: s come nodo di partenza, t come nodo di destinazione

E' possibile quindi definire $n=|\mathbf{N}|=|\mathbf{P}|+2$, con $\mathbf{N}=\{s,1,...,p,t\}$

- Insieme \mathbf{A} di archi orientati (i,j) , dove $i \neq j$
- Grafo $\mathbf{G}(\mathbf{V},\mathbf{N})$ orientato e pieno

Altri elementi da prendere in considerazione sono:

- Il costo c_{ij} associato a ogni arco (i,j)
- Il tempo t_{ij} di percorrenza associato a ogni arco (i,j)
- La portata massima Q_k di ogni veicolo k
- La richiesta d_i di merce da soddisfare per ogni punto vendita i
- La finestra di tempo $f_i = [a_i, b_i]$ in cui ogni punto vendita è aperto

- L'insieme di cluster $C = \{C_1, \dots, C_m\}$; è possibile dividere l'insieme N in sottoinsiemi cluster C_k , ognuno associato al veicolo k
- Il tempo di servizio s_{ik} sul nodo i ; in altre parole, è il tempo da attendere affinché il nodo i sia totalmente servito. Ipotizziamo $s_{sk} = 0, s_{tk} = 0 \quad \forall k \in V$

2.1 Funzione obiettivo

L'obiettivo è quello di minimizzare i costi di ogni veicolo per servire tutti i punti vendita negli orari adeguati. Possiamo scrivere la funzione obiettivo come segue

$$\min \sum_{k \in V} \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} c_{ij} x_{ijk}$$

2.2 Variabili di decisione

Definiamo quindi le seguenti variabili di decisione:

- $x_{ijk} = 1$ se l'arco (i,j) è percorso dal veicolo k , 0 altrimenti
- Il tempo di arrivo l_{ik} del veicolo k al nodo i . Ipotizziamo $l_{sk} = 0 \quad \forall k \in V$, con $s \in D$

2.3 Vincoli

Definiamo i seguenti vincoli:

- Vincolo di capacità; la somma di tutte le richieste soddisfatte non deve superare la capacità massima del singolo veicolo

$$\sum_{i \in N} \sum_{j \in N} d_i x_{ijk} \leq Q_k \quad \forall k \in V$$

- Vincoli di routing
 - Vincolo di unicità dei punti vendita; ogni punto vendita i deve essere visitato una sola volta

$$\sum_{k \in V} \sum_{j \in N} x_{ijk} = 1 \quad \forall i \in P$$

- Vincolo sulla partenza del singolo veicolo; controlla che il veicolo sia partito dal deposito

$$\sum_{j \in P} x_{sjk} = 1 \quad \forall k \in V$$

In alternativa, nel caso in cui decidessimo che non è necessario che partano tutti i veicoli, basta imporre tale sommatoria ≤ 1

- Vincolo sull'arrivo del singolo veicolo; controlla che il veicolo sia arrivato dal deposito

$$\sum_{i \in P} x_{itk} = 1 \quad \forall k \in V$$

In alternativa, nel caso in cui decidessimo che non è necessario che partano tutti i veicoli, basta imporre tale sommatoria ≤ 1

- Vincolo di coerenza partenza-arrivo; tutti i veicoli che sono partiti, devono essere tornati

$$\sum_{j \in P} x_{stj} = \sum_{i \in P} x_{jik} \quad \forall k \in V$$

- Vincolo sul flusso dei punti vendita; una volta che un veicolo è entrato in un punto vendita, deve anche uscirne. In

alternativa, possiamo dire che la somma dei nodi entrati in un punto vendita deve essere uguale a quella dei nodi uscenti

$$\sum_{i \in N} x_{ijk} = \sum_{i \in N} x_{jik} \quad \forall j \in P, \forall k \in V$$

Bisogna tenere conto del fatto che $j \in P$ e non N , poichè i nodi s e t (compatibili con il deposito) possono anche presentare solo nodi entranti o solo nodi uscenti

- Vincolo sui sottogiri; si vogliono evitare cicli, facendo in modo che, per ogni sottoinsieme di P , la somma degli archi con origine e destinazione in questo sottoinsieme non può superare la cardinalità di $S-1$, altrimenti si avrebbero cicli

$$\sum_{i,j \in S} x_{ijk} \leq |S| - 1 \quad S \subset P \quad |S| \geq 2 \quad \forall k \in V$$

Un esempio applicativo di questo vincolo è il seguente. Sia $P = 2, 3, 4, 5$ ed $S = 2, 3, 4$; il vincolo imporrebbe $\sum_{i,j \in S} x_{ijk} \leq 3 - 1 = 2$. Di conseguenza, se il percorso del veicolo fosse $2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 2$, la somma degli archi sarebbe pari a 3, violando il vincolo

- Vincoli temporali
 - Vincolo di inizio servizio; il tempo di inizio servizio l_{jk} deve essere almeno pari all'istante l_{ik} in cui si è attivati nel generico punti i , più il tempo per servire quel nodo, più il tempo per spostarsi lungo l'arco (i,j)

$$l_{jk} \geq (l_{ik} + s_{ik} + t_{ij}) - (1 - x_{ijk})M \quad \forall i, j \in N \quad \forall k \in V$$

con M costante sufficientemente grande. Tale costante viene aggiunta affinché siano esclusi tutti gli archi non transitati

- Vincolo sulla finestra temporale

$$a_i \leq l_i \leq b_i$$

- Vincoli di dominio

- $x_{ijk} \in \{0, 1\}$
- $i, j \in N$
- $k \in V$
- $l_{ik} \in R^+ \cup \{0\}$
- $s_{ik} \in R^+ \cup \{0\}$

Capitolo 3

Risoluzione tramite algoritmo esatto

Un problema VRPTW può essere risolto tramite un algoritmo esatto. Nel nostro caso è stato utilizzato **PuLP**, un modellatore scritto in Python

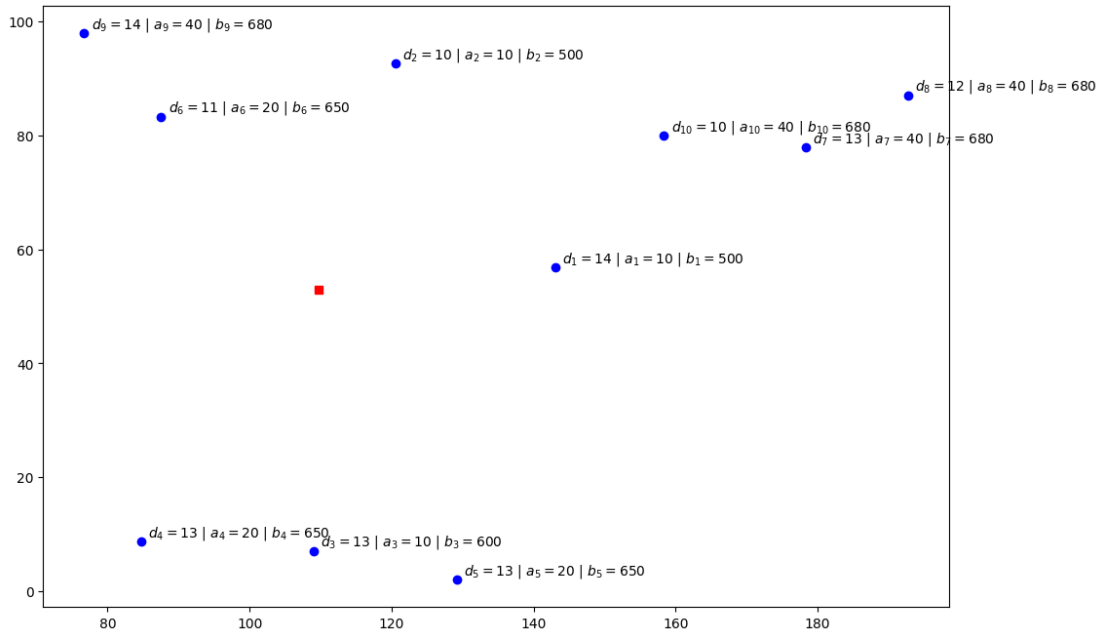
3.1 Creazione dei dati

I dati sono stati scritti secondo la seguente logica:

- Il numero dei punti vendita è stato scelto arbitrariamente da noi
- Le coordinate x e y di ogni punto vendita sono state scelte casualmente

```
n = 10
xc = rnd.rand(n+1)*200
xc = np.append(xc, xc[0])
yc = rnd.rand(n+1)*100
yc = np.append(yc, yc[0])
```

- L'insieme P dei punti vendita è un vettore che va da 1 a n
- L'insieme N dei nodi è costituito da P , preceduto da 0 e succeduto da $n+1$



- L'insieme A degli archi è un vettore dato dalle combinazioni dei vari nodi
- I costi associati a ogni arco sono stati scelti casualmente
- Il tempo di percorrenza di ogni arco è pari alla distanza tra i nodi associati a ogni arco
- La richiesta di Ogni nodo è scelta casualmente
- Le finestre temporali di ogni nodo sono state scelte arbitrariamente da noi
- L'insieme Q della capacità è stato scelto arbitrariamente da noi
- I tempi di servizio di ogni nodo sono stati scelti casualmente

```

P = [il for il in range(1,n+1)]
N = [0] + P + [n+1]

A = [(i,j) for i in N for j in N if i!=j and
      (i,j) != (n+1,0) and (i,j) != (0,n+1)]

c = {(i,j): np.random.randint(2,15) for i,j
      in A}
t = {(i,j): int(np.hypot(xc[i]-xc[j], yc[i]-
      yc[j])) for i,j in A}

```

```

np.random.seed(0)
d = {i: np.random.randint(10,15) for i in P}
d[0] = 0
d[n+1] = 0

a = {0:0, 1:10, 2:10, 3:10, 4:20, 5:20,
     6:20, 7:40, 8:40, 9:40, 10:40, 11:0}
# Orario di apertura
b = {0:200, 1:500, 2:500, 3:600, 4:650,
     5:650, 6:650, 7:680, 8:680, 9:680, 10:680,
     11:700} # Orario di chiusura

V = [1,2,3,4]
Q = {1: 50, 2:50, 3:25, 4:25}

s = {(i,k): np.random.randint(3,5) if i!=0
     and i!=n+1 else 0 for i in N for k in V}

```

3.2 Utilizzo di PuLP

Per prima cosa creiamo il modello tramite la libreria PuLP come segue:

```
model = pulp.LpProblem("VRPTW", pulp.LpMinimize)
```

3.2.1 Variabili di decisione

Si aggiungono le variabili di decisione:

```

arco_var = [(i,j,k) for i in N for j in N for k in V
             if i!=j and (i,j) != (n+1,0) and (i,j) != (0,n+1)]
arco_arrivo = [(i,k) for i in N for k in V]
x = pulp.LpVariable.dicts("x", arco_var, cat="Binary")
l = pulp.LpVariable.dicts("x", arco_arrivo, lowBound
                          = 0, cat="Continuous")

```

3.2.2 Funzione obiettivo

Si aggiunge la funzione obiettivo:

```
model += pulp.lpSum(c[i,j]*x[i,j,k] for (i,j,k) in
    arco_var)
```

In generale, è possibile anche cambiare la funzione obiettivo, ponendo per esempio all'interno della sommatoria il tempo di percorrenza invece dei costi

```
model += pulp.lpSum(t[i,j]*x[i,j,k] for (i,j,k) in
    arco_var)
```

3.2.3 Vincoli

Si aggiungono i vincoli precedentemente definiti:

```
# Vincolo di capacita'
for k in V:
    model += pulp.lpSum(d[i]*x[i,j,k] for i in P for j
        in N if i!=j) <= Q[k]

# Vincolo di unicità dei punti di vendita
for i in P:
    model += pulp.lpSum(x[i,j,k] for j in N for k in V
        if (i,j) if i!=j) == 1

# Vincolo sulla partenza e arrivo del singolo veicolo
for k in V:
    model += pulp.lpSum(x[0,j,k] for j in P) == 1
    model += pulp.lpSum(x[i,n+1,k] for i in P) == 1

# Vincolo di coerenze partenza-arrivo
for k in V:
    model += pulp.lpSum(x[0,j,k] for j in P) == pulp.
        lpSum(x[i,n+1,k] for i in P)

# Vincolo sul flusso dei punti vendita
for j in P:
    for k in V:
        model += pulp.lpSum(x[i,j,k] for i in N if i!=j)
            == pulp.lpSum(x[j,i,k] for i in N if i!=j)

# Vincolo sui sottogiri
```

```

for r in range(2, len(P)+1):
    for S in itertools.combinations(P,r):
        for k in V:
            model += pulp.lpSum(x[i,j,k] for i in S for j
                                in S if i!=j and (i,j)!=(n+1,0) and (i,j)
                                !=(0,n+1)) <= len(S)-1

# Vincolo di inizio servizio
M = 10000000
for k in V:
    for j in N:
        for i in N:
            if i!=j and (i,j)!=(n+1,0) and (i,j)!=(0,n+1):
                model += l[j,k] >= (l[i,k]+s[i,k]+t[i,j]) - M
                    *(1-x[i,j,k])

# Vincolo sulla finestra temporale
for (i, k) in arco_arrivo:
    model += l[i,k] >= a[i]
    model += l[i,k] <= b[i]

# Inizializzazione del deposito
for k in V:
    l[0,k] = a[0]

```

3.2.4 Esecuzione del modello

Possiamo quindi eseguire il modello:

```

model.solve()
print("Costo: ", pulp.value(model.objective))

```

Capitolo 4

Risoluzione tramite algoritmo euristico

Un altro approccio che può essere utilizzato per la risoluzione del VRPTW può essere l'utilizzo di un algoritmo di tipo euristico (precisamente greedy): **l'algoritmo di Clarke and Wright**. Per quanto riguarda la creazione dei dati, abbiamo utilizzato lo stesso codice presente nell'approccio tramite algoritmo esatto.

4.1 Breve descrizione dell'algoritmo

L'algoritmo di Clarke and Wright si basa sul concetto di saving, traducibile con risparmio.

Tale algoritmo definisce di volta in volta delle rotte (chiamate Tour). Inizialmente ogni rotta è costituita da un unico punto vendita, successivamente si prova a unire ogni coppia di rotte in presenza di un eventuale risparmio. La soluzione finale sarà costituita da 4 rotte, una per ogni veicolo. Ovviamente, devono essere anche fatti controlli per quanto riguarda il rispetto di vincoli, tra i quali quello di capacità, quelli temporali e del numero di giri per ogni veicolo.

4.2 Spiegazione del codice

Prima di spiegare i passi principali dell'algoritmo, bisogna fare una breve introduzione a ogni funzione utilizzata.

4.2.1 Verifica della capacità

Questa funzione ha il compito di verificare che sia rispettato il vincolo di capacità di ogni veicolo associato a una determinata rotta. Viene calcolata la domanda totale dei punti vendita appartenenti a una potenziale rotta, per poi essere confrontata con la capacità del veicolo:

```
def verifica_capacita' (rotta, d, capacita'):  
    domanda_totale = 0  
    for i in rotta:  
        domanda_totale += d[i]  
    return domanda_totale <= capacita'
```

4.2.2 Verifica della finestra temporale

In questa funzione si vuole controllare che siano rispettato gli orari di apertura e di chiusura dei punti vendita.

Per ogni punto vendita della rotta calcoliamo il tempo corrente come somma del tempo impiegato fino a quel momento e il tempo di percorrenza dell'ultimo arco.

Controlliamo se tale tempo corrente sia minore dell'orario di apertura del punto vendita, in tal caso attendiamo l'orario di apertura.

Controlliamo quindi che il tempo corrente non sia superiore all'orario di chiusura, nel caso escludiamo il nodo.

Infine controlliamo che il veicolo sia tornato al deposito.

```
def verifica_finestra (rotta, t, s, a, b, veicolo_id):  
    tempo_corrente = 0  
    nodo_precedente = 0                                # Deposito di  
                                                         partenza  
  
    for i in rotta:  
        tempo_corrente += t[nodo_precedente, i]  
  
        # Nel caso in cui arrivo prima dell'apertura,  
        # aspetto
```

```

        if tempo_corrente < a[i]:
            tempo_corrente = a[i]

        # Nel caso in cui arrivo dopo la chiusura, non è rispettato il vincolo
        if tempo_corrente > b[i]:
            return False

        # Aggiunta del tempo di servizio
        print(s[i, veicolo_id])
        tempo_corrente += s[i, veicolo_id]
        nodo_precedente = i

    # Verifico se è tornato al deposito
    if (nodo_precedente, n+1) in t:
        tempo_corrente += t[nodo_precedente, n+1]
        if tempo_corrente > b[n+1]:
            return False

    return True

```

4.2.3 Verifica di un nodo estremo

In questa funzione si vuole trovare la rotta che contiene un nodo estremo (iniziale o finale) e il suo eventuale indice. Scorrendo tra i punti vendita di ogni rotta attiva, si controlla se tale punto vendita sia un estremo. Nel caso in cui lo sia, viene restituita la rotta e il suo indice

```

def trova_rotta_contenente (i, rotte_attive):
    # Scorro tra i nodi delle rotte attive
    for r_attiva in rotte_attive:
        if i in r_attiva:
            indice = r_attiva.index(i)
            # Si controlla che sia un estremo
            if indice==0 or indice==len(r_attiva)-1:
                return r_attiva, indice
    return None, -1

```

4.2.4 Unione delle rotte

Bibliografia