УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет программной инженерии и

компьютерной техники

Лабораторная работа №1

Системы линейных алгебраических уравнений

Вариант метод Гаусса-Зейделя

Выполнила Громилова Мария Дмитриевна,

группа P32311,

Преподаватель Перл Ольга Вячеславовна

г. Санкт-Петербург 2023 г.

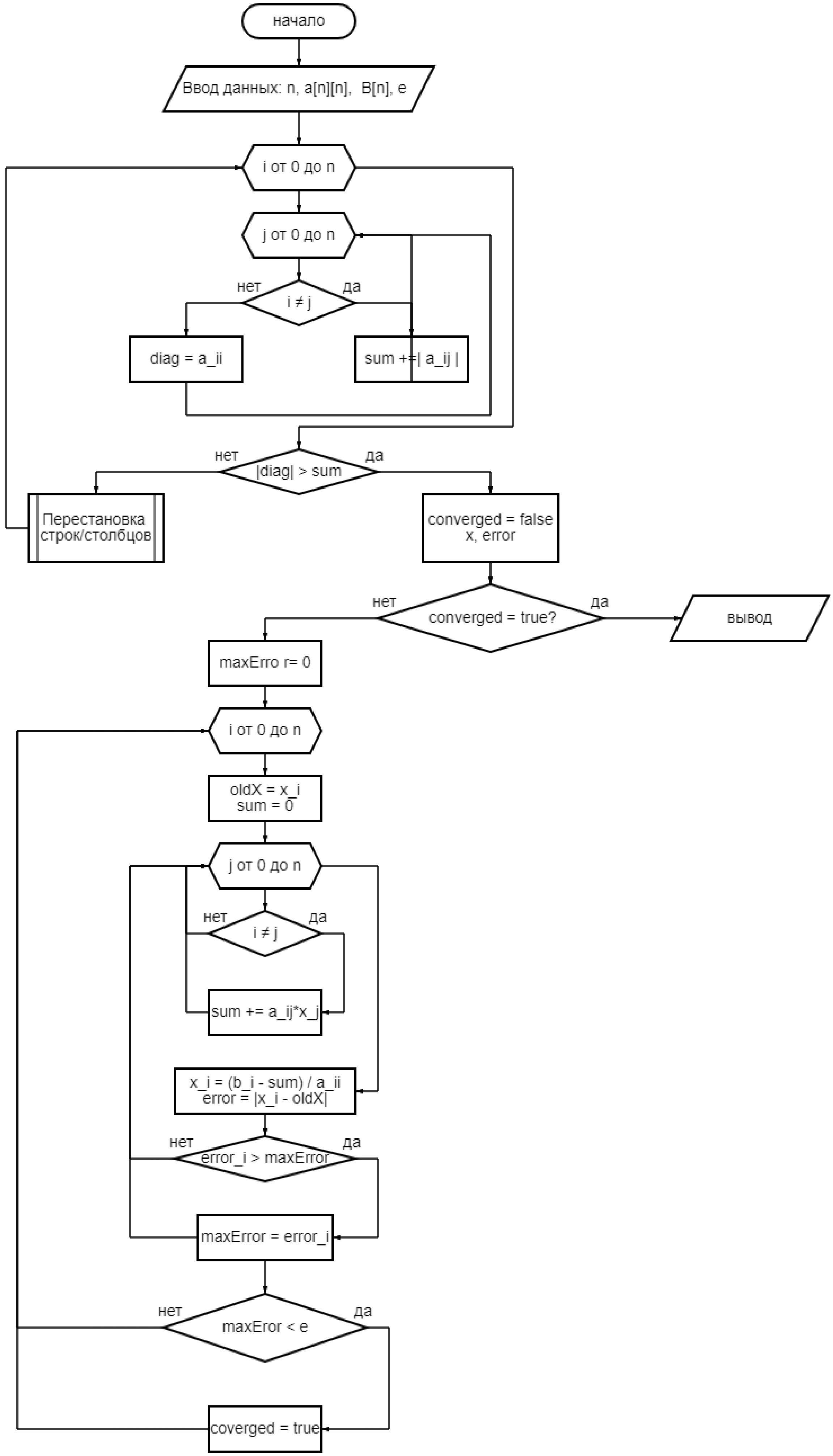
Описание метода расчетные формулы:

Пример решения СЛАУ:

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 3x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 10 \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 20 \end{cases}$$

1. Привести матрицу к диагональному преобладанию
   $|a_{ii}| > \sum_{i,j;i\neq j}^{n} |a_{ij}|$
   $$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 3x_3 = 5 \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 20 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 10 \end{cases}$$
2. Из каждого уравнения выразить x_i
   $$\begin{cases} x_1 = (5 + x_2 - 3x_3)/5 \\ x_2 = (20 - x_1 - 2x_3)/(-4) \\ x_3 = (10 - 2x_1 + x_2)/5 \end{cases}$$
3. Считаем нулевое приближение для каждого уравнения
   $$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -5 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$
4. Для системы из n-уравнений формула будет иметь следующий вид
   $$\begin{cases} x_1^{k+1} = a_{12}x_2^k + a_{13}x_3^k + \cdots + a_{1n}x_n^k + b_1 \\ x_2^{k+1} = a_{22}x_1^{k+1} + a_{23}x_3^k + \cdots + a_{2n}x_n^k + b_2 \\ \ldots \\ x_n^{k+1} = a_{n1}x_1^{k+1} + a_{n2}x_2^{k+1} + \cdots + a_{n,n-1}x_{n-1}^{k+1} + b_n \end{cases}$$
5. Считаем первое приближение
   $$\begin{cases} x_1 = (5 - 5 - 3 \cdot 2)/5 \ = -1{,}2 \\ x_2 = (20 + 1{,}2 - 2 \cdot 2)/(-4) \ = \ -4{,}3 \\ x_3 = (10 + 2 \cdot 1{,}2 - 4{,}3)/5 \ = \ 1{,}62 \end{cases}$$
6. Аналогично считаем следующие приближения, пока не достигнем требуемой погрешности $|x_i^{k+1} - x_i^k| \leq \mathcal{E}$

Блок-схема численного метода:



начало
Ввод данных: n, a[n][n], B[n], e
i от 0 до n
j от 0 до n
нет
i ≠ j
да
diag = a_ii
sum +=| a_ij |
нет
|diag| > sum
да
Перестановка строк/столбцов
converged = false
x, error
нет
converged = true?
да
вывод
maxErro r= 0
i от 0 до n
oldX = x_i
sum = 0
j от 0 до n
нет
i ≠ j
да
sum += a_ij*x_j
x_i = (b_i - sum) / a_ii
error = |x_i - oldX|
нет
error_i > maxError
да
maxError = error_i
нет
maxEror < e
да
coverged = true

Листинг реализованного численного метода программы:

```java
    public static double[] count(double[][] matrixA, double[] columnB, double eps) {
        int n = matrixA.length;
        double[] x = new double[n];
        double[] error = new double[n];
        int iter = 0;
        boolean converged = false;
        while (!converged) {
            double maxError = 0;
            for (int i = 0; i < n; i++) {
                double oldX = x[i];
                double sum = 0;
                for (int j = 0; j < n; j++) {
                    if (i != j) {
                        sum += matrixA[i][j] * x[j];
                    }
                }
                x[i] = (columnB[i] - sum) / matrixA[i][i];
                error[i] = Math.abs(x[i] - oldX);
                if (error[i] > maxError) {
                    maxError = error[i];
                }
            }
            iter++;
            if (maxError < eps) {
                converged = true;
            }
        }
        System.out.println("Столбец неизвестных:");
        for (int i = 0; i < n; i++) {
            System.out.printf("x%d = %.4f%n", i+1, x[i]);
        }
        System.out.printf("Количество итераций: %d%n", iter);
        System.out.println("Столбец погрешностей:");
        for (int i = 0; i < n; i++) {
            System.out.printf("e%d = %.4f%n", i+1, error[i]);
        }
        return x;
    }
}
```

Примеры и результаты работы программы на разных данных:

```
--------------------------------------------------------------------------------
Решение СЛАУ методом Гаусса-Зейделя
--------------------------------------------------------------------------------
Вам доступны следующие способы, для выбора введите соответствующую цифру:
• Пользовательский ввод (1)
• Ввод данных из файла (2)
• Генерация случайных матриц (3)
1
--------------------------------------------------------------------------------
Вы выбрали пользовательский ввод
--------------------------------------------------------------------------------
Введите точность приближения
0.002
Введите размерность матрицы (целое число не более 20)
3
Введите матрицу
1 2 3 4
2 5 3 6
1 2 3 8
Диагонального преобладания достичь невозможно!
```

```
4
4,2 1,3 1 -0,25 -1,56
1,4 -1,3 3,2 -9,5 0,5
1,42 -10,3 0,25 -2,5 2,5
2,2 1,75 -4,5 -0,15 -1,5
```

```
--------------------------------------------------------------------------------
Решение СЛАУ методом Гаусса-Зейделя
--------------------------------------------------------------------------------
Вам доступны следующие способы, для выбора введите соответствующую цифру:
• Пользовательский ввод (1)
• Ввод данных из файла (2)
• Генерация случайных матриц (3)
2
--------------------------------------------------------------------------------
Вы выбрали ввод данных из файла
--------------------------------------------------------------------------------
Введите точность приближения
0.001
Введите путь к файлу
mm
Ошибка! Некорректное название файла
src\matrix.txt
Строки №2 и №3 переставлены
Строки №3 и №4 переставлены
Диагональное преобладание достигнуто!
Матрица А:
    4,20     1,30     1,00    -0,25
    1,42   -10,30     0,25    -2,50
    2,20     1,75    -4,50    -0,15
    1,40    -1,30     3,20    -9,50
Столбец B:
   -1,56     2,50    -1,50     0,50

Столбец неизвестных:
x1 = -0,3068
x2 = -0,2748
x3 = 0,0776
x4 = -0,0341
Количество итераций: 6
Столбец погрешностей:
e1 = 0,0003
e2 = 0,0001
e3 = 0,0002
e4 = 0,0001
```

```
--------------------------------------------------------------------------------
Решение СЛАУ методом Гаусса-Зейделя
--------------------------------------------------------------------------------
Вам доступны следующие способы, для выбора введите соответствующую цифру:
• Пользовательский ввод (1)
• Ввод данных из файла (2)
• Генерация случайных матриц (3)
3
--------------------------------------------------------------------------------
Вы выбрали генерацию случайных матриц
--------------------------------------------------------------------------------
Введите точность приближения
3
Ошибка! Точность должна задаваться числом больше 0 и меньше 1
0.001
Введите размерность матрицы (целое число не более 20)
3
Сгенерировано
Матрица A:
   13,88     3,06     8,53
    5,42     8,86     3,09
    8,90     5,98    15,71
Столбец B:
    6,21     8,08     8,16

Столбец неизвестных:
x1 = 0,2118
x2 = 0,7409
x3 = 0,1179
Количество итераций: 7
Столбец погрешностей:
e1 = 0,0008
e2 = 0,0001
e3 = 0,0004
```

Вывод:

Для использования метода Гаусса-Зейделя требуется приводить матрицу к диагональному преобладанию, что возможно не всегда. Из-за этого, особенно при большом количестве неизвестных затруднительно решить систему этим методом. Также сразу отсеиваются, и программа завершается на некорректных данных. Например, если ввести все нули диагональное преобладание достичь невозможно.

В отличие от прямых методов, ошибки не будут накапливаться по ходу вычислений. Совсем необязательно хранить всю матрицу в памяти, что полезно при больших объемах данных. Но из-за требования диагонального преобладания сложно найти СЛАУ, которая решалась бы этим методом.

Алгоритмическая сложность метода O (l $* n^2$) l – число операций, n – число неизвестных.

В отличии от других, у этого метода минимальная погрешность результата, так как мы можем устанавливать какую Ɛ хотим в итоге получить.