УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет программной инженерии и

компьютерной техники

Лабораторная работа №2

Системы нелинейных алгебраических уравнений

Вариант метод Ньютона, метод хорд, метод касательных

Выполнила Громилова Мария Дмитриевна,

группа P32311,

Преподаватель Перл Ольга Вячеславовна

г. Санкт-Петербург 2023 г.

Описание метода расчетные формулы:

1. **Пример решения нелинейного уравнения методом касательных**

   Алгоритм:

   $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(\dot{x}_n)}$ $\quad\quad |x_{n+1} - x_n| \le \varepsilon$

   Пусть нужно решить уравнение f(x) = x^4 – 16x – 64 = 0

   Интервал [3; 4]

   $x_1 = 4$

   $x_2 = x_1 - \frac{x^4 - 16x - 64}{4x^3 - 16} = 4 - \frac{4^4 - 16 \cdot 4 - 64}{4 \cdot 4^3 - 16} = 3.466$

   $|x_2 - x_1| = 0.534 < \varepsilon$

   Аналогично считаем дальше, пока не получим нужное значение погрешности

2. **Пример решения СНАУ методом Ньютона**

   Алгоритм:

   $F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \dots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$

   $x_{n+1} = x_n - w^{-1}(x_n) \cdot f(x_n)$

   W – Матрица Якоби – матрица производных

   Пусть нужно решить следующую систему

   $\begin{cases} x^2 \cdot y^2 = 1 \\ x^2 - y = 1 \end{cases}$

   Начальное приближение (1; 1)

   $F(x) = \begin{pmatrix} x^2 \cdot y^2 - 1 \\ x^2 - y - 1 \end{pmatrix}$

   $W = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2x & -1 \end{pmatrix}$

   $W_{(1,1)} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

   $W^{-1}_{(1,1)} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 \\ 1/2 & -1/4 \end{pmatrix}$

   (x1; y1) = (1; 1) - $\begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 \\ 1/2 & -1/4 \end{pmatrix}$ * (1; -1)= (0,5; 1,25)

Аналогично считаем дальше, пока не получим нужное значение погрешности

3. Пример решения нелинейного уравнения методом хорд:

Алгоритм:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f(b) - f(x_i)}(b - x_i) \text{ при } f(b)f(x_i) < 0$$

$$x_{i+1} = a - \frac{f(x_i)}{f(x_i) - f(a)}(x_i - a) \text{ при } f(a)f(x_i) < 0$$

F(x) = $2x^4$-$3x^3$-$5x^2$-8x   Интервал [2; 3]

a=2, b=3 f(2)=-28 f(3)=12

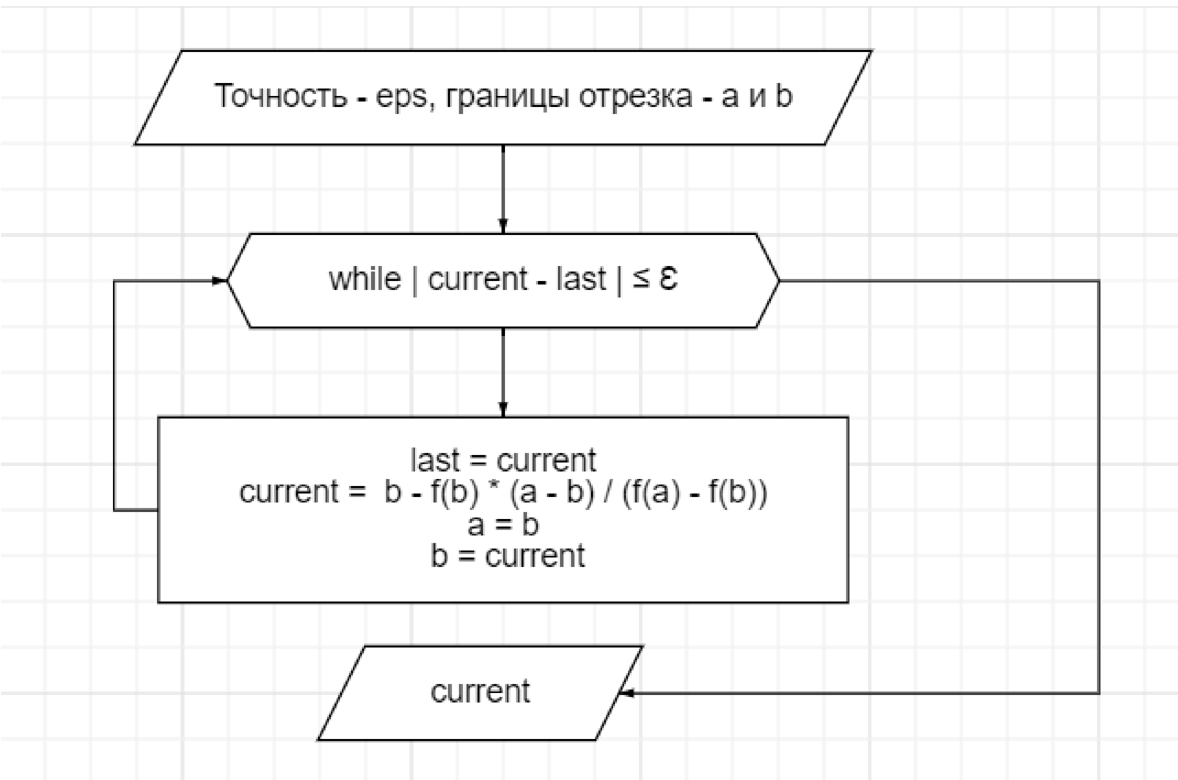
x_1= 2 - $\frac{-28}{12+28}$(3-2) = 2.7

x_2= 2 - $\frac{-10.8}{12+10.8}$(3-2.7) = 2.8316

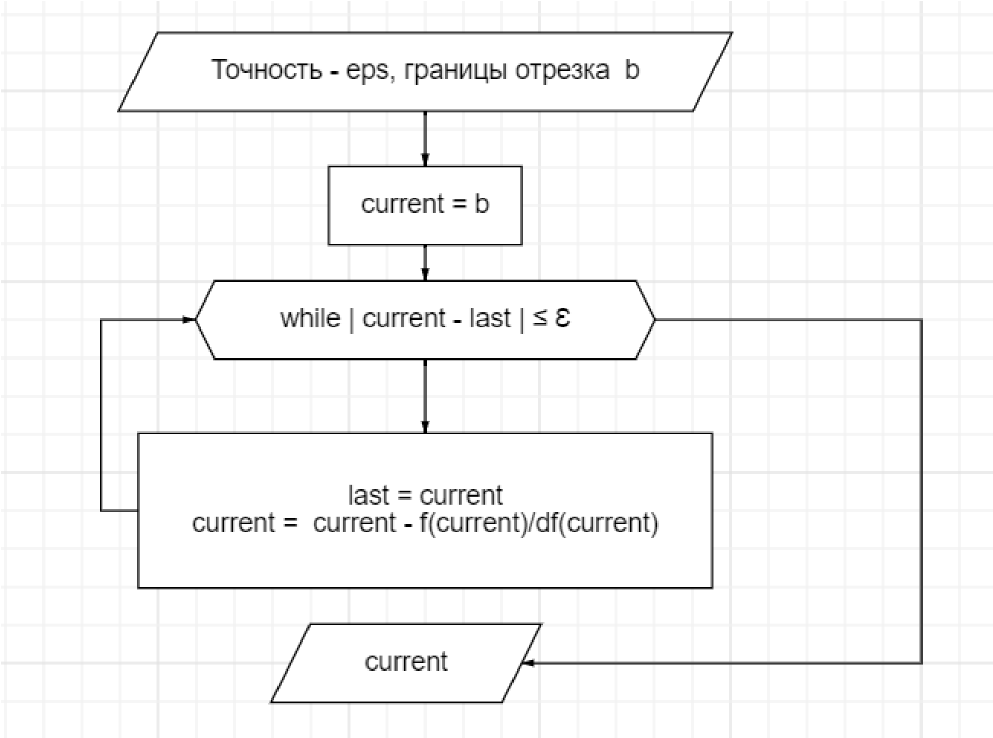
Аналогично считаем дальше, пока не получим нужное значение погрешности

Блок-схема численного метода:

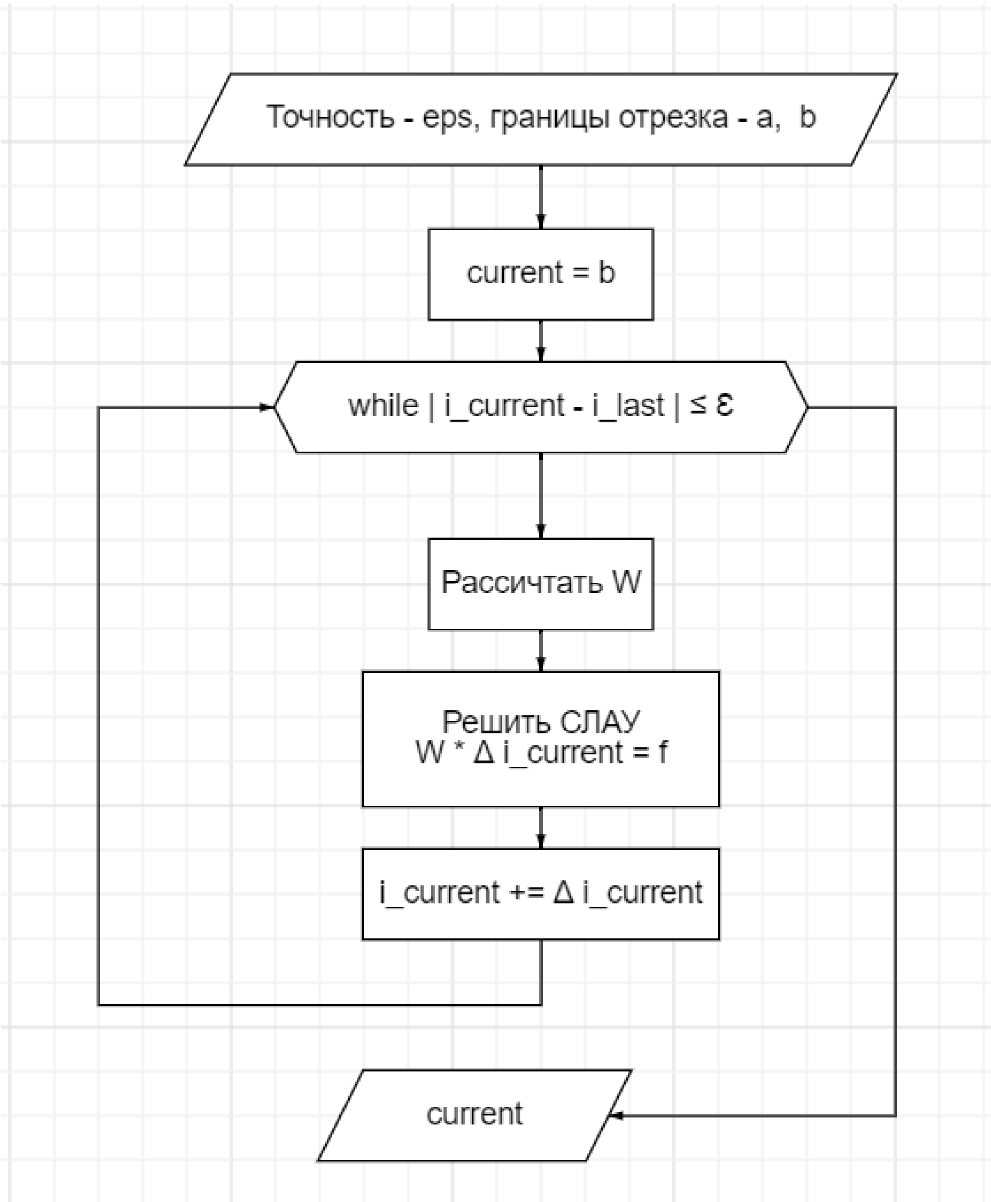
1. Метод хорд



2. Метод касательных



3. Метод Ньютона



Листинг реализованного численного метода программы:

1. Метод Ньютона

```
public static  double[] SystemCalculator(double[] results, double eps) {
    double[] lastResults = {results[0] + 2 * eps, results[1] + 2 * eps};
    double[][] jacobian;
    double[] f;
    double[] deltas;
    while (isEps(results[0], lastResults[0], eps) || isEps(results[1], lastResults[1], eps)) {
        lastResults = Arrays.copyOf(results, results.length);
        jacobian = df(lastResults);
        f = F(lastResults);
        deltas = getUnknownColumn(jacobian, f);
        results[0] = results[0] + deltas[0];
        results[1] = results[1] + deltas[1];
    }
    return results;
}
```

2. Метод хорд

```
public double methodChord(double eps) {
    double newResult = 0;
    double tmp;
    do{
        tmp = newResult;
        newResult = b - f(b) * (a - b) / (f(a) - f(b));
        a = b;
        b = newResult;
    } while(isEps(newResult, tmp, eps));
    return newResult;
}
```

3. Метод касательных

```
public double methodTangent(double eps){
    double newResult = b;
    double df;
    double h = 0.00001;
    double tmp;
    df= (f( x: newResult + h) - f(newResult)) / h;
    do{
        tmp = newResult;
        newResult = newResult - f(newResult) / df;
    } while(isEps(newResult, tmp, eps));
    return newResult;
}
```

Примеры и результаты работы программы на разных данных:

```
--------------------------------------------------------------------------------
Решение СНАУ
--------------------------------------------------------------------------------
Для выбора введите соответствующую цифру:
• Решение нелинейного уравнения (1)
• Решение системы нелинейных уравнений (2)
7
--------------------------------------------------------------------------------
Ошибка! введите 1 или 2 в зависимости от кого, что хотите решить.
1
Вы выбрали решение нелинейного уравнения
--------------------------------------------------------------------------------
1) x^3 - 20x = 2
2) x^4 - 2x = 13450
3) x^5 + x^3 + 12x = 1000
--------------------------------------------------------------------------------
Введите номер нелинейного уравнения
2
--------------------------------------------------------------------------------
Выберите первое приближение:
Левая граница:
8
Правая граница:
12

--------------------------------------------------------------------------------
Введите точность приближения
0.0001
--------------------------------------------------------------------------------
Результат решения уравнения методом Хорд: 10.773439174073943
Результат решения уравнения методом Касательных: 10.773439240192063
Разница между методами:
0,000000066118121
--------------------------------------------------------------------------------
```

```
-------------------------------------------------------------------------------
Решение СНАУ
-------------------------------------------------------------------------------
Для выбора введите соответствующую цифру:
• Решение нелинейного уравнения (1)
• Решение системы нелинейных уравнений (2)
2
-------------------------------------------------------------------------------
Вы выбрали решение системы нелинейных уравнений
1) x^2 + y^2 = 4
   y = 3 * x^2
2) x^3 + 4y = 0
   x^2 + y^2 = 12
-------------------------------------------------------------------------------
Введите номер системы нелинейных уравнений
1
-------------------------------------------------------------------------------
Выберите первое приближение:
Левая граница:
1
Правая граница:
2
-------------------------------------------------------------------------------
Введите точность приближения
0.001

-------------------------------------------------------------------------------
Результат решения системы уравнений методом Ньютона:
X = 0.7832426909052704
Y = 1.8402529747287188
-------------------------------------------------------------------------------
```

Вывод:

Все три метода имеют большой недостаток – они не всегда сходятся к ответу. Например, если начальное приближение будет слишком неточным или если функция имеет разрывы, потому что не будет сходиться к определенному ответу. Также если система имеет несколько решений, метод может сходиться к одному локальному решению, пропуская все остальные. Еще один недостаток – эти методы применимы только к системам и уравнениям с действительными значениями.

Также минус метода Ньютона, так как этот метод включает себя расчет матрицы Якоби, в ситуации с большим количеством уравнений в системе расчет займет очень много времени. В таком случае лучше использовать метод Бройдена или модификации метода Ньютона, использующие приблизительную матрицу Якоби.

Метод касательных будет сходиться быстрее метода хорд, потому что для апроксимации корня он использует больше информации о кривизне функции. С точки зрения вычислений метод касательных более эффективный, так как требует только вычисления функции и ее производной на каждой итерации, а метод хорд требует двух вычислений функции. Но это справедливо только в случае, если производная будет не слишком сложной. Для метода касательных функция должна быть дифференцируема.

Алгоритмическая сложность метода хорд и метода касательных O(n), где n – количество итераций. Для метода Ньютона она будет $O(L \cdot n^3)$, где L – количество итераций.

Все три метода являются очень точными, так как мы сами выбираем желаемую точность и в зависимости от того проводим нужное количество итераций.