УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Лабораторная работа №3

Численное интегрирование

Вариант метод трапеций

Выполнила Громилова Мария Дмитриевна,

группа P32311,

Преподаватель Перл Ольга Вячеславовна

г. Санкт-Петербург 2023 г.

Описание метода расчетные формулы:

Идея метода трапеции в том, чтобы разбить отрезок интегрирования на несколько промежуточных отрезков. Тогда график подынтегральной функции будет приближен ломанной линией. Искомая площадь приближается суммой площадей трапеций.

Пусть есть определенный интеграл

$I = \int_a^b f(x)dx$ – f(x) – функция, непрерывная на отрезке [a; b]

Разобьем отрезок [a; b] на n равных отрезков, $[x_0; x_1]$, $[x_1; x_2]$ … , $[x_{n-1}; x_n]$

При этом x_0 = a, x_n = b

Тогда определенный интеграл можно вычислить приближенно по формуле:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \cdot \left[\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1})\right]$$

$$h = \frac{b-a}{n}$$

$f(x_i)$ – значение подынтегральной функции в точках $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$

Пример:

$I = \int_2^5 \frac{dx}{\ln x}$ Пусть n = 3 $h = \frac{5-3}{3}$ =1

$x_0 = 2,\ x_1 = 3,\ x_2 = 4, x_3 = 5$

$$f(x_0) = f(2) = \frac{1}{\ln 2} \approx 1.443$$

$$f(x_1) = f(3) = \frac{1}{\ln 3} \approx 0.910$$

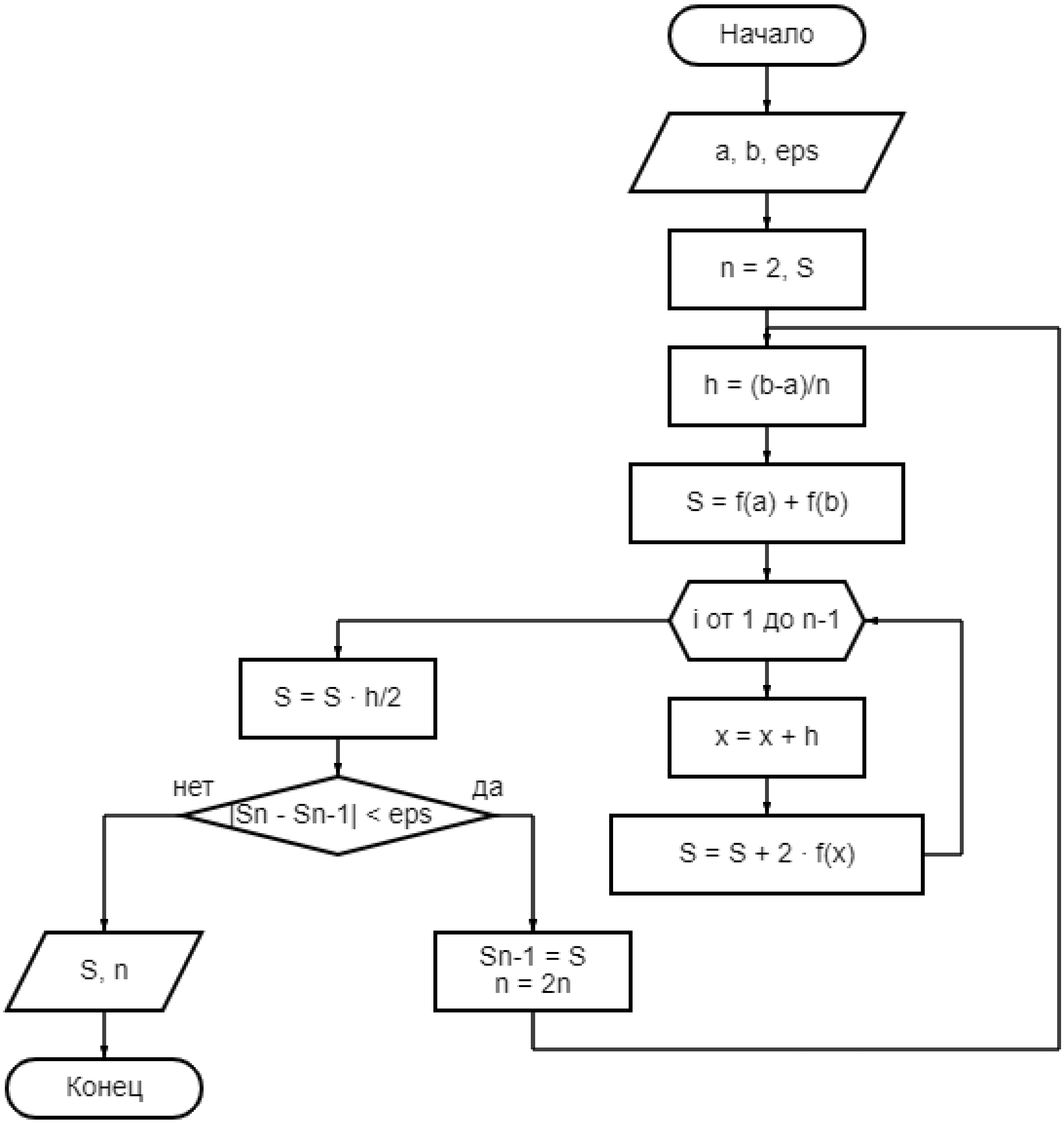
$$f(x_2) = f(4) = \frac{1}{\ln 4} \approx 0.721$$

$$f(x_3) = f(5) = \frac{1}{\ln 5} \approx 0.621$$

$$\int_2^5 \frac{dx}{\ln x} \approx 1 \cdot \left[\frac{1.443 + 0.621}{2} + 0.910 + 0.721\right] = 2.664$$

Далее количество отрезков удваивают, высчитывают разность в значениях. Если полученная оценка меньше, чем требуемая точность, значит мы получили ответ с нужным приближением.

Блок-схема численного метода:



Листинг реализованного численного метода программы

```java
public double numericalIntegration(double a, double b, int n) {
    double h = (b-a)/n;
    double result = 0;
    for(int i = 0; i < n; i++) {
        double start = a + i * h;
        double finish = a + (i + 1) * h;
            if (gapIdentifier(start)) {
                continue;
            }
         result += (finish - start)*(f(start) + f(finish))/2;
    }
    return result;
}

public double calculateResult(double a, double b, double eps){
    int n = 2;
    double previous;
    double current = 0;
    do {
        previous = current;
        current = numericalIntegration(a, b, n);
        n = n * 2;
    }while (isEps(current, previous, eps));
    return current;
}
```

Примеры и результаты работы программы на разных данных:

```
-----------------------------------------------------------------------------
Численное интегрирование
-----------------------------------------------------------------------------
Выберите номер функции для интегрирования:
 1)y = sqrt(|x|)/(x-3)
 2)y = 1/x
 3)y = x/(x-2);
 4)y = (x^2-1)/(x-1)
-----------------------------------------------------------------------------
1
-----------------------------------------------------------------------------
Введите точность приближения
0.00001
-----------------------------------------------------------------------------
Выберите нижний предел интегрирования:
-----------------------------------------------------------------------------
2
-----------------------------------------------------------------------------
Выберите верхний предел интегрирования:
-----------------------------------------------------------------------------
4
На этом интервале происходит разрыв второго рода!
Полученный результат: Infinity
```

```
-----------------------------------------------------------------------------
Численное интегрирование
-----------------------------------------------------------------------------
Выберите номер функции для интегрирования:
 1)y = sqrt(|x|)/(x-3)
 2)y = 1/x
 3)y = x/(x-2);
 4)y = (x^2-1)/(x-1)
-----------------------------------------------------------------------------
2
-----------------------------------------------------------------------------
Введите точность приближения
0.000002
-----------------------------------------------------------------------------
Выберите нижний предел интегрирования:
-----------------------------------------------------------------------------
1
-----------------------------------------------------------------------------
Выберите верхний предел интегрирования:
-----------------------------------------------------------------------------
5
Полученный результат: 1.6094382176097588
```

```
------------------------------------------------------------------------------
Численное интегрирование
------------------------------------------------------------------------------
Выберите номер функции для интегрирования:
 1)y = sqrt(|x|)/(x-3)
 2)y = 1/x
 3)y = x/(x-2);
 4)y = (x^2-1)/(x-1)
------------------------------------------------------------------------------
3
------------------------------------------------------------------------------
Введите точность приближения
0.002
------------------------------------------------------------------------------
Выберите нижний предел интегрирования:
------------------------------------------------------------------------------
1
------------------------------------------------------------------------------
Выберите верхний предел интегрирования:
------------------------------------------------------------------------------
3
На этом интервале происходит разрыв второго рода!
Полученный результат: Infinity
```

```
------------------------------------------------------------------------------
Численное интегрирование
------------------------------------------------------------------------------
Выберите номер функции для интегрирования:
 1)y = sqrt(|x|)/(x-3)
 2)y = 1/x
 3)y = x/(x-2);
 4)y = (x^2-1)/(x-1)
------------------------------------------------------------------------------
3
------------------------------------------------------------------------------
Введите точность приближения
0.001
------------------------------------------------------------------------------
Выберите нижний предел интегрирования:
------------------------------------------------------------------------------
6
------------------------------------------------------------------------------
Выберите верхний предел интегрирования:
------------------------------------------------------------------------------
7
Полученный результат: 1.4465213278293774
```

```
--------------------------------------------------------------------------------
Численное интегрирование
--------------------------------------------------------------------------------
Выберите номер функции для интегрирования:
 1)y = sqrt(|x|)/(x-3)
 2)y = 1/x
 3)y = x/(x-2);
 4)y = (x^2-1)/(x-1)
--------------------------------------------------------------------------------
4
--------------------------------------------------------------------------------
Введите точность приближения
0.0000001
--------------------------------------------------------------------------------
Выберите нижний предел интегрирования:
--------------------------------------------------------------------------------
1
--------------------------------------------------------------------------------
Выберите верхний предел интегрирования:
--------------------------------------------------------------------------------
2
На этом интервале происходит устранимый разрыв первого рода!
Разобьем интервал на части и вычислим их отдельно
Полученный результат: 2.499999940395355
```

Вывод:

Численное интегрирование может применяться для:

• интегрирования функций, известных только в некоторых точках, например, полученных в результате измерений;

• интегрирования сложных выражений, не имеющих элементарных первообразных, либо имеющих слишком громоздкие выражения для них;

• построения методов численного решения уравнений в обыкновенных и частных производных

Рассмотрим следующие методы:

• Метод прямоугольников — это простой метод, который включает в себя деление площади под кривой на прямоугольники одинаковой ширины и сложение их площадей. Он лучше всего подходит для функций, которые являются относительно плоскими или имеют медленно меняющиеся наклоны.
• Метод трапеций предполагает аппроксимацию площади под кривой с использованием трапеций вместо прямоугольников. Он более точен, чем метод прямоугольников, и лучше подходит для функций с умеренным наклоном или кривизной. Метод трапеций также более точен, чем метод прямоугольников, для быстро меняющихся функций.

• Метод Симпсона является наиболее точным из трех методов и лучше всего подходит для гладких функций с низкой степенью вариации. Он работает путем аппроксимации кривой параболической функцией на каждом подинтервале. Этот метод особенно полезен для почти квадратичных функций.

Как правило, выбор метода зависит от характера интегрируемой функции и желаемого уровня точности. Если функция относительно проста и имеет низкую степень вариации, может быть достаточно метода прямоугольников. Если функция сложная или имеет умеренную степень вариации, метод трапеций будет более подходящим. Для очень гладких функций с низкой степенью вариации, метод Симпсона будет наиболее удачным.

При рассмотрении погрешностей квадратурных формул, можем получить следующие значения:

• Для составной формулы прямоугольников погрешность вычисления интеграла для i подинтервала:

$$\overline{\Delta}_{.} = \frac{h_i^3}{24} \max_{x_i \le \xi \le x_{i+1}} \left| f''(\xi) \right|$$

Она является точной для многочленов первой степени.

• Для формулы трапеции погрешность вычисления интеграла для i подинтервала:

$$\overline{\Delta}_T = \frac{h_i^3}{6} \max_{x_i \le \xi \le x_{i+1}} \left| f''(\xi) \right|$$

Она является точной для многочленов первой степени.

• Для формулы Симпсона:

$$\overline{\Delta}_c = \frac{h^5}{90} \max_{x_i \le \xi \le x_{i+2}} \left| f^{(4)}(\xi) \right|$$

Квадратура парабол будет точной и для многочленов 3 степени.