Факультет программной инженерии и

компьютерной техники

Лабораторная работа №4

Интерполяция и аппроксимация

Вариант метод наименьших квадратов

Выполнила Громилова Мария Дмитриевна,

группа P32311,

Преподаватель Перл Ольга Вячеславовна

г. Санкт-Петербург 2023 г.

Описание метода расчетные формулы:

Метод наименьших квадратов - это метод для определения наилучшей прямой или кривой, которая соответствует набору точек на графике. Цель метода - минимизировать сумму квадратов отклонений между теоретическими значениями и фактическими значениями.

Для линейной зависимости y = b + kx будет справедлива следующая система:

$$\begin{cases} bn + k\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ b\sum_{i=1}^{n} x_i + k\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i \end{cases}$$

Для поиска коэффициентов квадратичной зависимости $y=ax^2+bx+c$ следующая система:

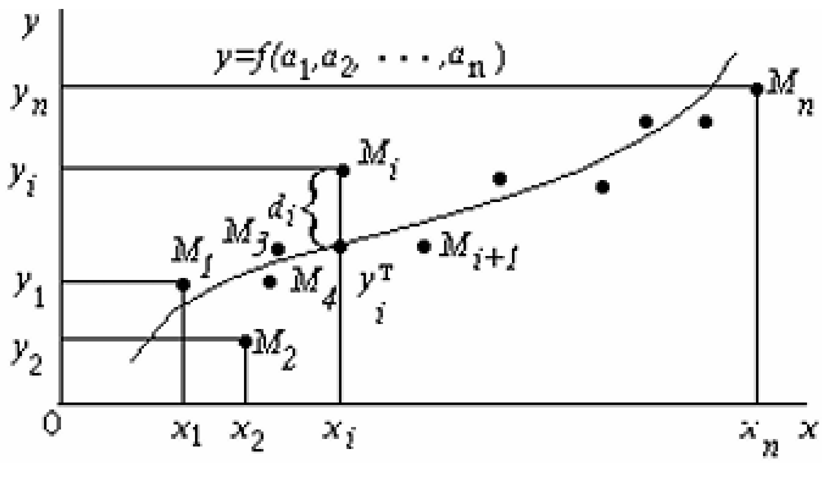
$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^4 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + c\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i^2 \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i + cn = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}$$

Для экспоненциальной y = be^{kx}

Так как поле линеаризации получим ln(y) = ln(a) + kx, верной будет следующая система:

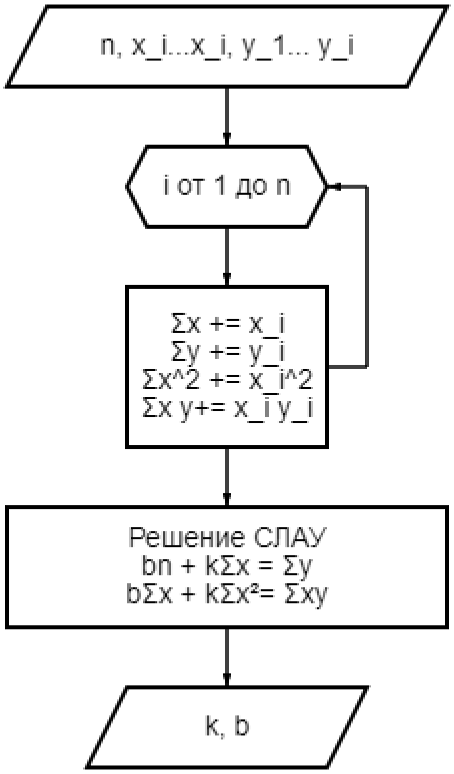
$$\begin{cases} \ln(a)n + k\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} \ln(y_i) \\ \ln(a)\sum_{i=1}^{n} x_i + k\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i \ln(y_i) \end{cases}$$

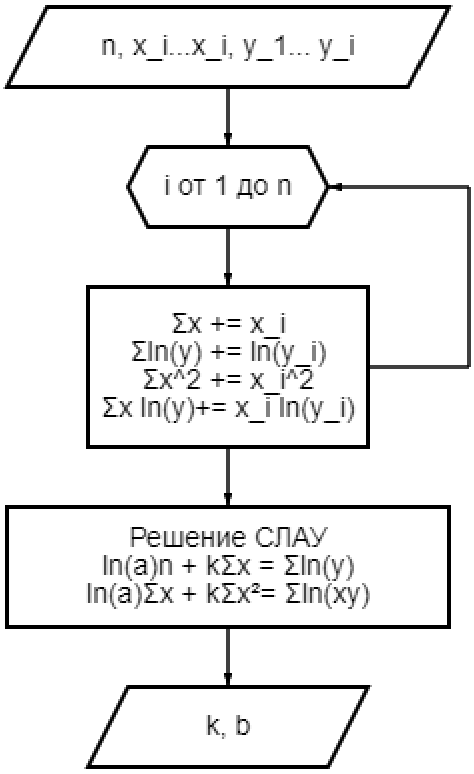
Геометрический смыл: построить кривую так, чтобы сумма расстояний по вертикали от точек до кривой была минимальная



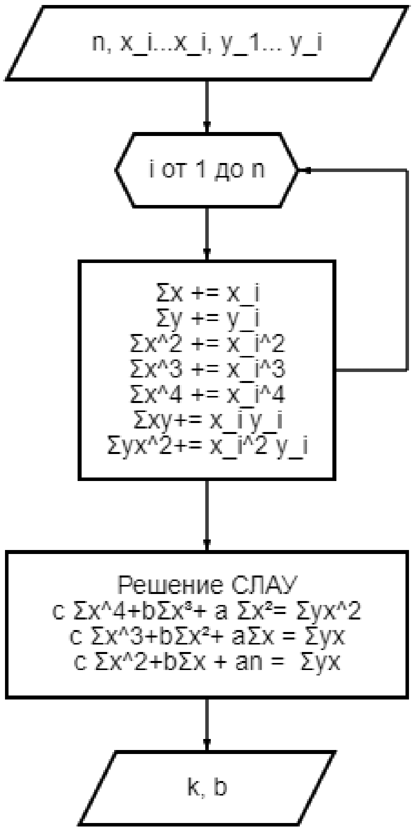
Блок-схема численного метода:

Аппроксимация линейной функции и экспоненциальной функции





Аппроксимация для квадратичной функции



Листинг реализованного численного метода программы

Получение СЛАУ для линейной функции

```
public double[] getCoefficient(double [] x, double[] y){
    return eqSolution.getResult(getEguation(x, y), getResEquation(x, y));
}
public double[][] getEguation(double[] x, double[] y){
    return new double[][]{
            {x.length, getSumX(x)},
            {getSumX(x), getSumX2(x)}
    };
}
public double[] getResEquation(double[] x, double[] y) {
    return new double[]{getSumY(y), getSumXY(x, y)};
}
```

Получение СЛАУ для экспоненциальной функции

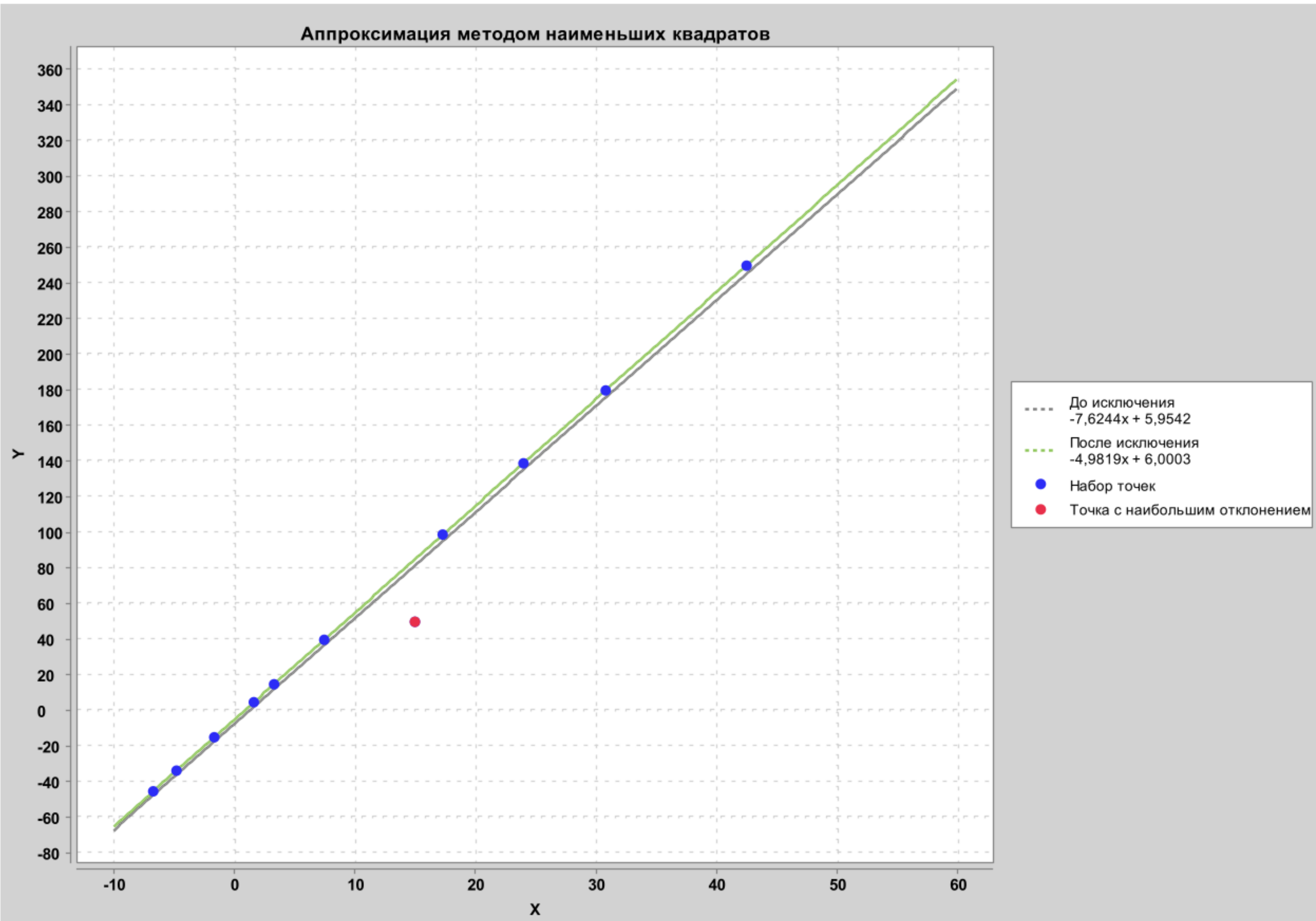
```
public double[] getCoefficient(double [] x, double[] y){
    double[] result = eqSolution.getResult(getEguation(x, y), getResEquation(x, y));
    result[0] = Math.exp(result[0]);
    return result;
}
public double[][] getEguation(double[] x, double[] y){
    return new double[][]{
            {x.length, getSumX(x)},
            {getSumX(x), getSumX2(x)}
    };
}
public double[] getResEquation(double[] x, double[] y) {
    return new double[]{getSumLnY(y), getSumXLnY(x, y)};
}
```

Получение СЛАУ для квадратичной функции

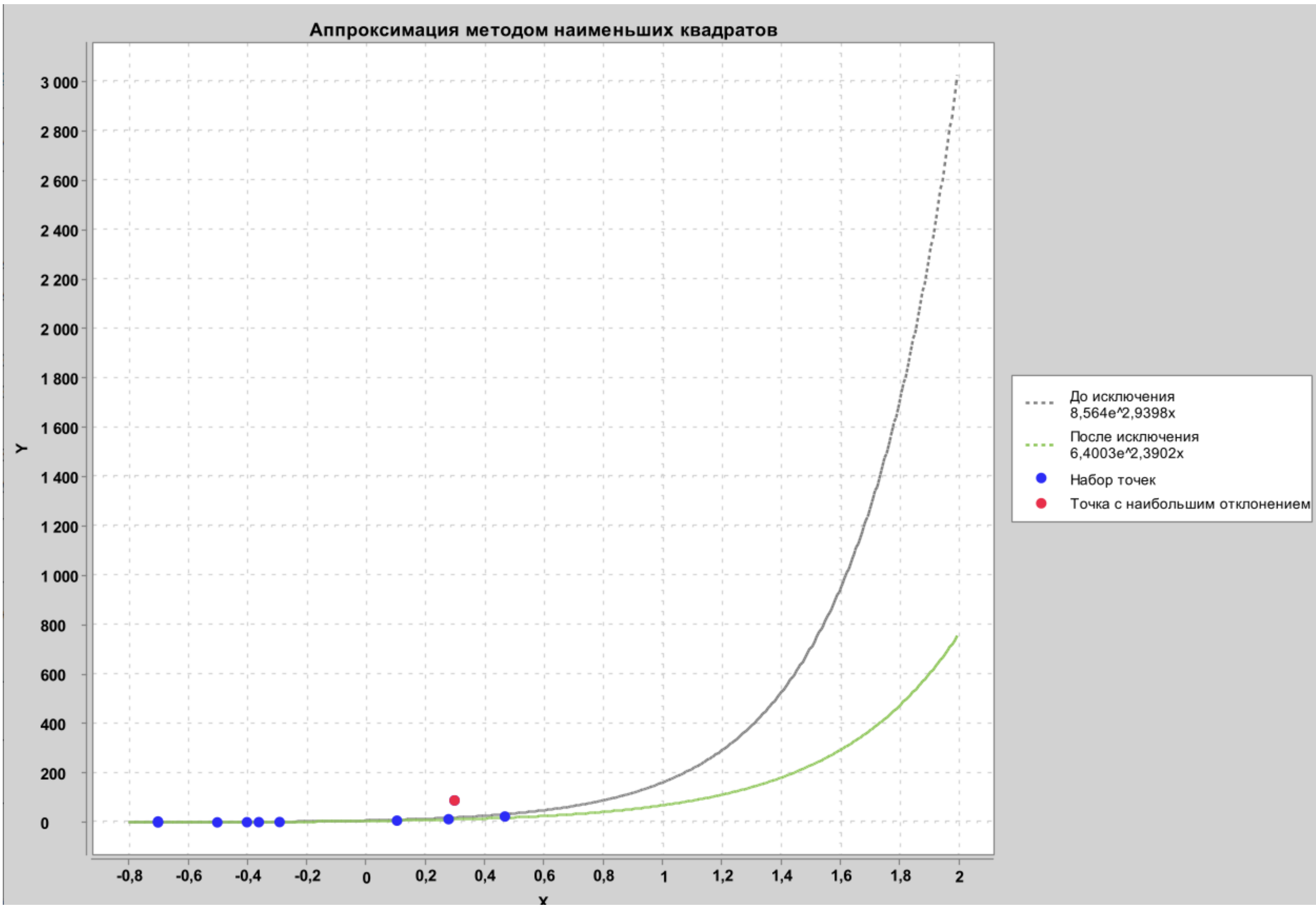
```
public double[] getCoefficient(double [] x, double[] y){
    return eqSolution.getResult(getEguation(x, y), getResEquation(x, y));
}
public double[][] getEguation(double[] x, double[] y){
    return new double[][]{
            {getSumX4(x), getSumX3(x), getSumX2(x)},
            {getSumX3(x), getSumX2(x), getSumX(x)},
            {getSumX2(x), getSumX(x), x.length}
    };
}
public double[] getResEquation(double[] x, double[] y) {
    return new double[]{getSumX2Y(x, y), getSumXY(x, y), getSumY(y)};
}
```

Примеры и результаты работы программы на разных данных:

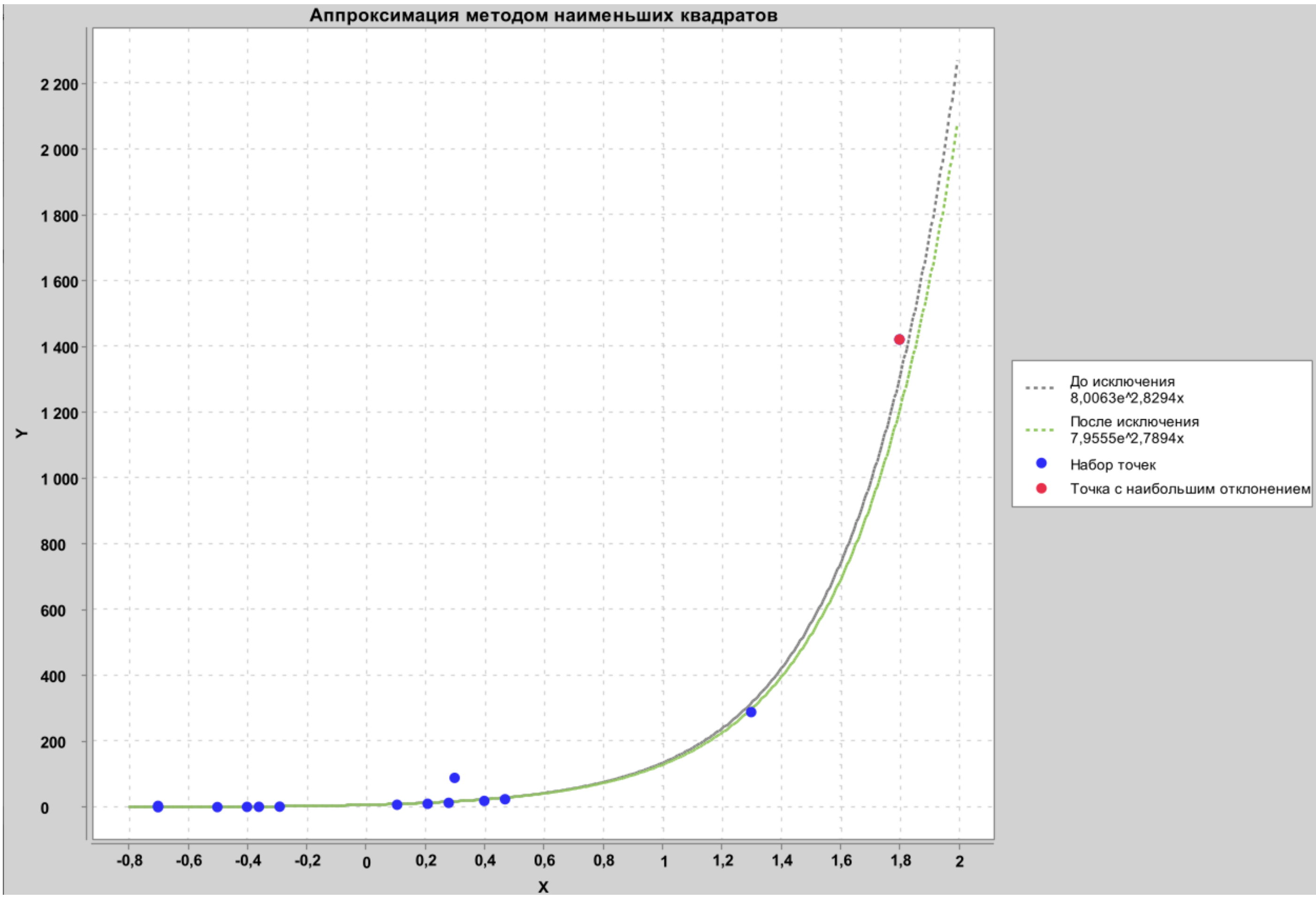
```
-------------------------------------------------------------------------------
Аппроксимация методом наименьших квадратов
-------------------------------------------------------------------------------
Выберите набор точек:
1.
| X | -6,70| -4,77| -1,64|  1,64|  3,32|  7,48| 15,00| 17,30| 24,00| 30,82| 42,50|
| Y |-45,20|-33,60|-14,84|  4,84| 14,92| 39,88| 50,00| 99,00|139,00|179,92|250,00|
2.
| X | -0,70| -0,50| -0,40| -0,36| -0,29| -0,70|  0,28|  0,47|  0,30|  0,11|
| Y |  0,80|  1,20|  1,80|  2,02|  2,50|  4,80| 14,00| 25,00| 90,00|  8,24|
3.
| X | -27,00| -26,00| -23,00| -21,60| -17,00| -14,00|  -4,80|  -4,50|   8,00|   9,34|
| Y |  90,00|  75,00|  46,00|  34,00|   5,00| -10,00| -15,00|  30,00|  60,00|  74,80|
-------------------------------------------------------------------------------
1
-------------------------------------------------------------------------------
Выберите аппроксимирующую функцию:
 1)Линейная y = kx + b
 2)Квадратичная y = ax^2 + bx + c
 3)Экспоненциальная функция y = be^(ax)
-------------------------------------------------------------------------------
1
-------------------------------------------------------------------------------
```



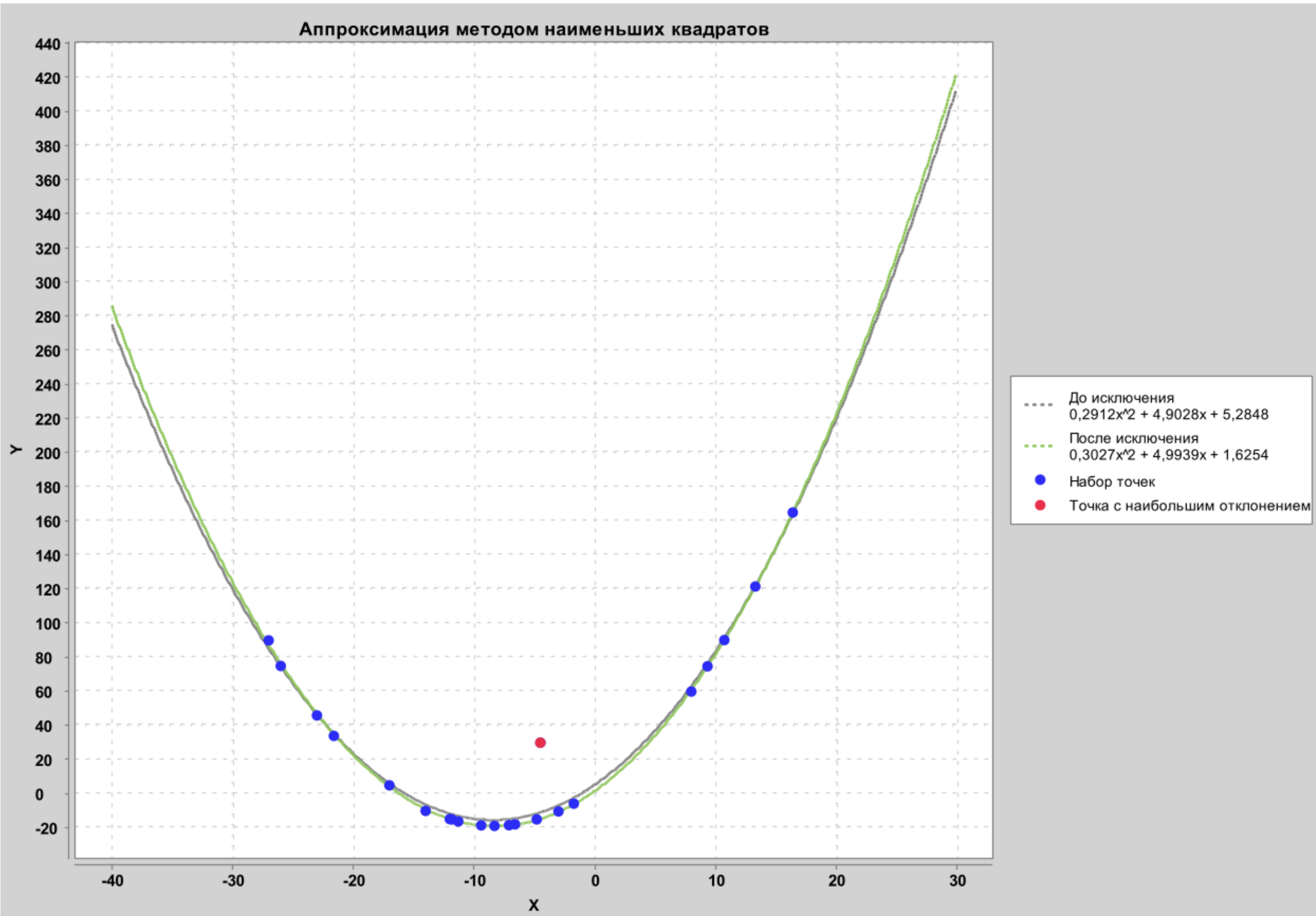
```
---------------------------------------------------------------------------
Аппроксимация методом наименьших квадратов
---------------------------------------------------------------------------
Выберите набор точек:
1.
| X | -6,70| -4,77| -1,64|  1,64|  3,32|  7,48| 15,00| 17,30| 24,00| 30,82| 42,50|
| Y |-45,20|-33,60|-14,84|  4,84| 14,92| 39,88| 50,00| 99,00|139,00|179,92|250,00|
2.
| X | -0,70| -0,50| -0,40| -0,36| -0,29| -0,70|  0,28|  0,47|  0,30|  0,11|
| Y |  0,80|  1,20|  1,80|  2,02|  2,50|  4,80| 14,00| 25,00| 90,00|  8,24|
3.
| X | -27,00| -26,00| -23,00| -21,60| -17,00| -14,00|  -4,80|  -4,50|   8,00|   9,34|
| Y |  90,00|  75,00|  46,00|  34,00|   5,00| -10,00| -15,00|  30,00|  60,00|  74,80|
---------------------------------------------------------------------------
2
---------------------------------------------------------------------------
Выберите аппроксимирующую функцию:
 1)Линейная y = kx + b
 2)Экспоненциальная функция y = be^(ax)
 3)Квадратичная y = ax^2 + bx + c
---------------------------------------------------------------------------
2
---------------------------------------------------------------------------
```



```
-------------------------------------------------------------------------------
Аппроксимация методом наименьших квадратов
-------------------------------------------------------------------------------
Выберите набор точек:
1.
| X | -6,70| -4,77| -1,64|  1,64|  3,32|  7,48| 15,00| 17,30| 24,00| 30,82| 42,50|
| Y |-45,20|-33,60|-14,84|  4,84| 14,92| 39,88| 50,00| 99,00|139,00|179,92|250,00|
2.
| X | -0,70| -0,50| -0,40| -0,36| -0,29| -0,70|  0,28|  0,47|  0,30|  0,11|  0,21|  0,40|  1,30|  1,80|
| Y |  0,80|  1,20|  1,80|  2,02|  2,50|  4,80| 14,00| 25,00| 90,00|  8,24| 11,23| 19,90|290,00|1423,00|
3.
| X | -27,00| -26,00| -23,00| -21,60| -17,00| -14,00|  -4,80|  -4,50|   8,00|   9,34|  10,73|  16,40|  -8,30|
| Y |  90,00|  75,00|  46,00|  34,00|   5,00| -10,00| -15,00|  30,00|  60,00|  74,80|  90,19| 165,00| -18,80|
-------------------------------------------------------------------------------
2
-------------------------------------------------------------------------------
Выберите аппроксимирующую функцию:
 1)Линейная y = kx + b
 2)Экспоненциальная функция y = be^(ax)
 3)Квадратичная y = ax^2 + bx + c
-------------------------------------------------------------------------------
2
-------------------------------------------------------------------------------
```



```
--------------------------------------------------------------------------------
Аппроксимация методом наименьших квадратов
--------------------------------------------------------------------------------
Выберите набор точек:
1.
| X | -6,70| -4,77| -1,64|  1,64|  3,32|  7,48| 15,00| 17,30| 24,00| 30,82| 42,50|
| Y |-45,20|-33,60|-14,84|  4,84| 14,92| 39,88| 50,00| 99,00|139,00|179,92|250,00|
2.
| X | -0,70| -0,50| -0,40| -0,36| -0,29| -0,70|  0,28|  0,47|  0,30|  0,11|
| Y |  0,80|  1,20|  1,80|  2,02|  2,50|  4,80| 14,00| 25,00| 90,00|  8,24|
3.
| X | -27,00| -26,00| -23,00| -21,60| -17,00| -14,00|  -4,80|  -4,50|   8,00|   9,34|
| Y |  90,00|  75,00|  46,00|  34,00|   5,00| -10,00| -15,00|  30,00|  60,00|  74,80|
--------------------------------------------------------------------------------
3
--------------------------------------------------------------------------------
Выберите аппроксимирующую функцию:
 1)Линейная y = kx + b
 2)Экспоненциальная функция y = be^(ax)
 3)Квадратичная y = ax^2 + bx + c
--------------------------------------------------------------------------------
3
--------------------------------------------------------------------------------
```



Вывод:

При использовании метода наименьших квадратов наиболее точные результаты получались в случае с экспоненциальной и линейной функции (формулы для поиска коэффициентов у них почти идентичные), для квадратичной функции потребовалось гораздо больше точек для идентичной точности.

Интерполяция это вид аппроксимации. При интерполяции используется набор известных точек для определения значений в точках между ними. Мы пытаемся построить функцию, которая проходит через все заданные точки. Это позволяет нам определить значение функции в любой точке в пределах интервала, заданного изначальными точками. А при аппроксимации мы получаем функцию, которая приближает набор данных, но не обязательно проходит через все точки. Цель аппроксимации - создать простую функцию, которая может быть использована для анализа и описания данных. В отличие от интерполяции, аппроксимация может включать некоторую степень ошибки, потому что она не обязательно проходит через все заданные точки.

Метод интерполяции полиномом Ньютона и метод полиномом Лагранжа основываются на использовании полиномов для интерполяции заданного набора точек. Оба метода могут быть использованы для интерполяции многочленов любой степени, но обычно используются для интерполяции небольших наборов данных. Основное преимущество метода Ньютона состоит в том, что он позволяет быстро пересчитывать значения полинома, если добавляются новые точки данных. Однако метод Лагранжа может быть более удобным, когда необходимо явно представить полином.

Метод интерполяции кубическими сплайнами используется для интерполяции больших наборов данных и позволяет создавать плавные кривые, которые проходят через заданные точки. Он разбивает область интерполяции на отрезки и создает кубические полиномы на каждом из этих отрезков. Этот метод хорошо подходит для интерполяции кривых и поверхностей, где требуется гладкая кривизна и необходимость в точности интерполяции.

Аппроксимации методом наименьших квадратов хорошо подходит для работы с шумными данными и может использоваться для создания функций, которые не являются многочленами.

Области использования интерполяции и аппроксимации:

1. В физике аппроксимация используется для анализа экспериментальных данных. Например, при измерении зависимости между температурой и давлением в газе, экспериментальные данные могут содержать шум и несовершенства.
2. В экономике интерполяция используется для прогнозирования будущих значений на основе имеющихся данных. Например, для прогнозирования продаж компании на основе исторических данных.
3. В компьютерной графике интерполяция используется для создания плавных и реалистичных движений объектов. Например, интерполяция может быть

использована для создания анимации, которая показывает, как объект изменяет свою форму со временем.

4. В геодезии и картографии интерполяция используется для создания более точных карт и моделей земной поверхности. Например, создание высотных моделей земной поверхности на основе измерений высот в ограниченном количестве точек.
5. В машинном обучении и статистике аппроксимация используется для создания моделей, которые могут предсказывать значения переменных на основе имеющихся данных. Например, аппроксимация может быть использована для создания модели, которая предсказывает цены на недвижимость на основе исторических данных.