БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Факультет прикладной математики и информатики

Лопатин Павел Юрьевич

Отчёт
по лабораторной работе
«Нахождение собственных значений и собственных векторов точными методами»
по ВМА

студента 2 курса 3 группы

Преподаватель:
Щукина Ирина Сергеевна

Минск, 2015

1. Метод Данилевского

1.1. Исходная матрица

$$\begin{pmatrix} 1.36551 & 0.423643 & 0.484165 & 0.540641 \\ 0.423643 & 1.47853 & 0.539069 & 0.59692 \\ 0.484165 & 0.539069 & 1.59732 & 0.655621 \\ 0.540641 & 0.59692 & 0.655621 & 1.71432 \end{pmatrix}$$

1.2. Условие задачи

Найти собственные значения и собственные вектора методом Данилевского и сравнить результаты со встроенными функциями Eigenvalues и Eigenvectors.

1.3. Теория

Сущность метода А. М. Данилевского заключается в преобразовании исходной матрицы в подобную ей матрицу Фробениуса при помощи формулы $P=B^{-1}*A*B$ с помощью матрицы подобия B. Коэффициенты характеристического уравнения матрицы A определяются первой строкой матрицы P .
Согласно методу А.М. Данилевского, переход от матрицы A к подобной ей матрице P осуществляется с помощью n-1 преобразований подобия, последовательно преобразующих строки матрицы A, начиная с последней, в соответствующие строки матрицы P .
Матрица B строится по формулам:

$$b_{n-1,j} = -\frac{a_{nj}}{a_{n,n-1}} \quad j \neq n\text{-}1 \ ;$$

$$b_{n-1,n-1} = \frac{1}{a_{n,n-1}}$$

Нахождение собственных векторов
Пусть y - собственный вектор матрицы P , отвечающий собственному значению λ . Тогда Py = λy или в координатном виде:

$$\begin{cases} p_1 y_1 + p_2 y_2 + \ldots + p_{n-1} y_{n-1} + p_n y_n = \lambda y_1 \\ y_1 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = \lambda y_2 \\ \qquad y_2 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = \lambda y_3 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \qquad\qquad\qquad y_{n-1} \qquad\qquad = \lambda y_n \end{cases}$$

Полагая y_n=1 , мы получим, используя последовательно эти уравнения с низу вверх, y=(λ_{n-1}, λ_{n-2},…, λ,1). Так как матрицы A и P подобны, то P=B^{-1}*A*B. Тогда B^{-1}ABy=λy или ABy=λBy. Значит собственным вектором матрицы, отвечающим собственному значению λ будет являться вектор:

$$\vec{x} = B\vec{y} = B \cdot \begin{pmatrix} \lambda^{n-1} \\ \lambda^{n-2} \\ \dots \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix}$$

1.4. Код

```
l = {{1.1161, 0.1254, 0.1397, 0.1490}, {0.1582, 1.1657, 0.1768, 0.1871},
   {0.1968, 0.2071, 1.2168, 0.2271}, {0.2368, 0.2471, 0.2568, 1.2671}};
m = D1 = D2 = Transpose[l].l;
d = {IdentityMatrix[4], IdentityMatrix[4], IdentityMatrix[4]};
b = {IdentityMatrix[4], IdentityMatrix[4], IdentityMatrix[4]};
B = IdentityMatrix[4];
n = 4;
For[i = 1, i < n, i++,
 B = IdentityMatrix[4];
 D1[[n - i + 1]][[n - i]] = -1;
 For[j = 1, j ≤ n, j++,
  B[[n - i]] [[j]] = -D1[[n - i + 1]][[j]] / D2[[n - i + 1]][[n - i]];];
 b[[i]] = B;
 BIn = Inverse[B];
 D1 = D2 = BIn.D2.B;
 d[[i]] = D1;
]
f[x_] = x^4 - x^3 * d[[3]][[1]][[1]] - x^2 * d[[3]][[1]][[2]] - x * d[[3]][[1]][[3]] -
   d[[3]][[1]][[4]];
Print["P(x) = ", f[x]]
EigV = x /. Solve[f[x] == 0, x];
Print["EigV = ", MatrixForm[EigV]];
B = b[[1]].b[[2]].b[[3]];
Print[MatrixForm[B]];
For[i = 1, i <= n, i++,
 y = {Power[EigV[[i]], n - 1], Power[EigV[[i]], n - 2], Power[EigV[[i]], n - 3],
   Power[EigV[[i]], n - 4]};
 x = B.y;
 Print["x", i, "=", MatrixForm[Normalize[x]]];
]
```

1.5. Результаты

Характеристическое уравнение матрицы А и собственные значения:

$$P(x) = 3.08157 - 10.3187\,x + 12.3928\,x^2 - 6.15569\,x^3 + x^4$$

$$EigV = \begin{pmatrix} 0.96793 \\ 0.998515 \\ 0.999614 \\ 3.18963 \end{pmatrix}$$

Подобная матрица В для вычисления собственных собственных векторов, $B=B_1B_2B_3$:

$$\begin{pmatrix} 20\,533.6 & -105\,911. & 148\,796. & -63\,419.4 \\ -37\,676.3 & 194\,281. & -272\,807. & 116\,204. \\ 17\,370.5 & -89\,549.4 & 125\,682. & -53\,505.5 \\ 0. & 0. & 0. & 1. \end{pmatrix}$$

После нормирования векторов на свою длину, получим ортонормированную систему собственных векторов матрицы А:

$$x1=\begin{pmatrix} -0.735428 \\ -0.284601 \\ 0.205904 \\ 0.579441 \end{pmatrix}$$

$$x2=\begin{pmatrix} 0.528317 \\ -0.708344 \\ -0.233625 \\ 0.405646 \end{pmatrix}$$

$$x3=\begin{pmatrix} -0.0706211 \\ 0.44401 \\ -0.793384 \\ 0.410378 \end{pmatrix}$$

$$x4=\begin{pmatrix} 0.418378 \\ 0.469154 \\ 0.523035 \\ 0.575578 \end{pmatrix}$$

Результат работы функций Eigenvalues и Eigenvectors:

$$\begin{pmatrix} -0.418378 & -0.469154 & -0.523035 & -0.575578 \\ 0.0706211 & -0.44401 & 0.793384 & -0.410378 \\ 0.528317 & -0.708344 & -0.233625 & 0.405646 \\ -0.735428 & -0.284601 & 0.205904 & 0.579441 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3.18963 \\ 0.999614 \\ 0.998515 \\ 0.96793 \end{pmatrix}$$

1.6. Вывод

Данный метод относится к точным методам и позволяет решать полную проблему собственных значений. С его помощью можно находить точное решение данной проблемы, единственные погрешности которые возникают, возникают за счёт неточности машинных вычислений. Его асимптотика равна O(N^3), что позволяет также достаточно быстро находить требуемый результат.

1. Метод Крылова

1.1. Исходная матрица

$$\begin{pmatrix} 1.36551 & 0.423643 & 0.484165 & 0.540641 \\ 0.423643 & 1.47853 & 0.539069 & 0.59692 \\ 0.484165 & 0.539069 & 1.59732 & 0.655621 \\ 0.540641 & 0.59692 & 0.655621 & 1.71432 \end{pmatrix}$$

1.2. Условие задачи

Найти собственные значения и собственные вектора методом Данилевского и сравнить результаты со встроенными функциями Eigenvalues и Eigenvectors.

1.3. Теория

Согласно тождеству Гамильтона – Кели, матрица A удовлетворяет своему характеристическому уравнению, поэтому

$$A^n - p_1 A^{n-1} - p_2 A^{n-2} - \ldots - p_{n-1} A - p_n E = 0$$

Возьмём ненулевой вектор y_0 и домножим на него справа обе части неравенства:

$$A^n \vec{y}_0 - p_1 A^{n-1} \vec{y}_0 - p_2 A^{n-2} \vec{y}_0 - \ldots - p_{n-1} A \vec{y}_0 - p_n \vec{y}_0 = \vec{0}$$

Положим $\vec{y}_k = A^k \vec{y}_0 \qquad k=1, 2, \ldots, n,$

Тогда равенство приобретает вид

$$\vec{y}_n - p_1 \vec{y}_{n-1} - p_2 \vec{y}_{n-2} - \ldots - p_{n-1} \vec{y}_1 - p_n \vec{y}_0 = \vec{0}$$

где $\vec{y}_k = \begin{pmatrix} y_{1k} \\ \vdots \\ y_{nk} \end{pmatrix} \quad k=0, 1, \ldots, n.$

Векторное равенство эквивалентно следующей системе алгебраических уравнений, откуда можно найти неизвестные p1,p2,…,pn, которые определяют коэффициенты характеристического уравнения матрицы:

$$p_1 y_{i,n-1} + p_2 y_{i,n-2} + \ldots + p_{n\text{-}1} y_{i1} + p_n y_{i0} = y_{in}$$
$$i = 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ n$$

Собственные вектора найдём по следующей формуле, которая определяет вектор, соответсвующий данному собственному значению с точностью до числового множителя:

$$c_i Q_i(\lambda_i)\vec{x}_i = \vec{y}_{n-1} + q_{1i}\vec{y}_{n-2} + \ldots + q_{n-1,i}\vec{y}_0 \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$$

Коэфиценты qi находятся по схеме Горнера:

$$q_{0i} = 1\ \ ,\quad q_{ji} = \lambda_i q_{j-1,i} - p_j \qquad j = 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ n\text{-}1$$

1.4. Код

```
l = {{1.1161, 0.1254, 0.1397, 0.1490}, {0.1582, 1.1657, 0.1768, 0.1871},
   {0.1968, 0.2071, 1.2168, 0.2271}, {0.2368, 0.2471, 0.2568, 1.2671}};
m = Transpose[l].l;
Print[MatrixForm[m]];
y0 = yn = {1, 0, 0, 0};
n = 4;
EigSys = Table[0, {i, n}, {j, n}];
EigSys[[n]] = y0;
Print["y", 0, " = ", EigSys[[n]]]
For[i = 1, i < n, ++i,
 EigSys[[n - i]] = m.EigSys[[n - i + 1]];
 Print["y", i, " = ", EigSys[[n - i]]]]
yn = m.EigSys[[1]];
Print["y", 4, " = ", yn]
EigSys1 = Transpose[EigSys];
sol = LinearSolve[EigSys1, yn];
f[x_] = x^4 - x^3*sol[[1]] - x^2*sol[[2]] - x*sol[[3]] - sol[[4]];
Print["P(x) = ", f[x]]
EigV = x /. Solve[f[x] == 0, x];
Print["EigV = ", MatrixForm[EigV]];
For [i = 1, i <= n, i++,
 q01 = 1;
 q11 = EigV[[i]]*q01 - sol[[1]];
 q21 = EigV[[i]]*q11 - sol[[2]];
 q31 = EigV[[i]]*q21 - sol[[3]];
 x1 = EigSys[[1]] + q11*EigSys[[2]] + q21*EigSys[[3]] + q31*EigSys[[4]];
 Print["x", i, "=", MatrixForm[Normalize[x1]]];]
Print[MatrixForm[Eigenvectors[m]]];
Print[MatrixForm[Eigenvalues[m]]];
```

1.5. Результаты

Вычисленные по формулам вектора y_n:

```
y0 = {1, 0, 0, 0}
y1 = {1.36551, 0.423643, 0.484165, 0.540641}
y2 = {2.5708, 1.78858, 2.01733, 2.23539}
y3 = {6.45344, 6.1554, 6.89676, 7.61231}
y4 = {18.8746, 20.0967, 22.4499, 24.7349}
```

Характеристическое уравнение матрицы A и собственные значения:

$$P(x) = 3.08157 - 10.3187\,x + 12.3928\,x^2 - 6.15569\,x^3 + x^4$$

$$EigV = \begin{pmatrix} 0.96793 \\ 0.998515 \\ 0.999614 \\ 3.18963 \end{pmatrix}$$

Собственные вектора:

$$x1 = \begin{pmatrix} -0.735428 \\ -0.284601 \\ 0.205904 \\ 0.579441 \end{pmatrix}$$

$$x2 = \begin{pmatrix} 0.528317 \\ -0.708345 \\ -0.233625 \\ 0.405646 \end{pmatrix}$$

$$x3 = \begin{pmatrix} -0.070621 \\ 0.44401 \\ -0.793384 \\ 0.410378 \end{pmatrix}$$

$$x4 = \begin{pmatrix} 0.418378 \\ 0.469154 \\ 0.523035 \\ 0.575578 \end{pmatrix}$$

Собственные вектора и значения, полученные с помощью функций Eigenvalues и Eigenvectors:

$$\begin{pmatrix} -0.418378 & -0.469154 & -0.523035 & -0.575578 \\ 0.0706211 & -0.44401 & 0.793384 & -0.410378 \\ 0.528317 & -0.708344 & -0.233625 & 0.405646 \\ -0.735428 & -0.284601 & 0.205904 & 0.579441 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3.18963 \\ 0.999614 \\ 0.998515 \\ 0.96793 \end{pmatrix}$$

1.6. Вывод

Метод Крылова, так же как и метод Данилевского, является точным методом решения проблемы собственных значений. Он позволяет находить решения с маленькой погрешностью (погрешность возникает только за счёт погрешности арифметических операций).

Результаты данного метода совпадают с результатами метода Данилевского.