БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Факультет прикладной математики и информатики

Лопатин Павел Юрьевич

Методы численного анализа

Отчёт по лабораторной работе №1

студента 2 курса 3 группы

Преподаватель:
Полещук Максим Игоревич

Минск, 2016

1. Исходное уравнение

$$x^2 \arctan\left(\frac{7x}{13}\right), [-3;3]$$

2. Условие задачи

Произвести табулирование заданной функции, используя чебышевскую сетку с m узлами, где $m \in \{3,4,5,6,7,8,9,10\}$. Для каждого m построить интерполяционный многочлен Ньютона на чебышевской сетке.

Дополнительно представить значения аргумента x_n, приближённые значения функции $P(x_n)$, точные значения функции и оценку погрешности $|r_m(x_n)|$ в $3m$ точках исходного отрезка, распределённых равномерно.

3. Теория

Интерполяционные полиномы в форме Ньютона удобно использовать, если точка интерполирования находится вблизи начала (прямая формула Ньютона) или конца таблицы (обратная формула Ньютона).

Интерполяционный член в форме Ньютона имеет вид:

$$P_n(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + A_n(x - x_0)\cdots(x - x_{n-1}).$$

Преимуществом этой формы является простота нахождения коэффициентов:

$A_0 = f(x_0),\ A_1 = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$, а также тот факт, что

$$P_k(x) = P_{k-1}(x) + A_k(x - x_0)\cdots(x - x_{k-1}).$$

Если узлы интерполирования $x_0, x_1, \ldots, x_n$ выбраны в порядке близости к точке интерполирования x, то можно утверждать, что многочлен любой степени $P_0(x), P_1(x), \ldots, P_n(x)$ обеспечивает минимум погрешности $|f(x) - P_i(x)|$ среди всех многочленов данной степени, построенных по данной таблице узлов.

Разделенные разности вычисляются по формулам:

$$\text{р.р. 1-го пор. } f(x_i, x_{i+1}) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i},$$

$$\text{р.р. 2-го пор. } f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}) = \frac{f(x_{i+1}, x_{i+2}) - f(x_i, x_{i+1})}{x_{i+2} - x_i},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\text{р.р. n-го пор. } f(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \frac{f(x_1, \ldots, x_n) - f(x_0, \ldots, x_{n-1})}{x_n - x_0}.$$

Формула оценки погрешности интерполяции :

$$|r_n(x)| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}}$$

Узлы чебышевской сетки вычисляются по следующей формуле:

$$x_i = \frac{1}{2}\left[(b+a) + (b-a)\cos\frac{2i+1}{2n+2}\pi\right],\ i = \overline{0, n}.$$

4.Выполнение

m=3, n=2

	x_n	f(x_n)	P(x_n)
x_0	2,598	6.41	6.41383
x_1	0	0	8.88178*10^-16
x_2	-2,598	-6.41	-6.41383

m=4, n=3

	x_n	f(x_n)	P(x_n)
x_0	2,772	7.53	7.53182
x_1	1,148	0.73	0.729762
x_2	-1,148	-7.30	-0.729762
x_3	-2,772	-7.53	-7.53182

m=5, n=4

	x_n	f(x_n)	P(x_n)
x_0	2,853	8.09	8.08998
x_1	1,763	2,362	2.36161
x_2	0	0	-8.88178*10^-16
x_3	-1,763	-2,362	-2.36161
x_4	-2,853	-8.09	-8.08998

m=6, n=5

	x_n	f(x_n)	P(x_n)
x_0	2,898	8.40	8.4043
x_1	2,121	3,833	3.83266
x_2	0.7765	0.2387	0.238746
x_3	-0.7765	-0.2387	-0.238746
x_4	-2,121	-3,833	-3.83266
x_5	-2,898	-8.40	-8.4043

m=7, n=6

	x_n	f(x_n)	P(x_n)
x_0	2,942	8.72	8.72471
x_1	2,494	5.79	5.79157
x_2	1,667	2,032	2.0318
x_3	0.5853	0.1046	0.104576
x_4	-0.5853	-0.1046	-0.104576
x_5	-1,667	-2,032	-2.0318
x_6	-2,494	-5.79	-5.79157
x_7	-2942	-8.72	-8.72471

m=8, n=7

	x_n	f(x_n)	P(x_n)
x_0	2,963	8.88	8.87571
x_1	2,673	6.88	6.88486
x_2	2,121	3,833	3.83266
x_3	1,362	1,174	1.20654
x_4	0.4693	0.0545	0.174356
x_5	-0.4693	-0.0545	0.213457
x_6	-1,362	-1,174	-0.711106
x_7	-2,121	-3,833	-3.45174
x_8	-2,673	-6.88	-7.21819
x_9	-2,963	-8.88	-10.0718

5. Оценка погрешности в 3m точках на заданном отрезке при равномерном распределении.

Рассмотрим случай при m = 4. Получим шаг интерполирования h = 6/11 и 12 узлов интерполирования.

	x_n	$R_3(x_0)$
x_0	-3,000	0.297459
x_1	-2,455	0.221832
x_2	-1,909	0.246239
x_3	-1,364	0.0693811
x_4	-0.8182	0.0686908
x_5	-0.2727	0.0515622
x_6	0.2727	0.0515622
x_7	0.8182	0.0686908
x_8	1,364	0.0693811
x_9	1,909	0.246239
x_{10}	2,455	0.221832
x_{11}	3,000	0.297459