МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА

Лабараторная работа №4
студента 2 курса 3 группы
Лопатин Павел Юрьевич

Преподаватель
Полещук Максим Александрович

Минск 2016

1 Условие

В соответствии с вариантом, равным номеру в списке академической группы, значения функции $f(x)$, заданной на интервале $[a, b]$, даны в узлах $x_i = a + \frac{b-a}{n} * i, i = \overline{0, n}, n = 50$. Значения функции и узлы сетки заданы с тремя значащими цифрами. Построить квадратичную функцию $P(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$, которая даёт для $f(x)$ наилучшее приближение по методу наименьших квадратов. Вывести значения коэффициентов a_0, a_1, a_2 с тремя значащими цифрами и среднеквадратичного уклонения с произвольным числом значащих цифр. Для вычислений использовать тип float.

2 Вариант

$$x^2 * \mathrm{arctg}(7 * x/13), x \in [-3, 3], n = 50 \tag{1}$$

3 Теория

Пусть функция $y = f(x)$ задана таблицей своих значений: $y_i = f(x_i), i = \overline{0, n}$. Требуется найти многочлен фиксированной степени m, для которого среднеквадратичное отклонение $\sigma = \sqrt{\frac{1}{n+1}\sum\limits_{i=0}^{n}(P_m(x_i) - y_i)^2}$ минимально.

Так как многочлен $P_m(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m$ определяется своими коэффициентами, то фактически нужно подобрать набор кофициентов $a_0,\ a_1, \dots,\ a_m$, минимизирующий функцию

$$\Phi(a_0, a_1, \dots, a_m) = \sum_{i=0}^{n}(P_m(x_i) - y_i)^2 = \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{m} a_jx_i^j - y_i\right)$$

Используя необходимое условие экстремума, $\frac{\delta\Phi}{\delta a_k} = 0,\ k = \overline{0, m}$ получаем так называемую нормальную систему метода наименьших квадратов:

$$\sum_{j=0}^{m}\left(\sum_{i=0}^{n} x_i^{j+k}\right)a_j = \sum_{i=0}^{n} y_ix_i^k,\ k = \overline{0, m}$$

Полученная система есть система алгебраических уравнений относительно неизвестных $a_0,\ a_1,$
$\dots,\ a_m$. Можно показать, что определитель этой системы отличен от нуля, то есть решение существует и единственно. Однако при высоких степенях m система является плохо обусловленной. Поэтому метод наименьших квадратов применяют для нахождения многочленов, степень которых не выше 5.

Если же используется многочлен второй степени $P_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, то нормальная система уравнений примет вид:

$$\begin{cases} (n+1)a_0 + \left(\sum\limits_{i=0}^{n} x_i\right)a_1 + \left(\sum\limits_{i=0}^{n} x_i^2\right)a_2 = \sum\limits_{i=0}^{n} y_i \\ \left(\sum\limits_{i=0}^{n} x_i\right)a_0 + \left(\sum\limits_{i=0}^{n} x_i^2\right)a_1 + \left(\sum\limits_{i=0}^{n} x_i^3\right)a_2 = \sum\limits_{i=0}^{n} y_ix_i \\ \left(\sum\limits_{i=0}^{n} x_i^2\right)a_0 + \left(\sum\limits_{i=0}^{n} x_i^3\right)a_1 + \left(\sum\limits_{i=0}^{n} x_i^4\right)a_2 = \sum\limits_{i=0}^{n} y_ix_i^2 \end{cases}$$

4 Отчет

$$a_0 = 0.000422$$
$$a_1 = 2.080$$
$$a_2 = 0.00112$$
$$r = 1.352$$