

# noise-biased preserving cat qubits —— note（零散版待整理）

## 文章中的不足

- 哈密顿量 pauli Y 前系数为  $e^{-2\alpha^2}$ ，表明 Y error 是否还可以再降低，现在是平方，是否可以四次方
- ZZ 门，实现任意旋转角度  $\theta = 4J_{12}\alpha^2 t$ ，可以看出有很多个参数可以调， $t = 100ns$  还不算很快，目前量子门脉冲大都是  $40ns$ ，可以增强耦合强度（error 会线性增加，需要同时增大  $\alpha$  进行压制）加快 gate 操作的速度

## 文章中还可以优化的部分

- 进一步提升容错能力的下界
- 进一步降低实现通用门的 overhead
- **直接**适配其他的纠错编码（例如：**topological codes**），而不是此处的先进行 repetition code，再进行 CSS codes

## 文章概览

### 为什么我们要做纠错

- 实现**任意长**的通用量子计算操作
- 只要物理比特门的错误率以及执行时间**低于**某一个常数阈值，就可以做容错编码

### 现存问题

- 实现现有的量子纠错码的开销很大，在近期量子设备上实现不太现实
- 如果要在**任意**的量子计算机（各种噪声都考虑进去）上实现**任意长时间**的通用量子计算，做容错能力强的纠错码需要极其大的物理 qubits and gates 的开销

# 现有方案

- 系统的噪声通道是**非对称 (asymmetric)** 的或者明显**偏置 (biased)** 到某一通道，这样使得纠错能力下界更高（只需要抑制部分主要的噪声，纠错效果更好）
- 现有方案的不足：**仅仅在逻辑比特层面**（假设无噪音的物理电路）提出的适用于 **biased noise** 的 **surface code** 理论上有很强的纠错能力，但是考虑到真实电路层面的噪声时，因为门操作往往与偏置的噪声通道不对易（例如：在主要 Z 通道噪声的系统中实现 X 操作，纠错码主要抑制 Z 通道错误，X 操作就相当于没有被保护），这些优势不一定能保持
- 实现保持偏置的 **CX** 门在通常的严格二能级系统中是**不可能的**，而 CX 门又是实现 **stabilizer code** 的一个重要的组成部分，所以传统二能级系统无法实现这种完整的 **bias-preserving** 的通用逻辑门操作集合（例如：在传统二能级系统中，处于 Z 通道偏置下，是**无法**只在 Z 通道进行操作实现 CX 门）

# 要解决的问题

- 只在 **一种偏置通道下**实现一组**通用逻辑门的集合**，这样的话只需要抑制一种噪声就可以实现通用量子计算，降低纠错的门槛，提升纠错的能力

# 本文方案

- 在驱动非线性谐振器（例如：**克尔非线性谐振腔**）中实现**猫态比特**，并利用猫态比特实现 **bias-preserving** 的通用逻辑门集合（这里的难点是实现 CX 门，因为其他的门操作都可以很轻松的在 Z 通道实现）
- **优势**:
  - 猫态比特的主要偏置噪音是 **phase-flip**，随着 **cat size** 的增大噪音线性增长
  - **bit-flip** 噪声会随着 **cat size** 增长被指数级压制
- 本文是通过猫态比特在 **phase space** 中的 **rotation** 引入的 **topological phase** 来实现 **CX** 门，所以 CX 门主要被 **phase-flip** 所影响
- 利用适用于此种 **biased-noise** 的容错编码来进行纠错，可以提升纠错能力，并且降低开销（**因为只需要对一种主要的噪声进行抑制**）

# 本文主要结果

- 实现了 bias-preserving 的 CX 门（**mean photon number** of cat qubits < **10**）
- 将容错能力的下界提升了两倍，将实现 Clifford operations（一种重要的量子门操作）的开销降低了五倍

## 本文亮点

1. 现在大多数的纠错研究都是考虑的具有一般噪声的系统，在 depolarizing noise model 中，噪声出现在 X, Y, Z 通道是随机的，所以，认为每种噪声具有均匀的分布，出现的概率相同。在进行噪音抑制时，每种噪声都要等同的考虑进去。
2. 本文考虑到很多物理系统的噪声并不是对称的，在有些系统中，某种类型的噪声是占据**主导地位**的。（例如：fluxonium、quantum-dot spin qubits、nuclear spins in diamond）。
3. 在这些具有不对称的噪音结构的系统中，进行纠错编码就只需要对主要的几个噪声类型重点抑制，实现更优的纠错能力和低的开销。

## Bias-preserving gate 举例说明（以Z通道噪音偏置为例）

### 1. ZZ gate

- ZZ gate 定义

- $$ZZ(\theta) = e^{i\theta\hat{Z}_1\hat{Z}_2/2}$$

- 表示在两个 qubits 的 tensor product 空间的 Q sphere（单比特空间叫 bloch 球，多比特直接空间在球面上的量子态表示叫 Q sphere）上绕着 ZZ 轴旋转  $\theta$  角
  - Q sphere 定义
  - 全 0 的态定义为 Q sphere 的北极（例如： $|000\rangle$ ）
  - 0 的个数相同的态定义在同一个纬度的等分节点上（例如： $|001\rangle$ ,  $|010\rangle$ ,  $|100\rangle$ ）
  - 从北极开始到南极之间的每一个纬度，量子态中 1 的个数逐渐增加，直到南极为  $|111\rangle$
  - 球面上的点的颜色代表该量子态的相位

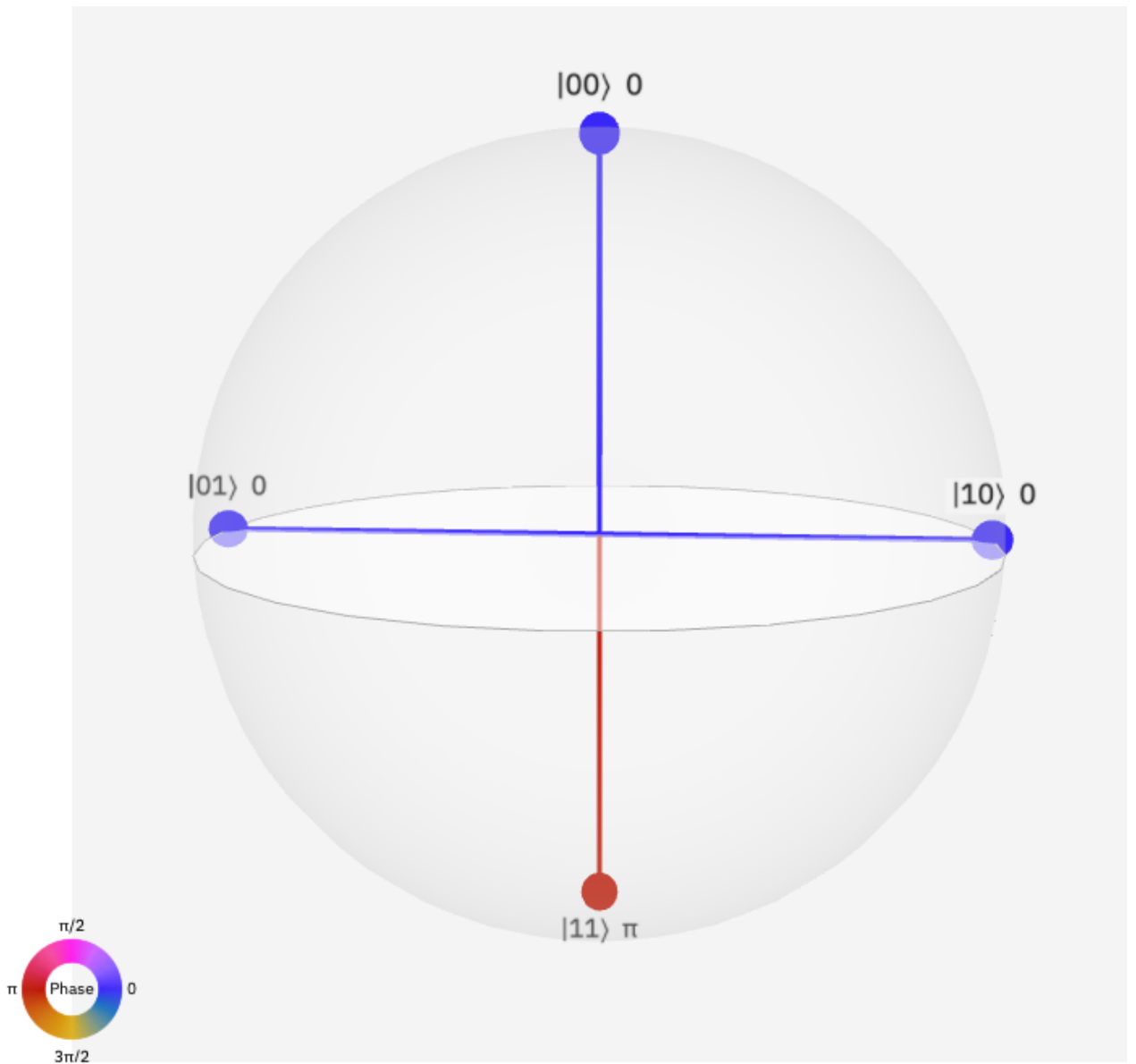


Fig. 1. Diagram of Q-Sphere

- ZZ gate 的实现
  - 哈密顿量:  $\hat{H}_{ZZ} = -V \hat{Z}_1 \hat{Z}_2$  (这里,  $V$  是两个比特之间的耦合强度)
  - 体系演化算符:  $U_{ZZ}(t) = e^{-i\hat{H}t} = e^{iV\hat{Z}_1\hat{Z}_2t}$
  - 要实现旋转  $\theta$  角度:  $U_{ZZ}(T) = e^{iV\hat{Z}_1\hat{Z}_2T} = e^{i\theta\hat{Z}_1\hat{Z}_2/2} \implies T = \frac{\theta}{2V}$
- 含有 Z 通道噪音的 ZZ gate (噪音造成的 phase-flip 错误发生在时刻  $\tau$  ( $0 < \tau < T$ ))
  - 含有噪音的体系演化算符:  $U_{ZZ}^{error} = U_{ZZ}(T - \tau) \hat{Z}_{(1 \text{ or } 2)} U_{ZZ}(\tau)$  (phase-flip 发生在比特 1 或者比特 2 上)
  - 因为  $\hat{Z}$  与  $U_{ZZ}$  对易, 所以算符之间可以交换顺序, 体系演化算符可以变为
 
$$U_{ZZ}^{error} = \hat{Z}_{(1 \text{ or } 2)} U_{ZZ}(T - \tau) U_{ZZ}(\tau) = \hat{Z}_{(1 \text{ or } 2)} U_{ZZ}(T)$$
  - 这种错误并没有改变整体演化的结构, 只是相当于在正确的操作执行完后, 又加上了一个额外的相位, 这种错误可以较容易的被纠错编码所纠正

## 2. CX gate

- CX 门定义：
  - 名词解释：CX 里的 C 就指的是 Control，X 就指的是 X 门，CX 门我们经常称其为 控制非门（因为 X 门的作用就是比特反转，相当于 NOT 门<非门>，所有其又称为 CNOT 门）
  - 简明表述：有两个 qubit，一个称之为 Q1，另外一个称之为 Q2，我们将 Q1 作为控制比特（Control），将 Q2 称之为目标比特（Target）。
  - Q1 作为控制比特，他的作用为：
    - a. 当它自己（Q1）的量子态是  $|0\rangle$  时，对目标比特（Q2）不进行任何操作（相当于对 Q2 施加一个平庸的单位算符  $I$ ）
    - b. 当 Q1 的量子态是  $|1\rangle$  时，对 Q2 进行 X 操作（相当于将 Q2 的量子态反转： $|0\rangle \leftrightarrow |1\rangle$ ）
  - 所以 CX 门被称为控制非门，Q1 会控制 Q2 是否进行反转操作
  - 意义：CX 门是量子计算中特有的门操作，实现此功能需要利用到两比特间的量子纠缠
- 物理实现：
  - CX 门： $CX = \left(\frac{I_1+Z_1}{2} \otimes I_2\right) + \left(\frac{I_1-Z_1}{2} \otimes X_2\right)$
  - 哈密顿量： $\hat{H}_{CX} = -V\left[\left(\frac{I_1+Z_1}{2} \otimes I_2\right) + \left(\frac{I_1-Z_1}{2} \otimes X_2\right)\right]$
  - 时间演化算符： $U(t) = e^{-i\hat{H}t} = e^{iV\left[\left(\frac{I_1+Z_1}{2} \otimes I_2\right) + \left(\frac{I_1-Z_1}{2} \otimes X_2\right)\right]t}$
  - 实现 CX 门： $U_{CX}(T) = e^{iV\left[\left(\frac{I_1+Z_1}{2} \otimes I_2\right) + \left(\frac{I_1-Z_1}{2} \otimes X_2\right)\right]T} = CX$
  - 利用公式： $e^{i\theta\hat{A}} = \cos(\theta)I + i\sin(\theta)\hat{A}$
  - 可得： $U_{CX}(T) = \cos(VT)I - i\sin(VT)CX = CX \implies VT = \frac{\pi}{2}$
- 含有噪音的 CX 门（设噪音造成的 phase-flip 错误发生在目标比特（Q2）上，时刻  $\tau$  ( $0 < \tau < T$ ) )
  - 演化算符：(还不会推导这一步)

$$\begin{aligned}U_{CX}^{error}(T) &= U_{CX}(T-\tau)(\hat{I}_1 \otimes \hat{Z}_2)U_{CX}(\tau) \\&= \hat{I}_1 \otimes \hat{Z}_2 e^{iV(T-\tau)(\hat{I}_1 - \hat{Z}_1) \otimes X_2} U(T)\end{aligned}$$

- 噪音分析：
  - 当 target qubit 发生 phase-flip ( $\hat{Z}_2$ ) 时，control qubit 也会发生 phase-flip 错误 ( $\hat{Z}_1$ )
  - 演化完后等效的结果是 target qubit 既有 phase-flip，也有 bit-flip 错误 ( $\hat{X}_2$ )
  - 门操作 (V, T) 的不确定性（涨落）也会引起控制错误，引起 bit-flip 错误
  - 执行 CX 门发生的错误在最后没有保持偏置在 Z 通道
  - 在严格的二能级系统中，native bias-preserving CX 门是不存在的

## 本文方案简介

# 物理系统：参量驱动非线性谐振腔 (parametrically driven nonlinear oscillator)

## Kerr nonlinear oscillator (KNR)

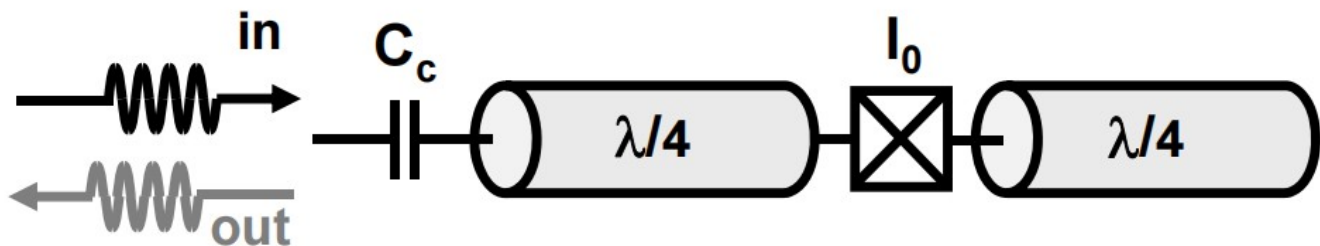


Fig. 2. Scheme of the nonlinear resonator

如 Fig. 2 所示，非线性谐振腔是在一段  $\lambda/2$  波导谐振腔中插入一个非线性的约瑟夫森结所构成的，波导腔与传输线以  $C_c$  电容耦合，用作信号读取（读取反射信号 *out*），阻抗匹配为  $50\Omega$ （保证没有杂波）。

## 等效电路模型

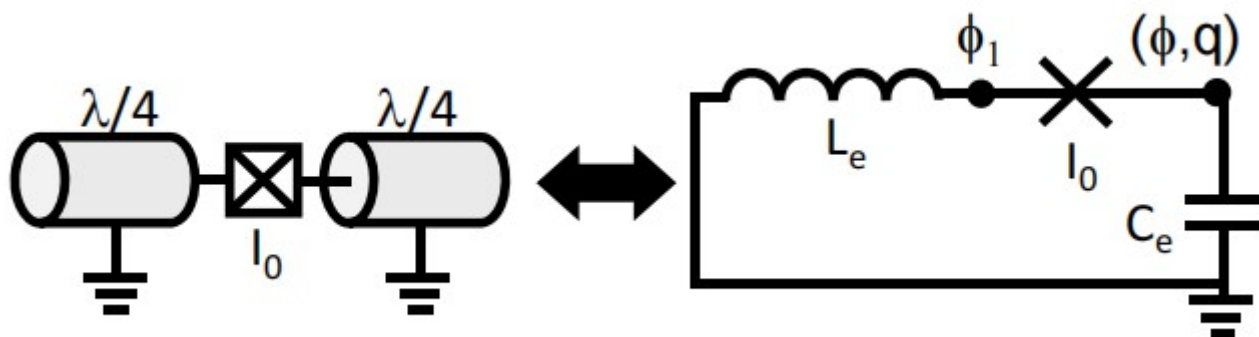


Fig. 3. Equivalent circuit of the nonlinear resonator

将 Fig. 2 转化为如 Fig. 3 所示的等效电路模型，求解系统哈密顿量

## 系统哈密顿量

$$H = \frac{\phi_1^2}{2L_e} - E_J \cos\left(\frac{\phi - \phi_1}{\phi_0}\right) + \frac{q^2}{2C_e}$$

其中  $\phi_0 = \hbar/2e$  为约化磁通量子

## 物理比特：2-component cat qubits

- $|C_\alpha^\pm\rangle = N_\pm(|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)$
- $\langle C_\alpha^\pm | C_{-\alpha}^\pm \rangle = 0$
- $N_\pm = 1/\sqrt{2(1 \pm e^{-2|\alpha|^2})}$

## 逻辑比特：

- X-axis:  $|\pm\rangle = |C_\alpha^\pm\rangle$
- Z-axis:

$$|0\rangle = \frac{|+\rangle + |-\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{|C_\alpha^+\rangle + |C_\alpha^-\rangle}{\sqrt{2}}$$
$$|1\rangle = \frac{|+\rangle - |-\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{|C_\alpha^+\rangle - |C_\alpha^-\rangle}{\sqrt{2}}$$

For larger  $\alpha$ ,  $N_\pm \approx 1/\sqrt{2}$

$$|0\rangle \approx |\alpha\rangle$$
$$|1\rangle \approx |-\alpha\rangle$$

## 与 harmonic oscillator 对比

- Cat qubits 是简并态
- 可以实现更快的门操作
- Phase-flip 随着  $\alpha$  的增大而线性增长，bit-flip 随着  $\alpha$  的增大被指数级压制
- 该系统有 biased-noise channel: phase error channel (Z)
- 通过改变参量驱动的 phase, 利用在 phase space 的旋转实现 topological phase, 可以构造 bias-preserving CX 门
- 门操作（主要是改变相位）的控制错误也是 biased-preserving 的

## 本文主要内容

- cat qubits 的**制备**（我们可以使用 **shortcuts** 制备）
- ZZ 门的实现，ZZ 门可以用来降低在进行 magic state distillation 时的开销

- **biased-preserving CX 门的实现**
- 在此系统的一组通用量子门集合下实现纠错: **repetition code**(主要抑制 **phase errors**) → **CSS code**(主要应对剩下的 **symmetric noise**)
- biased-preserving CX 门使得纠错的 threshold 提升了**两倍**, 同时使得 repetition gadgets 的开销降低了 **5 倍**