Aplicación de la integración vía Monte-Carlo para un problema de programación estocástica

Basado en:

Monte-Carlo for chance constraint: Multidisciplinary design optimization, by A. Chiralaksanakul.

Presenta: Juan Cuevas y Manuel Torres.

Profesor: Joaquín Fontbona.

Auxiliares: Pablo Araya y Bruno Hernandez

Fecha: 14 de Diciembre, 2021.

Curso: Simulación Estocástica, Teoría y Laboratorio (MA4402)

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

1. Introducción
2. Ejemplo
3. Simulación

¿Qué veremos?

En esta presentación se hablará acerca del *diseño de problemas de minimización multidisciplinaria* en el cual *las restricciones tienen cierto grado de aleatoriedad*, el objetivo es comprender como trabajar con estas restricciones para resolver los problemas de minimización asociados y estudiar si es que se pueden utilizar los métodos de *Monte-Carlo* para resolverlos.

Definición: Un problema de *diseño de optimización multidisciplinario (DOM, o bien MDO por su sigla en inglés)* determinista es dado por

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x \in X} & c(x), \\ \text{s.a.} & g(x, u(x), v(x)) \geq 0, \end{array}$$

donde las *variables de diseño del sistema* $x_1, \ldots, x_n$, son los componentes de $x \in \mathbb{R}^n$ y la *función de costo* para ser minimizado se denota por $c(x)$,además, $u(x)$ y $v(x)$ son *variables intermedias* (también llamadas *variables de comportamiento o de estado*) definidas por las ecuaciones

$$h_1(x, u, v) = 0$$
$$h_2(x, u, v) = 0.$$

la cuales son las encargadas de relacionar los fenómenos que interactúan en el problema. Resolver estas ecuaciones para valores compatibles de u y v (en el sentido que u y v resuelven h_1 y h_2 simultáneamente) es lo que se conoce como *análisis multidisciplinario*.

Ahora consideremos el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \min_{x \in X} \quad & c(x), \\ \text{s.a.} \quad & \mathbb{P}(g(x, \eta, u(x, \eta), v(x, \eta)) \leq 0) \leq \alpha, \end{aligned}$$

en donde $u(x, \eta)$ y $v(x, \eta)$ vienen definidas por:

$$\begin{aligned} h_1(x, \eta, u, v) &= 0 \\ h_2(x, \eta, u, v) &= 0 \end{aligned}$$

En este caso η es un vector de variables aleatorias que modelan la incerteza inherente del problema, del cual asumiremos conocida su distribución de probabilidad conjunta; la restricción se entiende como que la probabilidad de que el sistema falle sea menor a un cierto nivel.
Un detalle importante es que el problema con restricciones probabilísticas puede no ser factible, aún cuando su versión determinista si lo sea.

Para resolver este tipo de problemas se propone utilizar la función cuantil de nivel α definida por:

$$a(x,\alpha) = \text{mín}\{t \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(g(x,\eta) \leq t) \geq \alpha\}$$

con el fin de reescribir la restricción de forma determinista.
Bajo condiciones como continuidad y que g sea monótona creciente, se puede probar que el problema anterior es equivalente a:

$$\begin{array}{ll} \underset{x\in X}{\text{mín}} & c(x), \\ \text{s.a.} & a(x,\alpha) \geq 0 \end{array}$$

Por lo que el problema ahora es encontrar una aproximación para $a(x,\alpha)$.

Un método para esto es considerar una transformación $T : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ que envíe las variables aleatorias η en variables aleatorias i.i.d normales estándar ζ y calcular la expansión de Taylor de orden 1 de $\hat{g}$ en torno a ζ donde $\hat{g}(x,\zeta) \equiv g(x, T^{-1}(\zeta))$, obteniendo:

$$\hat{g}(x,\zeta) \approx \hat{g}(x,\zeta_0) + \nabla^T \hat{g}(x,\zeta_0)(\zeta - \zeta_0)$$

Reemplazando esto en la función cuantil, se obtiene que:

$$a(x,\alpha) = \hat{g}(x,\zeta_0) - \nabla^T \hat{g}(x,\zeta_0)\zeta_0 + \Phi^{-1}(\alpha)||\nabla \hat{g}(x,\zeta_0)||$$

Si escogemos ζ_0 tal que sea solución del problema de minimización:

$$\begin{array}{ll} \underset{\zeta}{\text{mín}} & \hat{g}(x,\zeta), \\ \text{s.a.} & ||\zeta|| = -\Phi^{-1}(\alpha), \quad \text{for } \alpha \in [0, 0{,}5] \end{array}$$

Entonces condiciones de KKT de este problema nos permiten concluir que si ζ^* es solución óptima del problema, se tiene que:

$$\nabla^T \hat{g}(x,\zeta^*)\zeta^* - \Phi^{-1}(\alpha)||\hat{g}(x,\zeta^*)|| = 0$$

lo que quiere decir que $a(x,\alpha) = \hat{g}(x,\zeta^*)$, con esto finalmente podemos enunciar la forma final del problema:

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x \in X} & c(x), \\ \text{s.a.} & \hat{g}(x,\zeta^*) \geq 0 \end{array}$$

el cual es completamente determinista y por lo tanto trabajable con los algoritmos y solvers conocidos.

Uso de métodos de Monte-Carlo

Uno de los objetivos era evaluar el uso de métodos de Monte-Carlo dentro del problema, la idea era utilizar muestras de Monte-Carlo para aproximar las restricciones probabilistas, sin embargo consideramos que la dificultad se escapaba de los alcances del proyecto, por lo que nos enfocamos en otros aspectos de este. Aun así encontramos información respecto al uso de estos métodos en las restricciones por lo que sabemos que es posible.

1 Introducción

2 Ejemplo

3 Simulación

$$
\begin{array}{ll}
\min\limits_{x\geq 0} & x_2, \\
\text{s.a.} & x_1 + x_2 \leq 1, \\
 & x_1 - x_2 \geq 0.
\end{array} \tag{1}
$$

Es fácil verificar que el problema 2 es un problema de *programación lineal clásico*. Podemos calcular que el punto óptimo es $(x_1, x_2) = (0{,}5, 0{,}5)$.

Podemos construir un *problema no determinista* equivalente del problema 2 reemplazando el lado derecho de la primera restricción en por c_1 y el factor que acompaña a x_1 en la restricción dos por $\frac{1}{2}(3 - c_2)$, y *exigiendo que la probabilidad de que estas nuevas restricciones se cumplan sea mayor a cierto gap α por definir*.
Notemos que $c = (c_1, c_2)$ es tal que:

1. c_1, c_2 tienen distribución normal de media 1 y varianza 0,1.
2. c_1 y c_2 de que son independientes entre si.

Además, definimos las *variables intermedias* u, v (deterministas) mediante:

$$
\begin{aligned}
h_1(x, c, u, v) \quad &\equiv \quad c_2 x_1 + 2x_2 - u + v = 0, \\
h_2(x, c, u, v) \quad &\equiv \quad 3x_1 - u - y = 0,
\end{aligned}
$$

El problema original:

$$
\begin{array}{ll}
\min\limits_{x\geq 0} & x_2, \\
\text{s.a.} & x_1 + x_2 \leq 1, \\
 & x_1 - x_2 \geq 0.
\end{array}
$$

Con estos cambios, el problema se escribe de forma *no-determinista* de la siguiente manera:

$$
\begin{array}{ll}
\max\limits_{x\geq 0} & x_2, \\
\text{s.a.} & \mathbb{P}\left(\tilde{c}_1 - u(x,\tilde{c}) + \dfrac{1}{2}(\tilde{c}_2 + 1)x_1 \leq 0\right) \leq \alpha_1, \\
 & \mathbb{P}(v(x,\tilde{c}) \leq 0) \leq \alpha_2.
\end{array}
$$

En donde el resultado obtenido luego de resolver el problema mediante algunos de los métodos mencionados es $x^* = (0{,}378, 0{,}322)$, el cual difiere de su contra parte determinista pero que no está muy lejos de la misma, sin mencionar que este enfoque otorga una definición del problema que puede representar mejor el fenómeno que se está estudiando.

1 Introducción

2 Ejemplo

3 Simulación

Resultados

A continuación resolveremos un problema de minimización de costos asociado a una serie de ingredientes que deben satisfacer ciertos requerimientos nutricionales de proteínas y grasas.
En este caso, consideraremos que la cantidad de proteínas de cada ingrediente es una v.a normal cuya media y varianza se especifican en la tabla a continuación:

Variable	Ingrediente	Proteína Esperada (ς_i)	Varianza	Grasas	Precio por Tonelada
X_1	Cebada	12.0	0.2809	2.3	24.55
X_2	Avena	11.9	0.1936	5.6	26.75
X_3	Copos de Sésamo	41.8	20.250	11.1	39.0
X_4	Harina de Maní	52.1	0.6241	1.3	40.50

Cuadro 1: Tabla con la cantidad de proteínas esperadas, varianza de la cantidad de proteínas esperada, grasas y precio por tonelada de un conjunto de ingredientes

El objetivo es minimizar el costo de comprar una tonelada de alimento en total pudiendo escoger de entre los cuatro ingredientes, sujeto a que la cantidad de grasas debe ser por lo menos 5 unidades y que la probabilidad de que la cantidad de proteínas sea por lo menos 21 unidades sea mayor que un cierto nivel α por definir. Esto nos permite plantear el siguiente problema de minimización con restricciones probabilistas:

Resultados

$$
\begin{aligned}
\text{mín} \quad & 24{,}55X_1 + 26{,}75X_2 + 39{,}00X_3 + 40{,}50X_4 \\
\text{s.a} \quad & X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 1 \\
& 2{,}3X_1 + 5{,}6X_2 + 11{,}1X_3 + 1{,}3X_4 \geq 5 \\
& \mathbb{P}(21 - (\varsigma_1 X_1 + \varsigma_2 X_2 + \varsigma_3 X_3 + \varsigma_4 X_4) \leq 0) \geq \alpha \\
& X_i \geq 0{,}01 \quad ,\{\text{i} = 1{,}2{,}3{,}4\}
\end{aligned}
$$

Para resolver este problema utilizamos el solver **mystic** disponible en Python, con $\alpha = [0{,}9, 0{,}95, 0{,}99]$ y comparamos los resultados, los cuales se pueden ver en la siguiente tabla:

alpha	X_1	X_2	X_3	X_4	Costo	Aporte Grasa	Aporte Proteina
0.90	0.391735	0.480116	0.127058	3.341592e-17	27.427368	4.999984	15.725227
0.95	0.392808	0.478400	0.127702	3.779405e-17	27.432892	4.999984	15.744577
0.99	0.393666	0.477027	0.128216	3.508353e-16	27.437311	4.999984	15.760057

Figura 1: Valores óptimos encontrados para cada tipo de ingrediente con su respectivo aporte de grasas y proteínas

Referencias

Chiralaksanakul, A., Mahadevan, S. (2007). Decoupled approach to multidisciplinary design optimization under uncertainty. Optimization and Engineering, 8(1).

Cools, R. Advances in multidimensional integration. Journal of computational and applied mathematics 149, 1 (2002).