Operadores no Expansivos

Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces, Heinz Bauschke and Patrick Combettes.

Miércoles 22 de Diciembre, 2021

Presenta:	Juan Pablo Cabeza - Manuel Torres.
Profesores:	Alejandro Jofré - Nicolás Hernandez.
Auxiliar:	Sebastián Bustos.

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

El objetivo es presentar la definición de un *operador no expansivo* y sus variaciones. Ejemplificar que el operador *proyección sobre un convexo* y el operador prox son operadores no expansivos. Además, que resolver un problema de optimización es equivalente a un *problema de punto fijo* con el operador prox.

Referencias

- Alvarez F. Apunte de Analisis Convexo y Dualidad (2012).
- Heinz H. Bauschke, Patrick L. Combettes (auth.), Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces. Springer (2017).
- Beck, A. First-Order Methods in Optimization. Society for Industrial and Applied Mathematics (2017).
- Boyd S. Parikh N., Proximal Algorithms.
- Combettes, P.L.: Solving monotone inclusions via compositions of nonexpansive averaged operators. Optimization 53, 475-504 (2004).
- Goebel, K., Kirk, W.A.: Topics in Metric Fixed Point Theory. Cambridge University Press,Cambridge (1990).
- Gilbert, J.C., Fragments d'Optimisation Différentiable - Théories et Algorithmes (2021).
- Goebel, K., Reich, S.: Uniform Convexity, Hyperbolic Geometry, and Nonexpansive Map-pings. Marcel Dekker, New York (1984).
- Lawrence, J., Spingarn, J.E.: On fixed points of nonexpansive piecewise isometric mappings. Proc. London Math. Soc. 55, 605-624 (1987).
- Zarantonello, E.H.: Projections on convex sets in Hilbert space and spectral theory I. Pro-jections on convex sets. In E.H. Zarantonello (editor), Contributions to Nonlinear Functional Analysis, Academic Press, New York, 237341 (1971).

- CKM (https://math.stackexchange.com/users/88587/ckm), Prove That Projection Operator Is Non Expansive, URL (version: 2020-03-15): https://math.stackexchange.com/q/1426343.
- littleO (https://math.stackexchange.com/users/40119/littleo), Firm Non Expansiveness in the Context of Proximal Mapping / Proximal Operators, URL (version: 2019-01-22): https://math.stackexchange.com/q/1900110.
- martinzellner (https://math.stackexchange.com/users/363016/martinzellner), Firm Non Expansiveness in the Context of Proximal Mapping / Proximal Operators, URL (version: 2020-07-25): https://math.stackexchange.com/q/1900064.
- trembik (https://math.stackexchange.com/users/166169/trembik), Firm Non Expansiveness in the Context of Proximal Mapping / Proximal Operators, URL (version: 2020-03-16): https://math.stackexchange.com/q/.
- trembik (https://math.stackexchange.com/users/166169/trembik), Proximal Operator Fixed Point Property for Matrices, URL (version: 2020-03-16): https://math.stackexchange.com/q/878770.

Notación

Algunos elementos que usaremos sostenidamente junto a su notación usual.

1. $\mathcal{B}(X, Y)$ el espacio de los operadores lineales y acotados (lineales continuos) de X hacia Y.
2. $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert.
3. $\mathcal{K}$ un espacio de Hilbert real.
4. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un producto interno.
5. Para un operador T denotamos $Tx := T(x)$.
6. Id el operador identidad.
7. $\mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$[1].
8. El conjunto de puntos fijos de un operador $T : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ es denotado por Fix T, es decir, Fix $T := \{x \in \mathcal{X}; Tx = x\}$.

[1] El autor en el texto denota este conjunto como $\mathbb{R}_{++}$.

Definición: Sea $D \subseteq \mathcal{H}$ no vacío y sea $T : D \to \mathcal{H}$. Entonces decimos que T es:

1. *Firmemente no expansivo* si

$$(\forall x \in D)(\forall y \in D)\ \|Tx - Ty\|^2 + \|(\mathrm{Id} - T)x - (\mathrm{Id} - T)y\|^2 \leq \|x - y\|^2. \tag{1}$$

2. *No expansivo* si es 1-Lipschitz continuo, i.e.,

$$(\forall x \in D)(\forall y \in D)\ \|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|. \tag{2}$$

3. *Estrictamente no expansivo* si

$$(\forall x \in D)(\forall y \in D)\ x \neq y \Longrightarrow \|Tx - Ty\| < \|x - y\|. \tag{3}$$

Definición: Sea $D \subseteq \mathcal{H}$ no vacío y sea $T : D \to \mathcal{H}$. Entonces decimos que T es:

4. *Firmemente cuasi-no expansivo* si
$$(\forall x \in D)(\forall y \in \mathrm{Fix}T)\ \|Tx - y\|^2 + \|Tx - x\|^2 \leq \|x - y\|^2. \tag{4}$$
5. *Cuasi-no espansivo* si
$$(\forall x \in D)(\forall y \in \mathrm{Fix}T)\ \|Tx - y\| \leq \|x - y\|. \tag{5}$$
6. *Estrictamente cuasi-no expansivo* si
$$(\forall x \in D \smallsetminus \mathrm{Fix}T)(\forall y \in \mathrm{Fix}T)\ \|Tx - y\| < \|x - y\|. \tag{6}$$

Observación: Se cumplen las siguientes implicancias:

- $1 \implies 2 \implies 5$.
- $1 \implies 4 \implies 5$.
- $3 \implies 6$

Proposición: Sea $D \subseteq \mathcal{H}$ no vacío y sea $T : D \to \mathcal{H}$. Entonces son equivalentes:

1. T es *firmemente cuasi-no expansivo*.
2. $2T - \mathrm{Id}$ es *cuasi-no expansivo*.
3. $(\forall x \in D)(\forall y \in \mathrm{Fix}T)\ \|Tx - y\|^2 \leq \langle x - y, Tx - y\rangle$.
4. $(\forall x \in D)(\forall y \in \mathrm{Fix}T)\ \langle y - Tx, x - Ty\rangle \leq 0$.
5. $(\forall x \in D)(\forall y \in \mathrm{Fix}T)\ \|Tx - x\|^2 \leq \langle y - x, Tx - x\rangle$.

Proposición: Sea $D \subseteq \mathcal{H}$ no vacío. Sean $T : D \to \mathcal{H}$ un operador firmemente cuasi-no expansivo, $\lambda \in \mathbb{R}$, y $R = \mathrm{Id} + \lambda(T - \mathrm{Id})$, $x \in \mathcal{H}$ e $y \in \mathrm{Fix}T$. Entonces

$$\|Rx - y\|^2 \leq \|x - y\|^2 - \lambda(2 - \lambda)\|Tx - x\|^2. \tag{7}$$

Demostración: Sea $T : D \to \mathcal{H}$ un operador firmemente cuasi-no expansivo, por tanto, del último punto de la proposición anterior, se sigue que,

$$\begin{aligned} \|Rx - y\|^2 &= \|x - y\|^2 - 2\lambda\langle y - x, Tx - x\rangle + \lambda^2\|Tx - x\|^2 \\ &\leq \|x - y\|^2 - \lambda(2 - \lambda)\|Tx - x\|^2. \end{aligned}$$

Proposición: Sea $D \subseteq \mathcal{H}$ no vacío y sea $T : D \to \mathcal{H}$. Entonces equivalen:

1. T es *firmemente no expansivo*.
2. $\mathrm{Id} - T$ es *firmemente no expansivo*.
3. $2T - \mathrm{Id}$ es *no expansivo*.
4. $(\forall x \in D)(\forall y \in D)\ \|Tx - Ty\|^2 \leq \langle x - y, Tx - Ty\rangle$.
5. $(\forall x \in D)(\forall y \in D)\ 0 \leq \langle Tx - Ty, (\mathrm{Id} - T)x - (\mathrm{Id} - T)y\rangle$.
6. $(\forall x \in D)(\forall y \in D)(\forall \alpha \in [0,1])\ \|Tx - Ty\| \leq \|\alpha(x - y) + (1 - \alpha)(Tx - Ty)\|$.

Corolario: Sea $D \subseteq \mathcal{H}$ no vacío y sea $T : D \to \mathcal{H}$. Entonces son equivalentes:

1. T es *firmemente no expansivo*.
2. $\|2T - \mathrm{Id}\| \leq 1$.
3. $(\forall x \in \mathcal{H}),\ \|Tx\|^2 \leq \langle x, Tx \rangle$.
4. T^* es *firmemente no expansivo*.
5. $T + T^* - 2T^*T$ es *monótono*.

Comentario: Tenemos 10 equivalencias para caracterizar cuando T es *firmemente no expansivo*.

Proposición: Sea $D \subseteq \mathcal{H}$ no vacío y sea $T : D \to \mathcal{H}$. Sea $(T_i)_{i\in I}$ una familia finita de operadores *firmemente no expansivos* tal que $T_i : D \to \mathcal{H}$, sea $(\omega_i)_{i\in I} \subseteq (0, 1]$ tales que

$$\sum_{i\in I} \omega_i = 1,$$

sea $T : D \to \mathcal{H}$ dado por

$$T = \sum_{i\in I} \omega_i T_i.$$

Sean $x, y \in D$, entonces

$$\|Tx - Ty\|^2 \leq \|x - y\|^2 - \|(\mathrm{Id} - T)x - (\mathrm{Id} - T)y\|^2.$$

$$\|Tx - Ty\|^2 \leq \|x - y\|^2 - \|(\mathrm{Id} - T)x - (\mathrm{Id} - T)y\|^2.$$

Demostración: Usando la definición (1) y suponiendo un *lema auxiliar* que dice lo siguiente: *Sean $(x_i)_{i\in I}$ y $(y_i)_{i\in I}$ familias finitas de elementos de $\mathcal{H}$, sean $(\alpha_i)_{i\in I} \subseteq \mathbb{R}$ tal que $\sum_{i\in I} \alpha_i = 1$, entonces*

$$\left\|\sum_{i\in I} \alpha_i x_i\right\|^2 + \sum_{i\in I}\sum_{j\in I} \alpha_i \alpha_j \frac{\|x_i - x_j\|^2}{2} = \sum_{i\in I} \alpha_i \|x_i\|^2. \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
&\|Tx - Ty\|^2 \\
= \quad & \sum_{i\in I} \omega_i \|T_i x - T_i y\|^2 - \frac{1}{2}\sum_{i\in I}\sum_{j\in I} \omega_i\omega_j \|T_i x - T_i y - T_j x + T_j y\|^2 \\
\leq \quad & \sum_{i\in I} \omega_i \left(\|x - y\|^2 - \|(\mathrm{Id} - T_i)x - (\mathrm{Id} - T_i)\,y\|^2\right) - \frac{1}{2}\sum_{i\in I}\sum_{j\in I} \omega_i\omega_j \|T_i x - T_i y - T_j x + T_j y\|^2 \\
\underset{8}{=} \quad & \|x - y\|^2 - \|(\mathrm{Id} - T)x - (\mathrm{Id} - T)y\|^2 - \sum_{i\in I}\sum_{j\in I} \omega_i\omega_j \|T_i x - T_i y - T_j x + T_j y\|^2 \\
\leq \quad & \|x - y\|^2 - \|(\mathrm{Id} - T)x - (\mathrm{Id} - T)y\|^2.
\end{aligned}$$

Se sigue de esta última desigualdad y (1), que todo combinación convexa de operadores firmemente no expansivo es firmemente no expansivo.

Proposición (Zarantonello): Sea $D \subseteq \mathcal{H}$ no vacío y sea $T : D \to \mathcal{H}$. Sea $(x_i)_{i\in I} \subseteq D$ una familia finita, sea $(\alpha_i)_{i\in I} \subseteq \mathbb{R}$ tal que

$$\sum_{i\in I} \alpha_i = 1, \quad \text{y sea} \quad y = \sum_{i\in I} \alpha_i x_i.$$

Entonces son ciertas:

1.

$$\left\| Ty - \sum_{i\in I} \alpha_i T x_i \right\|^2 + \sum_{i\in I} \alpha_i \langle Ty - Tx_i, (\mathrm{Id} - T)y - (\mathrm{Id} - T)x_i \rangle = \sum_{i\in I} \sum_{j\in I} \frac{\alpha_i \alpha_j}{2} \langle Tx_i - Tx_j, (\mathrm{Id} - T)x_i - (\mathrm{Id} - T)x_j \rangle$$

2. Sea T un operador *firmemente no expansivo* y sea $(\alpha_i)_{i\in I} \subseteq (0,1]$. Entonces:

$$\left\| Ty - \sum_{i\in I} \alpha_i T x_i \right\|^2 \leq \sum_{i\in I} \sum_{j\in I} \frac{\alpha_i \alpha_j}{2} \langle Tx_i - Tx_j, (\mathrm{Id} - T)x_i - (\mathrm{Id} - T)x_j \rangle.$$

Proposición (Zarantonello): (*Continuación*) Sea $D \subseteq \mathcal{H}$ no vacío y sea $T : D \to \mathcal{H}$. Sea $(x_i)_{i\in I} \subseteq D$ una familia finita, sea $(\alpha_i)_{i\in I} \subseteq \mathbb{R}$ tal que

$$\sum_{i\in I} \alpha_i = 1, \quad \text{y sea} \quad y = \sum_{i\in I} \alpha_i x_i.$$

Entonces son ciertas:

3.
$$\begin{aligned} &\left\| Ty - \sum_{i\in I} \alpha_i T x_i \right\|^2 + \sum_{i\in I} \alpha_i \left(\|y - x_i\|^2 - \|Ty - Tx_i\|^2 \right) \\ &\quad = \sum_{i\in I} \sum_{j\in I} \frac{\alpha_i \alpha_j}{2} \left(\|x_i - x_j\|^2 - \|Tx_i - Tx_j\|^2 \right). \end{aligned}$$

4. Suponiendo que T es un operador *no expansivo* y sea $(\alpha_i)_{i\in I} \subseteq (0,1]$. Entonces

$$\left\| Ty - \sum_{i\in I} \alpha_i T x_i \right\|^2 \leq \sum_{i\in I} \sum_{j\in I} \frac{\alpha_i \alpha_j}{2} \left(\|x_i - x_j\|^2 - \|Tx_i - Tx_j\|^2 \right).$$

Proposición: Sea $D \subseteq \mathcal{H}$ no vacío, sea $m \in \mathbb{N}$ y considere el conjunto $I = \{1, \ldots, m\}$. Sea $(T_i)_{i \in I}$ una familia de operadores *no expansivos* de D hacia $\mathcal{H}$, y sea $(\omega_i)_{i \in I} \subseteq (0, 1]$ tal que

$$\sum_{i \in I} \omega_i = 1.$$

Entonces:

1. $\sum_{i \in I} \omega_i T_i : D \to \mathcal{H}$ es un operador *no expansivo*.
2. Suponga que $(\forall i \in I)$, $\operatorname{ran}(T_i) \subseteq D$. Entonces $T_1 \cdots T_m : D \to D$ es *no expansivo*.

Definición: Sea $D \subseteq \mathcal{H}$ no vacío, sea $T : D \to \mathcal{H}$, y sea $\beta \in \mathbb{R}_{>0}$. Entonces T es *β-co-coercivo* (o *β-inverso fuertemente monótono*) si βT es *firmemente no expansivo*, i.e.,

$$(\forall x \in D)(\forall y \in D)\ \langle x - y, Tx - Ty\rangle \geq \beta\|Tx - Ty\|^2. \tag{9}$$

Proposición: Sea $D \subseteq \mathcal{H}$ no vacío y sea $T : D \to \mathcal{H}$. Entonces T es *no expansivo* ssi el operador $\mathrm{Id} - T$ es $\frac{1}{2}$*-co-coercivo*.

Demostración: Recordemos que T es un operador no expansivo ssi $2\left(\frac{Id-T}{2}\right) - Id = -T$ es no expansivo, lo cual es equivalente a que $\left(\frac{Id-T}{2}\right)$, es firmemente no expansivo. Se sigue que,

$$\left\|\frac{1}{2}(x - Tx) - \frac{1}{2}(y - Ty)\right\|^2 \leq \frac{1}{2}\langle x - y, (x - Tx) - (y - Ty)\rangle$$

De donde se concluye que $Id - T$ es $\frac{1}{2}$−co-coercivo.

Proposición: Sea $(\mathcal{K}_i)_{i\in I}$ una familia finita de *espacios de Hilbert reales*. Para todo $i \in I$, suponiendo que $L_i \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K}_i) \setminus \{0\}$, sea $\beta_i \in \mathbb{R}_{>0}$, y sea $T_i : \mathcal{K}_i \to \mathcal{K}_i$ es β_i-*co-coercivo*. Sean

$$T = \sum_{i\in I} L_i^* T_i L_i \quad \text{y} \quad \beta = \frac{1}{\displaystyle\sum_{i\in I} \frac{\|L_i\|^2}{\beta_i}}.$$

Entonces T es β-*co-coercivo*.

A continuación vemos la demostración.

Demostración: Sea $\alpha_i = \beta\|L_i\|^2/\beta_i$. Entonces $\sum_{i\in I} \alpha_i = 1$ y, *usando el lema anterior y Zarantonello*, obtenemos para todo $x, y \in \mathcal{H}$

$$
\begin{aligned}
\langle x-y, Tx-Ty\rangle &= \sum_{i\in I}\langle x-y, L_i^* T_i L_i x - L_i^* T_i L_i y\rangle \\
&= \sum_{i\in I}\langle L_i x - L_i y, T_i L_i x - T_i L_i y\rangle \\
&\geq \sum_{i\in I} \beta_i \|T_i L_i x - T_i L_i y\|^2 \\
&\geq \sum_{i\in I} \frac{\beta_i}{\|L_i\|^2} \|L_i^* T_i L_i x - L_i^* T_i L_i y\|^2 \\
&= \beta \sum_{i\in I} \alpha_i \left\| \frac{1}{\alpha_i}(L_i^* T_i L_i x - L_i^* T_i L_i y)\right\|^2 \\
&\geq \beta \left\| \sum_{i\in I}(L_i^* T_i L_i x - L_i^* T_i L_i y)\right\|^2 \\
&= \beta\|Tx - Ty\|^2
\end{aligned}
$$

Corolario: Sea $\mathcal{K}$ un *Espacio de Hilbert real*, sea $T : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ un operador *firmemente no expansivo*, y sea $L \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ tal que $\|L\| \leq 1$. Entonces $L^* TL$ es firmemente no expansivo.

Demostración: De la proposición anterior con $\beta_1 = 1$ y $I = \{1\}$, tenemos que $L^* TL$ es $\frac{1}{\|L\|^2}$−co-coercivo. Además, dado que $\|L\| \leq 1$ implica que el operador es firmemente no expansivo, ya que $\frac{1}{\|L\|^2} \geq 1$.

Teorema: Sea $C \subseteq \mathcal{H}$ convexo, cerrado no vacío. Entonces la *proyección* P_C es *firmemente no expansivo*.

Demostración: Recordemos que *para un conjunto $C \subseteq \mathcal{H}$ convexo, cerrado y no vacío. Entonces para todo $x, p \in \mathcal{H}$,*

$$p = P_C x \iff p \in C \quad y \quad (\forall y \in C)\ \langle y - p, x - p\rangle \leq 0.$$

Fijamos $x, y \in \mathcal{H}$ (arbitrarios). Entonces

$$\langle P_C y - P_C x, x - P_C x\rangle \leq 0 \quad \text{y} \quad \langle P_C y - P_C x, y - P_C y\rangle \leq 0$$
$$\Longrightarrow \qquad \underbrace{\|P_C x - P_C y\|^2 \leq \langle x - y, P_C x - P_C y\rangle}_{\text{tenemos que } (\forall x \in \mathcal{H})(\forall y \in \mathcal{H})\ \|Tx - Ty\|^2 \leq \langle x - y, Tx - Ty\rangle^2}$$

concluyendo lo deseado.

[2] Antes vimos que esta desigualdad equivale a que el operador T es *firmemente no expansivo*.

Dos resultados más sobre P_C:

Proposición: Sea C un subespacio vectorial cerrado de $\mathcal{H}$. Entonces:

1. P_C es *débilmente continuo*.
2. $(\forall x \in \mathcal{H})(\forall y \in \mathcal{H})\ \|P_C x - P_C y\|^2 = \langle x - y, P_C x - P_C y\rangle$.

Proposición: Sea $C \subseteq \mathcal{H}$ un convexo cerrado no vacío, sea $z \in \mathcal{H}$, y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{H}$ tal que $\limsup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n - z\| \leq \|P_C z - z\|$. Suponiendo que todo punto de acumulación débil de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pertenece a C. Entonces

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} P_C z.$$

El operador *proyección sobre un conjunto convexo no vacío* $C \subseteq \mathcal{H}$, denotado por P_C es *(firmemente) no expansivo*[3], con

$$\mathrm{Fix}(P_C) = C,$$

así $\mathrm{Fix}(P_C)$ es convexo. Este resultado puede ser emulado para *operadores cuasi-no expansivos*. Recordemos que T es *cuasi-no expansivo* si

$$(\forall x \in D)(\forall y \in \mathrm{Fix}T)\ \|Tx - y\| \leq \|x - y\|.$$

Proposición: Sea $D \subseteq \mathcal{H}$ un subconjunto convexo no vacío, y sea $T : D \to \mathcal{H}$ un operador *cuasi-no expansivo*. Entonces

$$\mathrm{Fix}(T)$$

es convexo.

[3] Antes demostramos que P_C es firmemente no expansivo y sabemos (de la definición) que un *operador firmemente no expansivo* es en particular *no expansivo*.

Recordemos que T es *cuasi-no expansivo* si

$$(\forall x \in D)(\forall y \in \mathrm{Fix}T)\ \|Tx - y\| \leq \|x - y\|.$$

Demostración: Veamos que $\mathrm{Fix}(T)$ es convexo. Sean $x, y \in \mathrm{Fix}(T)$, sea $\alpha \in (0,1)$, y sea $z = \alpha x + (1-\alpha)y$, luego *suponiendo (como lema) que para $x, y \in \mathcal{H}$ y $\alpha \in (0,1)$ tenemos que (la combinación convexa de las normas es)*

$$\begin{aligned} \alpha\|x\|^2 + (1-\alpha)\|y\|^2 &= \|\alpha x + (1-\alpha)y\|^2 + \alpha(1-\alpha)\|x-y\|^2 \qquad (10) \\ \implies \|\alpha x + (1-\alpha)y\|^2 &= \alpha\|x\|^2 + (1-\alpha)\|y\|^2 - \alpha(1-\alpha)\|x-y\|^2 \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} 0 \leq \|Tz - z\|^2 &= \|Tz - (\alpha x(1-\alpha)y)\|^2 \\ &= \|\alpha(Tz - x) + (1-\alpha)(Tz - y)\|^2 \\ &\underset{10}{=} \alpha\|Tz - x\|^2 + (1-\alpha)\|Tz - y\|^2 - \alpha(1-\alpha)\|x-y\|^2 \\ &\underset{5}{\leq} \alpha\|z - x\|^2 + (1-\alpha)\|z-y\|^2 - \alpha(1-\alpha)\|x-y\|^2 \\ &= \|\alpha(z-x) + (1-\alpha)(z-y)\|^2 = 0. \end{aligned}$$

Como $\|T(z) - z\|^2 = 0$ sigue que $T(z) = z$ y por lo tanto $z \in \mathrm{Fix}(T)$.

Proposición: Sea $D \subseteq \mathcal{H}$ no vacío y sea $T : D \to \mathcal{H}$ un operador *cuasi-no expansivo*. Entonces

1. Podemos escribir

$$\mathrm{Fix}(T) = \bigcap_{x \in D} \left\{ y \in D : \langle y - Tx, x - Tx \rangle \leq \frac{1}{2} \|Tx - x\|^2 \right\}.$$

2. Suponiendo que D es cerrado y convexo, entonces $\mathrm{Fix}(T)$ es cerrado y convexo.

Primero veamos el razonamiento para probar (2).

Demostración de (2): Notemos que suponiendo (1) sigue que $\mathrm{Fix}(T)$ es la intersección arbitraria de subespacios cerrados y D (que es convexo y cerrado), en particular decimos que es intersección arbitraria de convexos cerrados (ambas propiedades cerradas bajo la intersección arbitraria) por lo que se concluye fácilmente.

Veamos que para un operador *cuasi-no expansivo* $T : D \to \mathcal{H}$ se cumple

$$\mathrm{Fix}(T) = \bigcap_{x \in D} \left\{ y \in D : \langle y - Tx, x - Tx \rangle \leq \frac{1}{2} \|Tx - x\|^2 \right\}.$$

Demostración de (1): Para comenzar definimos

$$C := \bigcap_{x \in D} \left\{ y \in D : \langle y - Tx, x - Tx \rangle \leq \frac{1}{2} \|Tx - x\|^2 \right\}.$$

Veamos que $C = \mathrm{Fix}(T)$ mediante doble inclusión.

- Sea $x \in D$ y $y \in \mathrm{Fix}(T)$, entonces

  $$\|Tx - y\|^2 \leq \|x - y\|^2,$$

  por lo tanto

  $$\begin{aligned} &\|Tx - x\|^2 + 2\langle Tx - x, x - y \rangle + \|x - y\|^2 \leq \|x - y\|^2 \\ \implies &\|Tx - x\|^2 + 2\langle Tx - x, x - Tx \rangle + 2\langle Tx - x, Tx - y \rangle \leq 0 \\ \implies &2\langle Tx - x, Tx - y \rangle \leq \|Tx - x\|^2, \end{aligned}$$

  y así concluimos que $\mathrm{Fix}(T) \subseteq C$.

Veamos que para un operador *cuasi-no expansivo* $T : D \to \mathcal{H}$ se cumple

$$\mathrm{Fix}(T) = \bigcap_{x \in D} \left\{ y \in D : \langle y - Tx, x - Tx \rangle \leq \frac{1}{2} \|Tx - x\|^2 \right\}.$$

Demostración de (1): Para comenzar definimos

$$C := \bigcap_{x \in D} \left\{ y \in D : \langle y - Tx, x - Tx \rangle \leq \frac{1}{2} \|Tx - x\|^2 \right\}.$$

Veamos que $C = \mathrm{Fix}(T)$ mediante doble inclusión.

- Sabemos que $\mathrm{Fix}(T) \subseteq C$.
- Recíprocamente, sea $x \in C$. Entonces

$$x \in \left\{ y \in D : \langle y - Tx, x - Tx \rangle \leq \frac{1}{2} \|Tx - x\|^2 \right\}$$

  y por lo tanto

$$\|Tx - x\|^2 = \langle x - Tx, x - Tx \rangle \leq \frac{1}{2} \|Tx - x\|^2,$$

  esto implica que $Tx = x$ y así $C \subseteq \mathrm{Fix}(T)$.

Proposición: Sea $D \subseteq \mathcal{H}$ no vacío y sea $T : D \to \mathcal{H}$ un operador *cuasi-no expansivo*. Entonces

1. Podemos escribir

$$\text{Fix}(T) = \bigcap_{x \in D} \left\{ y \in D : \langle y - Tx, x - Tx \rangle \leq \frac{1}{2} \|Tx - x\|^2 \right\}.$$

2. Suponiendo que D es cerrado y convexo, entonces $\text{Fix}(T)$ es cerrado y convexo.

Algunas consecuencias son:

Corolario:

1. Sea $D \subseteq \mathcal{H}$ un convexo cerrado no vacío y sea $T : D \to \mathcal{H}$ un operador *cuasi-no expansivo*. Entonces $\text{Fix}(T)$ es un convexo cerrado.
2. Sea $D \subseteq \mathcal{H}$ y sea $T : D \to \mathcal{H}$ un operador *firmemente cuasi-no expansivo*. Entonces

$$\text{Fix}(T) = \bigcap_{x \in D} \{ y \in D : \langle y - Tx, x - Tx \rangle \leq 0 \}.$$

Veamos la demostración de (2) a continuación.

Corolario:

2. Sea $D \subseteq \mathcal{H}$ y sea $T : D \to \mathcal{H}$ un operador *firmemente cuasi-no expansivo*. Entonces

$$\operatorname{Fix}(T) = \bigcap_{x \in D} \{y \in D : \langle y - Tx, x - Tx \rangle \leq 0\}.$$

Recordemos[4] que T es *firmemente cuasi-no expansivo* ssi $2T - \mathrm{Id}$ es *cuasi-noexpansivo*.

Demostración de (2): Sea $R = 2T - \mathrm{Id}$, entonces $\operatorname{Fix}(T) = \operatorname{Fix}(R)$ y por lo tanto R es *cuasi-no expansivo*, luego suponiendo (1) tenemos que

$$\begin{aligned}
\operatorname{Fix}(R) &= \bigcap_{x \in D} \left\{ y \in D : \langle y - Rx, x - Rx \rangle \leq \frac{1}{2} \|Tx - x\|^2 \right\} \\
&= \bigcap_{x \in D} \left\{ y \in D : \langle y - Tx + x - Tx, 2(x - Tx) \rangle \leq 2\|Tx - x\|^2 \right\} \\
&= \bigcap_{x \in D} \left\{ y \in D : \langle y - Tx, x - Tx \rangle \leq 0 \right\}.
\end{aligned}$$

[4] Esta es una caracterización presentada al inicio.

Definición: Sea $D \subseteq \mathcal{H}$ un conjunto no vacío, y *débilmente cerrado secuencialmente*[a]. Sea $T : D \to \mathcal{H}$, sea $u \in \mathcal{H}$. Entonces T es un operador *semi cerrado en* u si, para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D$ y todo $x \in D$ tal que $x_n \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} x$ y $Tx_n \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} u$, tenemos que $Tx = u$. Diremos que T es *semi cerrado* si lo es en todo $u \in D$.

[a] En inglés *weakly sequentially closed*

Teorema (Principio de semi cerradura de Browder): Sea $D \subseteq \mathcal{H}$ un conjunto no vacío y *débilmente cerrado secuencialmente*, sea $T : D \to \mathcal{H}$ un operador *no expansivo*. Entonces $\mathrm{Id} - T$ es un operador *semi cerrado*.

Una consecuencia de este teorema es:

Corolario: Sea $D \subseteq \mathcal{H}$ un cerrado convexo no vacío, sea $T : D \to \mathcal{H}$ un operador *no expansivo*, sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D$, y sea $x \in D$. Si $x_n \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} x$ y $x_n - Tx_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Entonces

$$x \in \mathrm{Fix}(T).$$

A continuación demostraremos el *principio de semi cerradura de Browder*.

Demostración del principio de Browder: Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en D, sea $x \in D$ y $u \in \mathcal{H}$. Supongamos que $x_n \rightharpoonup x$ y que $x_n - Tx_n \to u$. Para todo $n \in \mathbb{N}$, de la no expansividad de T, se sigue que

$$\begin{aligned}
\|x - Tx - u\|^2 &= \|x_n - Tx - u\|^2 - \|x_n - x\|^2 - 2\langle x_n - x, x - Tx - u\rangle \\
&= \|x_n - Tx_n - u\|^2 + 2\langle x_n - Tx_n - u, Tx_n - Tx\rangle \\
&\quad + \|Tx_n - Tx\|^2 - \|x_n - x\|^2 - 2\langle x_n - x, x - Tx - u\rangle \\
&\leq \|x_n - Tx_n - u\|^2 + 2\langle x_n - Tx_n - u, Tx_n - Tx\rangle \\
&\quad - 2\langle x_n - x, x - Tx - u\rangle
\end{aligned}$$

Sin embargo, comenzamos suponiendo que, $x_n - Tx_n - u \to 0$, $x_n - x \rightharpoonup 0$, y por tanto $Tx_n - Tx \rightharpoonup x - Tx - u$. Recordemos el siguiente lema, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones en $\mathcal{H}$, y sea x, u puntos en $\mathcal{H}$. Si $x_n \rightharpoonup x$ y $u_n \rightharpoonup u$, entonces $\langle x_n, u_n\rangle \to \langle x, u\rangle$. Luego, tomando el limite cuando $n \to +\infty$ y del lema anterior, obtenemos $x - Tx = u$.

Teorema (Banach-Picard): Sea (X, d) un espacio métrico completo y sea $T : X \to X$ una función Lipschitz continua con constante $\beta \in [0, 1)$. Tomando $x_0 \in X$, definimos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$(\forall n \in \mathbb{N}),\ x_{n+1} = Tx_n.$$

Entonces existe $x \in X$ tal que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$ y los siguientes son verdaderos:

1. x es el único punto fijo de T.
2. $(\forall n \in \mathbb{N})\ d(x_{n+1}, x) \leq \beta d(x_n, x)$.
3. $(\forall n \in \mathbb{N})\ d(x_n, x) \leq \beta^n d(x_0, x)$ (por lo que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x).
4. Error estimado a priori: $(\forall n \in \mathbb{N})\ d(x_n, x) \leq \beta^n \frac{d(x_n,x_{n+1})}{1-\beta}$.
5. Error estimado a posteriori: $(\forall n \in \mathbb{N})\ d(x_n, x) \leq \frac{d(x_n,x_{n+1})}{1-\beta}$.
6. $\frac{d(x_0,x_1)}{1+\beta} \leq d(x_0, x) \leq \frac{d(x_0,x_1)}{1-\beta}$.

Este teorema es relevante por la técnica de obtención de puntos fijos que entrega (no entraremos en detalle). [5]

[5] Para repasar la técnica que entrega el teorema puede consultar

1. Daniilidis, A. Espacios Metricos,*Lema2.4.25 (Sucesión de iteraciones de una contracción), página 102* (2016).
2. Heinz H. Bauschke, Patrick L. Combettes (auth.), Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces. Springer. *Teorema 1.50, página 21* (2017).

Teorema (Browder-Göhde-Kirk): Sea $D \subseteq \mathcal{H}$ un convexo cerrado, acotado y no vacío, y sea $T : D \to D$ un operador *no expansivo*. Entonces $\mathrm{Fix}(T) \neq \varnothing$.

Demostración: Utilicemos los siguientes resultados,

1. Sea D un subconjunto convexo de $\mathcal{H}$. Entonces es equivalente que D es débilmente secuencialmente cerrado, D es secuencialmente cerrado y D es cerrado.
2. Sea D un subconjunto acotado, cerrado y convexo de $\mathcal{H}$. Entonces D es débilmente compacto y débilmente secuencialmente compacto.

Fijemos $x_0 \in D$ y una sucesión $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $(0,1]$ tal que $\alpha_0 = 1$ y $\alpha \downarrow 0$. Para todo $n \in \mathbb{N}$, el operador $T_n : D \to D : x \to \alpha_n x_0 + (1-\alpha_n)Tx$ es Lipschitz continua con constante $(1-\alpha_n)$. Por lo tanto, del teorema de *Banach-Picard*, el operador posee un punto fijo $x_n \in D$. Además, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\|x_n - Tx_n\| = \|T_n x_n - Tx_n\| = \alpha_n \|x_0 - Tx_n\| \leq \alpha_n \mathrm{diam}\, D,$$

Por tanto, $x_n - Tx_n \to 0$.

Teorema (Browder-Göhde-Kirk): Sea $D \subseteq \mathcal{H}$ un convexo cerrado, acotado y no vacío, y sea $T : D \to D$ un operador *no expansivo*. Entonces $\operatorname{Fix}(T) \neq \varnothing$.

Demostración: Utilicemos los siguientes resultados,

1. Sea D un subconjunto convexo de $\mathcal{H}$. Entonces es equivalente que D es débilmente secuencialmente cerrado, D es secuencialmente cerrado y D es cerrado.
2. Sea D un subconjunto acotado, cerrado y convexo de $\mathcal{H}$. Entonces D es débilmente compacto y débilmente secuencialmente compacto.

Fijemos $x_0 \in D$ y una sucesión $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $(0,1]$ tal que $\alpha_0 = 1$ y $\alpha \downarrow 0$. Para todo $n \in \mathbb{N}$, el operador $T_n : D \to D : x \to \alpha_n x_0 + (1-\alpha_n)Tx$ es Lipschitz continua con constante $(1-\alpha_n)$. Por lo tanto, del teorema de *Banach-Picard*, el operador posee un punto fijo $x_n \in D$. Además, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\|x_n - Tx_n\| = \|T_n x_n - Tx_n\| = \alpha_n \|x_0 - Tx_n\| \leq \alpha_n \operatorname{diam} D,$$

Por tanto, $x_n - Tx_n \to 0$. Por otra parte, ya que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ esta en D, de la compacidad secuencial débil, podemos extraer una subsucesión débilmente convergente, digamos, $x_{k_n} \rightharpoonup x \in D$. Ya que $x_{k_n} - Tx_{k_n} \to 0$ y del corolario de *Principio de semi cerradura de Browder*, obtenemos que $x \in \operatorname{Fix} T$.

Proposición (Curva aproximada, parte 1): Sea $D \subseteq \mathcal{H}$ un convexo cerrado no vacío, sea $T : D \to D$ un operador *no expansivo*. Entonces para todo $\varepsilon \in (0,1)$ y todo $x \in D$, existe un único punto $x_\varepsilon \in D$ tal que

$$x_\varepsilon = \varepsilon x + (1-\varepsilon)Tx_\varepsilon.$$

Además, para todo $\varepsilon \in (0,1)$, $T_\varepsilon : D \to D$ dada por $x \mapsto x_\varepsilon$, se cumplen:

1. $(\forall \varepsilon \in (0,1))\ T_\varepsilon = \varepsilon \mathrm{Id} + (1-\varepsilon)TT_\varepsilon = (\mathrm{Id} - (1-\varepsilon)T)^{-1} \circ \varepsilon \mathrm{Id}$.
2. $(\forall \varepsilon \in (0,1))\ T_\varepsilon$ es *firmemente no expansivo*.
3. $(\forall \varepsilon \in (0,1))\ \mathrm{Fix}(T_\varepsilon) = \mathrm{Fix}(T)$.
4. $(\forall \varepsilon \in (0,1)\ \varepsilon(x - Tx_\varepsilon) = x_\varepsilon - Tx_\varepsilon = (1-\varepsilon)^{-1}\varepsilon(x - x_\varepsilon)$.
5. Si $\mathrm{Fix}(T) = \varnothing$. Entonces $\lim\limits_{\varepsilon \searrow 0} \|x_\varepsilon\| = +\infty$.
6. $(\forall \varepsilon \in (0,1))(\forall y \in \mathrm{Fix}(T))$,
$$\|x - x_\varepsilon\|^2 + \|x_\varepsilon - y\|^2 \leq \|x - y\|^2.$$
7. Suponiendo que $\mathrm{Fix}(T) \neq \varnothing$. Entonces $\lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} x_\varepsilon = P_{\mathrm{Fix}(T)}x$.

Proposición (Curva aproximada, parte 2): Sea $D \subseteq \mathcal{H}$ un convexo cerrado no vacío, sea $T : D \to D$ un operador *no expansivo*. Entonces para todo $\varepsilon \in (0,1)$ y todo $x \in D$, existe un único punto $x_\varepsilon \in D$ tal que

$$x_\varepsilon = \varepsilon x + (1-\varepsilon)Tx_\varepsilon.$$

Además, para todo $\varepsilon \in (0,1)$, $T_\varepsilon : D \to D$ dada por $x \mapsto x_\varepsilon$, se cumplen:

8 $(\forall \varepsilon \in (0,1))(\forall \delta \in (0,1))$,

$$\left(\frac{\varepsilon-\delta}{1-\varepsilon}\right)^2 \|x_\varepsilon - x\|^2 + \delta(2-\delta)\|x_\delta - x_\varepsilon\|^2 \leq 2\left(\frac{\varepsilon-\delta}{1-\varepsilon}\right)\langle x_\varepsilon - x, , x_\delta - x_\varepsilon\rangle.$$

9 $(\forall \varepsilon \in (0,1))(\forall \delta \in (0,\varepsilon))$,

$$\|x - x_\varepsilon\|^2 + \|x_\varepsilon - x_\delta\|^2 \leq \|x - x_\delta\|^2.$$

10 La función $(0,1) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ dada por $\varepsilon \mapsto \|x - x_\varepsilon\|$ es decreciente.

11 La curva $(0,1) \to \mathcal{H}$ dada por $\varepsilon \mapsto x_\varepsilon$ es continua.

12 Si $x \in \mathrm{Fix}(T)$, entonces $x_\varepsilon \equiv x$ es constante, de lo contrario, $(x_\varepsilon)_{\varepsilon\in(0,1)}$ es una curva inyectiva.

Demostración (Curva aproximada): Sea $\varepsilon \in (0,1)$. Del teorema de Banach-Picard, el operador $D \to D : z \to \varepsilon x + (1-\varepsilon)Tz$ tiene un único punto fijo. Por lo tanto, x_ε es único, y T_ε esta bien definido.

1. Veamos que $(\forall \varepsilon \in (0,1))$ $T_\varepsilon = \varepsilon \mathrm{Id} + (1-\varepsilon)TT_\varepsilon = (\mathrm{Id} - (1-\varepsilon)T)^{-1} \circ \varepsilon \mathrm{Id}$
   En efecto, ya que $x_\varepsilon = \varepsilon x + (1-\varepsilon)Tx_\varepsilon$, se concluye. Además, $\varepsilon Id = T_\varepsilon - (1-\varepsilon)TT\varepsilon = (Id - (1-\varepsilon)T)T_\varepsilon$, y por tanto, ya que $Id - (1-\varepsilon)T$ es inyectivo, obtenemos que $T_\varepsilon = (Id - (1-\varepsilon)T)^{-1} \circ \varepsilon Id$.
2. $(\forall \varepsilon \in (0,1))$ T_ε es *firmemente no expansivo*. Sea $y \in D$. Entonces,

$$\begin{aligned} x - y &= \varepsilon^{-1}((x_\varepsilon - (1-\varepsilon)Tx_\varepsilon) - (y_\varepsilon - (1-\varepsilon)Ty_\varepsilon)) \\ &= \varepsilon^{-1}((x_\varepsilon - y_\varepsilon) - (1-\varepsilon)(Tx_\varepsilon - Ty_\varepsilon)). \end{aligned}$$

   Recordemos que $x_\varepsilon = \varepsilon x + (1-\varepsilon)Tx_\varepsilon$, de *Cauchy-Schwarz*, se sigue que

$$\begin{aligned} &\langle T_\varepsilon x - T_\varepsilon y, (Id - T_\varepsilon)x - (Id - T\varepsilon)y\rangle \\ &= \langle x_\varepsilon - y_\varepsilon, (1-\varepsilon)(x - Tx_\varepsilon) - (1-\varepsilon)(y - Ty_\varepsilon)\rangle \\ &= (1-\varepsilon)\langle x_\varepsilon - y_\varepsilon, (x-y) - (Tx_\varepsilon - Ty_\varepsilon)\rangle \\ &= (1-\varepsilon)\varepsilon^{-1}\langle x_\varepsilon - y_\varepsilon, (x_\varepsilon - y_\varepsilon) - (Tx_\varepsilon - Ty_\varepsilon)\rangle \\ &\geq (\varepsilon^{-1} - 1)(\|x_\varepsilon - y_\varepsilon\|^2 - \|x_\varepsilon - y_\varepsilon\|^2 - \|Tx_\varepsilon - Ty_\varepsilon\|^2) \\ &= (\varepsilon^{-1} - 1)\|x_\varepsilon - y_\varepsilon\|(\|x_\varepsilon - y_\varepsilon\| - \|Tx_\varepsilon - Ty_\varepsilon\|) \geq 0. \end{aligned}$$

Demostración (Curva aproximada): Sea $\varepsilon \in (0,1)$. Del teorema de Banach-Picard, el operador $D \to D : z \to \varepsilon x + (1-\varepsilon)Tz$ tiene un único punto fijo. Por lo tanto, x_ε es único, y T_ε esta bien definido.

3 $(\forall \varepsilon \in (0,1))\ \mathrm{Fix}(T_\varepsilon) = \mathrm{Fix}(T)$.
En efecto, sea $x \in D$. Supongamos primero que $x \in \mathrm{Fix}\, T$. Entonces $x = \varepsilon x + (1-\varepsilon)Tx$ y por tanto, $x = x_\varepsilon$ por la unicidad de x_ε. Se sigue que $T_\varepsilon x = x$, de donde $x \in \mathrm{Fix}\, T_\varepsilon$. Por otra parte, asumamos que $x \in \mathrm{Fix}\, T_\varepsilon$, entonces

$$x = x_\varepsilon = \varepsilon x + (1-\varepsilon)Tx_\varepsilon = x + (1-\varepsilon)(Tx - x),$$

y así $x = Tx$, es decir, $x \in \mathrm{Fix}\, T$.

4 $(\forall \varepsilon \in (0,1))\ \varepsilon(x - Tx_\varepsilon) = x_\varepsilon - Tx_\varepsilon = (1-\varepsilon)^{-1}\varepsilon(x - x_\varepsilon)$.
Basta notar que $x_\varepsilon = \varepsilon x + (1-\varepsilon)Tx_\varepsilon$.

Demostración (Curva aproximada): Sea $\varepsilon \in (0,1)$. Del teorema de Banach-Picard, el operador $D \to D : z \to \varepsilon x + (1-\varepsilon)Tz$ tiene un único punto fijo. Por lo tanto, x_ε es único, y T_ε esta bien definido.

5. Si $\operatorname{Fix}(T) = \varnothing$. Entonces $\lim_{\varepsilon \searrow 0} \|x_\varepsilon\| = +\infty$.

   Supongamos que existe una sucesión $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $(0,1)$ tal que $\varepsilon_n \downarrow 0$ y $(x_{\varepsilon_n})_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada. Notemos que $(x_{\varepsilon_n})_{n\in\mathbb{N}}$ posee una subsucesión convergente, de donde existe un punto de adherencia y de $(x_{\varepsilon_n})_{n\in\mathbb{N}}$. Del punto anterior y el corolario del principio de Browder se sigue que $y \in \operatorname{Fix} T$.

6. $(\forall \varepsilon \in (0,1))(\forall y \in \operatorname{Fix}(T))$,

$$\|x - x_\varepsilon\|^2 + \|x_\varepsilon - y\|^2 \leq \|x - y\|^2.$$

   Asumamos que $y \in \operatorname{Fix} T$. Ya que, $\operatorname{Fix} T_\varepsilon = \operatorname{Fix} T$, $y = T_\varepsilon y = y_\varepsilon$ y dado que T_ε es firmemente no expansivo, se sigue que

$$\|x - y\|^2 \geq \|x_\varepsilon - y_\varepsilon\|^2 + \|(x - x_\varepsilon) - (y - y_\varepsilon)\|^2 = \|x_\varepsilon - y\|^2 + \|x - x_\varepsilon\|^2.$$

Demostración (Curva aproximada): Sea $\varepsilon \in (0,1)$. Del teorema de Banach-Picard, el operador $D \to D : z \to \varepsilon x + (1-\varepsilon)Tz$ tiene un único punto fijo. Por lo tanto, x_ε es único, y T_ε esta bien definido.

7. Suponiendo que $\operatorname{Fix}(T) \neq \varnothing$. Entonces $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} x_\varepsilon = P_{\operatorname{Fix}(T)} x$.

   Sea $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $(0,1)$ tal que $\varepsilon_n \downarrow 0$, y sea $z_n = x_{\varepsilon_n}$. Del punto interior, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotado. Así, del punto 4), vemos que $z_n - Tz_n \to 0$. Sea z un punto de acumulación secuencialmente débil de $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, digamos $z_{k_n} \rightharpoonup z$. Del principio de Browder, implica que $z \in \operatorname{Fix} T$. Del punto anterior, tenemos que $\lim \|x - z_{k_n}\|^2 \leq \|x - z\|^2$. Ya que $x - z_{k_n} \rightharpoonup x - z$, de donde $x - z_{k_n} \to x - z$. Así $z_{k_n} \to z$. De nuevo, del punto anterior, vemos que

   $$\|x - z_{k_n}\|^2 + \|z_{k_n} - y\|^2 \leq \|x - y\|^2,$$

   Tomando el limite con $n \to \infty$, vemos que

   $$\|x - z\|^2 + \|z - y\|^2 \leq \|x - y\|^2,$$

   Por lo tanto, $\forall y \in \operatorname{Fix} T$, $\langle y - z, x - z\rangle \leq 0$, pero esto es equivalente a que $z = P_{FixT}x$. Por lo tanto, $z_n \to P_{\operatorname{Fix} T}x$, de donde $x_\varepsilon \to P_{\operatorname{Fix} T}x$ cuando $\varepsilon \downarrow 0$.

Demostración (Curva aproximada): Sea $\varepsilon \in (0,1)$. Del teorema de Banach-Picard, el operador $D \to D : z \to \varepsilon x + (1-\varepsilon)Tz$ tiene un único punto fijo. Por lo tanto, x_ε es único, y T_ε esta bien definido.

8 $(\forall \varepsilon \in (0,1))(\forall \delta \in (0,1))$,

$$\left(\frac{\varepsilon-\delta}{1-\varepsilon}\right)^2 \|x_\varepsilon - x\|^2 + \delta(2-\delta)\|x_\delta - x_\varepsilon\|^2 \leq 2\left(\frac{\varepsilon-\delta}{1-\varepsilon}\right)\langle x_\varepsilon - x, , x_\delta - x_\varepsilon\rangle. \tag{11}$$

Sea $\delta \in (0,1)$ y $y_\varepsilon = x_\varepsilon - x$ y $y_\delta = x_\delta - x$. Ya que $y_\delta = y_\varepsilon + x_\delta - x_\varepsilon$, usando que $x_\varepsilon = \varepsilon x + (1-\varepsilon)Tx_\varepsilon$, obtenemos

$$\begin{aligned}\|x_\delta - x_\varepsilon\|^2 &\geq \|Tx_\delta - Tx_\varepsilon\|^2 \\ &= \left\|\frac{x_\delta - \delta x}{1-\delta} - \frac{x_\varepsilon - \varepsilon x}{1-\varepsilon}\right\|^2 = \left\|\frac{y_\delta}{1-\delta} - \frac{y_\varepsilon}{1-\varepsilon}\right\|^2 \\ &= \frac{1}{(1-\delta)^2}\left\|\frac{\delta-\varepsilon}{1-\varepsilon}y_\varepsilon + x_\delta - x_\varepsilon\right\|^2\end{aligned}$$

Desarrollando la igualdad anterior, se concluye.

Demostración (Curva aproximada): Sea $\varepsilon \in (0,1)$. Del teorema de Banach-Picard, el operador $D \to D : z \to \varepsilon x + (1-\varepsilon)Tz$ tiene un único punto fijo. Por lo tanto, x_ε es único, y T_ε esta bien definido.

9 $(\forall \varepsilon \in (0,1))(\forall \delta \in (0,\varepsilon),$

$$\|x - x_\varepsilon\|^2 + \|x_\varepsilon - x_\delta\|^2 \leq \|x - x_\delta\|^2$$

Sea $\delta \in (0,\varepsilon)$. Entonces $\langle x_\varepsilon - x, x_\delta - x\varepsilon\rangle \geq 0$. Se sigue que,

$$\|x_\delta - x\|^2 = \|x_\delta - x_\varepsilon\|^2 + 2\langle x_\delta - x_\varepsilon, x_\varepsilon - x\rangle + \|x_\varepsilon - x\|^2 \geq \|x_\delta - x_\varepsilon\|^2 + \|x_\varepsilon - x\|^2.$$

10 La función $(0,1) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ dada por $\varepsilon \mapsto \|x - x_\varepsilon\|$ es decreciente.
Directo del punto anterior.

Demostración (Curva aproximada): Sea $\varepsilon \in (0,1)$. Del teorema de Banach-Picard, el operador $D \to D : z \to \varepsilon x + (1-\varepsilon)Tz$ tiene un único punto fijo. Por lo tanto, x_ε es único, y T_ε esta bien definido.

11 La curva $(0,1) \to \mathcal{H}$ dada por $\varepsilon \mapsto x_\varepsilon$ es continua.
De (11) y Cauchy-Schwarz tenemos,

$$(\forall \delta \in (0,\varepsilon)),\ \|x_\delta - x_\varepsilon\| \leq \frac{2(\varepsilon-\delta)}{\delta(2-\delta)(1-\varepsilon)}\|x_\varepsilon - x\|.$$

Por tanto, $\|x_\delta - x_\varepsilon\| \downarrow 0$ cuando $\delta \downarrow \varepsilon$. De donde, la curva $(0,1) \to \mathcal{H} : \varepsilon \to x_\varepsilon$ es continua por la derecha.

12 Si $x \in \operatorname{Fix} T$, entonces $x_\varepsilon \equiv x$ es constante, de lo contrario, $(x_\varepsilon)_{\varepsilon\in(0,1)}$ es una curva inyectiva.
Si $x \in \operatorname{Fix} T$, dado que $\operatorname{Fix} T_\varepsilon = \operatorname{Fix} T$ entonces $x \in \operatorname{Fix} T_\varepsilon$ y por tanto, $x = T_\varepsilon x = x_\varepsilon$. Ahora asumamos que $x \notin \operatorname{Fix} T$. Si $\delta \in (0,\varepsilon)$ y $x_\varepsilon = x_\delta$, entonces de (11) $T_\varepsilon x = x_\varepsilon = x$ y por tanto, $x \in \operatorname{Fix} T_\varepsilon$, lo cual no puede ocurrir, ya que $\operatorname{Fix} T_\varepsilon = \operatorname{Fix} T$. Por lo tanto, la curva $(x_\varepsilon)_{\varepsilon\in(0,1)}$ es inyectiva.

Proposición: Sean $T_1 : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ y $T_2 : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ un operador *firmemente no expansivo* y sea $T = T_1(2T_2 - \mathrm{Id}) + \mathrm{Id} - T_2$. Entonces:

1. $2T - \mathrm{Id} = (2T_1 - \mathrm{Id})(2T_2 - \mathrm{Id})$.
2. T es *firmemente no expansivo*.
3. $\mathrm{Fix}(T) = \mathrm{Fix}(2T_1 - \mathrm{Id})(2T_2 - \mathrm{Id})$.
4. Si T_1 es el proyector sobre un subespacio vectorial cerrado de $\mathcal{H}$. Entonces

$$\mathrm{Fix}(T) = \{x \in \mathcal{H} : T_1 x = T_2 x\}.$$

Demostración:

1. $2T - \mathrm{Id} = (2T_1 - \mathrm{Id})(2T_2 - \mathrm{Id})$
2. T es firmemente no expansivo
   Tenemos que $2T_1 - Id$ y $2T_1 - Id$ son no expansivos. Por lo tanto, $(2T_1 - Id)(2T_2 - Id)$ es no expansivo, de donde T es firmemente no expansivo.
3. $\mathrm{Fix}(T) = \mathrm{Fix}(2T_1 - \mathrm{Id})(2T_2 - \mathrm{Id})$
   Del primer punto, se sigue que $\mathrm{Fix}\ T = \mathrm{Fix}\ (2T - Id) = \mathrm{Fix}\ (2T_1 - Id)(2T_2 - Id)$

Proposición: Sean $T_1 : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ y $T_2 : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ un operador *firmemente no expansivo* y sea $T = T_1(2T_2 - \mathrm{Id}) + \mathrm{Id} - T_2$. Entonces:

1. $2T - \mathrm{Id} = (2T_1 - \mathrm{Id})(2T_2 - \mathrm{Id})$.
2. T es *firmemente no expansivo*.
3. $\mathrm{Fix}(T) = \mathrm{Fix}(2T_1 - \mathrm{Id})(2T_2 - \mathrm{Id})$.
4. Si T_1 es el proyector sobre un subespacio vectorial cerrado de $\mathcal{H}$. Entonces

$$\mathrm{Fix}(T) = \{x \in \mathcal{H} : T_1 x = T_2 x\}.$$

Demostración:

1. Si T_1 es el proyector sobre un subespacio vectorial cerrado de $\mathcal{H}$. Entonces $\mathrm{Fix}(T) = \{x \in \mathcal{H} : T_1 x = T_2 x\}$.
   Supongamos que $T_1 = P_C$, donde C es un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$, y sea $x \in \mathcal{H}$. Recordemos que si C es un subconjunto convexo cerrado, entonces P_C es firmemente no expansivo, de donde T_1 es firmemente no expansivo y $x \in \mathrm{Fix} T$ ssi, $x = P_C(2T_2 x + (1-2)x) + x - T_2 x$ ssi, $T_2 x = 2P_C(T_2 x) + (1-2)P_C x \in C$ ssi, $P_C(T_2 x) = T_2 x = 2P_C(T_2 x) + (1-2)P_C x$ ssi, $T_2 x = P_C x$.

Corolario: Sea T_1 el proyector sobre un subespacio vectorial cerrado de $\mathcal{H}$, sea $T_2 : \mathbb{H} \to \mathcal{H}$ un operador *firmemente no expansivo*, y sea $T = T_1 T_2 + (\mathrm{Id} - T_1)(\mathrm{Id} - T_2)$. Entonces T es *firmemente no expansivo* y $\mathrm{Fix}(T) = \{x \in \mathcal{H} : T_1 x = T_2 x\}$.

Demostración: Ya que $T = T_1(2T_2 - Id) + Id - T_2$, el resultado se sigue de la proposición anterior.

El objetivo de esta sección es estudiar el conjunto de puntos fijos del Prox y ver que el mínimo de una función se puede caracterizar como un punto fijo. Algunas referencias que puede consultar para complementar son:

- Beck, A. First-Order Methods in Optimization. Society for Industrial and Applied Mathematics (2017).
- Combettes, P.L.: Solving monotone inclusions via compositions of nonexpansive averaged operators. Optimization 53, 475-504 (2004).
- Gilbert, J.C., Fragments d'Optimisation Différentiable - Théories et Algorithmes, Capítulo 7.2 (2021).
- martinzellner (https://math.stackexchange.com/users/363016/martinzellner), Firm Non Expansiveness in the Context of Proximal Mapping / Proximal Operators, URL (version: 2020-07-25): https://math.stackexchange.com/q/1900064.
- littleO (https://math.stackexchange.com/users/40119/littleo), Firm Non Expansiveness in the Context of Proximal Mapping / Proximal Operators, URL (version: 2019-01-22): https://math.stackexchange.com/q/1900110.

Sea $\mathcal{E}$ un *espacio euclideano*, osea un espacio vectorial finito dimensional cuya norma proviene de un producto interno. Recordemos (de la presentación sobre *Operador Proximal y Descomposición de Moreau*) las siguientes definiciones:

Definición: Dada $f : \mathcal{E} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ definimos el *mapeo proximal/operador proximal* de f como el operador $\mathrm{Prox}_f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ dado por

$$\mathrm{Prox}_f(x) = \underset{u\in\mathcal{E}}{\mathrm{argmin}} \left\{ f(u) + \frac{1}{2}\|u - x\|^2 \right\}.$$

Es común encontrar el *operador proximal de la función λ-escalada* λf, con $\lambda > 0$, la cual se expresa como

$$\mathrm{prox}_{\lambda f}(v) = \mathrm{argmin}_x \left\{ f(x) + \frac{1}{2\lambda}\|x - v\|^2 \right\}$$

Consideremos $f(x) = \langle a, x\rangle + b$, donde $a \in \mathcal{E}$ y $b \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathrm{prox}_f(x) &= \mathrm{argmin}_{u\in\mathcal{E}} \left\{ \langle a, x\rangle + b + \frac{1}{2}\|u - x\|^2 \right] \\
&= \mathrm{argmin}_{u\in\mathcal{E}} \left\{ \langle a, x\rangle + b - \frac{1}{2}\|a\|^2 + \frac{1}{2}\|u - (x - a)\|^2 \right] \\
&= x - a
\end{aligned}$$

La siguiente propiedad es fundamental, ya que establece un link entre *operadores proximales* y la *teoría de puntos fijos*, por ejemplo, muchos *algoritmos proximales* para la optimización pueden ser interpretados como métodos para encontrar puntos fijos de operadores apropiados.

Teorema: Dada $f : \mathcal{H} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, x^* minimiza f ssi $x^* = \text{prox}_f(x^*)$, es decir, $x^* \in \text{Fix}(\text{prox}_f)$.

Demostración: Si x^* minimiza f, es decir, $f(x) \geq f(x^*)$ para cualquier x,entonces

$$f(x) + \frac{1}{2}\|x - x^*\|^2 \geq f(x^*) = f(x) + \frac{1}{2}\|x^* - x^*\|^2,$$

para cualquier x, así x^* minimiza la función $f(x) + \frac{1}{2}\|x - x^*\|^2$. Se sigue que $x^* = \text{prox}_f(x^*)$. Por otra parte, usaremos la caracterización de subdiferenciales del minimo de una función convexa. El punto $\tilde{x}$ minimiza $f(x) + \frac{1}{2}\|x - v\|^2$, (así $\tilde{x} = \text{prox}_f(v)$) si y solo sí,

$$0 \in \partial f(\tilde{x}) + (\tilde{x} - v),$$

donde la suma es de un conjunto y un punto. Además, $\partial f(x) \subset \mathbb{R}^n$ es el subdiferencial de f en x, definido por

$$\partial f(x) = \{y; f(z) \geq f(x) + y^T(z - -x) \text{ para todo } z \in \text{dom } f\}$$

Tomando $\tilde{x} = v = x^*$, se sigue que $0 \in \partial f(x^*)$, así x^* minimiza f.

Es útil introducir una notación para el argumento de $prox_f$, que depende de $x \in \mathcal{E}$,

$$\varphi_x(y) := f(y) + \frac{1}{2}\|y - x\|^2.$$

Recordemos que existe x^* en el subespacio vectorial talque para todo $y \in \mathcal{E}, f(y) \geq f(x) + \langle x^*, y - x\rangle$, de donde f tiene un mínimo, a pesar que $\varphi_x(y) \to \infty$ cuando $\|y\| \to \infty$. Además, φ_x es sci y estrictamente convexo. Por lo tanto, el problema anterior tiene una solución única. Sea x_p tal punto, el cual llamaremos punto proximal $x_p \in \mathrm{dom} f$, luego $\mathrm{prox}_f : \mathcal{E} \to \mathcal{E} : x \to x_p$.
El punto proximal, se caracteriza por la condición de optimalidad, $0 \in \partial\varphi_x(x_p) = \partial f(x_p) + x_p - x$, es decir,

$$\tilde{x} = \mathrm{prox}_f(x) \iff \exists \tilde{g} \in \partial f(\tilde{x}) : \tilde{x} = x - \tilde{g}$$

Notemos que la unicidad de x_p implica que $g_p := x - x_p$. Además,

$$\langle \mathrm{prox}_f(y) - \mathrm{prox}_f(x), y - x\rangle \geq \|\mathrm{prox}_f(y) - \mathrm{prox}_f(x)\|^2$$

En efecto, si $x_p = x - g_p^x$ con $g_p^x \in \partial f(x_p)$, $y_p = y - g_p^y$ con $g_p^y \in \partial f(y_p)$. Luego,

$$y - x = y_p - x_p + (g_p^y - g_p^x)$$

Multiplicando por $(y_p - x_p)$ y usando la monotonía del subdiferencial, se sigue que

$$\langle y_p - x_p, y - x\rangle = \|y_p - x_p\|^2 + \langle g_p^y - g_p^x, y_p - x_p\rangle \geq \|y_p - x_p\|^2$$

- Dado que los minimizadores de f son puntos fijos de prox_f, podemos minimizar f encontrando un punto fijo de su operador proximal.
  Si prox f fuera una contracción, es decir, Lipschitz continua con constante menor que 1, aplicando repetidamente prox_f se encontraría un punto fijo.
- A pesar que prox_f no necesita ser una contracción (a menos que f sea fuertemente convexa), de todas formas es firmemente no expansivo, lo cual es suficiente para la iteración de punto fijo,

$$\|\mathrm{prox}_f(x) - \mathrm{prox}_f(y)\|^2 \leq \langle (x-y), \mathrm{prox}_f(x) - \mathrm{prox}_f(y)) \rangle,$$

  para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$.
- Los operadores firmemente no expansivos son un caso especial de los operadores no expansivos (es decir, operadores Lipschitz continuos con constante 1). Notemos que iteraciones de un operador no expansivo general no converge a un punto fijo, basta considerar operadores como $-I$. Sin embargo, si N es no expansivo, entonces el operador $T = (1-\alpha)I + \alpha N$, $\alpha \in (0,1)$, tiene los mismo puntos fijos que N e iteraciones de T deberán converger al punto fijo de T (y así de N), es decir, la sucesión

$$x^{k+1} := (1-\alpha)x^k + \alpha N(x^k)$$

  convergerá a un punto fijo de N. Operadores de la forma $(1-\alpha)I + \alpha N$, donde N es no expansiva y $\alpha \in (0,1)$, son llamados operadores $\alpha-$promediados

Definición: Sea D un subconjunto no vacío de $\mathcal{H}$, $T : D \to \mathcal{H}$ no expansivo, y sea $\alpha \in (0,1)$. Entonces T es promediado con constante α, o $\alpha-$promediado, si existe un operador no expansivo $R : D \to \mathcal{H}$ tal que $T = (1-\alpha)Id + \alpha R$.

Observaciones: Sea D un subconjunto no vacío de $\mathcal{H}$ y $T : D \to \mathcal{H}$,

1. Si T es promediado, entonces es no expansivo.
2. Si T es no expansivo, no es necesariamente promediado. Podemos considerar $T = -Id : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ cuando $\mathcal{H} \neq \{0\}$.
3. T es firmemente no expansivo si y solo si es te es $\frac{1}{2}-$promediado.
4. Sea $\eta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Entonces se sigue del punto anterior, que T es $\beta-$cocoercivo ssi βT es $\frac{1}{2}-$promediado.

Proposición: Sea D un subconjunto no vacío de $\mathcal{H}$, $T : D \to \mathcal{H}$ no expansivo, y sea $\alpha \in (0,1)$. Entonces son equivalentes,

1. T es $\alpha-$promediado.
2. $(1 - \frac{1}{\alpha})Id + \frac{1}{\alpha}T$ es no expansivo.
3. $\forall x \in D$, $\forall y \in D$,
$$\|Tx - Ty\|^2 \leq \|x - y\|^2 - \frac{1-\alpha}{\alpha}\|(Id - T)x - (Id - T)y\|^2$$
4. $\forall x \in D$, $\forall y \in D$,
$$\|Tx - Ty\|^2 + (1 - 2\alpha)\|x - y\|^2 \leq 2(1-\alpha)\langle x - y, Tx - Ty\rangle$$

Proposición: Sea D un subconjunto no vacío de $\mathcal{H}$, $\rho \in (0,1)$ y sea $T : D \to \mathcal{H}$ una función $\rho-$Lipschitz continua y $\alpha = \frac{(\rho+1)}{2}$. Entonces T es $\alpha-$promediado.

Demostración: El operador

$$\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) Id + \frac{1}{\alpha} T = \frac{\rho - 1}{\rho + 1} Id + \frac{2}{\rho + 1} T$$

es Lipschitz continua con constante $\frac{1-\rho}{1+\rho} + \frac{2\rho}{1+\rho} = 1$ De la proposición anterior, T es $\alpha-$promediado.

Estudiaremos a continuación una proposición que se refiere al conjunto de combinaciones convexas de punto fijo de operadores *cuasi-no expansivos* y una segunda proposición sobre composiciones de *operadores estrictamente cuasi-no expansivos*.

Proposición 1: Sea $D \subseteq \mathcal{H}$ no vacío, sea $(T_i)_{i\in I}$ una colección finita de operadores *cuasi-no expansivos* de D hacia $\mathcal{H}$ tales que

$$\bigcap_{i\in I} \mathrm{Fix}(T_i) \neq \varnothing,$$

y sea $(\omega_i)_{i\in I} \subseteq \mathbb{R}_{>0}$ tales que

$$\sum_{i\in I} \omega_i = 1.$$

Entonces

$$\mathrm{Fix}\left(\sum_{i\in I} \omega_i T_i\right) = \bigcap_{i\in I} \mathrm{Fix}(T_i).$$

Corolario 1: Sea $D \subseteq \mathcal{H}$ no vacío, sea $(T_i)_{i\in I}$ una colección finita de operadores *cuasi-no expansivos* de D hacia $\mathcal{H}$, y sea $(\omega_i)_{i\in I} \subseteq (0,1]$ tales que

$$\sum_{i\in I} \omega_i = 1.$$

Sea

$$T = \sum_{i\in I} \omega_i T_i.$$

Entonces T es *firmemente cuasi-no expansivo*.

Proposición 2: Sea $D \subseteq \mathcal{H}$ no vacío y sean T_1 y T_2 operadores *cuasi-no expansivos* de D hacia D. Suponiendo que T_1 o T_2 sea un operador *escritamente cuasi-no expansivo*, y que $\mathrm{Fix}(T_1) \cap \mathrm{Fix}(T_2) \neq \varnothing$. Entonces:

1. $\mathrm{Fix}(T_1 T_2) = \mathrm{Fix}(T_1) \cap \mathrm{Fix}(T_2)$.
2. $T_1 T_2$ es un operador *cuasi-no expansivo*.
3. Suponiendo además que T_1 y T_2 son operadores *estrictamente cuasi-no expansivos*. Entonces $T_1 T_2$ es un operador *estrictamente cuasi-no expansivos*.

Corolario 2: Sea $D \subseteq \mathcal{H}$ no vacío, sea $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, y sea $I = \{1, \ldots, m\}$, sea $(T_i)_{i \in I}$ una familia de operadores *estrictamente cuasi-no expansivos* de D hacia D tales que

$$\bigcap_{i \in I} \mathrm{Fix}(T_i) \neq \varnothing,$$

y sea $T = T_1 \cdot T_m$. Entonces T es *estrictamente cuasi-no expansivo*.

Corolario 3: Sea $D \subseteq \mathcal{H}$, sea $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, sea $I = \{1, \ldots, m\}$, sea $(T_i)_{i \in I}$ una familia de *operadores no expansivos promedio* de D hacia D tales que

$$\bigcap_{i \in I} \mathrm{Fix}(T_i) \neq \varnothing,$$

y sea $T = T_1 \cdot T_m$. Entonces

$$\mathrm{Fix}(T) = \bigcap_{i \in I} \mathrm{Fix}(T_i).$$

☺ Ronda de preguntas ☺