

Teoría (exhaustiva) de operadores no expansivos

Basado en:

Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces
by Heinz Bauschke and Patrick Combettes

Martes 22 de Diciembre, 2021

Presenta: Juan Pablo Cabezas y Manuel Torres V.
Profesores: Alejandro Jofré y Nicolás Hernandez.
Auxiliar: Sebastián Bustos.
Fecha: 22 de Diciembre, 2021.
Curso: Análisis Convexo y Dualidad (MA5801).



Ingeniería Matemática

FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

El objetivo es presentar la definición de un *operador no expansivo* y sus variaciones. Ejemplificar que el operador *proyección sobre un convexo* y el operador *prox* son operadores no expansivos. Además, que resolver un problema de optimización es equivalente a un *problema de punto fijo* con el operador *prox*.

- 1 Operadores no expansivos y firmemente no expansivos
- 2 Operadores co-coercivos
- 3 Proyecciones sobre conjuntos convexos
- 4 Puntos fijos de operadores no expansivos
 - Puntos fijos del operador proyección sobre un convexo
 - Puntos fijos del operador proximal
- 5 Operadores no expansivos promedio
- 6 Puntos fijos comunes



Alvarez F. Apunte de Analisis Convexo y Dualidad (2012).



Heinz H. Bauschke, Patrick L. Combettes (auth.), Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces. Springer (2017).



Beck, A. First-Order Methods in Optimization. Society for Industrial and Applied Mathematics (2017).



Boyd S. Parikh N., Proximal Algorithms.



Combettes, P.L.: Solving monotone inclusions via compositions of nonexpansive averaged operators. Optimization 53, 475-504 (2004).



Goebel, K., Kirk, W.A.: Topics in Metric Fixed Point Theory. Cambridge University Press, Cambridge (1990).



Gilbert, J.C., Fragments d'Optimisation Différentiable - Théories et Algorithmes (2021).



Goebel, K., Reich, S.: Uniform Convexity, Hyperbolic Geometry, and Nonexpansive Map-pings. Marcel Dekker, New York (1984).



Lawrence, J., Spingarn, J.E.: On fixed points of nonexpansive piecewise isometric mappings. Proc. London Math. Soc. 55, 605-624 (1987).



Zarantonello, E.H.: Projections on convex sets in Hilbert space and spectral theory I. Pro-jections on convex sets. In E.H. Zarantonello (editor), Contributions to Nonlinear Functional Analysis, Academic Press, New York, 237341 (1971).

Discusiones entre pares que pueden ayudar a comprender el tema

Math stackexchange



CKM (<https://math.stackexchange.com/users/88587/ckm>), Prove That Projection Operator Is Non Expansive, URL (version: 2020-03-15): <https://math.stackexchange.com/q/1426343>.



littleO (<https://math.stackexchange.com/users/40119/littleo>), Firm Non Expansiveness in the Context of Proximal Mapping / Proximal Operators, URL (version: 2019-01-22): <https://math.stackexchange.com/q/1900110>.



martinzellner (<https://math.stackexchange.com/users/363016/martinzellner>), Firm Non Expansiveness in the Context of Proximal Mapping / Proximal Operators, URL (version: 2020-07-25): <https://math.stackexchange.com/q/1900064>.



trembik (<https://math.stackexchange.com/users/166169/trembik>), Firm Non Expansiveness in the Context of Proximal Mapping / Proximal Operators, URL (version: 2020-03-16): <https://math.stackexchange.com/q/>.



trembik (<https://math.stackexchange.com/users/166169/trembik>), Proximal Operator Fixed Point Property for Matrices, URL (version: 2020-03-16): <https://math.stackexchange.com/q/878770>.

Algunos elementos que usaremos sostenidamente junto a su notación usual.

- 1 $\mathcal{B}(X, Y)$ el espacio de los operadores lineales y acotados (lineales continuos) de X hacia Y .
- 2 \mathcal{H} un espacio de Hilbert.
- 3 \mathcal{K} un espacio de Hilbert real.
- 4 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un producto interno.
- 5 Para un operador T denotamos $Tx := T(x)$.
- 6 Id el operador identidad.
- 7 $\mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}^1$.
- 8 El conjunto de puntos fijos de un operador $T : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ es denotado por $\text{Fix } T$, es decir,
 $\text{Fix } T := \{x \in \mathcal{X} ; Tx = x\}$.

¹El autor en el texto denota este conjunto como \mathbb{R}_{++} .

1 Operadores no expansivos y firmemente no expansivos

Operadores co-coercivos

Proyecciones sobre conjuntos convexos

Puntos fijos de operadores no expansivos

Operadores no expansivos promedio

Puntos fijos comunes

Definición: Sea $D \subseteq \mathcal{H}$ no vacío y sea $T : D \rightarrow \mathcal{H}$. Entonces decimos que T es:

1 *Firmemente no expansivo* si

$$(\forall x \in D)(\forall y \in D) \|Tx - Ty\|^2 + \|(\text{Id} - T)x - (\text{Id} - T)y\|^2 \leq \|x - y\|^2. \quad (1)$$

2 *No expansivo* si es 1-Lipschitz continuo, i.e.,

$$(\forall x \in D)(\forall y \in D) \|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|. \quad (2)$$

3 *Estrictamente no expansivo* si

$$(\forall x \in D)(\forall y \in D) x \neq y \implies \|Tx - Ty\| < \|x - y\|. \quad (3)$$

Operadores no expansivos y firmemente no expansivos

Definiciones elementales (continuación)

Definición: Sea $D \subseteq \mathcal{H}$ no vacío y sea $T : D \rightarrow \mathcal{H}$. Entonces decimos que T es:

4 *Firmemente cuasi-no expansivo* si

$$(\forall x \in D)(\forall y \in \text{Fix}T) \|Tx - y\|^2 + \|Tx - x\|^2 \leq \|x - y\|^2. \quad (4)$$

5 *Cuasi-no expansivo* si

$$(\forall x \in D)(\forall y \in \text{Fix}T) \|Tx - y\| \leq \|x - y\|. \quad (5)$$

6 *Estrictamente cuasi-no expansivo* si

$$(\forall x \in D \setminus \text{Fix}T)(\forall y \in \text{Fix}T) \|Tx - y\| < \|x - y\|. \quad (6)$$

Observación: Se cumplen las siguientes implicancias:

$$\bullet 1 \implies 2 \implies 5.$$

$$\bullet 1 \implies 4 \implies 5.$$

$$\bullet 3 \implies 6$$

Operadores no expansivos y firmemente no expansivos

Propiedades de los operadores firmemente cuasi-no expansivos

Proposición: Sea $D \subseteq \mathcal{H}$ no vacío y sea $T : D \rightarrow \mathcal{H}$. Entonces son equivalentes:

- 1 T es firmemente cuasi-no expansivo.
- 2 $2T - \text{Id}$ es cuasi-no expansivo.
- 3 $(\forall x \in D)(\forall y \in \text{Fix}T) \|Tx - y\|^2 \leq \langle x - y, Tx - y \rangle$.
- 4 $(\forall x \in D)(\forall y \in \text{Fix}T) \langle y - Tx, x - Ty \rangle \leq 0$.
- 5 $(\forall x \in D)(\forall y \in \text{Fix}T) \|Tx - x\|^2 \leq \langle y - x, Tx - x \rangle$.

Proposición: Sea $D \subseteq \mathcal{H}$ no vacío. Sean $T : D \rightarrow \mathcal{H}$ un operador firmemente cuasi-no expansivo, $\lambda \in \mathbb{R}$, y $R = \text{Id} + \lambda(T - \text{Id})$, $x \in \mathcal{H}$ e $y \in \text{Fix}T$. Entonces

$$\|Rx - y\|^2 \leq \|x - y\|^2 - \lambda(2 - \lambda)\|Tx - x\|^2. \quad (7)$$

Demostración: Sea $T : D \rightarrow \mathcal{H}$ un operador firmemente cuasi-no expansivo, por tanto, del último punto de la proposición anterior, se sigue que,

$$\begin{aligned} \|Rx - y\|^2 &= \|x - y\|^2 - 2\lambda \langle y - x, Tx - x \rangle + \lambda^2 \|Tx - x\|^2 \\ &\leq \|x - y\|^2 - \lambda(2 - \lambda)\|Tx - x\|^2. \end{aligned}$$

Operadores no expansivos y firmemente no expansivos

Propiedades de los operadores firmemente no expansivos

Proposición: Sea $D \subseteq \mathcal{H}$ no vacío y sea $T : D \rightarrow \mathcal{H}$. Entonces equivalen:

- 1 T es *firmemente no expansivo*.
- 2 $\text{Id} - T$ es *firmemente no expansivo*.
- 3 $2T - \text{Id}$ es *no expansivo*.
- 4 $(\forall x \in D)(\forall y \in D) \|Tx - Ty\|^2 \leq \langle x - y, Tx - Ty \rangle$.
- 5 $(\forall x \in D)(\forall y \in D) 0 \leq \langle Tx - Ty, (\text{Id} - T)x - (\text{Id} - T)y \rangle$.
- 6 $(\forall x \in D)(\forall y \in D)(\forall \alpha \in [0, 1]) \|Tx - Ty\| \leq \|\alpha(x - y) + (1 - \alpha)(Tx - Ty)\|$.

Operadores no expansivos y firmemente no expansivos

Propiedades de los operadores firmemente no expansivos (corolario)

Corolario: Sea $D \subseteq \mathcal{H}$ no vacío y sea $T : D \rightarrow \mathcal{H}$. Entonces son equivalentes:

- 1 T es *firmemente no expansivo*.
- 2 $\|2T - \text{Id}\| \leq 1$.
- 3 $(\forall x \in \mathcal{H}), \|Tx\|^2 \leq \langle x, Tx \rangle$.
- 4 T^* es *firmemente no expansivo*.
- 5 $T + T^* - 2T^*T$ es monótono.

Comentario: Tenemos 10 equivalencias para caracterizar cuando T es *firmemente no expansivo*.

Operadores no expansivos y firmemente no expansivos

Combinación convexa de una familia de operadores firmemente no expansivos

Proposición: Sea $D \subseteq \mathcal{H}$ no vacío y sea $T : D \rightarrow \mathcal{H}$. Sea $(T_i)_{i \in I}$ una familia finita de operadores *firmemente no expansivos* tal que $T_i : D \rightarrow \mathcal{H}$, sea $(\omega_i)_{i \in I} \subseteq (0, 1]$ tales que

$$\sum_{i \in I} \omega_i = 1,$$

sea $T : D \rightarrow \mathcal{H}$ dado por

$$T = \sum_{i \in I} \omega_i T_i.$$

Sean $x, y \in D$, entonces

$$\|Tx - Ty\|^2 \leq \|x - y\|^2 - \|(\text{Id} - T)x - (\text{Id} - T)y\|^2.$$

Operadores no expansivos y firmemente no expansivos

Combinación convexa de una familia de operadores firmemente no expansivos (demostración)

$$\|Tx - Ty\|^2 \leq \|x - y\|^2 - \|(\text{Id} - T)x - (\text{Id} - T)y\|^2.$$

Demostración: Usando la definición (1) y suponiendo un *lema auxiliar* que dice lo siguiente:

Sean $(x_i)_{i \in I}$ y $(y_i)_{i \in I}$ familias finitas de elementos de \mathcal{H} , sean $(\alpha_i)_{i \in I} \subseteq \mathbb{R}$ tal que $\sum_{i \in I} \alpha_i = 1$, entonces

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{i \in I} \alpha_i x_i \right\|^2 + \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} \alpha_i \alpha_j \frac{\|x_i - x_j\|^2}{2} = \sum_{i \in I} \alpha_i \|x_i\|^2. \quad (8) \\ \|Tx - Ty\|^2 &= \sum_{i \in I} \omega_i \|T_i x - T_i y\|^2 - \frac{1}{2} \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} \omega_i \omega_j \|T_i x - T_i y - T_j x + T_j y\|^2 \\ &\leq \sum_{i \in I} \omega_i (\|x - y\|^2 - \|(\text{Id} - T_i)x - (\text{Id} - T_i)y\|^2) - \frac{1}{2} \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} \omega_i \omega_j \|T_i x - T_i y - T_j x + T_j y\|^2 \\ &\stackrel{8}{=} \|x - y\|^2 - \|(\text{Id} - T)x - (\text{Id} - T)y\|^2 - \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} \omega_i \omega_j \|T_i x - T_i y - T_j x + T_j y\|^2 \\ &\leq \|x - y\|^2 - \|(\text{Id} - T)x - (\text{Id} - T)y\|^2. \end{aligned}$$

Se sigue de esta última desigualdad y (1), que toda combinación convexa de operadores firmemente no expansivos es firmemente no expansivo.

Proposición (Zarantonello): Sea $D \subseteq \mathcal{H}$ no vacío y sea $T : D \rightarrow \mathcal{H}$. Sea $(x_i)_{i \in I} \subseteq D$ una familia finita, sea $(\alpha_i)_{i \in I} \subseteq \mathbb{R}$ tal que

$$\sum_{i \in I} \alpha_i = 1, \quad \text{y sea} \quad y = \sum_{i \in I} \alpha_i x_i.$$

Entonces son ciertas:

1

$$\begin{aligned} & \left\| Ty - \sum_{i \in I} \alpha_i Tx_i \right\|^2 + \sum_{i \in I} \alpha_i \langle Ty - Tx_i, (\text{Id} - T)y - (\text{Id} - T)x_i \rangle \\ &= \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} \frac{\alpha_i \alpha_j}{2} \langle Tx_i - Tx_j, (\text{Id} - T)x_i - (\text{Id} - T)x_j \rangle \end{aligned}$$

2 Sea T un operador *firmemente no expansivo* y sea $(\alpha_i)_{i \in I} \subseteq (0, 1]$. Entonces:

$$\left\| Ty - \sum_{i \in I} \alpha_i Tx_i \right\|^2 \leq \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} \frac{\alpha_i \alpha_j}{2} \langle Tx_i - Tx_j, (\text{Id} - T)x_i - (\text{Id} - T)x_j \rangle.$$

Proposición (Zarantonello): (*Continuación*) Sea $D \subseteq \mathcal{H}$ no vacío y sea $T : D \rightarrow \mathcal{H}$. Sea $(x_i)_{i \in I} \subseteq D$ una familia finita, sea $(\alpha_i)_{i \in I} \subseteq \mathbb{R}$ tal que

$$\sum_{i \in I} \alpha_i = 1, \quad \text{y sea} \quad y = \sum_{i \in I} \alpha_i x_i.$$

Entonces son ciertas:

3

$$\begin{aligned} & \left\| Ty - \sum_{i \in I} \alpha_i Tx_i \right\|^2 + \sum_{i \in I} \alpha_i (\|y - x_i\|^2 - \|Ty - Tx_i\|^2) \\ &= \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} \frac{\alpha_i \alpha_j}{2} (\|x_i - x_j\|^2 - \|Tx_i - Tx_j\|^2). \end{aligned}$$

4 Suponiendo que T es un operador *no expansivo* y sea $(\alpha_i)_{i \in I} \subseteq (0, 1]$. Entonces

$$\left\| Ty - \sum_{i \in I} \alpha_i Tx_i \right\|^2 \leq \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} \frac{\alpha_i \alpha_j}{2} (\|x_i - x_j\|^2 - \|Tx_i - Tx_j\|^2).$$

Operadores no expansivos y firmemente no expansivos

Combinación lineal y producto de operadores no expansivos

Proposición: Sea $D \subseteq \mathcal{H}$ no vacío, sea $m \in \mathbb{N}$ y considere el conjunto $I = \{1, \dots, m\}$. Sea $(T_i)_{i \in I}$ una familia de operadores *no expansivos* de D hacia \mathcal{H} , y sea $(\omega_i)_{i \in I} \subseteq (0, 1]$ tal que

$$\sum_{i \in I} \omega_i = 1.$$

Entonces:

- 1 $\sum_{i \in I} \omega_i T_i : D \rightarrow \mathcal{H}$ es un operador *no expansivo*.
- 2 Suponga que $(\forall i \in I), \text{ran}(T_i) \subseteq D$. Entonces $T_1 \cdots T_m : D \rightarrow D$ es *no expansivo*.

● Operadores no expansivos y firmemente no expansivos

2 ● Operadores co-coercivos

● Proyecciones sobre conjuntos convexos

● Puntos fijos de operadores no expansivos

● Operadores no expansivos promedio

● Puntos fijos comunes

Definición: Sea $D \subseteq \mathcal{H}$ no vacío, sea $T : D \rightarrow \mathcal{H}$, y sea $\beta \in \mathbb{R}_{>0}$. Entonces T es β -co-coercivo (o β -inverso fuertemente monótono) si βT es fuertemente no expansivo, i.e.,

$$(\forall x \in D)(\forall y \in D) \langle x - y, Tx - Ty \rangle \geq \beta \|Tx - Ty\|^2. \quad (9)$$

Proposición: Sea $D \subseteq \mathcal{H}$ no vacío y sea $T : D \rightarrow \mathcal{H}$. Entonces T es no expansivo ssi el operador $\text{Id} - T$ es $\frac{1}{2}$ -co-coercivo.

Demostración: Recordemos que T es un operador no expansivo ssi $2\left(\frac{\text{Id}-T}{2}\right) - \text{Id} = -T$ es no expansivo, lo cual es equivalente a que $\left(\frac{\text{Id}-T}{2}\right)$, es fuertemente no expansivo. Se sigue que,

$$\left\| \frac{1}{2}(x - Tx) - \frac{1}{2}(y - Ty) \right\|^2 \leq \frac{1}{2} \langle x - y, (x - Tx) - (y - Ty) \rangle$$

De donde se concluye que $\text{Id} - T$ es $\frac{1}{2}$ -co-coercivo.

Proposición: Sea $(\mathcal{K}_i)_{i \in I}$ una familia finita de *espacios de Hilbert reales*. Para todo $i \in I$, suponiendo que $L_i \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K}_i) \setminus \{0\}$, sea $\beta_i \in \mathbb{R}_{>0}$, y sea $T_i : \mathcal{K}_i \rightarrow \mathcal{K}_i$ es β_i -co-coercivo. Sean

$$T = \sum_{i \in I} L_i^* T_i L_i \quad \text{y} \quad \beta = \frac{1}{\sum_{i \in I} \frac{\|L_i\|^2}{\beta_i}}.$$

Entonces T es β -co-coercivo.

A continuación vemos la demostración.

Demostración: Sea $\alpha_i = \beta \|L_i\|^2 / \beta_i$. Entonces $\sum_{i \in I} \alpha_i = 1$ y, usando el lema anterior y Zarantonello, obtenemos para todo $x, y \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned} \langle x - y, Tx - Ty \rangle &= \sum_{i \in I} \langle x - y, L_i^* T_i L_i x - L_i^* T_i L_i y \rangle \\ &= \sum_{i \in I} \langle L_i x - L_i y, T_i L_i x - T_i L_i y \rangle \\ &\geq \sum_{i \in I} \beta_i \|T_i L_i x - T_i L_i y\|^2 \\ &\geq \sum_{i \in I} \frac{\beta_i}{\|L_i\|^2} \|L_i^* T_i L_i x - L_i^* T_i L_i y\|^2 \\ &= \beta \sum_{i \in I} \alpha_i \left\| \frac{1}{\alpha_i} (L_i^* T_i L_i x - L_i^* T_i L_i y) \right\|^2 \\ &\geq \beta \left\| \sum_{i \in I} (L_i^* T_i L_i x - L_i^* T_i L_i y) \right\|^2 \\ &= \beta \|Tx - Ty\|^2 \end{aligned}$$

Corolario: Sea \mathcal{K} un *Espacio de Hilbert real*, sea $T : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ un operador *firmemente no expansivo*, y sea $L \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ tal que $\|L\| \leq 1$. Entonces L^*TL es firmemente no expansivo.

Demostración: De la proposición anterior con $\beta_1 = 1$ y $I = \{1\}$, tenemos que L^*TL es $\frac{1}{\|L\|^2}$ -co-coercivo. Además, dado que $\|L\| \leq 1$ implica que el operador es firmemente no expansivo, ya que $\frac{1}{\|L\|^2} \geq 1$.

● Operadores no expansivos y firmemente no expansivos

● Operadores co-coercivos

● 3 Proyecciones sobre conjuntos convexos

● Puntos fijos de operadores no expansivos

● Operadores no expansivos promedio

● Puntos fijos comunes

Proyecciones sobre conjuntos convexos

La proyección de un convexo es firmemente no expansiva

Teorema: Sea $C \subseteq \mathcal{H}$ convexo, cerrado no vacío. Entonces la *proyección* P_C es *firmemente no expansivo*.

Demostración: Recordemos que *para un conjunto $C \subseteq \mathcal{H}$ convexo, cerrado y no vacío. Entonces para todo $x, p \in \mathcal{H}$,*

$$p = P_C x \iff p \in C \quad \text{y} \quad (\forall y \in C) \langle y - p, x - p \rangle \leq 0.$$

Fijamos $x, y \in \mathcal{H}$ (arbitrarios). Entonces

$$\langle P_C y - P_C x, x - P_C x \rangle \leq 0 \quad \text{y} \quad \langle P_C y - P_C x, y - P_C y \rangle \leq 0$$

$$\implies \underbrace{\|P_C x - P_C y\|^2}_{\text{tenemos que } (\forall x \in \mathcal{H}) (\forall y \in \mathcal{H}) \|Tx - Ty\|^2 \leq \langle x - y, Tx - Ty \rangle^2} \leq \langle x - y, P_C x - P_C y \rangle$$

$$\text{tenemos que } (\forall x \in \mathcal{H}) (\forall y \in \mathcal{H}) \|Tx - Ty\|^2 \leq \langle x - y, Tx - Ty \rangle^2$$

concluyendo lo deseado.

²Antes vimos que esta desigualdad equivale a que el operador T es *firmemente no expansivo*.

Dos resultados más sobre P_C :

Proposición: Sea C un subespacio vectorial cerrado de \mathcal{H} . Entonces:

1 P_C es débilmente continuo.

2 $(\forall x \in \mathcal{H})(\forall y \in \mathcal{H}) \|P_C x - P_C y\|^2 = \langle x - y, P_C x - P_C y \rangle$.

Proposición: Sea $C \subseteq \mathcal{H}$ un convexo cerrado no vacío, sea $z \in \mathcal{H}$, y sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{H}$ tal que $\limsup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n - z\| \leq \|P_C z - z\|$. Suponiendo que todo punto de acumulación débil de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pertenece a C . Entonces

$$x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P_C z.$$

- Operadores no expansivos y firmemente no expansivos
- Operadores co-coercivos
- Proyecciones sobre conjuntos convexos
- Puntos fijos de operadores no expansivos
 - Puntos fijos del operador proyección sobre un convexo
 - Puntos fijos del operador proximal
- Operadores no expansivos promedio
- Puntos fijos comunes

Puntos fijos de operadores no expansivos

Operadores cuasi-no expansivos

El operador *proyección sobre un conjunto convexo no vacío* $C \subseteq \mathcal{H}$, denotado por P_C es (*fírmemente*) *no expansivo*³, con

$$\text{Fix}(P_C) = C,$$

así $\text{Fix}(P_C)$ es convexo. Este resultado puede ser emulado para *operadores cuasi-no expansivos*.

Recordemos que T es *cuasi-no expansivo* si

$$(\forall x \in D)(\forall y \in \text{Fix}T) \|Tx - y\| \leq \|x - y\|.$$

Proposición: Sea $D \subseteq \mathcal{H}$ un subconjunto convexo no vacío, y sea $T : D \rightarrow \mathcal{H}$ un operador *cuasi-no expansivo*. Entonces

$$\text{Fix}(T)$$

es convexo.

³Antes demostramos que P_C es fírmemente no expansivo y sabemos (de la definición) que un *operador fírmemente no expansivo* es en particular *no expansivo*.

Puntos fijos de operadores no expansivos

Operadores cuasi-no expansivos: Demostración de que un operado cuasi- no expansivo T tiene conjunto de puntos fijos convexo.

Recordemos que T es *cuasi-no expansivo* si

$$(\forall x \in D)(\forall y \in \text{Fix}T) \|Tx - y\| \leq \|x - y\|.$$

Demostración: Veamos que $\text{Fix}(T)$ es convexo. Sean $x, y \in \text{Fix}(T)$, sea $\alpha \in (0, 1)$, y sea $z = \alpha x + (1 - \alpha)y$, luego *suponiendo (como lema) que para $x, y \in \mathcal{H}$ y $\alpha \in (0, 1)$ tenemos que (la combinación convexa de las normas es)*

$$\begin{aligned} \alpha\|x\|^2 + (1 - \alpha)\|y\|^2 &= \|\alpha x + (1 - \alpha)y\|^2 + \alpha(1 - \alpha)\|x - y\|^2 \\ \implies \|\alpha x + (1 - \alpha)y\|^2 &= \alpha\|x\|^2 + (1 - \alpha)\|y\|^2 - \alpha(1 - \alpha)\|x - y\|^2 \end{aligned} \tag{10}$$

Entonces

$$\begin{aligned} 0 \leq \|Tz - z\|^2 &= \|Tz - (\alpha x + (1 - \alpha)y)\|^2 \\ &= \|\alpha(Tz - x) + (1 - \alpha)(Tz - y)\|^2 \\ &\stackrel{10}{=} \alpha\|Tz - x\|^2 + (1 - \alpha)\|Tz - y\|^2 - \alpha(1 - \alpha)\|x - y\|^2 \\ &\stackrel{5}{\leq} \alpha\|z - x\|^2 + (1 - \alpha)\|z - y\|^2 - \alpha(1 - \alpha)\|x - y\|^2 \\ &= \|\alpha(z - x) + (1 - \alpha)(z - y)\|^2 = 0. \end{aligned}$$

Como $\|T(z) - z\|^2 = 0$ sigue que $T(z) = z$ y por lo tanto $z \in \text{Fix}(T)$.

Puntos fijos de operadores no expansivos

Operadores cuasi-no expansivos: Propiedades del conjunto de punto fijos

Proposición: Sea $D \subseteq \mathcal{H}$ no vacío y sea $T : D \rightarrow \mathcal{H}$ un operador *cuasi-no expansivo*. Entonces

1 Podemos escribir

$$\text{Fix}(T) = \bigcap_{x \in D} \left\{ y \in D : \langle y - Tx, x - Tx \rangle \leq \frac{1}{2} \|Tx - x\|^2 \right\}.$$

2 Suponiendo que D es cerrado y convexo, entonces $\text{Fix}(T)$ es cerrado y convexo.

Primero veamos el razonamiento para probar (2).

Demostración de (2): Notemos que suponiendo (1) sigue que $\text{Fix}(T)$ es la intersección arbitraria de subespacios cerrados y D (que es convexo y cerrado), en particular decimos que es intersección arbitraria de convexos cerrados (ambas propiedades cerradas bajo la intersección arbitraria) por lo que se concluye fácilmente.

Puntos fijos de operadores no expansivos

Operadores cuasi-no expansivos: Propiedades del conjunto de punto fijos, demostración (primera contención).

Veamos que para un operador *cuasi-no expansivo* $T : D \rightarrow \mathcal{H}$ se cumple

$$\text{Fix}(T) = \bigcap_{x \in D} \left\{ y \in D : \langle y - Tx, x - Tx \rangle \leq \frac{1}{2} \|Tx - x\|^2 \right\}.$$

Demostración de (1): Para comenzar definimos

$$C := \bigcap_{x \in D} \left\{ y \in D : \langle y - Tx, x - Tx \rangle \leq \frac{1}{2} \|Tx - x\|^2 \right\}.$$

Veamos que $C = \text{Fix}(T)$ mediante doble inclusión.

- Sea $x \in D$ y $y \in \text{Fix}(T)$, entonces

$$\|Tx - y\|^2 \leq \|x - y\|^2,$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} & \|Tx - x\|^2 + 2\langle Tx - x, x - y \rangle + \|x - y\|^2 \leq \|x - y\|^2 \\ \implies & \|Tx - x\|^2 + 2\langle Tx - x, x - Tx \rangle + 2\langle Tx - x, Tx - y \rangle \leq 0 \\ \implies & 2\langle Tx - x, Tx - y \rangle \leq \|Tx - x\|^2, \end{aligned}$$

y así concluimos que $\text{Fix}(T) \subseteq C$.

Puntos fijos de operadores no expansivos

Operadores cuasi-no expansivos: Propiedades del conjunto de punto fijos, demostración (segunda contención).

Veamos que para un operador *cuasi-no expansivo* $T : D \rightarrow \mathcal{H}$ se cumple

$$\text{Fix}(T) = \bigcap_{x \in D} \left\{ y \in D : \langle y - Tx, x - Tx \rangle \leq \frac{1}{2} \|Tx - x\|^2 \right\}.$$

Demostración de (1): Para comenzar definimos

$$C := \bigcap_{x \in D} \left\{ y \in D : \langle y - Tx, x - Tx \rangle \leq \frac{1}{2} \|Tx - x\|^2 \right\}.$$

Veamos que $C = \text{Fix}(T)$ mediante doble inclusión.

- Sabemos que $\text{Fix}(T) \subseteq C$.
- Recíprocamente, sea $x \in C$. Entonces

$$x \in \left\{ y \in D : \langle y - Tx, x - Tx \rangle \leq \frac{1}{2} \|Tx - x\|^2 \right\}$$

y por lo tanto

$$\|Tx - x\|^2 = \langle x - Tx, x - Tx \rangle \leq \frac{1}{2} \|Tx - x\|^2,$$

esto implica que $Tx = x$ y así $C \subseteq \text{Fix}(T)$.

Puntos fijos de operadores no expansivos

Operadores cuasi-no expansivos: Propiedades del conjunto de punto fijos

Proposición: Sea $D \subseteq \mathcal{H}$ no vacío y sea $T : D \rightarrow \mathcal{H}$ un operador *cuasi-no expansivo*. Entonces

1 Podemos escribir

$$\text{Fix}(T) = \bigcap_{x \in D} \left\{ y \in D : \langle y - Tx, x - Tx \rangle \leq \frac{1}{2} \|Tx - x\|^2 \right\}.$$

2 Suponiendo que D es cerrado y convexo, entonces $\text{Fix}(T)$ es cerrado y convexo.

Algunas consecuencias son:

Corolario:

1 Sea $D \subseteq \mathcal{H}$ un convexo cerrado no vacío y sea $T : D \rightarrow \mathcal{H}$ un operador *cuasi-no expansivo*. Entonces $\text{Fix}(T)$ es un convexo cerrado.

2 Sea $D \subseteq \mathcal{H}$ y sea $T : D \rightarrow \mathcal{H}$ un operador *firmente cuasi-no expansivo*. Entonces

$$\text{Fix}(T) = \bigcap_{x \in D} \{y \in D : \langle y - Tx, x - Tx \rangle \leq 0\}.$$

Veamos la demostración de (2) a continuación.

Puntos fijos de operadores no expansivos

Operadores cuasi-no expansivos: Propiedades del conjunto de punto fijos, demostración de una consecuencia

Corolario:

2 Sea $D \subseteq \mathcal{H}$ y sea $T : D \rightarrow \mathcal{H}$ un operador *fírmemente cuasi-no expansivo*. Entonces

$$\text{Fix}(T) = \bigcap_{x \in D} \{y \in D : \langle y - Tx, x - Tx \rangle \leq 0\}.$$

Recordemos⁴ que T es *fírmemente cuasi-no expansivo* ssi $2T - \text{Id}$ es *cuasi-noexpansivo*.

Demostración de (2): Sea $R = 2T - \text{Id}$, entonces $\text{Fix}(T) = \text{Fix}(R)$ y por lo tanto R es *cuasi-no expansivo*, luego suponiendo (1) tenemos que

$$\begin{aligned} \text{Fix}(R) &= \bigcap_{x \in D} \left\{ y \in D : \langle y - Rx, x - Rx \rangle \leq \frac{1}{2} \|Tx - x\|^2 \right\} \\ &= \bigcap_{x \in D} \left\{ y \in D : \langle y - Tx + x - Tx, 2(x - Tx) \rangle \leq 2 \|Tx - x\|^2 \right\} \\ &= \bigcap_{x \in D} \{y \in D : \langle y - Tx, x - Tx \rangle \leq 0\}. \end{aligned}$$

⁴Esta es una caracterización presentada al inicio.

Puntos fijos de operadores no expansivos

Operador semi cerrado

Definición: Sea $D \subseteq \mathcal{H}$ un conjunto no vacío, y *débilmente cerrado secuencialmente*^a. Sea $T : D \rightarrow \mathcal{H}$, sea $u \in \mathcal{H}$. Entonces T es un operador *semi cerrado en u* si, para toda sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq D$ y todo $x \in D$ tal que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$ y $Tx_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u$, tenemos que $Tx = u$. Diremos que T es *semi cerrado* si lo es en todo $u \in D$.

^aEn inglés *weakly sequentially closed*

Teorema (Principio de semi cerradura de Browder): Sea $D \subseteq \mathcal{H}$ un conjunto no vacío y *débilmente cerrado secuencialmente*, sea $T : D \rightarrow \mathcal{H}$ un operador *no expansivo*. Entonces $\text{Id} - T$ es un operador *semi cerrado*.

Una consecuencia de este teorema es:

Corolario: Sea $D \subseteq \mathcal{H}$ un cerrado convexo no vacío, sea $T : D \rightarrow \mathcal{H}$ un operador *no expansivo*, sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq D$, y sea $x \in D$. Si $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$ y $x_n - Tx_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Entonces

$$x \in \text{Fix}(T).$$

A continuación demostraremos el *principio de semi cerradura de Browder*.

Puntos fijos de operadores no expansivos

Demostración del principio de Browder

Demostración del principio de Browder: Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en D , sea $x \in D$ y $u \in \mathcal{H}$. Supongamos que $x_n \rightarrow x$ y que $x_n - Tx_n \rightarrow u$. Para todo $n \in \mathbb{N}$, de la no expansividad de T , se sigue que

$$\begin{aligned}\|x - Tx - u\|^2 &= \|x_n - Tx - u\|^2 - \|x_n - x\|^2 - 2\langle x_n - x, x - Tx - u \rangle \\ &= \|x_n - Tx_n - u\|^2 + 2\langle x_n - Tx_n - u, Tx_n - Tx \rangle \\ &\quad + \|Tx_n - Tx\|^2 - \|x_n - x\|^2 - 2\langle x_n - x, x - Tx - u \rangle \\ &\leq \|x_n - Tx_n - u\|^2 + 2\langle x_n - Tx_n - u, Tx_n - Tx \rangle \\ &\quad - 2\langle x_n - x, x - Tx - u \rangle\end{aligned}$$

Sin embargo, comenzamos suponiendo que, $x_n - Tx_n - u \rightarrow 0$, $x_n - x \rightarrow 0$, y por tanto $Tx_n - Tx \rightarrow x - Tx - u$. Recordemos el siguiente lema, si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucesiones en \mathcal{H} , y sea x, u puntos en \mathcal{H} . Si $x_n \rightarrow x$ y $u_n \rightarrow u$, entonces $\langle x_n, u_n \rangle \rightarrow \langle x, u \rangle$. Luego, tomando el límite cuando $n \rightarrow +\infty$ y del lema anterior, obtenemos $x - Tx = u$.

Puntos fijos del operador proyección sobre un convexo

Preliminar, el Teorema de Banach-Picard

Teorema (Banach-Picard): Sea (X, d) un espacio métrico completo y sea $T : X \rightarrow X$ una función Lipschitz continua con constante $\beta \in [0, 1)$. Tomando $x_0 \in X$, definimos $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$(\forall n \in \mathbb{N}), x_{n+1} = Tx_n.$$

Entonces existe $x \in X$ tal que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$ y los siguientes son verdaderos:

- 1 x es el único punto fijo de T .
- 2 $(\forall n \in \mathbb{N}) d(x_{n+1}, x) \leq \beta d(x_n, x)$.
- 3 $(\forall n \in \mathbb{N}) d(x_n, x) \leq \beta^n d(x_0, x)$ (por lo que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a x).
- 4 Error estimado a priori: $(\forall n \in \mathbb{N}) d(x_n, x) \leq \beta^n \frac{d(x_n, x_{n+1})}{1-\beta}$.
- 5 Error estimado a posteriori: $(\forall n \in \mathbb{N}) d(x_n, x) \leq \frac{d(x_n, x_{n+1})}{1-\beta}$.
- 6 $\frac{d(x_0, x_1)}{1+\beta} \leq d(x_0, x) \leq \frac{d(x_0, x_1)}{1-\beta}$.

Puntos fijos del operador proyección sobre un convexo

Preliminar, el Teorema de Banach-Picard

Este teorema es relevante por la técnica de obtención de puntos fijos que entrega (no entraremos en detalle).⁵

⁵Para repasar la técnica que entrega el teorema puede consultar

1 Daniilidis, A. Espacios Metricos, *Lema 2.4.25 (Sucesión de iteraciones de una contracción)*, página 102 (2016).

2 Heinz H. Bauschke, Patrick L. Combettes (auth.), Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces. Springer. *Teorema 1.50, página 21* (2017).



Daniilidis, A. Espacios Metricos, *Lema 2.4.25 (Sucesión de iteraciones de una contracción)*, página 102 (2016).



Heinz H. Bauschke, Patrick L. Combettes (auth.), Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces. Springer. *Teorema 1.50, página 21* (2017).

Teorema (Browder-Göhde-Kirk): Sea $D \subseteq \mathcal{H}$ un convexo cerrado, acotado y no vacío, y sea $T : D \rightarrow D$ un operador *no expansivo*. Entonces $\text{Fix}(T) \neq \emptyset$.

Demostración: Utilicemos los siguientes resultados,

- 1 Sea D un subconjunto convexo de \mathcal{H} . Entonces es equivalente que D es débilmente secuencialmente cerrado, D es secuencialmente cerrado y D es cerrado.
- 2 Sea D un subconjunto acotado, cerrado y convexo de \mathcal{H} . Entonces D es débilmente compacto y débilmente secuencialmente compacto.

Fijemos $x_0 \in D$ y una sucesión $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $(0, 1]$ tal que $\alpha_0 = 1$ y $\alpha \downarrow 0$. Para todo $n \in \mathbb{N}$, el operador $T_n : D \rightarrow D : x \rightarrow \alpha_n x_0 + (1 - \alpha_n)Tx$ es Lipschitz continua con constante $(1 - \alpha_n)$. Por lo tanto, del teorema de *Banach-Picard*, el operador posee un punto fijo $x_n \in D$. Además, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\|x_n - Tx_n\| = \|T_n x_n - Tx_n\| = \alpha_n \|x_0 - Tx_n\| \leq \alpha_n \text{diam } D,$$

Por tanto, $x_n - Tx_n \rightarrow 0$.

Teorema (Browder-Göhde-Kirk): Sea $D \subseteq \mathcal{H}$ un convexo cerrado, acotado y no vacío, y sea $T : D \rightarrow D$ un operador *no expansivo*. Entonces $\text{Fix}(T) \neq \emptyset$.

Demostración: Utilicemos los siguientes resultados,

- 1 Sea D un subconjunto convexo de \mathcal{H} . Entonces es equivalente que D es débilmente secuencialmente cerrado, D es secuencialmente cerrado y D es cerrado.
- 2 Sea D un subconjunto acotado, cerrado y convexo de \mathcal{H} . Entonces D es débilmente compacto y débilmente secuencialmente compacto.

Fijemos $x_0 \in D$ y una sucesión $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $(0, 1]$ tal que $\alpha_0 = 1$ y $\alpha \downarrow 0$. Para todo $n \in \mathbb{N}$, el operador $T_n : D \rightarrow D : x \rightarrow \alpha_n x_0 + (1 - \alpha_n)Tx$ es Lipschitz continua con constante $(1 - \alpha_n)$. Por lo tanto, del teorema de *Banach-Picard*, el operador posee un punto fijo $x_n \in D$. Además, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\|x_n - Tx_n\| = \|T_n x_n - Tx_n\| = \alpha_n \|x_0 - Tx_n\| \leq \alpha_n \text{diam } D,$$

Por tanto, $x_n - Tx_n \rightarrow 0$. Por otra parte, ya que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ esta en D , de la compacidad secuencial débil, podemos extraer una subsucesión débilmente convergente, digamos, $x_{k_n} \rightharpoonup x \in D$. Ya que $x_{k_n} - Tx_{k_n} \rightarrow 0$ y del corolario de *Principio de semi cerradura de Browder*, obtenemos que $x \in \text{Fix } T$.

Puntos fijos de operadores no expansivos

Teorema de Browder-Göhde-Kirk, continuación de la demostración

Demostración (continuación): Por otra parte, ya que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ está en D , de la compacidad secuencial débil, podemos extraer una subsucesión débilmente convergente, digamos, $x_{k_n} \rightharpoonup x \in D$. Ya que $x_{k_n} - Tx_{k_n} \rightarrow 0$ y del corolario de *Principio de semi cerradura de Browder*, obtenemos que $x \in \text{Fix } T$.

La demostración de este teorema, utiliza los operadores Lipschitz continuos y sus puntos fijos. Estos puntos fijos determinan una curva, la cual veremos en el siguiente resultado.

Proposición (Curva aproximada, parte 1): Sea $D \subseteq \mathcal{H}$ un convexo cerrado no vacío, sea $T : D \rightarrow D$ un operador *no expansivo*. Entonces para todo $\varepsilon \in (0, 1)$ y todo $x \in D$, existe un único punto $x_\varepsilon \in D$ tal que

$$x_\varepsilon = \varepsilon x + (1 - \varepsilon)Tx_\varepsilon.$$

Además, para todo $\varepsilon \in (0, 1)$, $T_\varepsilon : D \rightarrow D$ dada por $x \mapsto x_\varepsilon$, se cumplen:

1 $(\forall \varepsilon \in (0, 1)) T_\varepsilon = \varepsilon \text{Id} + (1 - \varepsilon)TT_\varepsilon = (\text{Id} - (1 - \varepsilon)T)^{-1} \circ \varepsilon \text{Id}.$

2 $(\forall \varepsilon \in (0, 1)) T_\varepsilon$ es firmemente no expansivo.

3 $(\forall \varepsilon \in (0, 1)) \text{Fix}(T_\varepsilon) = \text{Fix}(T).$

4 $(\forall \varepsilon \in (0, 1)) \varepsilon(x - Tx_\varepsilon) = x_\varepsilon - Tx_\varepsilon = (1 - \varepsilon)^{-1}\varepsilon(x - x_\varepsilon).$

5 Si $\text{Fix}(T) = \emptyset$. Entonces $\lim_{\varepsilon \searrow 0} \|x_\varepsilon\| = +\infty.$

6 $(\forall \varepsilon \in (0, 1))(\forall y \in \text{Fix}(T)),$

$$\|x - x_\varepsilon\|^2 + \|x_\varepsilon - y\|^2 \leq \|x - y\|^2.$$

7 Suponiendo que $\text{Fix}(T) \neq \emptyset$. Entonces $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} x_\varepsilon = P_{\text{Fix}(T)}x.$

Proposición (Curva aproximada, parte 2): Sea $D \subseteq \mathcal{H}$ un convexo cerrado no vacío, sea $T : D \rightarrow D$ un operador *no expansivo*. Entonces para todo $\varepsilon \in (0, 1)$ y todo $x \in D$, existe un único punto $x_\varepsilon \in D$ tal que

$$x_\varepsilon = \varepsilon x + (1 - \varepsilon)Tx_\varepsilon.$$

Además, para todo $\varepsilon \in (0, 1)$, $T_\varepsilon : D \rightarrow D$ dada por $x \mapsto x_\varepsilon$, se cumplen:

8 $(\forall \varepsilon \in (0, 1))(\forall \delta \in (0, 1)),$

$$\left(\frac{\varepsilon - \delta}{1 - \varepsilon}\right)^2 \|x_\varepsilon - x\|^2 + \delta(2 - \delta)\|x_\delta - x_\varepsilon\|^2 \leq 2\left(\frac{\varepsilon - \delta}{1 - \varepsilon}\right)\langle x_\varepsilon - x, x_\delta - x_\varepsilon \rangle.$$

9 $(\forall \varepsilon \in (0, 1))(\forall \delta \in (0, \varepsilon)),$

$$\|x - x_\varepsilon\|^2 + \|x_\varepsilon - x_\delta\|^2 \leq \|x - x_\delta\|^2.$$

10 La función $(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ dada por $\varepsilon \mapsto \|x - x_\varepsilon\|$ es decreciente.

11 La curva $(0, 1) \rightarrow \mathcal{H}$ dada por $\varepsilon \mapsto x_\varepsilon$ es continua.

12 Si $x \in \text{Fix}(T)$, entonces $x_\varepsilon \equiv x$ es constante, de lo contrario, $(x_\varepsilon)_{\varepsilon \in (0, 1)}$ es una curva inyectiva.

Puntos fijos de operadores no expansivos

Curva aproximada, demostración

Demostración (Curva aproximada): Sea $\varepsilon \in (0, 1)$. Del teorema de Banach-Picard, el operador $D \rightarrow D : z \rightarrow \varepsilon x + (1 - \varepsilon)Tz$ tiene un único punto fijo. Por lo tanto, x_ε es único, y T_ε está bien definido.

1 Veamos que $(\forall \varepsilon \in (0, 1)) T_\varepsilon = \varepsilon \text{Id} + (1 - \varepsilon)TT_\varepsilon = (\text{Id} - (1 - \varepsilon)T)^{-1} \circ \varepsilon \text{Id}$

En efecto, ya que $x_\varepsilon = \varepsilon x + (1 - \varepsilon)Tx_\varepsilon$, se concluye. Además,

$\varepsilon \text{Id} = T_\varepsilon - (1 - \varepsilon)TT_\varepsilon = (\text{Id} - (1 - \varepsilon)T)T_\varepsilon$, y por tanto, ya que $\text{Id} - (1 - \varepsilon)T$ es inyectivo, obtenemos que $T_\varepsilon = (\text{Id} - (1 - \varepsilon)T)^{-1} \circ \varepsilon \text{Id}$.

2 $(\forall \varepsilon \in (0, 1)) T_\varepsilon$ es firmemente no expansivo. Sea $y \in D$. Entonces,

$$\begin{aligned}x - y &= \varepsilon^{-1}((x_\varepsilon - (1 - \varepsilon)Tx_\varepsilon) - (y_\varepsilon - (1 - \varepsilon)Ty_\varepsilon)) \\&= \varepsilon^{-1}((x_\varepsilon - y_\varepsilon) - (1 - \varepsilon)(Tx_\varepsilon - Ty_\varepsilon)).\end{aligned}$$

Recordemos que $x_\varepsilon = \varepsilon x + (1 - \varepsilon)Tx_\varepsilon$, de Cauchy-Schwarz, se sigue que

$$\begin{aligned}\langle T_\varepsilon x - T_\varepsilon y, (\text{Id} - T_\varepsilon)x - (\text{Id} - T_\varepsilon)y \rangle &= \langle x_\varepsilon - y_\varepsilon, (1 - \varepsilon)(x - Tx_\varepsilon) - (1 - \varepsilon)(y - Ty_\varepsilon) \rangle \\&= (1 - \varepsilon)\langle x_\varepsilon - y_\varepsilon, (x - y) - (Tx_\varepsilon - Ty_\varepsilon) \rangle \\&= (1 - \varepsilon)\varepsilon^{-1}\langle x_\varepsilon - y_\varepsilon, (x_\varepsilon - y_\varepsilon) - (Tx_\varepsilon - Ty_\varepsilon) \rangle \\&\geq (\varepsilon^{-1} - 1)(\|x_\varepsilon - y_\varepsilon\|^2 - \|x_\varepsilon - y_\varepsilon\|^2 - \|Tx_\varepsilon - Ty_\varepsilon\|^2) \\&= (\varepsilon^{-1} - 1)\|x_\varepsilon - y_\varepsilon\|(\|x_\varepsilon - y_\varepsilon\| - \|Tx_\varepsilon - Ty_\varepsilon\|) \geq 0.\end{aligned}$$

Demostración (Curva aproximada): Sea $\varepsilon \in (0, 1)$. Del teorema de Banach-Picard, el operador $D \rightarrow D : z \rightarrow \varepsilon x + (1 - \varepsilon)Tz$ tiene un único punto fijo. Por lo tanto, x_ε es único, y T_ε esta bien definido.

3 $(\forall \varepsilon \in (0, 1)) \text{Fix}(T_\varepsilon) = \text{Fix}(T).$

En efecto, sea $x \in D$. Supongamos primero que $x \in \text{Fix } T$. Entonces $x = \varepsilon x + (1 - \varepsilon)Tx$ y por tanto, $x = x_\varepsilon$ por la unicidad de x_ε . Se sigue que $T_\varepsilon x = x$, de donde $x \in \text{Fix } T_\varepsilon$. Por otra parte, asumamos que $x \in \text{Fix } T_\varepsilon$, entonces

$$x = x_\varepsilon = \varepsilon x + (1 - \varepsilon)Tx_\varepsilon = x + (1 - \varepsilon)(Tx - x),$$

y así $x = Tx$, es decir, $x \in \text{Fix } T$.

4 $(\forall \varepsilon \in (0, 1)) \varepsilon(x - Tx_\varepsilon) = x_\varepsilon - Tx_\varepsilon = (1 - \varepsilon)^{-1}\varepsilon(x - x_\varepsilon).$

Basta notar que $x_\varepsilon = \varepsilon x + (1 - \varepsilon)Tx_\varepsilon$.

Puntos fijos de operadores no expansivos

Curva aproximada, demostración (continuación)

Demostración (Curva aproximada): Sea $\varepsilon \in (0, 1)$. Del teorema de Banach-Picard, el operador $D \rightarrow D : z \rightarrow \varepsilon x + (1 - \varepsilon)Tz$ tiene un único punto fijo. Por lo tanto, x_ε es único, y T_ε está bien definido.

5 Si $\text{Fix}(T) = \emptyset$. Entonces $\lim_{\varepsilon \searrow 0} \|x_\varepsilon\| = +\infty$.

Supongamos que existe una sucesión $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $(0, 1)$ tal que $\varepsilon_n \downarrow 0$ y $(x_{\varepsilon_n})_{n \in \mathbb{N}}$ es acotada. Notemos que $(x_{\varepsilon_n})_{n \in \mathbb{N}}$ posee una subsucesión convergente, de donde existe un punto de adherencia y de $(x_{\varepsilon_n})_{n \in \mathbb{N}}$. Del punto anterior y el corolario del principio de Browder se sigue que $y \in \text{Fix } T$.

6 $(\forall \varepsilon \in (0, 1))(\forall y \in \text{Fix}(T)),$

$$\|x - x_\varepsilon\|^2 + \|x_\varepsilon - y\|^2 \leq \|x - y\|^2.$$

Asumamos que $y \in \text{Fix } T$. Ya que, $\text{Fix } T_\varepsilon = \text{Fix } T$, $y = T_\varepsilon y = y_\varepsilon$ y dado que T_ε es firmemente no expansivo, se sigue que

$$\|x - y\|^2 \geq \|x_\varepsilon - y_\varepsilon\|^2 + \|(x - x_\varepsilon) - (y - y_\varepsilon)\|^2 = \|x_\varepsilon - y\|^2 + \|x - x_\varepsilon\|^2.$$

Puntos fijos de operadores no expansivos

Curva aproximada, demostración (continuación)

Demostración (Curva aproximada): Sea $\varepsilon \in (0, 1)$. Del teorema de Banach-Picard, el operador $D \rightarrow D : z \rightarrow \varepsilon x + (1 - \varepsilon)Tz$ tiene un único punto fijo. Por lo tanto, x_ε es único, y T_ε está bien definido.

7 Suponiendo que $\text{Fix}(T) \neq \emptyset$. Entonces $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} x_\varepsilon = P_{\text{Fix}(T)}x$.

Sea $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $(0, 1)$ tal que $\varepsilon_n \downarrow 0$, y sea $z_n = x_{\varepsilon_n}$. Del punto anterior, $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es acotado. Así, del punto 4), vemos que $z_n - Tz_n \rightarrow 0$. Sea z un punto de acumulación secuencialmente débil de $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$, digamos $z_{k_n} \rightarrow z$. Del principio de Browder, implica que $z \in \text{Fix } T$. Del punto anterior, tenemos que $\lim \|x - z_{k_n}\|^2 \leq \|x - z\|^2$. Ya que $x - z_{k_n} \rightarrow x - z$, de donde $x - z_{k_n} \rightarrow x - z$. Así $z_{k_n} \rightarrow z$. De nuevo, del punto anterior, vemos que

$$\|x - z_{k_n}\|^2 + \|z_{k_n} - y\|^2 \leq \|x - y\|^2,$$

Tomando el límite con $n \rightarrow \infty$, vemos que

$$\|x - z\|^2 + \|z - y\|^2 \leq \|x - y\|^2,$$

Por lo tanto, $\forall y \in \text{Fix } T$, $\langle y - z, x - z \rangle \leq 0$, pero esto es equivalente a que $z = P_{\text{Fix } T}x$. Por lo tanto, $z_n \rightarrow P_{\text{Fix } T}x$, de donde $x_\varepsilon \rightarrow P_{\text{Fix } T}x$ cuando $\varepsilon \downarrow 0$.

Puntos fijos de operadores no expansivos

Curva aproximada, demostración (continuación)

Demostración (Curva aproximada): Sea $\varepsilon \in (0, 1)$. Del teorema de Banach-Picard, el operador $D \rightarrow D : z \rightarrow \varepsilon x + (1 - \varepsilon)Tz$ tiene un único punto fijo. Por lo tanto, x_ε es único, y T_ε esta bien definido.

$$\blacksquare (\forall \varepsilon \in (0, 1))(\forall \delta \in (0, 1)),$$

$$\left(\frac{\varepsilon - \delta}{1 - \varepsilon}\right)^2 \|x_\varepsilon - x\|^2 + \delta(2 - \delta)\|x_\delta - x_\varepsilon\|^2 \leq 2\left(\frac{\varepsilon - \delta}{1 - \varepsilon}\right) \langle x_\varepsilon - x, x_\delta - x_\varepsilon \rangle. \quad (11)$$

Sea $\delta \in (0, 1)$ y $y_\varepsilon = x_\varepsilon - x$ y $y_\delta = x_\delta - x$. Ya que $y_\delta = y_\varepsilon + x_\delta - x_\varepsilon$, usando que $x_\varepsilon = \varepsilon x + (1 - \varepsilon)Tx_\varepsilon$, obtenemos

$$\begin{aligned} \|x_\delta - x_\varepsilon\|^2 &\geq \|Tx_\delta - Tx_\varepsilon\|^2 \\ &= \left\| \frac{x_\delta - \delta x}{1 - \delta} - \frac{x_\varepsilon - \varepsilon x}{1 - \varepsilon} \right\|^2 = \left\| \frac{y_\delta}{1 - \delta} - \frac{y_\varepsilon}{1 - \varepsilon} \right\|^2 \\ &= \frac{1}{(1 - \delta)^2} \left\| \frac{\delta - \varepsilon}{1 - \varepsilon} y_\varepsilon + x_\delta - x_\varepsilon \right\|^2 \end{aligned}$$

Desarrollando la igualdad anterior, se concluye.

Puntos fijos de operadores no expansivos

Curva aproximada, demostración (continuación)

Demostración (Curva aproximada): Sea $\varepsilon \in (0, 1)$. Del teorema de Banach-Picard, el operador $D \rightarrow D : z \rightarrow \varepsilon z + (1 - \varepsilon)Tz$ tiene un único punto fijo. Por lo tanto, x_ε es único, y T_ε está bien definido.

$$\textcircled{9} \quad (\forall \varepsilon \in (0, 1))(\forall \delta \in (0, \varepsilon),$$

$$\|x - x_\varepsilon\|^2 + \|x_\varepsilon - x_\delta\|^2 \leq \|x - x_\delta\|^2$$

Sea $\delta \in (0, \varepsilon)$. Entonces $\langle x_\varepsilon - x, x_\delta - x_\varepsilon \rangle \geq 0$. Se sigue que,

$$\|x_\delta - x\|^2 = \|x_\delta - x_\varepsilon\|^2 + 2\langle x_\delta - x_\varepsilon, x_\varepsilon - x \rangle + \|x_\varepsilon - x\|^2 \geq \|x_\delta - x_\varepsilon\|^2 + \|x_\varepsilon - x\|^2.$$

$\textcircled{10}$ La función $(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ dada por $\varepsilon \mapsto \|x - x_\varepsilon\|$ es decreciente.

Directo del punto anterior.

Puntos fijos de operadores no expansivos

Curva aproximada, demostración (continuación)

Demostración (Curva aproximada): Sea $\varepsilon \in (0, 1)$. Del teorema de Banach-Picard, el operador $D \rightarrow D : z \rightarrow \varepsilon x + (1 - \varepsilon)Tz$ tiene un único punto fijo. Por lo tanto, x_ε es único, y T_ε está bien definido.

■ La curva $(0, 1) \rightarrow \mathcal{H}$ dada por $\varepsilon \mapsto x_\varepsilon$ es continua.

De (11) y Cauchy-Schwarz tenemos,

$$(\forall \delta \in (0, \varepsilon)), \|x_\delta - x_\varepsilon\| \leq \frac{2(\varepsilon - \delta)}{\delta(2 - \delta)(1 - \varepsilon)} \|x_\varepsilon - x\|.$$

Por tanto, $\|x_\delta - x_\varepsilon\| \downarrow 0$ cuando $\delta \downarrow \varepsilon$. De donde, la curva $(0, 1) \rightarrow \mathcal{H} : \varepsilon \rightarrow x_\varepsilon$ es continua por la derecha.

■ Si $x \in \text{Fix } T$, entonces $x_\varepsilon \equiv x$ es constante, de lo contrario, $(x_\varepsilon)_{\varepsilon \in (0, 1)}$ es una curva inyectiva.

Si $x \in \text{Fix } T$, dado que $\text{Fix } T_\varepsilon = \text{Fix } T$ entonces $x \in \text{Fix } T_\varepsilon$ y por tanto, $x = T_\varepsilon x = x_\varepsilon$. Ahora asumamos que $x \notin \text{Fix } T$. Si $\delta \in (0, \varepsilon)$ y $x_\varepsilon = x_\delta$, entonces de (11) $T_\varepsilon x = x_\varepsilon = x$ y por tanto, $x \in \text{Fix } T_\varepsilon$, lo cual no puede ocurrir, ya que $\text{Fix } T_\varepsilon = \text{Fix } T$. Por lo tanto, la curva $(x_\varepsilon)_{\varepsilon \in (0, 1)}$ es inyectiva.

Proposición: Sean $T_1 : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ y $T_2 : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ un operador *firmente no expansivo* y sea $T = T_1(2T_2 - \text{Id}) + \text{Id} - T_2$. Entonces:

- 1 $2T - \text{Id} = (2T_1 - \text{Id})(2T_2 - \text{Id})$.
- 2 T es *firmente no expansivo*.
- 3 $\text{Fix}(T) = \text{Fix}(2T_1 - \text{Id})(2T_2 - \text{Id})$.
- 4 Si T_1 es el proyector sobre un subespacio vectorial cerrado de \mathcal{H} . Entonces

$$\text{Fix}(T) = \{x \in \mathcal{H} : T_1 x = T_2 x\}.$$

Demostración:

1 $2T - \text{Id} = (2T_1 - \text{Id})(2T_2 - \text{Id})$

2 T es *firmente no expansivo*

Tenemos que $2T_1 - \text{Id}$ y $2T_2 - \text{Id}$ son no expansivos. Por lo tanto, $(2T_1 - \text{Id})(2T_2 - \text{Id})$ es no expansivo, de donde T es *firmente no expansivo*.

3 $\text{Fix}(T) = \text{Fix}(2T_1 - \text{Id})(2T_2 - \text{Id})$

Del primer punto, se sigue que $\text{Fix } T = \text{Fix } (2T - \text{Id}) = \text{Fix } (2T_1 - \text{Id})(2T_2 - \text{Id})$

Proposición: Sean $T_1 : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ y $T_2 : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ un operador *fírmemente no expansivo* y sea $T = T_1(2T_2 - \text{Id}) + \text{Id} - T_2$. Entonces:

- 1 $2T - \text{Id} = (2T_1 - \text{Id})(2T_2 - \text{Id})$.
- 2 T es *fírmemente no expansivo*.
- 3 $\text{Fix}(T) = \text{Fix}(2T_1 - \text{Id})(2T_2 - \text{Id})$.
- 4 Si T_1 es el proyector sobre un subespacio vectorial cerrado de \mathcal{H} . Entonces

$$\text{Fix}(T) = \{x \in \mathcal{H} : T_1x = T_2x\}.$$

Demostración:

- 1 Si T_1 es el proyector sobre un subespacio vectorial cerrado de \mathcal{H} . Entonces

$$\text{Fix}(T) = \{x \in \mathcal{H} : T_1x = T_2x\}.$$

Supongamos que $T_1 = P_C$, donde C es un subespacio cerrado de \mathcal{H} , y sea $x \in \mathcal{H}$. Recordemos que si C es un subconjunto convexo cerrado, entonces P_C es *fírmemente no expansivo*, de donde T_1 es *fírmemente no expansivo* y $x \in \text{Fix}T$ ssi, $x = P_C(2T_2x + (1 - 2)x) + x - T_2x$ ssi, $T_2x = 2P_C(T_2x) + (1 - 2)P_Cx \in C$ ssi, $P_C(T_2x) = T_2x = 2P_C(T_2x) + (1 - 2)P_Cx$ ssi, $T_2x = P_Cx$.

Corolario: Sea T_1 el proyector sobre un subespacio vectorial cerrado de \mathcal{H} , sea $T_2 : \mathbb{H} \rightarrow \mathcal{H}$ un operador *firmemente no expansivo*, y sea $T = T_1 T_2 + (\text{Id} - T_1)(\text{Id} - T_2)$. Entonces T es *firmemente no expansivo* y $\text{Fix}(T) = \{x \in \mathcal{H} : T_1 x = T_2 x\}$.

Demostración: Ya que $T = T_1(2T_2 - \text{Id}) + \text{Id} - T_2$, el resultado se sigue de la proposición anterior.

Puntos fijos de operadores no expansivos

Referencias que hablan sobre los puntos fijos del operador proximal

El objetivo de esta sección es estudiar el conjunto de puntos fijos del Prox y ver que el mínimo de una función se puede caracterizar como un punto fijo. Algunas referencias que puede consultar para complementar son:



Beck, A. First-Order Methods in Optimization. Society for Industrial and Applied Mathematics (2017).



Combettes, P.L.: Solving monotone inclusions via compositions of nonexpansive averaged operators. Optimization 53, 475-504 (2004).



Gilbert, J.C., Fragments d'Optimisation Différentiable - Théories et Algorithmes, Capítulo 7.2 (2021).



martinzellner (<https://math.stackexchange.com/users/363016/martinzellner>), Firm Non Expansiveness in the Context of Proximal Mapping / Proximal Operators, URL (version: 2020-07-25): <https://math.stackexchange.com/q/1900064>.



littleO (<https://math.stackexchange.com/users/40119/littleo>), Firm Non Expansiveness in the Context of Proximal Mapping / Proximal Operators, URL (version: 2019-01-22): <https://math.stackexchange.com/q/1900110>.

Puntos fijos de operadores no expansivos

Definiciones sobre el operador proximal

Sea \mathcal{E} un *espacio euclideo*, osea un espacio vectorial finito dimensional cuya norma proviene de un producto interno. Recordemos (de la presentación sobre *Operador Proximal y Descomposición de Moreau*) las siguientes definiciones:

Definición: Dada $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ definimos el *mapeo proximal/operador proximal* de f como el operador $\text{Prox}_f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ dado por

$$\text{Prox}_f(x) = \operatorname{argmin}_{u \in \mathcal{E}} \left\{ f(u) + \frac{1}{2} \|u - x\|^2 \right\}.$$

Es común encontrar el *operador proximal de la función λ -escalada* λf , con $\lambda > 0$, la cual se expresa como

$$\text{prox}_{\lambda f}(v) = \operatorname{argmin}_x \left\{ f(x) + \frac{1}{2\lambda} \|x - v\|^2 \right\}$$

Consideremos $f(x) = \langle a, x \rangle + b$, donde $a \in \mathcal{E}$ y $b \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned} \text{prox}_f(x) &= \operatorname{argmin}_{u \in \mathcal{E}} \left\{ \langle a, u \rangle + b + \frac{1}{2} \|u - x\|^2 \right\} \\ &= \operatorname{argmin}_{u \in \mathcal{E}} \left\{ \langle a, u \rangle + b - \frac{1}{2} \|a\|^2 + \frac{1}{2} \|u - (x - a)\|^2 \right\} \\ &= x - a \end{aligned}$$

Puntos fijos de operadores no expansivos

Caracterización del minimizante de f mediante el prox_f

La siguiente propiedad es fundamental, ya que establece un link entre *operadores proximales* y la *teoría de puntos fijos*, por ejemplo, muchos *algoritmos proximales* para la optimización pueden ser interpretados como métodos para encontrar puntos fijos de operadores apropiados.

Teorema: Dada $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, x^* minimiza f ssi $x^* = \text{prox}_f(x^*)$, es decir, $x^* \in \text{Fix}(\text{prox}_f)$.

Demostración: Si x^* minimiza f , es decir, $f(x) \geq f(x^*)$ para cualquier x , entonces

$$f(x) + \frac{1}{2} \|x - x^*\|^2 \geq f(x^*) = f(x) + \frac{1}{2} \|x^* - x^*\|^2,$$

para cualquier x , así x^* minimiza la función $f(x) + \frac{1}{2} \|x - x^*\|^2$. Se sigue que $x^* = \text{prox}_f(x^*)$. Por otra parte, usaremos la caracterización de subdiferenciales del mínimo de una función convexa. El punto \tilde{x} minimiza $f(x) + \frac{1}{2} \|x - v\|^2$, (así $\tilde{x} = \text{prox}_f(v)$) si y solo sí,

$$0 \in \partial f(\tilde{x}) + (\tilde{x} - v),$$

donde la suma es de un conjunto y un punto. Además, $\partial f(x) \subset \mathbb{R}^n$ es el subdiferencial de f en x , definido por

$$\partial f(x) = \{y; f(z) \geq f(x) + y^T(z - x) \text{ para todo } z \in \text{dom } f\}$$

Tomando $\tilde{x} = v = x^*$, se sigue que $0 \in \partial f(x^*)$, así x^* minimiza f .

Puntos fijos de operadores no expansivos

Definiciones sobre el operador proximal

Es útil introducir una notación para el argumento de prox_f , que depende de $x \in \mathcal{E}$,

$$\varphi_x(y) := f(y) + \frac{1}{2} \|y - x\|^2.$$

Recordemos que existe x^* en el subespacio vectorial tal que para todo $y \in \mathcal{E}$, $f(y) \geq f(x) + \langle x^*, y - x \rangle$, de donde f tiene un mínimo, a pesar que $\varphi_x(y) \rightarrow \infty$ cuando $\|y\| \rightarrow \infty$. Además, φ_x es sci y estrictamente convexo. Por lo tanto, el problema anterior tiene una solución única. Sea x_p tal punto, el cual llamaremos punto proximal $x_p \in \text{dom} f$, luego $\text{prox}_f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} : x \rightarrow x_p$.

El punto proximal, se caracteriza por la condición de optimalidad, $0 \in \partial \varphi_x(x_p) = \partial f(x_p) + x_p - x$, es decir,

$$\tilde{x} = \text{prox}_f(x) \iff \exists \tilde{g} \in \partial f(\tilde{x}) : \tilde{x} = x - \tilde{g}$$

Notemos que la unicidad de x_p implica que $g_p := x - x_p$. Además,

$$\langle \text{prox}_f(y) - \text{prox}_f(x), y - x \rangle \geq \|\text{prox}_f(y) - \text{prox}_f(x)\|^2$$

En efecto, si $x_p = x - g_p^x$ con $g_p^x \in \partial f(x_p)$, $y_p = y - g_p^y$ con $g_p^y \in \partial f(y_p)$. Luego,

$$y - x = y_p - x_p + (g_p^y - g_p^x)$$

Multiplicando por $(y_p - x_p)$ y usando la monotonía del subdiferencial, se sigue que

$$\langle y_p - x_p, y - x \rangle = \|y_p - x_p\|^2 + \langle g_p^y - g_p^x, y_p - x_p \rangle \geq \|y_p - x_p\|^2$$

Puntos fijos de operadores no expansivos

Caracterización del minimizante de f mediante el prox_f

- Dado que los minimizadores de f son puntos fijos de prox_f , podemos minimizar f encontrando un punto fijo de su operador proximal.
Si prox_f fuera una contracción, es decir, Lipschitz continua con constante menor que 1, aplicando repetidamente prox_f se encontraría un punto fijo.
- A pesar que prox_f no necesita ser una contracción (a menos que f sea fuertemente convexa), de todas formas es firmemente no expansivo, lo cual es suficiente para la iteración de punto fijo,

$$\|\text{prox}_f(x) - \text{prox}_f(y)\|^2 \leq \langle (x - y), \text{prox}_f(x) - \text{prox}_f(y) \rangle,$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$.

- Los operadores firmemente no expansivos son un caso especial de los operadores no expansivos (es decir, operadores Lipschitz continuos con constante 1). Notemos que iteraciones de un operador no expansivo general no converge a un punto fijo, basta considerar operadores como $-I$. Sin embargo, si N es no expansivo, entonces el operador $T = (1 - \alpha)I + \alpha N$, $\alpha \in (0, 1)$, tiene los mismo puntos fijos que N e iteraciones de T deberán converger al punto fijo de T (y así de N), es decir, la sucesión

$$x^{k+1} := (1 - \alpha)x^k + \alpha N(x^k)$$

convergerá a un punto fijo de N . Operadores de la forma $(1 - \alpha)I + \alpha N$, donde N es no expansiva y $\alpha \in (0, 1)$, son llamados operadores α -promediados

● Operadores no expansivos y firmemente no expansivos

● Operadores co-coercivos

● Proyecciones sobre conjuntos convexos

● Puntos fijos de operadores no expansivos

5 ● Operadores no expansivos promedio

● Puntos fijos comunes

Definición: Sea D un subconjunto no vacío de \mathcal{H} , $T : D \rightarrow \mathcal{H}$ no expansivo, y sea $\alpha \in (0, 1)$. Entonces T es promediado con constante α , o α -promediado, si existe un operador no expansivo $R : D \rightarrow \mathcal{H}$ tal que $T = (1 - \alpha)Id + \alpha R$.

Observaciones: Sea D un subconjunto no vacío de \mathcal{H} y $T : D \rightarrow \mathcal{H}$,

- 1 Si T es promediado, entonces es no expansivo.
- 2 Si T es no expansivo, no es necesariamente promediado. Podemos considerar $T = -Id : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ cuando $\mathcal{H} \neq \{0\}$.
- 3 T es firmemente no expansivo si y solo si es $\frac{1}{2}$ -promediado.
- 4 Sea $\eta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Entonces se sigue del punto anterior, que T es β -cocoercivo ssi βT es $\frac{1}{2}$ -promediado.

Proposición: Sea D un subconjunto no vacío de \mathcal{H} , $T : D \rightarrow \mathcal{H}$ no expansivo, y sea $\alpha \in (0, 1)$. Entonces son equivalentes,

1 T es α -promediado.

2 $(1 - \frac{1}{\alpha})Id + \frac{1}{\alpha}T$ es no expansivo.

3 $\forall x \in D, \forall y \in D,$

$$\|Tx - Ty\|^2 \leq \|x - y\|^2 - \frac{1 - \alpha}{\alpha} \|(Id - T)x - (Id - T)y\|^2$$

4 $\forall x \in D, \forall y \in D,$

$$\|Tx - Ty\|^2 + (1 - 2\alpha)\|x - y\|^2 \leq 2(1 - \alpha)\langle x - y, Tx - Ty \rangle$$

Proposición: Sea D un subconjunto no vacío de \mathcal{H} , $\rho \in (0, 1)$ y sea $T : D \rightarrow \mathcal{H}$ una función ρ -Lipschitz continua y $\alpha = \frac{(\rho+1)}{2}$. Entonces T es α -promediado.

Demostración: El operador

$$\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)Id + \frac{1}{\alpha}T = \frac{\rho - 1}{\rho + 1}Id + \frac{2}{\rho + 1}T$$

es Lipschitz continua con constante $\frac{1-\rho}{1+\rho} + \frac{2\rho}{1+\rho} = 1$ De la proposición anterior, T es α -promediado.

● Operadores no expansivos y firmemente no expansivos

● Operadores co-coercivos

● Proyecciones sobre conjuntos convexos

● Puntos fijos de operadores no expansivos

● Operadores no expansivos promedio

● 6 Puntos fijos comunes

Estudiaremos a continuación una proposición que se refiere al conjunto de combinaciones convexas de punto fijo de operadores *cuasi-no expansivos* y una segunda proposición sobre composiciones de *operadores estrictamente cuasi-no expansivos*.

Proposición 1: Sea $D \subseteq \mathcal{H}$ no vacío, sea $(T_i)_{i \in I}$ una colección finita de operadores *cuasi-no expansivos* de D hacia \mathcal{H} tales que

$$\bigcap_{i \in I} \text{Fix}(T_i) \neq \emptyset,$$

y sea $(\omega_i)_{i \in I} \subseteq \mathbb{R}_{>0}$ tales que

$$\sum_{i \in I} \omega_i = 1.$$

Entonces

$$\text{Fix} \left(\sum_{i \in I} \omega_i T_i \right) = \bigcap_{i \in I} \text{Fix}(T_i).$$

Corolario 1: Sea $D \subseteq \mathcal{H}$ no vacío, sea $(T_i)_{i \in I}$ una colección finita de operadores *cuasi-no expansivos* de D hacia \mathcal{H} , y sea $(\omega_i)_{i \in I} \subseteq (0, 1]$ tales que

$$\sum_{i \in I} \omega_i = 1.$$

Sea

$$T = \sum_{i \in I} \omega_i T_i.$$

Entonces T es *firmente cuasi-no expansivo*.

Proposición 2: Sea $D \subseteq \mathcal{H}$ no vacío y sean T_1 y T_2 operadores *cuasi-no expansivos* de D hacia D . Suponiendo que T_1 o T_2 sea un operador *escritamente cuasi-no expansivo*, y que $\text{Fix}(T_1) \cap \text{Fix}(T_2) \neq \emptyset$. Entonces:

- 1 $\text{Fix}(T_1 T_2) = \text{Fix}(T_1) \cap \text{Fix}(T_2)$.
- 2 $T_1 T_2$ es un operador *cuasi-no expansivo*.
- 3 Suponiendo además que T_1 y T_2 son operadores *estrictamente cuasi-no expansivos*. Entonces $T_1 T_2$ es un operador *estrictamente cuasi-no expansivos*.

Corolario 2: Sea $D \subseteq \mathcal{H}$ no vacío, sea $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, y sea $I = \{1, \dots, m\}$, sea $(T_i)_{i \in I}$ una familia de operadores *estrictamente cuasi-no expansivos* de D hacia D tales que

$$\bigcap_{i \in I} \text{Fix}(T_i) \neq \emptyset,$$

y sea $T = T_1 \cdot T_m$. Entonces T es *estrictamente cuasi-no expansivo*.

Corolario 3: Sea $D \subseteq \mathcal{H}$, sea $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, sea $I = \{1, \dots, m\}$, sea $(T_i)_{i \in I}$ una familia de *operadores no expansivos promedio* de D hacia D tales que

$$\bigcap_{i \in I} \text{Fix}(T_i) \neq \emptyset,$$

y sea $T = T_1 \cdot T_m$. Entonces

$$\text{Fix}(T) = \bigcap_{i \in I} \text{Fix}(T_i).$$

😊 Ronda de preguntas 😊