Función Distancia Asociada a Conjuntos Prox-Regulares

Basado en:

Distance Function Associated to a Prox-Regular Set
by Florent Nacry and Lionel Thibault

Martes 28 de Diciembre, 2021

Presenta:	Manuel Torres V.
Profesores:	Emilio Vilches G. - Pedro Péres-Aros.
Fecha:	28 de Diciembre, 2021.
Curso:	Introducción al Cálculo Proximal en Espacios de Hilbert (MA6931).

fcfm
Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

El objetivo en esta charla es estudiar la *función distancia* asociada a *conjuntos prox-regulares*. Veremos que

1. El complemento de un conjunto *prox-regular* no es más que la unión de bolas cerradas con igual radio.
2. De esto se deduce que la *prox-regularidad* de un conjunto cerrado dado es equivalente a la propiedad de *semiconvexidad de su función de distancia*.

1. Denotaremos por $\mathcal{H}$ a un *espacio de Hilbert* real con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y norma asociada $\| \cdot \|$.
2. El *interior* de un conjunto lo denotamos por $\mathrm{int}_{\mathcal{H}}(A)$, la *adherencia* o *clausura* de un conjunto la denotaremos por $\mathrm{cl}_{\mathcal{H}}(A)$. Denotamos por $\mathrm{bdry}_{\mathcal{H}}(A)$ a la *frontera* de A.
3. La *bola unitaria* la denotaremos $\mathbb{B}$ cuando es abierta y $\mathbb{S}$ cuando es cerrada. Si la bola no es unitaria la denotaremos de la forma usual.
4. La *proyección métrica multievaluada* la denotaremos por $\mathrm{Proj}_S : \mathcal{H} \rightrightarrows \mathcal{H}$ asociada al conjunto S es definida por
$$\mathrm{Proj}_S(x) := \{y \in S : d_S(x) = \|x - y\|\}, \forall x \in \mathcal{H}.$$
5. La *función de distancia* con respecto al conjunto S es
$$d_S(x) := d(x, S) := \inf_{y \in S} \|x - y\|.$$
En caso que $|\mathrm{Proj}_S(x)| = 1$ denotaremos $\mathrm{proy}_S(x)$ o $P_S(x)$ a dicha proyección.

Recordemos nuestro objeto favorito:

Definición (Subgradiente Proximal): Un vector $\zeta \in \mathcal{H}$ es un *subgradiente proximal* de f en $\bar{x} \in U$ con $f(\bar{x})$ finito, si existen $\sigma \geq 0$ y $\eta > 0$ tales que

$$\langle \zeta, y - \bar{x} \rangle \leq f(y) - f(\bar{x}) + \sigma \|y - \bar{x}\|^2 \quad \forall y \in B(\bar{x}, \eta).$$

Proposición (Caracterización): $\zeta \in \mathcal{H}$ es un *subgradiente proximal* de f en $\bar{x}$ ssi

$$(\zeta, -1) \in N(\mathrm{epi} f, (\bar{x}, f(\bar{x}))),$$

donde $\mathcal{H} \times \mathbb{R}$ tiene la estructura natural del espacio producto.

Definición (Subdiferencial Proximal): El conjunto $\partial_P f(\bar{x})$ conformado por todos los *subgradientes proximales* lo conocemos como el *subdiferencial proximal* de f en $\bar{x}$.

Por simplicidad denotaremos por $\partial f(\bar{x})$ al subdiferencial proximal de f en $\bar{x}$.

La *función de distancia* con respecto al conjunto S es

$$d_S(x) := d(x,S) := \inf_{y\in S} \|x-y\|.$$

En caso que $|\mathrm{Proj}_S(x)| = 1$ denotaremos $\mathrm{proy}_S(x)$ o $P_S(x)$ a dicha proyección.

Proposición: El *subgradiente proximal* de la *función distancia* $d_S(\cdot)$ es tal que

$$\partial_P d_S(x) = N(S,x) \cap \mathbb{B} \quad \forall x \in S.$$

Más aún, si para cualquier $x \in \mathcal{H}$, $\partial_P d_S(x) \neq \emptyset$, resultará que $|\mathrm{Proj}_S(x)| = 1$ y cumple que

$$d_S(x)\partial d_S(x) = x - P_S(x).$$

Definición: Sea $S \subseteq \mathcal{H}$ y d_S la *función de distancia* asociada a S. Definimos:

$$\begin{aligned} \mathrm{Enl}_r(S) &:= \{d_S \leq r\} \\ D_r(S) &:= \{d_S = r\} \\ \mathrm{Exte}_r(S) &:= \{d_S \geq r\} \end{aligned}$$

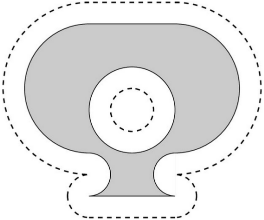


Figura 1: Nivel sobre un conjunto S

Definición (Función Semiconvexa): Sea $f : U \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función definida sobre un convexo no vacío (no necesariamente abierto) subconjunto de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Diremos que la función f es *σ-lineal semiconvexa* sobre U para algún $\sigma \geq 0$ si para todo $t \in (0, 1)$ y todo par $x, y \in U$ tenemos

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) + \frac{\sigma}{2} t(1-t)\|x - y\|^2.$$

Definición (Función Semicóncava): Si $-f$ es *σ-lineal semiconvexa* sobre U para $\sigma \geq 0$ diremos que f es *σ-lineal semicóncava* sobre U.

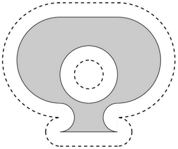
Teorema: Una función f es σ-*lineal semiconvexa* sobre U para $\sigma \geq 0$ ssi la función $f + \frac{\sigma}{2}\|\cdot\|^2$ es *convexa* sobre U.

Definición (Conjunto Prox-Regular): Sea $S \subseteq \mathcal{H}$ un cerrado no vacío y sea $r \in (0, +\infty]$. Diremos que S es *r-prox-regular* cuando, para todo $x \in S$, para todo $v \in N(S; x) \cap \mathbb{B}$ y para todo $t \in (0, r]$ se cumple

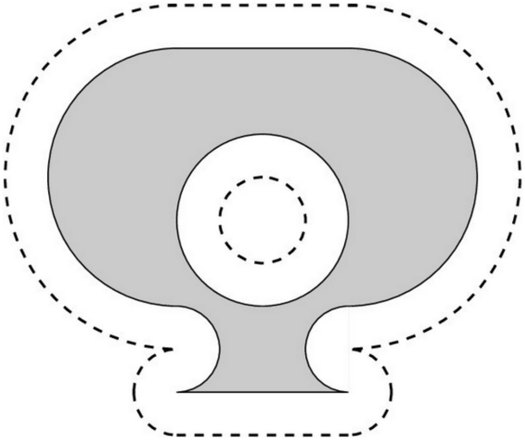
$$x \in \mathrm{Proj}_S(x + tv).$$

Definición (Ampliación y Tubo): Para cualquier real extendido $r > 0$, la *ampliación r-abierta* y el *tubo r-abierto* en torno a un conjunto $S \subseteq \mathcal{H}$ se definen como

$$\begin{aligned} U_r(S) &:= \{x \in \mathcal{H} : d_S(x) < r\} \\ \mathrm{Tube}_r(S) &:= U_r(S) \setminus S. \end{aligned}$$



Veamos caracterizaciones para determinar cuando un conjunto $S \subseteq \mathcal{H}$ es *r-prox-regular*.



Proposición (Caracterizaciones de Prox-Regularidad): Sea $S \subseteq \mathcal{H}$ un cerrado no vacío. Las siguientes afirmaciones equivalen.

1. El conjunto S es r-prox-regular.
2. Para todo $x_1, x_2 \in S$, para todo $\xi \in N(S; x_1) \cap \mathbb{B}$, se tiene
$$\langle \xi, x_2 - x_1 \rangle \leq \frac{1}{2r} \|x_1 - x_2\|^2. \tag{1}$$
3. La multifunción $\mathrm{Proj}_S(\cdot)$ es uno-evaluada sobre $U_r(S)$ y para todo $x, x' \in U_r(S)$, se tiene
$$\|P_S(x) - P_S(x')\| \leq \left(1 - \frac{d_S(x)}{2r} - \frac{d_S(x')}{2r}\right)^{-1} \|x - x'\|.$$
4. Para todo $s \in (0, r)$, para todo $x, x' \in U_s(S)$, se tiene
$$\left|P_S(x) - P_S(x')\right| \leq \frac{1}{1 - \frac{s}{r}} \|x - x'\|.$$

Proposición (Caracterizaciones de Prox-Regularidad): Sea $S \subseteq \mathcal{H}$ un cerrado no vacío. Las siguientes afirmaciones equivalen.

- El conjunto S es r-prox-regular.

5. Para todo $x \in \mathrm{Tube}_r(S)$ tal que $u := P_S(x)$ es bien definido, se tiene

$$(\forall u \in [0, r)),\ u = P_S\left(u + t\frac{x-u}{d_S(x)}\right).$$

6. La función d_S^2 es $C^{1,1}$ sobre $U_r(S)$ y su gradiente es dado por

$$\nabla d_S^2(x) = 2(x - P_S(x)), \quad \forall x \in U_r(S).$$

7. La función d_S es C^1 en $\mathrm{Tube}_r(S)$.
8. Para todo $x \in U_r(S)$, se tiene que $\partial d_S \neq \varnothing$.

Lema: Sea $S \subseteq \mathcal{H}$ un conjunto *r-prox-regular* para algún $r \in (0, +\infty]$. Las siguientes afirmaciones son verdaderas.

1. Para todo $x \in U_r(S)$ y $x' \in S$, se tiene

$$\left(1 - \frac{d_S(x)}{r}\right) \|P_S(x) - x'\|^2 \leq \|x - x'\|^2 - d_S^2(x),$$

   en particular

$$\sqrt{1 - \frac{d_S(x)}{r}}\|P_S(x) - x'\| \leq \|x - x'\|.$$

2. Para todo $x, x' \in U_r(S)$, se tiene

$$\left(1 - \frac{d_S(x)}{r}\right) \|P_S(x) - P_S(x')\| \leq \|x - P_S(x')\|.$$

3. Para todo $x, x' \in U_r(S)$, se tiene que para $p := P_S(x)$ y $p' := P_S(x')$

$$\left(1 - \frac{d_S(x)}{2r} - \frac{d_S(x')}{2r}\right) \|p - p'\|^2 \leq \frac{1}{2}\left(\|x - p'\|^2 - d_S^2(x) + \|x' - p\|^2 - d_S^2(x')\right).$$

Teorema: Sea $S \subseteq \mathcal{H}$ no vacío y $r \in (0, +\infty]$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

1. El conjunto S es r-prox-regular.
2. Para todo $x' \in U_r(S)$, todo $x \in U_r(S)$ con $P_S(x)$ bien definido y todo $\xi \in \partial d_S(x)$, se tiene
$$\langle \xi, x' - x \rangle \leq \frac{1}{2(r - d_S(x')} \left(\|x' - P_S(x)\|^2 - d_S^2(x') \right) + d_S(x') - d_S(x).$$
3. Para todo $x \in S$, para todo $x' \in U_r(S)$ y todo $\xi \in \partial d_S(x)$, es cierto que
$$\langle \xi, x' - x \rangle \leq \frac{1}{2(r - d_S(x'))} \left(\|x' - x\|^2 - d_S^2(x') \right) + d_S(x').$$
4. Para todo $x' \in S$, todo $x \in U_r(S)$ con $P_S(x)$ bien definido y todo $\xi \in \partial_S(x)$, es cierto que
$$\langle \xi, x' - x \rangle \leq \frac{1}{2r} \|x' - P_S(x)\|^2 - d_S(x).$$

Notemos que: Un conjunto $S \subseteq \mathcal{H}$ cerrado no vacío es *r-prox-regular* para algún real extendido $r > 0$ si su *función distancia* asociada d_S^2 es $\frac{2s}{r-s}$-*linealmente semiconvexa*, o bien, equivalentemente $d_S^2 + \frac{s}{r-s}\|\cdot\|^2$ es *convexa* sobre todo abierto $V \subseteq U_s(S)$ para todo $0 < s < r$.

Esto se puede ver a través del siguiente cálculo válido para cualquier $x, y \in U_s(S)$ con $\sigma := \frac{s}{r-s}$ y $g := d_S^2 + \sigma\|\cdot\|^2$

$$\begin{aligned} \langle \nabla g(x) - \nabla g(y), x-y \rangle &= 2(1+\sigma)\|x-y\|^2 - 2\langle P_S(x) - P_S(y), x-y \rangle \\ &\geq 2\left(1 + \sigma - \left(1 - \frac{s}{r}\right)^{-1}\right)\|x-y\|^2. \end{aligned}$$

Proposición: Sea $S \subseteq \mathcal{H}$ no vacío. Las siguientes afirmaciones son ciertas.

1. La raíz de la *función distancia* d_S^2 es 2-*lineal semicóncava* sobre $\mathcal{H}$.
2. Para todo subconjunto convexo no vacío $U \subseteq \mathcal{H}$ y para todo real $\delta > 0$ tal que $U \cap (S + \mathbb{B}(0,\delta)) = \varnothing$, d_S es δ^{-1}-*semicóncava* sobre U. Más aún, d_S solo es *localmente lineal semicóncava* sobre $\mathcal{H} \setminus S$.
3. Si S es la unión de una colección de bolas cerradas de radio común $r > 0$, entonces sobre cualquier convexo cerrado $U \subseteq \mathrm{cl}_{\mathcal{H}}(\mathcal{H} \setminus S)$, la *función distancia* es r^{-1}-*semicóncava*.

La raíz de la *función distancia* d_S^2 es 2-*lineal semicóncava* sobre $\mathcal{H}$.

Demostración:

1. Notemos que podemos escribir

$$d_S^2(x) = \operatorname*{ínf}_{y \in S} \left\{ \|x\|^2 - 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \right\} = \|x\|^2 + \operatorname*{ínf}_{y \in S} \left\{ -2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \right\}.$$

Sea $y \in S$, sea $\varphi_y : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ definida por

$$x \mapsto \varphi_y(x) = -2\langle x, y\rangle = \langle -2x + y, y\rangle + \|y\|^2$$

es cóncava.
Luego podemos ver que la función $d_S^2(\cdot) = \operatorname*{ínf}_{y \in S} \varphi_y(x) + \|\cdot\|^2$ es cóncava. Esto último equivale a que d_S^2 es 2-*lineal semicóncava* sobre $\mathcal{H}$.

Para todo subconjunto convexo no vacío $U \subseteq \mathcal{H}$ y para todo real $\delta > 0$ tal que $U \cap (S + \mathbb{B}(0,\delta)) = \varnothing$, d_S es δ^{-1}-*semicóncava* sobre U. Más aún, d_S solo es *localmente lineal semicóncava* sobre $\mathcal{H} \setminus S$.

Sketch of proof:

2 Sea $U \subseteq \mathcal{H}$ un convexo no vacío, sea $\delta > 0$ un real tal que

$$U \cap (S + B(0,\delta)) = \varnothing.$$

Luego tenemos que $d_S^2(U) \subseteq [\delta^2, +\infty)$. Luego como la función $f(\cdot) := \sqrt{(\cdot)}$ es creciente, cóncava y $\frac{1}{2\delta}$-Lipschitz sobre $[\delta, +\infty)$.
Finalmente, la composición $(f \circ d_S^2) = d_S$ es $\frac{1}{\delta}$-semicóncava.

Si S es la unión de una colección de bolas cerradas de radio común $r > 0$, entonces sobre cualquier convexo cerrado $U \subseteq \mathrm{cl}_{\mathcal{H}}(\mathcal{H} \setminus S)$, la *función distancia* es r^{-1}*-semicóncava*.

Sketch of proof:

3. Sea $U \subseteq \mathrm{cl}_{\mathcal{H}}(\mathcal{H} \setminus S)$ un convexo no vacío. Sea $(a_i)_{i\in I} \subseteq \mathcal{H}$ tales que

$$S = \bigcup_{i\in I} B(a_i, r).$$

Fijando $i \in I$. Notemos que $d^2_{B(a_i,r)}(x) \geq r^2$ para todo $x \in U$.
De (2) tenemos que la función $d_{\{a_i\}}(\cdot) = \|\cdot - a_i\|$ es r^{-1}-linealmente semicóncava sobre U. Por la igualdad $d_{B(a_i,r)} = \|\cdot - a_i\| - r$. De la igualdad

$$(\forall x \in U), \quad d_S(x) = \operatorname*{ínf}_{j\in I} d_{B(a_j,r)}(x)$$

vemos que $-d_S(\cdot)$ es el supremo puntual de una función r^{-1}-linealmente semiconvexa sobre U. Entonces, $d_S(\cdot)$ es r^{-1}-linealmente semicóncava sobre U. Concluyendo así lo deseado.

Teorema: Sea $S \subseteq \mathcal{H}$ un conjunto r-prox-regular con $r \in (0, +\infty)$. Entonces para cualquier $s \in (0, r)$, el conjunto $\mathcal{H} \setminus S$ es la unión de una familia de bolas cerradas de $\mathcal{H}$ de radio s.

Notar que para cualquier $s \in (0, r)$. Si $S = \mathcal{H}$, entonces $\mathcal{H} \setminus S = \varnothing$ y no hay nada que probar.

Demostración: Sea $y \in \mathcal{H} \setminus S$, estudiemos qué ocurre cuando $d_S(y)$ es mayor o menor que r.

- Sea $y \in \mathcal{H} \setminus S$. Si $d_S(y) \geq r$, entonces $B(y, r) \cap S = \varnothing$ y por lo tanto $B[y, s] \subseteq \mathcal{H} \subseteq S$ para $0 < s < r$.
- Suponiendo que $0 < d_S(y) < r$ y usando la *r-prox-regularidad* de S, luego $|\mathrm{Proj}_S(y)| = 1$, así decimos que $\mathrm{Proj}_S(y) = \{p\}$.
  Consideremos el vector director $v := \frac{y-p}{\|y-p\|}$, tenemos que
  $$p \in \mathrm{Proj}_S(p + rv),$$
  por eso $B(p + rv, r) \cap S = \varnothing$. Observe también que
  $$\|y - p - rv\| = \left\| \left(1 - \frac{r}{\|y-p\|}\right)(y-p) \right\| = |\|y-p\| - r| = r - d_S(y) > 0.$$
  Si $s \geq r - d_S(y)$, entonces $y \in B[p + rv, s]$ y $B[p + rv, s] \subseteq \mathcal{H} \setminus S$ ya que $B[p + rv, s] \subseteq B[p + rv, r]$.
  Entonces, asumiendo que $s < r - d_S(y)$, así que en particular $y \neq p + rv$.

Demostración (continuación): Sea

$$z = y - s\frac{y - p - rv}{\|y - p - rv\|}.$$

Nosotros tenemos $y \in B[z, s]$. Fijando cualquier $u \in B[z, s]$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\|u - p - rv\| &\leq \|u - z\| + \|z - p - rv\| \\
&= \|u - z\| + \left\|\left(1 - \frac{s}{\|y - p - rv\|}\right)(y - p - rv)\right\| \\
&= \|u - z\| + \big|\|y - p - rv\| - s\big| \\
&= \|u - z\| + |r - d_S(y) - s|,
\end{aligned}$$

que combinado con la desigualdad $s < r - d_S(y)$ sigue que

$$\|u - p - rv\| \leq \|u - z\| + r - d_S(y) - s \leq r - d_S(y).$$

Demostración (continuación x2): Por lo tanto, es cierta la inclusión

$$B[z,s] \subseteq B(p+rv,r).$$

Por lo tanto, $y \in B[z,s] \subseteq \mathcal{H} \setminus S$. Así

$$\mathcal{H} \setminus S = \bigcup_{y \in \mathcal{H} \setminus S} B_y[z,s].$$

Una consecuencia del teorema anterior:

Teorema: Sea $S \subseteq \mathcal{H}$ un cerrado no vacío y sea $r \in (0, +\infty]$. Las siguientes afirmaciones equivalen.

1. El conjunto S es r-prox-regular.
2. Para todo real $0 < s < r$, la función distancia d_S es $(r-s)^{-1}$-semiconvexa sobre cualquier conjunto convexo incluído en el abierto s-ampliado $U_s(S)$.
3. La función distancia d_S es localmente lineal semiconvexa sobre $U_r(S)$.

Referencias

- Balashov, M.V., Ivanov, G.E.: Properties of the metric projection on weakly vial-convex sets and parametrization of set-valued mappings with weakly convex images. Math. Notes 80, 461–467 (2006).
- Clarke, F.: Functional Analysis, Calculus of Variations and Optimal Control Graduate Texts in Mathematics, vol. 264. Springer, London (2013).
- Nacry, F., Thibault, L.: Distance Function Associated to a Prox-regular sets. (2021).
- Nacry, F., Thibault, L.: Regularization of sweeping process: old and new. Pure and Applied Functional Analysis, 59-117 (2019).
- Colombo, G., Thibault, L.: Prox-regular sets and Applications, Handbook of Nonconvex Analysis and Applications, pp. 99–182. Int. Press, Somerville (2010)
- Vial, J.-P.: Strong and weak convexity of sets and functions. Math. Oper. Res. 8, 231–259 (1983).

☺ Muchas gracias por su atención ☺