# MA6912 Seminario Avanzado de Matemáticas II
# Elementos de la Topología algebráica
# **Grupos de Homología: Homología Simplicial y sus Consecuencias**

Manuel Torres Valdebenito

**Departamento de Ingeniería Matemática - Universidad de Chile**

2 de Octubre de 2020

# Contenido

1. Grupos abelianos finitamente generados
   - Suma directa interna
   - Grupos abelianos libres y subgrupo de torsión
   - Teorema fundamental de grupos abelianos finitamente generados

2. Grupos de homología
   - Orden de un símplice
   - Operador borde

# Bibliografía


1. Macho, M. *'De la homología a la cohomología: Teoremas de dualidad (primera parte)'*.
2. Munkes, J.R. *'Elements of Algebraic Topology'*. CRC Press. (Principal).

# Motivación

Uno de los principales objetivos de la *topología* es la clasificación de los espacios y para esto es necesario determinar cuando dos espacios son o no *homeomorfos*. No siempre es un trabajo sencillo, pues en ocasiones los invariantes topológicos clásicos como la conexidad, la compacidad o la metrizabilidad no son una herramienta útil.

**PAUSE**En este contexto nace la importancia de la topología algebráica, pues esta genera nuevos instrumentos que nos permiten convertir un problema de topología en un problema de álgebra. Específicamente, uno de esos instrumentos es la *homología simplicial*, que busca hacer distinción entre espacios topológicos determinando el número de agujeros que estos contienen.

**PAUSE**Veremos una introducción a la homología simplicial.

# Grupos abelianos finitamente generados

## Definición (Suma directa interna de grupos)

Supongamos que $G$ es un *grupo abeliano* y que $\{G_i\}_{i\in I}$ es una colección de subgrupos de $G$, indexada de forma biyectiva para algún conjunto $I$, supongamos que cada $g \in G$ puede ser escrito de manera única como una suma finita $g = \sum g_i$, donde $g_i \in G$ para todo $i \in I$.**PAUSE**Entonces $G$ es la suma directa interna de $G$ de los grupos $\{G_i\}_{i\in I}$ y lo denotamos como

$$G = \bigoplus_{i\in I} G_i$$

**PAUSE**

## Definición (Suma de grupos)

Si cada $g \in G$ puede ser escrito como una suma finita $g = \sum_i g_i$, pero no necesariamente única, decimos simplemente que $G$ es la suma de los grupos $\{G_i\}_{i\in I}$ y lo denotamos simplemente como $G = \sum_i G_i$.**PAUSE**Decimos que los grupos $\{G_i\}_{i\in I}$ generan a $G$.[a]

[a] Esto es análogo a álgebra lineal, la suma directa correspondería a una especie de base (en el sentido óptimo) mientras que la suma corresponde a un generador.

## Definición (Sumando directo de un grupo)

Si $G_1$ es un subgrupo de $G$, decimos que $G_1$ es un sumando directo de $G$ si existe un subgrupo $G_2$ de $G$, tal que $G = G_1 \oplus G_2$.**PAUSE**En este caso si $H_i$ es un subgrupo de $G_i$, con $i = 1, 2$, entonces la suma $H_1 \oplus H_2$ es directa y adicionalmente **PAUSE**

$$\frac{G}{H_1 \oplus H_2} \cong \frac{G_1}{H_1} \oplus \frac{G_2}{H_2}$$

**PAUSE**

## Definición

Si $f : G \to H$ es un *homomorfismo*, el *kernel* de $f$ es e lsubgrupo $f^{-1}(0)$ de $G$, la imagen de $f$ es el subgrupo $f(G)$ de $H$ y el *cokernel* de $f$ es el grupo cociente $H/f(G)$. Denotamos estos subgrupos por $\ker(g)$, $\mathrm{im}(f)$ y $\mathrm{cok}(f)$ respectivamente.

## Definición (Grupo abeliano libre)

Sea $B$ un conjuunto de un grupo abeliano aditivo $G$. Entonces $G$ es *abeliano libre* con base $\mathbb{B}$ si el subgrupo cíclico $\langle b \rangle$ es infinito para cada $b \in \mathbb{B}$ y $G = \sum_{b \in \mathbb{B}} \langle b \rangle$, esto entendido como suma directa.

**PAUSE**

## Observación

Un grupo abeliano libre es una suma directa de grupos isomorfos a $\mathbb{Z}$ y además cada elemento $g \in G$ puede ser escrito de manera única como una suma finita

$$g = \sum_{m_b \in \mathbb{Z}} m_b b$$

**PAUSE**

## Ejemplo

Si $G$ es un grupo libre de rango 3, simplemente escribimos

$$G \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

# Algunos teoremas

## Teorema (1)

Sea $G$ un grupo abeliano libre con base $\mathcal{B}$.

1. Si $G'$ es un grupo abeliano y $\phi : \mathcal{B} \to G'$ es una función, entonces existe un único homomorfismo $\overline{\phi} : G \to G'$ con $\overline{\phi}(b) = \phi(b)$ para todo $b \in \mathcal{B}$. Usualmente $\overline{\phi}$ se llama la *extensión por linealidad de* $\phi$.
2. Cada grupo abeliano $G'$ es isomorfo a un grupo cociente de la forma $G/R$.

**PAUSE**

## Teorema (2)

Dado un conjunto $T$ existe un grupo abeliano libre $G$ que tiene a $T$ como base.

**PAUSE**

## Teorema (3)

Si $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ son dos bases para el grupo abeliano libre $G$, entonces tienen el mismo cardinal.

## Definición (Orden finito y grupo de torsión)

Sea $G$ un grupo abeliano y $g \in G$. Decimos que $g$ tiene orden finito cuando $0 = ng$ para algún $n \in \mathbb{Z}$ (donde 0 es el elemento neutro de $G$ y $ng = g + \cdots + g$ $n$ veces).**PAUSE**El conjunto de todos los elementos de orden finito en $G$ es un subgrupo $T$ de $G$ y es llamado el *subgrupo de torsión*. Si $T = \{e\}$, el grupo trivial, decimos que $G$ es libre de torsión.

**PAUSE**

## Definición (Rango de un grupo)

Sea $G$ un grupo abeliano libre con base $\mathbb{B}$. Definimos el rango de $G$ como el cardinal de $\mathbb{B}$ y lo denotamos por $\text{rank}(G)$.

## Definición

Un grupo abeliano $G$ tiene rango $r$ si existe un subgrupo abeliano libre $G'$ de $G$ tal que:

1. $\text{rank}(G') = r$.
2. $G/G'$ es un grupo de torsión.

**PAUSE**

1. Si $G$ es un grupo abeliano libre con base $g_a$, entonces $G$ es la suma directa de los subgrupos $\{G_a\}$, donde $G_a$ es el grupo cíclico infinito generado por $g_a$, para cada $a$.**PAUSE**
2. Recíprocamente si $G$ es la suma directa de grupos cíclicos infinitos, entonces $G$ es un grupo abeliano libre.

Vamos a enunciar dos teoremas que son importantes para continuar estudiando, el primero se ocupa de los grupos libres y el segundo, un corolario de este que es acerca de los grupos finitamente generados

### Teorema

Sea $G$ un grupo abeliano libre. Si $\mathcal{R}$ es un subgrupo de $G$, entonces $\mathcal{R}$ también es un grupo abeliano libre. Si $G$ tiene rango $n$, entonces $\mathcal{R}$ tiene rango $r \leq n$, adicionalmente hay una base $e_1, \ldots, e_n$ y enteros $t_1, \ldots, t_k$, con $t_i > 1$ tales que

1. $t_1 e_1, \ldots, t_k e_k, e_{k+1}, \ldots, e_r$ es una base para $\mathcal{R}$.
2. $t_1 | t_2 | \ldots | t_k$ esto es $t_i$ divide a $t_{i+1}$ para $1 \leq i \leq k-1$.

Los enteros $t_, \ldots, t_k$ están determinados de manera única por $G$ y $\mathcal{R}$, sin embargo la base $e_1, \ldots, e_n$ no lo está.

## Teorema (Fundamental grupos abelianos finitamente generados)

Sea $G$ un grupo abeliano finitamente generado, sea $T$ su subgrupo de torsión.

1. Existe un subgrupo abeliano libre $H$ de $G$, que tiene rango finito $\beta$, tal que $G = H \oplus T$.
2. Existen grupos cíclicos finitos $T_1, \cdots, T_k$, donde $T_i$ tiene orden $t_i > 1$, tal que $t_1 | t_| \ldots | t_k$ y
$$T = T_1 \oplus \cdots \oplus T_k$$
3. Los números $\beta$ y $t_1, \ldots, t_k$ están determinado de manera única por $G$.

**PAUSE**El número $\beta$ es llamado el *número de betti* de $G$; los números $t_1, \ldots, t_k$ son llamados coeficientes de torsión de $G$. Notemos que $\beta$ es el rango del grupo abeliano libre $G/T$.

## Demostración.

Munkres,p.25. ■

.

# Grupos de homología

# ¿Qué haremos?

En este capitulo vamos a llevar los conceptos topológicos de símplice y complejo simplicial a un contexto algebraico.**PAUSE**Para esto necesitamos orientar los n-símplices y lo más importante vamos a definir el operador borde.

## Definición (Orden de un símplice)

Sea $S$ un símplice generado por $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$, definimos un *orden* para el conjunto $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ como una permutación de este.**PAUSE**Además decimos que dos órdenes son equivalentes si estos difieren de una permutación par y con esto generamos las clases de equivalencia de órdenes para el conjunto de vértices.

**PAUSE**

1. Si $\dim(S) > 0$, los ordenamientos se dividen en dos clases de equivalencia y cada una de ellas se llamará una orientación de $S$ y si dos órdenes pertenecen a clases de equivalencia distintas simplemente se dirá que estos son opuestos.**PAUSE**Si $S$ es un 0-símplice entonces solo hay una clase de equivalencia de sus órdenes y una única orientación para $S$. Un símplice orientado es un símplice $S$ junto con una de sus orientaciones.
   **PAUSE**
2. Si $S$ es generado por los vértices $a_0, a_1, \ldots, a_n$, usamos el símbolo $[a_0, a_1, \ldots, a_n]$ para denotar al símplice $S$ junto con la clase de equivalencia a la que pertenece el orden particular $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$, lo que resulta ser un *símplice orientado*.

1. Dado que $(a_0, \ldots, a_j, a_{j+1}, \ldots, a_n)$ y $(a_0, \ldots, a_{j+1}, a_j, \ldots, a_n)$ son representantes de distintas clases de equivalencia, es decir, son opuesto, diremos que

$$-[a_0, \ldots, a_j, a_{j+1}, \ldots, a_n] = [a_0, \ldots, a_{j+1}, a_j, \ldots, a_n]$$

**PAUSE**

2. Cuando no es especifica el conjunto de vértices que genera a $S$, se puede denotar a $S$ junto a una clase de equivalencia por $[S]$ y su opuesto $[-S]$, donde $[S]$ y $[-S]$ resultan ser los dos símplices orientados que genera $S$. **PAUSE**

3. Decir que $[S]$ y $[-S]$ son generados por orientaciones ouestas será equivalente a

$$[-S] = -[S]$$

# Ejemplo 1

## Ejemplo

Consideremos el 1-símplice, generado por los vértices $a_0, a_1$, entonces los únicos posibles órdenes de los vértices son $(a_0, a_1)$ y $(a_1, a_0)$.**PAUSE**Además estos no difieren en una permutación par entonces son opuestos. Con lo que obtenemos los dos 1-símplices orientados:

$$[a_0, a_1]; [a_1, a_0]$$

**PAUSE**

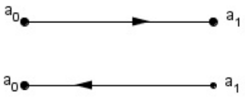


Figura 1: 1-símplices orientados.

## Ejemplo

Consideremos el 2-símplice, generado por los vértices $a_0, a_1, a_2$,**PAUSE**entonces obtenemos los posibles órdenes de vértices:**PAUSE**

$$(a_0, a_1, a_2); (a_0, a_2, a_1); (a_1, a_0, a_2); (a_1, a_2, a_0); (a_2, a_1, a_0); (a_2, a_0, a_1)$$

**PAUSE**De estos órdenes podemos obtener las dos clases de equivalencia si tomamos como representantes por ejemplo a $(a_0, a_1, a_2)$ y $(a_0, a_2, a_1)$. **PAUSE**De ahí obtenemos los 2-símplices orientados:

$$[a_0, a_1, a_2]; [a_0, a_2, a_1]$$

**PAUSE**

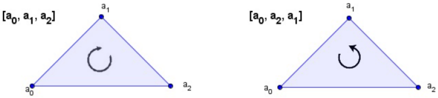


Figura 2: 1-símplices orientados.

## Definición (p-cadena)

Sea $K$ un complejo simplicial, denotemos por $K_p$ al conjunto de los p-símplices de $K$ orientados. Decimos que $c$ *es una p-cadena* sobre $K$ si $c$ es una función de $K_p$ a $\mathbb{Z}$ que satisface: **PAUSE**

1. $c([S]) = -c([-S])$ donde $[S], [-S] \in K_p$.
2. $c([S]) = 0$ salvo en un número finito de p-símplices orientados $[S]$.

## Definición (p-cadena elemental)

Sea $[S] \in K_p$ definimos la *p-cadena elemental de* $[S]$ y la denotamos por $[S]_c$ como la función que satisface: **PAUSE**

1. $[S]_c([S]) = 1$.
2. $[S]_c([-S]) = -1$.
3. $[S]_c([\phi]) = 0$ para todo p-símplice orientado $[\phi]$ tal que $[\phi] \neq [S], [-S]$.

**PAUSE**Como ya sabemos que para un símplice $S$ se satisface $-[S] = [-S]$, y teniendo además que $[S]_c([-S]) = -[S]_c([S])$ entonces también se tendrá que

$$[-S]_c([S]) = -[-S]_c([-S]) \tag{1}$$

**PAUSE**con lo que se tiene que

$$[-S]_c = -[S]_c$$

## Definición (Grupo de p-cadenas)

Se define $C_p(K)$ como el *grupo de las p-cadenas* en $K$ con la suma usual de funciones.

**PAUSE**

## Lema

$C_p(K)$ es un grupo abeliano libre.

**PAUSE**

## Demostración.

Sea $c \in C_p(K)$, $[S_i] \in K_p$ y $[S_i]_c$ su correspondiente p-cadena elemental y además supongamos que $c([S_i]) = n_i$.**PAUSE**Entonces

$$c = \sum n_i [S_i]_c$$

**PAUSE**donde

$$n_i[S_i]_c = \underbrace{[S_i]_c + \cdots + [S_i]_c}_{n_i \text{ veces}}$$

**PAUSE**Al ser $c$ una función, garantizamos la unicidad de los $n_i$ para cada $[S_i]$**PAUSE**y también garantizamos que es un grupo abeliano por las propiedades de la suma usual de funciones. ■

## Corolario

Cualquier función $f : K_p \to G$, donde $G$ es un grupo abeliano, se extiende de manera única a un homomorfismo $\overline{f} : C_p(K) \to G$, dado que $f(-[S]) = -f([S])$ para todo $[S] \in K_p$. **PAUSE**

$$\begin{aligned} f :& K_p \to G \\ & [S_i] \mapsto f([S_i]) \end{aligned}$$

**PAUSE**

$$\begin{aligned} \overline{f} : C_p(K) \to G \\ c = \sum n_i[S_i]_c \mapsto \overline{f}(c) = \sum n_i f([S_i]) \end{aligned}$$

Definiremos una función $\partial'_p : K_p \to C_{p-1}(K)$ y haciendo uso del corolario anterior vamos a hacer la extensión de un homomorfismo $\overline{\partial'_p} : C_p(K) \to C_{p-1}(K)$. **PAUSE**

## Definición (Operador borde)

Sea $[S] = [a_0, a_1, \ldots, a_p] \in K_p$, con $p > 0$.**PAUSE**Definimos el operador $\delta'_p$ como:

$$\begin{array}{cccc} \partial'_p : & K_p & \to & C_{p-1} \\ & [S] = [a_0, a_1, \ldots, a_p] & \mapsto & \partial'([S]) = \sum_{i=0}^{p}(-1)^i[a_0, \ldots, \hat{a}_i, \ldots, a_p]_c \end{array}$$

**PAUSE**donde el símbolo $\hat{a}_i$ significa que el vértice $a_i$ es eliminado. Para $p = 0$ tenemos que $\partial'_p$ es el isomorfismo trivial.

**PAUSE**Luego hay que verificar que:[1]

1. $\partial'_p$ es una función bien definida.
2. $\partial'_p([-S])) - \partial'_p([S])$.

[1] Página 28, Munkres.

Para probar que $\partial'_p([-S]) = -\partial'_p(|S|)$ digamos primero que

$$[S] = \left[a_0, \ldots, a_j, a_{j+1}, \ldots, a_p\right]$$

y que

$$[-S] = \left[a_0, \ldots, a_{j+1}, a_j \ldots, a_p\right]$$

es decir tomamos como representantes de las clases de equivalencia a dos órdenes de los vértices que difieren de una permutación impar con lo que resultan ser opuestos. **PAUSE** Luego calculando de forma extendida:

$$\partial'_p\left(\left[a_0, \ldots, a_j, a_{j+1}, \ldots, a_p\right]\right)$$
$$\partial'_p\left(\left[a_0, \ldots, a_{j+1}, a_j, \ldots, a_p\right]\right)$$

**PAUSE**(por ejemplo extendiendo la primera igualdad....)

$$\begin{aligned}\partial'_p\left(\left[a_0, \ldots, a_j, a_{j+1}, \ldots, a_p\right]\right) &= \sum_{i=0}^{p}(-1)^i\left[a_0, \ldots, \hat{a}_i, \ldots, a_p\right]_c \\ &= (-1)^0\left[a_1, \ldots, a_j, a_{j+1}, \ldots, a_p\right]_c \\ &+ \ldots + (-1)^j\left[a_0, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, \ldots, a_p\right]_c \\ &+ (-1)^{j+1}\left[a_0, \ldots, a_j, a_{j+2}, \ldots, a_p\right]_c \\ &+ \ldots + (-1)^p\left[a_0, \ldots, a_j, a_{j+1}, \ldots, a_{p-1}\right]_c\end{aligned}$$

Comparando ambos resultados (luego de bastante desarrollo), es posible notar que difieren en un signo menos, con lo que se concluye.

## Ejemplo (2-símplice)

Para el 2-símplice orientado $[a_0, a_1, a_2]$ obtenemos:

$$\partial_2'([a_0, a_1, a_2]) = [a_1, a_2]_c - [a_0, a_2]_c + [a_0, a_1]_c$$

**PAUSE**Además podemos aplicar el operador a $[a_0, a_2, a_1]$ que también es un 2-símplice orientado pero con un orden opuesto y nos queda:**PAUSE**

$$\partial_2'([a_0, a_2, a_1]) = [a_2, a_1]_c - [a_0, a_1]_c + [a_0, a_1]_c$$

**PAUSE** $$= -[a_1, a_2]_c - [a_0, a_1]_c + [a_0, a_2]_c$$

**PAUSE**Se puede evidenciar que $\partial_2'([a_0, a_1, a_2]) = -\partial_2'([a_0, a_2, a_1])$.

# Ejemplo 2

## Ejemplo (2-cadena)

Consideremos la 2-cadena:

$$c = -[a_0, a_1, , a_2]_c + 2[a_2, a_3, a_4]_c + 4[a_4, a_5, a_6]_c$$

**PAUSE**Entonces:

$$\begin{aligned} \partial_2(c) &= -[a_1, a_2]_c + [a_0, a_2]_c - [a_0, a_1]_c \\ &+ 2[a_3, a_4]_c - 2[a_2, a_4]_c + 2[a_2, a_3]_c \\ &+ 4[a_5, a_6]_c - 4[a_4, a_6]_c + 4[a_4, a_5]_c \end{aligned}$$

Como $\partial_2(c) \in C_1(K)$ podemos aplicar a este el operador $\partial_1$**PAUSE**y nos queda:

$$(\partial_1 \circ \partial_2)(c) = 0$$

# Frame Title

**Lema**

Sea $c \in C_p(K)$, entonces $\partial_{p-1}(\partial_p(c)) = 0$.

**Demostración.**

Página 30, Munkres. (Transcripción pendiente) ∎

# Siguientes temas:

1. Grupo de homología de un complejo simplicial.
2. Grupo de homología de superficies compactas.

FIN

**PAUSE**

*Cualquier comentario o sugerencia es bienvenido!*