Funciones Especiales e Integrales Elípticas

Función Gamma, Función Zeta y una aproximación de π

5 de Julio de 2021

Integrantes:	Alexis Toledo.
	Felipe Espinosa.
	Ignacio Romero.
	Manuel Torres.
Profesora:	Hanne Van Den Bosh.
Auxiliar:	Nicolás Cornejo.

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

La teoría de la *función gamma* se desarrolló en relación con el problema de generalizar la función factorial de los números naturales, es decir, el problema de encontrar una expresión tal que tenga el valor $n!$ para enteros positivos n y que puede extenderse a números reales arbitrarios al mismo tiempo. Al buscar tal expresión, nos encontramos con la siguiente integral impropia (que supondremos conocida):

$$\int_0^\infty e^{-t} t^n dt = n!$$

cuando t es positivo, cada término de la serie para e^t es positivo y la desigualdad $e^t > \frac{t^n}{n!}$ es cierta para cualquier $n \in \mathbb{Z}$, esto sugiere reemplazar el entero n en el lado izquierdo por un número real arbitrario para así definir $x!$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$ gracias a esta integral, pero en lugar de hacer precisamente eso, seguiremos la costumbre de introducir una función que tenga el valor a $(n-1)!$ para enteros positivos n, denotada por:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \tag{1}$$

Note que esta integral está bien definida para $x > 0$.

Teorema: La función gamma definida en 1 se puede extender de forma analítica a una función en el semiplano $\mathrm{Re}(s) > 0$ para $s \in \mathbb{C}$, y sigue siendo dada por la fórmula integral de 1, esto es

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} dt$$

Lema: Los productos canónicos satisfacen

$$(P) = \begin{cases} |E_k(z)| \geq e^{-c|z|^{k+1}} & \text{si } |z| \leq \frac{1}{2} \\ |E_k(z)| \geq |1-z| e^{-c'|z|^k} & \text{si } |z| \geq \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{2}$$

Lema: Existe una secuencia de radios $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $r_n \to \infty$, tal que

$$\left| \prod_{n=1}^{\infty} E_k\left(\frac{z}{a_n}\right) \right| \geq e^{-c|z|^s} \quad \text{para } |z| = r_n \tag{3}$$

Demostración: Basta probar que para cada fibra

$$S_{\delta,M} = \{\delta < \mathrm{s} < M\}$$

se tiene una función holomorfa, donde $0 < \delta < M < \infty$. Si denotamos por σ a la parte real de s, entonces

$$|e^{-t}t^{s-1}| = e^{-t}t^{\sigma-1},$$

luego la integral

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t}t^{s-1}dt$$

queda definida por el limite

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^{\frac{1}{\varepsilon}} e^{-t}t^{s-1}dt$$

que converge para cada $s \in S_{\delta,M}$. Para $\varepsilon > 0$, sea

$$F_\varepsilon(s) = \int_\varepsilon^{\frac{1}{\varepsilon}} e^{-t}t^{s-1}dt$$

y por el corolario 3, la función F_ε es holomorfa en la fibra $S_{\delta,M}$. Por el lema 2 basta con probar que F_ε converge uniformemente a Γ en la fibra $S_{\delta,M}$.

Demostración (continuación): Para $\varepsilon > 0$, sea

$$F_\varepsilon(s) = \int_\varepsilon^{\frac{1}{\varepsilon}} e^{-t} t^{s-1} dt$$

y por el corolario 3, la función F_ε es holomorfa en la fibra $S_{\delta,M}$. Por el lema 2 basta con probar que F_ε converge uniformemente a Γ en la fibra $S_{\delta,M}$.
Para ver esto, primero notemos que:

$$|\Gamma(s) - F_\varepsilon(s)| \leq \int_0^\varepsilon e^{-t} t^{\sigma-1} dt + \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^\infty e^{-t} t^{\sigma-1} dt$$

La primera integral converge uniformemente a 0, ya que tiende a 0 ya que puede ser fácilmente estimado por $\varepsilon^\delta/\delta$ siempre que $0 < \varepsilon < 1$. La segunda integral converge uniformemente a 0 también, ya que

$$\left| \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^\infty e^{-t} t^{\sigma-1} dt \right| \leq \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^\infty e^{-t} t^{M-1} dt \leq C \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^\infty e^{-\frac{t}{2}} dt \to 0$$

concluyendo con la demostración.

Definición de Γ en el semiplano $\mathrm{Re}(s) > 0$

Teorema de la noción de factorial y demostración

Teorema: Si $\mathrm{Re}(s) > 0$, entonces

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$$

y además

$$\Gamma(n+1) = n!\ , \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Demostración: Sea $\mathrm{Re}(s) > 0$, integrando por partes la integral finita

$$\int_{\varepsilon}^{1/\varepsilon} t^s e^{-t} dt = \Big[-t^s e^{-t} \Big]_{\varepsilon}^{1/\varepsilon} + s \int_{\varepsilon}^{1/\varepsilon} t^{s-1} e^{-t} dt$$

notemos que si ε tiende a 0 en ambos lados de la ecuación aparece la función Γ y que $t^s e^{-t} \to 0$ para t tendiendo a 0 o ∞, luego

$$\int_0^{\infty} t^s e^{-t} dt = s \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-t} dt$$

además,

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1$$

entonces, para un k natural se tiene $\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k)} = k$.

Teorema: Si $\mathrm{Re}(s) > 0$, entonces

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$$

y además

$$\Gamma(n+1) = n!\ , \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Demostración (continuación):

$$\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k)} = k$$

Aplicando el producto desde sobre $k \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{n} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k)} &= \prod_{k=1}^{n} k \\ \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(1)} &= n! \\ \Gamma(n+1) &= n! \end{aligned}$$

donde n es un natural arbitrario.

Teorema: La función $\Gamma(s)$ inicialmente definida por $\mathrm{Re}(s) > 0$ tiene una continuación analítica a una función meromorfa en $\mathbb{C}$ cuyas únicas singularidades son polos simples en los enteros no positivos $s \in \{0, -1, -2, \dots\}$. El residuo de Γ sobre estos polos es dado por

$$\mathrm{Res}(\Gamma, -n) = \frac{(-1)^n}{n!}$$

Demostración: Extendiendo Γ al semiplano $\mathrm{Re}(s) > -m$ donde $m \geq 1$ es un entero. Para $\mathrm{Re}(s) > -1$, se define

$$F_1(s) = \frac{\Gamma(s+1)}{s}$$

Dado a que $\Gamma(s+1)$ es holomorfa en $\mathrm{Re}(s) > -1$, $F_1(s)$ es meromorfa en el semiplano siendo la una única singularidad posible un polo simple en $s = 0$. El hecho de que $\Gamma(1) = 1$ muestra que F_1 sí tiene un polo simple en $s = 0$ con residuo 1. De hecho, si $\mathrm{Re}(s) > 0$,

$$F_1(s) = \frac{\Gamma(s+1)}{s} = \Gamma(s)$$

por el lema anterior.

Demostración (continuación): Entonces, F_1 extiende Γ a una función meromorfa en el semiplano $\mathrm{Re}(s) > -1$. Ahora, continuando de la misma manera se define F_m para $\mathrm{Re}(s) > -m$, donde m es un entero mayor a uno, tal que

$$F_m(s) = \frac{\Gamma(s+m)}{(s+m-1)(s+m-2)\cdots s} = \Gamma(s+m)\prod_{k=0}^{m-1}\frac{1}{s+k}$$

La función F_m es meromorfa en $\mathrm{Re}(s) > -m$ y tiene polos simples en $s = 0, -1, -2, \dots, -(m-1)$ con residuos

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}(F_m(s), -n) &= \lim_{s\to -n}(s+n)\Gamma(s+m)\prod_{k=0}^{m-1}\frac{1}{s+k} \\
&= \lim_{s\to -n}\Gamma(s+m)\prod_{\substack{k=0\\k\neq n}}^{m-1}\frac{1}{s+k} \\
&= \Gamma(m-n)\prod_{\substack{k=0\\k\neq n}}^{m-1}\frac{1}{k-n}
\end{aligned}$$

Demostración (continuación):

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(F_m(s), -n) &= \Gamma(m-n)\prod_{\substack{k=0\\k\neq n}}^{m-1}\frac{1}{k-n}\\
&= (m-n-1)!\prod_{k=n+1}^{m-1}\frac{1}{k-n}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k-n}\\
&= \prod_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k-n}\\
&= \frac{(-1)^n}{n!}
\end{aligned}$$

donde n es un natural menor que m. Las aplicaciones sucesivas del lema muestra que $F_m(s) = \Gamma(s)$ para $\operatorname{Re}(s) > 0$, por unicidad, también implica que $F_m = F_k$ para $1 \leq k \leq m$ en el dominio de F_k. Por lo tanto, Γ tiene una continuación analítica a una función meromorfa en $\mathbb{C}$ con polos simples en los enteros no positivos.

Propiedades

Teorema:

1. Para todo $s \in \mathbb{C}$,
$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}$$
2. Para $0 < a < 1$,
$$\int_0^\infty \frac{v^{a-1}}{1+v} dv = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}$$

La función zeta es inicialmente definida para $x \in \mathbb{R}$ tal que $x > 1$ dada por la siguiente serie convergente:

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \tag{4}$$

Como en el caso de la función Γ estudiada antes, la función ζ se puede continuar de forma analítica hacia el plano complejo.

Definición de ζ en el semiplano $\mathrm{Re}(s) > 0$

En paralelo a la función gamma, primero proporcionamos una extensión simple de la función ζ definida en 4 a un semiplano en $\mathbb{C}$.

Teorema: La serie

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

es convergente para $\mathrm{Re}(s) > 1$, y la función ζ es holomorfa en este semi-plano.

Demostración: Si se define $s = \sigma + it$ donde $\sigma, t \in \mathbb{R}$, entonces se tiene que:

$$\left| \frac{1}{n^s} \right| = |n^{-s}| = |e^{-s \log(n)}| = e^{-\sigma \log(n)} = n^{-\sigma}$$

Como consecuencia de esto, con un delta tal que $\sigma > 1 + \delta > 1$, la serie que define a ζ está uniformemente acotada por la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^1 + \delta}$, la cual converge. Por lo tanto, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ converge uniformemente en cada semiplano $\mathrm{Re}(s) > 1+\delta > 1$. Debido a esto la serie efectivamente define una función holomorfa en $\mathrm{Re}(s) > 1$.

En contraste a lo mostrado con la función Γ, la continuación analítica de la función ζ a una función meromorfa en $\mathbb{C}$ es levemente más sutil. Para lograr este objetivo, se debe relacionar ζ con Γ y además con otra función importante que definiremos a continuación.

Definición: Para un $t \in \mathbb{R}$ tal que $t > 0$, se define la función theta como:

$$\theta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 t}$$

Importante: Esta función cumple la siguiente ecuación funcional, dada por una aplicación de la formula de suma de Poisson:

$$\theta(t) = t^{-1/2}\theta(1/t)$$

Y además se tiene que su crecimiento y decrecimiento son, respectivamente:

$$\theta(t) \leq Ct^{-1/2} \text{ cuando } t \to 0$$

y

$$|\theta(t) - 1| \leq Ce^{-\pi t} \text{ Para algún } C > 0 \text{ y para todo } t \geq 1$$

Donde la primera inecuación se obtiene de la ecuación funcional de θ, mientras que la segunda se obtiene del hecho que:

$$\sum_{n \geq 1} e^{-\pi n^2 t} \leq \sum_{n \geq 1} e^{-\pi n t} \leq Ce^{-\pi t}$$

Que se cumple, para $t \geq 1$, lo cual no presenta complicaciones pues queremos que $t \to \infty$. Con esto, es posible ahora porbar la siguiente relación importante entre ζ, Γ y θ.

Teorema: Si $\mathrm{Re}(s) > 1$, entonces

$$\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) = \frac{1}{2}\int_0^\infty u^{(s/2)-1}(\theta(u) - 1)du$$

Teorema: Si $\text{Re}(s) > 1$, entonces

$$\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) = \frac{1}{2}\int_0^\infty u^{(s/2)-1}(\theta(u) - 1)du$$

Demostración: Para la siguiente demostración es necesario observar que:

$$\int_0^\infty e^{-\pi n^2 u}u^{(s/2)-1}du = \pi^{-s/2}\Gamma(\frac{s}{2})n^{-s}, \quad \text{si } n \geq 1 \tag{5}$$

Que es posible ver que se cumple haciendo el cambio de variable $u = \frac{t}{\pi n^2}$ en la integral del lado izquierdo de la ecuación, esta queda como:

$$\int_0^\infty e^{-\pi n^2 \frac{t}{\pi n^2}} \left(\frac{t}{\pi n^2}\right)^{(s/2)-1} \frac{dt}{\pi n^2} = (\pi n^2)^{-s/2}\int_0^\infty e^{-t}t^{(s/2)-1}dt$$

Que aplicando la definición de $\Gamma(s)$ queda precisamente $\pi^{-s/2}\Gamma(\frac{s}{2})n^{-s}$. Ahora para proceder, notemos que:

$$\frac{\theta(u) - 1}{2} = \sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 u}$$

Teorema: Si $\mathrm{Re}(s) > 1$, entonces

$$\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) = \frac{1}{2}\int_0^\infty u^{(u/2)-1}(\theta(u)-1)du$$

Demostración (continuación):

$$\frac{\theta(u)-1}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 u}$$

Se otiene:

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty u^{(s/2)-1}[\theta(u)-1]du = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^\infty u^{(s/2)-1}e^{-\pi n^2 u}du$$

$$= \pi^{-s/2}\Gamma(\frac{s}{2})\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

$$= \pi^{-s/2}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s)$$

Concluyendo así la demostración.

Definición: Para $\mathrm{Re}(s) > 1$, se define la función ξ (chi) por:

$$\xi(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s)$$

Teorema: La función ξ es holomorfa para $\mathrm{Re}(s) > 1$ y tiene una continuación analítica a todo $\mathbb{C}$ como una función meromorfa con polos simples en $s = 0$ y $s = 1$. Más aún,

$$\xi(s) = \xi(1-s) \quad \forall s \in \mathbb{C}$$

Teorema: La función ζ tiene una continuación meromorfa en el plano complejo, cuya única singularidad es un polo simple en $s = 1$.

Demostración: Viendo la definición de la función ξ en 20, es posible ver que

$$\zeta(s) = \pi^{s/2}\frac{\xi(s)}{\Gamma(\frac{s}{2})}$$

Provee a ζ de una continuación meromorfa. Se demostró en la sección anterior que $\frac{1}{\Gamma(s/2)}$ es una función entera con ceros simples en $0, -2, -4, \ldots$, por lo tanto el polo simple que $\xi(s)$ posee en el origen, es cancelado por el cero correspondiente de $\frac{1}{\Gamma(\frac{s}{2})}$. Gracias a esto, la única singularidad de ζ es un polo simple en $s = 1$.

Observemos que evaluando la función zeta en los enteros pares negativos mediante la ecuación funcional estudiada antes, tenemos:

$$n \in \mathbb{N} \mapsto \zeta(-2n) = 2^{-2n}\pi^{-2n-1}\sin(-n\pi)\Gamma(1+2n)\zeta(1+2n) = 0$$

Enunciado esto tenemos:

Teorema

Si $s \in 2\mathbb{Z}^-$, entonces $\zeta(s) = 0$.

Demostración: Recordemos que

$$\zeta(s) = \pi^{s/2}\frac{\xi(s)}{\Gamma(s/2)} \Leftrightarrow \zeta(s)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2) = \xi(s)$$

que nos da la extensión meromorfa de ζ en el plano complejo con un único polo en $s = 1$ además sabemos que $\xi(s) = \xi(1-s)$, con lo que, tomando s tal que $\mathrm{Re}(s) < 0$, tendremos

$$\zeta(s)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2) = \xi(s) \wedge \xi(s) = \xi(1-s) \Leftrightarrow \zeta(1-s)\pi^{-(1-s)/2}\Gamma((1-s)/2) = \zeta(s)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)$$

Donde al despejar ζ tendremos:

$$\zeta(s) = \pi^{s-1/2}\frac{\Gamma((1-s)/2)}{\Gamma(s/2)}\zeta(1-s)$$

y al considerar s tal que $\mathrm{Re}(s) < 0$ tendremos que las siguientes afirmaciones son verdaderas:

1. $\zeta(1-s)$ no tiene ceros.
2. $\Gamma((1-s)/2)$ tampoco se anula (gracias a que $Re(1-s) > 0$).
3. $1/\Gamma(s/2)$ por otro lado sabemos que tiene ceros en $s = -2n, n \in \mathbb{N}$ al $1/\Gamma(s)$ anularse en los enteros negativos.

Además sabemos gracias a la identidad del producto de Euler que $\zeta(s) \neq 0$ para $\mathrm{Re}(s) > 1$.

Así, la función zeta tiene ceros conocimos como *ceros triviales* en cada entero par negativo. A continuación veremos un teorema relacionado con los posibles ceros no triviales:

Teorema: Si $s \in \mathrm{Dom}(\zeta) \setminus 2\mathbb{Z}^-$ es tal que $\zeta(s) = 0$ entonces $0 \leq \mathrm{Re}(s) \leq 1$.

Este teorema nos dice que los ceros de ζ que no sean ceros triviales (conocidos como ceros no triviales) se encuentran en la región $0 \leq \mathrm{Re}(s) \leq 1$.

Hipótesis de Rieman: Todos los ceros no triviales de la función ζ son de la forma $\frac{1}{2} + it$, con $t \in \mathbb{R}$.

Definición: Una lemniscata se define como el lugar geométrico de los puntos tales que la suma de las distancias desde dos puntos focales es una constante. En coordenadas cartesianas

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)\}$$

y en coordenadas polares es:

$$\{(r, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi) : r^2 = a^2 \cos 2\theta\}$$

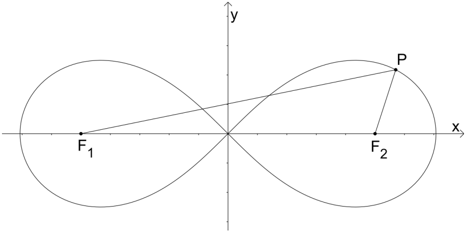

Figura 1: Lemniscata de Bernoulli.

Definición: Sea Γ una curva simple y regular. Sea $\vec{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una parametrización regular de Γ. Definimos la longitud de Γ mediante

$$L(\Gamma) = \int_a^b \left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \right\| dt$$

El valor de esta integral no depende de la parametrización regular $\vec{r}$ que se escoja para describir Γ, y por lo tanto el largo de Γ está bien definido.

Teorema:

1. La longitud de arco de la elipse es

$$L = \frac{4}{a} \int_0^a \sqrt{\frac{a^4 - a^2x^2 + b^2x^2}{a^2 - x^2}} dx = \frac{4}{a} \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^4 - a^2(a^2 - b^2)\sin^2\theta} d\theta$$

2. La longitud de arco de la lemniscata (unitaria, i.e. $a = 1$) es

$$L = 4 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^4}} = 4 \int_0^{\pi/4} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}$$

La integral correspondiente a la longitud de arco de una elipse o a la lemniscata son conocidas como *integrales elípticas*.

Cada integral elíptica se puede reducir a una combinación lineal de tres formas básicas de integrales elípticas. A continuación se presentan 2 de esas 3 formas:

Definición: En *notación estándar*, la integral elíptica completa de primer y segundo tipo son, respectivamente:

$$K = K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}}$$

y

$$E = E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,d\theta = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-k^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

para $0 < k < 1$.

El parámetro k es conocido como *módulo*, y $k' = \sqrt{1-k^2}$ es conocido como el *módulo complementario*. De forma simétrica relacionado con K y E son K' y E', definidos como

$$K'(k) = K(k')$$
$$E'(k) = E(k')$$

Notar que K' y E' es solo la notación, no la derivada, es un error frecuente confundirlos. Las correspondientes integrales indefinidas son llamadas *integrales elípticas incompletas*.

Un cálculo simple identifica la integral de la lemniscata como una integral elíptica completa de primer tipo.

$$K = K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}}$$

Específicamente, el siguiente enunciado nos muestra esto.

Teorema: La integral de la lemniscata se puede escribir como una integral elíptica completa de primer tipo, y es de la forma:

$$K(1/\sqrt{2}) = \sqrt{2}\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{2-\sin^2\theta}} = \sqrt{2}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

Teorema: La integral completa de segundo tipo en $k = 1/\sqrt{2}$ cumple la relación

$$\sqrt{2}E(1/\sqrt{2}) = \int_0^1 \frac{1+u^2}{\sqrt{1-u^4}}du$$

Además, la integral completa de segundo tipo en $k = 1/\sqrt{2}$ se puede escribir en términos de la función gamma, en particular es

$$E(1/\sqrt{2}) = \frac{1}{8\sqrt{\pi}}[\Gamma(1/4)^2 + 4\Gamma(3/4)^2]$$

Teorema: La integral de la lemniscata se puede escribir en términos de la función gamma:

$$K(1/\sqrt{2}) = \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\Gamma(1/4)^2$$

Teorema: Dado un par arbitrario de números reales a y b con $0 < b < a$, sus medios aritméticos y geométricos

$$a_1 = \frac{1}{2}(a+b)$$
$$b_1 = \sqrt{ab}$$

entonces $0 < b < b_1 < a_1 < a$. Ahora iterando dicho proceso, se definen

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n), n = 1, 2, 3, \ldots$$
$$b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, n = 1, 2, 3, \ldots$$

entonces

$$0 < b < b_1 < \cdots < b_n < a_n < \cdots < a_1 < a$$

entonces las sucesiones $(a_n)_n$ y $(b_n)_n$ son sucesiones monótonas y acotadas, por lo tanto son convergentes.

Definición: El límite común se llama media aritmética-geométrica (AGM) de a y b y se denota por $M(a, b)$.

Definición: El límite común se llama media aritmética-geométrica (AGM) de a y b y se denota por $M(a,b)$.

Teorema: El AGM tiene las propiedades:

$$M(a,b) = M\left(\frac{1}{2}(a+b), \sqrt{ab}\right)$$
$$M(a,b) = aM\left(1, \frac{b}{a}\right)$$

El algoritmo AGM fue descubierto por Lagrange alrededor del año 1784. Gauss lo redescubrió en 1791, a la edad de 14 años. El algoritmo converge rápidamente, lo que permite un cálculo numérico sencillo de la AGM. El 30 de mayo de 1799, Gauss hizo un descubrimiento sorprendente sobre la importancia de la AGM, notó que para valores iniciales $a_0 = 1$ y $b_0 = 1/\sqrt{2}$ se da la igualdad

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n (a_n^2 - b_n^2) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \left(M\left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)^2$$

Por razones no muy claras Gauss no utilizó su fórmula para calcular π y la fórmula se olvidó hasta que en 1970 fue redescubierta de forma independiente por Eugene Salamin y Richard Brent, que la expresan en forma apropiada para el cálculo iterativo

$$\lim_{m\to\infty} \frac{2a_m^2}{\frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{m} 2^n (a_n^2 - b_n^2)} = \pi$$

Se puede demostrar que la convergencia hacia π es cuadrática, es decir al pasar de n a $n+1$ se dobla el número de decimales correctos. Brent y Salamin programan el algoritmo en un ordenador, *lo que les permite conseguir en 1976 un récord al calcular π con 3 millones de cifras decimales, cuando el récord hasta entonces era de 1 millón de cifras decimales*.
Arndt muestra que variaciones del algoritmo obtienen estimaciones de hasta 4 millones de cifras decimales de π.

Teorema: Para $0 < k < 1$ y $k' = \sqrt{1-k^2}$,

$$\frac{1}{M(1,k)} = \frac{2}{\pi}K(k')$$

Además

$$K(1/\sqrt{2}) = \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\Gamma(1/4)^2$$

Demostración: Notemos que si $k = \frac{1}{\sqrt{2}} = k'$, entonces

$$\frac{1}{M(1,1/\sqrt{2})} = \frac{2}{\pi}K(1/\sqrt{2})$$

por lo tanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n(a_n^2 - b_n^2) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\left(M\left(1,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2K(1/\sqrt{2})}\right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{2K(1/\sqrt{2})}$$

donde $K(1/\sqrt{2}) = \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\Gamma(1/4)^2$.

Bibliografía:

- Stein, Shakarchi, *Complex Analysis, an Introduction*, Princeton University.
- Conway John., *Functions of One Complex Variable* (1995).
- Artin, E., *The gamma function* Holt, Rinehart and Winston (1964).
- Panzone P., *Función Zeta de Riemann (Uso y Teoría Clásica)*.
- Morcelle D., Bucher A., *Introducción a la Función Zeta de Riemann*, Concurso de Monografías de la UMA (2018).
- Duren P., *Invitation to Classical Analysis*-American Mathematical Society (2012) (Pure and Applied Undergraduate Texts).

Ronda de preguntas.