Problema de Mayer sujeto a un Sweeping Process con conjunto móvil poliedral

Basado en:

Optimal control involving Sweeping Process, by M de Pinho and M. Ferreira

Presenta: Axel Álvarez, Axel Kolm y Manuel Torres V.

Profesor: Héctor Ramírez.

Auxiliar: Javier Madariaga.

Fecha: 26 de Octubre, 2022.

Curso: Control óptimo: Teoría y Laboratorio (MA4703).

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Sea H un espacio de Hilbert y una función de trayectoria $z : [0, +\infty) \to H$, luego conocemos los siguientes sistemas con condiciones iniciales:

- Ecuación diferencial de primer orden: $z'(t) = f(t, z(t))$ con condición inicial $z(0) = z_0 \in H$.

> *Ejemplo:* Sea $z \in C^1([0, +\infty))$ una función de trayectoria. Buscar $\bar{t} \in [0, +\infty)$ tal que
>
> $$0 = z'(\bar{t}) = f(\bar{t}, z(\bar{t})).$$
>
> Lo anterior entrega la regla de Fermat.

Sea H un espacio de Hilbert y una función de trayectoria $z : [0, +\infty) \to H$, luego conocemos los siguientes sistemas con condiciones iniciales:

1. Ecuación diferencial de primer orden: $z'(t) = f(t, z(t))$ con condición inicial $z(0) = z_0 \in H$.

> *Ejemplo:* Sea $z \in C^1([0, +\infty))$ una función de trayectoria. Buscar $\bar{t} \in [0, +\infty)$ tal que
>
> $$0 = z'(\bar{t}) = f(\bar{t}, z(\bar{t})).$$
>
> Lo anterior entrega la regla de Fermat.

2. Inclusión diferencial de primer orden: $z'(t) \in F(t, z(t))$ con condición inicial $z(0) = z_0 \in H$.

> *Ejemplo:* Sea $z \in C^1([0, +\infty))$ una función de trayectoria convexa. Considerando en el ejemplo anterior $F(t, z(t)) := \partial z(t)$ (el subdiferencial convexo). Buscar $\bar{t} \in [0, +\infty)$ tal que
>
> $$0 = z'(\bar{t}) \in \partial z(\bar{t}).$$
>
> Permite debilitar la regularidad de z a una función no diferenciable y formular la regla de Fermat, donde $z'(t)$ es un subgradiente de z.

Sea H un espacio de Hilbert y una función de trayectoria $z : [0, +\infty) \to H$, luego conocemos los siguientes sistemas con condiciones iniciales:

1. Ecuación diferencial de primer orden: $z'(t) = f(t, z(t))$ con condición inicial $z(0) = z_0 \in H$.

> *Ejemplo:* Sea $z \in C^1([0, +\infty))$ una función de trayectoria. Buscar $\bar{t} \in [0, +\infty)$ tal que
>
> $$0 = z'(\bar{t}) = f(\bar{t}, z(\bar{t})).$$
>
> Lo anterior entrega la regla de Fermat.

2. Inclusión diferencial de primer orden: $z'(t) \in F(t, z(t))$ con condición inicial $z(0) = z_0 \in H$.

> *Ejemplo:* Sea $z \in C^1([0, +\infty))$ una función de trayectoria convexa. Considerando en el ejemplo anterior $F(t, z(t)) := \partial z(t)$ (el subdiferencial convexo). Buscar $\bar{t} \in [0, +\infty)$ tal que
>
> $$0 = z'(\bar{t}) \in \partial z(\bar{t}).$$
>
> Permite debilitar la regularidad de z a una función no diferenciable y formular la regla de Fermat, donde $z'(t)$ es un subgradiente de z.

3. Inclusión diferencial de primer orden con traslación: $z'(t) \in f(t, z(t)) + F(t, z(t))$ con condición inicial $z(0) = z_0 \in H$.

Estudiamos una inclusión diferencial de primer orden con traslación con:

1. Sea z una función de trayectoria Lipschitz continua.
2. Considerando una función $f(t, z(t))$ medible y Lipschitz continua para el primer y segundo argumento respectivamente.
3. Considerando un conjunto móvil $C(t)$ convexo compacto, se define $-F(t, z(t)) = \partial i_{C(t)}(z(t)) = N_{C(t)}(z(t))$.

Bajo las funciones anteriores, el proceso de arrastre es una dinámica de la forma:

$$
\begin{aligned}
z'(t) \in f(t, z(t)) - N_{C(t)}(z(t)), \\
z(0) = z_0.
\end{aligned}
$$

Estudiamos una inclusión diferencial de primer orden con traslación con:

1. Sea z una función de trayectoria Lipschitz continua.
2. Considerando una función $f(t, z(t))$ medible y Lipschitz continua para el primer y segundo argumento respectivamente.
3. Considerando un conjunto móvil $C(t)$ convexo compacto, se define $-F(t, z(t)) = \partial i_{C(t)}(z(t)) = N_{C(t)}(z(t))$.

Bajo las funciones anteriores, el proceso de arrastre es una dinámica de la forma:

$$\begin{aligned} z'(t) &\in f(t, z(t)) - N_{C(t)}(z(t)), \\ z(0) &= z_0. \end{aligned}$$

El problema de control óptimo a resolver es:

$$(PCO) \begin{cases} \text{mín} & -\int_0^T c(t)u(t)\left(\frac{V(t)}{S} + H\right) dt + K(V(T) - V_0)^2, \\ \text{s.a.} & \dot{V}(t) = A - u(t) - v(t), \\ & V(0) = V_0, \\ & V(t) \leq V^M, \\ & u(t) \in [u^m, u^M], \\ & v(t) \geq 0, \\ & v(t) = 0 \text{ si } V(t) < V^M. \end{cases}$$

en donde, K, V^M, V_0, S, H denota constantes positivas, y las funciones tienen la regularidad adecuada (ver propuesta de proyecto).

El problema a resolver es:

$$(PCO)\begin{cases} \text{mín} & -\int_0^T c(t)u(t)\left(\frac{V(t)}{S}+H\right)dt + K(V(T)-V_0)^2, \\ \text{s.a.} & \dot{V}(t) = A - u(t) - v(t), \\ & V(0) = V_0, \\ & V(t) \leq V^M, \\ & u(t) \in [u^m, u^M], \\ & v(t) \geq 0, \\ & v(t) = 0 \text{ si } V(t) < V^M. \end{cases}$$

en donde, K, V^M, V_0, S, H denota constantes positivas, y las funciones tienen la regularidad adecuada (ver propuesta de proyecto).
Se puede reformular como un proceso de arrastre (ver [ddPFS19]) de la forma:

$$(PCOID)\begin{cases} \text{mín} & I(T) + K(V(T)-V_0)^2, \\ \text{s.a.} & \begin{pmatrix}\dot{V}(t)\\ \dot{I}(t)\end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} A-u(t) \\ -c(t)u(t)\left(\frac{V(t)}{S}+H\right)\end{pmatrix} - N_C(V(t),I(t)), \\ & V(0) = V_0, \\ & I(0) = 0, \\ & u(t) \in [u^m, u^M]. \end{cases}$$

en donde $C := \{(V,I) : V \leq V^M\}$.

El proyecto consta de comparar la resolución de las formulaciones (PCO) y $(PCOID)$ que modelan el mismo problema. El trabajo se divide en:

1. Resolver la formulación (PCO) usando BOCOP.
2. Resolver la formulación de $(PCOID)$ mediante algún método numérico.

El objetivo final es comparar los resultados obtenidos en (1) y (2).

El proyecto consta de comparar la resolución de las formulaciones (PCO) y $(PCOID)$ que modelan el mismo problema. El trabajo se divide en:

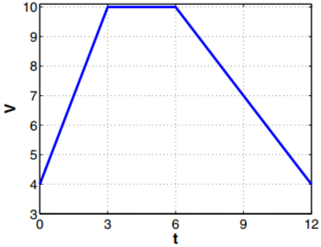
1. Resolver la formulación (PCO) usando BOCOP.
2. Resolver la formulación de $(PCOID)$ mediante algún método numérico.

El objetivo final es comparar los resultados obtenidos en (1) y (2).

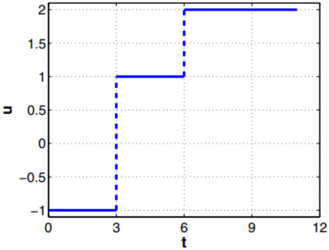
Algunas preguntas interesantes a responder:

- ¿Hay un método numérico que entregue un buen resultado en (2)?
- ¿Es posible estudiar otros problemas de control óptimo sujetos a procesos de arrastre?

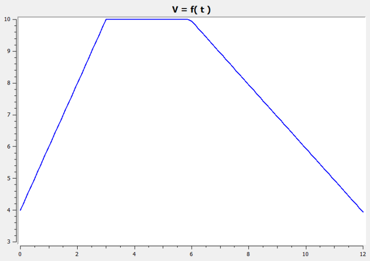
1. $V(t)$ cuando $c = -2$ si $t \leq 6$ y $c = -5$ si no:



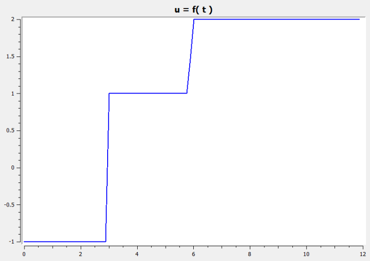
2. Control con c como en 1 :



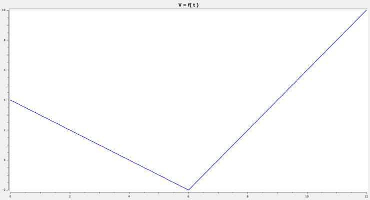
1. $V(t)$ cuando $c = -2$ si $t \leq 6$ y $c = -5$ si no:



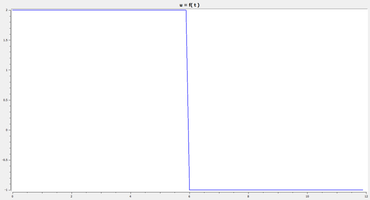
2. Control con c como en 1 :



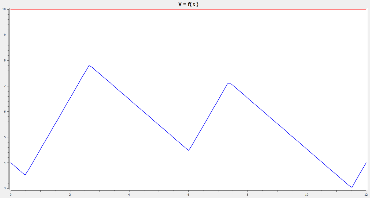
3. $V(t)$ con $c = \exp t$ si $t \leq 6$ y $c = \exp 2t$ si no:



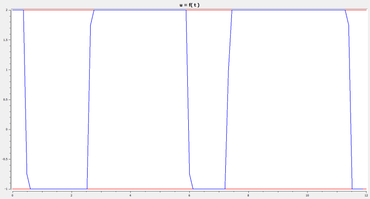
4. Control con c como en 3:



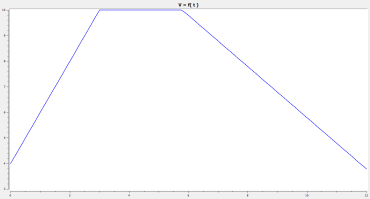
1. $V(t)$ cuando $c = -\sin(t)$ si $t \leq 6$ y $c = -\cos(t)$ si no:



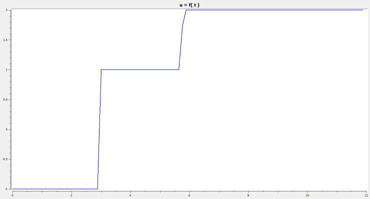
2. Control con c como en 1 :



3. $V(t)$ con $c = -1 * x^3 + 1$ si $t \leq 6$ y $c = -2 * x^3 + 1$ si no:



4. Control con c como en 3:



Dificultades y objetivos siguientes

Algunas dificultades encontradas en el avance:

1. BOCOP no admite inclusiones diferenciales, se requiere formular el problema mediante ecuaciones.
2. No es fácil caracterizar inclusiones diferenciales para resolver problemas en python, por lo que se requiere estudiar algoritmos que se basan en la geometría (proyecciones en espacios de Hilbert).

Dificultades y objetivos siguientes

Algunas dificultades encontradas en el avance:

1. BOCOP no admite inclusiones diferenciales, se requiere formular el problema mediante ecuaciones.
2. No es fácil caracterizar inclusiones diferenciales para resolver problemas en python, por lo que se requiere estudiar algoritmos que se basan en la geometría (proyecciones en espacios de Hilbert).

Lo que sigue: Resolver numéricamente $(PCOID)$, para ello:

1. En la literatura clásica la resolución del proceso de arrastre dado por

$$\begin{aligned} z'(t) \in f(t, z(t)) - N_{C(t)}(z(t)), \\ z(0) = z_0, \end{aligned}$$

se realiza mediante dos métodos clásicos para diferentes versiones del problema:

- **Aplicando la estrategia de Catching-Up**: Consiste en particionar el intervalo de tiempo $[0, T]$ en el que se estudia la dinámica, e ir proyectando $z(t_k)$ sobre $C(t_{k+1})$ (ver [Mor71]).
- **Resolviendo el problema que se obtiene mediante la regularización de Moreau-Yosida de la inclusión diferencial:** Mediante la regularizada, para $\lambda > 0$ se obtiene la ecuación diferencial

$$(PMY_\lambda) \begin{cases} \dot{z}_\lambda(t) = -\frac{1}{2\lambda} \nabla d^2_{C(t)}(z_\lambda(t)) - f(t, z_\lambda(t)) \\ z_\lambda(t_0) = a \in C(0), \end{cases}$$

cuya solución es z_λ, luego $z_\lambda \xrightarrow[\lambda \to 0]{\|\cdot\|_\infty} z$ (ver [Thi08] y [ST14]).

Dificultades y objetivos siguientes

Algunas dificultades encontradas en el avance:

1. BOCOP no admite inclusiones diferenciales, se requiere formular el problema mediante ecuaciones.
2. No es fácil caracterizar inclusiones diferenciales para resolver problemas en python, por lo que se requiere estudiar algoritmos que se basan en la geometría (proyecciones en espacios de Hilbert).

Lo que sigue: Resolver numéricamente $(PCOID)$, para ello:

1. En la literatura clásica la resolución del proceso de arrastre dado por

$$\begin{aligned} z'(t) &\in f(t, z(t)) - N_{C(t)}(z(t)), \\ z(0) &= z_0, \end{aligned}$$

   se realiza mediante dos métodos clásicos para diferentes versiones del problema:
   - **Aplicando la estrategia de Catching-Up**: Consiste en particionar el intervalo de tiempo $[0, T]$ en el que se estudia la dinámica, e ir proyectando $z(t_k)$ sobre $C(t_{k+1})$ (ver [Mor71]).
   - **Resolviendo el problema que se obtiene mediante la regularización de Moreau-Yosida de la inclusión diferencial:** Mediante la regularizada, para $\lambda > 0$ se obtiene la ecuación diferencial

$$(PMY_\lambda) \begin{cases} \dot{z}_\lambda(t) = -\frac{1}{2\lambda}\nabla d^2_{C(t)}(z_\lambda(t)) - f(t, z_\lambda(t)) \\ z_\lambda(t_0) = a \in C(0), \end{cases}$$

     cuya solución es z_λ, luego $z_\lambda \xrightarrow[\lambda\to 0]{\|\cdot\|_\infty} z$ (ver [Thi08] y [ST14]).
2. Para el proyecto se tiene que $f = f(t, z(t), u(t))$ y $N_{C(t)}(z(t), u(t))$ donde $u(\cdot)$ es el control. Una dificultad natural es tan solo resolver la inclusión diferencial numéricamente, para reformular el problema $(PCOID)$ teniendo $z(t)$ mediante una ecuación.
   - Estudiar un esquema numérico a partir del **método de Catching-Up** (ver [BHT22]).
   - Estudiar un esquema numérico dado a partir de la idea de la **regularizada de Moreau-Yosida** (ver capítulo 4 de [ddPFS19]).

Abderrahim Bouach, Tahar Haddad, and Lionel Thibault.
On the Discretization of Truncated Integro-Differential Sweeping Process and Optimal Control.
Journal of Optimization Theory and Applications, 193(1-3):785–830, 2022.

M. d.R. de Pinho, M. M.A. Ferreira, and G. V. Smirnov.
Optimal Control Involving Sweeping Processes.
Set-Valued and Variational Analysis, 27(2):523–548, 2019.

Jean Jacques Moreau.
Rafle par un convexe variable (Première partie), 1971.
Article dans "Séminaire d'analyse convexe", Montpellier, exposé n°15.

Moustapha Sene and Lionel Thibault.
Regularization of dynamical systems associated with prox-regular moving sets.
J. Nonlinear Convex Anal., 15(4):647–663, 2014.

Lionel Thibault.
Regularization of nonconvex sweeping process in Hilbert space.
Set-Valued Analysis, 16(2-3):319–333, 2008.