MA6912 Seminario Avanzado de Matemáticas II
Elementos de la Topología algebráica
Complejos Simpliciales Abstractos

Manuel Torres Valdebenito

Departamento de Ingeniería Matemática - Universidad de Chile

25 de Septiembre de 2020

Contenido

Bibliografía

1. Munkes, J.R. *'Elements of Algebraic Topology'*. CRC Press. (Principal).
2. Nuñez, L. *'Sobre las diferentes nociones topológicas de complejo y algunas de sus aplicaciones. Trabajo fin de grado'*. Repositorio Universidad de Sevilla.

Geometría afín de $\mathbb{R}$ y primeros símplices.

Símplice afín

Los resultados a presentar dependen de la estructura afín de $\mathbb{R}^n$, por lo que pueden formularse literalmente en cualquier espacio afín real de dimensión finita. Recordemos brevemente los conceptos básicos de la geometría afín (particularizados a $\mathbb{R}^n$). **PAUSE**

1. Una *variedad afín*[1] es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ de la forma $A = x + V$, donde V es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$. **PAUSE**Notemos que $V = A - x$, donde x es cualquier punto de A, luego V está completamente determinado por A y se llama su *espacio director*. La dimensión de V se llama *dimensión* de A. **PAUSE**
2. La intersección de variedades afines es una variedad afín, luego es posible hablar de la *envoltura afín* de un conjunto de puntos $a_0, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^n$, definida como la menor variedad afín A que los contiene.**PAUSE**Claramente, su espacio director ha de contener a los vectores $a_1 - a_0, \ldots a_m - a_0$, luego ha de ser:

$$A = a_0 + \underbrace{\langle a_1 - a_0, \ldots, a_m - a_0 \rangle}_{\text{'Generador trasladado'}}$$

[1] Por variedad afín podemos entender cualquier subespacio vectorial trasladado, piense en la función afín.

Luego, notemos que $x \in A$ ssi para ciertos escalares $(t_i)_{i=1}^m$

$$x = a_0 + t_1(a_1 - a_0) + \cdots + t_m(a_m - a_0)$$

PAUSEy si llamamos $t_0 = 1 - t_1 - \cdots - t_m$, resulta que: **PAUSE**

$$t_0 a_0 + \cdots + t_m a_m = x$$
$$\sum_{i=0}^{m} t_i = 1$$

PAUSEUn punto x en estas condiciones se llama *combinación afín* de $a_0, \ldots, a_m$. Recíprocamente, es fácil ver que toda *combinación afín de $a_0, \ldots, a_m$* ha de estar en A, luego tenemos que la envoltura afín de un conjunto finito de puntos está formada por sus combinaciones afines.

Algunas nociones de álgebra lineal que recuperaremos son: **PAUSE**

1. Diremos que una colección de $m+1$ puntos, $a_0, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^n$ son *afínmente independientes* si su envoltura afín tiene *dimensión* m, es decir, si los vectores $a_1 - a_0, \ldots, a_m - a_0$ son *linealmente independientes*. **PAUSE**
2. Si los puntos $a_0, \ldots, a_m$ son *afínmente independientes*, todo punto de x de su envoltura afín se expresa de forma única como una *combinación afín* de $a_0, \ldots, a_m$, pues los coeficienstes $(t_i)_{i=0}^n$ para $i \neq 0$ son las coordenadas de $x - a_0$ en la base $a_i - a_0$ del *espacio director* y t_0 está determinado por la ecuación presentada anteriormente.

PAUSELos coeficientes $(t_i)_{i=0}^n$ serán llamados *coordenadas baricéntricas* de x respecto a $a_0, \ldots, a_m$.

1. *Independencia:* Todo conjunto de puntos afínmente independientes en $\mathbb{R}^n$ se puede extender hasta un conjunto de $n+1$ puntos afínmente independientes. **PAUSE**
2. *Unica representación:* Una aplicación $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ está determinada por los valores que toma sobre $n+1$ puntos afínmente independientes. Recíprocamente, cualquier aplicación definida sobre tales $n+1$ puntos con valores en $\mathbb{R}^m$ se extiende a una única aplicación afín.

PAUSEUna aplicación afín $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ está determinada por los valores que toma sobre $n+1$ puntos afínmente independientes. Recíprocamente, toda aplicación definida sobre tales $n+1$ puntos con valores en $\mathbb{R}^m$ se extiende a una única aplicación afín.

Primeros conceptos de p-símplice

Definición (p-símplice)

1. Un *p-símplice afín en* $\mathbb{R}^n$ es la envoltura convexa S de $p+1$ puntos $a_0, \ldots, a_p \in \mathbb{R}^n$ tales que son afínmente independientes.**PAUSE**
2. Los puntos a_i se llaman *vértices de* S.**PAUSE**
3. Los símplices generados por cada $r+1$ vértices de S se llaman *r-caras de* S.

PAUSERepresentaremos el símplice de vértices $a_0, \ldots, a_p$ mediante $[a_0, \ldots, a_p]$. **PAUSE**Notemos que los *vértices* de S son las 0-caras. Las 1-caras también son conocidas como *aristas*, siguiendo con esta noción veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo (1-simplice)

Un 1-simplice formado por a_0, a_1 consiste por todos los puntos de la forma:

$$x = ta_0 + (1-t)a_1, t \in [0,1]$$

Ejemplo (2-símplice)

Un 2-símplica formado por a_0, a_1, a_2 correspone al triángulo formado por estos tres puntos en sus vértices. Sus puntos son de la forma:

$$x = \sum_{i=0}^{2} t_i a_i = t_0 a_0 + (1 - t_0) \underbrace{\left[\frac{t_1}{\lambda} a_1 + \frac{t_2}{\lambda} a_2\right]}_{\text{segmento } a_1 a_2}, \text{ con } \lambda = 1 - t_0$$

donde $\dfrac{t_1 + t_2}{\lambda} = 1$ y $\dfrac{t_i}{\lambda} \geq 0$ para $i \in \{1, 2\}$.

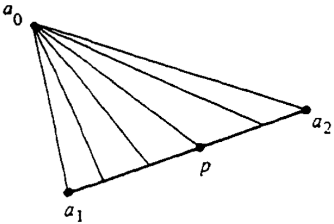

Figura 1: 2-símplice generado por a_0, a_1, a_2.

Ejemplo

1. Los 0-símplices son los puntos.
2. Los 1-símplices son segmentos.
3. Los 2-símplices son los triángulos.
4. Los 3-símplices son los tetraedros (ver Figura 2).

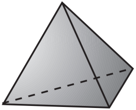

Figura 2: 3-símplice.

Unicidad del conjunto de vértices de un p-símplice

Teorema

Un p-símplice está generado por un único conjunto de vértices. En particular dos p-símplices son iguales ssi tienen los mismos vértices.

PAUSE

Demostración.

Sea $S = [a_0, \ldots, a_p]$. Basta probar que estos vértices están determinados por S. **PAUSE**Concretamente, vamos a ver que un punto $x \in S$ es un vértice ssi no puede expresarse como: **PAUSE**

$$x = (1 - t)u + tv \text{ con } u, v \in S; u \neq v; 0 < t < 1$$

. . . ■

Demostración.

Razonando hacia contradicción, si a_j pudiese expresarse de esta forma con:

$$u = \sum_{i=0}^{p} t_i a_i$$

$$v = \sum_{i=0}^{p} t_i' a_i$$

PAUSEentonces

$$a_j = \sum_{i=0}^{p} ((1-t)t_i + tt_i')a_i$$

PAUSEy los coeficientes de esta expresión son no negativos y suman 1,**PAUSE**luego por la unicidad de las coordenadas baricéntricas ha de tenerse que $(1-t)t_i + tt_i' = 0$, para $i \neq j$,**PAUSE**luego $t_i = t_i' = 0$ se tiene que,**PAUSE**luego $u = v = a_j$, contradicción.

PAUSESi un punto $x \in S$ no es un vértice, es posible expresarlo de la forma indicada a partir de su expresión como combinación convexa de los vértices. ∎

Teorema

Un p-símplice está generado por un único conjunto de vértices. En particular dos p-símplices son iguales ssi tienen los mismos vértices.

PAUSEImportante: Una consecuencia imporatnte del teorema anterior podemos llamar *dimensión de un símplice* a su número de vértices menos 1, con lo que la dimensión de un p-símplice es p, pues es análogo a la noción de dimensión a partir de la base de un espacio vectorial.

p-símplice canónico

Un p-símplice es un subespacio compacto, convexo de interior no vacío en $\mathbb{R}^p$, de hecho resultará que todos ellos serán homeomorfos entre sí. **PAUSE**

Definición (p-símplice canónico)

Llamaremos *p-símplice canónico* al símplice afín $\Delta_p \subset \mathbb{R}^p$ determinado por los vértices

$$x_0 = (0, \ldots, 0); x_1 = (1, 0, \ldots, 0); \ldots; x_p = (0, \ldots, 1)$$

PAUSE

Observación

Las coordenadas baricéntricas de un punto $(a_1, \ldots, a_p) \in \mathbb{R}^p$ respecto de los vértices de Δ_p son

$$\left(1 - \sum_i a_i; a_1, \ldots, a_p\right)$$

Ejemplo

1. $\Delta_0 = \{0\}$.**PAUSE**
2. $\Delta_1 = [0, 1]$.**PAUSE**
3. Δ_2 y Δ_3 son el triángulo y el tetraedro en la Figura 3.

Figura 3: Δ_2 y Δ_3 respectivamente.

Definiciones de interior y frontera

Definición (Interior y frontera)

PAUSELlamaremos *interior de un p-símplice* S al conunto de los puntos cuyas coordenadas baricéntricas (respecto de sus vértices) son todas estrictamente positivas, es decir los puntos de S que no pertenecen a ninguna de las caras de S distintas del propio S. **PAUSE**La *frontera de* S esta formada por los puntos de S que no perteneces a su interior.

PAUSEAlgunos comentarios importantes:

1. El interior y la frontera de un símplice en este sentido (def) no coinciden con el interior y la frontera en el sentido topológico usual.
   PAUSE*Por ejemplo, el interior de un segmento en* $\mathbb{R}^2$ *es todo el segmento menos sus extremos, cuando su interior topológico es vacío.* **PAUSE**
2. El interior y la frontera de un símplice coinciden con su interior y frontera topológica respecto a la topología relativa de su envoltura afín. **PAUSE**
3. Un símplice es la clausura topológica de su interior.

1. El interior y la frontera de un símplice en este sentido (def) no coinciden con el interior y la frontera en el sentido topológico usual.
   Por ejemplo, el interior de un segmento en $\mathbb{R}^2$ *es todo el segmento menos sus extremos, cuando su interior topológico es vacío.*
2. El interior y la frontera de un símplice coinciden con su interior y frontera topológica respecto a la topología relativa de su envoltura afín.
3. Un símplice es la clausura topológica de su interior. **PAUSE**
4. Una cara C de un símplice S está formada por los puntos cuyas coordenadas baricéntricas respecto a los vértices de S toman el valor 0 en los vértices que no corresponden a C. De aquí se sigue inmediatamente que la intersección de dos caras de S es vacía o bien es otra cara.

Complejos simpliciales de $\mathbb{R}^n$

Definiciones y resultados necesarios

Definición (Complejo simplicial)

Un *complejo simplicial* K en $\mathbb{R}^n$ es una colección de símplices en $\mathbb{R}^n$ tal que:

1. Toda cara de un símplice de K está en K.
2. La intersección de dos símplices de K es una cara de cada uno de ellos.

PAUSE

Lema (Caracterización)

Una colección K de símplices es un complejo simplicial ssi verifica lo siguiente:

1. Toda *cara*[a] de un símplice de K está en K.
2. Todo par de símplices distintos de K tienen interiores disjuntos.

[a] Insertar ejemplo de cara para definir la idea.

Definición (Subconjuntos de un complejo simplicial)

PAUSESi L es una subcolección de K tal que contiene todas las caras de los símplices de K, entonces L es un complejos simplicial por sí mismo, pero además L es llamado *subcomplejo simplicial de* K. **PAUSE**Un subcomplejo simplicial de K que es la colección de todos los símplices de dimensión a lo más p, se llama p-esqueleto de K y es denotado por $K^{(p)}$. **PAUSE**Los puntos de $K^{(0)}$ son llamados vértices de K.

Ejemplo 1 de complejo simplicial

Ejemplo (Grafo simple)

Para cada n consideramos el complejo simplicial $G = (V, R)$ donde $V = \{0, \ldots, n\}$ y R es el conjunto objetivo al considerar la unión de un subconjunto de la familia $\binom{V}{2}$ (todos los subconjuntos de exactamente dos elementos de V, mejor llamado como conjunto de aristas).

Ejemplo 2 de complejo simplicial

Ejemplo (Cuadrado)

Es posible modelar la orilla de un cuadrado como un comlejo simplicial de la siguiente manera:
PAUSEUtilizando el ejemplo anterior, basta con considerar $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ y $R = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_1v_4\}$

Ejemplo 3 de complejo simplicial

Ejemplo (Superficie de cuadrado)

Es posible modelar la superficie de un cuadrado como un comlejo simplicial de la siguiente manera:

PAUSEUtilizando el ejemplo anterior, basta con considerar $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ y $R = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_1 v_2, v_2 v_3, v_3 v_4, v_1 v_4, v_1 v_2 v_3, v_2 v_3 v_4\}$

Isomorfismo simplicial

Definición

Un isomorfismo simplicial entre dos complejos simpliciales K_1 y K_2 es una biyección ϕ entre los vértices tal que $\{v_0, \ldots, v_n\}$ es un símplice de K_1 ssi $\{\phi(v_1), \ldots, \phi(v_n)\}$ es un símplice de K_2.

Complejos simpliciales abstractos

Definición (Complejo simplicial abstracto)

Se conoce como *complejo simplicial abstracto* a una colección $\mathcal{S}$ de conjuntos finitos no vacíos, tal que si $A \in \mathcal{S}$, entonces todo $B \subseteq A$ no vacío cumple que $B \in \mathcal{S}$.

Nomenclatura: Algunos términos y convenciones que emplearemos serán:

1. Los elementos $A \in \mathcal{S}$ son llamados *símplices de $\mathcal{S}$ (o simplejos wtf)*. Su dimensión es uno menos el número de sus elementos.
2. Cada subconjunto $B \subseteq A$ tal que $A \in \mathcal{S}$ se llama *cara* de A.
3. La dimensión de $\mathcal{S}$ es la dimensión más grande de entre entre sus símplices, o bien infinita en caso de que no exista la dimensión más grande.
4. El conjunto V de los vértices de $\mathcal{S}$ es la unión de los elementos de un punto de $\mathcal{S}$ (no haremos distinciones entre el vértice $v \in V$ y el 0-símplice $\{v\} \in \mathcal{S}$).
5. Una subcolección $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{S}$ se llamará *subcomplejo*.

Definición (Esquema de vértices)

Si K es un complejo simplicial, sea V sea el conjunto de vértices de K. Sea $\mathscr{K}$ una colección de todos los subconjuntos $\{a_i\}_{i=0}^{n} \subseteq V$ de manera que los vértices $a_0, \ldots, a_n$ abarquen un símplice de K. La colección $\mathscr{K}$ se llama el *esquema de vértices de K*.

Observación

$\mathscr{K}$ es un complejo simplicial abstracto.

Isomorfismo entre complejos simpliciales.

Definición (Isomorfismo)

Dos complejos simpliciales $\mathcal{S}$ y $\mathcal{T}$ se dice que son isomorfos si hay una correspondencia biyectiva f mapeando el conjunto de vértices de $\mathcal{S}$ al conjunto de vértices de $\mathcal{T}$ tal que $\{a_i\}_{i=0}^{n} \in \mathcal{S}$ ssi $\{f(a_i)\}_{i=0}^{n} \in \mathcal{T}$.

Teorema

1. Todo complejo abstracto $\mathcal{S}$ es isomorfo a algún *esquema de vértices* $\mathscr{K}$ de algún complejo simplicial K.
2. Dos complejos simpliciales son *linealmente isomorfos* <u>ssi</u> sus esquemas de vértice son isomorfos como complejos simpliciales abstractos

Definición (Realización geométrica)

Si el complejo simplicial abstracto $\mathcal{S}$ es isomorfo con el esquema de vértices de un complejo simplicial K, nosotros llamaremos a K como la *realización geométrica de* $\mathcal{S}$.

Ejemplos

Ejemplo 1 - Cilindro

Ejemplo

Supongamos que deseamos indicar un complejo simplicial $\mathcal{K}$ cuyo espacio subyacente es homeomorfo al cilindro $S^1 \times I$ (donde I denota el intervalo cerrado de la unidad $[0, 1]$). Una manera de hacerlo es dibujar la imagen en la Figura 4, la cuál especifica $\mathcal{K}$ como una colección que consiste de 6 2-símplices y sus caras. Otra forma de representar este mismo complejo $\mathcal{K}$ es dibujar el diagrama de la Figura 5 del libro. Este diagrama consiste en en dos cosas: primero, un complejo L cuyo espacio subyacente es un rectángulo, y segundo, un etiquetado de los vértices de L (algunos vértices con la misma etiqueta).

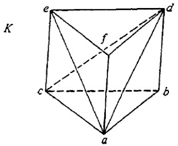

Figura 4: Complejo abstracto ϑ.

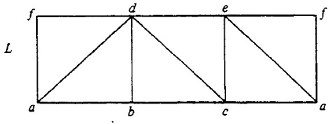

Figura 5: Representación alternativa.

Ejemplo

Consideraremos este diagrama una manera corta de denotar el complejo abstracto ϑ cuyo conjunto de vértices consiste en $\{a, b, c, d, e, f\}$**PAUSE**y cuyos símplices son los conjuntos $\{a, f, d\}$, $\{a, b, d\}$, $\{b, c, d\}$, $\{c, d, e\}$, $\{a, c, e\}$, $\{a, e, f\}$, $\{a, f, d\}$ junto con sus subconjuntos no vacíos. Por supuesto este complejo abstracto es isomorfo al primer esquema de vértices del complejo $\mathcal{K}$, así que especifica el mismo complejo (bajo isomorfismo lineal). Esto es, el complejo $\mathcal{K}$ de la Figura 4 es una realización geométrica de ϑ.

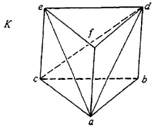

Figura 4: Complejo abstracto ϑ.

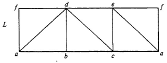

Figura 5: Representación alternativa.

Ejemplo

Sea $f : L^{(0)} \to \mathcal{K}^{(0)}$ el mapeo que asigna a cada vértice de L el correspondiente etiquetado de vértices de K. Entonces f extiende a un mapeo simplicial $g : |L| \to |\mathcal{K}|$. Como los espacios son Hausdorff y compactos, entonces g es un mapeo cuociente, o "pasting map". Este identifica las aristas derechas de |L| linealmente con las aristas izquierdas de |L|. Y por supuesto esto es la forma usual en que uno/a forma un cilindro desde una pieza rectangular de papel - se dobla y se pega la parte derecha con la parte izquierda!

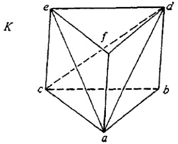

Figura 4: Complejo abstracto ϑ.

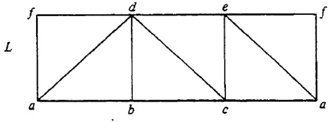

Figura 5: Representación alternativa.

Ejemplo 2 - Banda de Mobius

Ejemplo

Ahora supongamos que comenzamos con un complejo L y un etiquetado de sus vértices. Consideremos, por ejemplo, el mismo complejo L con distinto etiquetado de sus vértices, como en la Figura 6 Tal como antes, el diagrama representa un tipo de complejo abstracto ϑ,

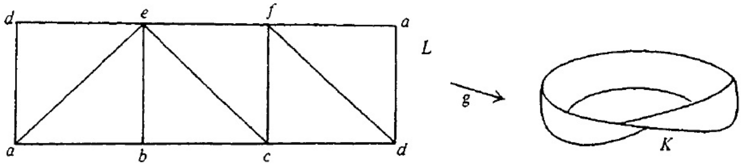

Figura 6: Banda de Mobius

Ejemplo

cuyo símplice se puede enlistar. Sea K una realización geométrica de de ϑ. Como en el ejemplo anterior, los vértices de K corresponden a las letras $a, \ldots, f$; consideramos el mapeo simplicial $g : |L| \to |K|$ que asigna a cada vértice de L el correspondiente etiquetado de vértices de $\mathcal{K}$. De nuevo, g es un mapeo cuociente; en este caso se identifican las aristas izquierdas de $|L|$ linealmente con las aristas derechas de $|L|$ pero con un giro. El espacio $|\mathcal{K}|$ es el que llamamos *la banda de Mobius*.

Ejemplo 3 - Toro

Ejemplo

El toro se define usualmente como el espacio cociente obtenido a partir de un rectángulo, identificando los lados opuestos con la misma orientación. Si deseamos construir un complejo cuyo espacio subyacente es homeomorfo al toro, podemos obtenerlo usando el diagrama. Se puede verificar que el mapa cociente resultante de L a la realización geométrica de este diagrama resulta precisamente en las identificaciones necesarias para formar un toro.

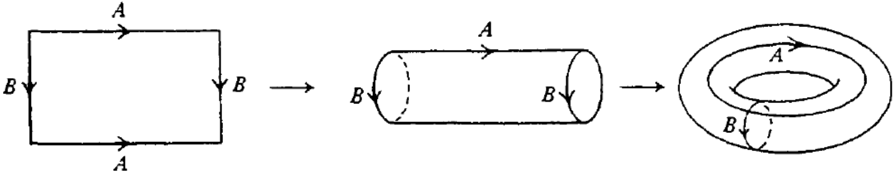

Figura 7: Toro como espacio cociente a partir de un rectángulo.

Complejos clique

Un ejemplo de *complejo simplicial abstracto* que se puede construir a partir de datos combinatorios es el *complejo clique o bandera* asociado a un grafo. **PAUSE**

Definición (Grafo completo)

Para cada $n \geq 1$, llamamos *grafo completo* al grafo K_n formado por n vértices y en el que dos vértices cualesquiera distintos siempre están unidos por una arista.

PAUSE

Definición (Complejo clique)

Si $G = (V, E)$ un grafo, el *complejo clique* asociado a G se construye introduciendo un p-símplice en el complejo si $p + 1$ vértices forman un subgrafo completo K_p de G, y se denota por $\mathrm{Cl}(G)$.

PAUSENotar que $\mathrm{Cl}(G)$ es un complejo simplicial, ya que un subconjunto de vértices de un subgrafo completo, genera también un subgrafo completo.

Ejemplo

En la Figura 8 se muestran los 0-símplices como puntos rojos, los 1-símplices como segmentos negros, los 2-símplices como triángulos celestes, y los 3-símplices como tetraedros azul.

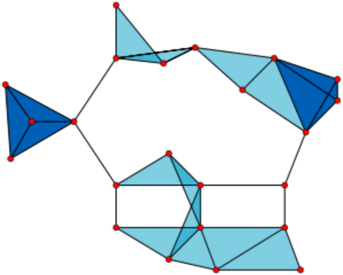

Figura 8: Complejo clique

Lista de complejos

Para ver más ejemplos, puede ver la bibliografía presentada en el inicio donde hay:

1. Complejos cúbicos - Complejos celulares (se usan en análisis topológico de datos).
2. Nervio de un recubrimiento.
3. Complejos de Delaunay - Complejos alfa - Complejos Witness.

FIN

PAUSE

Cualquier comentario o sugerencia es bienvenido!

Si simplemente hace girar la rueda, es álgebra;
pero si contiene una idea, es topología.
-SOLOMON LEFSCHETZ