Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

MA4703 Control Óptimo: Teoría y Laboratorio

Informe del Laboratorio 5

Principio del Máximo de Pontryagin y Ecuaciones de Hamilton-Jacobi-Bellman

Autores: Isaac Lienqueo, Manuel Torres.
Profesor: Héctor Ramírez.
Auxiliar: Javier Madariaga, Pablo Araya.

Fecha del laboratorio: Miércoles 16 de Noviembre, 2022.
Fecha de entrega: Viernes 25 de Noviembre, 2022.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

1.- Objetivo

El objetivo de este laboratorio es estudiar el control de una economía utilizando el Principio del Máximo de Pontryagin y comparar la solución mediante la ecuación de Hamilton-Jacobi.Bellman asociada al problema.

2.- Preliminares

Con el fin de que el lector pueda replicar lo presentado en este informe, el preámbulo necesario es el siguiente:

1. Para correr el código adjunto puede ser necesario instalar las librerías *toolbox* y *control*. Para ello basta con correr el siguiente código:

```
!pip install control
```

Listing 1.1: Instalación de paquetes

2. Los paquetes a utilizar se importan con el siguiente código:

```
import numpy as np
from scipy.integrate import solve_ivp,odeint
from scipy.optimize import minimize,fsolve,root
import control
import matplotlib.pyplot as plt
import seaborn as sb
sb.set_theme(style='darkgrid')
sb.set_palette('dark')
```

Listing 1.2: Carga de paquetes

Para complementar los resultados puede revisar el documento *ipynb* con los códigos utilizados, se encuentra adjunto en la entrega con este informe.

Capítulo 2

Laboratorio

Considere una economía muy simple en la que $x(t)$ representa la producción valorizada al instante $t \geq 0$. Suponemos que se consume una fracción de la producción en cada instante y que podemos reinvertir la fracción restante, denotada por $u(t) \in [0,1]$, para hacer crecer la capacidad productiva. La dinámica viene dada por

$$\dot{x}(t) = x(t)u(t); \qquad x(0) = x_0 > 0,$$

y el consumo instantáneo por $c(t) = (1 - u(t))x(t)$. Se desea maximizar el consumo total en un horizonte de tiempo $T > 1$ fijo.

A partir de la descripción se puede modelar el problema a resolver como:

$$\begin{array}{ll} \max\limits_{u(\cdot)\in[0,1]} & \displaystyle\int_0^{t_f} (1-u(s))x(s)ds; \\ \text{s.a.} & \dot{x}(t) = x(t)u(t),\ x(0) = x_0 > 0. \end{array}$$

Es posible notar que este problema se puede plantear como un problema de minimización de la forma:

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{u(\cdot)\in[0,1]} & \displaystyle\int_0^{t_f} (u(s)-1)x(s)ds; \\ \text{s.a.} & \dot{x}(t) = x(t)u(t),\ x(0) = x_0 > 0. \end{array}$$

Este es un problema de Lagrange, donde (en términos notacionales de un problema de Bolza) se tiene:

$$\begin{array}{rcl} \ell(t,x(t),u(t)) & := & (u(s)-1)x(s); \\ g(e[x_f]) & := & 0. \end{array}$$

El Hamiltoniano viene dado por la función:

$$H(t,x(t),p(t),u(t)) := x(t)\Big(1 + u(t)(p(t)-1)\Big)$$

por lo tanto:

$$\begin{array}{rcl} \dot{x}(t) & := & \dfrac{\partial H}{\partial p}(t,x(t),p(t),u(t)) = x(t)u(t), \\ \dot{p}(t) & := & -\dfrac{\partial H}{\partial x}(t,x(t),p(t),u(t)) = 1 - u(t)(p(t)-1). \end{array}$$

1.- Parte A: Métodos numéricos basados en Pontryaguin

El método de tiro consiste en un método de resolución de problemas de control óptimo, ligado al principio de Pontryagin, el cual consiste en encontrar la condición inicial del estado adjunto p_0 asociado a la trayectoria óptima $x(\cdot)$. En efecto, si $z(\cdot) = (x(\cdot), p(\cdot))$, el principio de Pontryagin se puede reescribir como el sistema acoplado

$$\dot{z}(t) = F(t, z(t)), \qquad z(t_0) = z_0 := (x_0, p_0),$$

donde F queda completamente determinada por el sistema Hamiltoniano, y al cual se le incluye una condición final de la forma $T(z(t_0), z(1)) = 0$ dada por las condiciones de transversalidad. Notando que el valor $z(1)$ depende de $z(t_0) = z_0$, se deine así la función de tiro como $G(t_f, z_0) := R(z_0, z(t_f))$, es decir, para un tiempo final t_f (que para este caso será idénticamente igual a 1) y una condición inicial z_0, se retorna el valor de la condición final asociada al sistema adjunto. El problema a resolver es entonces el de determinar un cero de la función de tiro como función de z_0.

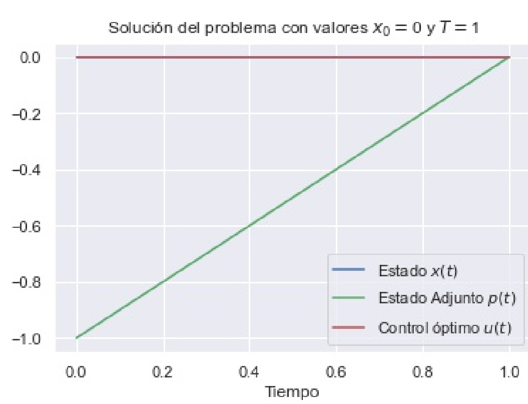
1A.- Ejercicio 1

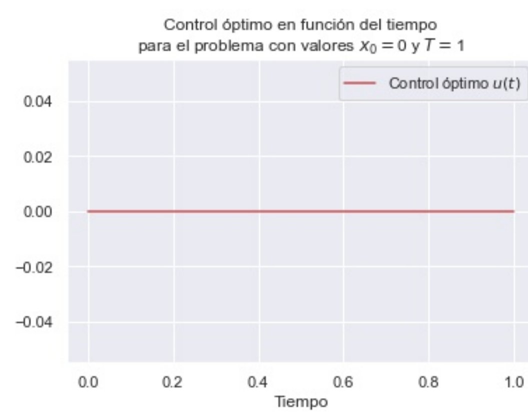
En lo que sigue se implementa un algoritmo que resuelve numéricamente el problema planteado basado en el método de tiro. Se presentan los resultados para distintos valores de T y de x_0.

Solución: Aprovechando las aplicaciones de la librería *scipy*, en particular de *integrate.odeint* y *optimize.root* se implementa una clase de python que realiza el método de tiro para el problema descrito preliminarmente, además de un método graficador con el que se expresan los resultados a presentar más adelante. La clase de python utilizada se adjuntará en la siguiente sección.

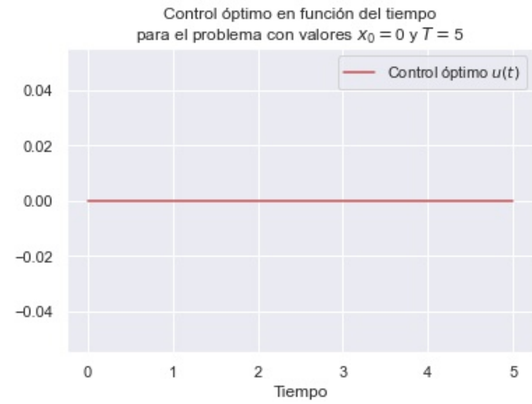
Para diferentes valores del tiempo final T se obtendrá la dinámica de los estados principal y adjunto, además del control óptimo. En particular, para efectos de presentación de resultados se eligen los tiempos $T \in \{1, 5, 10, 100\}$. Los resultados se presentan mediante dos figuras para cada caso, a la izquierda se aprecia la gráfica de los estados principal y adjunto, y el control versus tiempo, a la derecha se presenta la gráfica del control versus tiempo.

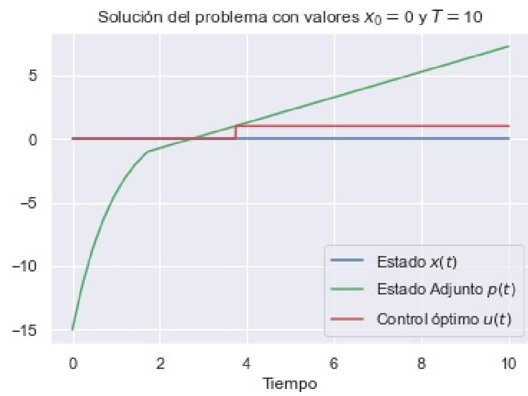
Caso 1: Para $x_0 = 0$ se obtienen los siguientes estados principales y adjuntos que solucionan el problema, junto al control óptimo:

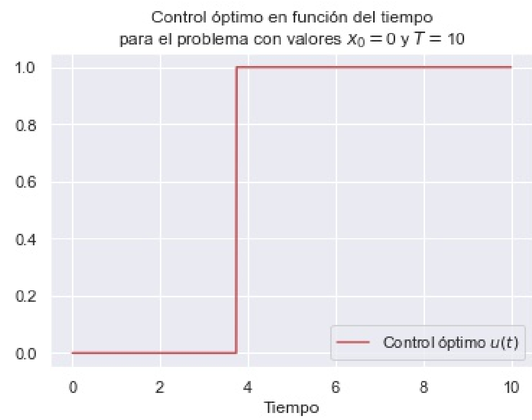


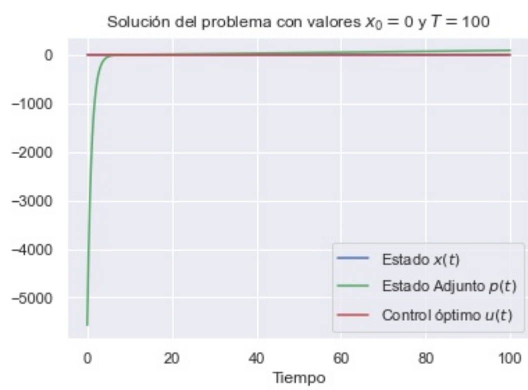


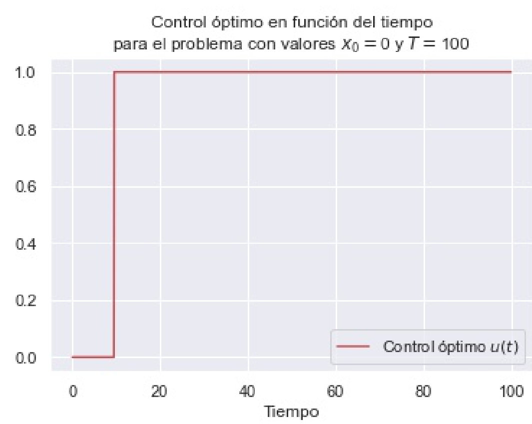

Solución del problema con valores $x_0 = 0$ y $T = 5$
0
−20
−40
−60
−80
−100
−120
−140
−160
0 1 2 3 4 5
Tiempo
Estado $x(t)$
Estado Adjunto $p(t)$
Control óptimo $u(t)$


Control óptimo en función del tiempo
para el problema con valores $x_0 = 0$ y $T = 5$
Control óptimo $u(t)$
0.04
0.02
0.00
−0.02
−0.04
0 1 2 3 4 5
Tiempo

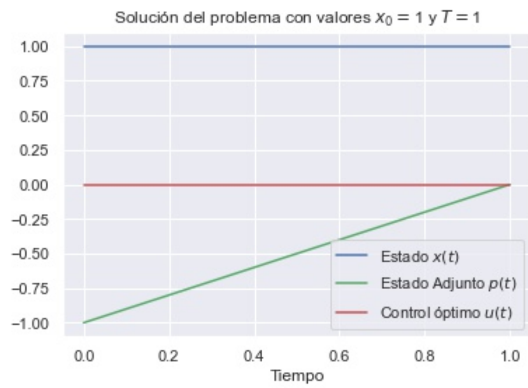

Solución del problema con valores $x_0 = 0$ y $T = 10$
5
0
−5
−10
−15
0 2 4 6 8 10
Tiempo
Estado $x(t)$
Estado Adjunto $p(t)$
Control óptimo $u(t)$

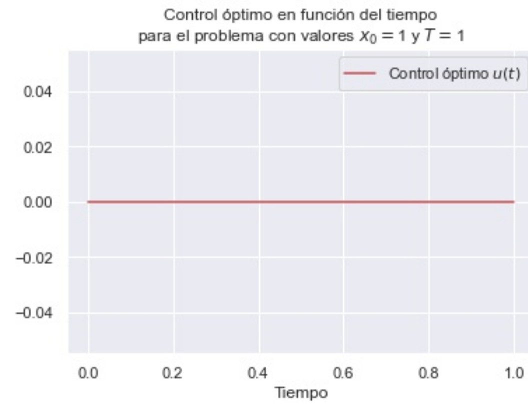

Control óptimo en función del tiempo
para el problema con valores $x_0 = 0$ y $T = 10$
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0 2 4 6 8 10
Tiempo
Control óptimo $u(t)$

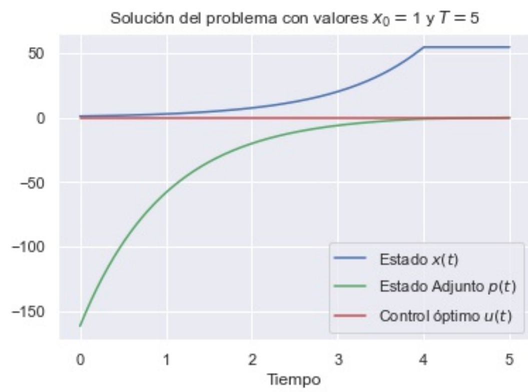

Solución del problema con valores $x_0 = 0$ y $T = 100$
0
−1000
−2000
−3000
−4000
−5000
0 20 40 60 80 100
Tiempo
Estado $x(t)$
Estado Adjunto $p(t)$
Control óptimo $u(t)$

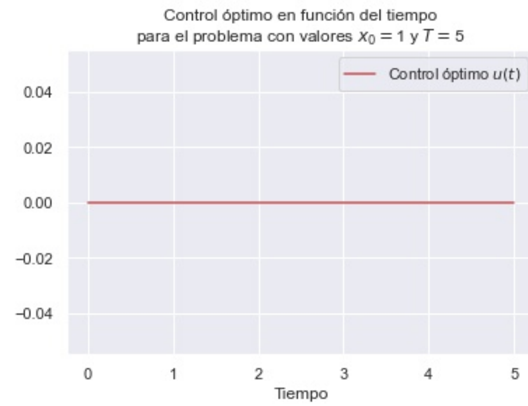

Control óptimo en función del tiempo
para el problema con valores $x_0 = 0$ y $T = 100$
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0 20 40 60 80 100
Tiempo
Control óptimo $u(t)$

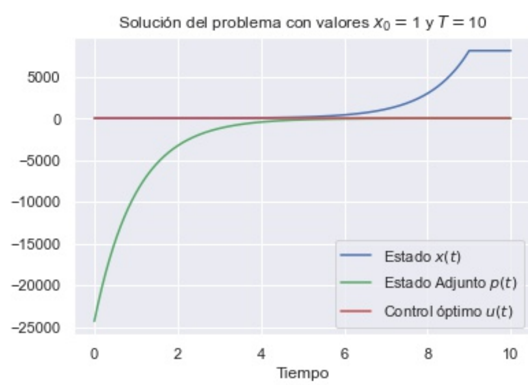
Caso 2: Para $x_0 = 1$ se obtienen los siguientes estados principales y adjuntos que solucionan el problema, junto al control óptimo:

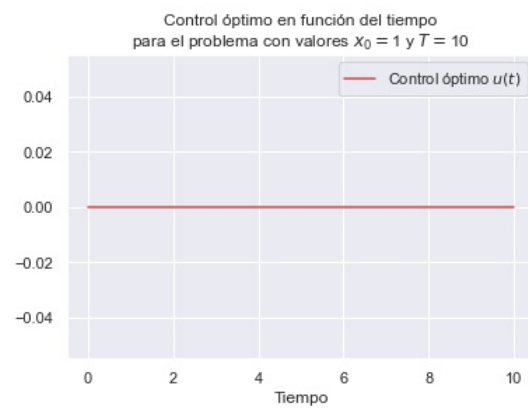


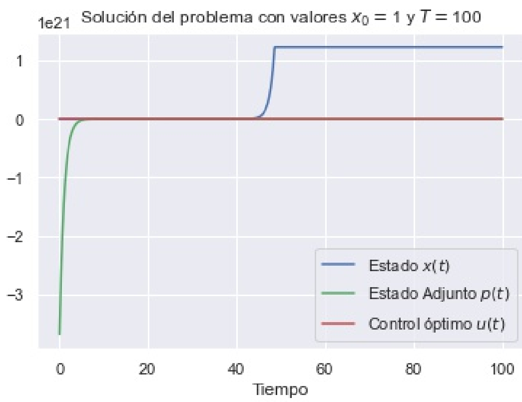


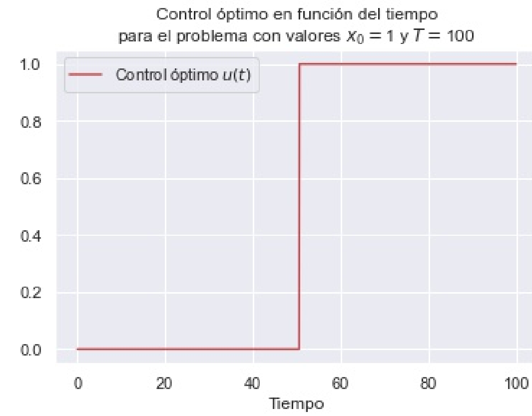




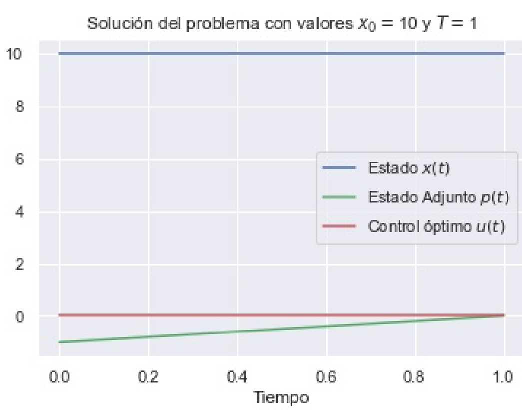


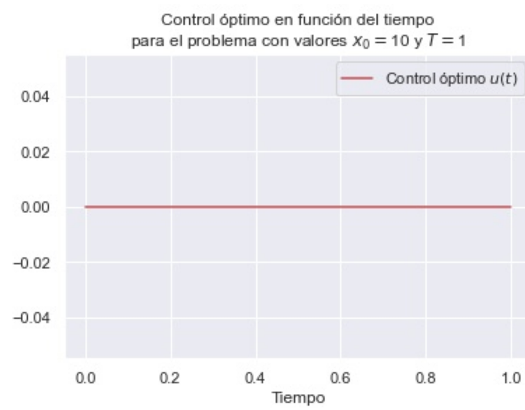


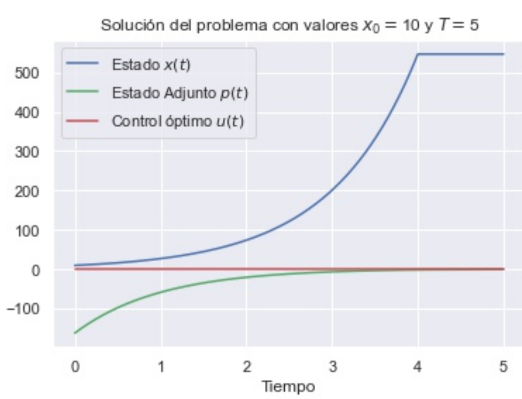


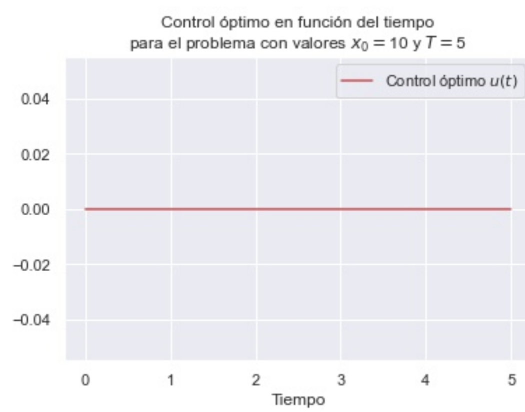


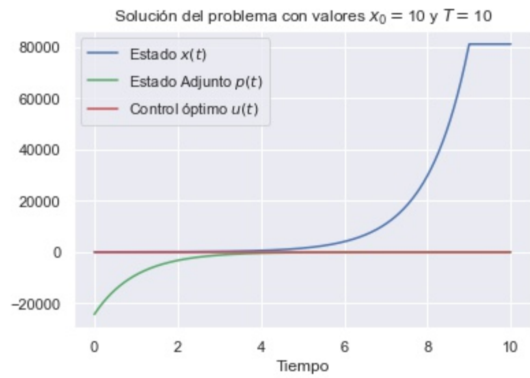
Caso 3: Para $x_0 = 10$ se obtienen los siguientes estados principales y adjuntos que solucionan el problema, junto al control óptimo:

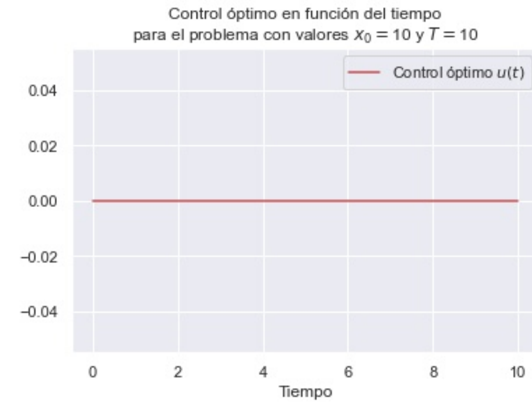


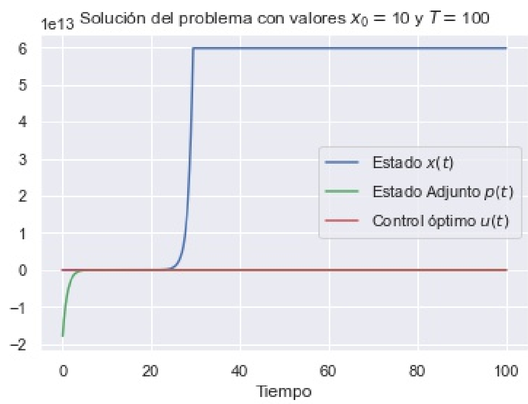


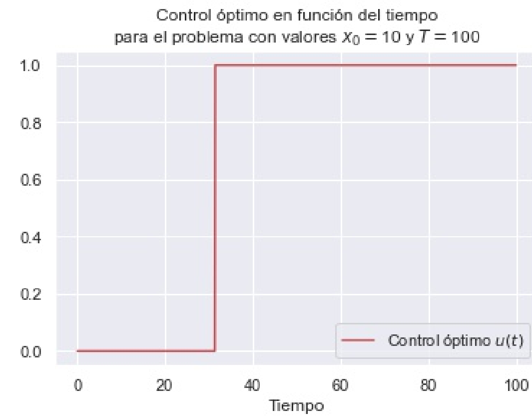












A partir de los resultados numéricos es posible observar que dado un estado inicial x_0, las soluciones obtenidas para el estado $x(\cdot)$, el estado adjunto $p(\cdot)$ y el control óptimo $u(\cdot)$ para distintos valores del tiempo final $T \in \{1, 5, 10, 100\}$, resultan no ser extensiones de las soluciones del problema con un tiempo final menor. Un ejemplo de esto es considerando $x_0 = 0$ y estudiando los tiempos finales $T = 5$ y $T = 10$, en donde control óptimo viene dado por:

$$u(t; x_0 = 0, T = 5) = 0 \qquad \forall t \in [0, 5],$$

y

$$u(t; x_0 = 0, T = 10) = \begin{cases} 0 & t \in [0, 4); \\ 1 & t \in [4, 10], \end{cases}$$

respectivamente, es decir, el control óptimo cuando $T = 10$ no extiende al control óptimo cuando $T = 5$, de igual forma esto ocurre para las funciones estado.

1B.- Clase *problema 1*

A continuación se presenta la clase creada para resolver el problema mediante el *método de tiro*, con el fin de que se puedan replicar los resultados. Es clave que a partir de las condiciones de transversalidad se ha obtenido la función del control óptimo $u(\cdot)$ dada por:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 - p(t) \geq 0; \\ 1 & \text{si } 1 - p(t) < 0. \end{cases}$$

Con el control anterior

```
class Problema_1:
    '''
    Clase que resuelve el problema con el -metodo de tiro- dada una condicion
    inicial para x y un tiempo final T.
    '''
    def __init__(self, x_0, T, N_grid=1000):
        """
        Metodo constructor
        """
        self.x_0 = x_0
        self.T = T
        self.N_grid = N_grid
        self.ts = np.linspace(0, T, N_grid)
    def dinamica(self, X, t):
        """
        Dinamica para cond iniciales fijas
        """
        u = 1 * (1+X[1] < 0)
        return [u*X[0], 1-u*(X[1]-1)]
    def termino(self,cond_inic_p):
        """
        Condicion terminal para el estado adjunto con cierta condicion inicial
        """
        ts = self.ts
        x_0 = self.x_0
        # Probar la dinamica
        P0 = [x_0, cond_inic_p]
        Ps = odeint(self.dinamica, P0, ts)
        return Ps[:,1][-1]
    def plot(self, save=False, name=''):
        """
        Plotear solucion del problema de tiro (estado y estado adjunto),
        y su control optimo respectivo
        """
        # Configuracion libreria seaborn para dise o de la figura
        sb.set_theme(style='darkgrid')
        sb.set_palette('dark')
        # Parametros
        ts = self.ts
        x_0 = self.x_0
        T = self.T
        # Encontrar un 0 en la cond terminal usando optimize.root
        sol = root(self.termino, [0], method='hybr')
        sol_val = sol.x[0]
        # Funciones para graficar usando integrate.odeint para el calculo
```

```
        P0 = [x_0, sol.x[0]]
        Ps = odeint(self.dinamica, P0, ts)
        x_t = Ps[:,0]
        p_t = Ps[:,1]
        u = 1*(1-p_t<0)
        # Grafica de toda los estados y el control en funcion del tiempo
        plt.grid(True)
        plt.plot(ts, x_t, "-b", label="Estado $x(t)$")
        plt.plot(ts, p_t, "-g", label="Estado Adjunto $p(t)$")
        plt.plot(ts, u, "-r", label="Control optimo $u(t)$")
        plt.title('Solucion del problema con valores $x_0 =$'+str(x_0)+ ' y $T =$' + str(T))
        plt.xlabel("Tiempo")
        plt.legend()
        if save:
            plt.savefig(name+'.jpg', bbox_inches='tight')
        plt.show()
        # Grafica solamente el control optimo en funcion del tiempo
        plt.grid(True)
        plt.plot(ts, u, "-r", label="Control optimo $u(t)$")
        plt.title(r'Control optimo en funcion del tiempo'+'\n'+r'para el problema con valores $x_0 =$'+str(x_0)+ ' y $T =$' + str(T))
        plt.xlabel("Tiempo")
        plt.legend()
        if save:
            plt.savefig(name+'control.jpg', bbox_inches='tight')
        plt.show()
```

Listing 2.1: Clase que aplica el método de tiro

2.- Parte B - Estudio de Hamilton-Jacobi-Bellman

La ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman asociada al problema estudiado (de tiempo final fijo), viene dada por

$$\partial_t V(s,y) + y + y \max_{\omega\in[0,1]} \Big\{\omega\Big(\partial_x V(s,y) - 1\Big)\Big\} = 0, \qquad V(T,y) = 0. \tag{2.1}$$

2A.- Ejercicio 2

Considerando la función

$$V(s,y) = \begin{cases} ye^{-s+T-1} & (s,y) \in [0, T-1) \times (0,\infty), \\ y(T-s) & (s,y) \in [T-1, T] \times (0,\infty). \end{cases}$$

Se demuestra computacionalmente que esta función resuelve la Ecuación 2.1. Para ello se realizan simulaciones y se establece un criterio para justificar la solución.

Solución: Para verificar que la función $V(x,y)$ cumple con la Ecuación (2.1) se debe cumplir que para cualquier valor de t e y soluciona la ecuación. Para ello se definen las funciones $\partial_t V(s,y)$, $\partial_x V(s,y)$ y el Hamiltoniano HB numéricamente. Luego, se puede simplificar la ecuación Hamiltoniana, más en concreto, simplificando el ultimo termino

$$\max_{\omega\in[0,1]} \Big\{\omega\Big(\partial_x V(s,y) - 1\Big)\Big\}$$

Se observa que

$$\max_{w\in[0,1]} \Big\{\omega\Big(\partial_x V(s,y) - 1\Big)\Big\} = \begin{cases} \partial_x V(s,y) - 1 & \text{si } \partial_x V(s,y) - 1 \geq 0; \\ 0 & \text{si } \partial_x V(s,y) - 1 \leq 0. \end{cases}$$

Así se obtiene la siguiente definición de la función Hamiltoniana para este problema

$$\text{HB} = \begin{cases} \partial_t V(s,y) + y + y(\partial_x V(s,y) - 1) & \text{si } \partial_x V(s,y) - 1 \geq 0; \\ \partial_x V(s,y) + y & \text{si } \partial_x V(s,y) - 1 \leq 0, \end{cases}$$

El cual se verifica que si el resultado es 0 en HB, entonces $V(x,y)$ es solución de la Ecuación 2.1. Para testear se utilizan los siguientes valores:

- $T = 15$.
- $t \in [0, \dots, 15]$.
- $y \in [2, 4, 6, 8, 10]$.

y el resultado en HB es 0.

Se anexa el script que realiza el cálculo a continuación:

```
def HB(t,y, T):
    g = dVy(t,y,T) - 1
    if g>0:
        H =  dVt(t,y,T) + y +y*g
    else:
        H = dVt(t,y,T) + y
    return H
    resultado=np.zeros((len(t),len(y)))
    for i in range(len(t)):
        for j in range(len(y)):
            resultado[i,j]=HB(t[i],y[j],T)
resultado
```

Listing 2.2: Ejercicio 2

2B.- Ejercicio 3

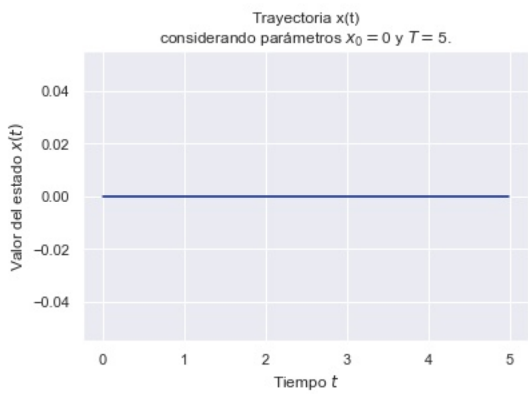
Considerando el control definido por

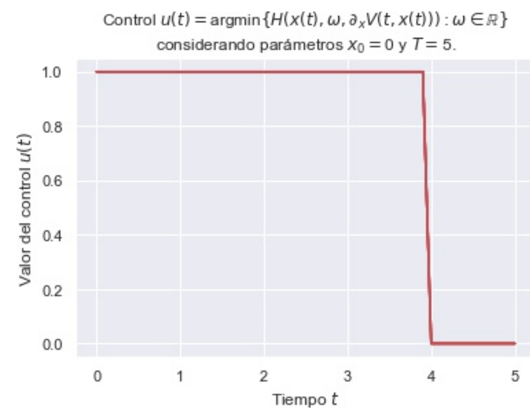
$$u(t) := \underset{\omega \in \mathbb{R}}{\text{argmin}} \Big\{ H\Big(x(t), \omega, \partial_x V(t, x(t))\Big) \Big\} \quad \text{para} \quad t \in [t_0, T]. \tag{2.2}$$

Se resuelve el sistema utilizando este control feedback. Se generan las trayectorias y funciones de costo asociadas. Finalmente se comentan los resultados obtenidos pensando en la materia vista en cátedras.

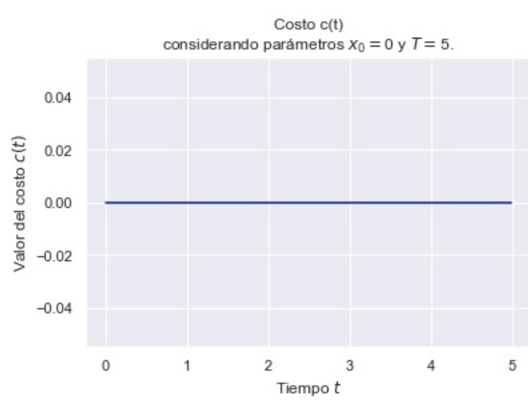
Solución: Utilizando la función de control definida en la Ecuación 2.2 se obtienen los siguientes resultados para distintos valores de estado inicial x_0 y tiempo final T.

- Considerando el estado inicial $x_0 = 0$ y el tiempo final $T = 5$: La dinámica se describe por las funciones de estado (izquierda) y control (derecha) obtenidas en términos del tiempo, cuya gráficas son:

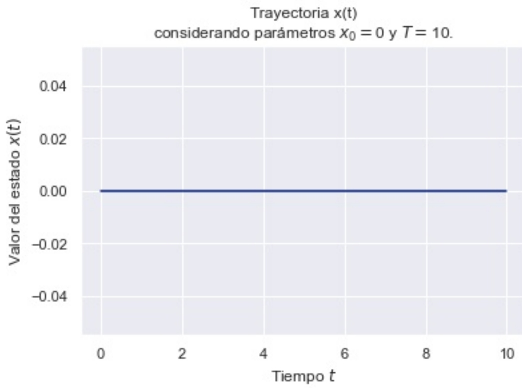


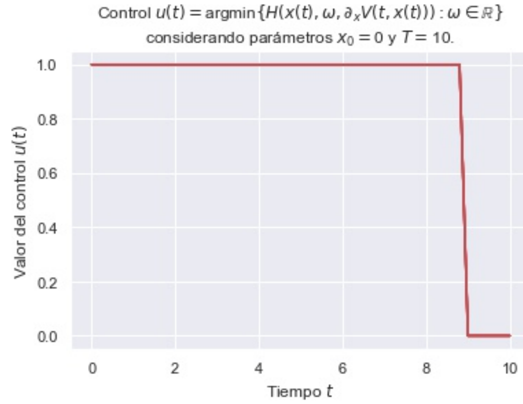


  y el costo obtenido es:

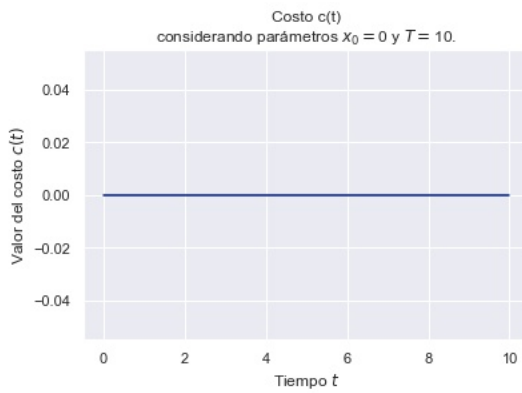


- Considerando el estado inicial $x_0 = 0$ y el tiempo final $T = 10$: La dinámica se describe por las funciones de estado (izquierda) y control (derecha) obtenidas en términos del tiempo, cuya gráficas son:

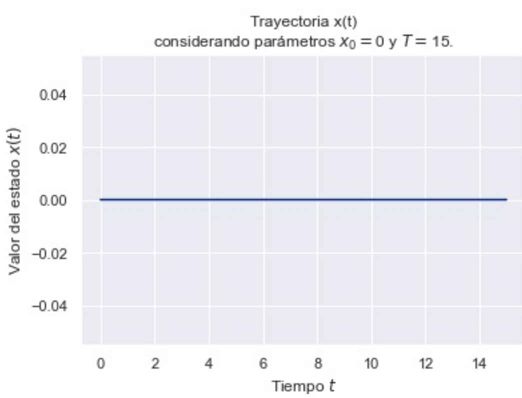


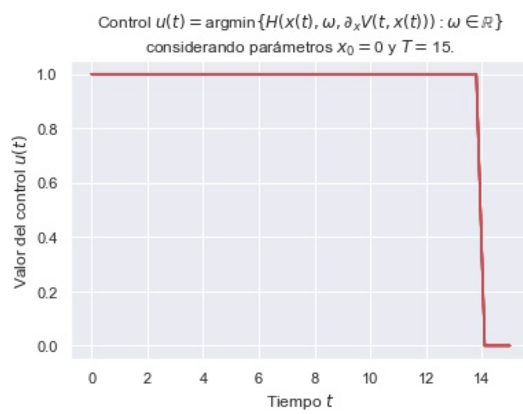


y el costo obtenido es:



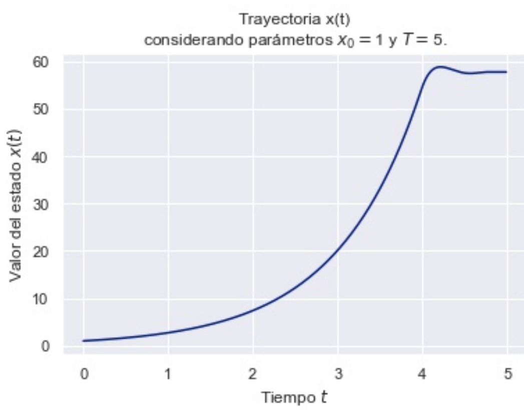
- Considerando el estado inicial $x_0 = 0$ y el tiempo final $T = 15$: La dinámica se describe por las funciones de estado (izquierda) y control (derecha) obtenidas en términos del tiempo, cuya gráficas son:

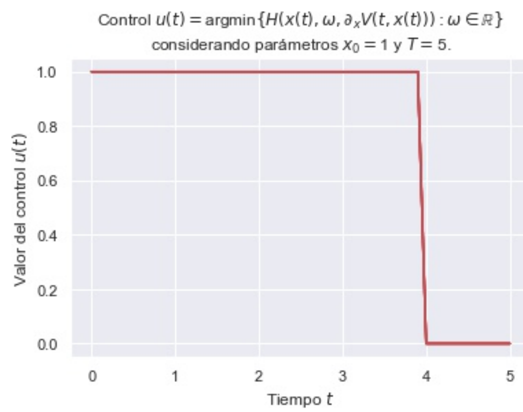




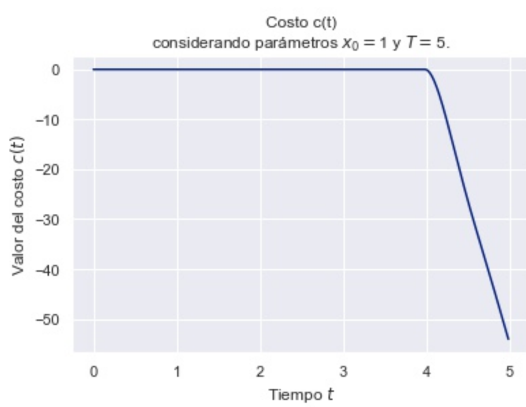
y el costo obtenido es:

- Considerando el estado inicial $x_0 = 1$ y el tiempo final $T = 5$: La dinámica se describe por las funciones de estado (izquierda) y control (derecha) obtenidas en términos del tiempo, cuya gráficas son:

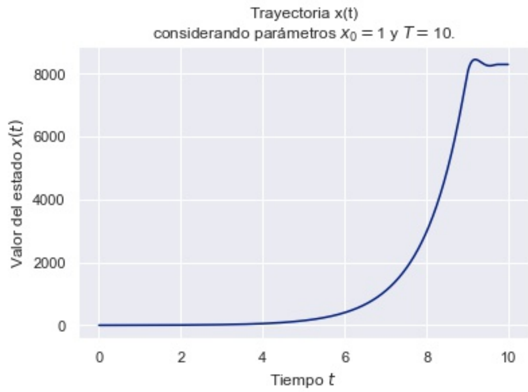


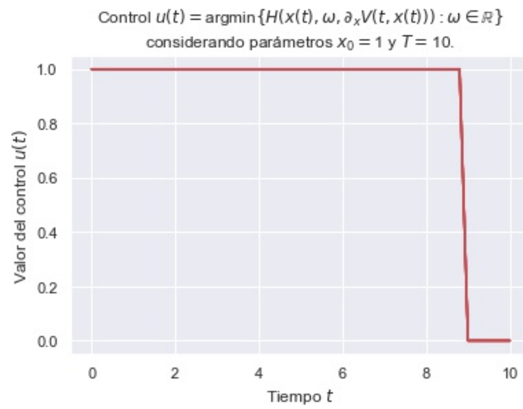


y el costo obtenido es:

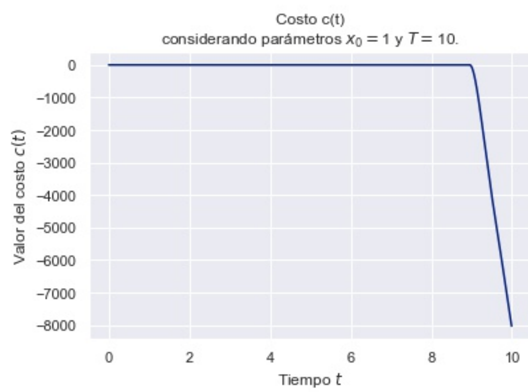


- Considerando el estado inicial $x_0 = 1$ y el tiempo final $T = 10$: La dinámica se describe por las funciones de estado (izquierda) y control (derecha) obtenidas en términos del tiempo, cuya gráficas son:

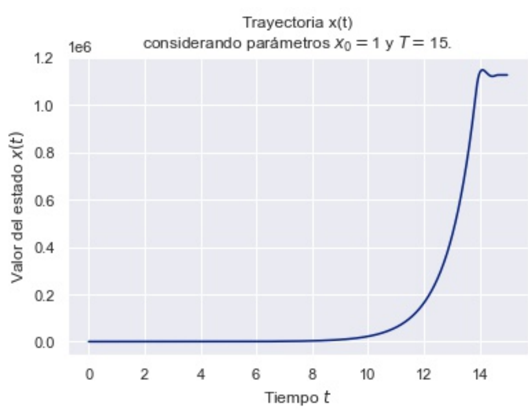


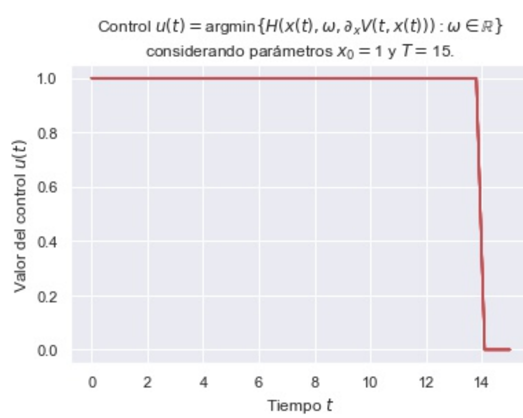


y el costo obtenido es:

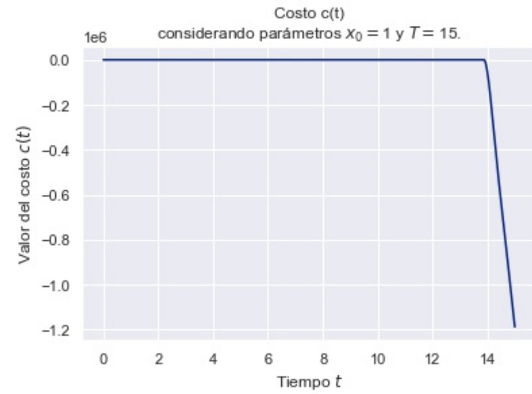


- Considerando el estado inicial $x_0 = 1$ y el tiempo final $T = 15$: La dinámica se describe por las funciones de estado (izquierda) y control (derecha) obtenidas en términos del tiempo, cuya gráficas son:





y el costo obtenido es:

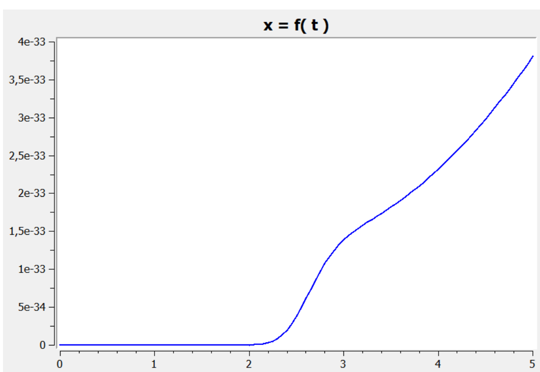


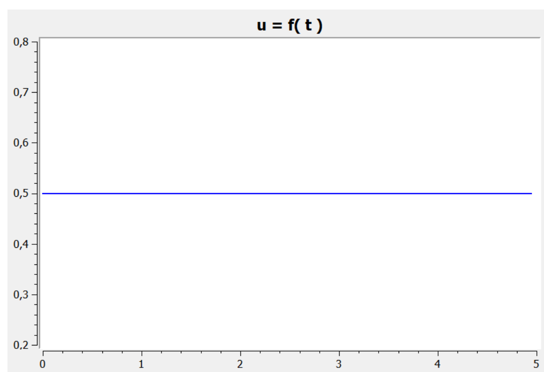
2C.- Ejercicio 4

Se resuelve el problema mediante el uso de BOCOP. A continuación se presentan los resultados.

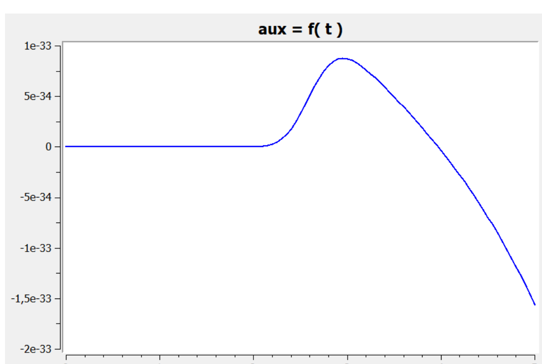
Solución: Se han obtenido las siguientes soluciones utilizando los valores:

- Considerando el estado inicial $x_0 = 0$ y el tiempo final $T = 5$: La dinámica se describe por las funciones de estado (izquierda) y control (derecha) obtenidas en términos del tiempo, cuya gráficas son

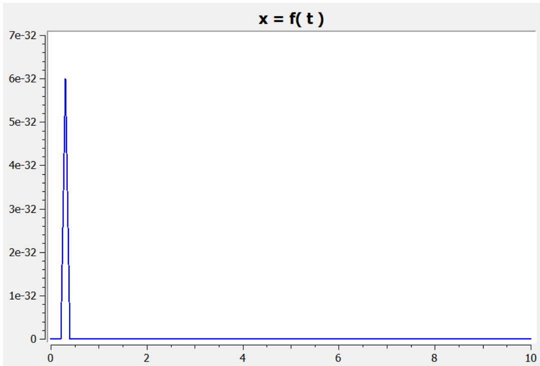


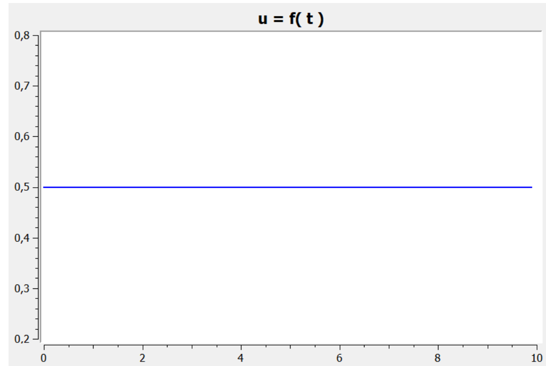


a su vez la función de costos en función del tiempo es:

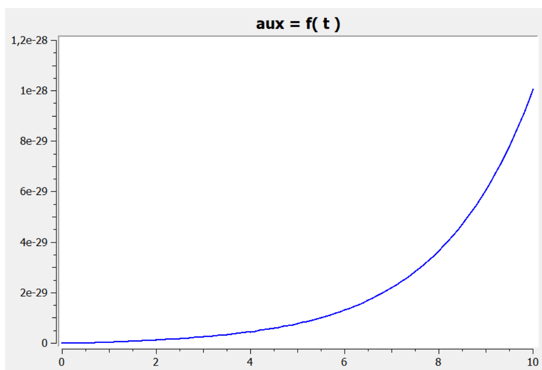


- Considerando el estado inicial $x_0 = 0$ y el tiempo final $T = 10$: La dinámica se describe por las funciones de estado (izquierda) y control (derecha) obtenidas en términos del tiempo, cuya gráficas son

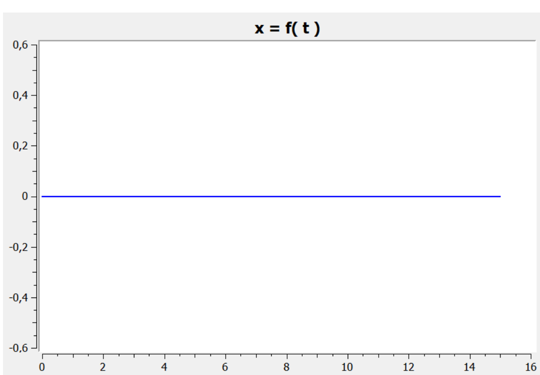


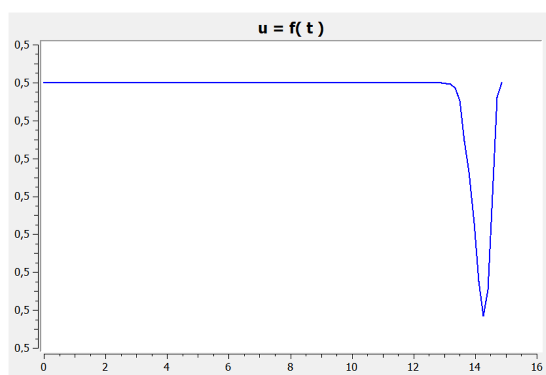


a su vez la función de costos en función del tiempo es:

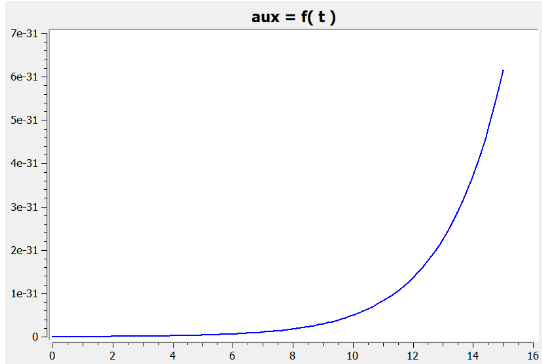


- Considerando el estado inicial $x_0 = 0$ y el tiempo final $T = 15$: La dinámica se describe por las funciones de estado (izquierda) y control (derecha) obtenidas en términos del tiempo, cuya gráficas son



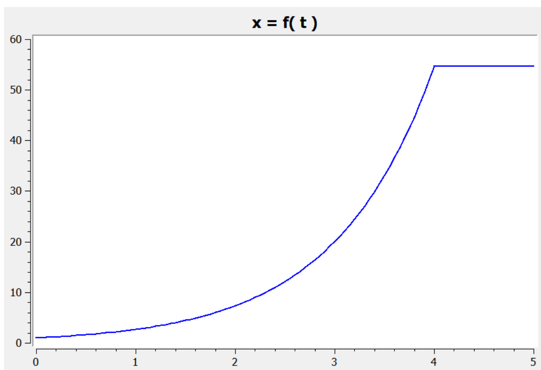


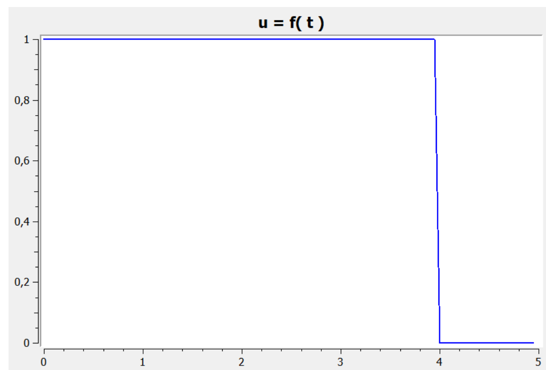
a su vez la función de costos en función del tiempo es:



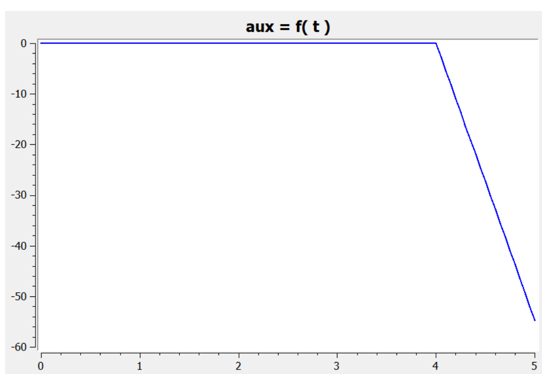
. . . .

- Considerando el estado inicial $x_0 = 1$ y el tiempo final $T = 5$: La dinámica se describe por las funciones de estado (izquierda) y control (derecha) obtenidas en términos del tiempo, cuya gráficas son

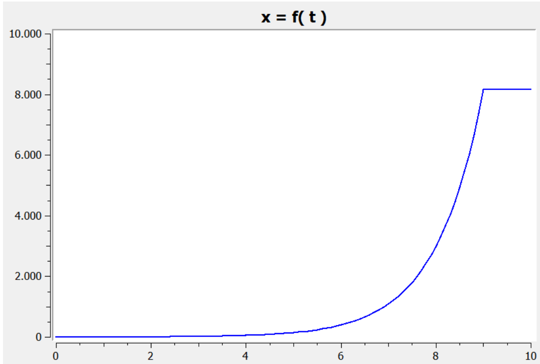


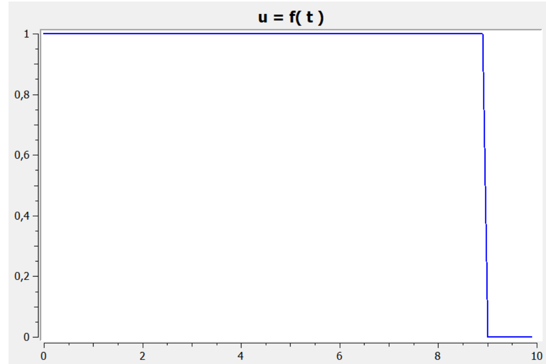


a su vez la función de costos en función del tiempo es:

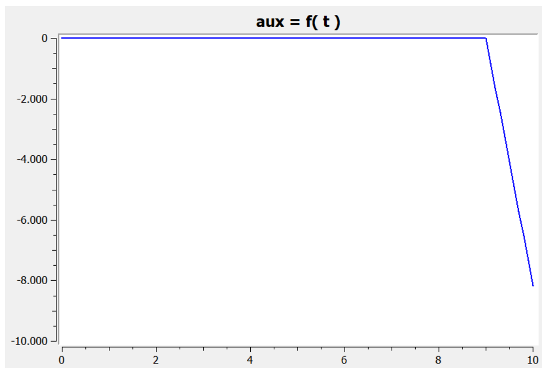


- Considerando el estado inicial $x_0 = 1$ y el tiempo final $T = 10$: La dinámica se describe por las funciones de estado (izquierda) y control (derecha) obtenidas en términos del tiempo, cuya gráficas son

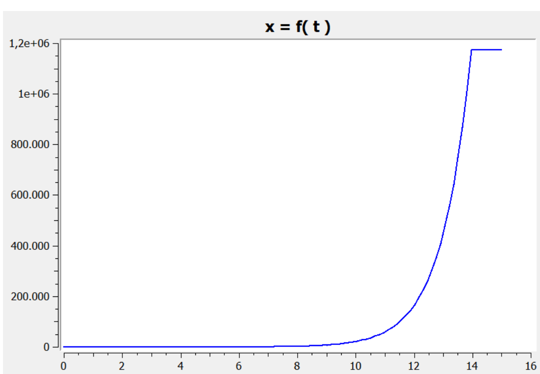


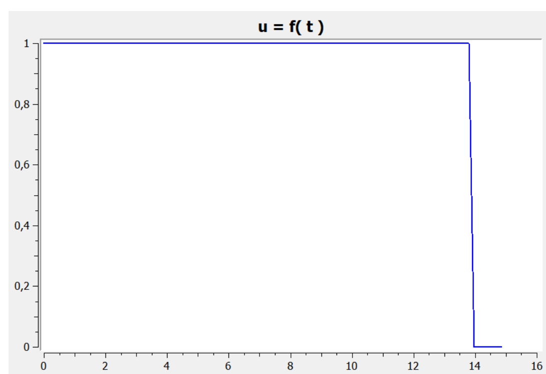


a su vez la función de costos en función del tiempo es:

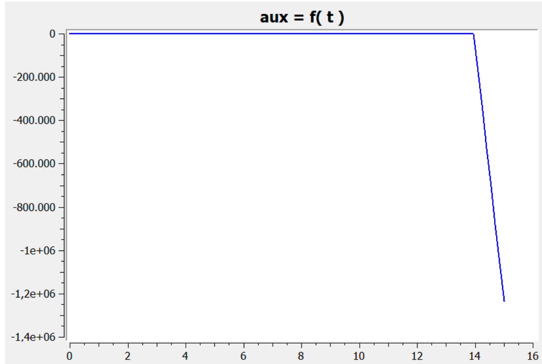


- Considerando el estado inicial $x_0 = 1$ y el tiempo final $T = 15$: La dinámica se describe por las funciones de estado (izquierda) y control (derecha) obtenidas en términos del tiempo, cuya gráficas son





a su vez la función de costos en función del tiempo es:



2D.- Ejercicio 5

Se compara la solución dada por los tres métodos, tanto en el control encontrado, las trayectorias, y el tiempo de ejecución.

Solución: Comparando los casos en que $x_0 \in \{0, 1\}$ y $T\{5, 10\}$ que han sido estudiados con los 3 métodos en los ejercicios 1, 3 y 4 antes presentados. Es posible notar la obtención de resultados similares en cada caso mencionado.