
MA4703 Control Óptimo: Teoría y Laboratorio
Informe de Proyecto
Control Óptimo en un Proceso de Arrastre
con Conjunto Móvil Poliedral

Autores: Axel Álvarez, Axel Kolm, Manuel Torres.
Profesor: Héctor Ramírez.
Auxiliar: Javier Madariaga, Pablo Araya.
Fecha de entrega: Jueves 01 de Diciembre, 2022.

Índice general

1. Introducción	2
1. Objetivos del proyecto	2
2. Teoría matemática	4
1. Dinámica de primer orden	4
2. Dinámica de primer orden controlada	7
3. Modelamiento e implementación numérica	9
1. Modelos	9
2. Resultados de (<i>PCO</i>) mediante BOCOP	10
3. Esquema numérico	14
3.1. Catching-up	14
4. Conclusiones	15

Capítulo 1

Introducción

La gestión óptima de los sistemas de múltiples embalses a lo largo de un río naturalmente es un problema de interés a gestionar. Aquí se considerará un modelo simplificado para una central hidroeléctrica con una turbina reversible. La presencia de la turbina reversible permite bombear agua desde un reservorio aguas abajo a un reservorio aguas arriba para ser reutilizada posteriormente.

El objetivo es encontrar los caudales de agua a la turbina o la bomba y el volumen correspondiente en el embalse maximizando el beneficio de venta de la energía producida en el sistema. También se incluye una variable asociada a lo que habitualmente se denomina aliviadero que permite verter el agua sobrante que puede ser utilizada, por ejemplo, para riego. Es importante señalar que el derrame solo se produce cuando el nivel del agua alcanza el límite del embalse. El problema de control óptimo que modela esto es el siguiente:

$$(ASP) \left\{ \begin{array}{l} \min_{u(\cdot) \in \mathcal{A}} - \int_0^T c(t)u(t) \left(\frac{V(t)}{S} + H \right) dt + K(V(T) - V_0)^2, \\ \text{s.a. } \dot{V}(t) = A - u(t) - v(t), \\ V(0) = V_0, \\ V(t) \leq V^M, \\ u(t) \in [u^m, u^M], \\ v(t) \geq 0, \\ v(t) = 0 \text{ si } V(t) < V^M. \end{array} \right.$$

en donde, K, V^M, V_0, S, H denota constantes positivas. Para estudiar el problema (ASP) se introducirá un elemento esencial conocido como *proceso de arrastre*.

1.- Objetivos del proyecto

Los objetivos se dividen en dos categorías: Los resultados teóricos de existencia de soluciones y los resultados numéricos y de modelamiento. Los objetivos son:

1. Teoría matemática:

- Estudiar y formular las propiedades generales del proceso de arrastre a partir del estudio de los problemas clásicos.
- Estudiar la teoría de existencia de soluciones para un problema de control óptimo a tiempo fijo en un proceso de arrastre (E_u).

2. Modelamiento e implementación numérica:

- Modelar el problema (ASP) como un problema de proceso de arrastre.
- Obtener una solución numérica (\hat{V}, \hat{u}) para un problema del tipo (ASP).

Capítulo 2

Teoría matemática

1.- Dinámica de primer orden

En lo que sigue, se considerará como H un espacio de Hilbert y una función $z : [0, +\infty) \rightarrow H$ que describe una trayectoria, se conocen los siguientes sistemas con condiciones iniciales:

1. Ecuación diferencial de primer orden: Considere z diferenciable tal que $z'(t) = f(t, z(t))$ con condición inicial $z(0) = z_0 \in H$.

Ejemplo. Sea $z \in C^1([0, +\infty))$ una función que describe una trayectoria. Buscar $\bar{t} \in [0, +\infty)$ tal que $0 = z'(\bar{t}) = f(\bar{t}, z(\bar{t}))$ describe un problema usual de las aplicaciones de cálculo, que resulta ser la regla de Fermat del diferencial.

2. Inclusión diferencial de primer orden: Sea $F(\cdot, z(\cdot)) : [t_0, t_f] \rightrightarrows H$ una multifunción. Considere z con la regularidad adecuada tal que se puede formular $z'(t) \in F(t, z(t))$ con condición inicial $z(0) = z_0 \in H$.

Ejemplo. Sea z una función convexa s.c.i., considerando en el ejemplo anterior $F(t, z(t)) := \partial z(t)$ (el subdiferencial convexo). Buscar $\bar{t} \in [0, +\infty)$ tal que $0 = z'(\bar{t}) \in \partial z(\bar{t})$. Permite debilitar la regularidad de z a un caso en que la función z es no diferenciable y formular la idea de la regla de Fermat para el subdiferencial convexo, donde $z'(t)$ es un subgradiente de z .

3. Inclusión diferencial de primer orden con traslación: Generalizando (2) considere $z'(t) \in f(t, z(t)) + F(t, z(t))$ con condición inicial $z(0) = z_0 \in H$.

El proceso de arrastre resulta ser una dinámica del tipo (3) como se enuncia a continuación:

Definición 1 (Proceso de arrastre). Se llama proceso de arrastre a la siguiente dinámica: Sea $C : [t_0, t_f] \rightrightarrows H$ con $t_f > t_0$ un conjunto evaluado (i.e., el conjunto evoluciona en función de $t \in [t_0, t_f]$, también conocido como multifunción). Considere la inclusión diferencial con

condición inicial:

$$(E_f) \begin{cases} \dot{z}(t) \in f(t, z(t)) - N_{C(t)}(z(t)) \\ z(t_0) = a \in C(t_0) \subseteq H. \end{cases}$$

donde $f : [t_0, t_f] \times H \rightarrow H$ es una función Bochner-medible con respecto a la variable temporal, Lipschitz con respecto a la variable que toma valores en H . Además, $N_{C(t)}(\cdot)$ corresponde al cono normal básico del conjunto cerrado $C(t)$.

Una necesidad a partir de que $C : [t_0, t_f] \rightrightarrows H$ evolucione temporalmente es introducir una métrica para determinar la distancia recorrida en una diferencia de tiempo $t - s > 0$ para $t, s \in [t_0, t_f]$, para ello se hará uso de la distancia de Hausdorff definida a continuación.

Definición 2 (Distancia de Hausdorff). Se define la distancia de Hausdorff $(A, B) \mapsto d_H(A, B)$ como la función que viene dada por (cualquiera de las siguientes caracterizaciones):

$$\begin{aligned} d_H(A, B) &= \inf\{\rho \geq 0 \mid A \subseteq B + \rho\mathbb{B}, B \subseteq A + \rho\mathbb{B}\} \\ &= \sup_{x \in H} |d_A(x) - d_B(x)| \\ &= \max\{\text{exceso}(A, B); \text{exceso}(B, A)\}, \end{aligned}$$

donde $\text{exceso}(A, B) := \sup_{x \in A} d_B(x)$.

Ejemplo. A partir de (E_f) considerando $C(t) := \{z(t)\}$ para $t \in [t_0, t_f]$, luego

$$d_H(C(t), C(s)) = \sup_{x \in H} |||x - z(t)|| - ||x - z(s)||| = \|z(t) - z(s)\|.$$

De lo anterior se tiene que si para $t, s \in [t_0, t_f]$, existe $k > 0$ tal que $\|z(t) - z(s)\| \leq k|t - s|$, entonces $d_H(C(t), C(s)) \leq k|t - s|$, es decir, que $z(\cdot)$ sea Lipschitz es condición suficiente para que $C(t)$ se mueva de forma Lipschitziana según la definición dada.

El rol de $C(t)$ es clave para describir las soluciones de (E_f) , pues la técnica para demostrar la existencia y unicidad de soluciones de (E_f) reside en aprovechar las propiedades geométricas de $C(t)$ a lo largo de $t \in [t_0, t_f]$, y de caracterizar la continuidad de su evolución temporal.

Definición 3 (ρ -prox-regularidad/convexidad débil de un conjunto). El conjunto cerrado S es ρ -prox-regular cuando todo punto x en la ρ -ampliación abierta de S (definida como el conjunto)

$$U_\rho(S) := \{u \in H : d_S(u) < \rho\},$$

si tiene un único punto más cercano $\text{proj}_S(x)$ en S y la función proj_S es continua sobre $U_\rho(S)$.

Definición 4 (Lipschitzianeidad de una multifunción). Sean T_0, T dos números reales no negativos tales que $T_0 < T$, y para $t \in [T_0, T]$, sea $C(t)$ un conjunto ρ -prox-regular cerrado y no vacío en un espacio de Hilbert H . Se dice que el cerrado $C(t)$ se mueve de forma Lipschitziana

con respecto a $t \in [T_0, T]$ cuando existe una constante $\gamma > 0$ tal que para todo $x \in H$

$$|d_H(x, C(t)) - d_H(x, C(s))| \leq \gamma|t - s|,$$

para todo $s, t \in [T_0, T]$, donde d_H es la *distancia de Hausdorff*.

Notar que $S \subseteq H$ es convexo si para todo $\rho > 0$ resulta ser un conjunto ρ -prox-regular. Algunos problemas particulares estudiados con profundidad en la literatura son:

1. Cuando $C(t)$ es un conjunto convexo para $t \in [t_0, t_f]$ y $f = 0$, se ha demostrado existencia y unicidad para la solución del problema

$$(E_0) \begin{cases} \dot{z}(t) \in -N_{C(t)}(z(t)) \\ z(t_0) = a \in C(t_0). \end{cases}$$

mediante el algoritmo de catching-up (particionando el intervalo $[t_0, t_f]$). Puede revisar:

- a) La existencia y unicidad en [Mor71].
 - b) La evolución de conjuntos convexos como multifunción en [Mor77].
2. Cuando $C(t)$ es un conjunto prox-regular para $t \in [t_0, t_f]$ con trayectoria Lipschitziana y $f = 0$, se ha demostrado que se puede regularizar (E_0) para obtener la ecuación diferencial

$$(E_{0,\lambda}) \begin{cases} \dot{z}_\lambda(t) = -\frac{1}{2\lambda} \nabla d_{C(t)}^2(z_\lambda(t)) \\ z_\lambda(t_0) = a \in C(t_0). \end{cases}$$

donde $z_\lambda \xrightarrow[\lambda \rightarrow 0^+]{\|\cdot\|_\infty} z$, con z solución de (E_0) . Puede estudiar esto en [Thi08].

3. Cuando $C(t) = K$ (osea $C(t)$ es constante para $t \in [t_0, t_f]$) donde K es un conjunto prox-regular y f una función arbitraria, para el problema:

$$(E_f^{\text{fix}}) \begin{cases} \dot{z}(t) \in f(t, z(t)) - N_K(z(t)) \\ u(t_0) = a \in K, \end{cases}$$

se ha demostrado que se puede regularizar para obtener la ecuación diferencial

$$(E_{f,\lambda}^{\text{fix}}) \begin{cases} \dot{z}_\lambda(t) = f(t, z_\lambda(t)) - \frac{1}{2\lambda} \nabla d_K^2(z_\lambda(t)) \\ z_\lambda(t_0) = a \in K, \end{cases}$$

donde $z_\lambda \xrightarrow[\lambda \rightarrow 0^+]{\|\cdot\|_\infty} z$, con z solución de (E_f^{fix}) . Puede estudiar esto en [MT13].

En el artículo [ST14] se establece un resultado de existencia y unicidad de una solución para un proceso de arrastre considerando una clase de conjuntos móviles mucho más general que la de interés al contexto del problema de este proyecto (para conjuntos ρ -prox-regulares para $\rho > 0$ fijo), a continuación se enunciará este hecho.

Teorema 1 (Existencia y unicidad inclusión no controlada). Sea $C(t)$ un conjunto ρ -prox-regular cerrado y no vacío para todo $t \in [T_0, T]$ en un espacio de Hilbert H , y con movimiento Lipschitziano en términos de t con constante γ . Sea $a \in C(T_0)$ y sea $f : [T_0, T] \times B\left(a, \frac{\rho}{r}\right) \rightarrow H$ es una función Bochner-medible con respecto a $t \in [T_0, T]$ y tal que :

1. Existe un real $\beta > 0$ tal que, para todo $t \in [T_0, T]$ y $x \in B\left(a, \frac{\rho}{3}\right)$,

$$\|f(t, x)\| \leq \beta.$$

2. Existe un número real no negativo k tal que para todo $t \in [T_0, T]$ y para todo $(x, y) \in B\left(a, \frac{\rho}{3}\right) \times B\left(a, \frac{\rho}{3}\right)$,

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq k\|x - y\|.$$

Sea $\theta > 0$ tal que $\theta < \frac{\rho}{3(2\beta+\gamma)}$ y sea $\lambda_\rho := \frac{\rho}{\beta+\gamma}$. Bajo los supuestos anteriores, para todo $\lambda \in (0, \lambda_\rho)$, la ecuación diferencial sobre $[T_0, T_0 + \theta] \times B\left(a, \frac{\rho}{r}\right)$

$$\begin{cases} \dot{u}_\lambda(t) = \frac{-1}{2\lambda} d_{C(t)}^2(u_\lambda(t)) - f(t, u_\lambda(t)) \\ u_\lambda(T_0) = a. \end{cases}$$

es bien definida y posee una única solución u_λ sobre $[T_0, T_0 + \theta]$, y la familia $(u_\lambda)_{0 < \lambda < \lambda_\rho}$ converge uniformemente sobre $[T_0, T_0 + \theta]$ cuando $\lambda \searrow 0$ a la solución de (E_f) . Además, esta solución (límite) es sobre $B\left(a, \frac{\rho}{3}\right)$ y la solución dentro de esta bola es única.

Si la función f es definida sobre $[T_0, T] \times H$ y satisface las hipótesis (1) y (2) para todo $t \in [T_0, T]$ y todo $x, y \in H$, entonces dividiendo $[T_0, T]$ es un número finito de intervalos con largo menor o igual a θ , entonces existe una única solución $u(\cdot)$ de (E) sobre $[T_0, T]$. Más aún, $\|\dot{u}(t)\| \leq 2\beta + \gamma$ para todo $t \in [T_0, T]$.

La demostración de este teorema se realiza mediante una técnica conocida en la literatura como *regularización de Moreau-Yosida* (ver [Mor77], [ST14]). Esta técnica permitirá obtener un resultado similar para el caso en que se añada un control a la dinámica.

2.- Dinámica de primer orden controlada

A continuación se estudiará un problema del tipo Mayer con tiempo final fijo dado por:

$$(P) \begin{cases} \min_{u \in \mathcal{A}} \phi(x(t_f)) \\ z'(t) \in f(t, z(t), u(t)) - N_{C(t)}(z(t)), \text{ c.t.p. } t \in [t_0, t_f], \\ x(0) \in C(0) \subseteq C, \\ u(t) \in U, \text{ c.t.p. } t \in [t_0, t_f], \end{cases}$$

donde $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f : [0, 1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $U \subseteq \mathbb{R}^m$, $C(0) \subseteq \mathbb{R}^n$, y $C := \{z \in \mathbb{R}^n : \psi(z) \leq 0\}$ para alguna función $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ con $\psi(0) < 0$. Se dirá que (z, u) es un proceso admisible para (P) cuando z es una función absolutamente continua y u es una función medible que satisfacen las restricciones de (P) . En este trabajo se citarán los siguientes supuestos sobre (P) :

(H1) La función f es $\mathcal{L} \times \mathcal{B} \times \mathcal{B}$ -medible, $(z, u) \mapsto f(t, z, u)$ es continua para todo $t \in [t_0, t_f]$, $z \mapsto f(t, z, u)$ es continuamente diferenciable para todo $(t, u) \in [t_0, t_f] \times \mathbb{R}^m$ y existe $M > 0$ tal que $|f(t, z, u)| \leq M$ y $|\nabla_z f(t, z, u)| \leq M$ para todo $(t, z, u) \in [t_0, t_f] \times \mathbb{R}^n \times U$.

(H2) Para cada (t, z) , el conjunto $f(t, z, U)$ es un convexo cerrado.

(H3) La función ψ que define C es una función convexa de clase C^2 . Más aún, existe una constante $\eta > 0$ tal que satisface las siguientes condiciones:

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \psi(z) = +\infty,$$

y

$$(\forall z \in \partial C), |\nabla \psi(z)| > 2\eta.$$

(H4) El conjunto U es compacto.

(H5) El conjunto $C(0)$ es cerrado y $C(0) \subset C$.

(H6) Existe una constante L_ϕ tal que $|\phi(z) - \phi(z')| \leq L_\phi |z - z'|$ para todo $z, z' \in C$.

En el artículo [ddPFS19] establecen que bajo (H1)-(H6) se obtiene un resultado de existencia y unicidad del par admisible (z, u) , y con ello (P) posee solución.

Teorema 2. Bajo los supuestos (H1)-(H6) el problema (P) posee solución admisible, entonces (P) admite solución.

En este proyecto se estudiará la existencia de una solución y condiciones necesarias para minimizadores globales en la forma de un principio del máximo para un problema de control óptimo con tiempo fijo, la dinámica a estudiar es de la forma:

$$(E_z) \begin{cases} \dot{z}(t) \in f(t, z(t), u(t)) - N_{C(t)}(z(t)), \\ x(0) \in C(0), t \in [0, 1], u(t) \in U. \end{cases}$$

donde $C := \{x \in \mathbb{R}^n : \psi(x) \leq 0\}$, para ψ una función convexa suave (ver [ddPFS19]). En particular, es de interés estudiar el caso en que C es un conjunto poliedral (ver [CCMN21], [CHNM16]) con el fin de obtener resultados numéricos.

Capítulo 3

Modelamiento e implementación numérica

1.- Modelos

En lo que sigue se presenta una inclusión diferencial de primer orden tal que: Sea z una función Lipschitz que describirá la trayectoria; considerando una función $f(t, z(t))$ medible y Lipschitz para el primer y segundo argumento respectivamente; considerando un conjunto móvil $C(t)$ convexo compacto, se define $-F(t, z(t)) = \partial i_{C(t)}(z(t)) = N_{C(t)}(z(t))$. Bajo las funciones anteriores, el proceso de arrastre es una dinámica de la forma:

$$\begin{aligned} z'(t) &\in f(t, z(t)) - N_{C(t)}(z(t)), \\ z(0) &= z_0. \end{aligned}$$

El problema de control óptimo a resolver es (PCO) , en donde, K, V^M, V_0, S, H denota constantes positivas, y las funciones tienen la regularidad adecuada (ver propuesta de proyecto). El problema (PCO) se puede reformular como un problema sujeto a un proceso de arrastre $(PCOID)$ (ver [ddPFS19]), cuyas formas son:

1. Problema de control óptimo:

$$(PCO) \left\{ \begin{array}{l} \text{mín} \quad - \int_0^T c(t)u(t) \left(\frac{V(t)}{S} + H \right) dt + K(V(T) - V_0)^2, \\ \text{s.a.} \quad \dot{V}(t) = A - u(t) - v(t), \\ \quad V(0) = V_0, \\ \quad V(t) \leq V^M, \\ \quad u(t) \in [u^m, u^M], \\ \quad v(t) \geq 0, \\ \quad v(t) = 0 \text{ si } V(t) < V^M. \end{array} \right.$$

2. Problema de control óptimo con inclusión diferencial:

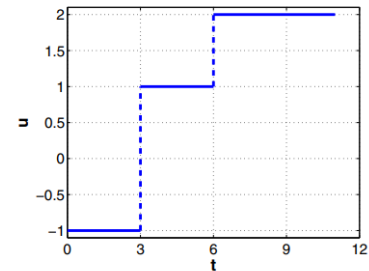
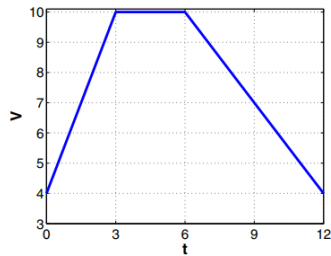
$$(PCOID) \left\{ \begin{array}{l} \text{mín} \quad I(T) + K(V(T) - V_0)^2, \\ \text{s.a.} \quad \begin{pmatrix} \dot{V}(t) \\ \dot{I}(t) \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} A - u(t) \\ -c(t)u(t) \left(\frac{V(t)}{S} + H \right) \end{pmatrix} - N_C(V(t), I(t)), \\ \quad V(0) = V_0, \\ \quad I(0) = 0, \\ \quad u(t) \in [u^m, u^M]. \end{array} \right.$$

en donde $C := \{(V, I) : V \leq V^M\}$.

2.- Resultados de (*PCO*) mediante BOCOP

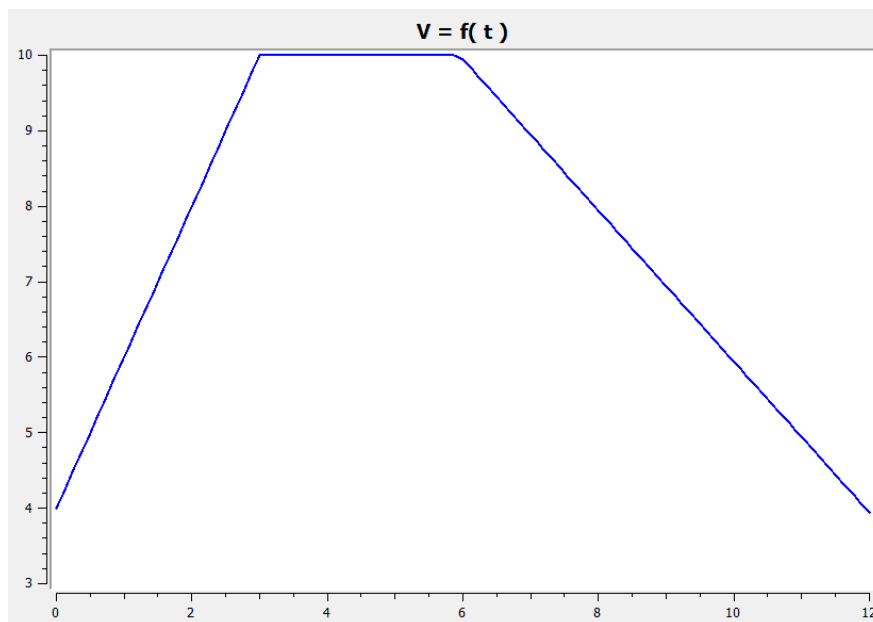
A modo de test, los resultados obtenidos por [ddPFS19] para ciertos parámetros son:

1. $V(t)$ cuando $c = -2$ si $t \leq 6$ y $c = -5$ en caso contrario:
2. Control con c como en 1:

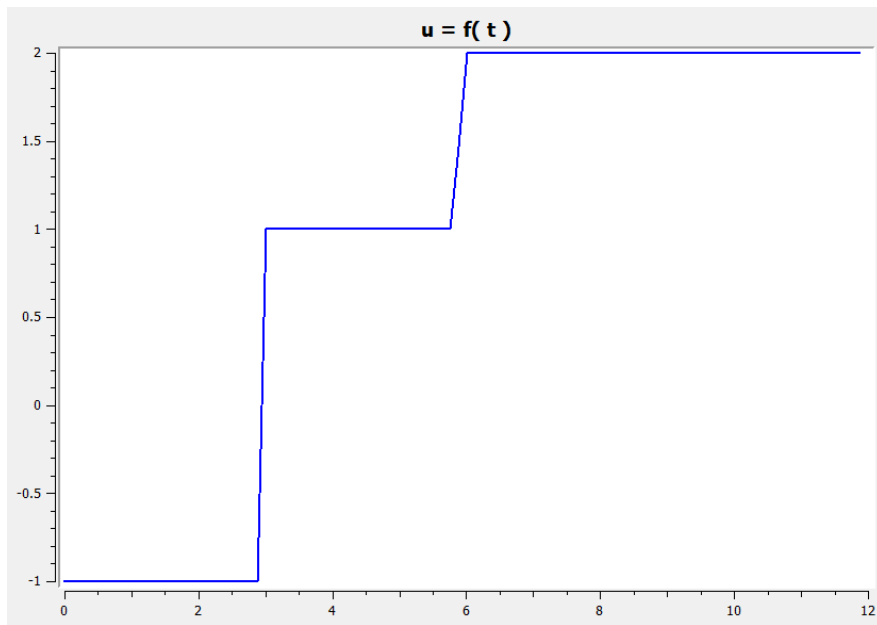


Los resultados obtenidos con BOCOP son:

1. $V(t)$ cuando $c = -2$ si $t \leq 6$ y $c = -5$ si no:



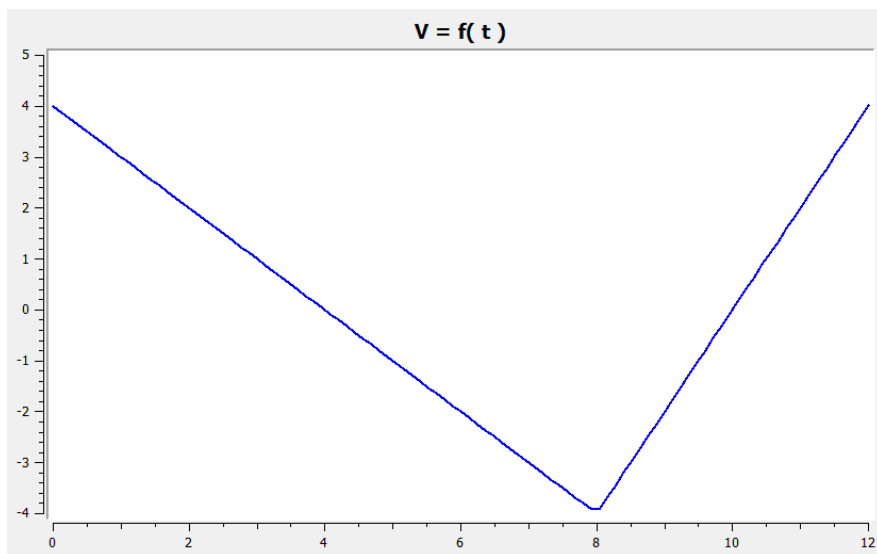
2. Control con c como en 1:



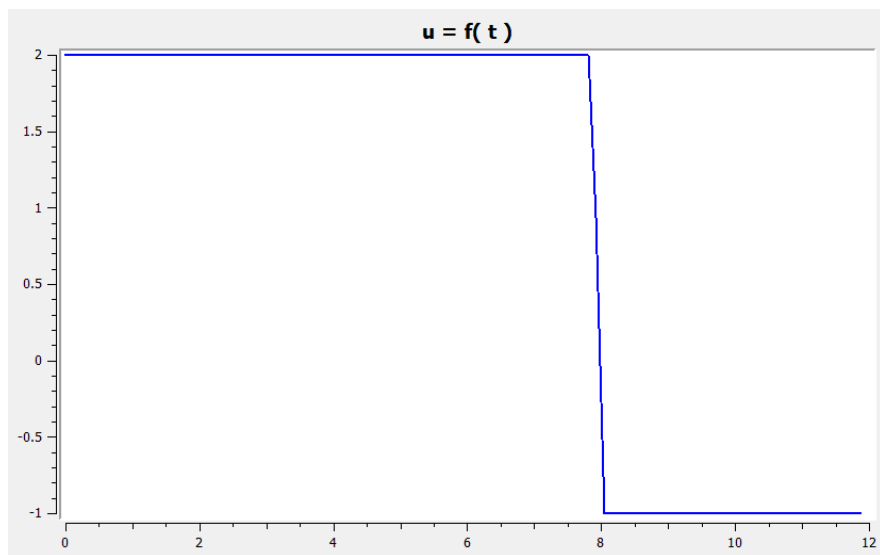
Podemos notar que estos resultados se asemejan a los obtenidos en la literatura. El único problema es que BOCOP no es capaz de construir un control discontinuo por lo que se pierde esa característica del control. Sin embargo, es fácil deducirla al observar el problema. También notamos que de acuerdo con la dinámica, el control es el inverso aditivo de la pendiente de la trayectoria cuando $V < V^M$, por lo que los cambios de pendiente se asocian a cambios de valor del control. Cuando V llega a 10, se mantiene constante ya que el control secundario (v crece tal que la dinámica no supere 10 mientras que el control u se mantiene constante).

Ahora que se tiene una implementación en BOCOP es natural preguntarse que sucede cuando c toma otros valores. Por ejemplo, que sucede cuando c es positivo.

1. $V(t)$ con $c = 2$ si $t \leq 6$ y $c = 5$ si no:

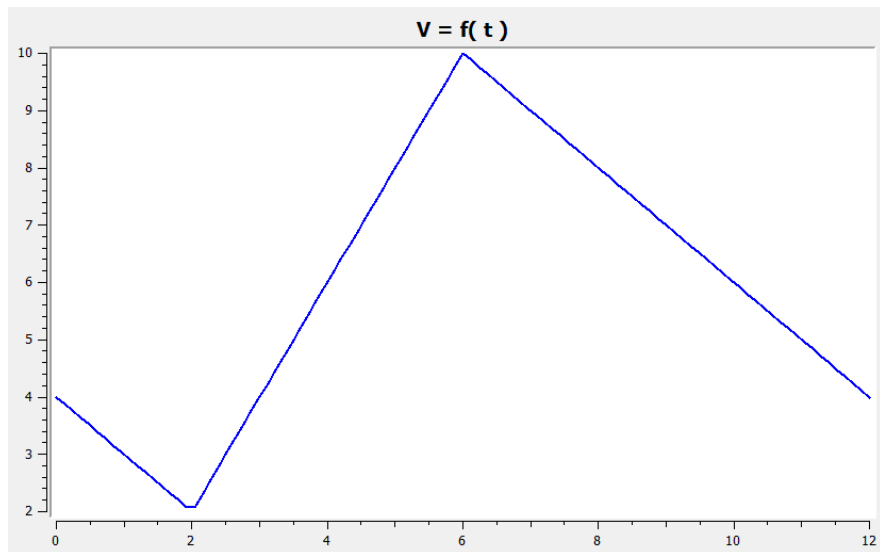


2. Control con c como en 3:

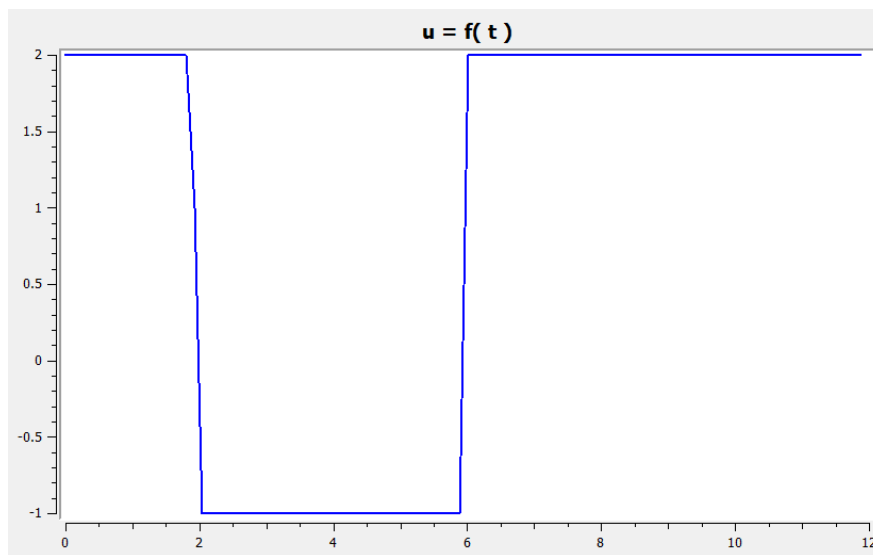


Observamos que se reducen las partes continuas del control a dos y que la trayectoria prácticamente no se mantiene constante, a diferencia, del caso anterior. Cabe añadir que claramente modificar c por constantes que preservan signo, no modifica la trayectoria ni el control como es de esperarse. Si ahora usamos c con cambio de signo tenemos

1. $V(t)$ con $c = 2$ si $t \leq 6$ y $c = -5$ si no:



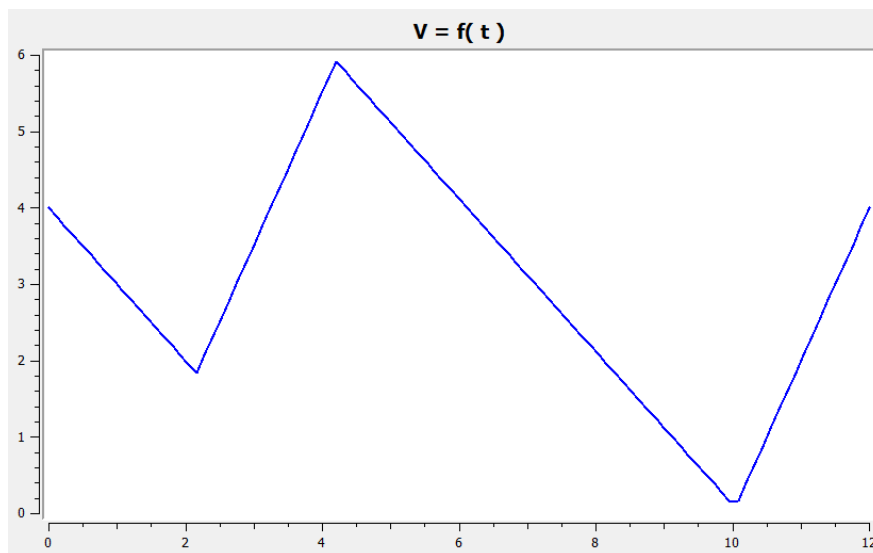
2. Control con c como en 3:



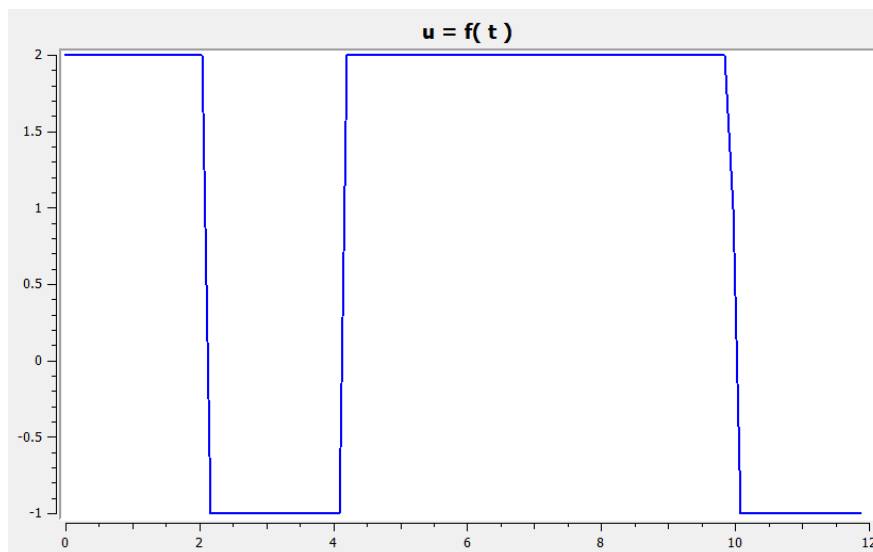
En este caso, podemos ver que la trayectoria se comporta igual a 2, 5 hasta 2, luego se comporta como una reflexión del caso 2, 5. Pero el caso $-2, 5$ que no se graficará es exactamente igual al caso $(2, 5)$. Por lo que podemos concluir sobre el caso constante que para este problema, la constante asociada al menor intervalo de tiempo posee menor control no afecta el tipo de solución si la segunda constante se mantiene constante.

Otra pregunta natural es que sucede cuando $c(t)$ es alguna otra función medible. Primero estudiaremos que sucede si $c(t)$ es trigonométrica por partes.

1. $V(t)$ con $c = -\cos(t)$ si $t \leq 6$ y $c = -\sin(t)$ si no:



2. Control con c como en 3:



Observamos que la trayectoria y el control oscilan más ya que añadimos los cambios de signo de las funciones trigonométricas asociadas. Sin embargo, no se logra que oscile lo suficiente para que la trayectoria resultante empiece a aproximar una función no lineal. Esto también sucede para otras funciones clásicas como la exponencial, logaritmo y polinomios.

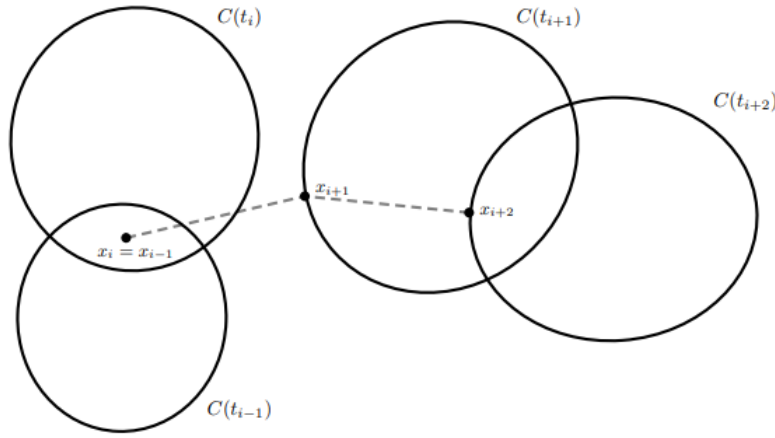
3.- Esquema numérico

Existen un esquema numérico para resolver este problema con la formulación de inclusiones diferenciales. A continuación, se presentara una breve descripción de ella y dificultades con su implementación.

3A.- Catching-up

El algoritmo de Catching-up consiste en discretizar el tiempo, elegir un punto inicial dentro del conjunto inicial. Luego se obtiene $x_{t_{i+1}}$ como la proyección de x_{t_i} en el conjunto asociado a $i + 1$.

$$\begin{cases} x_{i+1}^n = \text{proj}_{C(t_{i+1}^n)}(x_i^n) & \text{“Catching-up algorithm”,} \\ x_0^n = x_0 \in C(0). \end{cases}$$



La idea de este proceso, es que a medida que el conjunto admisible se mueve, nuestra solución se desplaza a través de su proyección en el conjunto trasladado, de forma que es “arrastrado” por el conjunto en movimiento. Se puede demostrar bajo ciertas condiciones que este método converge a la solución cuando se afina la partición.

El principal problema para implementar este método es la parametrización de los conjuntos C donde se debe realizar la proyección lo cual no se alcanzó a realizar para nuestro problema.

4.- Conclusiones

En términos de los resultados de simulaciones, podemos concluir que este tipo de problemas se pueden resolver mediante métodos estándar utilizados por BOCOP, sin embargo, el problema resuelto posee un proceso de arrastre simple por lo que podrían existir problemas al solucionar otro tipo de procesos de arrastre usando BOCOP.

Se recomienda utilizar los esquemas numéricos planteados previamente tales como catching up ya que este garantiza una solución convergente teóricamente mientras que una formulación alternativa que preserve solución no siempre existe.

Bibliografía

- [CCMN21] Tan H. Cao, Giovanni Colombo, Boris S. Mordukhovich, and Dao Nguyen. Optimization and discrete approximation of sweeping processes with controlled moving sets and perturbations. *Journal of Differential Equations*, 274:461–509, 2021.
- [CHNM16] G. Colombo, R. Henrion, D. Hoang Nguyen, and B. S. Mordukhovich. Optimal control of the sweeping process over polyhedral controlled sets. *Journal of Differential Equations*, 260(4):3397–3447, 2016.
- [ddPFS19] M. d.R. de Pinho, M. M.A. Ferreira, and G. V. Smirnov. Optimal Control Involving Sweeping Processes. *Set-Valued and Variational Analysis*, 27(2):523–548, 2019.
- [Mor71] Jean Jacques Moreau. Rafle par un convexe variable (Première partie), 1971. Article dans "Séminaire d'analyse convexe", Montpellier, exposé n°15.
- [Mor77] Jean Jacques Moreau. Evolution problem associated with a moving convex set in a Hilbert space. *Journal of Differential Equations*, 26(3):347–374, December 1977.
- [MT13] Marc Mazade and Lionel Thibault. Regularization of differential variational inequalities with locally prox-regular sets. *Mathematical Programming*, 139(1-2):243–269, 2013.
- [ST14] Moustapha Sene and Lionel Thibault. Regularization of dynamical systems associated with prox-regular moving sets. *J. Nonlinear Convex Anal.*, 15(4):647–663, 2014.
- [Thi08] Lionel Thibault. Regularization of nonconvex sweeping process in Hilbert space. *Set-Valued Analysis*, 16(2-3):319–333, 2008.