
MA4703 Control Óptimo: Teoría y Laboratorio
Informe del Laboratorio 4
Teoría lineal cuadrática

Autores: Axel Álvarez, Manuel Torres.
Profesor: Héctor Ramírez.
Auxiliar: Javier Madariaga, Pablo Araya.
Fecha del laboratorio: Miércoles 12 de Octubre, 2022.
Fecha de entrega: Jueves 20 de Octubre, 2022.

Índice general

1	Introducción	2
1	Objetivo	2
2	Preliminares	2
2	Laboratorio	3
1	Parte A: Modelo de predador-presa	3
1.1	Ejercicio 1	3
1.2	Ejercicio 2	6
1.3	Ejercicio 3	7
1.4	Ejercicio 4	9
1.5	Ejercicio 5	10

Capítulo 1

Introducción

1.- Objetivo

El objetivo de este laboratorio es abordar técnicas numéricas para resolver problemas de control óptimo lineal cuadrático

2.- Preliminares

Con el fin de que el lector pueda replicar lo presentado en este informe, el preámbulo necesario es el siguiente:

1. Para correr el código adjunto puede ser necesario instalar las librerías *toolbox* y *control*. Para ello basta con correr el siguiente código:

```
1 !pip install control
```

Listing 1.1: Instalación de paquetes

2. Los paquetes a utilizar se importan con el siguiente código:

```
1 import numpy as np
2 from scipy.integrate import solve_ivp
3 from scipy.optimize import minimize
4 import control
5 import matplotlib.pyplot as plt
6 import seaborn as sb
7 sb.set_theme(style='darkgrid')
8 sb.set_palette('dark')
```

Listing 1.2: Carga de paquetes

Para complementar los resultados puede revisar el documento *ipynb* con los códigos utilizados, se encuentra adjunto en la entrega con este informe.

Capítulo 2

Laboratorio

A continuación se presenta el problema a desarrollar junto a su análisis y desarrollo, con las respectivas simulaciones realizadas. En algunos casos se adjunta el código utilizado.

1.- Parte A: Modelo de predador-presa

En los bosques del sur una especie particular de polilla es la responsable de fuertes daños en los árboles de la zona, lo que impide su crecimiento e incluso amenaza con reducirlos fuertemente. Se sabe que existe un equilibrio entre la cantidad de polillas (denotadas por $y_1(t)$ para t dado) y la cantidad de árboles (denotados por $y_2(t)$ para t dado), cuando ambos son iguales a los valores Y_1 e Y_2 , respectivamente. Por otro lado, el control experimental que se tiene es el ingreso de una especie particular de avispa que se come los huevos de estas polillas, esta se denotará por u . Dadas estas hipótesis el modelo está dado por:

$$\begin{aligned}\dot{y}_1(t) &= y_2(t) - Y_2 - u(t), \\ \dot{y}_2(t) &= Y_1 - y_1(t),\end{aligned}$$

con condiciones iniciales $y_1(0) = Y_1$, $y_2(0) = Y_2 + c$. Dado un tiempo final fijo T considere el problema de minimizar el funcional

$$\min_{u(\cdot) \in U} y_1(T)^2 + \int_0^T u(t)^2 dt,$$

que intenta al mismo tiempo minimizar la cantidad de polillas al final de la intervención y cuidar los costos en los que incurre al introducir avispas.

1A.- Ejercicio 1

Usando el *principio del máximo de Pontryagin* se tiene que existe un estado adjunto $p(\cdot)$ que resuelve

$$\dot{p}(t) = -A(t)^T p(t) + W(t)x(t), t \in [0, T] \text{ ctp}; \quad p(T) = -\frac{1}{2} \nabla g(x(T))$$

tal que $u(t) = U(t)^{-1} B(t)^T p(t)$ ctp $t \in [0, T]$. En este caso $W \equiv 0$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $r = \begin{pmatrix} -Y_2 \\ Y_1 \end{pmatrix}$. Con lo cual se tiene lo siguiente

$$\dot{p} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} p; \quad p(T) = (-y_1(T), 0)$$

$$u(t) = -p_1(t)$$

Para poder realizar las simulaciones numéricas se resuelve el siguiente problema

$$\min_{x_0} \|p(T) - (-y_1(T), 0)\|$$

$$s.a \quad p(0) = x_0$$

Luego se realizan simulaciones numéricas, con lo cual se obtienen los siguientes gráficos

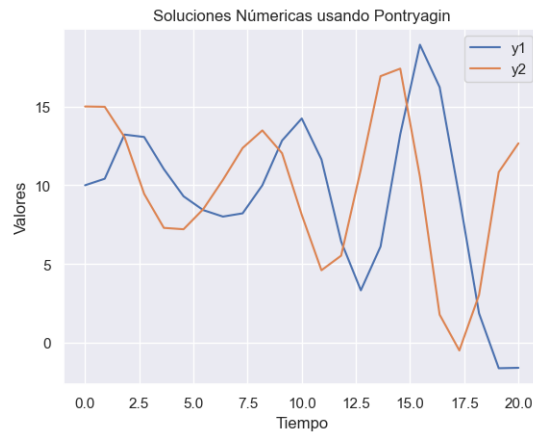


Figura 2.1: Solución para valores $Y_1 = 10, Y_2 = 10, c = 5, T = 20$

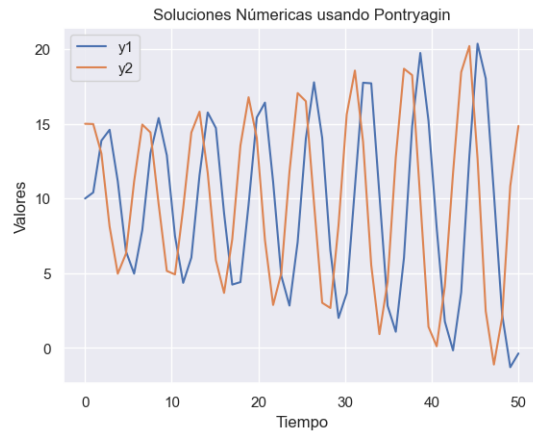


Figura 2.2: Solución para valores $Y_1 = 10, Y_2 = 10, c = 5, T = 50$

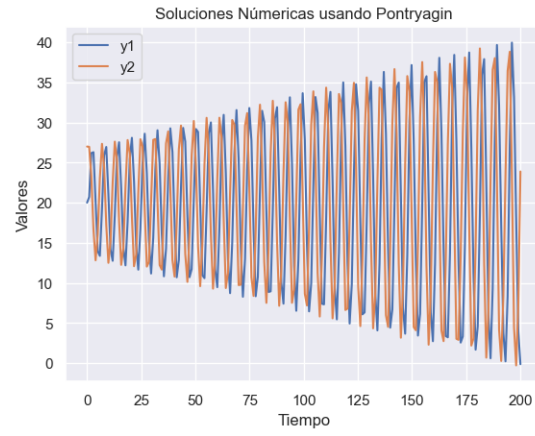


Figura 2.3: Solución para valores $Y_1 = 20, Y_2 = 20, c = 7, T = 200$

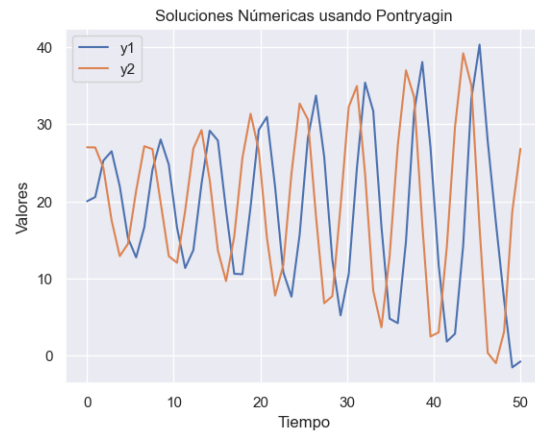


Figura 2.4: Solución para valores $Y_1 = 20, Y_2 = 20, c = 7, T = 50$

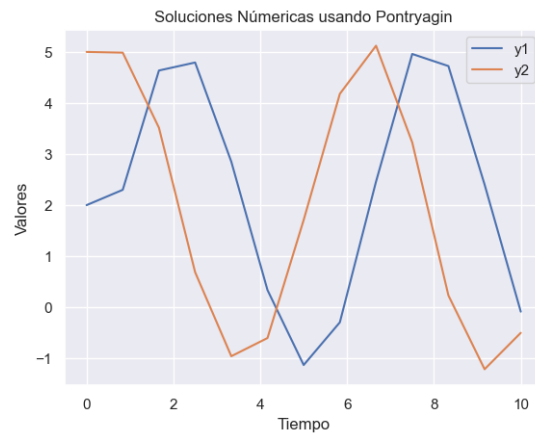


Figura 2.5: Solución para valores $Y_1 = 2, Y_2 = 2, c = 3, T = 10$

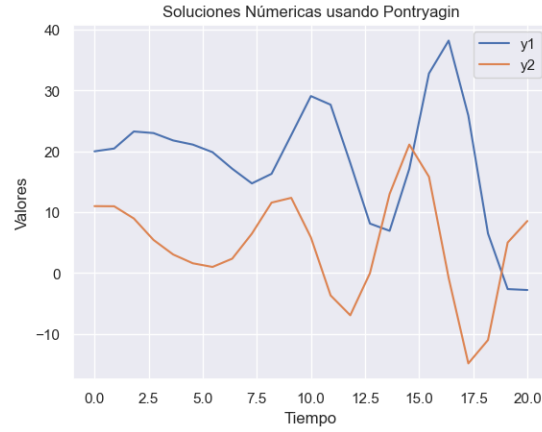


Figura 2.6: Solución para valores $Y_1 = 20$, $Y_2 = 5$, $c = 6$, $T = 20$

Notar que las soluciones no son muy suaves y las soluciones tienden a oscilar, esto último tiene sentido pues existe un equilibrio entre la cantidad de polillas y la cantidad de árboles, entonces cuando hay bastantes polillas y pocos árboles el sistema tiende a disminuir la cantidad de polillas y a aumentar la cantidad de árboles para poder alcanzar el equilibrio, de manera análoga se tiene en el caso en que hay bastante árboles y pocas polillas.

1B.- Ejercicio 2

Usando el comando *lqr* del toolbox de control óptimo de *python* se resuelve el problema. Se compara la solución obtenida mediante éste método y lo realizado en el *ejercicio 1*.

Consideramos el funcional de costos dado por

$$\begin{aligned}
 J(T) &= y_1^2(T) + \int_0^T u^2(t) dt \\
 &= \int_0^T (2y_1(t)\dot{y}_1(t) + u^2(t)) dt \\
 &= \int_0^T (2y_1(t)(y_2(t) - Y_2 - u(t)) + u^2(t)) dt \\
 &= \int_0^T \left(2y_1(t)y_2(t) - 2y_1(t)Y_2 - 2y_1(t)u(t) + \frac{y_1^2(0)}{T} + u^2(t) \right) dt,
 \end{aligned}$$

para poder reescribir el funcional anterior definimos la variable extendida

$$x = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \xi \end{pmatrix}; \quad \xi(0) = 1; \quad \dot{\xi}(t) = 0,$$

luego con las matrices

$$Q := \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & Y_1^2 \end{pmatrix}; \quad N := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad R = 1$$

En esta sección no se presentan resultados porque se encontraron problemas con *python* en la programación.

1C.- Ejercicio 3

Como la ecuación satisface la condición (H) pues $\|u\|_U = \|u\|_{L^2}$ en el problema a estudiar entonces existe único control óptimo del problema (PLC) y se puede expresar como el feedback lineal

$$u(t) = U^{-1}(t)B(t)^T E(t)x(t) \text{ c.t.p. } t \in [0, T],$$

donde $E(\cdot)$ es la solución sobre $[0, T]$ de la ecuación matricial de Riccati:

$$\begin{cases} \dot{E}(t) &= W(t) - A(t)^T E(t) - E(t)^T A(t) - E(t)^T B(t)U^{-1}(t)B(t)^T E(t) \\ E(T) &= -Q, \end{cases}$$

Con lo cual en este caso en particular se tiene lo siguiente

$$\begin{cases} \dot{E}(t) &= A(t)^T E(t) - E(t)^T A(t) - E(t)^T B(t)B(t)^T E(t) \\ E_1(T) &= -1, \end{cases}$$

Se procede a realizar simulaciones numéricas con los mismos valores de Y_1, Y_2, c, T que en la parte anterior para poder comparar de mejor manera los resultados obtenidos. Los gráficos conseguidos son los siguientes

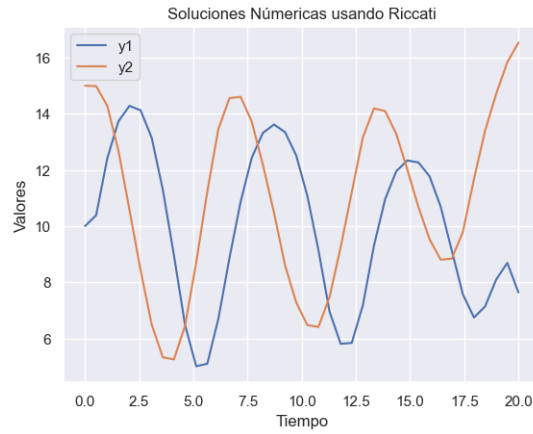


Figura 2.7: Solución para valores $Y_1 = 10, Y_2 = 10, c = 5, T = 20$

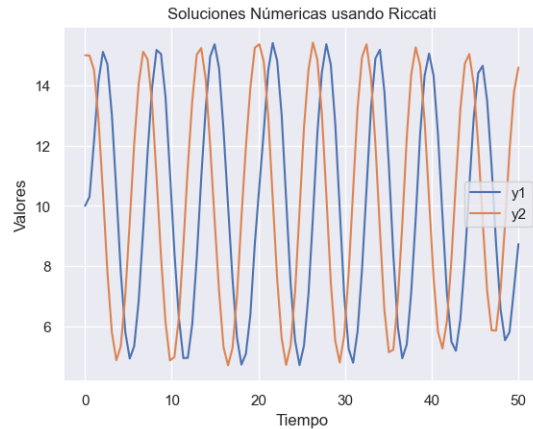


Figura 2.8: Solución para valores $Y_1 = 10, Y_2 = 10, c = 5, T = 50$

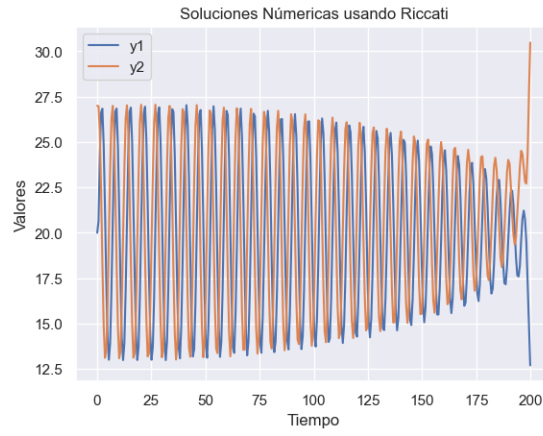


Figura 2.9: Solución para valores $Y_1 = 20, Y_2 = 20, c = 7, T = 200$

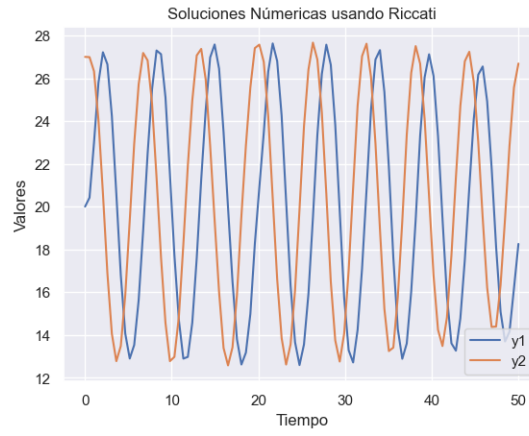


Figura 2.10: Solución para valores $Y_1 = 20, Y_2 = 20, c = 7, T = 50$

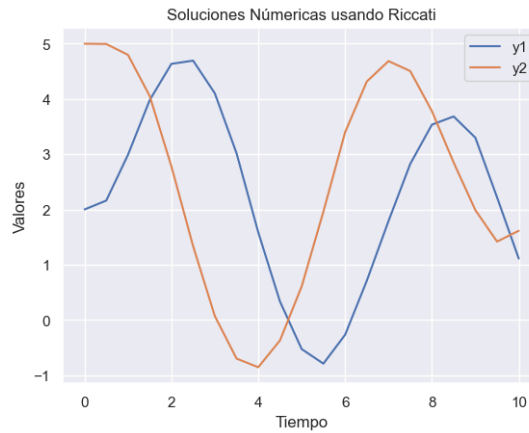


Figura 2.11: Solución para valores $Y_1 = 2, Y_2 = 2, c = 3, T = 10$

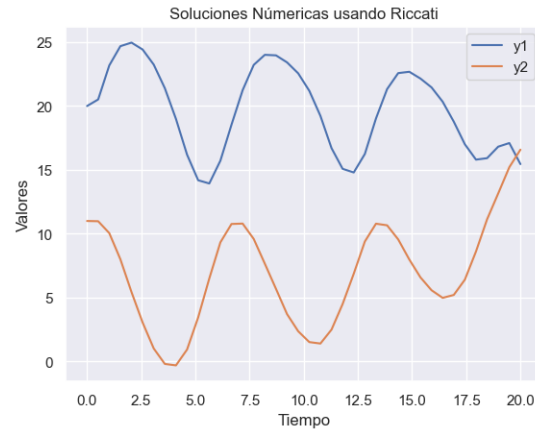


Figura 2.12: Solución para valores $Y_1 = 20, Y_2 = 5, c = 6, T = 20$

Notar que se tiene resultados similares al caso anterior pero en algunos casos difiere el comportamiento en el tiempo T , esto se puede deber a que resolver la ecuación de Riccati junto al sistema puede acarrear una mayor cantidad de errores numéricos. Aunque cabe destacar que en general el comportamiento de oscilar en el equilibrio del sistema se sigue manteniendo en este caso.

1D.- Ejercicio 4

Utilizando el software *BOCOP* se resuelve directamente el problema, con lo cual se tiene los siguientes resultados para un número acotado de casos

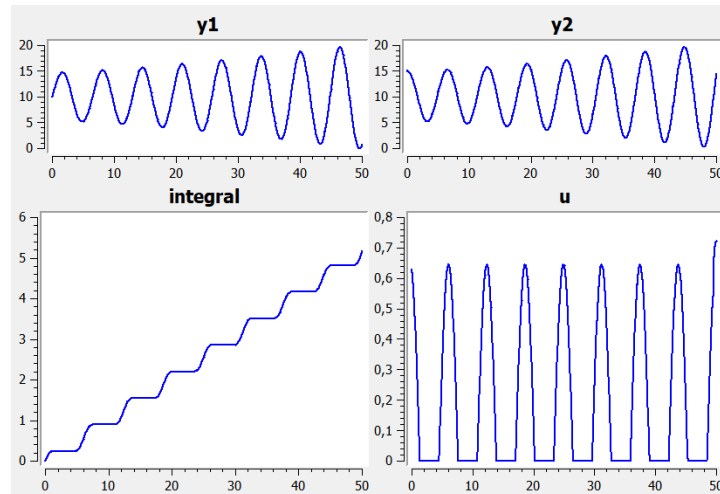


Figura 2.13: Solución para valores $Y_1 = 10, Y_2 = 10, c = 5, T = 50$

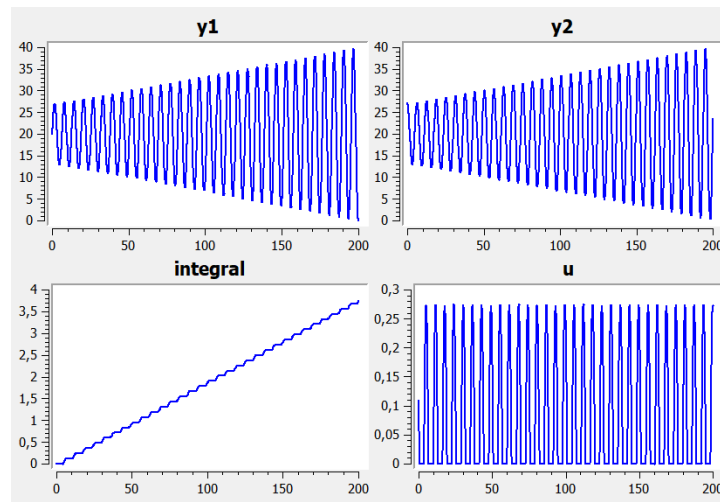


Figura 2.14: Solución para valores $Y_1 = 20, Y_2 = 20, c = 7, T = 200$

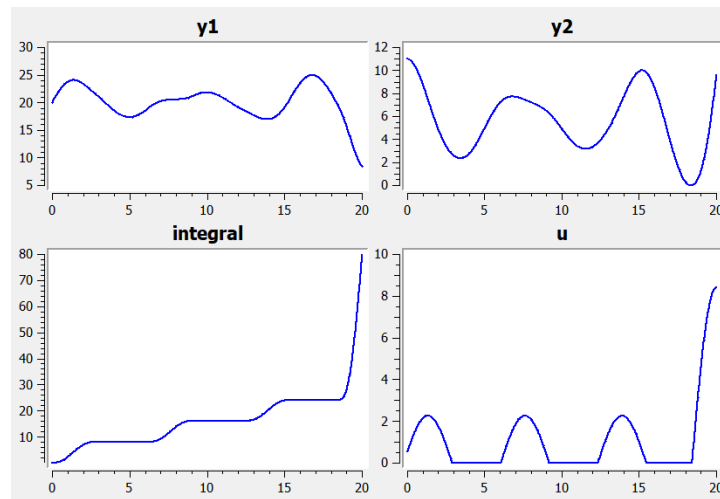


Figura 2.15: Solución para valores $Y_1 = 20, Y_2 = 5, c = 6, T = 20$

Notar que con Bocop se tiene resultados similares a los obtenidos con python, lo cual tiene sentido con la teoría pues la solución del sistema satisface el principio de Pontryagin y se puede utilizar la caracterización mediante Riccati.

1E.- Ejercicio 5

Con *BOCOP* se resuelve el problema directamente solo considerando minimizar las polillas al final del tiempo T en la función objetivo. Utilizando los mismos valores Y_1, Y_2, c, T del *ejercicio 4* se obtienen los siguientes resultados

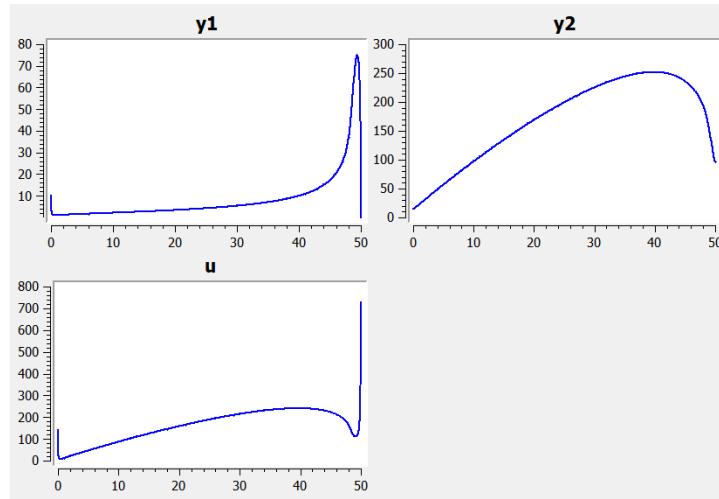


Figura 2.16: Solución para valores $Y_1 = 10$, $Y_2 = 10$, $c = 5$, $T = 50$

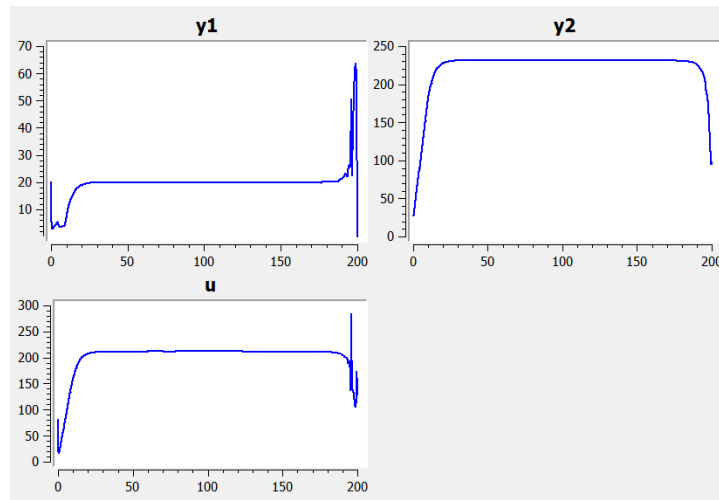


Figura 2.17: Solución para valores $Y_1 = 20$, $Y_2 = 20$, $c = 7$, $T = 200$

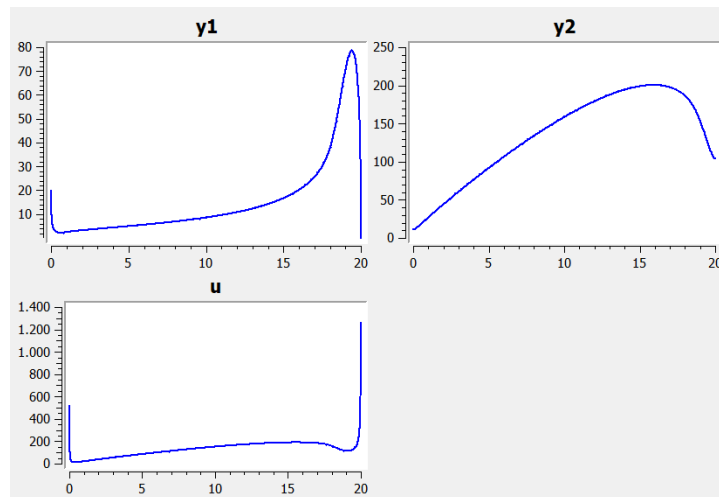


Figura 2.18: Solución para valores $Y_1 = 20$, $Y_2 = 5$, $c = 6$, $T = 20$

Notar que se obtiene lo esperable si no se considera el control ya que el mínimo se alcanza cuando no existen polillas.