
MA4703 Control Óptimo: Teoría y Laboratorio
Informe del Laboratorio 3
Control de corriente eléctrica y método de resolución directo

Autores: Axel Kolm, Manuel Torres.
Profesor: Héctor Ramírez.
Auxiliar: Javier Madariaga, Pablo Araya.
Fecha del laboratorio: Miércoles 28 de Octubre, 2022.
Fecha de entrega: Miércoles 5 de Septiembre, 2022.

Índice general

1. Introducción	2
1. Objetivo	2
2. Preliminares	2
2. Laboratorio	3
1. Parte A: Control de corriente eléctrica y método de resolución directo	3
1.1. Ejercicio 1	3
1.2. Ejercicio 2	4
1.3. Ejercicio 3	5
1.4. Ejercicio 4	5
1.5. Ejercicio 5	6
1.6. Ejercicio 6	7
2. Parte B: Método de resolución indirecto	10
2.1. Ejercicio 7	10
2.2. Ejercicio 8	10
2.3. Ejercicio 9	12

Capítulo 1

Introducción

1.- Objetivo

El objetivo de este laboratorio es abordar técnicas numéricas para resolver problemas de control óptimo a tiempo mínimo

2.- Preliminares

Con el fin de que el lector pueda replicar lo presentado en este informe, el preámbulo necesario es el siguiente:

1. Para correr el código adjunto puede ser necesario instalar las librerías *toolbox* y *control*. Para ello basta con correr el siguiente código:

```
1 !pip install control
```

Listing 1.1: Instalación de paquetes

2. Los paquetes a utilizar se importan con el siguiente código:

```
1 import numpy as np
2 from scipy.integrate import solve_ivp
3 from scipy.optimize import minimize
4 import control
5 import matplotlib.pyplot as plt
6 import seaborn as sb
7 sb.set_theme(style='darkgrid')
8 sb.set_palette('dark')
```

Listing 1.2: Carga de paquetes

Para complementar los resultados puede revisar el documento *ipynb* con los códigos utilizados, se encuentra adjunto en la entrega con este informe.

Capítulo 2

Laboratorio

A continuación se presenta el problema a desarrollar junto a su análisis y desarrollo, con las respectivas simulaciones realizadas. En algunos casos se adjunta el código utilizado.

1.- Parte A: Control de corriente eléctrica y método de resolución directo

Para este laboratorio se considera el circuito eléctrico mostrado en la Figura 1, el cual consiste en dos circuitos acoplados por inductancias L_1 y L_2 vía una variable de acoplamiento α , R_c y R_w denotan resistencias, i_1, i_2 serán las variables de estados y representan las corrientes eléctricas, y u representa un voltaje controlable. En cierto sentido, este modelo simula el acoplamiento entre un campo magnético y corrientes de Foucault. Por razones físicas se debe cumplir que $\alpha \in (0, 1)$.

Este circuito eléctrico es modelado mediante la siguiente dinámica a valor inicial:

$$\begin{aligned} L_1 \frac{di_1}{dt}(t) + K \frac{di_2}{dt}(t) + R_c i_1(t) &= u(t), \\ K \frac{di_1}{dt}(t) + L_2 \frac{di_2}{dt}(t) + R_w i_2(t) &= 0, \\ i_1(0) &= -i_0, \\ i_2(0) &= 0, \\ u(t) &\in [-a, a], \forall t \geq 0; \end{aligned}$$

donde la constante $K := \alpha\sqrt{L_1 L_2}$. El objetivo es llevar el vector de corrientes al punto $(i_0, 0)$ en el menor tiempo posible. Luego de que ese punto sea alcanzado, la corriente debe permanecer en dicho estado.

1A.- Ejercicio 1

Mostrar que el sistema puede ser escrito como

$$i'(t) = Ai(t) + Bu(t),$$

con

$$A = \frac{1}{(1 - \alpha^2)L_1 L_2} \begin{pmatrix} -L_2 R_c & \alpha\sqrt{L_1 L_2} R_w \\ \alpha\sqrt{L_1 L_2} R_c & -L_1 R_w \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \frac{1}{(1 - \alpha^2)L_1 L_2} \begin{pmatrix} L_2 \\ -\alpha\sqrt{L_1 L_2} \end{pmatrix}.$$

Notar que el sistema de ecuaciones diferenciales viene dado por

$$\begin{aligned} L_1 \frac{di_1}{dt}(t) + K \frac{di_2}{dt}(t) + R_c i_1(t) &= u(t), \\ K \frac{di_1}{dt}(t) + L_2 \frac{di_2}{dt}(t) + R_w i_2(t) &= 0. \end{aligned}$$

En forma matricial esto se expresa como

$$\begin{pmatrix} L_1 & K \\ K & L_2 \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_c & 0 \\ 0 & R_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t),$$

como $\alpha \in [0, 1)$ luego como $K = \alpha\sqrt{L_1 L_2}$ sigue que $L_1 L_2 - K^2 \neq 0$, así

$$\begin{pmatrix} L_1 & K \\ K & L_2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{L_1 L_2 - K^2} \begin{pmatrix} L_2 & -K \\ -K & L_1 \end{pmatrix},$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{pmatrix} &= -\frac{1}{L_1 L_2 - K^2} \begin{pmatrix} L_2 & -K \\ -K & L_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_c & 0 \\ 0 & R_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{pmatrix} + \frac{1}{L_1 L_2 - K^2} \begin{pmatrix} L_2 & -K \\ -K & L_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t) \\ &= -\frac{1}{(1 - \alpha^2)L_1 L_2} \begin{pmatrix} L_2 R_c & -K R_w \\ -K R_c & L_1 R_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{pmatrix} + \frac{1}{L_1 L_2 - K^2} \begin{pmatrix} L_2 \\ -K \end{pmatrix} u(t) \\ &= \frac{1}{L_1 L_2 - K^2} \begin{pmatrix} -L_2 R_c & \alpha\sqrt{L_1 L_2} R_w \\ \alpha\sqrt{L_1 L_2} R_c & -L_1 R_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{pmatrix} + \frac{1}{(1 - \alpha^2)L_1 L_2} \begin{pmatrix} L_2 \\ -\alpha\sqrt{L_1 L_2} \end{pmatrix} u(t), \end{aligned}$$

donde se identifica que el sistema es de la forma $i'(t) = Ai(t) + Bu(t)$ con matrices

$$A = \frac{1}{(1 - \alpha^2)L_1 L_2} \begin{pmatrix} -L_2 R_c & \alpha\sqrt{L_1 L_2} R_w \\ \alpha\sqrt{L_1 L_2} R_c & -L_1 R_w \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \frac{1}{(1 - \alpha^2)L_1 L_2} \begin{pmatrix} L_2 \\ -\alpha\sqrt{L_1 L_2} \end{pmatrix}.$$

De ahora en adelante se considerará la siguiente elección de parámetros:

$$\begin{aligned} i_0 &= 1, \\ L_1 &= 3,5, \\ L_2 &= 2, \\ R_c &= 1, \\ R_w &= 3, \\ \alpha &= 0,9, \\ a &= 50. \end{aligned}$$

1B.- Ejercicio 2

Mostrar numéricamente que el sistema, con la configuración de parámetros escogida, es controlable.

Para ello se calcula numéricamente la matriz de Kalman, obteniendo

$$K = \begin{pmatrix} 1,5037594 & -11,87743796 \\ -1,79035803 & 16,82667321 \end{pmatrix},$$

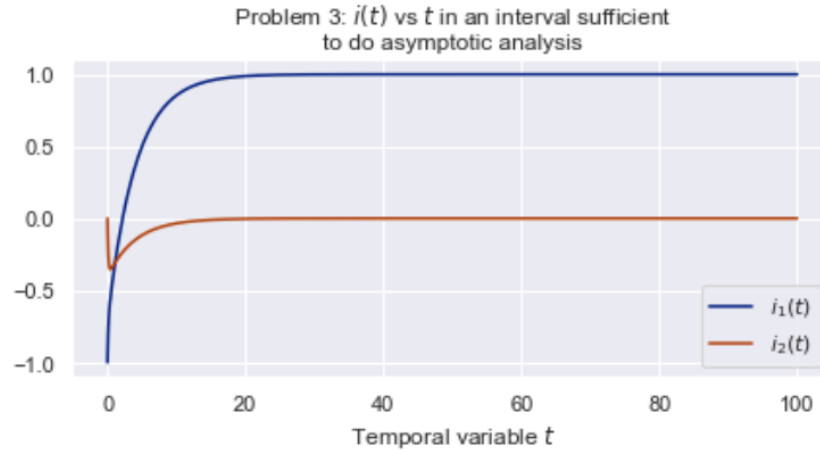
que es de rango completo, por lo que el sistema es controlable.

1C.- Ejercicio 3

Evidenciar, por medio de cálculos numéricos, que si se escoge un control constante $u(\cdot) \equiv \tilde{u}$, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} i'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Numéricamente se obtiene la siguiente curva para $i(t) = \begin{pmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{pmatrix}$:



Es posible ver que existe $t_0 > 0$ tal que, para todo $t > t_0$, $i(t)$ es constante en cada coordenada, por lo tanto $i'(t)$ debe ser nulo.

1D.- Ejercicio 4

Escriba el problema del enunciado como un problema de control óptimo de tiempo mínimo.

El problema de optimización de tiempo mínimo es

$$(P) \begin{cases} \min_{u(\cdot) \in \mathcal{A}} T \\ \text{s.a.: } i_f = i(T; u(\cdot), i_0) \end{cases}$$

para este modelo se expresa como:

$$(P) \begin{cases} \min_{u(\cdot) \in \mathcal{A}} & T \\ \text{s.a.:} & \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{(1-\alpha^2)L_1L_2} \begin{pmatrix} -L_2R_c & \alpha\sqrt{L_1L_2}R_w \\ \alpha\sqrt{L_1L_2}R_c & -L_1R_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{pmatrix} + \frac{1}{(1-\alpha^2)L_1L_2} \begin{pmatrix} L_2 \\ -\alpha\sqrt{L_1L_2} \end{pmatrix} u(t), \\ & i_1(0) = 0, i_2(0) = -i_0, \\ & i_1(T) = i_0, i_2(T) = 0, \\ & u(t) \in [-a, a], \forall t \geq 0 \end{cases}$$

1E.- Ejercicio 5

Para $t_f > 0$ fijo, discretizar (de forma equidistribuída) en n puntos la dinámica del problema anterior en el intervalo de tiempo $[0, t_f]$ mediante la fórmula de discretización de Euler. Escriba un nuevo problema de optimización no lineal, ahora de dimensión finita, en el cual sus variables sean t_f y (u_1, \dots, u_n) , donde u_i denota el valor del control en el i -ésimo punto de la discretización de $[0, t_f]$.

Sea $t_f > 0$ un tiempo final fijo, a continuación se discretizará la dinámica que restringe el problema de tiempo mínimo planteado en el *ejercicio 4*. Para ello se particiona el intervalo $[0, t_f]$ en n subintervalos, mediante la aplicación

$$k \in \{0, \dots, n\} \mapsto t_k = \frac{kt_f}{n} \in [0, t_f].$$

En una ecuación diferencial ordinaria de orden 1 de la forma $i'(t) = F(t, i(t))$ se puede discretizar según lo siguiente:

$$i'_k = F(t_k, i_k) = Ai(t_k) + Bu(t_k) = Ai_k + Bu_k,$$

luego discretizando la derivada (hacia la derecha) sigue que:

$$\frac{i_{k+1} - i_k}{t_f/n} = Ai_k + Bu_k,$$

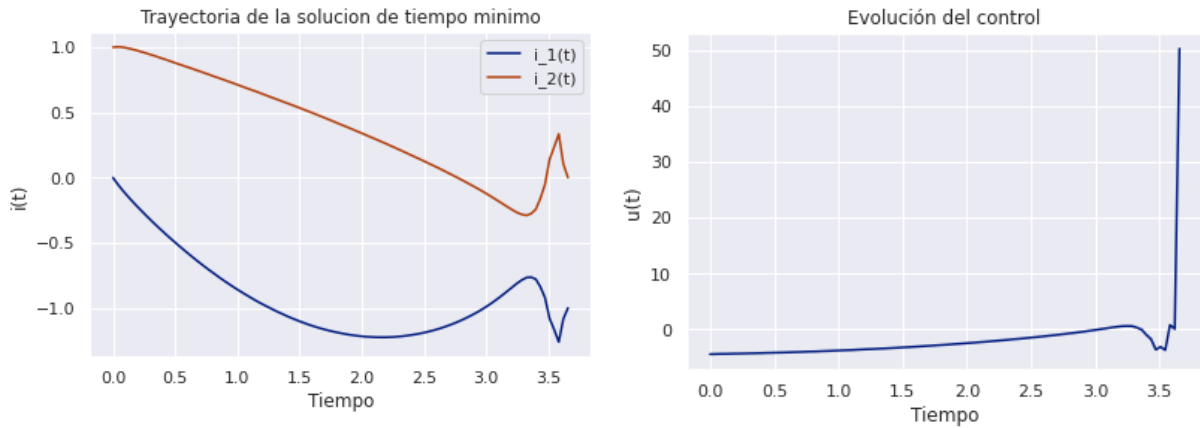
por lo tanto le esquema es

$$i_{k+1} = i_k + \frac{t_f (Ai_k + Bu_k)}{n} \quad \forall k \in \{0, \dots, n\}.$$

1F.- Ejercicio 6

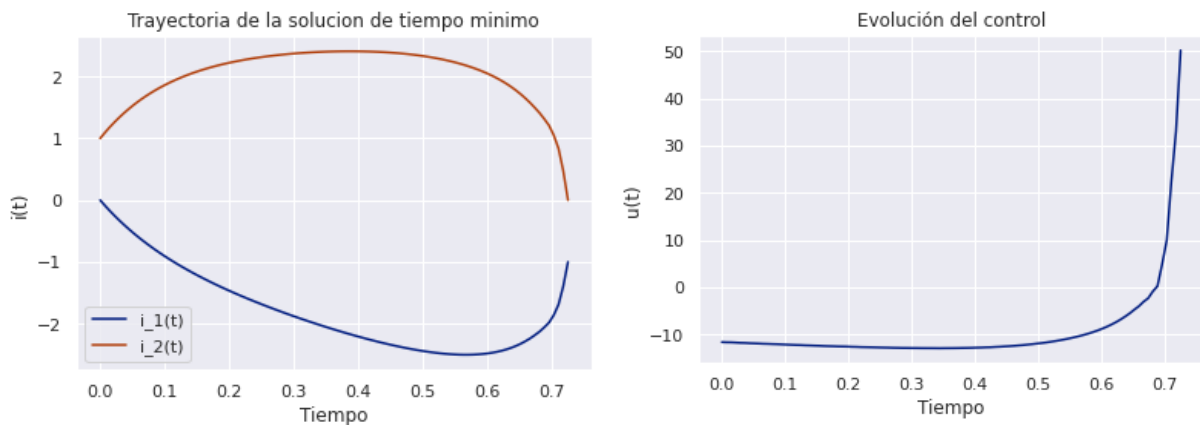
Resolver el problema discretizado para distintos valores de n . Se presentan gráficos de la trayectoria óptima (discretizada) y el control óptimo (discretizado) en $[0, t_f]$. Se comenta la solución obtenida. Lo anterior considerando varias condiciones iniciales para el método t_f^0 y (u_1^0, \dots, u_n^0) .

Para $N = 100$, $t_f^0 = 0$ y $(u_1^0 = 0)$. Se obtiene la siguiente trayectoria para las variables de estado y para el control.

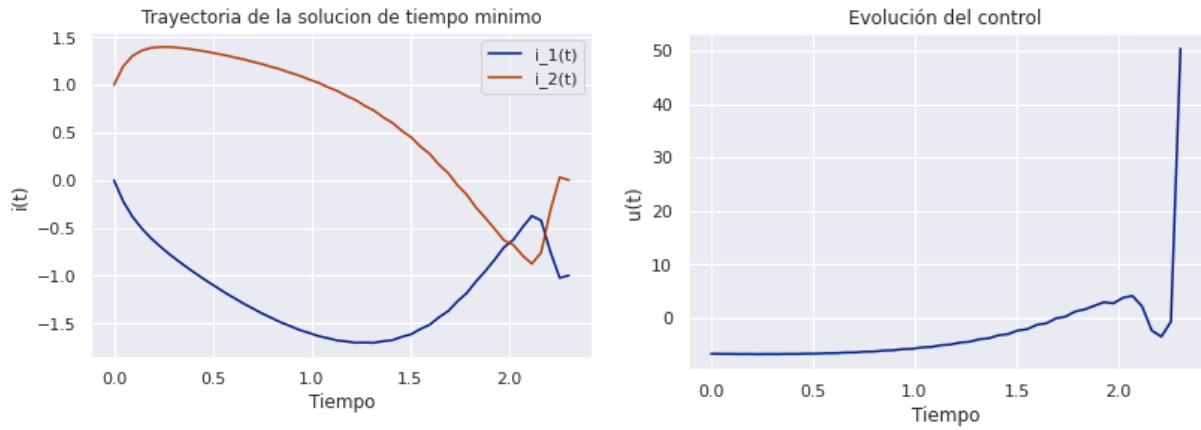


La solución se demora unos 10 segundos para el valor de $n=100$, notamos que la trayectoria de cada coordenada son funciones suaves. En el caso del control, este se mantiene bastante pequeño durante la mayor parte de la trayectoria pero explota al final excediendo sus restricciones.

Si ahora consideramos el óptimo anterior como condición inicial tenemos:

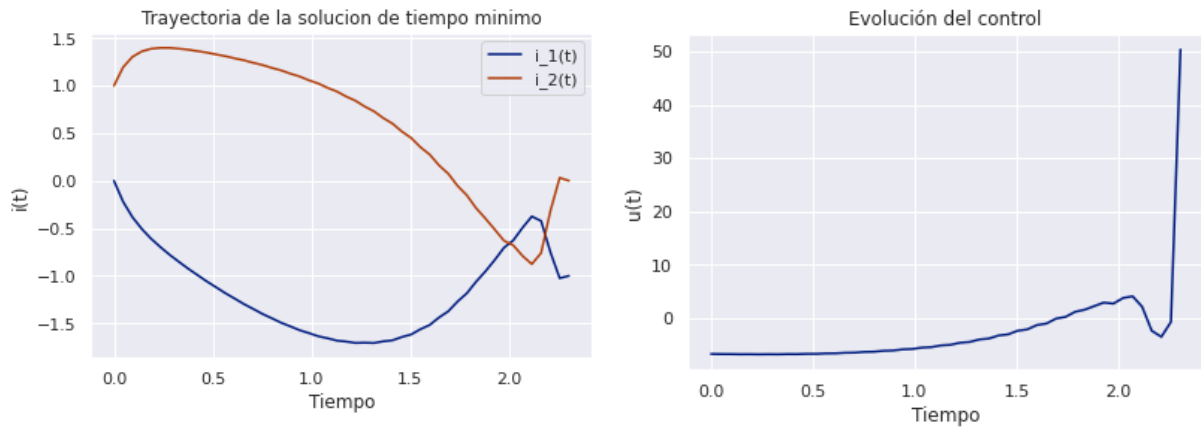


Si partimos desde el óptimo previo, obtenemos una solución mucho mejor donde la trayectoria se asemeja a una parábola para ambas coordenadas y el control mantiene el comportamiento de crecer al final de la trayectoria. Ahora analizaremos el comportamiento con $N = 50$, $t_f^0 = 0$ y $(u_1^0 = 0)$.



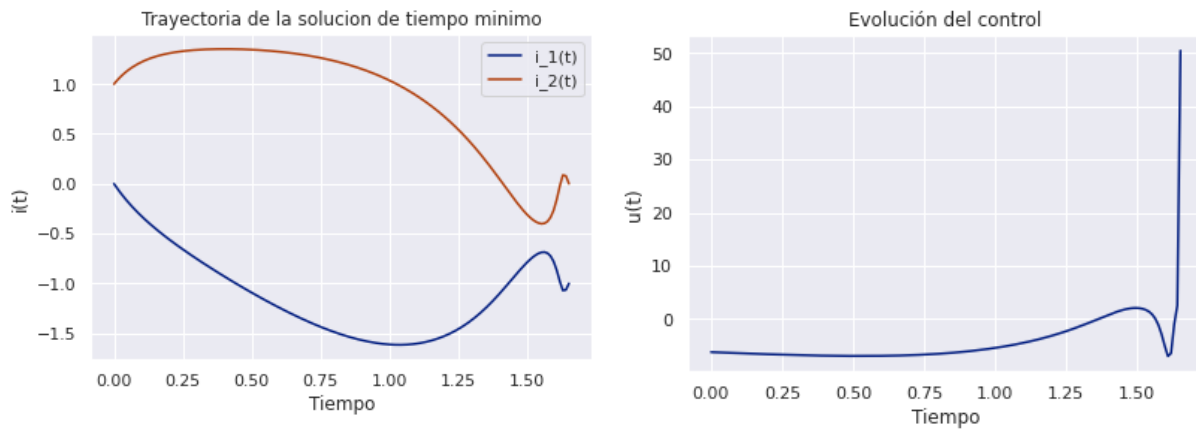
En este caso, la ejecución toma menos de un segundo, esto es evidencia de que la complejidad no aumenta de forma lineal pero necesitamos otro punto para concluir.

Mientras tanto, veamos que pasa si empezamos desde el óptimo previo

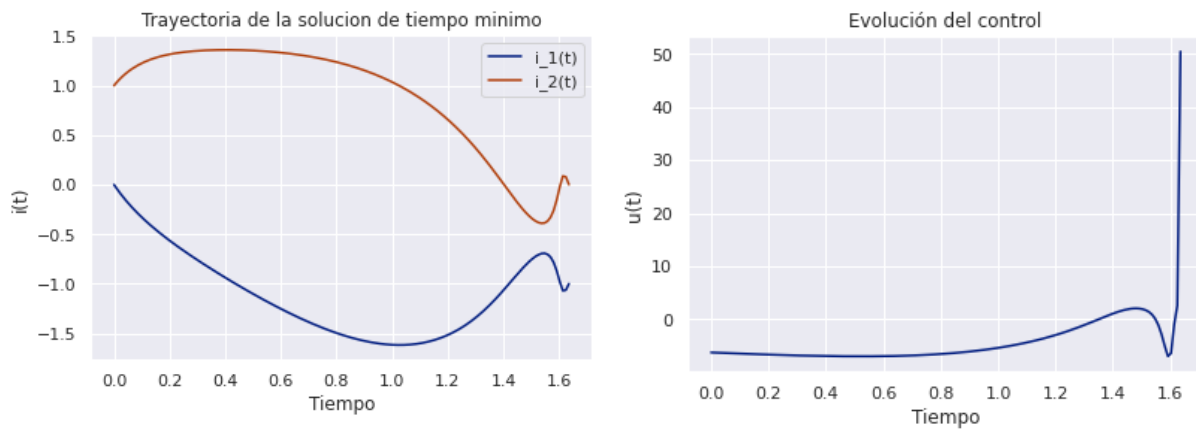


Para el caso $n=50$, la solución es mucho más rápida, sin embargo, los resultados son peores ya que la discretización es menos fina. Además, al empezar desde un óptimo previo, la solución no cambia a diferencia del caso anterior. Esto sugiere que esta atrapada en un mínimo local.

El ultimo caso sera $N = 150$, $t_f^0 = 0$ y $u_1^0 = 0$.



En este caso, se demora alrededor de 30 segundos en ejecutarse. El resultado es un óptimo mejor a los dos primeros con las mismas condiciones iniciales. Veamos que sucede al empezar desde este óptimo la optimización.



Notamos que los resultados no cambian por lo que nos encontramos nuevamente en un mínimo local para este método.

2.- Parte B: Método de resolución indirecto

Gracias a la caracterización de controles extremales es sabido que el control óptimo viene dado por

$$u^*(t) = a \cdot \operatorname{sgn}\{p(t)^T B\},$$

donde $p(t)$ es una solución no trivial del sistema $\dot{p}(t) = -A^T p(t)$. Bajo normalización, se tomará como condición inicial del sistema adjunto el vector $p(0) = (-1, h)$, donde h es un parámetro a determinar. Notar que el valor de t_f y de h queda determinado por las condiciones

$$i_1(t_f; u^*) = i_0, \quad i_2(t_f; u^*) = 0.$$

2A.- Ejercicio 7

Escribir en *python* una función F que tome como parámetros a t_f y h , se resuelve el sistema original y el sistema adjunto al utilizar el control descrito por la ecuación

$$u^*(t) = a \cdot \operatorname{sgn}\{p(t)^T B\},$$

y se entregan las posiciones finales de los estados i_1 e i_2 . Con el uso de *python*, se encuentran los ceros para la función F . A partir de estas soluciones, se muestran que los sistemas y el control u^* asociados a dichas soluciones.

1. El esquema para obtener $u^*(t)$ es necesario conocer $p(t)$ tal que resolver la ecuación diferencial ordinaria

$$\dot{p}(t) = -A^T p(t) \quad \text{c.t.p. } t \in [0, T].$$

2. Calcular el valor

$$b = \max_{v \in U} p(t)^T B v \quad \text{c.t.p. } t \in [0, T]$$

mediante un método de optimización.

3. Resolver el sistema de ecuaciones lineales

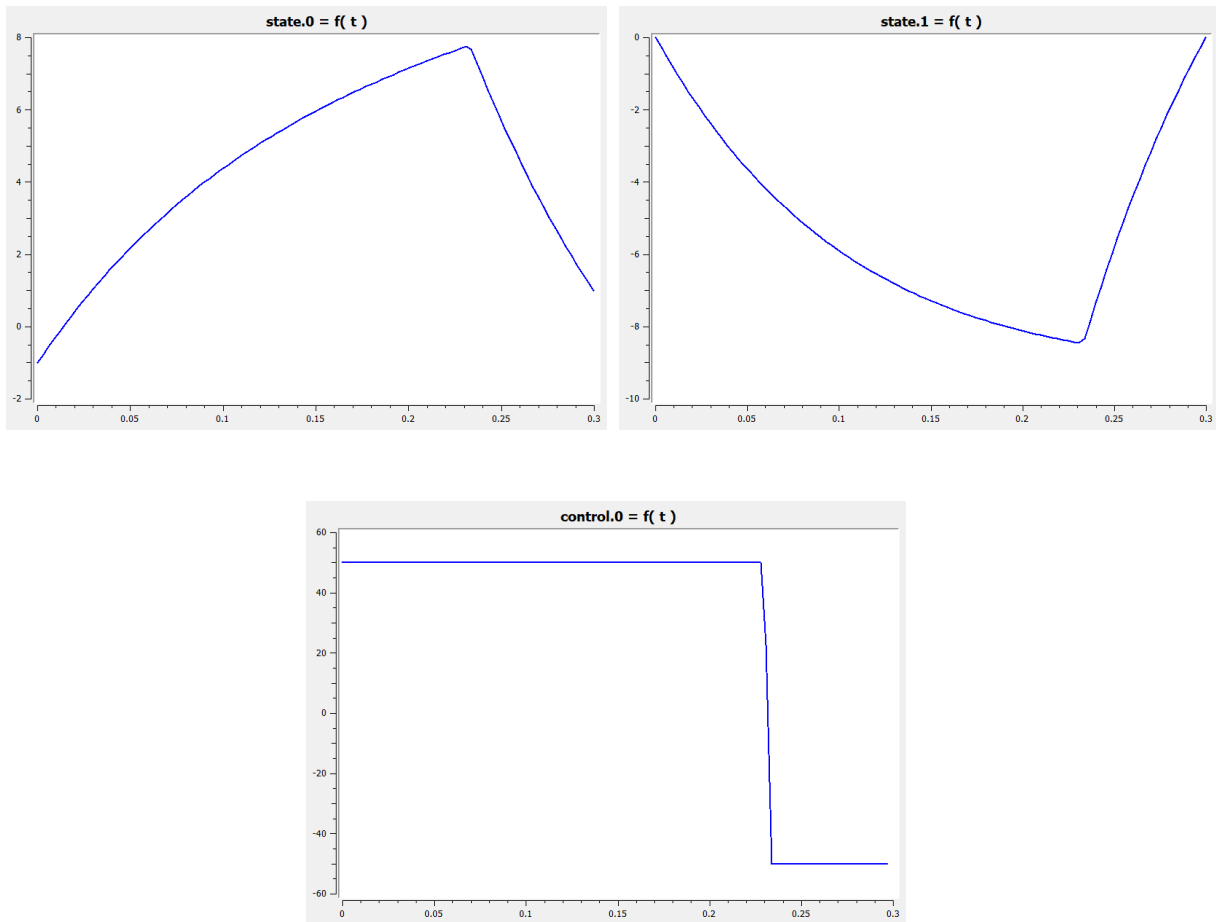
$$(p(t)^T B) u^*(t) = b,$$

donde $u^*(t)$ es el vector/variable a despejar en el sistema.

2B.- Ejercicio 8

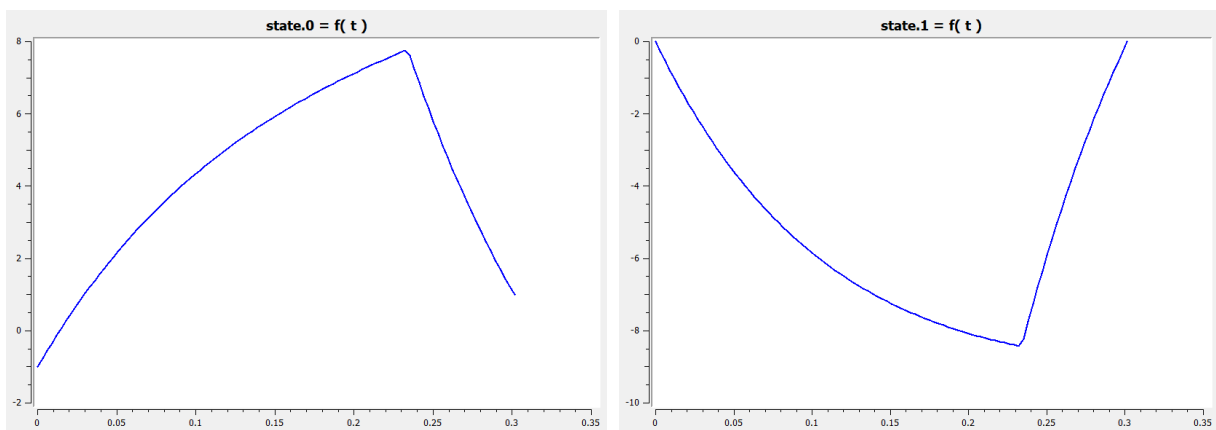
Utilizando el programa *BOCOP* se resuelve el problema de tiempo mínimo para diferentes métodos de resolución. Se comentan además los resultados obtenidos.

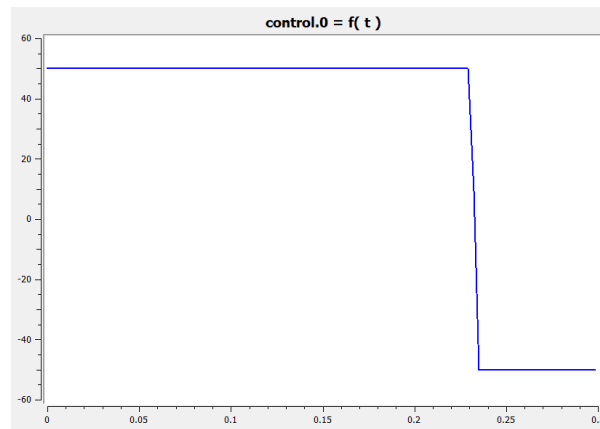
El primer método utilizado es el de midpoint de BOCOP. Los resultados son los siguientes.



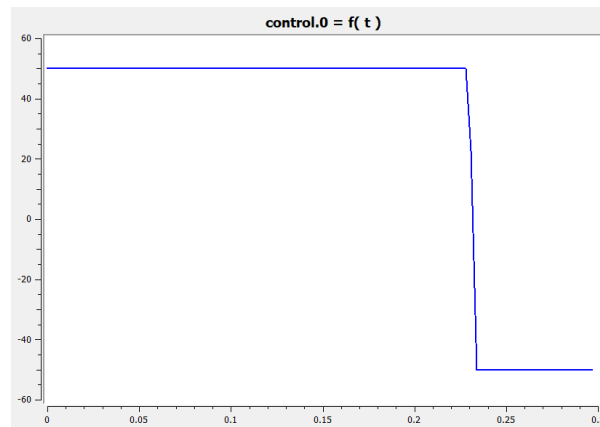
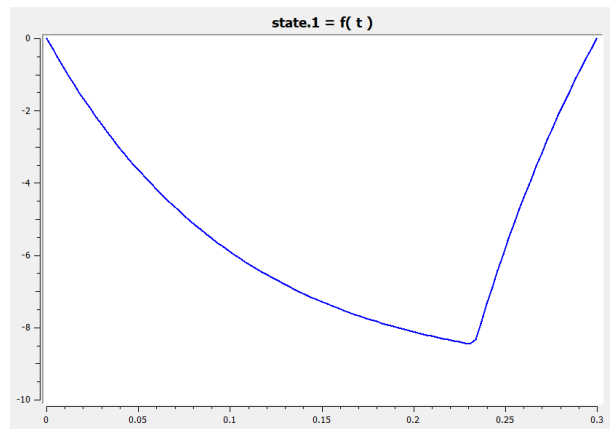
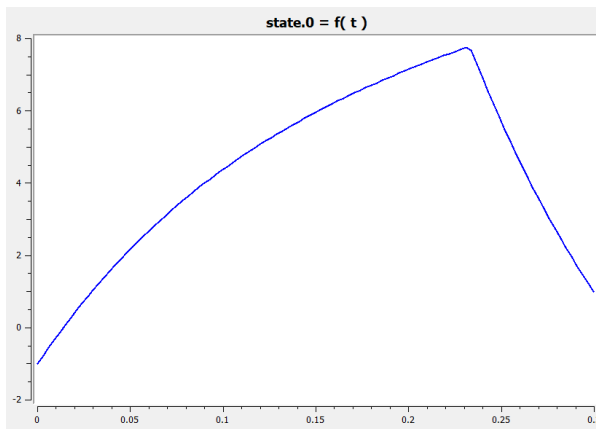
Notamos que el control está dentro de las restricciones y las trayectorias son reflejadas, lo cual tiene sentido cuando observamos la matriz A ya que esta define una dinámica de este estilo. El método toma 1 segundo y 42 iteraciones.

El método de Euler implícito es un método de orden menor a midpoint, veamos que resultados se obtienen con este.





Se obtienen resultados un poco peores tomando 3 segundos y 41 iteraciones.
El último método a analizar será el de Gauss.



Este método obtiene resultados parecidos a midpoint. Se tarda 3 segundos y toma 41 iteraciones.

2C.- Ejercicio 9

Se comparan las soluciones al utilizar los tres métodos vistos antes:

1. Método directo.
2. Método indirecto.
3. Mediante *BOCOP*.

Podemos notar que las soluciones de BOCOP son las mejores. Las soluciones por el método directo poseen trayectorias similares a las de BOCOP en forma pero el método no es capaz de recuperar la solución real al problema.

La mayor diferencia esta en el control que en el caso del método directo, se mantiene cercano a 0 y explota al final mientras que con BOCOP, tiene el comportamiento opuesto.

El método directo posee una complejidad mucho mayor entonces es más ineficiente. Esto se evidencia ya que le toma 30 segundos resolver el problema con $N = 150$, mientras que a BOCOP le toma fracciones de segundo resolver el problema con una precisión mucho mayor.