Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

MA5701 Optimización no Lineal

Informe de la Tarea 1

Desarrollo y resultados

Autor:	Manuel Torres.
Profesor:	Jorge Amaya.
Auxiliar:	Aldo Gutiérrez.
Ayudantes:	Carolina Chiu
	Mariano Vazquez

Índice general

Capítulo 1

Instrucciones

1.- Preliminares

1A.- Objetivo

El objetivo de esta tarea es usar algún paquete, como *lmfit* o *scipy* en *python* para resolver numéricamente las problemáticas presentadas.

1B.- Problema

Considerando los datos entregados en la plataforma de *U-cursos* de dos distintas aerolíneas, estos representan los retrasos de vuelos en un año comercial, en donde cada fila representa un vuelo retrasado y se conoce el tiempo de retraso de cada vuelo medido en minutos (tomando minutos enteros). Los especialistas en transporte aeronáutico modelan la función del número de vuelos con t minutos de retraso con una función exponencial de la siguiente forma:

$$R(t; , \beta, \gamma) = \alpha \exp\left(-\frac{t}{\beta} + \gamma\right),$$

en donde los parámetros α, β y γ se desconocen y serán estimados usando el método de mínimos cuadrados, es decir, minimizando con respecto a α, β y γ la función de ajuste

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = \sum_{t=1}^{N} (R(t) - T(t; \alpha, \beta, \gamma))^2,$$

en donde $R(t)$ corresponde a los datos reales de cara aerolínea.

Para estudiar el problema se sigue el siguiente esquema:

1. Imponer restricciones considerables como naturales para los parámetros de la función y encontrar la función de ajuste $R(t, \alpha, \beta, \gamma)$. Estimar el número de vuelos con atrasos entre 2 horas y 2 horas y media.

2. Resolver el problema anterior, pero en lugar de usar mínimos cuadrados, minimizar el error absoluto.

3. Repetir (1) y (2) considerando el caso en el que ambas empresas prometen que los vuelos no tendrán retrasos de 3 horas o más.

Capítulo 2

Modelamiento

1.- Datos y modelo

1A.- Datos

Para las dos aerolíneas involucradas, Malat y ListoPlane, se observan los siguientes histogramas de la cantidad de vuelos retrasados en función de los minutos de retraso.

1. Aerolínea Malat:

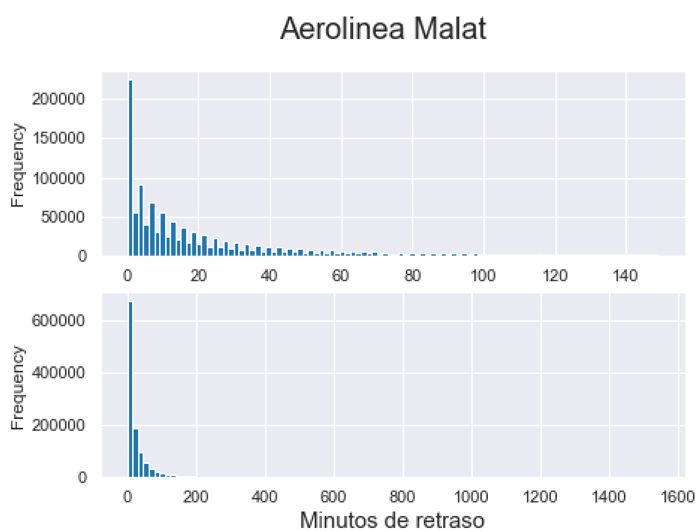


Figura 2.1: Cantidad de vuelos retrasados en función de los minutos de retraso en la aerolínea Malat. En la figura superior se muestra para minutos $t \leq 150$. En la figura inferior se muestra toda la data

2. Aerolínea ListoPlane:

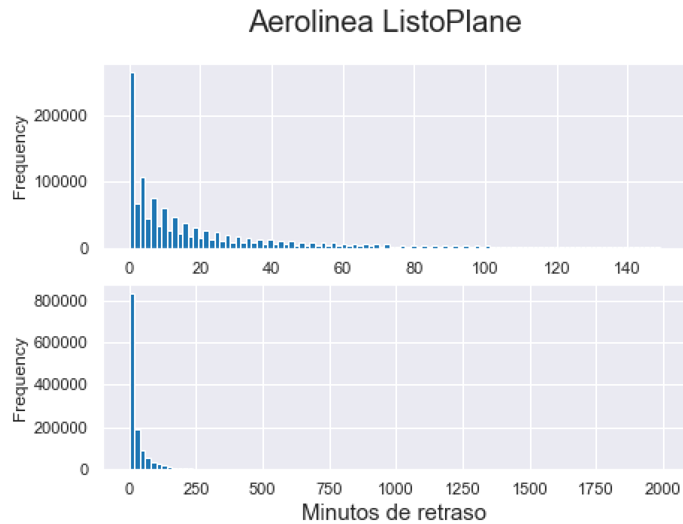


Figura 2.2: Cantidad de vuelos retrasados en función de los minutos de retraso en la aerolínea ListoPlane. En la figura superior se muestra para minutos $t \leq 150$. En la figura inferior se muestra toda la data.

Para cada caso (según la aerolínea), la cantidad de vuelos con retraso en función de los minutos de retraso corresponde a la función $R(t)$. Es posible notar en estas figuras que el comportamiento del grafo de la función es del estilo

$$R(t) = a \exp\left(-bt + c\right), \tag{2.1}$$

en donde $a, b > 0$ y $c \in \mathbb{R}$, pues es una función exponencial que decae en función de t con algún intercepto (intersección con el eje vertical en $x = 0$) igual a ae^c (no necesariamente el intercepto es a).

1B.- Modelo matemático y significados

La función del número de vuelos con t minutos de retraso como una función exponencial es de la forma:

$$R(t; \alpha, \beta, \gamma) = \alpha \exp\left(-\frac{t}{\beta} + \gamma\right).$$

Al considerar $R(t)$ como la función obtenida a partir de los datos, el problema es ajustar la función $R(t; \alpha, \beta, \gamma)$ a $R(t)$ mediante algún método, para ello se define el siguiente problema de optimización de *mínimos cuadrados*:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & f(\alpha, \beta, \gamma) = \sum_{i=1}^{N} (R(t) - R(t; \alpha, \beta, \gamma)^2 \\ \text{s.a.} \quad & \alpha, \beta \geq 0 \\ & \gamma \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

el cual se minimiza con respecto a los parámetros α, β y γ, que hasta el momento son desconocidos.

Las restricciones $\alpha, \beta \geq 0$ corresponde al comportamiento de los datos por lo discutido en la sección anterior, pues se observa que $R(t)$ para Malat y para ListoPlane sigue el comportamiento de una función como 2.1 con $a, b > 0$. Por su lado, $\gamma \in \mathbb{R}$ es un parámetro libre ya que corresponde al desplazamiento horizontal de la función, el cual viene dado simplemente por el intercepto con el eje vertical.

Es posible ver que cada parámetro tiene el siguiente significado, o bien, al menos se *supondrá* que funcionan como:

1. γ ajusta el desplazamiento horizontal de la función exponencial $e^{t+\gamma}$.

2. α ajusta el intercepto con el eje vertical de la función αe^t, este intercepto es importante pues, divide el comportamiento de la función exponencial en dos, en un crecimiento controlado para $t < 0$ y un crecimiento mayor a cualquier polinomio en $t \geq 0$.

3. Dado lo anterior los parámetros α y γ entregan el valor αe^γ, que corresponde al intercepto con el eje vertical de una función exponencial genérica de la forma $\alpha e^{kt+\gamma}$, esto es cuando $t = 0$.

4. β ajusta el decaimiento de la función exponencial, a mayor β la función $\exp\left(-\frac{t}{\beta}\right)$ decae más lento, por el contrario, a menor β la función $\exp\left(-\frac{t}{\beta}\right)$ decae más rápido.

El parámetro β es de especial interés en este modelo, pues indica que tan rápido decae la función exponencial en el modelo, a continuación se presenta un ejemplo que bien puede ser de cultura general con esta misma intuición:

Ejemplo (Decaimiento/tiempo de restitución de una función exponencial). En el problema clásico de un resorte amortiguado con tiempo de restitución τ y modo normal ω_0 se tiene la siguiente función:

$$x(t) = x_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \cos(\Omega t + \varphi_0)$$

con $x_0, \varphi_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \neq 0$ y $\Omega = \Omega(\omega_0, \tau)$. Esto modela la posición $x(t)$ de una particular que oscila en presencia de roce en torno a un origen. Es bien sabido que a mayor roce la oscilación decae a mayor velocidad, esto se presenta cuando τ toma valores bajos. Mientras que si $\tau \to +\infty$ se tendrá un sistema sin roce, recuperando un movimiento armónico simple (sin roce y sin decaimiento)

$$x(t) = x_0 \cos(\Omega t + \varphi_0).$$

2.- Resultados

Antes de resolver las preguntas, se presenta un estudio preliminar del modelo.

2A.- Parámetros estimados

Como se ha visto antes, se busca obtener una curva $R(t; \alpha, \beta, \gamma)$ lo más ajustada posible a la curva $R(t)$, para ello se busca estimar los parámetros α, β y γ mediante algún método. Para ver en detalle los métodos utilizados se recomienda revisar la codificación en el anexo.

Primer conjunto de restricciones

Considerando las restricciones

$$\alpha, \beta \geq 0, \quad \gamma \in \mathbb{R},$$

los parámetros estimados para cada aerolínea son los siguientes según cada método.

1. Aerolínea Malat:

Parámetro	Mínimos cuadrados	Error absoluto	Decaimiento exponencial
α	5.48120048	2.21708659	46885.5532
β	7.19690774	18.4408982	18.4308858
γ	9.82144688	9.95820959	-

Cuadro 2.1: Parámetros estimados para α, β y γ, para la aerolínea Malat.

2. Aerolínea ListoPlane:

Parámetro	Mínimos cuadrados	Error absoluto	Decaimiento exponencial
α	16.5239762	35.1425698	59782.7415
β	6.01595611	16.6143950	15.6196526
γ	8.93750050	7.36068215	-

Cuadro 2.2: Parámetros estimados para α, β y γ, para la aerolínea ListoPlane.

Segundo conjunto de restricciones

Considerando las restricciones

$$\alpha \geq 0, \quad 0 \leq \beta \leq 2, \quad \gamma \in \mathbb{R},$$

los parámetros estimados para cada aerolínea son los siguientes según cada método.

1. Aerolínea Malat:

Parámetro	Mínimos cuadrados	Error absoluto
α	4.02602896	3.45978959
β	2.00000000	2.00000000
γ	10.5402169	10.6870936

Cuadro 2.3: Parámetros estimados para α, β y γ, para la aerolínea Malat.

2. Aerolínea ListoPlane:

Parámetro	Mínimos cuadrados	Error absoluto
α	5.09253764	2.90562704
β	2.00000000	1.99999999
γ	10.4621683	11.0221365

Cuadro 2.4: Parámetros estimados para α, β y γ, para la aerolínea ListoPlane.

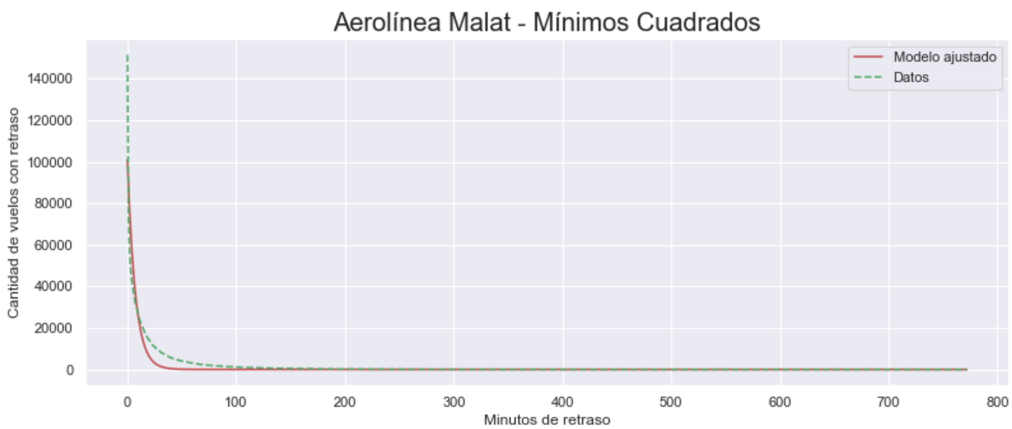
2B.- Curva ajustada de $R(t; \alpha, \beta; \gamma)$

Primer conjunto de restricciones

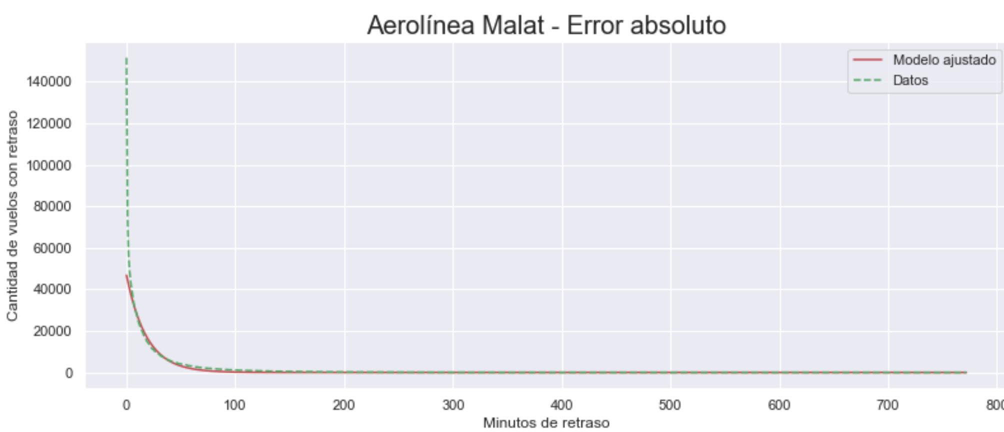
Considerando las restricciones

$$\alpha, \beta \geq 0, \quad \gamma \in \mathbb{R},$$

1. Aerolínea Malat:



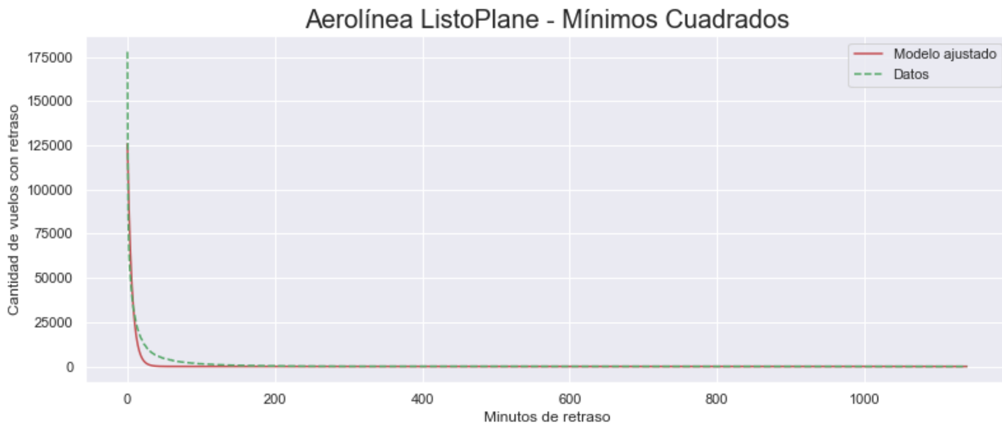
(a) Ajuste por mínimos cuadrados.



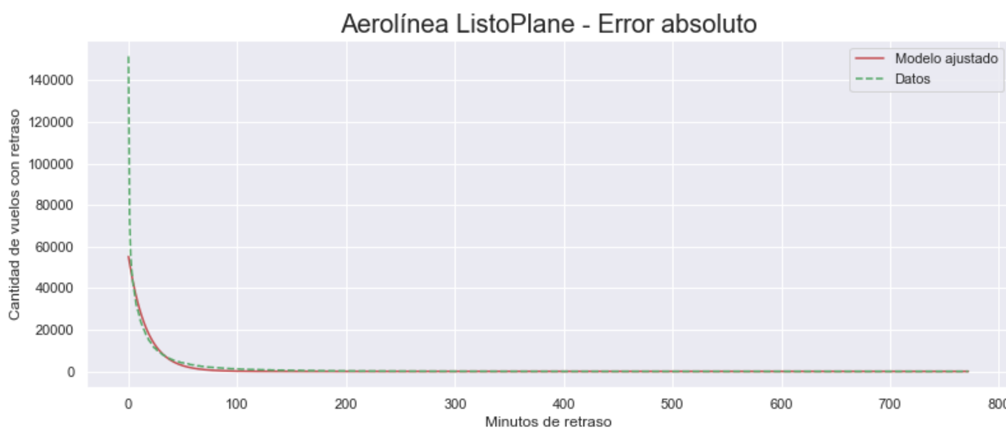
(b) Ajuste por error absoluto.

Figura 2.3: Ajuste de $R(t; \alpha, \beta, \gamma)$ para la aerolínea Malat.

2. Aerolínea ListoPlane:



(a) Ajuste por mínimos cuadrados.



(b) Ajuste por error absoluto.

Figura 2.4: Ajuste de $R(t; \alpha, \beta, \gamma)$ para la aerolínea ListoPlane.

Capítulo 3

Respuestas

1.- Preguntas de la tarea

Las preguntas con sus respectivas respuestas son:

P1.- Imponga restricciones que considere naturales para los parámetros de la función y encuentre la función de ajuste $R(t;\alpha,\beta,\gamma)$. Estime el número de vuelos con atrasos entre 2 horas y 2 horas y media.

Respuesta: El problema de optimización es:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\alpha,\beta,\gamma) = \sum_{i=1}^{N}(R(t) - R(t;\alpha,\beta,\gamma)^2 \\ \text{s.a.} \quad & \alpha,\beta \geq 0 \\ & \gamma \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

Las restricciones se explican por la interpretación vista en la sección del *modelo matemático y resultados*. En resumen:

a) $\alpha \geq 0$ significa que la función $R(t;\alpha,\beta,\gamma)$.

b) $\beta \geq 0$ significa que existe un tiempo de decaimiento, este es análogo al tiempo de restitución estudiado en el ejemplo 1.2.

c) $\gamma \in \mathbb{R}$ pues es un desplazamiento horizontal libre, que ajusta el intercepto de $R(t;\alpha,\beta,\gamma)$.

Luego, la función de ajuste $R(t;\alpha^*,\beta^*,\gamma^*)$ obtenida por mínimos cuadrados es, para cada aerolínea:

$$R_{\text{Malat}}(t;\alpha^*,\beta^*,\gamma^*) = 5{,}4\exp\left(-\frac{t}{7{,}2}+9{,}8\right) \tag{3.1}$$

$$R_{\text{ListoPlane}}(t;\alpha^*,\beta^*,\gamma^*) = 16{,}5\exp\left(-\frac{t}{6{,}0}+8{,}9\right) \tag{3.2}$$

sus gráficos se presentan en las figuras 2.3a y 2.4a respectivamente.

Además, el número de vuelos con atraso entre 2 horas y 2 horas y media corresponde a la expresión

$$v = \sum_{i=120}^{150} R(i; \alpha^*, \beta^*, \gamma^*),$$

luego se ha obtenido que para las ecuaciones 3.1 y 3.2 respectivamente:

$$\begin{aligned} \sum_{i=120}^{150} R_{\text{Malat}}(t; \alpha^*, \beta^*, \gamma^*) &= 0{,}042 \\ \sum_{i=120}^{150} R_{\text{ListoPlane}}(t; \alpha^*, \beta^*, \gamma^*) &= 0{,}001 \end{aligned}$$

es decir, la cantidad de vuelos atrasados para ambas aerolíneas en este intervalo de tiempo es prácticamente cero.

P2.- Resuelva ahora el problema anterior pero en lugar de mínimos cuadrados, minimice el error absoluto. Comente las diferencias y en qué casos cree que uno se comporta mejor que otro.

Respuesta: Resolviendo el problema de *minimización del error absoluto* sujeto a las mismas restricciones sobre α, β y γ se obtienen las siguientes funciones de ajuste $R(t; \alpha^*, \beta^*, \gamma^*)$:

$$R_{\text{Malat}}(t; \alpha^*, \beta^*, \gamma^*) = 2{,}2 \exp\left(-\frac{t}{18{,}4} + 9{,}4\right) \tag{3.3}$$

$$R_{\text{ListoPlane}}(t; \alpha^*, \beta^*, \gamma^*) = 35{,}1 \exp\left(-\frac{t}{16{,}6} + 7{,}4\right) \tag{3.4}$$

sus gráficos se presentan en las figuras 2.3b y 2.4b respectivamente.

Luego se ha obtenido que para las ecuaciones 3.3 y 3.4 respectivamente:

$$\begin{aligned} \sum_{i=120}^{150} R_{\text{Malat}}(t; \alpha^*, \beta^*, \gamma^*) &= 602{,}421 \\ \sum_{i=120}^{150} R_{\text{ListoPlane}}(t; \alpha^*, \beta^*, \gamma^*) &= 602{,}334 \end{aligned}$$

En lo anterior hay una diferencia considerable entre ambos métodos, pues como independiente de la aerolínea

$$\beta^*_{\text{error abs.}} > \beta^*_{\text{min. cuad.}} \tag{3.5}$$

por lo que el decaimiento de la función exponencial es más lento, y por lo tanto el área bajo la curva se puede esperar mayor en el caso del ajuste obtenido minimizando el error absoluto.

Además, la cantidad de vuelos con retraso obtenida en este caso al ser tan alta es posible concluir que el ajuste vía *error absoluto* es peor que el ajusto vía *mínimos cuadrados*, pues entrega valores demasiado altos.

P3.- Repita lo anterior pero considerando el caso en el que ambas empresas prometen que los vuelos no tendrán retrasos de 3 horas o más. Para esto le puede servir encontrar una restricción de los parámetros para que en la función el número de vuelos con ciertos minutos de retraso sea lo más cercada a 0.

Respuesta: Para $\alpha \geq 0$ y $\gamma \in \mathbb{R}$ se busca β_0 tal que $R(t;\alpha,\beta,\gamma) = 0$ para $t \geq 180$, como a menor β luego el decaimiento es más veloz, luego se puede enunciar el siguiente problema de convergencia:

$$(\forall t \geq 180)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \beta_0 \leq 0)(\forall \beta \leq \beta_0) : |R(t;\alpha,\beta,\gamma) - 0| < \varepsilon.$$

Se propone $\beta_0 = 2$. Con ello se estudian los problemas de optimización de *mínimos cuadrados* y *mínimo error absoluto* sujeto a las restricciones

$$\alpha \geq 0, \quad 0 \leq \beta \leq 2, \quad \gamma \in \mathbb{R}.$$

Los parámetros obtenidos se presentan en las tablas 2.3 y 2.4 para las aerolíneas Malat y ListoPlane respectivamente. Las funciones ajustadas $R(t;\alpha^*,\beta^*,\gamma^*)$ son, en cada caso:

a) Mínimos cuadrados:

$$\begin{aligned} R_{\text{Malat}}(t;\alpha^*,\beta^*,\gamma^*) &= 4{,}0 \exp\left(-\frac{t}{2{,}0} + 10{,}5\right) \\ R_{\text{ListoPlane}}(t;\alpha^*,\beta^*,\gamma^*) &= 5{,}1 \exp\left(-\frac{t}{2{,}0} + 10{,}5\right) \end{aligned}$$

b) Error absoluto:

$$\begin{aligned} R_{\text{Malat}}(t;\alpha^*,\beta^*,\gamma^*) &= 3{,}5 \exp\left(-\frac{t}{2{,}0} + 10{,}7\right) \\ R_{\text{ListoPlane}}(t;\alpha^*,\beta^*,\gamma^*) &= 2{,}9 \exp\left(-\frac{t}{2{,}0} + 11{,}0\right) \end{aligned}$$

Luego, la cantidad de vuelos con retraso entre 2 horas y 2 horas y media son, en cada caso:

a) Mínimos cuadrados:

$$\begin{aligned} \sum_{i=120}^{150} R_{\text{Malat}}(t;\alpha^*,\beta^*,\gamma^*) &= 3{,}2 \times 10^{-21} \approx 0 \\ \sum_{i=120}^{150} R_{\text{ListoPlane}}(t;\alpha^*,\beta^*,\gamma^*) &= 4{,}1 \times 10^{-21} \approx 0 \end{aligned}$$

b) Error absoluto:

$$\begin{aligned}\sum_{i=120}^{150} R_{\text{Malat}}(t;\alpha^*,\beta^*,\gamma^*) &= 3{,}4\times 10^{-21}\approx 0\\ \sum_{i=120}^{150} R_{\text{ListoPlane}}(t;\alpha^*,\beta^*,\gamma^*) &= 4{,}1\times 10^{-21}\approx 0\end{aligned}$$

lo cual es esperable, pues se propuso $\beta_0 = 2$ tal que el decaimiento sea lo suficientemente rápido para asegurar que luego de 180 minutos no habrán retrasos, posiblemente al tener satisfecho esto a partir de los 120 minutos es posible proponer un β_0' menos restrictivo tal que se siga cumpliendo la condición.

Comentario. En términos de codificación, esta parte no tiene ninguna diferencia pues basta con añadir la restricción $\beta \leq 2$ y volver a correr el código.

P4.- Comente qué aerolínea elegiría en cada caso (con y sin la política interna) si usted tiene un vuelo con combinación y no se puede retrasar más de 2 horas.

Respuesta: Para cada caso:

a) Sin la política (primer conjunto de restricciones): Se elige la aerolinea *Malat* puesto lo estudiado en la *pregunta 1*, ya que pasada las 2 horas ya practicamente no hay retrasos.

b) Con la política (segundo conjuntos de restricciones): Dado que con la nueva política, que en el modelo matemático se impone con $\beta \leq 2$, ambas aerolíneas son tales que practicamente no hay retrasos a partir de las 2 horas es irrelevante elegir la aerolinea bajo este criterio, pues resultan ser ambas confiables.

2.- Conclusión

Se ha estudiado el problema de ajuste de $R(t;\alpha,\beta,\gamma)$ sobre $R(t)$ mediante *mínimos cuadrados* y el *mínimo error absoluto*, con ello es posible predecir para t minutos la cantidad de vuelos con retraso para cada aerolínea y con ello decidir de mejor manera qué aerolínea contratar, como se discutió en la *pregunta 4*.

Además se ha verificado el funcionamiento de las hipótesis sobre los significados de los parámetros α, β y γ.

Apéndice A

Anexo

1.- Codificación

1A.- Tratamiento de la data

La lectura de los datos de realizó de la siguiente manera:

```
# Importar tabla con la data
retrasos_aerolineas = pd.read_csv(r"C:\Users\Personal\Documents\Ingenier a civil matem tica\MA5701 Optimizaci n no lineal\Tarea1\retrasos_aerolineas.csv")
# Mostrar la tabla con la data
retrasos_aerolineas
# Base de datos restringida a cada aerolinea
listoplane = retrasos_aerolineas[retrasos_aerolineas["Aerol nea"] == "ListoPlane"]
malat      = retrasos_aerolineas[retrasos_aerolineas["Aerol nea"] == "MALAT"]
```

Listing A.1: Importar la data

El paso de los datos a un formato adecuado para trabajar en formato Pandas se realizó de la siguiente manera:

```
# Datos de la aerolinea Malat
retraso_malat          = malat.groupby(["Retraso de partida(en minutos)"])["Retraso de partida(en minutos)"].count()
retraso_malat.sort_index(ascending=True, inplace=True)
ocurrencias_malat      = retraso_malat.values
minutos_malat          = retraso_malat.index.values.astype(int)
data_frame_malat       = {"Minutos de retrasos": minutos_malat, "Ocurrencia":ocurrencias_malat}
# Datos de la aerolinea ListoPlane
retraso_listoplane     = ListoPlane.groupby(["Retraso de partida(en minutos)"])["Retraso de partida(en minutos)"].count()
retraso_listoplane.sort_index(ascending=True, inplace=True)
ocurrencias_listoplane = retraso_listoplane.values
minutos_listoplane     = retraso_listoplane.index.values.astype(int)
data_frame_listoplane  = {"Minutos de retrasos": minutos_listoplane, "Ocurrencia":ocurrencias_listoplane}
# Datos en Pandas
aerolinea_malat        = pd.DataFrame(data = data_frame_malat)
```

```
aerolinea_listoplane    = pd.DataFrame(data = data_frame_listoplane)
```

Listing A.2: Paso de los datos a Pandas

1B.- Métodos

En esta sección se presentan los métodos básicos con los que se resolvió el problema.

```
# Modelo
def y_modelo(x, alpha, beta, gamma):
    """
    -Input:
    -Output:
    -Descripcion:
    """
    output = alpha*np.exp(-x/beta + gamma)
    return output
# Metodos de estimacion
def minimos_cuadrados(theta, data):
    """
    -Input:
    -Output:
    -Descripcion:
    """
    # Parametros
    alpha = theta['alpha'].value
    beta  = theta['beta'].value
    gamma = theta['gamma'].value
    # Ecuacion
    model = np.array([y_modelo(x, alpha, beta, gamma) for x in range(len(data)
    )])
    output = model - np.array(data['Ocurrencia'])
    return output
def error_abs(theta, data):
    """
    -Input:
    -Output:
    -Descripcion:
    """
    # Parametros
    alpha = theta['alpha'].value
    beta  = theta['beta'].value
    gamma = theta['gamma'].value
    # Ecuacion
    model = np.array([y_modelo(x, alpha,beta,gamma) for x in range(len(data))
    ])
    output = np.sqrt(np.abs(model - np.array(data['Ocurrencia'])))
    return output
```

Listing A.3: Métodos (funciones de python) implementados

```
# Parametros alpha, beta, gamma con sus restricciones
theta = Parameters()
theta.add('alpha', value = 1, min=0)
theta.add('beta', value = 1, min=0)
```

```
theta.add('gamma', value = 1)
```

Listing A.4: Codificación de los parámetros con el primer conjunto de restricciones

```
# Parametros alpha, beta, gamma con sus restricciones
theta = Parameters()
theta.add('alpha', value = 1, min=0)
theta.add('beta', value = 1, min=0, max=2)
theta.add('gamma', value = 1)
```

Listing A.5: Codificación de los parámetros con el segundo conjunto de restricciones