MA4702 Programación Lineal Mixta
Post-Laboratorio #2

Profesor: Martín Matamala, **Auxiliares:** Christian Palma & Benkamín Jauregui.
Grupo 1: Alonso Rojas, Cristobal Ramos, Karim Saud, Manuel Torres.

Preliminares desde el laboratorio

Dados $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $g, d \in \mathbb{R}^m$, tenemos los *problemas primal y dual* respectivamente dados por

$$\begin{array}{rll} (\mathcal{P}) & \text{máx} & g^T Ax \\ & \text{s.a} & Ax \leq d, \\ & & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j = 1, \\ & & x \geq 0, \end{array} \tag{1}$$

y

$$\begin{array}{rll} (\mathcal{D}) & \text{mín} & \theta + d^T y \\ & \text{s.a} & (A^T y)_j + \theta \geq (A^T g)_j, \quad \forall j \in K, \\ & & y \geq 0, \quad \theta \in \mathbb{R}. \end{array} \tag{2}$$

Para resolver el problema $(\mathcal{P})$, como hemos visto durante el *laboratorio 2*, podemos aplicar el *algoritmo de generación de columnas*, esto es, un método iterativo que consiste en generar problemas truncados. Tenemos el *problema primal de la relajación*

$$\begin{array}{rll} (\mathcal{P}^K) & \text{máx} & g^T A^K x^K \\ & \text{s.a} & A^K x^K \leq d, \\ & & \displaystyle\sum_{j\in K} x_j = 1, \\ & & x^K \geq 0, \end{array} \tag{3}$$

en donde K es un subconjunto de $\{1, \ldots, n\}$, el cual identificará las columnas que serán utilizadas en una iteración del algoritmo. Así mismo tenemos el *problema dual de la relajación* dado por

$$\begin{array}{rll} (\mathcal{D}^K) & \text{mín} & \theta + d^T y \\ & \text{s.a} & (A^T y)_j + \theta \geq (ATg)_j, \quad \forall j \in K, \\ & & y^{\geq}0, \ \theta \in \mathbb{R}. \end{array} \tag{4}$$

Además, veremos que una solución óptima $(\overline{y}, \overline{\theta})$ de $(\mathcal{D}^K)$ es factible para $(\mathcal{D})$ ssi el valor del siguiente problema es al menos $-\overline{\theta}$:

$$(\mathcal{E}) \quad \text{mín} \quad (A^T(\overline{y} - g))_j \tag{5}$$

A continuación demostraremos las afirmaciones antes realizadas.

Solución de los problemas

P1.- Demuestre que el dual de $(\mathcal{P})$ está dado por $(\mathcal{D})$, y que éste es factible y acotado. Donde $(\mathcal{P})$ y $(\mathcal{D})$ están descritos en 1 y 2 respectivamente.

Solución: Partimos escribiendo $\mathcal{P}$ en forma general. Para esto, definamos $B = \begin{pmatrix} A \\ 1_{1\times n} \\ -1_{1\times n} \\ -I_n \end{pmatrix}$, $f = \begin{pmatrix} d \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $c = A^\top g$. De esta forma, vemos directamente que el problema original se escribe como

$$\begin{aligned} \max\ & c^\top x \\ Bx &\leq f \end{aligned}$$

Así, por lo visto en clases su dual es

$$\begin{aligned} \min\ & f^\top z \\ B^\top z &= c \\ z &\geq 0 \end{aligned}$$

Notemos que z puede ser escrito como $z = \begin{pmatrix} y \\ \mu \\ \nu \\ \eta \end{pmatrix}$ con $y \in \mathbb{R}^m$, $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ y $\eta \in \mathbb{R}^n$. De esta forma, $(B^\top z)_j = (A^\top y)_j + \mu - \nu - \eta_j, \forall j \in [n]$ y el problema se escribe como

$$\begin{aligned} \min\ & d^\top y + \mu - \nu \\ (A^\top y)_j + \mu - \nu - \eta_j = c_j &= (A^\top g)_j, \forall j \in [n] \\ y, \mu, \nu, \eta &\geq 0 \\ y \in \mathbb{R}^m, \mu, \nu \in \mathbb{R}, \eta &\in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Veremos que el problema anterior equivale a

$$\begin{aligned} \min\ & d^\top y + \theta \\ (A^\top y)_j + \theta &\geq (A^\top g)_j, \forall j \in [n] \\ y &\geq 0 \\ y \in \mathbb{R}^m, \theta &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Para esto, veamos que dada una punto factible (y, μ, ν, η) para el primero, tomamos $\theta = \mu - \nu$ y entonces tenemos que claramente $y \geq 0$ y $\theta \in \mathbb{R}$. Por otra parte, para todo $j \in [n]$, tenemos que $(A^\top y)_j + \theta - (A^\top g)_j = (A^\top y)_j + \mu - \nu - (A^\top g)_j = \eta_j \geq 0$, concluyendo que $(A^\top y)_j + \theta \geq$

$(A^\top g)_j$. Así, tenemos que (y,θ) es factible para el segundo y tiene el mismo valor en la función objetivo que (y,μ,ν,η) ya que $d^\top y + \mu - \nu = d^\top y + \theta$.

Recíprocamente, tenemos dada (y,θ) solución factible del segundo, entonces como todo real se puede escribir como diferencia de positivos, sean $\mu,\nu \geq 0$ reales tales que $\mu - \nu = \theta$. Elegimos además, para cada $j \in [n]$, $\eta_j = (A^\top y)_j + \theta - (A^\top g)_j \geq 0$, entonces vemos que es directo que (y,μ,ν,η) es factible en el primero por construcción y tiene el mismo valor en su función objetivo que (y,θ) ya que $d^\top y + \theta = d^\top y + \mu - \nu$.

Con todo esto, vemos que el problema $\mathcal{D}$ es equivalente al dual de $\mathcal{P}$, siendo sólo una reparametrización de su dual canónico.

Por otra parte, vemos que $\mathcal{D}$ es factible ya que podemos tomar $y = 0$ y, como θ es libre, podemos tomarlo suficientemente grande para que sea mayor que todos los $(A^\top g)_j - (A^\top y)_j$ y, como hay finitos de estos, esto siempre es posible.

Por lo visto en clases, al ser $\mathcal{D}$ factible, queda la opción de que o $\mathcal{P}$ sea infactible o que ambos sean factibles y acotados. Si suponemos que A, d, g son tales que $\mathcal{P}$ es factible, entonces concluimos que ambos son acotados, en particular, $\mathcal{D}$ es acotado.

P2.- Justifique brevemente que $(\mathcal{D}^K)$ es a la vez el dual del problema $(\mathcal{P}^K)$ y una relajación del problema $(\mathcal{D})$. Demuestre además que una solución óptima $(\overline{y},\overline{\theta})$ de $(\mathcal{D}^K)$ es factible para $(\mathcal{D})$ ssi el valor de $(\mathcal{E})$ es al menos $-\overline{\theta}$. Donde $(\mathcal{P}^K)$, $(\mathcal{D}^K)$ y $(\mathcal{E})$ están descritos en 3, 4 y 5 respectivamente.

Solución: El proceso para obtener el dual de $(\mathcal{P}^K)$ es análogo a la obtención del dual de $(\mathcal{P})$ desarrollado en la P1 (es un caso particular, tomando A^K en vez de A y x^K en vez de x). Por otro lado es claro que $(\mathcal{D}^K)$ es una relajación del problema $(\mathcal{D})$, pues se quiere minimizar la misma función, pero con menos restricciones, al elegir sólo algunos j de $[n]$ $(K \subseteq [n])$.

Para probar la equivalencia tomemos $(\overline{y},\overline{\theta})$ óptimo del problema $(\mathcal{D}^K)$. Queremos probar que $(\overline{y},\overline{\theta})$ es factible para $(\mathcal{D})$ ssi el valor de (ε) es al menos $-\overline{\theta}$. Con el problema (ε) el siguiente:

$$(\varepsilon) \quad \min_{j\in[n]} \quad (A^T(\overline{y} - g))_j$$

Como $(\overline{y},\overline{\theta})$ es óptimo de $(\mathcal{D}^K)$, entonces $\overline{y} \geq 0$ y $\overline{\theta} \in \mathbb{R}$.

Luego,

$$\begin{aligned}
&(\overline{y},\overline{\theta}) \quad \text{es factible para} \quad (\mathcal{D}) \\
\iff& \quad (A^T\overline{y})_j + \overline{\theta} \geq (A^T g)_j \quad \forall j \in [n] \\
\iff& \quad (A^T(\overline{y} - g))_j \geq -\overline{\theta} \quad \forall j \in [n] \\
\iff& \min_{j\in[n]} \quad (A^T(\overline{y} - g))_j \geq -\overline{\theta}
\end{aligned}$$

Y queda demostrada la equivalencia.