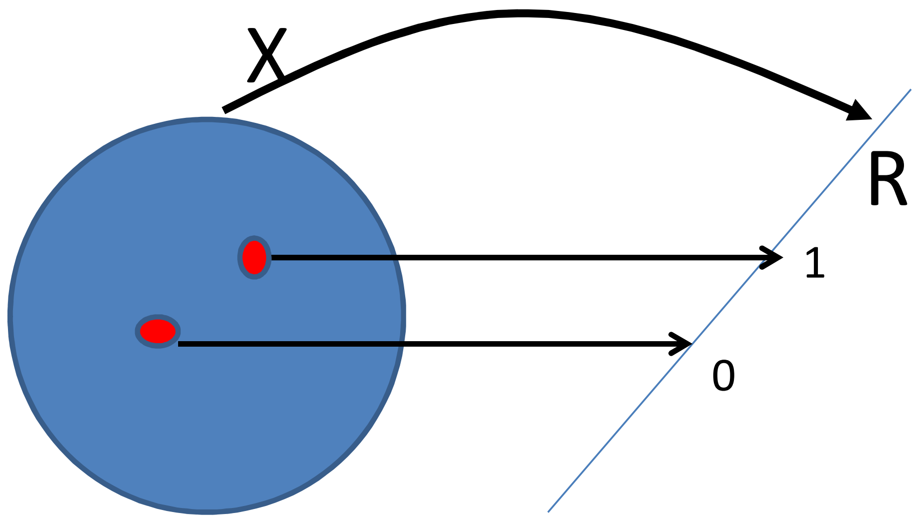
VARIABLE ALEATORIA

- **Definición**
- Sea Ω el espacio muestral ligado a un experimento aleatorio. Una variable aleatoria (v.a.) es una función X que asigna a cada elemento ω del espacio muestral un número del conjunto de los números reales R.
-
-

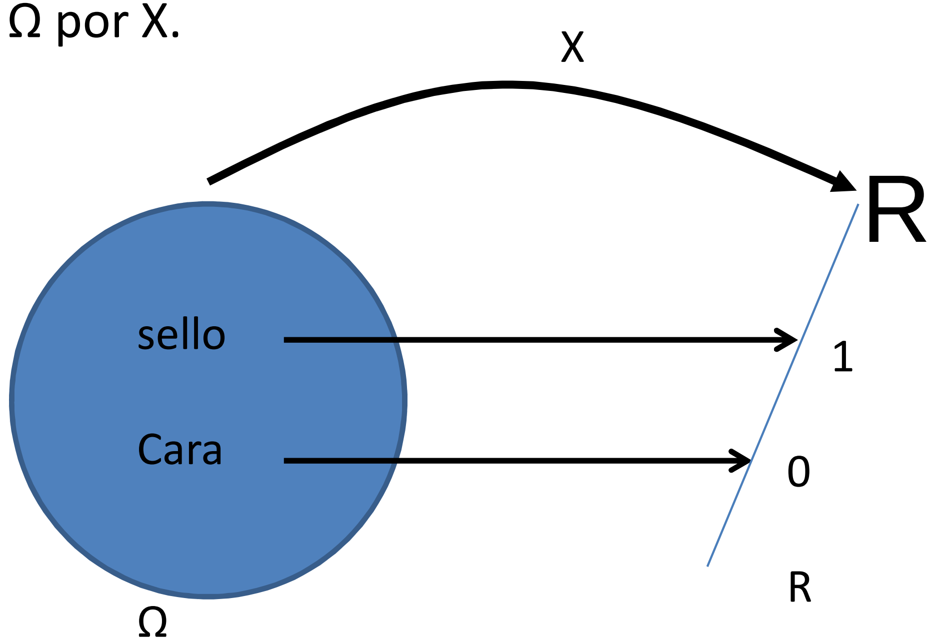


EJEMPLO 1: variable aleatoria

- Є= Arrojar una moneda
- Ω={cara, sello}
- X(cara)= 0;
- X(sello)=1
- X(Ω) = {0; 1} es la imagen de Ω por X.

$$X: \Omega \to R$$

$$X(\omega)=x$$



Ejemplo 2: Variable aleatoria

- Consideremos el experimento aleatorio de seleccionar dos cheques de un total de cinco, sin reemplazo. Entre esos cinco cheques hay dos de ellos que tienen error en la fecha.
- El espacio muestral es:

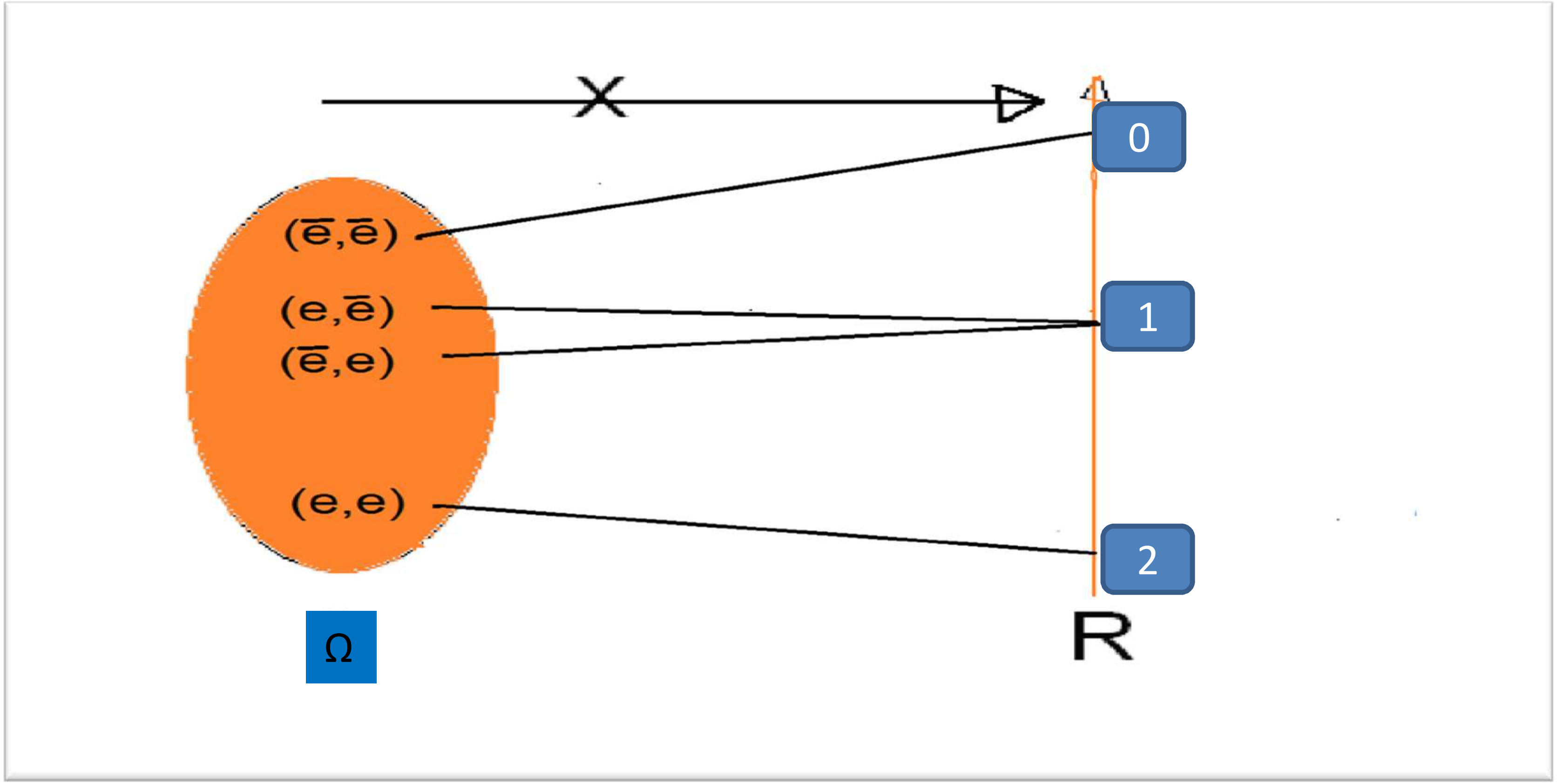
$$\Omega = \{(e´,e´),(e,e´),(e´,e),(e,e)\}$$

- Si definimos la variable aleatoria X como,

X : ***"número de cheques con error“***

- X ((e´,e´)) = 0
- X ((e´,e)) = X ((e,e´)) = 1
- X ((e,e)) = 2

EJEMPLO 2: Variable aleatoria



Ejemplo 2: Variable aleatoria

- Si calculamos su probabilidad de la variable
- X : ***"número de cheques con error"***

- $P(\{(e',e')\}) = P(X=0) = 6/20$

- $P(\{(e,e'),(e',e)\}) = P(X=1)=12/20$

- $P(\{(e,e)\}) = P(X=2) = 2/20$

Clasificación de las variables ALEATORIAS

Sea (Ω; P) un espacio de probabilidad y X una variable aleatoria definida en Ω.

- X es una variable aleatoria **DISCRETA** si X(Ω) es un conjunto finito o infinito numerable.

- X es una variable aleatoria **CONTINUA** si X(Ω) es un conjunto infinito no numerable.

EJEMPLO 3: V.A. DISCRETAS Y CONTINUAS

Ejemplo de la moneda

Ω = (cara; sello), $X(\Omega) = \{0; 1\}$

X es una variable aleatoria discreta

Ejemplo de los cheques

$\Omega = \{(e; e); (e'; e); (e; e'); (e'; e')\}$

X = "número de cheques con error"

$X(\Omega) = \{0; 1; 2\}$

X es una variable aleatoria discreta

Ejemplo del círculo unitario

Consideremos el experimento aleatorio de seleccionar un punto en el círculo de radio uno

$\Omega =\{(x,y)/x+y\leq 1\}$

$X(\Omega)=[-1,1]$

X es una variable aleatoria continua

Variable aleatoria continua

Ejemplo del círculo unitario

ε: "Seleccionar un punto en el círculo de radio uno"

- Ω **={(x,y)/x+y≤1}**

Sea A un suceso en **Ω** . Definimos la probabilidad de A por:

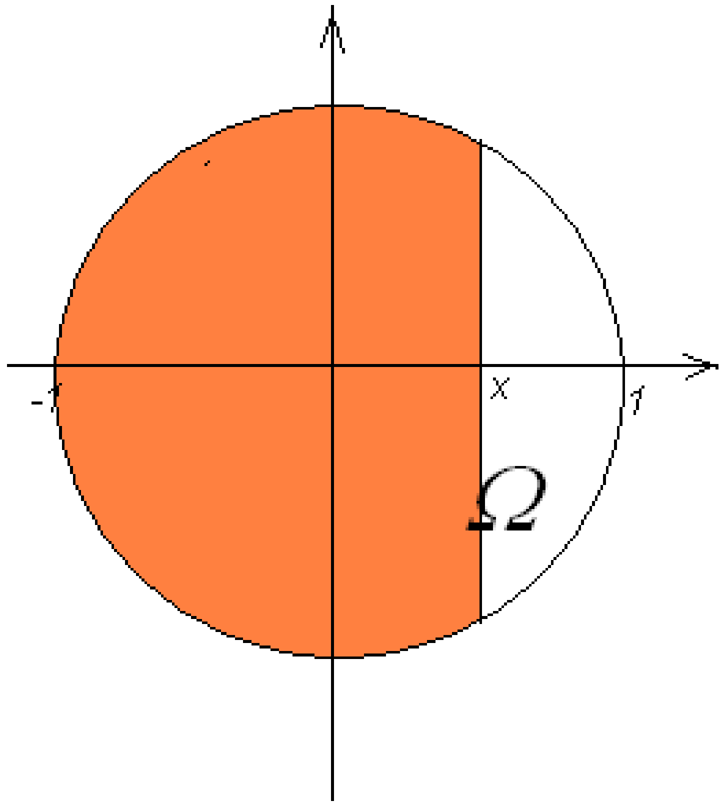
- P(A) =área de A/π para cada A∈ $\mathscr{P}(\Omega)$

Definimos una función

- X : Ω ->R;
- X(x; y) = x

Evidentemente, **X(Ω) = [-1; 1]**

Variable aleatoria continua



Variables aleatorias discretas

VARIABLE ALEATORIA

VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS

El suceso “que la suma obtenida sea 7” es
A={(6,1), (5,2),(4,3),(3,4),(2,5),(1,6)}.

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
⚁	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
⚂	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
⚃	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
⚄	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
⚅	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

P(A)=6/36=1/6.

VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS

- ε: Lanzar dos dados
- Ω={
- ¿Cuántos elementos tiene? (sucesos elementales)

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
⚁	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
⚂	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
⚃	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
⚄	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
⚅	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Como Ω tiene 36 elementos (sucesos elementales), el espacio de sucesos $\mathcal{P}(\Omega)$ tiene 2^{36} sucesos !!!! **Ω ES EQUIPROBABLE**

VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS

- Si : Tirar dos dados legales y observar los puntos obtenidos
- *A* es "obtener suma 7", *B* es "obtener dos resultados iguales" Y *C* es "obtener exactamente un 3",
- ¿cuánto valen P(A), P(B) y P(C)?

	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

- P(A)=6/36=1/6.
- P(B)=6/36=1/6.
- P(C)=10/36.

VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS

ε: tirar dos dados legales y observar los puntos obtenidos

Ω es el conjunto de los 36 pares ordenados que vimos en el gráfico anterior.

X: “suma de los dos valores obtenidos”

X (Ω)={ 2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12}

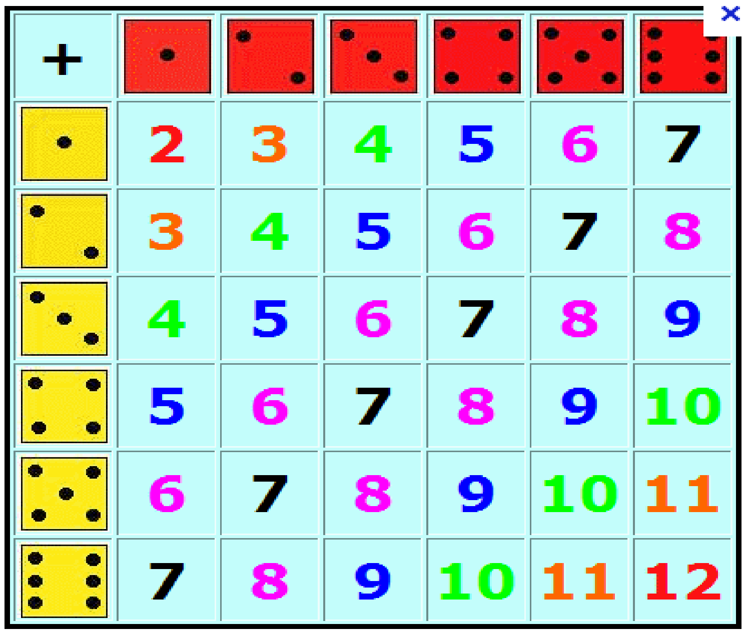
P(X=7)=1/6

P(X=6)=5/36

P(X=12)=1/36

P(X=1)=0

X(Ω) NO ES EQUIPROBABLE



+						
	2	3	4	5	6	7
	3	4	5	6	7	8
	4	5	6	7	8	9
	5	6	7	8	9	10
	6	7	8	9	10	11
	7	8	9	10	11	12

VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS

- LA PROBABILIDAD SE CALCULA A SUCESOS Y NO HEMOS HECHO OTRA COSA:
- "X: la suma de los dos valores obtenidos es 7"

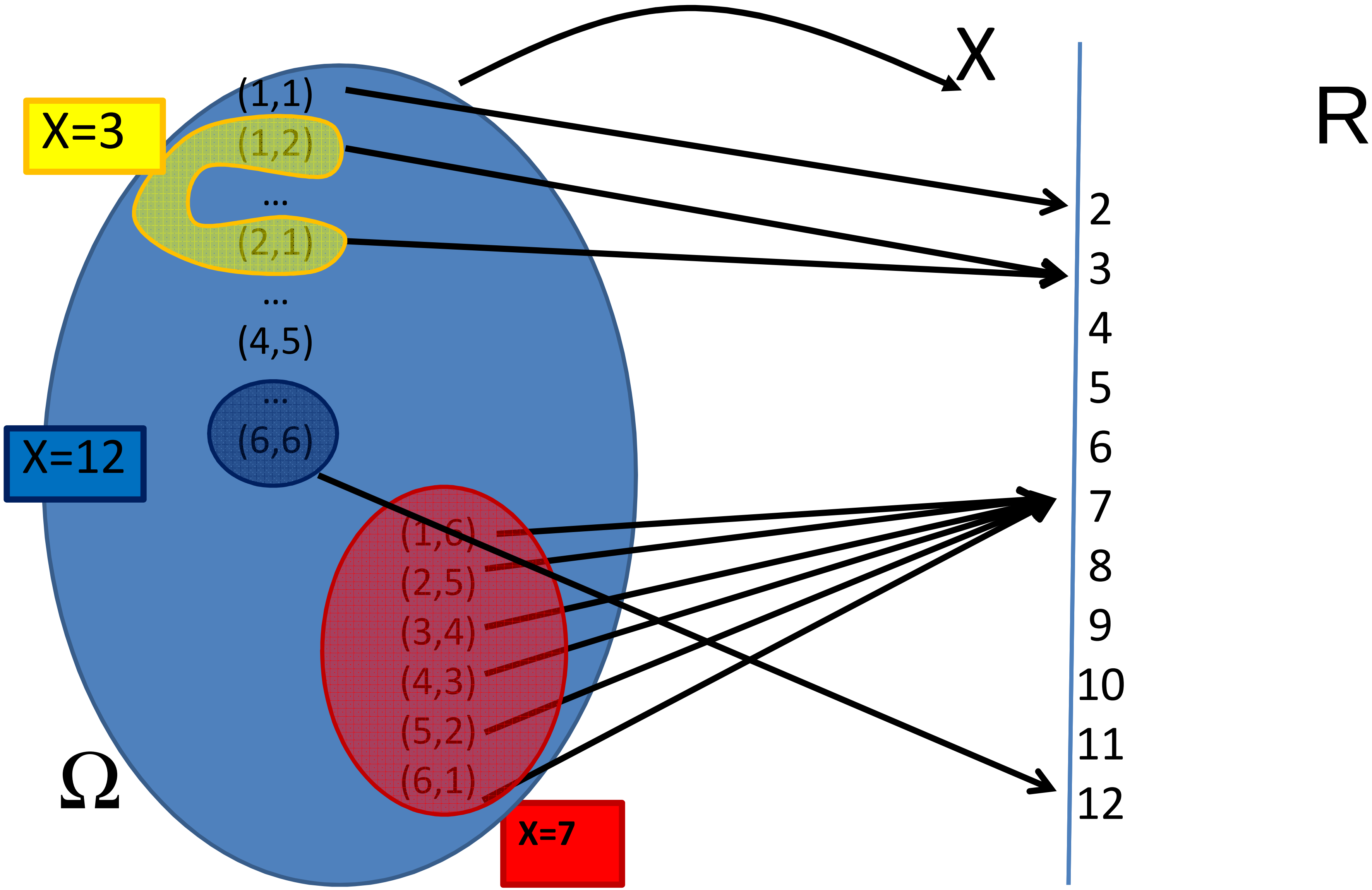
A={(6,1), (5,2),(4,3),(3,4),(2,5),(1,6)}

- "X: la suma de los dos valores obtenidos es 12"

C= {(6,6)}

- ¿Qué suceso es
- "X: la suma de los dos valores obtenidos es1"?
- D={}=∅
- Si le calculamos la probabilidad
- P(D)=P(∅)=0

VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS



VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS

Teniendo en cuenta que:

ε: tirar dos dados legales y observar los puntos

Ω es el conocido conjunto de 36 elementos

X: suma de los valores obtenidos en los dados

En lugar de	Escritura reducida
{(6,6)}	X=12
{(2,1),(1,2)}	X=3
P({(2,1),(1,2)})	P(X=3)

Y ESTAMOS HACIENDO LAS CUENTAS BIEN PORQUE ESTAMOS CALCULANDO PROBABIILIDAD A SUCESOS.

Variables aleatorias discretas

Si seguimos tirando dos dados, ahora nos interesa ver si los dos resultados son iguales o no:

ε: tirar dos dados legales y observar los puntos obtenidos en la cara superior

- Ω es el conjunto formado por los 36 pares
- B :“obtener dos resultados iguales”
- B={(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)}
- P(B)=6/36

Variables aleatorias discretas

Definimos la variable aleatoria Y

$Y: \Omega \rightarrow R$

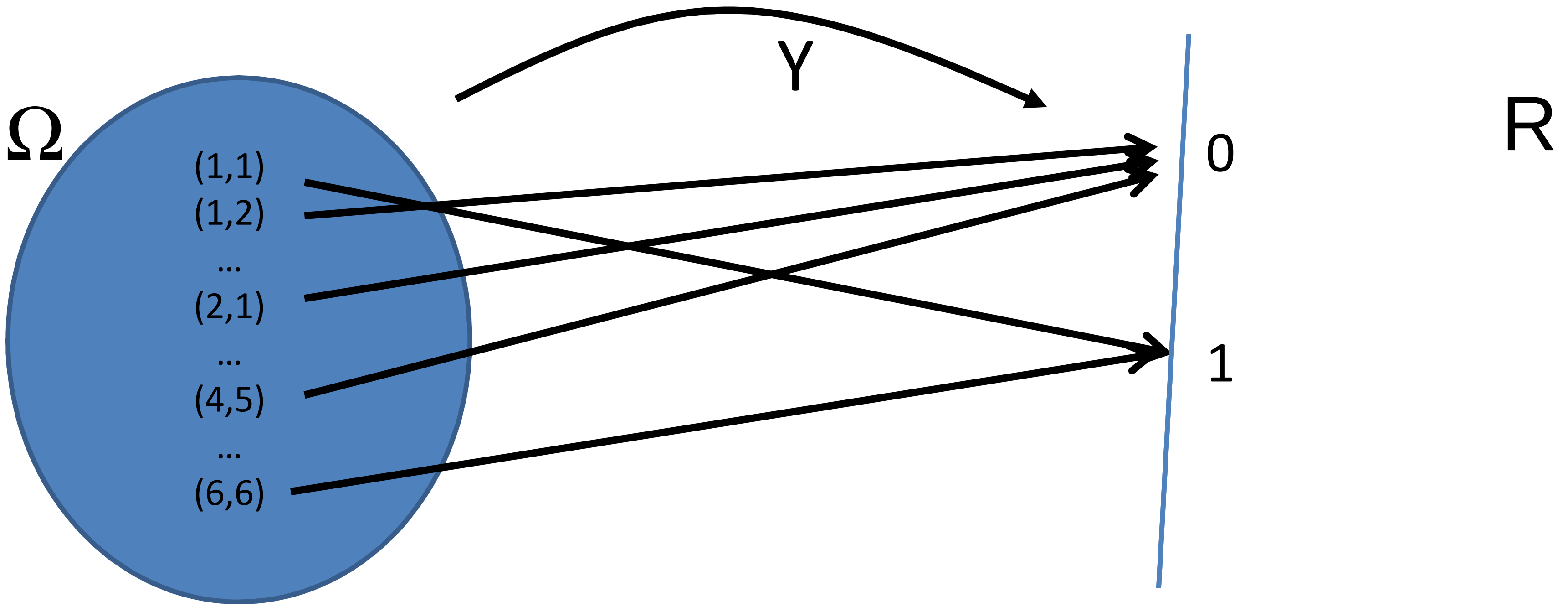
$\omega \text{->} Y(\omega)=x$

$(a,b) \text{->} Y((a,b))=1$ si $a=b$

$(a,b) \text{->} Y((a,b))=0$ si $a \neq b$

- Esta variable aleatoria toma los valores 0 y 1
- Es un caso especial de v.a. que se llama **v.a. de Bernoulli**.

VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS



B = "obtener dos resultados iguales"

B={(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)}; P(B)=6/36

Si consideramos la v.a. Y:

Y((1,1))=1; Y((2,2))=1.....Y(6,6)=1

Luego: P(Y=1)=6/36

P(Y=0)=30/36

FUNCION DE PROBABILIDAD de v.a.d.

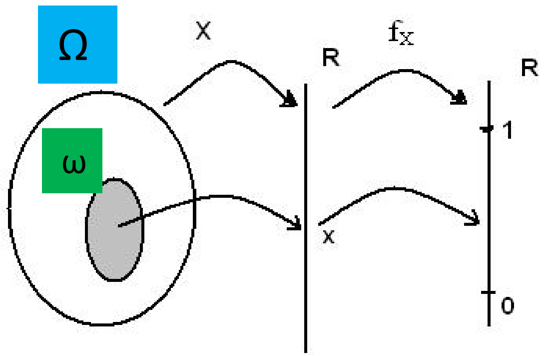
Es posible desarrollar una función matemática que asigne a cada *realización* de la v.a. X una determinada probabilidad.

<u>DEFINICION</u>: Sea (Ω; P) un espacio de probabilidad y X una variable aleatoria discreta definida en Ω. Se llama función densidad de probabilidad a la función:

fx : R -> [0; 1];

$$f_X(x) = P(\{\omega / \omega \in \Omega \wedge X(\omega)=x\})$$

$$f(x) = P(X=x)$$



FUNCION DENSIDAD DE PROBABILIDAD de v.a.d.

En el ejemplo de los cheques
(experimento aleatorio de seleccionar dos cheques de un total de cinco, sin reemplazo. Entre esos cinco cheques hay dos de ellos que tienen error en la fecha)

- X :"número de cheques con error obtenidos en las dos extracciones"
- X (e´,é) = 0
- X (e´,e) = X (e,e´) = 1
- X (e,e) = 2
- X(Ω) = {0,1,2}

<u>v.A discretas:</u> FUNCION DENSIDAD DE PROBABILIDAD

Seguimos con el ejemplo de los cheques

- Calculemos la función:

  $f_X(x) = P(X = x) = P(\{w / w \in \Omega \wedge X(\Omega) = x\})$

- $f_X(0) = P(X = 0) = P(\{w / w \in \Omega \wedge X(\Omega) = 0\} = P(\{(e´, e´)\}) = 6/20$
- $f_X(1) = P(X = 1) = P(\{w / w \in \Omega \wedge X(\Omega) = 1\}) = P(\{(e, e´), (e’, e)\}) = 12/20$
- $f_X(2) = P(X = 2) = P(\{w / w \in \Omega \wedge X(\Omega) = 2\}) = P(\{(e, e)\}) = 2/20$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{6}{20} & si \quad x = 0 \\ \frac{12}{20} & si \quad x = 1 \\ \frac{2}{20} & si \quad x = 2 \\ 0 & en\ cualquier\ otro\ caso \end{cases}$$

v.a. discretas: PROPIEDADES de la funcion de probabilidad

- 1) $f_X(x) \geq 0 \qquad \forall\, x \in R$
- 2) $\sum_{x_j \in X(s)} f_X(x_j) = 1$

¿PODRIA SER f(x)>1 PARA ALGUNA x?

Como está definida como una PROBABILIDAD y el conjunto de llegada esta definido entre [0,1] no puede valer más de 1

EJEMPLO: V.A. DISCRETAS

- ε: tirar dos dados
- Ω es el conjunto de los 36 pares ordenados
- X: “suma de los dos valores obtenidos”
- X (Ω)={ 2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12}

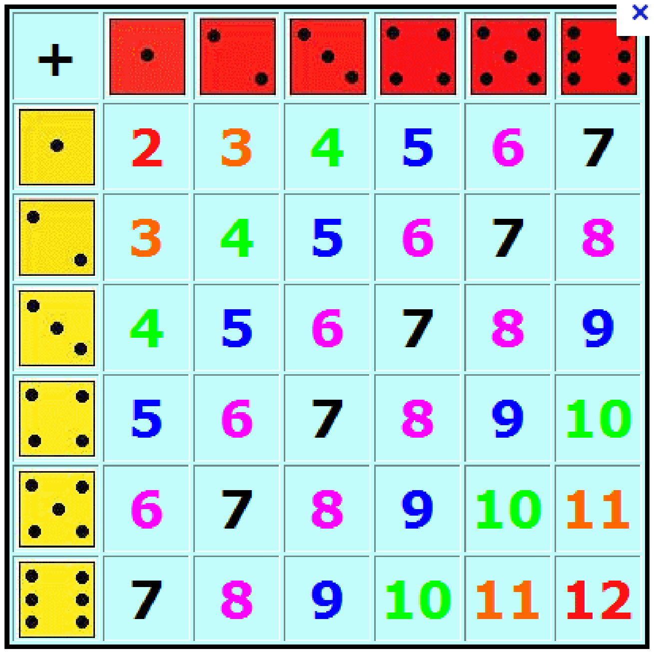
$$f: R \rightarrow [0,1]$$

$$x \rightarrow P(X=x)$$

x	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**otros**
f(x)												

<u>EJEMPLO:</u> V.A. DISCRETAS

X: “suma de los dos valores obtenidos”

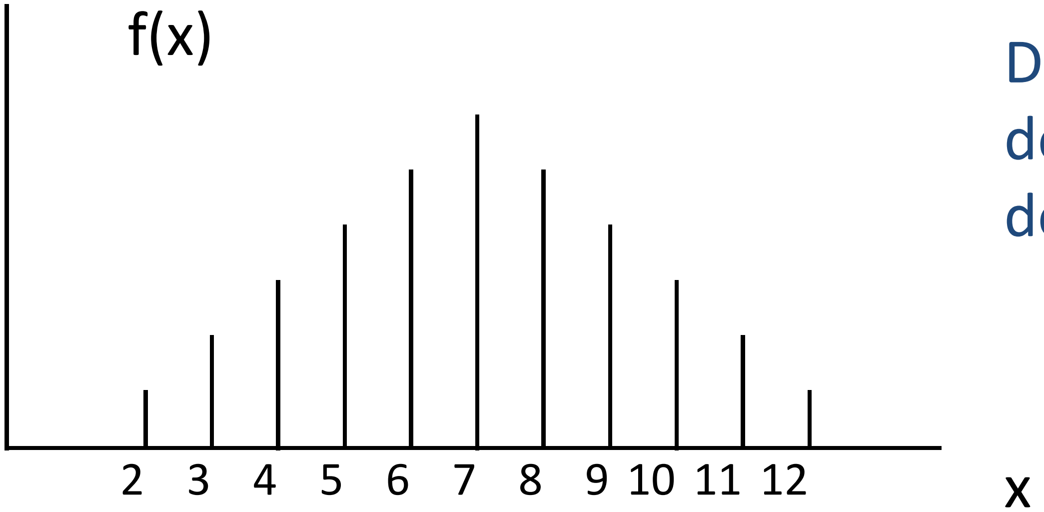


$$f: R \rightarrow [0,1]$$

$$x \rightarrow f(x) = P(X=x)$$

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	otros
f(x)	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	0

EJEMPLO: V.A. DISCRETAS



Distribución de probabilidad de X o función de probabilidad de la v.a. X

x	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**otros**
f(x)	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	0

V.A. DISCRETA: Función de distribución acumulada

$$f: R \to [0,1]$$
$$x \to P(X=x)$$

$$F: R \to [0,1]$$
$$x \to P(X \leq x)$$

$$F(x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i)$$

x	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**otros**
f(x)	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	0
F(x)	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{15}{36}$	$\frac{21}{36}$	$\frac{26}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{33}{36}$	$\frac{35}{36}$	1	???

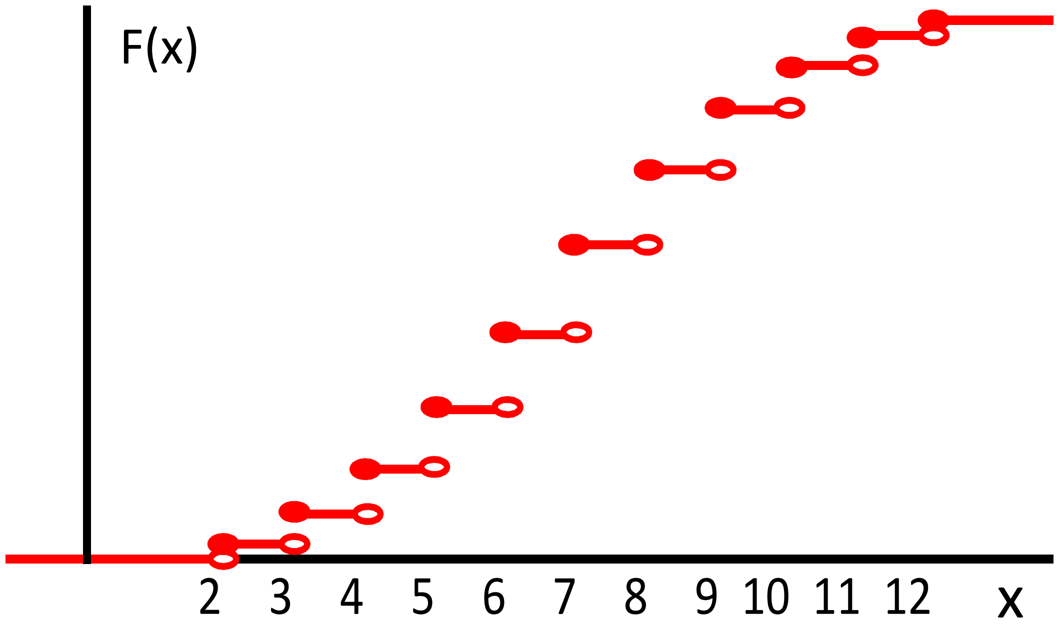
V.A. DISCRETA: Función de distribución acumulada

Representación gráfica F(x)

$$F: R \rightarrow [0,1]$$

$$x \rightarrow Fx) = P(X \leq x)$$

$$F(x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i)$$



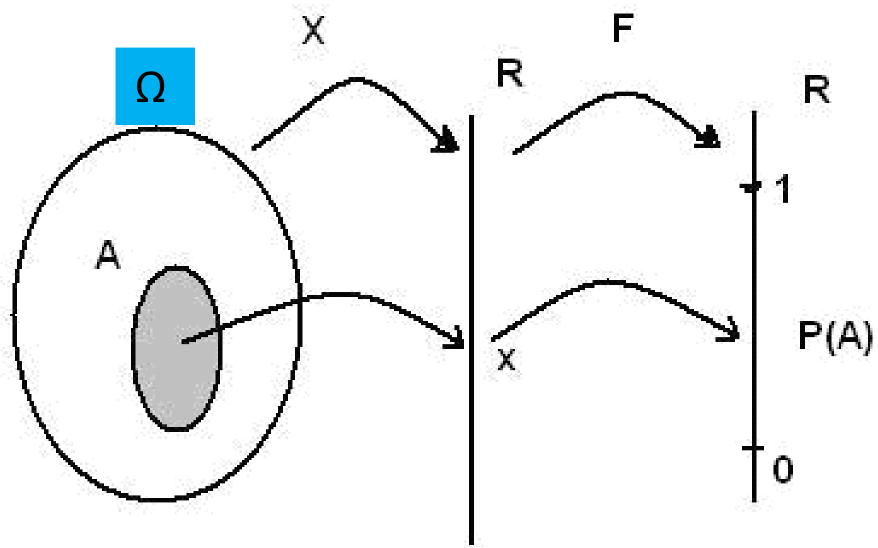
x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	otros
F(x)	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{15}{36}$	$\frac{21}{36}$	$\frac{26}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{33}{36}$	$\frac{35}{36}$	1	???

Función de distribución acumulada de una v.a.d.

Definición: Sea (Ω; P) un espacio de probabilidad y X una v.a. definida en Ω. Se llama función de distribución acumulativa de la v.a. X a la función:

$F_x: R \rightarrow [0,1]$

$F_x(x) = P(\{\omega / \omega \in \Omega \wedge X(\omega) \leq x\}) = P(X \leq x)$



Función de distribución acumulada

En el ejemplo de los cheques

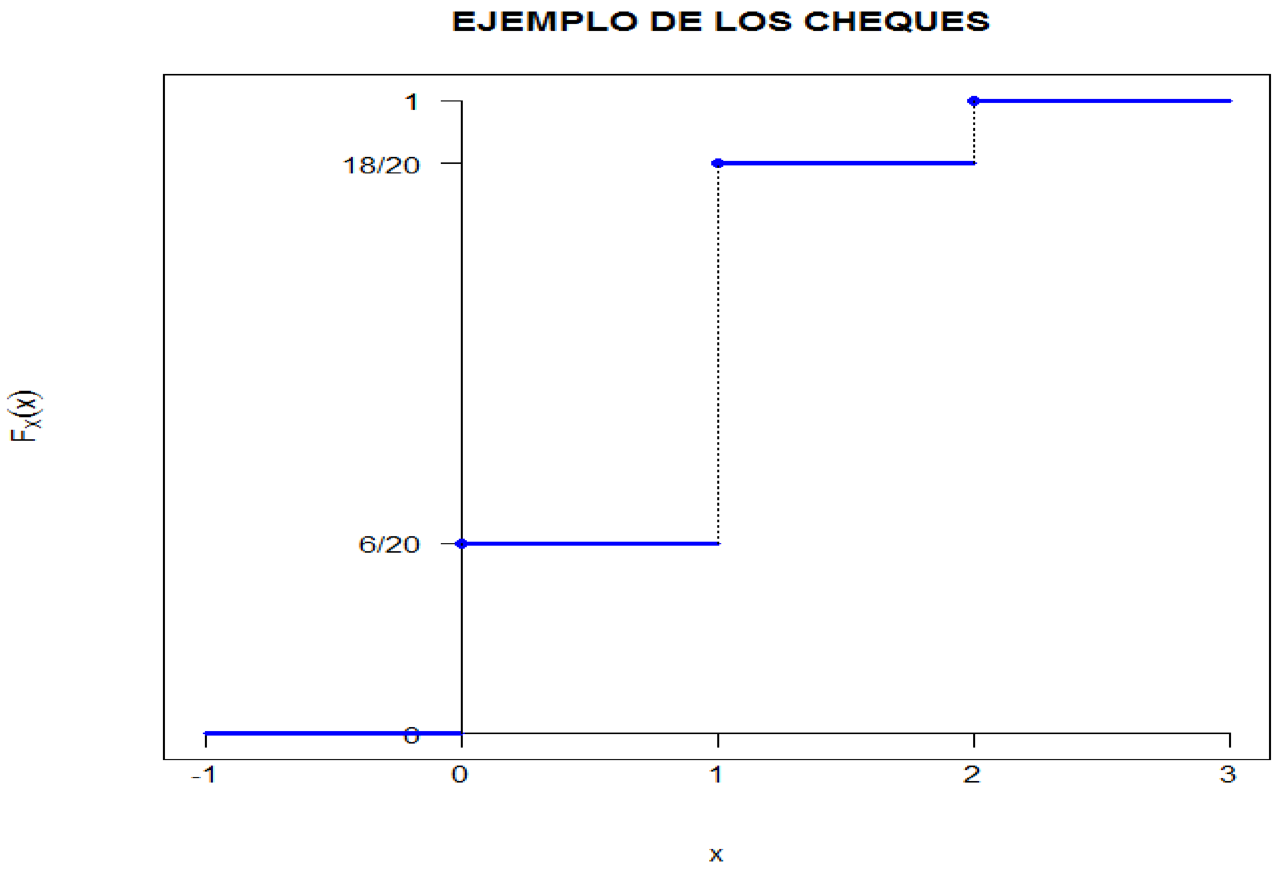
(experimento aleatorio de seleccionar dos cheques de un total de cinco, sin reemplazo. Entre esos cinco cheques hay dos de ellos que tienen error en la fecha)

- $F_X(0)=P(\{\omega/\omega \in \Omega \wedge X(\omega) \leq 0\} = P(X \leq 0) = P(e´,e´) = 6/20$
- $F_X(1)=P(\{\omega/\omega \in \Omega \wedge X(\omega) \leq 1\} = P(X \leq 1) =$
  $P\{(e´,e´),(e,e´),(e´,e)\} = 18/20$
- $F_X(2)=P(\{\omega/\omega \in \Omega \wedge X(\omega) \leq 2\}) = P(X \leq 2) = P\{(e´,e´),(e,e´),(e´,e),(e,e)\} = 20/20$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si & x < 0 \\ \frac{6}{20} & si & 0 \leq x < 1 \\ \frac{18}{20} & si & 1 \leq x < 2 \\ 1 & si & x \geq 2 \end{cases}$$

Función de distribución acumulada

Gráfico de la función de distribución acumulada de una v.a.d.



PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN acumulada

1) $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$; $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$

2) F_X es no decreciente ó creciente en sentido amplio:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$$

3) La función Fx es una función continua por la derecha en cada punto. Es decir que la función es continua por intervalos y presenta discontinuidades o "saltos" en los que el valor de la función es igual al límite por la derecha:

$$\lim_{h \to 0^+} F_X(x+h) = F_X(x) ; \quad \forall x \in R$$

Función de distribución acumulada

- Estas se denominan propiedades fundamentales porque:

- Cualquier función de distribución acumulativa tiene que cumplir estas 3 propiedades, si una función no cumple alguna de ellas, no es una función de distribución.

- Cualquier $g_X : R \to [0,1]$ que cumpla con estas tres propiedades es una función de distribución acumulativa de una v.a.

Variables aleatorias discretas

Relación entre f(x) y F(x)

- 1) Sea x una v.a.d. definida en Ω. Supongamos que se conoce f_X, entonces se obtiene la función F_X:

$$F_X(x) = \sum_{x_j \leq x} f_X(x_j) = \sum_{x_j \leq x} P(X = x_j)$$

- 2) Supongamos que se conoce F_X, entonces se obtiene la función f_X:

$$f_X(x) = \lim_{h \to 0^+} F_X(x+h) - \lim_{h \to 0^-} F_X(x-h) = F_X(x) - \lim_{h \to 0^-} F_X(x-h)$$

Cálculo de F_X y f_X :

Veamos estas relaciones en el ejemplo de los cheques. Si queremos calcular:

1) la probabilidad de obtener a lo sumo un cheque con error a partir de la función de densidad, equivale a plantear

$$P(X \leq 1) = F_X(1) = \sum_{x_j \leq 1} f_X(x_j) = \sum_{x_j \leq 1} P\left(X = x_j\right) = \sum_{x_j = 0}^{1} P\left(X = x_j\right)$$

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = f_X(0) + f_X(1) = \tfrac{6}{20} + \tfrac{12}{20} = \tfrac{18}{20}$$

2) la probabilidad de obtener exactamente un cheque con error a partir de la función de distribución acumulada, equivale a plantear

$$P(X = 1) = f_X(1) = F_X(1) - \lim_{h \to 0^-} F_X(1-h) = F_X(1) - F_X(0) = \tfrac{18}{20} - \tfrac{6}{20} = \tfrac{12}{20}$$

ESPERANZA de una v.a.discreta

- Sea (Ω,P) un espacio de probabilidad y X una v.a.d. definida en Ω, con función de probabilidad $f_{X.}$ Se llama esperanza, valor esperado o media de la v.a. X al número, si existe:

$$\mu = E(X) = \sum_{j=1}^{n} x_j f(x_j)$$

- La esperanza representa el valor promedio de una v.a., después de un número grande de experimentos; da una idea del "centro de equilibrio" o de la "Tendencia central" de la distribución de los valores de la v.a. X.
- Cabe aclarar que la esperanza de una v.a. puede no existir, ya que si el campo de variación de la v.a. no es un conjunto finito, sino que es un conjunto infinito numerable; la suma es una serie infinita. Por lo que la esperanza existirá si la serie es absolutamente convergente.

EJEMPLO: Esperanza

- En el ejemplo de los cheques
- X = "numero de cheques con error“

$$X(\Omega)=\{0,1,2\}$$

$$E(X)=\sum_{x_j\in X(S)} x_j f_X(x_j)=\sum_{x_j\in\{0,1,2\}} x_j P(X=x_j)$$

$$E(X)=0\cdot P(X=0)+1\cdot P(X=1)+2\cdot P(X=2)=0+\tfrac{12}{20}+\tfrac{4}{20}=\tfrac{16}{20}$$

$$E(X)=0.8 \quad \textit{cheques con error}$$

- Este número es un “promedio esperado”, no un valor real y una forma de interpretar este resultado es: *“Se espera que el nº promedio de cheques con error sea de 0.8”*

Ejemplo: esperanza

La demanda (en unidades) de cierto producto varía de mes a mes, basándose en la información obtenida en el pasado, se puede construir una distribución de probabilidad de la demanda del producto en cuestión

Meses	Demanda por mes (x)	Probabilidad (f_X)
Enero	300	0,2
Febrero	400	0,3
Marzo	500	0,35
Abril	600	0,15

$$E(X) = \sum_{x_j \in X(S)} x_j f_X(x_j)$$

E(X)= 300. 0,2 + 400. 0,3 + 500. 0,35 +600. 0,15

E(X)= <u>445</u>

El valor esperado o esperanza de la v.a. "demanda por mes“

es de 445 unidades. (Se espera una demanda de 445 unidades por mes)

Valor esperado de una función de probabilidad

Supongamos que la v.a. X toma ciertos valores x_i . Y que h(X) es una función de la v.a. X. Formalmente esto significa:

X: $\Omega \rightarrow$R, h: R$\rightarrow$R. h$\circ$X: $\Omega \rightarrow$R es otra v.a.

$$E(h(X)) = \sum_{x_i} h(x_i) f(x_i)$$

Propiedades de la esperanza de una v.a. discreta

1) La esperanza de una constante es la constante misma:

$$X: \Omega \longrightarrow R, \qquad X(\Omega) = c, \ \forall \omega \in \Omega$$

$$E(c) = c$$

2) Sean "g", "h" dos funciones reales, g(X) y h(X) también son v. a., entonces la esperanza de la suma o diferencia de dos funciones es la suma o diferencia de las esperanzas de dichas funciones:

$$E(g(X) \pm h(X)) = E(g(X)) \pm E(h(X))$$

Propiedades de la esperanza de una v.a. discreta

3) La esperanza de una constante por una función, es el producto de la constante por la esperanza de la función:

$$E(c\ g(X)) = c\ E(g(X))$$

Combinando propiedades

$$E(aX+b)=aE(X)+b$$

Varianza de una v.a.discreta

- Hemos visto que la Esperanza de una v.a. nos da idea del centro de la distribución de los valores de la v.a. X, pero no nos da información sobre la forma en que se distribuyen dichos valores.

- Puede ocurrir que tengamos dos v.a. X_1 y X_2 que tengan el mismo valor medio y sin embargo su funciones densidad sean diferentes.

- Una medida que refleja como se distribuyen los valores alrededor de la media es la **Varianza**.

Varianza de una variable a. discreta

La varianza de una variable aleatoria da una idea de la "forma de la distribución", es decir en cuanto se alejan los valores de la variable respecto del valor central.

$$\operatorname{var}(X) = E\big(X - E(X)\big)^2 = E(X-\mu)^2 = \sigma^2$$

La diferencia $(X – E(X))^2$ nos indica cuánto se alejan los valores de la v.a. respecto de su "media" y la varianza considera el "promedio" de todas esas distancias.

$$\sigma_X^2 = \operatorname{var}(X) = \sum_{x_j \in X(S)} \big(x_j - E(X)\big)^2 \ f_X(x_j)$$

Desviación Estándar

- Notar que por su definición esta medida es no negativa.

Propiedades de la varianza de una variable aleatoria discreta

1) $V(a) = 0$ a es una constante

2) $V(a X) = a^2 V(X)$

3) Fórmula abreviada: $V(X)=E(X^2)-E^2(X)$

$$E(X^2) = \sum_{x_i} x_i^2 f(x_i)$$

Siendo

4) $V(aX+b)=a^2V(X)+0=a^2V(X)$

Como la Varianza no posee las mismas dimensiones que los valores de la v.a., la ajustamos tomando la raíz cuadrada, definiendo de esa forma la DESVIACION ESTANDAR

Ejemplo 1: V.a. discretas

El ingeniero de transporte estudia el comportamiento del tránsito en un cruce de calles, para lo cual se dirige al mismo todos los días de la semana en la hora pico, alrededor del mediodía; espera que el semáforo cumpla un ciclo y registra el número de vehículos con dirección sur que se detienen antes de que el semáforo cambie a verde. Define su variable en estudio, X, como el número observado de vehículos detenidos en el semáforo, y después de analizar los resultados obtenidos decide asignar las siguientes probabilidades:

x:	0	1	2	3	4	5	≥ 6
$f(x)$:	0,1	0,2	0,3	0,2	0,1	0,1	0

Ejemplo 1: v.a. discretas

En este ejercicio X es el número de vehículos detenidos en el semáforo y se pide:

a) Verificar si la función f(x) cumple las condiciones para ser una función de probabilidad.
b) Construir la función de distribución acumulada.
c) Representar gráficamente las funciones f(x) y F(x).
d) Calcular la probabilidad de que se forme una cola con 2 o más vehículos
e) Determinar el valor esperado y la varianza del número de vehículos detenidos en el semáforo.

Ejemplo 1: Cálculo de f_X

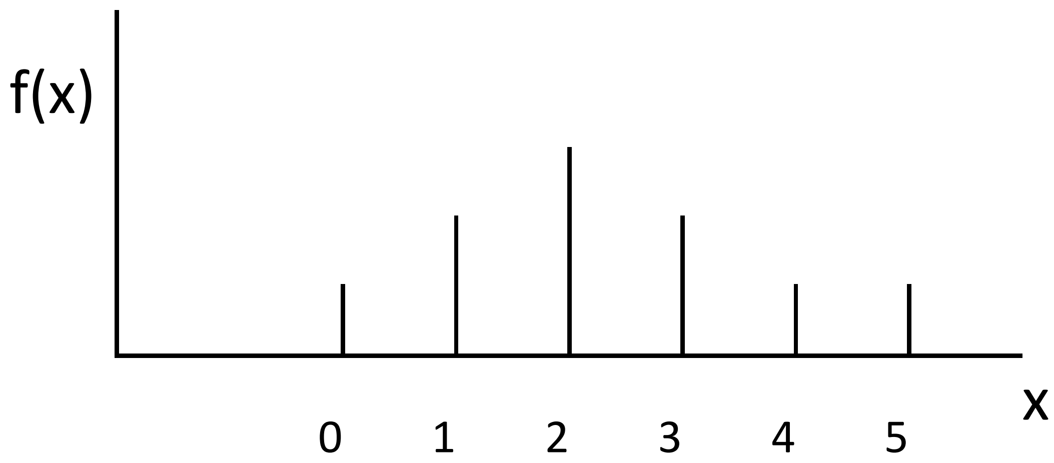
a) Verificar si la función f(x) cumple las condiciones para ser una función de probabilidad:

1)f(x) ≥ 0;

2) ∑ f(x) = 1;

x:	0	1	2	3	4	5	≥ 6
$f(x)$:	0,1	0,2	0,3	0,2	0,1	0,1	0

La función de probabilidad f(x) está correctamente descrita con la tabla.
Hagamos su gráfico:

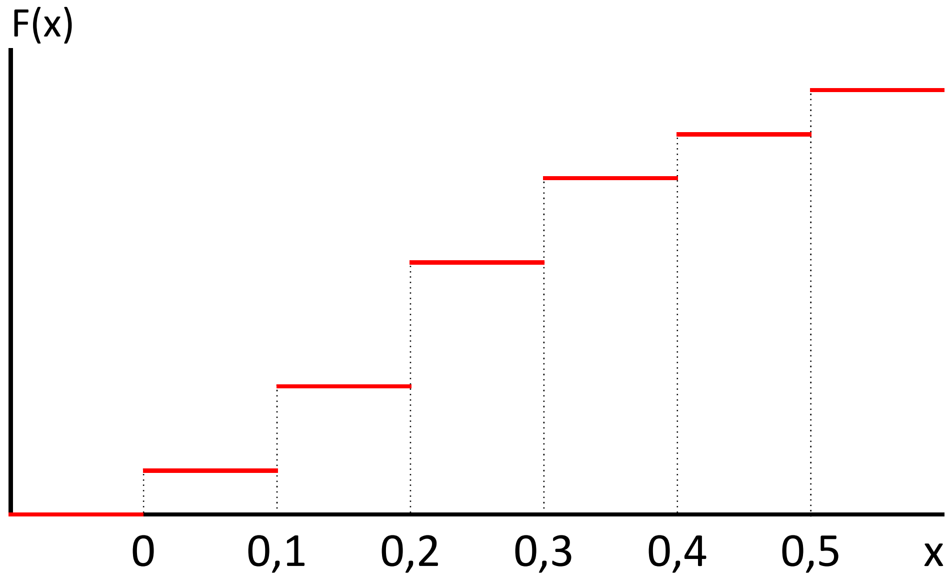


Ejemplo 1: Cálculo de F_X

b) Construir la función de distribución acumulada.
c) Representar gráficamente las funciones f(x) y F(x).

x	0	1	2	3	4	5	Otro
f(x)	0.1	0.2	0.3	0.2	0.1	0.1	0
F(X)	**0.1**	**0,3**	**0,6**	**0,8**	**0,9**	**1.0**	

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{si } x<0,\\ 0.1, & \text{si } 0\le x<1,\\ 0.3, & \text{si } 1\le x<2,\\ 0.6, & \text{si } 2\le x<3,\\ 0.8, & \text{si } 3\le x<4,\\ 0.9, & 4\le x<5,\\ 1, & x\ge 5.\end{cases}$$



- D)

Ejemplo 1: Cálculo de E(X) y Var(X)

e) Determinar el valor esperado y la varianza del número de vehículos detenidos en el semáforo.

x:	0	1	2	3	4	5	≥ 6
$f(x)$:	0,1	0,2	0,3	0,2	0,1	0,1	0

E(X) *= 0 x 0,1 + 1 x 0,2 + 2 x 0,3 + 3 x 0,2 + 4 x 0,1 + 5 x 0,1*

E(X) *=* ***2,3***

Var(X) $= E(X^2) - (E(X))^2 = 7{,}3 - (2{,}3)^2$

Var(X) *=* ***2,01***

$E(X^2) = 0^2 \text{ x } 0{,}1 + 1^2 \text{ x } 0{,}1 + 2^2 \text{ x } 0{,}3 + 3^2 \text{ x } 0{,}2 + 4^2 \text{ x } 0{,}1 + 5^2 \text{ x } 0{,}1 = \mathbf{7{,}3}$

Variables aleatorias discretas

Mencionemos otros ejemplos de v.a. discretas, que no sean finitas.

Ejemplo: número de veces que debo tirar un dado hasta obtener un “1”.

En este ejemplo:

- ¿cuál es el experimento aleatorio?
- ¿cuál es el espacio muestral?
- ¿qué valores toma la v.a.?