USC
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Grao en Enxeñería Informática
Fundamentos de Matemáticas
Curso 2014-15

SEGUNDA OPORTUNIDADE
3 de xullo de 2015

Apelidos, Nome e D.N.I.:____

1. Para codificar un *Sudoku* primeiro enumeramos as filas e as columnas do 1 ao 9, comezando polo vértice superior esquerdo. Despois, usamos un predicado con tres argumentos, $P(i,j,n)$, que será válido cando o número n estea na casiña que ocupa a fila i e a columna j. Así, supoñendo que o noso universo está formado polos números enteiros x, con $1 \leq x \leq 9$, a afirmación de que en cada columna non se repiten números, represéntase pola fórmula

$$\forall y \forall z \forall x_1 \forall x_2 \, (P(x_1, y, z) \wedge P(x_2, y, z) \rightarrow x_1 = x_2)\,.$$

Tendo isto en conta, usa os cuantificadores para construir fórmulas que, en cada un dos seguintes casos, garantan:

a) Que en cada casiña non aparece máis de un número.

b) Que en cada fila aparecen todos os números do 1 ao 9.

c) Que no cadro formado polas filas 1 a 3 e as columnas 4 a 6 aparecen todos os números do 1 ao 9.

d) Que en cada un dos 9 cadrados 3×3 en que se descompón o taboleiro do *Sudoku* aparecen todos os números do 1 ao 9.

(1,2 puntos)

2. Sexa $A(x)$ o predicado "x é teu amigo", e sexa $P(x)$ o predicado "x é perfecto". Transcribe en linguaxe corriente as seguintes fórmulas no universo de toda a xente.

Exemplo: $\neg\exists x(A(x) \wedge P(x))$ trancríbese por *Non tés amigos perfectos*

a) $\exists x \exists y(\neg(x = y) \wedge P(y) \wedge A(y) \wedge \neg P(x) \wedge A(x)$

b) $\exists x(P(x) \wedge \neg A(x))$

c) $\forall x(\neg P(x) \rightarrow A(x)) \wedge \exists y(A(y) \wedge P(y))$

d) $\exists x(A(x) \wedge \neg P(x))$ (1 punto)

3. Sen usar táboas de verdade, demostra que son loxicamente equivalentes :

a) $\neg p \rightarrow (q \rightarrow r)$ *b*) $q \rightarrow (p \vee r)$ *c*) $\neg r \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg q)$ (0,8 puntos)

4. Determina se cada unha destas sentencias é verdadeira o falsa:

a) $\emptyset \in \{\emptyset\}$

b) $\emptyset \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

c) $\{\emptyset\} \in \{\emptyset\}$

d) $\{\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}\}$

e) $\{\emptyset\} \subset \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

f) $\{\{\emptyset\}\} \subset \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

g) $\{\{\emptyset\}\} \subset \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$

h) $\emptyset \notin \{\{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset\}\}$

i) $\{\emptyset\} \subset \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$

(0,9 puntos)

5. Demostra por inducción matemática que a suma dos cubos dos n primeiros enteiros positivos coincide co cadrado da suma deses números, é dicir, para $n \geq 1$,

$$1^3 + \cdots + n^3 = (1 + \cdots + n)^2.$$

Lembra que $1 + \cdots + n = (1+n)n/2$. (1,1 puntos)

6. No seguinte test, marca a única resposta correcta en cada apartado. Cada resposta incorrecta resta 1/4 do valor do apartado; unha resposta en branco non suma nin resta.

   a) Indica cal é o erro nesta cadea de razoamentos, onde cada expresión implica a seguinte:

   $$x = 1;\ x^2 = x;\ x^2 - 1 = x - 1;\ (x+1)(x-1) = x - 1;\ x + 1 = 1;\ x = 0.$$

   - ☐ Non se pode multiplicar por x na segunda expresión, pois x é cero.
   - ☐ Non se pode restar -1 nos dous membros na terceira expresión.
   - ☐ Non se pode eliminar $x - 1$ na quinta expresión.
   - ☐ ningunha das anteriores.

   b) A expresión $\frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$ tamén se pode escribir como

   - ☐ $\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$.
   - ☐ $\cos x \cos y$.
   - ☐ $\operatorname{sen} x \cos y$.
   - ☐ ningunha das anteriores.

   c) Completa a frase para que sexa correcta: "O límite, para $n \in \mathbb{N}$, de $\lim_{n\to\infty} \frac{\cos\left(n + \frac{1}{n}\right)}{n}$ ...

   - ☐ transfórmase en $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$ sen máis que aplicar a regra de L´Hôpital."
   - ☐ pódese resolver porque é un produto dunha función limitada por outra que tende a cero."
   - ☐ pódese resolver substituíndo directamente o valor de n no límite."
   - ☐ ningunha das anteriores.

   d) A derivada da función arc cosec(x), arco cosecante de x, é

   - ☐ $-\operatorname{cosec}(x)\operatorname{cotg}(x)$.
   - ☐ $-\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$.
   - ☐ $-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
   - ☐ ningunha das anteriores.

   e) A pendente da recta tanxente á curva $x^3 + y^3 = 6xy$ no punto $(3,3)$ é

   - ☐ 0.
   - ☐ -1.
   - ☐ 3.
   - ☐ ningunha das anteriores.

   f) Estase deseñando unha caixa de cartón con tapa (un paralelepípedo) de volume dado, V; ten base cadrada de lado x e ten por altura y. Cales son os valores de x e y que darían una superficie mínima?

   - ☐ $x = V^{1/3}, y = V^{2/3}$.
   - ☐ $x = V^{1/3}, y = V^{1/3}$.
   - ☐ $x = V^{2/3}, y = V^{1/3}$.
   - ☐ ningunha das anteriores.

   (4 puntos)

7. Considera a función $f(x) = (1+x)^4$. Sexa $T_n(x)$ o polinomio de Taylor desta función de grao n arredor de $x_0 = 0$. Se aproximásemos o valor $1,2^4$ por $T(0,2)$, que erro máximo cometeriamos? Razoa a túa resposta. (1 punto)