Enxeñaría Informática USC — Álxebra

Transcrito por $\Delta\Psi$

Xaneiro 2019

1. (a) Halla el rango de la matriz real $A = \begin{bmatrix} 0 & -2\delta & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -3\delta & 1 \end{bmatrix}$ para los distintos valores de δ. Cuando sea posible calcula A^{-1} y expresa A como producto de matrices elementales.

   (b) Si $A_1, A_2 \in M_n(\mathbb{K})$ son matrices cuadradas equivalentes por filas, demuestra que $\det(A_1) = 0$ si y solo si $\det(A_2) = 0$.

2. Razona si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

   (a) Todo subespacio U de $\mathbb{R}^7$ de dimensión 4 es intersección de 3 subespacios de dimensión 6.

   (b) Si $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es lineal, no sobreyectiva y no nula, existe un subespacio W de $\mathbb{R}^3$ de dimensión 1 tal que $\dim(f^{-1}(W)) = 1$.

   (c) Existe $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ lineal, no inyectiva y no nula con valor propio 0 de multiplicidad 2 y no diagonalizable.

3. Encuentra el conjunto de los vectores $v = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ que tienen las mismas coordenadas respecto de las bases $B_1 = \{e_1 + 2e_2 + 3e_3, -2e_1 - e_3, e_1 + 3e_2 + e_3\}$ y $B_2 = \{e_2 + 2e_3, 2e_2 + e_3, -e_1 + e_2 - e_3\}$. ¿Es un subespacio? En caso afirmativo calcula su dimensión.

4. Se considera la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $f(x, y, z) = (x + \beta y, y + \beta z, x - z)$.

   (a) Para $\beta = 1$:

      i. Demuestra que f no tiene inversa. Halla una base de $\operatorname{Ker} f$ y las ecuaciones lineales de $\operatorname{Im} f$.

      ii. Si $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + z = 0\}$, calcula $\dim(f(U) \cap f^{-1}(U))$ y bases para $f(U)$ y $f^{-1}(U)$.

      iii. Si $W_\alpha = \langle (0, 1, 1), (1, 1, \alpha) \rangle$, determina los valores de α tales que $\dim(f(W_\alpha)) = 1$.

      iv. Si $\alpha \neq 0$, calcula $f^{-1}(W_\alpha)$. ¿Es $f(W_\alpha)$ suplementario de $f^{-1}(W_\alpha)$ para algún α?

   (b) Para $\beta = 0$:

      i. Demuestra que f diagonaliza y es invertible.

      ii. Calcula la base B de vectores propios respecto a la cual la matriz $D = [f]_B$ de f respecto a B es diagonal.

      iii. Si $A = [f]_C$ es la matriz de f respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y P es la de cambio de base de B a C, comprueba que $PDP^{-1} = A$.