MATEMÁTICA DISCRETA 18/1/2016

SOLUCIONES

1. (a) Existe o inverso de 19 módulo 141? En caso afirmativo, calculalo.
(b) Ten solucións a congruencia $19x \equiv 3 \bmod 141$? En caso afirmativo, calcular as solucións enteiras que hai entre –300 e 300.

Solución.
(a) Tiene inverso, ya que $\gcd(19, 141) = 1$. $1 = 52 \cdot 19 + (-7) \cdot 141$. Así, inverso de 19 es 52.
(b) $19x \equiv 3 \bmod 141 \Leftrightarrow x \equiv 3 \cdot \frac{1}{19} \equiv 3 \cdot 52 = 156 \equiv 15 \bmod 141$.
Otras soluciones son: $141 + 15 = 156$, $2 \cdot 141 + 15 = 297$,
$-1 \cdot 141 + 15 = -126$ $-2 \cdot 141 + 15 = -267$.

2. De cantas formas pódense colocar 6 bólas en tres recipientes en cada un dos seguintes casos?
(a) Cada bóla é dunha cor diferente.
(b) Todas as bólas son iguais. (2 puntos)

Solución.
(a) Se as bólas son todas diferentes a cada unha das 6 bólas asignámoslle unha das 3 eleccións posibles.
Tamén se pode pensar como cadeas de lonxitude 6 formadas con 1, 2 e 3.
VR(3,6)= $3^6 = 729$.
(b) Se as bólas son iguais, hai que saber cantas bólas haberá en cada recipiente, é dicir, o número de solucións enteiras non negativas de

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6.$$

CR(3,6)= $\binom{3+6-1}{6} = \binom{8}{6} = \frac{8!}{6!2!} = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$.

3. (a) Buscar unha relación de recorrencia para o número de cadeas de bits de lonxitude n que conteñen tres ceros consecutivos. Cales son as condicións iniciais?
(b) Resolver a relación de recorrencia $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ para $n \geq 2$ coas condicións iniciais $a_0 = 1$, $a_1 = 0$.

Solución.
(a) Sea a_n el número de cadenas de n bits que contienen 3 ceros consecutivos.
- O bien empiezan por 1, seguido de una cadena de longitud $n - 1$ con 3 ceros consecutivos.
- O bien empiezan por 0. En este caso puede ocurrir:
  - 01, seguido de una cadena de longitud $n-2$ con 3 ceros consecutivos.
  - 001, seguido de una cadena de longitud $n-3$ con 3 ceros consecutivos.
  - 000, seguido de una cadena arbitraria de longitud $n - 3$.

Por lo tanto, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + 2^{n-3}$.
(b) La ecuación característica es $r^2 - 5r + 6 = 0$. Las raíces son $r_1 = 3$ y $r_2 = 2$.

La solución general de la ecuación es $a_n = \alpha_1 3^n + \alpha_2 2^n$. $\left\{\begin{array}{rcl} 1 & = & \alpha_1 + \alpha_2 \\ 0 & = & 3\alpha_1 + 2\alpha_2 \end{array}\right.$
Así, tenemos: $\alpha_1 = -2,\ \alpha_2 = 3$. Por lo tanto la solución es $a_n = -2 \cdot 3^n + 3 \cdot 2^n$.

4. Un grafo dise libre de triángulos se non ten circuítos de lonxitude 3. Sexa G un grafo simple, plano e libre de triángulos, con n vértices, $n \geq 3$. Proba que G ten, como máximo, $2n-4$ arestas. Demostra, ademais, que existe un vértice de grao menor ou igual que 3.

Solución.
Como G no contiene circuitos de longitud 3, las regiones están limitadas por ciclos de longitud al menos 4, por tanto: $4r \leq 2|E|$, donde r denota el número de regiones del grafo G. Por otro lado, por el Teorema de Euler, $r = |E| - |V| + 2$, por tanto

$$4r = 4|E| - 4|V| + 8 \leq 2|E| \Rightarrow 2|E| \leq 4|V| - 8 \Rightarrow |E| \leq 2|V| - 4.$$

Para comprobar que, en estas condiciones, existe un vértice de grado menor o igual que 3, supongamos, por el contrario, que todos los vértices son de grado estrictamente mayor que 3 (esto es, $\partial(v) \geq 4, \forall v \in V$). Utilizando el Lema del apretón de manos se tendría

$$2|E| = \sum_{v \in V} \partial(v) \geq 4|V|; \text{ lo que contradice } |E| \leq 2|V| - 4.$$

5. Xustificar razoadamente as seguintes cuestións:
(a) A función $f(x) = 2x^2 + x^3 \log(x)$ é $\mathcal{O}\big(x^3\big)$?
(b) Cantos enteiros positivos menores que 30 son primos relativos con 30?
(c) Cantas cadeas diferentes poden facerse coas letras de $AARDVRAK$, usando todas as letras, se todas as tres A teñen que ser consecutivas?
(d) Un grafo bipartito completo $K_{m,n}$ euleriano sempre é hamiltoniano?

Solución.
(a) No, ya que $\log(x)$ es $\mathcal{O}\big(x\big)$, es decir, $\log(x)$ crece menos que x.
La función sería $\mathcal{O}\big(x^4\big)$.
(b)
$$\phi(30) = \phi(2 \cdot 3 \cdot 5) = \phi(2) \cdot \phi(3) \cdot \phi(5) = 1 \cdot 2 \cdot 4 = 8.$$
(c) Consideramos las tres A consecutivas $AAARDVRK$, es dedir, $\boldsymbol{A}RDVRK$.
$$\frac{6!}{2!1!1!1!1!} = \frac{6!}{2} = \frac{720}{2} = 360.$$
(d) Todo ciclo en un grafo bipartito es de longitud par y alterna entre vértices de V_1 y V_2. Ya que un ciclo hamiltoniano usa todos los vértices en V_1 y V_2, tiene que ocurrir que $m = |V_1| = |V_2| = n$.