Examen de Alxebra. (Enero 2013)

1.- Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -2b & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -b & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$

a) Calcular, en función de los valores de b, el rango de A.

b) Calcular, cuando sea posible, A^{-1} y expresarla como producto de matrices elementales.

2.- Sean $U = \langle (1,0,1,1), (2,1,-1,0), (0,-1,3,2) \rangle$ y

$W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / x+t=0,\ 2x+y+z+t=0\}$ subespacios de $\mathbb{R}^4$.

a) Calcular una base y unas ecuaciones implícitas de U y $U+W$.

b) Sea $U' = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / z+t=0,\ y+(1+a)z-t=0\}$. Determinar para que valores de a se tiene que $\dim(W \cap U') = 1$.

c) Definir una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ con $Ker\ f = U$ e $\mathrm{Im}\, f = W$.

3.- Sea $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ la aplicación lineal definida por:

$$f(x,y,z,t) = (x+y, z, x+y, z-t).$$

a) Calcular las dimensiones de $Ker\ f$ e $\mathrm{Im}\, f$.

b) Si $U = \langle (1,1,0,0), (1,0,1,1), (3,0,1,1) \rangle$, calcular la dimensión de $f(U)$.

c) Encontrar una base del subespacio $f^{-1} \langle (1,1,0,0), (1,1,0,1) \rangle$.

4.- Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal cuya matriz asociada respecto de las bases canónicas es:

$$A = (f)_{\mathcal{C},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Probar que f es diagonalizable.

b) Encontrar una matriz P no singular y una matriz diagonal D tales que $AP = PD$.

5.- (*Teoría*) Sea $f : V \to W$ una aplicación lineal.

a) Probar que si $U = \langle u, v, w \rangle$ es subespacio de V, entonces se verifica que $f(U) = \langle f(u), f(v), f(w) \rangle \subset W$.

b) Demostrar que $Ker\ f$ es un subespacio de V.

c) Si $V = W$ y $\dim V = n$, probar que f es inyectiva si, y sólo si, f es sobre.

Puntuación: (1)+(1.5)+(1.5)+(1.5)+(1.5)