Examen de Álxebra (Julio 2016)

1. Se consideran los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^4$: $U = \langle(1,-1,1,0),(1,-1,1,2)\rangle$ y $W_a = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4/x - at = 0, y + 2t = 0\}$.

a) Calcular el valor de a para el cual la $dim(U \cap W_a) = 1$.

b) Calcular una base de $U + W_2$.

c) Definir, si existe, una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ que $Ker\ f = U$ e $Im\ f = W_0$.

2.- Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal dada por:

$$f(x,y,z) = (x+y, y+z, x-z)$$

a) Probar que f no tiene inversa.

b) Sea $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3/x - 2y - z = 0\}$, calcular una base de $f^{-1}(U)$.

d) Sea $\mathcal{B} = \{(0,1,-1),(1,-1,1),(0,0,1)\}$ una base de $\mathbb{R}^3$, calcular la matriz asociada a f respecto de la base canónica en el dominio y la base $\mathcal{B}$ en el rango, es decir $(f)_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$.

3. Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada en la base canónica es:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcular los valores propios y los subespacios propios de f.

b) Encontrar una matriz diagonal D y una no singular P tales que $DP = PA$.

c) Demostrar que para cualquier base $\mathcal{B}_1$ de $\mathbb{R}^3$ se tiene que $|(f)_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_1}| = |A|$.

4. a) Si $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ y $r(A) = n-1$, justificar que no existe $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $|AB| \neq 0$.

b) Si $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ y $|A| = 3$, calcular $\left|2(E_{3F_1} \cdot E_{F_2 \leftrightarrow F_1} \cdot A^{-1} \cdot E_{F_2+2F_1})\right|$.

c) Sea $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$. Si las coordenadas de un vector $v \in \mathbb{R}^3$ en la base $\mathcal{B}$ son $(1,-1,0)$, calcular las coordenadas de v en la base $\{v_1 = u_1 + u_2, v_2 = u_2 + u_3, v_3 = u_1 + u_2 + u_3\}$.

5. (*Teoría*)

a) Sean A y $B \in M_n(K)$ matrices no singulares. Demostrar que $|A| \neq 0$ y que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

b) Sea V un espacio vectorial y $\{e_1, ..., e_s\} \subset V$ linealmente independiente. Probar que si $v \in V$, $v \notin \langle e_1, ..., e_s\rangle$ si, y sólo si, $\{v, e_1, ..., e_s\} \subset V$ es linealmente independiente.

Calificación: (1,5+1,5+1,5+1,5+1)