María José Luna Paga

Examen de Alxebra (7-07-2010)

1.- Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1+a & a+4 \\ 2 & a & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$

a) Calcula los valores de a para los que A tiene inversa.

b) Para $a = 0$, calcular A^{-1} y expresarla como producto de matrices elementales.

c) Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal tal que $(f)_{\mathcal{C},\mathcal{C}} = A$ ¿Para que valores de a no existe ningún vector $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tal que $f(x, y, z) = (-2, 1, -2)$?

2.- Se consideran los subespaciosde $\mathbb{R}^4$ siguientes: $U_a = \langle (1, -1, a, 0), (0, 0, 0, 1) \rangle$ y $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x - 2t = 0,\ y + 2t = 0\}$

a) Calcular el valor de a para el cual la $\dim(U_a + W) = 3$.

b) Calcular una base de $U_1 \cap W$.

c) ¿Existe una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tal que $K\mathrm{erf} = \mathrm{Im}\, f = W$?

3.- Sea (V, φ) un espacio vectorial euclideo.

a) Probar que si $u, v \in V$ son vectores no nulos y $u \perp v$, entonces $\{u, v\}$ es linealmente independiente.

b) Si U es un subespacio de V entonces $U \cap U^{\perp} = \{0\}$.

4.- Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida por:

$$f(x, y, z) = (x, 2x + 2y, 2x + ay + 2z)$$

a) Encontrar los valores de a para los que f es diagonalizable.

b) Si $a = 0$ encontrar una matriz P tal que

$$P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5.- Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Justificar las siguientes afirmaciones:

a) Si $A^2 = -I_n$, entonces n es par.

b) Si la suma de los elementos de cada una de sus filas es 1, entonces 1 es un valor propio de A.

c) Si $rango(A) = n - 1$, entonces el sistema $AX = 0$ es indeterminado.

6.- Sean $\mathcal{B} = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ y $\mathcal{B}^* = \{(4, 0, 0), (0, 3, 0), (0, 0, 5)\}$ dos bases de $\mathbb{R}^3$ y $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida por:

$$f(x, y, z) = (ax + z, y + z, ax + y + az)$$

a) Demostrar que el vector v con coordenadas $(1, 3, 2)$ respecto de la base $\mathcal{B}$ tiene por coordenadas $(1, 1, 1)$ de la base $\mathcal{B}^*$.

b) Calcular la matriz $(f)_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$.

c) Determinar para que valores de a se tiene que $\dim Ker\ f = 1$.

d) Para $a = 0$, encontrar una base del subespacio $f^{-1}\langle (1, 1, 0), (1, 0, 1) \rangle$.

Calificación: (5+5+5)+(10+5+5)+(5+5)+(10+5)+(5+5+5)+(5+10+5+5)

1 2 3 4 5 6

Examen de Alxebra

1.- Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & a \\ 2 & a & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$

a) Calcular, en función de los valores de a, el rango de A.

b) Determinar para que valores de a el sistema $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ es compatible indeterminado.

c) Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal tal que $(f)_{C,C} = A$ ¿Para que valores de a existe un único vector $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tal que $f(x, y, z) = (0, 1, -2)$?

2.- Sean $U = \langle (1, -1, 1, 0), (0, 0, 0, 1) \rangle$ y $W_a = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x - at = 0, y + 2t = 0\}$ subespaciosde $\mathbb{R}^4$.

a) Calcular el valor de a para el cual la $\dim(U \cap W_a) = 1$.

b) Calcular $U^{\perp}$.

c) Hallar una base ortonormal de $U^{\perp}$.

d) Definir una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tal que $Ker\ f = U$ e $\operatorname{Im} f = W_0$.

3.- Sea $f : V \to W$ una aplicación lineal

a) Probar que si U es un subespacio de V entonces $f(U)$ es un subespacio de W.

b) Si $\dim V < \dim W$ ¿Puede ser f sobre?

4.- Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida por:

$$f(x, y, z) = (x + ay + 3z, 2y + bz, z).$$

a) Encontrar los valores de a y b para los que f es diagonalizable.

b) Si $a = 1$ y $b = 3$ encontrar una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que la matriz

$$(f)_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5.- Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Justificar las siguientes afirmaciones:

a) Si $rango(A) = n - 1$, no existe $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $|AB| \neq 0$.

b) $|E_2(3) \cdot E_{F_1+F_2} \cdot (2A) \cdot E_{1,2}| = -2^n.3.|A|$.

6.- Sea $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ la aplicación lineal definida por:

$$f(x, y, z, t) = (x + y, z, x + y, z - t).$$

a) Si $U = \langle (1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 1), (3, 0, 1, 1) \rangle$, calcular la dimensión y unas ecuaciones de $f(U)$.

b) Encontrar una base del subespacio $f^{-1} \langle (1, 1, 0, 0), (1, 1, 0, 1) \rangle$.

c) Sea $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1, 1), (0, 1, 1, 1), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 0, 1)\}$ una base de $\mathbb{R}^4$. Calcular $(f)_{C,\mathcal{B}}$ y $P \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$ tal que$(f)_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = P.(f)_{\mathcal{B},C}$.

Calificación: (5+5+5)+(10+5+5+5)+(5+5)+(10+5)+(5+5)+(5+10+10)

Examen de Alxebra (2-2-2009)

1.- Se consideran las aplicaciones $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definidas por $f(x, y, z) = (x + y, x + z)$ y $g(x, y) = (x + y, x, x - y)$.

Calcular $g \circ f$ y justificar que g no es sobre y que f no es inyectiva.

2.- Sea $U = \langle (1, 1, 0, a), (3, -1, b, -1), (-3, 5, 0, a) \rangle$ un subespacio de $\mathbb{R}^4$.

a) Hallar a y b para que $\dim U = 2$.

b) Para estos a y b, calculados, hallar unas ecuaciones implícitas de U y encontrar un subespacio W de $\mathbb{R}^4$ tal que $U \subsetneq W \subsetneq \mathbb{R}^4$.

3.- Determinar para que valores de α y $\beta \in \mathbb{R}$ es compatible indeterminado el sistema:

$$\begin{array}{rrrl} x & +3y & +(\alpha+1)z & = 4 \\ -x & & +3z & = \beta \\ x & +2y & -z & = 3 \end{array}$$

4.- Se considera la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x, y, z) = (x + y - z, y + z, x + 2y)$.

a) Sea $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y = 0,\ y - 2z = 0\}$. Calcular $f(W)$ y probar que $W \subsetneq f^{-1}(f(W))$.

b) Sea $\mathcal{B} = \{(1, 0, 1), (1, 1, 1), (1, 0, 0)\}$ una base de $\mathbb{R}^3$. Calcular las matrices $(id_{\mathbb{R}^3})_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$ y $(f)_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$, siendo $\mathcal{C}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

c) Definir, si es posible, una aplicación lineal $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f \neq g$, $Ker\ f = Ker\ g$ e $\mathrm{Im}\ f = \mathrm{Im}\ g$.

5.- Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con $f(x, y, z) = (y - z, y, -x + y)$.

a) Encontrar una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que $(f)_{\mathcal{B}}$ sea diagonal.

b) Si $\mathcal{C}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{B}$ la base calculada en el apartado a) ¿Qué relación existe entre las matrices $(f)_{\mathcal{B}}$, $(f)_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$ y $(id_{\mathbb{R}^3})_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$?

c) Justificar que para cualquier base $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^3$ se tiene que $|(f)_{\mathcal{D}}| = -1$

6.- Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a & 1 \\ 0 & a & a-1 & a \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & a & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. Justificar la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones, dando una demostración o un contraejemplo.

a) $|A| = 1$.

b) $|E_{F_4+7F_1}.E_{F_1 \leftrightarrow F_2}.E_2(5).A| = 5$.

c) El sistema $AX = 0$ es compatible determinado.

d) $\dim(Ker\ f) = 1$ si $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ es la aplicación lineal tal que $(f)_{\mathcal{C}} = A$.

Puntuación: (10)+(5+10)+(10)+(10+10+5)+(10+5+5)+(5+5+5+5)

-09-2007)

1. Sea V un K-espacio vectorial.

a) Definir subespacio vectorial de V.

b) Si S es un subconjunto de V linealmente independiente, $v \in V$ y $v \notin \langle S \rangle$ probar que $S \cup \{v\}$ es un subconjunto de V linealmente independiente.

2. Sean los subespacios de $\mathbb{R}^3$ siguientes

$$W_a = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{array}{rrr} x+ & y+ & 2z = 0 \\ x+ & ay+ & z = 0 \\ x+ & y+ & az = 0 \end{array} \right\} \text{ y } U = \langle (2,3,1), (3,2,1) \rangle$$

a) Calcular en función de los valores de a una base de W_a y su dimensión.

b) Para $a = 1$, calcular las ecuaciones y una base de $U \cap W_1$.

c) Completar una base de $U + W_1$ a una base de $\mathbb{R}^3$.

3. Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por:

$$f(0,0,1) = (0,0,1),\ f(1,-1,0) = (1,1,0),\ f(0,1,1) = (0,0,0).$$

a) Calcular $(f)_{CC}$.

b) Comprobar que $\mathbb{R}^3 = Ker\ f + Im\ f$.

c) Calcular una base del subespacio $f^{-1} \langle (1,1,1), (1,2,3) \rangle$.

4. Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por:

$$f(x,y,z) = (x+y+z, x+y-z, x-y+z).$$

a) Justificar que el subespacio propio de f asociado al valor propio $\lambda = -1$ tiene dimensión 1.

b) Encontrar una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que la matriz $(f)_{\mathcal{BB}}$ sea diagonal.

c) Calcular una matriz P tal que $P^{-1}(f)_{\mathcal{BB}}P = (f)_{CC}$.

5. En cada una de las afirmaciones siguientes hacer una prueba si es verdadera o dar un contraejemplo si es falsa:

a) La aplicación $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definida por: $f(x,y) = (x+y, x-y)$ es biyectiva.

b) Si U y W son subespacios vectoriales de V y $\dim U \leq \dim W$ entonces $U \subset W$.

c) Las matrices de la forma $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ con $a \neq 0$ no son diagonalizables.

8-02-2007)

1. Sea V un K-espacio vectorial. Se pide:

a) Si $f : V \longrightarrow V$ es una aplicación lineal inyectiva, probar que $Ker\ f = \{0\}$.

b) Si $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ es una base de V, probar que todo vector de V se expresa de modo único como combinación lineal de los elementos de $\mathcal{B}$.

2. Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por:

$$f(x, y, z) = (x + z, y, x + 2y + z)$$

a) Determinar una base de $Ker\ f$.

b) Calcular para que valores de λ el vector $(2, -2, 1 + \lambda)$ está en $Im\ f$.

c) Calcular una base del subespacio $f^{-1}\left(\langle(1, 1, 3)\rangle\right)$.

3. Se consideran los subespacios de $\mathbb{R}^3$

$$U_a = \langle(1, 2, 1), (2, 4, a + 3), (5, 10, 2a + 7)\rangle \text{ y}$$
$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y - z = 0\}$$

a) Calcular la dimensión y unas ecuaciones de U_a según los valores de a.

b) Completar una base de W a una base de $\mathbb{R}^3$.

c) Para $a = 0$, calcular una base de $U_0 \cap W$ y otra de $U_0 + W$.

4. Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por:

$$f(x, y, z) = (x + 2y - 2z, 2x + y - 2z, 2x + 2y - 3z).$$

a) Justificar que f es diagonalizable.

b) Encontrar una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que la matriz $(f)_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$ sea diagonal.

c) Calcular una matriz P tal que $P(f)_{\mathcal{B}\mathcal{B}}P^{-1} = (f)_{\mathcal{C}\mathcal{C}}$

5. En cada una de las afirmaciones siguientes hacer una prueba si es verdadera o dar un contraejemplo si es falsa:

a) La aplicación $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definida por: $f(x) = (x - 1, 1)$ es inyectiva.

b) Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una aplicación lineal tal que $Ker\ f = Im\ f$, entonces n es un número par.

c) Existe una única aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(1, 1, 1) = (1, 1)$, $f(0, 1, 0) = (1, 2)$ y $f(2, 5, 2) = (5, 8)$.

d) Si A y $B \in \mathcal{M}_n(K)$ matrices equivalentes por filas y A es no singular B también lo es.