MATEMÁTICA DISCRETA **20/1/2015**

1. Determinar cantos divisores positivos ten o número $n = 2^4 5^3 11^2$. Cántos deles rematan en 0?

Solución:

Os únicos números primos que dividen a n son 2, 5 e 11, polo que calquera divisor de n será da forma $2^a 5^b 11^c$, con $0 \leq a \leq 4$, $0 \leq b \leq 3$ e $0 \leq c \leq 2$. Polo tanto, para a temos 5 posibilidades, 4 para b e 3 para c, o que, polo principio de multiplicación, nos dá un total de $5 \times 4 \times 3 = 60$ divisores.

Se queremos que un divisor remate en 0, necesariamente será un mútiplo de 10, é dicir, na anterior análise, están excluídas as posibilidades $a = 0$ e $b = 0$. Polo tanto, haberá $4 \times 3 \times 3 = 36$ divisores rematados en 0.

2. Determinar cantos números de 7 cifras hai tales que o producto das súas cifras sexa 15.

Solución:

Para que sete números do 0 ao 9 multiplicados dean 15, a única posibilidade é que sexan 5 uns, 1 tres e 1 cinco. Polo tanto, os números que se poden formar nas condicións pedidas corresponderanse coas permutacións dos elementos da lista $[1, 1, 1, 1, 1, 3, 5]$. Das 7 posibles posicións, 5 corresponden a uns, das dúas restantes, 1 corresponde ao tres e a restante ao 5. Polo tanto

$$\binom{7}{5}\binom{2}{1}\binom{1}{1} = \frac{7!}{5!\ 1!\ 1!} = 42$$

3. Buscar unha relación de recorrencia para a que a sucesión $\{a_n\}$, con $a_n = 1+2+\cdots+n$ para $n \geq 1$, sexa solución. Resolver a relación de recorrencia e dar unha fórmula para a suma dos n primeiros números enteiros positivos.

Solución:

A relación de recorrencia obvia é

$$a_{n+1} = a_n + (n+1),$$

linear con coeficientes constantes non homoxénea.

A relación de recorrencia linear homoxénea asociada é $a_{n+1} = a_n$, que ten por ecuación característica $r - 1 = 0$. A única raíz é $r = 1$, e polo tanto a solución xeral corresponde a

$$a_n^{(h)} = \alpha_1 1^n = \alpha_1.$$

A parte non homoxénea é un polinomio $F(n) = n + 1$, ou se preferimos, para aplicar o caso xeral, un polinómio multiplicado por 1^n. Como 1 é unha das raíces características (con multiplicidade 1), sabemos que hai unha solución particular da forma

$$a_n^{(p)} = (\alpha n + \beta)n^1 = \alpha n^2 + \beta n.$$

Substituindo en $a_{n+1} = a_n + n + 1$, teremos que

$$\alpha(n+1)^2 + \beta(n+1) = \alpha n^2 + \beta n + n + 1,$$

de onde se obtén que

$$(2n+1)\alpha + n\beta = n+1.$$

Dándolle a n, respectivamente, os valores 0 e1, obtéñense as ecuacións:

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= 1 \\ 3\alpha + \beta &= 2, \end{aligned}$$

que podemos resolver para obtermos $\alpha = 1/2$ e $\beta = 1/2$.

A solución xeral será, entón,

$$a_n = a_n^{(p)} + a_n^{(h)} = \alpha_1 + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}.$$

Tendo en conta as condicións iniciais do problema (para $n = 1$ a suma vale 1), temos que

$$1 = a_1 = \alpha_1 + \frac{1^2}{2} + \frac{1}{2} = \alpha_1 + 1,$$

e, por tanto, $\alpha_1 = 0$, o que nos dá a coñecida fórmula para a suma dos n primeiros enteiros positivos:

$$a_n = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} = \frac{1+n}{2}n$$

4. Utilizando a fórmula de Euler para grafos planos, determina o número de pentágonos que contén un balón de fútbol, sabendo que está formado exclusivamente por pentágonos e hexágonos regulares.

Solución:

Sexa p o número de pentágonos e h o número de hexágonos. Como cada arista do poliedro está necesariamente en dúas caras, o número de aristas do poliedro será

$$A = \frac{5p + 6h}{2}.$$

En canto aos vértices, é claro que en cada un deles se xuntan 3 polígonos. Non poden ser 1 nin 2, obviamente, pero tampouco poden ser máis de 3, porque os ángulos internos tanto dos pentágonos coma dos hexágonos regulares superan os 90 graos. Polo tanto

$$V = \frac{5p + 6h}{3}$$

Da fórmula de Euler sabemos que

$$C + V = A + 2,$$

e como $C = p + h$, temos que

$$p + h + \frac{5p+6h}{3} = \frac{5p+6h}{2} + 2,$$

é dicir, $p = 12$.

Dende o punto de vista da fórmula de Euler, valeríanos calquera número de hexágonos, pero pola regularidade do balón de fútbol, todos os vértices deben ser iguais, e posto que en cada vértice se xuntan 3 polígonos, temos dúas posibilidades: 2 pentágonos e

1 hexágono, ou 1 pentágono e 2 hexágonos. Esta segunda opción produce unha figura máis esférica (a suma dos ángulos en cada vértice é maior!) e é a que corresponde ao noso problema.

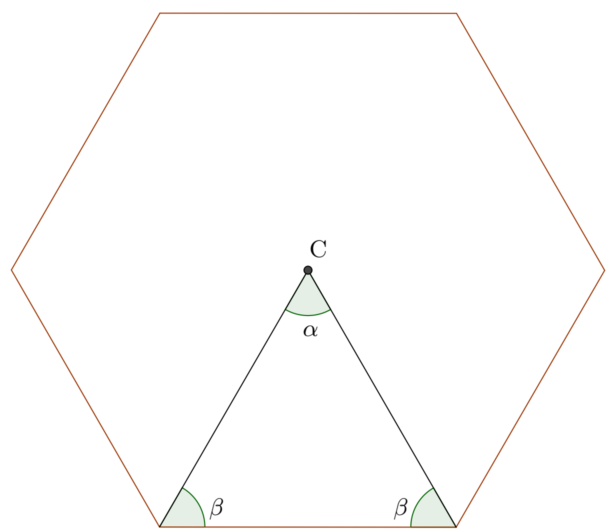
Polo tanto, tendo en conta que cada hexágono está presente en 6 vértices, e cada pentágono en 5, teremos que

$$h = \frac{V \times 2}{6} \quad \text{e} \quad 12 = p = \frac{V \times 1}{5},$$

de onde

$$h = \frac{5p}{3} = 20$$

NOTA: ***Valor dos ángulos internos dun polígono regular***
Unindo o centro do polígono con dous vértices consecutivos formamos un triángulo isósceles, e chamándolle α ao ángulo no centro e β a cada un dos que se forman nos vértices, temos que $180 = \alpha + 2\beta$.



É claro que $n \times \alpha = 360$, polo que, multiplicando a ecuación anterior por n temos que

$$180n = (\alpha + 2\beta)n = \alpha n + 2\beta n = 360 + 2\beta n,$$

de onde

$$\beta = \frac{180(n-2)}{2n}$$

Polo tanto, dada un dos ángulos interiores do hexágono valerá, $2\beta = 2 \times 180(4/12) = 120$, e no caso do pentágono $2\beta = 2 \times 180(3/10) = 108$.