1. Sexa $S(x)$ o predicado "x está no sitio correcto", e sexa $E(x)$ o predicado "x está en bo estado". Traduce cada unha das seguintes frases a fórmulas lóxicas para seren interpretadas no universo das ferramentas dun garaxe:

   a) Algunha ferramenta non está no seu sitio.
   $\exists x \neg S(x)$

   b) Non todo está no seu sitio e en bo estado.
   $\neg \forall x((S(x) \wedge E(x))$

   c) Unha das ferramentas non está no seu sitio anque está en bo estado.
   $\exists x(\neg S(x) \wedge (Ex))$

   d) Todo o que está no seu sitio non está en bo estado.
   $\forall x((S(x) \to \neg E(x))$

2. Sexa $P(x)$ o predicado "x é parvo", $S(x,y)$ o predicado "x e y son socios comerciais"e $E(x,y)$ o predicado "x engana a y". Transcribe en linguaxe corriente as seguintes fórmulas no universo de toda a xente:

   a) $\forall x \forall y (S(x,y) \to (E(x,y) \to \neg P(y)))$
   Se de dous socios un engana a outro, este outro non é parvo
   ou
   Se un socio te engana, ti non és parvo

   b) $\exists y \forall x (\neg P(y) \wedge (E(x,y) \to \neg S(x,y)))$
   Hai alguén que non é parvo e que calquera que o engane non é seu socio.
   ou
   Hai alguén que non é parvo e que non o engana ningún socio.
   ou
   Hai alguén que non é parvo e que non é socio de ninguén que o engane.
   ou
   Hai alguén que non é parvo e non o engana ningún socio.

3. Sexa $P(m,n)$ a afirmación "m divide a n", onde o dominio de ambas dúas variables é o dos números enteiros positivos. (Con "m divide a n"queremos dicir que $n = km$, para algún número enteiro k). Determinar xustificadamente o valor de verdade de cada unha das seguintes afirmacións:

   a) P(4, 5)
   FALSO: 4 non divide a 5

   b) $\forall m \exists n P(m,n)$
   CERTO: ddo calquera número a, sempre hai algún número a quen divide a; por exemplo, sempre a divide a a.

   c) $\exists n \forall m P(m,n)$
   FALSO: non existe ningún número divisible por todos o números

   d) $\forall n P(1,n)$
   CERTO: o 1 divide a todos os números

4. Demostrar que para dous conxuntos arbitrarios A e B, son equivalentes as dúas condicións seguintes:

   a) $A \subseteq B$ *b*) $A \setminus B = \emptyset$ (1,2 puntos)

   Vexamos que $a) \Rightarrow b)$

$A \subseteq B$ quere dicir que todo elemento de A é elemento de B. Polo tanto, non existe ningún elemento que estea en A e non estea en B; é dicir, $A \setminus B = \emptyset$

Vexamos que $b) \Rightarrow a)$

Se supoñemos que $A \setminus B = \emptyset$, estamos dicindo que non hai ningún elemento de A que non estea en B; é dicir, todo elemento de A está en B, polo tanto $A \subseteq B$.

5. Demostra por inducción matemática que, para $n > 6$, se verifica $3^n < n!$.

PASO BASE: $3^7 < 7!$ é certo, xa que

$$3^7 = (3 \times 3 \times 3)(3 \times 3)(3 \times 3) < (7 \times 4)(5 \times 2)(6 \times 3) = 7!$$

PASO INDUCCIÓN: Supoñemos certo $3^n < n!$ e queremos probar $3^{n+1} < (n+1)!$

De $3^n < n!$ séguese que

$$3 \times 3^n < 3 \times n!$$

e de $n > 6$ séguese que $3 < (n+1)$, e polo tanto

$$3 \times n! < (n+1) \times n!$$

Combinando ambas dúas,

$$3^{n+1} = 3 \times 3^n < 3 \times n! < (n+1) \times n! = (n+1)!$$