Solucións aos exercicios do 1 a 5
13 de xaneiro de 2012

1. Determina se as seguintes especificacións de sistemas son consistentes ou non:

   A mensaxe de diagnóstico almacénase nun *buffer* ou vólvese a trasmitir.

   Si a mensaxe de diagnóstico se almacena no *buffer*, entón vólvese a trasmitir.

   A mensaxe de diagnóstico non se almacena no *buffer*.

   Solución: Ver na páxina 14 do libro de Kenneth H. Rosen: *Matemática Discreta y sus Aplicaciones* (5^{a} ed.) **Exemplo 12**

2. Constrúe as táboas de verdade das seguintes proposicións:

   (a) $(q \vee \neg p) \rightarrow p$
   (b) $\neg p \vee (q \rightarrow p)$
   (c) $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$
   (d) $(p \wedge q) \rightarrow (\neg p \vee \neg q)$

   Solución: Ver na páxina 16 do libro de Kenneth H. Rosen: *Matemática Discreta y sus Aplicaciones* (5^{a} ed.) **Exercicio 23** , e a súa solución ao final do libro.

3. Sexa $I(x)$ o predicado $\ll x$ ten conexión a internet$\gg$ e $C(x, y)$ o predicado $\ll x$ ten chateado con $y \gg$, onde o dominio das varialbles x e y é o alumnado da clase de Fundamentos de Matemáticas. Utiliza cuantificadores para formalizar cada unha das seguintes frases:

   (a) Exactamente unha persoa da clase ten conexión a internet.
   (b) Toda persoa da clase que ten conexión a internet chateou con polo menos outra persoa da clase.
   (c) Alguén da clase ten conexión a internet, pero non chateou con ninguén da clase.
   (d) Hai unha persoa na clase que chateou con todas as demais da clase.
   (e) Non toda a xente na clase ten conexión a internet.

   Solución: Ver na páxina 48 do libro de Kenneth H. Rosen: *Matemática Discreta y sus Aplicaciones* (5^{a} ed.) **Exercicio 12**

   (a) $\exists x\, [I(x) \wedge \forall y\, ((y \neq x) \rightarrow \neg I(y))]$
   (b) $\forall x\, [I(x) \rightarrow \exists y\, ((y \neq x) \wedge C(x, y))]$
   (c) $\exists x\, [I(x) \wedge \forall y \neg C(x, y)]$
   (d) $\exists x \forall y [(y \neq x) \rightarrow C(x, y)]$
   (e) $\neg \forall x I(x)$

4. Pódese concluir que $A = B$ sendo A, B e C conxuntos arbitrarios tales que $A \cup C = B \cup C$ e $A \cap C = B \cap C$. Argumentar.

   Solución:

   Veremos que de $A \cup C \subseteq B \cup C$ e $A \cap C \subseteq B \cap C$ podemos concluir que $A \subseteq B$, polo que usando ous outros contidos teremos probado que $A = B$.

   Sexa $x \in A$, temos que ver que $x \in B$. Como $A \subseteq A \cup C \subseteq B \cup C$, temos que $x \in B \cup C$, é dicir, $x \in B$ ou $x \in C$. Pero, se $x \in B$, xa temos o que queremos, e se $x \in C$, como partimos de $x \in A$, teremos que $x \in A \cap C \subseteq B \cap C$, é dicir, $x \in B$ e $x \in C$.

   Resumindo, partindo de $x \in A$ temos $x \in B$ ou $x \in C$, e en calquera dos dous casos chegamos a que $x \in B$, como queriamos.

5. Demostra por inducción matemática que, para $n > 1$, se verifica

$$1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n}.$$

   Solución

   PASO BASE: Para $n = 2$, o primeiro caso posible, cúmplese que

$$1 + \frac{1}{2^2} = \frac{5}{4} < 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = \frac{6}{4}$$

   PASO INDUTIVO: Supoñendo (hipótese de inducción)

$$1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{k}$$

   queremos ver que

$$1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{(k+1)^2} < 2 - \frac{1}{k+1}.$$

   Pero

$$1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} < 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2}$$

   sen máis que sumar $\frac{1}{(k+1)^2}$ en ambos dous lados da hipótese de indución, polo que abondará ver que

$$2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{k+1}$$

   ou, equivalentemente,

$$\frac{1}{(k+1)^2} \leq \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}$$

   que é evidente, xa que $(k+1)^2 = (k+1)(k+1) > k(k+1)$.