Álxebra Linear

8 de xaneiro de 2018

1) Resolver razoadamente as seguintes cuestións:
   a) Considerar, no espazo vectorial $\mathfrak{R}_3[X]$ dos polinomios de grao $\leq$ 3 nunha variábel con coeficientes reais, as seguintes bases: $C = \{1, X, X^2, X^3\}$ a canónica e $B_a = \{(X = a)^i \mid 0 \leq i \leq 3\}$ con $a \in \mathfrak{R}$ e $a \neq 0$. Calcular, facendo uso de operacións elementais, a inversa da matriz $A = (I)_{B_a C}$, o cambio de base de B_c a C.
   b) Considerar a matriz real $n\ x\ n$, $D = I_n + \alpha U_n$, con $\alpha \in \mathfrak{R}, I_n$ a identidade de orde n, $U_n = (a_{ij})$ con $a_{ij} = 1,\ \forall i\ e\ \forall j$. Empregando as propiedades dos determinantes, calcula $|D_n|$.
   c) Considerar a aplicación linear $g : \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ tal que $g(e_2) = F_1$ e $g(F_2) = e_2$, sendo $B = \{F_1 = (1, 1), F_2 = (-1, 1)\}$ base de $\mathfrak{R}^2$ e $C = \{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$ a base canónica. Calcula as seguintes matrices asociadas a g: $(g)_{cc}, (g)_{BC}, (g)_{CB}, (g)_{BB}$.
   d) Demostra que toda matriz real de orde 3 antisimétrica ($A^T = -A$) é diagonalizábel. Calcula os seus valores propios. Sucede o mesmo se o facemos coas antisimétricas de orde 2? Razoe a súa resposta.
2) Sexa $C = [(3, 1, a+1, 4-b), (0, -1, a, 3), (2, 1, -1, 3)]$, (por filas) a matriz asociada ao sistema S, un sistema de ecuacións lineares con coeficientes reais. Analizar a existencia dos escalares a e b para que se dean os seguintes casos:
   a) S ten solución única.
   b) S non ten solución.
   c) As solucións de S veñen dadas en función dun parámetro.
   d) As solucións de S veñen dadas en función de dous parámetros.
   e) Dar os valores de a e b e as solucións en calquera dos casos de existiren estas. *Nota do transcritor: Lamento pór a matriz así, no exame orixinal sae enteira. Barja quere que se discuta por Gauss.*
3) Sexa $f : \mathfrak{R}^3 \rightarrow \mathfrak{R}^4$ e $g : \mathfrak{R}^4 \rightarrow \mathfrak{R}^3$ as aplicacións dadas por $f(x, y, z) = (x+z, y-z, x+y, x-y+2z)$ e $g(x, y, z) = (x+z, x-y+z, x+t)$.
   a) Calcula $A = (f)_{c_3 c_4}$, a matriz de f respecto das bases canónicas (de $\mathfrak{R}^3\ e\ \mathfrak{R}^4$) e $B = (g)_{c_4 c_3}$, a matriz de g respecto das bases canónicas. Proba que AB e BA son matrices diagonalizábeis, é dicir, $f \circ g$ e $g \circ f$ diagonalizan. Calcula en $\mathfrak{R}_3$ a base B_3 de vectores propios respecto da cal a matriz $D = (g \circ f)_{B_3}$ de $g \circ f$ respecto a B_3 é diagonal. Comproba que $P^{-1}BAP = D$.

b) Achar unha base ou as ecuacións de: $W_3 = ker(g \circ f)$, $U_3 = f^{-1}(W_4)$ e $U_4 = g^{-1}(W_3)$. Nótese que o subíndice de dos subespazos refírese ao ao espazo onde están, $\Re^3$ ou $\Re^4$. Calcular $dim(U_4 + Im(f))$ e $dim(U_3 + Im(g))$. Son directas esas sumas?