ALXEBRA (Grao en Enxeñería Informática) 1ª Oportunidade - 12/xaneiro/2021

1)– (2p.) Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & b \\ 1 & b & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1)– **Calcula** el rango de A según los valores de b.

2)– Para $b = 0$, **calcula** A^{-1} y **expresa** A^t como producto de matrices elementales.

3)– Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal tal que $(f)_{\mathcal{C},\mathcal{C}} = A$ ¿Para que valores de b **no existe** ningún vector $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tal que $f(x, y, z) = (1, -1, 3)$?

4)– Para $b = 0$, **calcula** $|E_{-F_3} \cdot E_{F_2 \leftrightarrow F_3} \cdot ((-2)A^t) \cdot E_{F_1-2F_3} \cdot E_{F_2 \leftrightarrow F_3}|$.

2)– (1p.) **Demuestra** que si $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$ y B es no singular, se verifica que

a.- $(AB)^t = B^t A^t$. b.- $(B^t)^{-1} = (B^{-1})^t$.

3)– (2p.) **Razona** si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

a)- El $\mathbb{R}$ espacio vectorial $V := \{f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}_3[x]\}$ de las aplicaciones lineales de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (matrices cuadradas de orden 2) en $\mathbb{R}_3[x]$ (polinomios de grado ≤ 3) tiene dimensión 2^3.

b)- Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz cuadrada de orden n y denotemos por A^t su traspuesta.
Considerar $T : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la aplicación lineal dada por $T(A) := A + A^t$, entonces
$$\dim \operatorname{Im}(T) = n(n-1)/2$$

c)- En el espacio vectorial $\mathbb{R}_3[X]$ de los polinomios de grado ≤ 3 en una variable con coeficientes reales, el subespacio $U := \{p(x) \in \mathbb{R}_3[X] / p(0) = 0, p(1) = 0, p(-1) = 0\}$ tiene dimensión 1 y está generado por el polinomio $x - x^3$. [$p(a)$ denota el valor que toma $p(x)$ para $x = a \in \mathbb{R}$]

d)- Existe $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineal, no nula tal que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f = < (1, 1) >$ y que no diagonaliza.

4)– (2p.) En $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, espacio vectorial de las matrices reales 2×2, **considera** los subespacios U y V :

$$U := \{\begin{pmatrix} a & b \\ a-b & a+b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}\}, \qquad V := \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a + b + c + d = 0,\ 2a - c - d = 0\}$$

a)- **Halla** bases y ecuaciones implicitas de U, V, $U \cap V$, $U + V$.

b)- **Prueba** que $W = < \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} >$ es un suplementario de U.

Expresa el vector $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ como suma de un vector de U y otro de W.

5)– (3p.) Sea $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal que respecto de las bases canónicas C_3 y C_4 está dada por :
$$f(x, y, z, t) = (x + 2z - t, \quad -x, \quad 2x - 2z + t)$$

i.- **Calcula** $(f)_{C_4C_3}$ la matriz asociada respecto de las bases canónicas.¿Que rango tiene?
¿Es f inyectiva?¿Es sobreyectiva ? Razónese.
Halla una base del núcleo y las ecuaciones lineales de $\operatorname{Im} f$.

ii.- Considera los subespacios W_4 y U_3, respectivamente de $\mathbb{R}^4$ y $\mathbb{R}^3$, $W_4 = < \{e_1 + e_3, e_2 + e_3 + 2e_4\} >$ y $U_3 = \{(x, y, z)/x + y + z = 0\}$. **Calcula** $f(W_4)$ y $f^{-1}(U_3)$ y **comprueba** que U_3 y $f(W_4)$ son subespacios suplementarios. ¿Son W_4 y $f^{-1}(U_3)$ suplementarios? Razónese.

iii.- Sea $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ la aplicación lineal que respecto de las bases canónicas C_3 y C_4 está dada por :
$$g(e'_1) = e_1 + 2e_3 - e_4, \qquad g(e'_2) = -e_1. \qquad g(e'_3) = 2e_1 - 2e_3 + e_4.$$
Comprueba que *diagonaliza* la matriz $(f \circ g)_{C_3}$, asociada a la composición de g con f, respecto a la base canonica de $\mathbb{R}^3$.
Calcula la base B, de $\mathbb{R}^3$ de vectores propios respecto de la cual la matriz $D = (f \circ g)_B$, de $f \circ g$ respecto a B, es diagonal.
Encuentra una matriz P no singular tal que $P^{-1}DP = A$, siendo $A = (f \circ g)_{C_3}$.