Examen de Alxebra (11-02-2008)

1. Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcular matrices elementales E_1, E_2 y E_3, tales que $E_3E_2E_1A = I_3$.

b) Expresar la matriz A como un producto de matrices elementales.

2. Calcular, según los valores de a, el rango de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a+1 & a-1 \end{pmatrix}$

3. Se consideran los subespacios de $\mathbb{R}^3$:

$$U = \langle (1,1,1), (-1,1,-1) \rangle \text{ y } W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x + y = 0\}$$

a) Probar que el vector $(-1,5,-1)$ pertenece a U y calcular sus coordenadas respecto de la base $\{(1,1,1), (-1,1,-1)\}$.

b) Calcular las ecuaciones y una base de $U \cap W$.

4. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal dada por:

$$f(x,y,z) = (x+y, y+z, x-z)$$

a) Probar que f no tiene inversa.

b) Sea $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + z = 0\}$, calcular una base del subespacio $f^{-1}(U)$.

c) Si $W = \langle (0,1,1), (1,1,a) \rangle$ determinar para que valores de a la dimensión de $f(W) = 1$.

d) Sea $\mathcal{B} = \{(0,1,1), (1,1,1), (0,0,1)\}$ una base de $\mathbb{R}^3$, calcular la matriz asociada a f respecto de la base canónica en el dominio y la base $\mathcal{B}$ en el rango, es decir $(f)_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$.

5. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal dada por:

$$f(x,y,z) = (-2z, x+2y+z, x+3z)$$

a) Justificar que f es diagonalizable.

b) Encontrar una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ respecto de la cual $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ es la matriz asociada a f.

6. Estudiar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, razonando las respuestas:

a) Si $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ y $g : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ son las aplicaciones definidas por $f(x) = (x+1, x-4)$ y $g(x,y) = (x+2y, x+1)$, entonces $g \circ f$ es inyectiva.

b) Si $A \in \mathcal{M}_{4\times4}(\mathbb{R})$ entonces, $|2A| = 2\,|A|$.

c) Si U y W son subespacio vectoriales de $\mathbb{R}^4$ y $\dim(U) = \dim(W) = 3$, entonces $\dim(U \cap W) \geq 1$.