MATEMÁTICA DISCRETA **21/1/2021**

1. (a) Que enteiros positivos menores que 32 teñen inverso multiplicativo en $\mathbb{Z}/32\mathbb{Z}$? "$\mathbb{Z}/32\mathbb{Z}$ *é o reloxo de 32 horas*".

$32 = 2^5$. Tienen inverso multiplicativo los enteros a tales que $\gcd(a, 32) = 1$, es decir los números impares. Hay 16 enteros positivos menores que 32 que tienen inverso multiplicativo: $1, 3, 5, \ldots, 27, 29, 31$.

(b) Enunciar e probar o criterio de divisibilidade por 11. Que cifra é X na igualdade 14!=871X8291200?

El enunciado y la prueba está hecha en clase.
14!=871X8291200 es múltiplo de todos los números menores o iguales que 14. En particular, podéis aplicar los criterios de divisibilidad del 9 o del 11. Se obtiene que $X = 7$.

(c) Escribe o número $1241_{(6)}$ expresado en base 6 en base 9.

$1241_{(6)} = 313 = 377_{(9)}$.

2. (a) Se se seleccionan 101 enteiros entre $\{1, 2, \ldots, 200\}$, probar que polo menos dous deles son coprimos ou primos entre si.

Consideramos las 100 cajas $\{1, 2\}$, $\{3, 4\}$, $\{5, 6\}$,, $\ldots$, $\{197, 198\}$, $\{199, 200\}$. Si se seleccionan 101 números, por el principio del palomar $\lceil \frac{101}{100} \rceil = 2$, al menos dos de esos números están en el misma caja. Esos dos números son coprimos entres sí.

(b) (i) De cantas formas se poden repartir tres exemplares dun mesmo libro entre oito nenas se ningunha delas pode recibir máis dun?

$C(8, 3) = \binom{8}{3} = \frac{8!}{5!\ 3!} = 56.$

(ii) De cantas formas se poden repartir tres exemplares dun mesmo libro entre oito nenas se calquera delas pode recibir calquera número de exemplares?

$CR(8, 3) = \binom{8+3-1}{3} = \binom{10}{3} = \frac{10!}{7!\ 3!} = 120.$

(iii) De cantas formas se poden repartir oito exemplares dun mesmo libro entre tres nenas se cada unha delas debe recibir, polo menos, un exemplar?

$CR(3, 5) = \binom{3+5-1}{5} = \binom{7}{5} = \frac{7!}{5!\ 2!} = 21.$

3. (a) Ao comezo do primeiro ano existen 2 cabras nunha illa. O número de cabras duplícanse todos os anos por reprodución e ao finalizar o ano n-ésimo son eliminadas n cabras. Determinar unha relación de recorrencia para o número de cabras ao principio do ano n-ésimo. Cales son as condicións iniciais? De que tipo é a relación de recorrencia? Cantas cabras hai ao principio do cuarto ano?

(**Nota**: *Non fai falta resolver a relación de recorrencia*)

$a_n = 2a_{n-1} - (n-1)$. Condición inicial $a_1 = 2$. Es una RRLnHCC: relación de recurrencia lineal no homogénea con coeficientes constantes. Al principio del cuarto año hay 5 cabras.

(b) Considera a relación de recorrencia $a_n = -a_{n-1} + 2a_{n-2}$. Cal é a solución xeral? É a sucesión $a_n = 1$ solución da relación de recorrencia? E a sucesión $a_n = 2^n$?

La ecuación característica es $r^2 + r - 2 = 0$, con soluciones $r_1 = 1$ y $r_2 = -2$. Por lo tanto la solución general es $a_n = \alpha_1(1)^n + \alpha_2(-2)^n$.
1 es solución, ya que tomando $\alpha_1 = 1$ y $\alpha_2 = 0$, obtenemos que $a_n = 1$.
Otra forma, comprobando que es solución directamente en la ecuación de recurrencia $a_n = -a_{n-1} + 2a_{n-2}$: $\quad 1 = -1 + 2 \cdot 1$.
2^n no es solución de la ecuación de recurrencia $a_n = -a_{n-1} + 2a_{n-2}$:

$$2^n = -2^{n-1} + 2 \cdot 2^{n-2} = -2^{n-1} + 2^{n-1} = 0.$$

4. Xustificar razoadamente as seguintes cuestións:

(a) Ordenar as funcións de tal maneira que cada función sexa big-$\mathcal{O}$ da seguinte:
$f(n) = 2021\, n^2 + 2021^{10}, \qquad g(n) = 2021\, n \log(n^3), \qquad h(n) = 2021\, \sqrt[4]{n}$

$f \in \mathcal{O}(n^2), \qquad g \in \mathcal{O}(n \log(n)), \qquad h \in \mathcal{O}(n^{1/4})$.
Por lo tanto, $h \in \mathcal{O}(g), \qquad g \in \mathcal{O}(f)$.

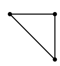
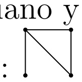
(b) Encontrar un inverso de 11 módulo 186.

El inverso es 17.

(c) Utilizando un alfabeto de 26 letras, cantas palabras de 4 letras empezan pola letra **A** ou non a conteñen?

$26^3 + 25^4$.

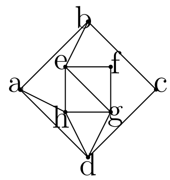
(d) Pon un exemplo dun grafo euleriano que sexa hamiltoniano e outro exemplo dun grafo non euleriano que non sexa hamiltoniano.

Muchos!!! Por ejemplo, es euleriano y hamiltoniano K_3: 
No es euleriano ni hamiltoniano: 

(e) Todo grafo simple, bipartito completo é hamiltoniano?

$K_{m,n}$ es hamiltoniano si y solo si $n = m$.

5. Dado o seguinte grafo G



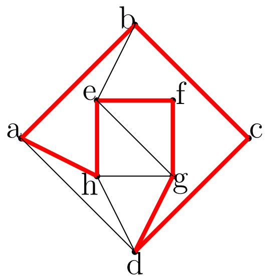
(a) É euleriano? É semieuleriano? No caso afirmativo, construír un circuíto ou un camiño.

No es euleriano, ya que $\partial(a) = \partial(b) = 3$. Es semieuleriano, ya que el resto de los vértices tienen grado par. Un camino euleriano es (de muchos posibles que tienen que empezar y terminar en los vértices de grado impar, se puede construir usando el algoritmo de Fleury):

$$abcdgfeghdaheb$$

(b) É hamiltoniano? No caso afirmativo, construír un circuíto.

Es hamiltoniano ya que tiene circuitos hamiltonianos. Un circuito hamiltoniano es (de muchos posibles) $abcdgfeha$:

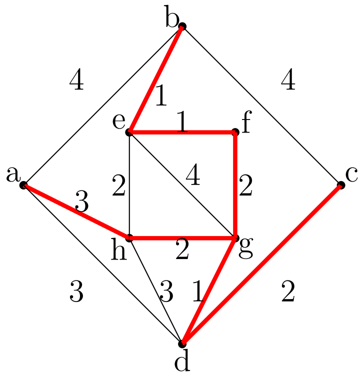


(c) Calcular unha árbore xeradora minimal de G usando o algoritmo de Kruskal, sendo os pesos do grafo os que se indican a continuación

Primero se consideran los ejes de menor peso, siempre que no formen un ciclo hasta formar un árbol. Una solución posible es:

- Ejes de peso 1: be, ef, dg.
- Ejes de peso 2: fg, gh, dc.
- Ejes de peso 3: ah.

Es un árbol generador de peso minimal 12.



.