Cálculo e Análise Numérico

Primeira oportunidade. Versión 2
Curso 2019-20

Cada pregunta do test ben respostada suma 0.5 puntos, se a resposta é incorrecta resta 0.1. O documento no que envíes a resposta a cada pregunta do test debe conter a letra seleccionada e o texto completo da opción que consideras correcta, ou indicar "en branco" se non queres seleccionar ningunha.

1. Sabendo que $\int_1^e g(t)dt = 0$, e é o número de Euler, $g(e) = g(1)$ e C é unha constante arbitraria, cal das seguintes identidades é correcta:

   A $\int_1^e ln(r) + g(r)dr = ln(r)\sqrt{3} + C$

   B $\int_1^e \left(\frac{ln(r)}{r} + eg(r)\right) dr = \frac{1}{2} + e\sqrt{3}$

   C $\int_1^e \frac{e}{\sqrt{2}} g'(r)dr = 0$

   D ningunha das anteriores.

2. O grao de contaminación nun punto dun río depende da distancia dese punto ao nacemento do río, e está definido pola función: $f(x) = 0{,}9x^2 + 0{,}2x + 0{,}2$. Se x mide en km a distancia ao nacemento do río e éste mide 10 km dende o seu nacemento ata a súa desembocadura.

   A a media da contaminación do río dende o seu nacemento ata a súa desembocadura é 31,2

   B a media da contaminación do río dende o seu nacemento ata a súa desembocadura é $\int_0^{10} f(x)dx$.

   C a media da contaminación do río dende o seu nacemento ata a súa desembocadura é $\int_0^{10} f'(x)dx$.

   D ningunha das anteriores.

3. Se $F(y) = \int_{e^{(y^2+1)}}^{\sqrt{y+2}} \ln(t)\,\mathrm{d}t$, cal das seguintes afirmacións é correcta?

   A $F\text{'}(y) = \frac{\ln(\sqrt{y+2})}{2\sqrt{y+2}} - 2y\ln(e^{(y^2+1)})e^{(y^2+1)}$.

   B $F\text{'}(y) = \frac{1}{2y\sqrt{y+2}} - \frac{1}{y}e^{(y^2+1)}$.

   C $F\text{'}(y) = \ln(\sqrt{y+2}) - \ln(e^{y^2+1})$.

   D ningunha das anteriores.

4. Considera o código extractado dun método de busca de raíces, onde `xtol` e `rtol` son cantidades positivas próximas a cero:

```
>> x1 = (x0 - f(x0) / diff(f)(x0)).n()
>> if abs(x1-x0) < xtol and abs(f(x1).n() < rtol:
>>     return x1
```

   Polo que se observa nel infírese que devolverá o valor de `x1` cando:

   A tanto `x1-x0` como `f(x1)` son distintos de cero.

   B a cantidade `abs(x1-x0)` sexa pequena.

   C a distancia entre `x1` e `x0` sexa pequena e ademais `f(x1)` sexa pequeno.

   D Ningunha das anteriores.

P1 Sexa $f(x,y) = -\sqrt{R^2-(x-2)^2-(y-3)^2}$. Se o valor da constante R é $R=4$, resposta as seguintes cuestións:

1. Detalla o dominio de definición de f. Define e representa no plano xy o conxunto de nivel de valor 0, esto é, L_0. Identifica tamén os conxuntos de nivel de valor $-R$, L_{-R}, e $-R-1$, L_{-R-1}. Detalla a imaxe de f. (0.5 puntos).
2. Dá a expresión do plano tanxente á gráfica de f no punto $(x_0,y_0) = (2+\frac{R}{2}, 3+\frac{R}{2})$. Tendo en conta esta expresión, é o punto (x_0,y_0) candidato a máximo, mínimo ou punto sela da función? Razoa a resposta. (0.4 puntos).
3. Calcula o Hessiano de f, os posibles puntos críticos da función f e discute se son máximos, mínimos ou puntos de sela. (0.6 puntos).

P2

1. Resolve a integral indefinida:
$$I = \int f(x)\,dx = \int \cos(x)\,\mathrm{sen}(x)e^{\cos(x)}\,\mathrm{d}x.$$
(0.4 puntos)
2. Comproba que a integral indefinida calculada é correcta. A integral calculada: é un número?, unha función?, un conxunto de funcións? (0.25 puntos)
3. Empregando os apartados anteriores, resolve a ecuación diferencial de primeira orde (EDO) e analiza se é linear:
$$\cos(x)y'(x) - \mathrm{sen}(x)y(x) = \mathrm{sen}(x)\cos(x)e^{\cos(x)}, \quad 0 \le x < \frac{\pi}{2} \quad (*)$$
(0.5 puntos)
4. Empregando os apartados anteriores, proporciona unha solución para o problema de valor inicial correspondente a EDO dada por $(*)$ e a condición inicial $y(0)=0$. (0.1 puntos)
5. Comproba se a solución obtida é unha solución particular de (*). (0.25 puntos)