EXAMEN DE ÁLXEBRA (16-01-2015)

1.- Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & b \\ 2 & b & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

1. Calcular los valores de b para los que A tiene inversa.

2. Para $b = -1$, calcular A^{-1} y expresarla como producto de matrices elementales.

3. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal tal que $(f)_{\mathcal{C},\mathcal{C}} = A$ ¿Para que valores de b no existe ningún vector $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tal que $f(x, y, z) = (-2, 1, -2)$?

4. Para $b = 0$, calcular $|E_{3F_2} \cdot E_{F_1 \leftrightarrow F_2} \cdot ((-2)A) \cdot E_{F_1 - 3F_2}|$.

2.- Se consideran los subespacios de $\mathbb{R}^4$ siguientes: $U_b = \langle (1, -1, b, 1), (0, 0, 0, 1) \rangle$ y $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x - 2t = 0,\ y + 2t = 0\}$.

1. Calcular el valor de b para el cual la $\dim(U_b + W) = 3$.

2. Calcular una base de $U_1 \cap W$.

3. Definir una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ verificando que $Ker\ f = U_0$ e $Im\ f = W$.

3.- Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por:

$$f(x, y, z) = (-x + y - z, x - y - z, -x - y + z).$$

1. Si $U = \langle (1, -1, 1), (0, 0, 1) \rangle$ calcular unas ecuaciones implícitas para $f^{-1}(U)$ y otras para $f(\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0, x - y + z = 0\})$.

2. Probar que f es diagonalizable.

3. Encontrar una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ y una matriz no singular P tales que $(f)_{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ sea diagonal y $(f)_{\mathcal{C},\mathcal{B}} \cdot P = (f)_{\mathcal{B},\mathcal{B}}$.

4.- Demostrar que:

1. Si U y W son subespacios de un espacio vectorial V, entonces $U \cap W$ también es un subespacio de V.

2. Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una aplicación lineal tal que $Ker\ f = Im\ f$, entonces n es un número par.

3. Si $\{u, v, w\}$ es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ linealmente independiente, entonces $\{u - v - w, v - w, w\}$ también es linealmente independiente.

Puntuación: 20+15+20+15