Examen de Alxebra (17-1-2014)

1. Se consideran los subespacios de $\mathbb{R}^4$

$U = \langle (1,-1,1,-1),(0,1,1,1),(0,1,0,0) \rangle$ y $W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / \ y+z=0\}$

a) Calcular las ecuaciones de U.

b) Calcular una base de $U \cap W$.

c) Calcular la dimensión de $U+W$.

2. Sea $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal dada por:

$$f(x,y,z,t) = (x+y, y+t, x-z)$$

a) Si $W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / x+y-z+t=0\}$ calcular la dimensión de $f(W)$.

b) Si $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x-y+z=0\}$, encontrar una base de $f^{-1}(U)$.

c) Sea $\mathcal{B} = \{(0,1,1),(1,1,1),(0,0,1)\}$ una base de $\mathbb{R}^3$, hallar la matriz asociada a f respecto de la base canónica en el dominio y la base $\mathcal{B}$ en el rango.

3.- Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal dada por:

$$f(x,y,z) = (3x+y+z, x+3y+z, x+y+3z)$$

a) Hallar los valores propios de f.

b) Encontrar una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que $(f)_{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ es diagonal.

c) Calcular una matriz no singular P tal que $(f)_{\mathcal{C},\mathcal{B}} = P.(f)_{\mathcal{C},\mathcal{C}}$.

4.- Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2-a \\ 0 & a & a-1 & a \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & a+1 & a & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}).$$

Justificar la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

a) $|A| = 2$.

b) $\left|(-2)E_{3F_4}.E_{F_4+7F_1}.E_{F_1 \leftrightarrow F_3}.A^{-1}\right| = 3$.

c) Si S es un sistema de ecuaciones lineales cuya matriz ampliada es A, entonces S es un sistema incompatible.

5.- *Teoría*

a) Demostrar que toda matriz elemental es no singular e indicar cual es su inversa.

b) Probar que si U y W son subespacios de V, entonces $U \cap W$ es también un subespacio de V.

PUNTUACIÓN: 15+15+15+15+10