SOLUCIÓNS TEST INTEGRACIÓN

1. **Sabendo que $\int_1^e g(t)dt = 1$, $g'(e) \neq \sqrt{2}$, e é o número de Euler, e C é una constante arbitraria, cal das seguintes identidades é correcta:**

A) $\int_1^e \ln(r)\, g(r)dr = \frac{1}{2} + C$
B) $\int_1^e \frac{1}{\sqrt{2}} g(r)dr = \frac{1}{\sqrt{2}}\ g'(e)$
C) $\int_1^e \left(g(r) - \frac{\ln(r)}{r} \right) dr = \frac{1}{2}$
D) Ninguna das anteriores.

A) INCORRECTA. Non é correcta porque é una integral definida e por tanto non pode aparecer a constante C.

B) INCORRECTA. A solución resolvendo a integral proposta, sería:

$$\int_1^e \frac{1}{\sqrt{2}}\, g(r)dr = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_1^e g(r)dr = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

C) CORRECTA.

$$\int_1^e \left(g(r) - \frac{\ln(r)}{r} \right) dr = \int_1^e g(r)dr - \int_1^e \frac{\ln(r)}{r}\, dr =$$

$$1 - \int_1^e \frac{\ln(r)}{r} dr =$$

Resolvendo aplicando o método de sustitución.

$$u = \ln(r)\, , du = \frac{1}{r}\, dr \;\rightarrow dr = r\, du$$

$$\int_1^e \frac{\ln(r)}{r}\, dr = \int_1^e \frac{u}{r}\, r\, du = \int_1^e \frac{u}{\cancel{r}} \cancel{r}\, du = \frac{u^2}{2}\Big]_1^e$$

$$= \frac{1}{2}\left(ln^2(e) - ln^2(1)\right) = \frac{1}{2}\,(1-0) = \frac{1}{2}$$

entón:

$$1 - \int_1^e \frac{\ln(r)}{r} dr = \quad 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

2. **O grao de contaminación nun punto dun río depende da distancia dese punto ao nacemento do río, seguindo a función:** $f(x) = 5x^2 + 2x + 5$. **Se x mide en Km a distancia ao nacemento do río, e a lonxitude total do río dende o seu nacemento ata a súa desembocadura é de 3km, entón:**

   A) O valor medio da contaminación do río dende o seu nacemento ata a súa desembocadura é 23.
   B) O valor medio da contaminación do río dende o seu nacemento ata a súa desembocadura $\int_0^3 f(x)dx$.
   C) O valor medio da contaminación do río dende o seu nacemento ata a súa desembocadura é $\int_0^3 f'(x)dx$.
   D) Ningunha das anteriores.

A) CORRECTA.

$\frac{1}{b-a}\int_0^3 f(x) = \frac{1}{3-0}\int_0^3 5x^2 + 2x + 5 = \frac{1}{3}\left(\frac{5x^3}{3} + \frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}} + 5x\,\right]_0^3) = \frac{1}{3}\,(\frac{5x^2}{3} + x^2 + 5x]_0^3) = \frac{1}{3}\,(\frac{5\times 27}{3} + 9 + 15) = \frac{1}{3}\,(69) = 23$

B) INCORRECTA. Faltaría multiplicar o resultado por $\frac{1}{b-a}$, tal como se fixo no primeiro exercicio.

C) INCORRECTA. Faltaría multiplicar o resultado por $\frac{1}{b-a}$, tal como se fixo no primeiro exercicio. Ademais, non sería da derivada da función senón da función.

3. O valor do número π pode obterse como resultado da integral definida:

A) $\pi = \int_0^{\pi} sen(x)dx$

B) $\pi = \int_0^{1} \frac{4}{1+x^2}\,dx$

C) $\pi = \int_0^{e} \frac{4}{1+x^2}\,dx$

D) Ningunha das anteriores.

A) INCORRECTA.

$$\int_0^{\pi} sen(x)dx = -\cos(x)\Big]_0^{\pi} = -\cos(\pi) + \cos(0) = -(-1) + 1 = 2$$

$$2 \neq \pi$$

B) CORRECTA.

$$\int_0^{1} \frac{4}{1+x^2}\,dx = 4 \times \int_0^{1} \frac{1}{1+x^2}\,dx = 4 \times arctg(x)\Big]_0^{1}$$

$$= 4 \times \left(arctg(1) - arctg(0)\right) = 4 \times \left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = \pi$$

C) INCORRECTA.

$$\int_0^{e} \frac{4}{1+x^2}\,dx = 4 \times \int_0^{e} \frac{1}{1+x^2}\,dx = 4 \times arctg(x)\Big]_0^{e}$$

$$= 4 \times \left(arctg(e) - arctg(0)\right) =$$

coñecendo: e ≈ 2,71828 18284 59045 23536 02874 71352 66249 77572 47093 69995

$$= 4 \times (1.218249307 - 0) = 4.872997228$$

$$4.872997228 \neq \pi$$

4. **A área do recinto delimitado pola curva $y = x^2 - 4x$ e o eixo OX no intervalo [0,4]**

A) É a integral indefinida A = $\int_0^4 x^2 - 4x\, dx$

B) É a integral definida A = $\int_0^4 4x - x^2\, dx$

C) É normal que resulte un valor negativo o valor da área por ser unha función negativa nese intervalo.

D) Ningunha das anteriores.

A) INCORRECTA.
A = $\int_0^4 x^2 - 4x\, dx$ é unha integral definida.

B) CORRECTA. Correspondese coa integral do valor absoluto de f. Por ser unha función negativa no intervalo de estudo, o seu valor absoluto obtense multiplicando por -1, esto é:

$$|f(x)| = |x^2 - 4x| = x^2 + 4x = 4x - x^2$$

-x^2+4x

Ademais:

A = $\int_0^4 4x - x^2\, dx = 2x^2 - \frac{x^3}{3}\Big]_0^4 = 32 - \frac{64}{3} = \frac{32}{3} = 10'6$

C) INCORRECTA. Que unha función sexa negativa nun intervalo determinado, non implica que a área teña que dar un resultado negativo.

5. **A derivada da función $F(x) = \int_{\cos(x)}^{tg(x)} \frac{1}{1-t^2}\, dt$ é**

A) $F'(x) = \frac{1}{1-x^2}$

B) $F'(x) = \frac{1+tg^2(x)}{1-tg^2(x)} + \frac{sen(x)}{1-cos^2(x)}$

C) $F'(x) = \frac{tg(x)}{1-tg^2(x)} - \frac{\cos(x)}{1-cos^2(x)}$

D) ningunha das anteriores.

A) INCORRECTA. Non aplica a Regra de Leibniz

B) CORRECTA.
Aplicando a Regra de Leibniz:

$$F(x) = \int_{\cos(x)}^{tg(x)} \frac{1}{1-t^2}\, dt$$

$$= \left(\frac{1}{1-tg^2x} \times sec^2x\right) - \left(\frac{1}{1-cos^2x} \times (-sen(x))\right)$$

$$= \frac{sec^2x}{1-tg^2x} + \frac{sen\ x}{1-cos^2x}$$

Coñecendo que $sec^2x = tg^2x + 1$, entón:

$$\frac{sec^2x}{1-tg^2x} + \frac{sen\ x}{1-cos^2x} = \frac{1+tg^2x}{1-tg^2x} + \frac{sen\ x}{1-cos^2x}$$

C) INCORRECTA. Non aplica correctamente a Regra de Leibniz, non multiplica polas derivadas das funcións senón polas funcións.

6. **A integral $I = \int_0^1 \frac{1}{s-1} ds$,**

A) resólvese aplicando a regra de Barrow no intervalo [0,1] e vale $I = 0$.

B) é unha integral impropia e non converxe.

C) é unha integral impropia e o seu valor é $\ln(0)$.

D)ningunha das anteriores.

A) INCORRECTA. Non se resolve aplicando a Regra de Barrow, xa que é unha integral impropia.

lim M->1

B) CORRECTA. É unha integral impropia, por tanto:
$I = \int_0^1 \frac{1}{s-1} ds = \lim_{M\to 1} \int_0^M \frac{1}{s-1} = \lim_{M\to 1} \ln(s-1)\,\Big]_0^M = \ln(M-1) - \ln(0-1) = \infty - 0 = \infty$
Entón, non converxe.

C) INCORRECTA. O resultado non é correcto, como se pode ver na reposta B.

7. **Seleccionar a única opción que resolve con MATLAB correctamente a cuestión descrita:**

A) $\gg \mathbf{x = [0{:}\,0.25{:}\,4]}$

$\gg \mathbf{y = 2.*\,x + 3;}$

$\gg \mathbf{trapz(x, y)}$

Obtemos o valor 28 que se corresponde co valor da regra do trapecio ao aproximar $\int_0^4 2x + 3dx$

B) Se introducimos as seguintes sentenzas:

$\gg \mathbf{x = [0{:}\,0.25{:}\,4]}$

$\gg \mathbf{y = 2.*\,x + 3}$

$\gg \mathbf{quad(x, y)}$

Obtemos o valor 28 que se corresponde co valor da regra de Simpson ao aproximar $\int_0^4 2x + 3dx$

C) A secuencia de comandos:

$\gg \mathbf{C = [-5{:}\,1{:}\,5]}$

$\gg \mathbf{xp = linspace(-2, 2, 20)}$

$\gg \mathbf{y = subs(int(f), xp)}$

$\gg \mathbf{[C, Y] = meshgrid(C, y)}$

$\gg \mathbf{plot\big(x, C + Y, '*'\big)}$

Permite representar algunhas primitivas dunha certa función $f(x)$ definida previamente en simbólico, no intervalo $x \in [-5, 5]$, para 20 valores de constantes C entre -2 e 2.

D) **O comando seguinte:**

$\gg \mathbf{int('sin(x)\ /\ x', 0, pi)}$

proporciona o resultado:

$ans =$

$sinint(pi)$

o que significa que a función $f(x) = \frac{sen(x)}{x}$ está sen integral en π por non ser continua en dito punto.

A) CORRECTA. A regra do trapecio é exacta para funcións lineares polo tanto proporciona unha aproximación con erro cero e coincide co valor exacto da integral e os input's son os correctos de matlab.

B) INCORRECTA.O resultado que deberiamos obter está ben, sería 28, igual que polo método do trapecio, xa que a regra de Simpson é exacta para polinomios de grao 0, 1, 2 e 3. Sen embargo, a diferencia do comando "trapz", para utilizar o comando "quad", e necesario poñer unha función:

$$\mathrm{quad}(\text{"funcion"},a,b)$$

C) INCORRECTA. No comando plot debería aparecer "xp" en lugar de "x". Ademais, os valores de x e C da explicación están cambiados.

D) INCORRECTA. O comando proporciona o resultado indicado pero a función $f(x) = \frac{sen(x)}{x}$ é continua en π: