Examen de Alxebra (11-07-2014)

1. Se consideran los subespacios de $\mathbb{R}^3$

$U_a = \langle (1,2,1), (1,2,a+2), (3,6,a+4) \rangle$ y $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \ x-y-z=0\}$

a) Calcular, en función de los valores de a, la dimensión y unas ecuaciones de U_a.

b) Para $a=0$, calcular una base de $U_0 \cap W$ y la dimensión de U_0+W.

c) Definir una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ verificando que $Ker\ f = W$ e $Im\ f = U_{-1}$. Para esa aplicación lineal f, calcular $f(5,3,3)$.

2. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal dada por:

$$f(x,y,z) = (x+z, y, x+2y+z)$$

a) Determinar una base de $Ker\ f$.

b) Calcular para que valores de α el vector $(2,-2,1+\alpha)$ pertenece a $Im\ f$.

c) Calcular una base del subespacio $f^{-1}\langle(1,1,3)\rangle$.

3.- Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por:

$$f(x,y,z) = (y-z, y, -x+y)$$

a) Encontrar una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que $(f)_{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ sea diagonal.

b) Justificar que para cualquier base $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^3$ se tiene que $|(f)_{\mathcal{D},\mathcal{D}}| = -1$.

4.- Sea $A \in M_5(\mathbb{R})$. Justificar la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

a) Si $B \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ y $|2A^tB^{-1}A^{-1}| = -\frac{1}{8}$, entonces $|B| = -16$.

b) Si $|A| \neq 0$ todos los sistemas cuya matriz ampliada sea A son compatibles y determinados.

5.- *Teoría*

a) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es una matriz no singular. Probar que $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$.

b) Sea $f : V \to V$ una aplicación lineal y α y β dos valores propios diferentes de f. Probar que $V_\alpha \cap V_\beta = \{0\}$.

c) Sea $f : V \to W$ una aplicación lineal y U un subespacio de W. Demostrar que $f^{-1}(U)$ es un subespacio de V.

PUNTUACIÓN: 15+15+15+10+15