Intervalle de confiance

4 A E.S.I.E.A.

E. Claeys

ICUBE/IRMA
Université de Strasbourg

E.S.I.E.A, 2019

Programme du cours

1. Loi de probabilité
2. Intervalle de confiance
3. Quizz

Rappel

Essayez de citer quelques lois de distribution.

Rappel

Essayez de citer quelques lois de distribution.

- Loi de Bernoulli
- Loi binomiale
- Loi de Poisson
- Loi normale

Loi de Bernoulli

Nom : Bernoulli

Valeurs : Binaire

Particularité :

Aime jouer à pile ou face

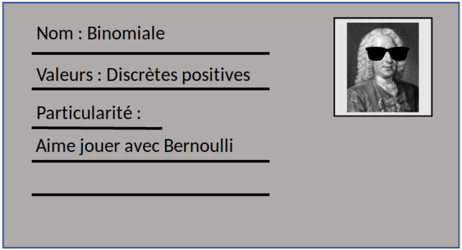
Loi de Bernoulli

Une variable aléatoire X de Bernoulli est une variable qui ne prend que deux valeurs : l'échec (auquel on associe la valeur 0) et le succès (auquel on associe la valeur 1) d'une expérience. Cette expérience est appelée épreuve de Bernoulli. Par exemple, on souhaite savoir si une cellule est atteinte par un virus. On associe la valeur 1 si elle est atteinte (succès) et la valeur 0 si elle est saine (échec).

Loi de Bernoulli

On dit de la v.a. X suit une une loi de Bernoulli et on note $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(1,p)$ où $p \in]0;1[$ si et seulement si $X(\Omega) = \{0;1\}$ et $\mathbb{P}[\{X=1\}] = p$.

Loi binomiale



Loi binomiale

la loi binomiale modélise le nombre de succès obtenus lors de la répétition indépendante de plusieurs variables aléatoires suivant une loi de Bernoulli. Elle permet de modèliser le nombre d'échecs et succès dans une expérience. Par exemple, on souhaite savoir connaître l'espérance de gain (ici le nombre de victoires) au Pierre-papier-ciseaux contre Emmanuel Macron après 1000 essais.

Loi binomiale

On dit de la v.a. X modélisant le nombre de de succès après n essais i.i.d. suit une une loi binomiale et on note $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n, p)$ où $p \in]0; 1[$, $n \in \mathbb{N}$, si et seulement si $X(\Omega) \in \mathbb{N}^{*+}$, et $n \geq 1$.

Loi de Poisson

Nom : Poisson

Valeurs : Discrètes positives

Particularité :

Compte les criminels

Loi de Poisson

la loi de Poisson modélise le comptage d'évènement obtenus lors d'une période fixée. Par exemple, sur un trajet ferroviaire, on souhaite savoir après avoir constaté deux incidents par an, quelle sera la probabilité qu'il y en ait exactement dix en dix ans ?

Loi de Poisson

On dit de la v.a. X modélisant le nombre d'évènements sur période δ_t données suit une une loi de Poisson et on note $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$ où λ représente ne nombre d'évènement moyen observé sur Δ_t et tel que $\lambda > 0$.

Loi de Normale

Nom : Normale

Valeurs : Continues

Particularité :

Est un peu cloche

Loi normale

La loi normale modélise le comportement de variable aléatoire centrées réduites autour de la moyenne. Par exemple, la distribution des notes d'une classe d'étudiants.

Loi normale

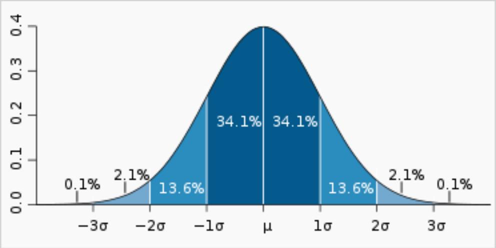
Plus formellement, c'est une loi de probabilités absolument continue qui dépend de deux paramètres : son espérance, un nombre réel noté μ, et son écart type, un nombre réel strictement positif noté σ.
On dit de la v.a. X i.i.d. suit une une loi normale et on note $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ où $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma^2 \in \mathbb{R}^{+*}$.

Intervalle de confiance

Intervalle de confiance autour de la moyenne

Rappel :

- σ est appelé l'écart-type et est égale à la racine carré de la variance.
- On dira qu'une loi normal est paramétrée par : "sa moyenne et son écart-type" ou bien (par abus de langage) : "sa moyenne et sa variance".



Représentation graphique d'une loi normale. Chaque bande colorée a la largeur d'un écart type.

Notion d'intervalle de confiance

Un intervalle de confiance permet donner un intervalle de valeur dans lequel le paramètre inconnu d'une loi est à estimer (par exemple la probabilité de répondre "oui" dans un sondage réalisé sur n échantillons).

Intervalle de confiance

On appel un **intervalle de confiance à** $(1-\alpha)$ du paramètre p tout intervalle $]p_1; p_2[$ tel que : $\mathbb{P}(p \in]p_1; p_2[) = 1 - \alpha$ pour $\alpha \in [0; 1]$ fixé.

Il permet par exemple de donner un intervalle de confiance autour de la moyenne espérée.

Principe :
On considère que $\hat{\mu}$ suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu; \sigma)$.

Intervalle de confiance $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma)$

L'intervalle de probabilité de $\hat{\mu}$ à $1 - \alpha$ est :

$$\hat{\mu} - t_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \hat{\mu} + t_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Si l'on connait la variance et que $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ alors $t_{1-\alpha/2}$ est ici le quantile d'ordre $1 - \alpha/2$ d'une loi gaussienne centrée réduite.

Intervalle de confiance autour de la moyenne

Cas ou X suit une loi normale de variance connue

Intervalle de confiance $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma)$

L'intervalle de probabilité de $\hat{\mu}$ à $1-\alpha$ est :

$$\hat{\mu} - t_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \hat{\mu} + t_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Si l'on connait la variance et que $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ alors $t_{1-\alpha/2}$ est ici le quantile d'ordre $1-\alpha/2$ d'une loi gaussienne centrée réduite.

Pour trouver le quantile d'ordre d'une loi gaussienne centrée réduite il faut utiliser une table des quantile ou bien taper dans R :

```
>qnorm(0.975) #pour alpha = 0.05
[1] 1.959964
```

Exemple : L'airbag est un système de sécurité de plus en plus souvent installé dans les automobiles. Son gonflement est assuré par un dispositif pyrotechnique dont les caractéristiques sont la moyenne et l'écart-type du délai entre la mise à feu et l'explosion. Lors de l'étude d'un certain dispositif d'allumage, les résultats des mesures qui proviennent d'une loi normale de variance connue ($\sigma^2 = 4$), effectués sur 30 exemplaires, ont été (en millisecondes) les suivants :
28 ; 28 ; 31 ; 31 ; 32 ; 33 ; 32,5 ; 29 ; 30,5 ; 31 ; 28,5 ; 27,5 ; 32 ; 29,5 ; 28 ; 26 ; 30 ; 31 ; 32,5 ; 33 ; 27,5 ; 29 ; 30 ; 28,5 ; 27 ; 25 ; 31,5 ; 33 ; 34,5 ; 29

Calculer l'intervalle de confiance à 95% de la moyenne du délai pour une variance égale à 4.

Exemple : L'airbag est un système de sécurité de plus en plus souvent installé dans les automobiles. Son gonflement est assuré par un dispositif pyrotechnique dont les caractéristiques sont la moyenne et l'écart-type du délai entre la mise à feu et l'explosion. Lors de l'étude d'un certain dispositif d'allumage, les résultats des mesures qui proviennent d'une loi normale de variance connue ($\sigma^2 = 4$), effectués sur 30 exemplaires, ont été (en millisecondes) les suivants :

28 ; 28 ; 31 ; 31 ; 32 ; 33 ; 32,5 ; 29 ; 30,5 ; 31 ; 28,5 ; 27,5 ; 32 ; 29,5 ; 28 ; 26 ; 30 ; 31 ; 32,5 ; 33 ; 27,5 ; 29 ; 30 ; 28,5 ; 27 ; 25 ; 31,5 ; 33 ; 34,5 ; 29

L'intervalle de confiance à 95% autour de $\hat{\mu}$ est égale à $]29,25099; 30,68234[$.

Intervalle de confiance autour de la moyenne

Cas ou X suit une loi normale de variance inconnue

Principe :
On considère que $\hat{\mu}$ suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu; \sigma)$. On ne connait pas la variance ! On utilisera donc S^n pour estimer σ.

Intervalle de confiance $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma)$

L'intervalle de probabilité de $\hat{\mu}$ à $1 - \alpha$ est :

$$\hat{\mu} - t_{n-1;1-\alpha/2} \frac{S^n}{\sqrt{n-1}} < \mu < \hat{\mu} + t_{n-1;1-\alpha/2} \frac{S^n}{\sqrt{n-1}}$$

Si l'on ne connait pas la variance et que $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ alors $t_{n-1;1-\alpha/2}$ est ici le quantile d'ordre $t_{n-1;1-\alpha/2}$ de la loi de Student à $(n-1)$ degrés de liberté.

Intervalle de confiance autour de la moyenne

Cas ou X suit une loi normale de variance inconnue

Soit S_c^n l'écart type corrigé tel que $S_c^n = \sqrt{\frac{n}{n-1}}S^n$

Intervalle de confiance $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma)$

L'intervalle de probabilité de $\hat{\mu}$ à $1 - \alpha$ est :

$$\hat{\mu} - t_{n-1;1-\alpha/2}\frac{S_c^n}{\sqrt{n}} < \mu < \hat{\mu} + t_{n-1;1-\alpha/2}\frac{S_c^n}{\sqrt{n}}$$

Si l'on ne connait pas la variance et que $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ alors $t_{n-1;1-\alpha/2}$ est ici le quantile d'ordre $t_{n-1;1-\alpha/2}$ de la loi de Student à $(n-1)$ degrés de liberté.

Pour trouver le quantile d'ordre d'une loi de Student à $(n-1)$ degrés de liberté il faut utiliser une table des quantile ou bien taper dans R :

```
> qt(0.975,n-1) #alpha = 0.05
```

Notion d'intervalle de confiance

Une machine fabrique des billes métalliques dont la masse, mesurée en grammes, suit une loi normale. Nous prélevons au hasard 10 billes. Leurs masses sont :

19,6 ; 20 ; 20,2 ; 20,1 ; 20 ; 19,9 ; 20 ; 20,3 ; 20,1 ; 19,8.

Quel est l'intervalle de confiance à 95% de la masse des billes métalliques fabriquées ?

Notion d'intervalle de confiance

Une machine fabrique des billes métalliques dont la masse, mesurée en grammes, suit une loi normale. Nous prélevons au hasard 10 billes. Leurs masses sont :

19,6 ; 20 ; 20,2 ; 20,1 ; 20 ; 19,9 ; 20 ; 20,3 ; 20,1 ; 19,8.

L'intervalle de confiance à 95% autour de $\hat{\mu}$ est égale à à vous de trouver.

Quizz

La loi qui modélise le nombre de succès obtenus lors de la répétition indépendante de plusieurs variables aléatoire est la loi :

- Normale
- Exponentielle
- Binomiale
- de Student

La loi qui modélise le nombre de succès obtenus lors de la répétition indépendante de plusieurs variables aléatoire est la loi :

- Normale
- Exponentielle
- Binomiale
- de Student

L'écart type est égale à

- à la racine de la variance
- au carré de la variance
- à la somme des variances
- au produit des variances

L'écart type est égale à

- à la racine de la variance
- au carré de la variance
- à la somme des variances
- au produit des variances

Un intervalle de confiance est toujours associé à

- une moyenne
- une probabilité
- une somme
- une variance

Un intervalle de confiance est toujours associé à

- une moyenne
- une probabilité
- une somme
- une variance

Si l'on connaît la variance et que $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma)$, alors l'intervalle de confiance de μ sera calculé à l'aide du

- du quantile d'ordre $t_{n;1-\alpha/2}$ de la loi de Student à $(n-1)$ degrés de liberté.
- quantile d'ordre $t_{n-1;1-\alpha/2}$ de la loi de Student à $(n-1)$ degrés de liberté.
- quantile d'ordre $t_{1-\alpha/2}$ d'une loi gaussienne.
- quantile d'ordre $t_{1-\alpha/2}$ d'une loi gaussienne centrée réduite.

Si l'on connaît la variance et que $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma)$, alors l'intervalle de confiance de μ sera calculé à l'aide du

- du quantile d'ordre $t_{n;1-\alpha/2}$ de la loi de Student à $(n-1)$ degrés de liberté.
- quantile d'ordre $t_{n-1;1-\alpha/2}$ de la loi de Student à $(n-1)$ degrés de liberté.
- quantile d'ordre $t_{1-\alpha/2}$ d'une loi gaussienne.
- quantile d'ordre $t_{1-\alpha/2}$ d'une loi gaussienne centrée réduite.

Quelle égalité est juste

- $S_c^n = \sqrt{\frac{n}{n-1}} S^n$
- $S^n = \sqrt{\frac{n}{n-1}} S_c^n$
- $S_c^n = \sqrt{\frac{n-1}{n}} S^n$
- $S^n = \sqrt{\frac{n-1}{n}} S_c^n$

Quelle égalité est juste

- $S_c^n = \sqrt{\frac{n}{n-1}}S^n$
- $S^n = \sqrt{\frac{n}{n-1}}S_c^n$
- $S_c^n = \sqrt{\frac{n-1}{n}}S^n$
- $S^n = \sqrt{\frac{n-1}{n}}S_c^n$