Concepts fondamentaux de la statistique

4 A E.S.I.E.A.

E. Claeys

ICUBE/IRMA
Université de Strasbourg

E.S.I.E.A, 2019

Programme du cours

Principe

Considérons un modèle statistique fixé quelconque et une observation X ($X = X_1, X_2, \ldots, X_n$) issue de ce modèle. L'objectif ici est d'estimer une quantité dépendante d'un paramètre inconnu θ où θ appartient à un ensemble connu Θ et où $\mathbb{P}_\theta$ est la loi commune des variables X_i. La quantité à estimer est noté $g(\theta)$, où g est une fonction de Θ dans $\mathbb{R}^p$ (telle que $p \in \mathbb{N}^*$).

Principe

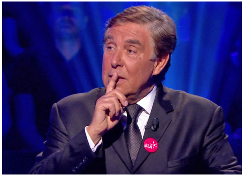
- Un **estimateur** $\hat{g}$ de $g(\theta)$ est toute application mesurable en l'observation X et indépendante de θ. Tout estimateur est donc la forme de $\hat{g} = h(X)$ où h est une application mesurable $\Omega \to \mathbb{R}^p$.

On note généralement les estimateurs avec un chapeau. Concrètement, c'est la réalisation de la variable aléatoire $\hat{g}$ qui fournit une estimation de $g(\theta)$: on l'appelle une **estimée** de $g(\theta)$

Principe

- Un **estimateur** $\hat{g}$ de $g(\theta)$ est toute application mesurable en l'observation X et indépendante de θ. Tout estimateur est donc la forme de $\hat{g} = h(X)$ où h est une application mesurable $\Omega \to \mathbb{R}^p$.

- L'estimateur $\hat{g}$ dépend-t-il de θ ?



- $\hat{g} = 0_{\mathbb{R}^p}$ est-il un estimateur ?

Principe

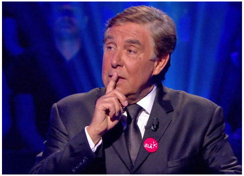
- Un **estimateur** $\hat{g}$ de $g(\theta)$ est toute application mesurable en l'observation X et indépendante de θ. Tout estimateur est donc la forme de $\hat{g} = h(X)$ où h est une application mesurable $\Omega \to \mathbb{R}^p$.

- L'estimateur $\hat{g}$ dépend-t-il de θ ? NON

$\Rightarrow$ Puisque θ est inconnu il est indispensable de $\hat{g} = h(X)$ n'en dépende pas

- $\hat{g} = 0_{\mathbb{R}^p}$ est-il un estimateur ?OUI

$\Rightarrow$ Ne s'appuyant sur aucune observation, cet estimateur sera bien entendu très mauvais



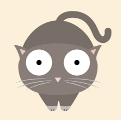
Consistance d'un estimateur

- On fixe une observation $X = (X_1, \ldots, X_n)$ et $\widehat{g_n} = h_n(X_1, \ldots, X_n)$ un estimateur de $g(\theta)$. Cet estimateur est dit :
  - **consistant** si pour tout $\theta \in \Theta$, $\widehat{g_n}$ converge en $\mathbb{P}_\theta$-probabilité vers $g(\theta)$ lorsque n tend vers $+\infty$,
  - **fortement consistant** si pour tout $\theta \in \Theta$, $\hat{g}_n$ converge $\mathbb{P}_\theta$-presque sûrement vers $g(\theta)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

La consistance est une première propriété qu'un estimateur est susceptible de posséder. Elle traduit la proximité entre l'estimateur (au sens probabiliste) et l'estimée lorsque la taille de l'observation est très grande.

Consistance d'un estimateur

- On fixe une observation $X = (X_1, \dots, X_n)$ et $\widehat{g_n} = h_n(X_1, \dots, X_n)$ un estimateur de $g(\theta)$. Cet estimateur est dit :
  - **consistant** si pour tout $\theta \in \Theta$, $\widehat{g_n}$ converge en $\mathbb{P}_\theta$-probabilité vers $g(\theta)$ lorsque n tend vers $+\infty$,
  - **fortement consistant** si pour tout $\theta \in \Theta$, $\widehat{g_n}$ converge $\mathbb{P}_\theta$-presque sûrement vers $g(\theta)$ lorsque n tend vers $+\infty$.



Consistance d'un estimateur

La consistance procède souvent de l'application de la loi des grands nombres. Ainsi, dans l'exemple des sondages, le but est d'estimer la proportion θ de la population en faveur du projet de loi sur la légalisation du cannabis, à l'aide de l'observation $X = (X_1, \ldots, X_n)$. Il est naturel de considérer l'estimateur de la moyenne empirique, qui est fortement consistant. Ce dernier sera dorénavant noté $\overline{X}_n$ et il est défini par

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Consistance d'un estimateur

La consistance procède souvent de l'application de la loi des grands nombres. Ainsi, dans l'exemple des sondages, le but est d'estimer la proportion θ de la population en faveur du projet de loi sur la légalisation du cannabis, à l'aide de l'observation $X = (X_1, \dots, X_n)$. Il est naturel de considérer l'estimateur de la moyenne empirique, qui est fortement consistant. Ce dernier sera dorénavant noté $\overline{X}_n$ et il est défini par

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Pour construire des estimateurs, nous verrons deux méthodes possibles :

la méthode des moments et **la méthode du maximum de vraisemblance**.

L'idée de base est d'estimer une espérance mathématique par une espérance empririque, une variance mathématique par une variance empirique, etc.

- D'après la loi des grands nombre l'espérance d'une variable aléatoire X converge presque sûrement vers sa moyenne empirique. Ainsi $\mathbb{E}[X] = \overline{X}_n$
- On appelle m_k le **moment d'ordre** k s'il existe un nombre $\mathbb{E}[X^k]$

On constate que l'espérance d'une variable aléatoire est son moment d'ordre 1. Si X est une variable aléatoire discrète, son moment d'ordre k se calcule par la formule :

$$m_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k \mathbb{P}[X = x_i]$$

L'idée de base est d'estimer une espérance mathématique par une espérance empririque, une variance mathématique par une variance empirique, etc.

- D'après la loi des grands nombre l'espérance d'une variable aléatoire X converge presque sûrement vers sa moyenne empirique. Ainsi $\mathbb{E}[X] = \overline{X}_n$
- On appelle m_k le **moment d'ordre** k s'il existe un nombre $\mathbb{E}[X^k]$

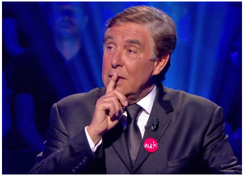
On constate que l'espérance d'une variable aléatoire est son moment d'ordre 1. Si X est une variable aléatoire absolument continue, son moment d'ordre k se calcule par la formule :

$$m_k = \int_{\mathbb{R}} x^k f(x) dx$$

L'idée de base est d'estimer une espérance mathématique par une espérance empririque, une variance mathématique par une variance empirique, etc.
D'après la loi des grands nombre l'espérance d'une variable aléatoire X converge presque sûrement vers sa moyenne empirique. Ainsi $\mathbb{E}[X] = \overline{X}_n$
On appelle m_k le **moment d'ordre** k s'il existe un nombre $\mathbb{E}[X^k]$

- Soit X une variable aléatoire discrète, à correspond à son moment d'ordre 1

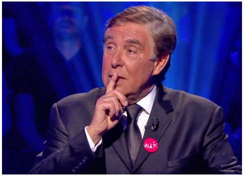
$\Rightarrow$ $m_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbb{P}[X = x_i] = \overline{X}_n = \mathbb{E}[X]$



Un **moment centré** d’ordre k est l’espérance de l’écart entre les valeurs prises par X et leur espérance, à la puissance k.

$$\mu_k = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X]))^k\right]$$

- Écrivez le moment centrée d’ordre deux d’une variable aléatoire. Que contatez vous



Construction d'un estimateur

Méthode des moments

Un **moment centré** d'ordre k est l'espérance de l'écart entre les valeurs prises par X et leur espérance, à la puissance k.

$$\mu_k = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X]))^k\right]$$

- Écrivez le moment centrée d'ordre deux d'une variable aléatoire . Que contatez vous

$\Rightarrow$ $\mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right]$

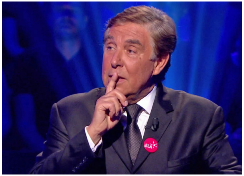
$\Rightarrow$ $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$

$\Rightarrow$ $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i^2 - 2X_i^2\overline{X} + \overline{X}^2)$

$\Rightarrow$ $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i^2) - 2\overline{X}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\overline{X}^2)$

$\Rightarrow$ $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i^2) - 2\overline{X}\overline{X} + \overline{X}^2$

$\Rightarrow$ $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i^2) - \overline{X}^2$ C'est justement la formule de la variance !



Construction d'un estimateur

Méthode des moments

• Si X est une variable aléatoire, **son moment d'ordre** k se calcule par la formule :

$$m_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k \mathbb{P}[X = x_i] \text{ (si X discret)} \qquad m_k = \int_{\mathbb{R}} x^k f(x) dx \text{ (si X continu)}$$

• Un **moment centré** d'ordre k est l'espérance de l'écart entre les valeurs prises par X et leur espérance, à la puissance k.

$$\mu_k = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X]))^k\right]$$

- L'espérance $\mathbb{E}[X]$ peut être estimée par le moment d'ordre 1 (noté $\overline{X_n}$).
- La variance $\mathbb{V}[X]$ peut être estimée par le moment centrée d'ordre 2 (noté S_n^2).

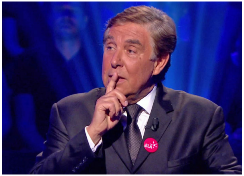
Construction d'un estimateur

Exemple : loi de Bernoulli

Si $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes et de même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ tel que $\mathbb{E}(X) = p$. Donc l'estimateur de p par la méthode des moments est $\hat{p} = \overline{X}$

.

- L'estimateur de p par la méthode des moments est



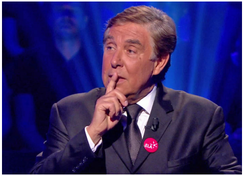
Construction d'un estimateur

Exemple : loi de Bernoulli

Si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes et de même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(\mu)$ tel que $\mathbb{E}(X) = \mu$. Donc l'estimateur de μ par la méthode des moments est $\hat{\mu} = \overline{X}$

.

- L'estimateur $\hat{\mu}$ de μ par la méthode des moments est la proportion de 1 dans l'échantillon. On retrouve donc le principe d'estimation d'une probabilité par une proportion.



La loi des grands nombres fournit un estimateur « intuitif » de l'espérance d'une loi, mais si l'on cherche une méthode un peut générale pour deviner un estimateur, la **méthode du maximum de vraisemblance** est une stratégie plus efficace. Le principe est :
Si un échantillonage a produit la suite finie x_1^*,. . .,x_n^* de nombres et qu'on choisi de modéliser cette situation par un n-échantillon X_1,. . .,X_n de v.a. indépendantes de loi $\mathcal{L}(\theta)$, et que le choix du paramètre θ est le problème auquel on est confronté, on peut considérer l'évènement $E^* = \{X_1 = x_1^*, \ldots X_n = x_n^*\}$, et plus généralement :

$$E(x_1, \ldots, X_n = x_n^*) = \Big\{X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n\Big\} = \{X_1 = x_1\} \bigcap \cdots \bigcap \{X_n = x_n\}$$

et sa probabilité

$$\begin{aligned} L(x_1, \ldots, x_n; \theta) := \mathbb{P}_\theta(E(x_1, \ldots, X_n = x_n^*)) &= \mathbb{P}_\theta(\{X_1 = x_1\} \bigcap \cdots \bigcap \{X_n = x_n\}) \\ &= \mathbb{P}_\theta(\{X_1 = x_1\}). \ldots .\mathbb{P}_\theta(\{X_n = x_n\}) \end{aligned}$$

Si un échantillonage a produit la suite finie x_1^*,...,x_n^* de nombres et qu'on choisi de modéliser cette situation par un n-échantillon X_1,...,X_n de v.a. indépendantes de loi $\mathcal{L}(\theta)$, et que le choix du paramètre θ est le problème auquel on est confronté, on peut considérer l'évènement $E^* = \{X_1 = x_1^*, \ldots X_n = x_n^*\}$, et plus généralement :

$$E(x_1, \ldots, X_n = x_n^*) = \Big\{X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n\Big\} = \{X_1 = x_1\} \bigcap \cdots \bigcap \{X_n = x_n\}$$

et sa probabilité

$$\begin{aligned} L(x_1, \ldots, x_n; \theta) := \mathbb{P}_\theta(E(x_1, \ldots, X_n = x_n^*)) &= \mathbb{P}_\theta(\{X_1 = x_1\} \bigcap \cdots \bigcap \{X_n = x_n\}) \\ &= \mathbb{P}_\theta(\{X_1 = x_1\}). \ldots .\mathbb{P}_\theta(\{X_n = x_n\}) \end{aligned}$$

Cette dernière égalité résulte de l'hypothèse que X est une v.a. indépendante. L'idée intuitive est que le choix de $\hat{\theta}$ pour estimer θ sera celui pour lequel sa probabilité est maximale pour les valeurs $x_1^*, \ldots,_n$ obtenues.

$$
\begin{aligned}
L(x_1, \ldots, x_n; \theta) := \mathbb{P}_\theta(E(x_1, \ldots, X_n = x_n^*)) &= \mathbb{P}_\theta(\{X_1 = x_1\} \bigcap \cdots \bigcap \{X_n = x_n\}) \\
&= \mathbb{P}_\theta(\{X_1 = x_1\}). \ldots .\mathbb{P}_\theta(\{X_n = x_n\})
\end{aligned}
$$

Cette dernière égalité résulte de l'hypothèse que X est une v.a. indépendante. L'idée intuitive est que le choix de $\hat{\theta}$ pour estimer θ sera celui pour lequel sa probabilité est maximale pour les valeurs $x_1^*, \ldots ,_n$ obtenues.

$$
\hat{\theta} = \underset{\theta}{\operatorname{argmax}}\{L(x_1^*, \ldots, x_n^*; \theta)\}
$$

$$\hat{\theta} = \underset{\theta}{\text{argmax}}\{L(x_1^*, \ldots, x_n^*; \theta)\}$$

c'est-à-dire la valeur (si elle existe et est unique) de θ pour laquelle la fonction $\theta \mapsto L(x_1, \ldots, x_n^*; \theta) = 0$

Vraisemblance de la loi L

La fonction $L_n : (x_1, \ldots, x_n; \theta) \mapsto L_n(x_1, \ldots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}_\theta(\{X_i = x_i\})$ pour des variables aléatoires $X_i \rightsquigarrow \mathcal{L}(\theta)$ s'appelle la vraisemblance de la loi $\mathcal{L}$

Vraisemblance de la loi L

La fonction $L_n : (x_1, \dots, x_n; \theta) \mapsto L_n(x_1, \dots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}_\theta(\{X_i = x_i\})$ pour des variables aléatoires $X_i \rightsquigarrow \mathcal{L}(\theta)$ s'appelle la vraisemblance de la loi $\mathcal{L}$

La v.a. obtenue en appliquant la fonction $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \mathrm{argmax}_\theta\{L(x_1, \dots, x_n; \theta)\})$ appliqué à n échantillons $(X_1, \dots, X_n)$ s'appelle l'estimateur au maximum de vraisemblance du paramètre θ de la loi discrète $\mathcal{L}(\theta)$.

Exemple :
Reprenons l'exemple du référendum : les X_i suivent une loi de Bernouilli $\mathcal{B}(1, p)$, et donc $\theta = p$. Introduisons la notation $s := x_1 + \cdots + x_1 000$ pour la somme des valeurs observées sur l'échantillon $x_1, \ldots, x_{1000}$ c'est à dire le nombre de personnes qui voterons "oui" ($n = 1000$). Nous avons donc

$$L_n(x_1, \ldots, x_n; \theta) =$$

Exemple :
Reprenons l'exemple du référendum : les X_i suivent une loi de Bernouilli $\mathcal{B}(1, p)$, et donc $\theta = p$. Introduisons la notation $s := x_1 + \cdots + x_{1000}$ pour la somme des valeurs observées sur l'échantillon $x_1, \ldots, x_{1000}$ c'est à dire le nombre de personnes qui voterons "oui" ($n = 1000$). Nous avons donc

$$L_n(x_1, \ldots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}_\theta(\{X_i = x_i\})$$

$$L_n(x_1, \ldots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}_\theta(\{X_i = x_i\})$$

Ici il n'y a que deux valeurs possibles pour les X_i : $\{X_i = 1\}$ et $\{X_i = 0\}$. On cherche la proportion de personne qui ont dit "oui" c'est à dire que l'on veut estimer p par θ donc $\theta = p = \mathbb{P}_\theta(\{X_i = 1\}$ et $1 - \theta = 1 - p = \mathbb{P}_\theta(\{X_i = 0\})$ donc :

$$L_n(x_1, \ldots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}_\theta(\{X_i = x_i\})$$

Ici il n'y a que deux valeurs possibles pour les X_i : $\{X_i = 1\}$ et $\{X_i = 0\}$. On cherche la proportion de personne qui ont dit "oui" c'est à dire que l'on veut estimer p par θ donc $\theta = p = \mathbb{P}_\theta(\{X_i = 1\}$ et $1 - \theta = 1 - p = \mathbb{P}_\theta(\{X_i = 0\})$ donc :

$$\begin{aligned} L_n(x_1, \ldots, x_n; \theta) &= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}_\theta(\{X_i = x_i\}) \\ &= \theta^s (1-\theta)^{n-s} \end{aligned}$$

On s'intéresse à la fonction L_n :

$$L_n(x_1, \ldots, x_n; \theta) = \theta^s(1-\theta)^{n-s}$$

Les extrémité de l'intervalle $[0,1]$ auquel appartient θ ne peuvent être des extrema sauf si $s = 0$ où $s = n$. L_n est une fonction concave, ainsi son maximum θ^* est un zéro de la dérivée.

$$\frac{\partial}{\partial\theta} L_n(x_1, \ldots, x_n; \theta) = ?$$

On s'intéresse à la fonction L_n :

$$L_n(x_1, \ldots, x_n; \theta) = \theta^s (1-\theta)^{n-s}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} L_n(x_1, \ldots, x_n; \theta) = ?$$

On pose
$u = \theta^s$, $u' = s\theta^{s-1}$,
$v = (1-\theta)^{n-s}$, $v' = (-1)(n-s)(1-\theta)^{n-s-1} = (s-n)(1-\theta)^{n-s-1}$.

On pose
$u = \theta^s$, $u' = s\theta^{s-1}$,
$v = (1-\theta)^{n-s}$, $v' = (-1)(n-s)(1-\theta)^{n-s-1} = (s-n)(1-\theta)^{n-s-1}$.

$$\frac{\partial}{\partial\theta} L_n = s\theta^{s-1}(1-\theta)^{n-s} + \theta^s(s-n)(1-\theta)^{n-s-1}$$

On pose
$u = \theta^s$, $u' = s\theta^{s-1}$,
$v = (1-\theta)^{n-s}$, $v' = (-1)(n-s)(1-\theta)^{n-s-1} = (s-n)(1-\theta)^{n-s-1}$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\theta}L_n &= s\theta^{s-1}(1-\theta)^{n-s} + \theta^s(s-n)(1-\theta)^{n-s-1} \\ &= (1-\theta)s\theta^{s-1}(1-\theta)^{n-s-1} + \theta^s(s-n)(1-\theta)^{n-s-1}\end{aligned}$$

On pose
$u = \theta^s$, $u' = s\theta^{s-1}$,
$v = (1-\theta)^{n-s}$, $v' = (-1)(n-s)(1-\theta)^{n-s-1} = (s-n)(1-\theta)^{n-s-1}$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\theta} L_n &= s\theta^{s-1}(1-\theta)^{n-s} + \theta^s(s-n)(1-\theta)^{n-s-1} \\
&= (1-\theta)s\theta^{s-1}(1-\theta)^{n-s-1} + \theta^s(s-n)(1-\theta)^{n-s-1} \\
&= (1-\theta)^{n-s-1}[s(1-\theta)\theta^{s-1} + \theta^s(s-n)]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\theta} L_n &= s\theta^{s-1}(1-\theta)^{n-s} + \theta^s(s-n)(1-\theta)^{n-s-1} \\
&= (1-\theta)s\theta^{s-1}(1-\theta)^{n-s-1} + \theta^s(s-n)(1-\theta)^{n-s-1} \\
&= (1-\theta)^{n-s-1}[s(1-\theta)\theta^{s-1} + \theta^s(s-n)] \\
&= (1-\theta)^{n-s-1}[s\theta^{s-1} - s\theta^s + s\theta^s - ns\theta^s)]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \theta} L_n &= s\theta^{s-1}(1-\theta)^{n-s} + \theta^s(s-n)(1-\theta)^{n-s-1} \\
&= (1-\theta)s\theta^{s-1}(1-\theta)^{n-s-1} + \theta^s(s-n)(1-\theta)^{n-s-1} \\
&= (1-\theta)^{n-s-1}[s(1-\theta)\theta^{s-1} + \theta^s(s-n)] \\
&= (1-\theta)^{n-s-1}[s\theta^{s-1} - s\theta^s + s\theta^s - ns\theta^s)] \\
&= (1-\theta)^{n-s-1}[s\theta^{s-1} - ns\theta^s]
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\theta}L_n &= s\theta^{s-1}(1-\theta)^{n-s} + \theta^s(s-n)(1-\theta)^{n-s-1} \\
&= (1-\theta)s\theta^{s-1}(1-\theta)^{n-s-1} + \theta^s(s-n)(1-\theta)^{n-s-1} \\
&= (1-\theta)^{n-s-1}[s(1-\theta)\theta^{s-1} + \theta^s(s-n)] \\
&= (1-\theta)^{n-s-1}[s\theta^{s-1} - s\theta^s + s\theta^s - s\theta^s)] \\
&= (1-\theta)^{n-s-1}[s\theta^{s-1} - n\theta^s]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\theta}L_n &= s\theta^{s-1}(1-\theta)^{n-s} + \theta^s(s-n)(1-\theta)^{n-s-1} \\
&= (1-\theta)s\theta^{s-1}(1-\theta)^{n-s-1} + \theta^s(s-n)(1-\theta)^{n-s-1} \\
&= (1-\theta)^{n-s-1}[s(1-\theta)\theta^{s-1} + \theta^s(s-n)] \\
&= (1-\theta)^{n-s-1}[s\theta^{s-1} - s\theta^s + s\theta^s - ns\theta^s)] \\
&= (1-\theta)^{n-s-1}\theta^{s-1}(s-n\theta)
\end{aligned}
$$

Les extrémité de l'intervalle $[0,1]$ auquel appartient θ ne peuvent être des extrema sauf si $s = 0$ où $s = n$. L_n est une fonction concave, ainsi son maximum θ^* est un zéro de la dérivée.
On cherche θ^* telle que $(1-\theta^*)^{n-s-1}(\theta^*)^{s-1}(s-n\theta^*) = 0$

Construction d'un estimateur

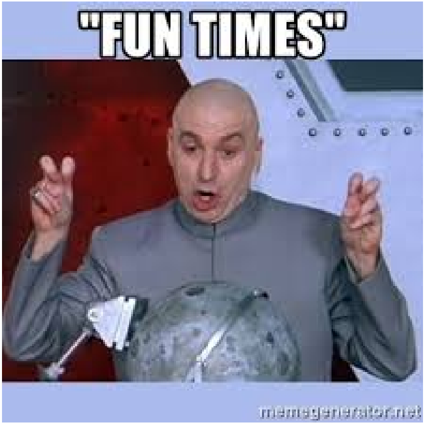
Maximum de vraisemblance (exemple)

Les extrémité de l'intervalle $[0, 1]$ auquel appartient θ ne peuvent être des extrema sauf si $s = 0$ où $s = n$. L_n est une fonction concave, ainsi son maximum θ^* est un zéro de la dérivée.
On cherche θ^* telle que $(1 - \theta^*)^{n-s-1}(\theta^*)^{s-1}(s - n\theta^*) = 0$

$$\theta^* = \frac{s}{n} = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$$

En d'autres termes, l'estimateur au maximum de vraisemblance $\hat{p}$ de p est donc $\hat{\theta} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$, c'est à dire le même estimateur que l'estimateur de l'espérance $\mathbb{E}(X1)$ trouvé en appliquant la méthode des moments.

Quizz



Quizz

Un **estimateur** $\hat{g}$ de $g(\theta)$ est :

- une application dépendante de θ et indépendante des observations X
- une application indépendante de θ et dépendante des observations X
- une application dépendante de θ et dépendante des observations X
- une application indépendante de θ et indépendante des observations X

Quizz

- Un **estimateur** $\hat{g}$ de $g(\theta)$ est
- une application dépendante de θ et indépendante des observations X
- une application indépendante de θ et dépendante des observations X
- une application dépendante de θ et dépendante des observations X
- une application indépendante de θ et indépendante des observations X

Quizz

La consistance d'un estimateur fait référence à

- Sa probabilité de converger vers le vrai paramètre de la loi de distribution de X.
- Sa probabilité de converger vers la loi de distribution de X.
- Sa probabilité de converger vers la moyenne.
- Sa probabilité de converger vers la loi des grand nombre.

Quizz

La consistance d'un estimateur fait référence à

- Sa probabilité de converger vers le vrai paramètre de la loi de distribution de X.
- Sa probabilité de converger vers la loi de distribution de X.
- Sa probabilité de converger vers la moyenne.
- Sa probabilité de converger vers la loi des grand nombre.

Quizz

S'il existe un nombre $\mathbb{E}[X^2]$ alors (plusieurs réponse possibles) :

- Il existe un moment d'ordre m_1.
- Il existe un moment d'ordre m_2 .
- Il existe un moment d'ordre m_3 .
- Il existe un moment d'ordre m_4 .

Quizz

S'il existe un nombre $\mathbb{E}[X^2]$ alors (plusieurs réponse possibles) :

- Il existe un moment d'ordre m_1.
- Il existe un moment d'ordre m_2 .
- Il existe un moment d'ordre m_3 .
- Il existe un moment d'ordre m_4 .

Quizz

Si X est une variable aléatoire absolument continue, son moment d'ordre k se calcule par la formule :

- $m_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k \mathbb{P}[X = x_i]$
- $m_k = \prod_{i=1}^{n} x_i^k \mathbb{P}[X = x_i]$
- $m_k = \frac{\partial}{\partial x^k} \mathbb{P}[X = x_i]$
- $m_k = \int_{\mathbb{R}} x^k f(x) dx$

Quizz

Si X est une variable aléatoire absolument continue, son moment d'ordre k se calcule par la formule :

- $m_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k \mathbb{P}[X = x_i]$
- $m_k = \prod_{i=1}^{n} x_i^k \mathbb{P}[X = x_i]$
- $m_k = \frac{\partial}{\partial x^k} \mathbb{P}[X = x_i]$
- $m_k = \int_{\mathbb{R}} x^k f(x) dx$