Notions fondamentales en statistique

Myriam Maumy-Bertrand

IRMA, UMR 7501, Université de Strasbourg

09 janvier 2017

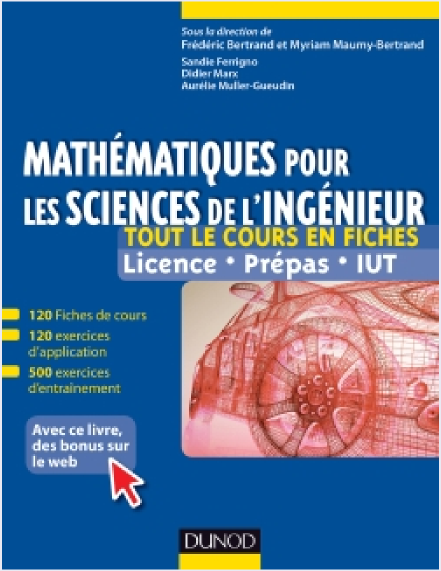
Introduction

Pourquoi un cours de Statistique dans le parcours d'un esiearque ?

Parce que :

Hal Varian, l'économiste en chef de Google, a dit que les statisticiens avaient le job le plus sexy du XXIe siècle et qu'il espérait bien que ses enfants, à qui il souhaite un bel avenir, apprendraient cette matière !
`http://www.sciencesetavenir.fr/decryptage/20130710.OBS8756/big-data-4-statisticien-le-job-le-plus-sexy-du-21e-siecle.html`

Ce chapitre s'appuie essentiellement sur les livres :

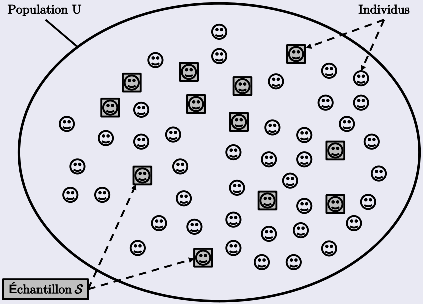


Bibliographie

La statistique

Sommaire

Les deux branches de la statistique



- **Statistique descriptive :** déterminer les caractéristiques d'une population.
- **Statistique inférentielle :** extrapoler les résultats numériques obtenus sur un échantillon à la population.

Objectif de la statistique descriptive

L'**objectif de la statistique descriptive** est de présenter et de décrire, c'est-à-dire de résumer numériquement et/ou de représenter graphiquement, les données disponibles quand elles sont nombreuses ou les données provenant d'un recensement.

Que trouvons-nous dans la statistique descriptive ?

- Le concept de **population**,
- le concept de **résumés numériques**, avec les **trois sortes de caractéristiques** :
  1. position,
  2. dispersion,
  3. forme.
- le concept de **représentations graphiques**, comme par exemple la boîte à moustaches (cf. la dernière section de ce chapitre) ou l'histogramme (cf. la section 5 de ce chapitre).

Sommaire

Définition

L'ensemble sur lequel porte l'activité statistique s'appelle la **population**.
Elle est généralement notée Ω, pour rappeler la notation des probabilités ou U, U comme Univers, notation souvent utilisée dans la théorie des sondages.
Le cardinal d'une population est en général noté N.

Définition

Les éléments de la population sont appelés les **individus** ou les **unités statistiques**.

Remarque

Les individus d'une population peuvent être de natures très diverses.

Exemples

Ensemble de personnes, mois d'une année, pièces produites par une usine, résultats d'expériences répétées un certain nombre de fois,. . .

Définition

Les caractéristiques étudiées sur les individus d'une population sont appelées les **caractères**.
Un **caractère** est donc une application χ d'un ensemble fini Ω (la population) dans un ensemble C (l'**ensemble des valeurs du caractère**), qui associe à chaque individu ω de Ω la valeur $\chi(\omega)$ que prend ce caractère sur l'individu ω.

Définition

La suite des valeurs $\chi(\omega)$ prises par χ s'appelle les **données brutes**. C'est une suite finie de valeurs $(X_1, X_2, \ldots, X_N)$ de l'ensemble C.

Sommaire

Il existe deux types de caractères :

1. les **caractères qualitatifs** : les modalités ne sont pas mesurables et peuvent être décrites par un mot, un groupe de mots ou une phrase. Ils peuvent être de nature ordinale ou nominale,
2. les **caractères quantitatifs** : leur détermination produit un nombre ou une suite de nombres. Nous distinguons :
   - Les caractères discrets. Ils ne peuvent prendre que certaines valeurs particulières.
   - Les caractères continus. Ils peuvent prendre des valeurs réelles quelconques. Si nous prenons deux valeurs quelconques du caractère aussi rapprochées soient-elles, il existe toujours une infinité de valeurs comprises entre elles.

   Puis nous distinguons également :
   - Les caractères simples. Leur mesure sur un individu produit un seul nombre. L'ensemble de leurs valeurs est donc $\mathbb{R}$ ou une partie de $\mathbb{R}$.
   - Les caractères multiples. Leur mesure sur un individu produit une suite finie de nombres. L'ensemble de leurs valeurs est donc $\mathbb{R}^n$ ou une partie de $\mathbb{R}^n$.

Caractères qualitatifs nominaux

Profession, adresse, situation de famille, genre, noms des départements français,. . .

Caractères qualitatifs ordinaux

Rang des départements français pour la population en 2012, taille des villes selon quatre modalités (petite ville, ville moyenne, grande ville, très grande ville), appréciation d'un produit par des consommateurs,. . .

Remarque

Les caractères qualitatifs peuvent toujours être transformés en caractères quantitatifs par codage. C'est ce qui se fait le plus généralement. Mais un tel codage est purement conventionnel et n'a pas vraiment un sens quantitatif. Par exemple, nous ne pourrons pas calculer le genre moyen.

Caractères quantitatifs simples discrets

Nombre de villes de plus de 100 000 habitants dans chaque département français, nombre de naissances dans chacune des régions françaises,. . .

Caractères quantitatifs simples continus

Taille, masse, salaire, température,. . .

Caractères quantitatifs multiples

Relevé de notes d'un(e) étudiant(e), fiche de salaire,. . .

Remarque

Si X est un caractère quantitatif simple l'ensemble $X(\Omega) = \{X_1, X_2, \ldots, X_N\}$ des valeurs atteintes par le caractère (ou données brutes) est un ensemble fini $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Nous supposerons que ces valeurs sont ordonnées :

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_n.$$

Le fait que telle valeur soit relative à tel individu est un renseignement qui n'intéresse pas le statisticien. Seul l'ensemble des valeurs atteintes et le nombre de fois que chacune d'elle est atteinte sont utiles.

Sommaire

Définition

Nous appelons

- **effectif de la valeur** x_i **:** le nombre n_i de fois que la valeur x_i est prise, c'est-à-dire le cardinal de l'ensemble $X^{-1}(x_i)$;
- **effectif cumulé en** x_i : la somme $\sum_{j=1}^{i} n_j$;
- **fréquence de la valeur** x_i : le rapport $f_i = \dfrac{n_i}{N}$ de l'effectif de x_i à l'effectif total N de la population, c'est-à-dire le cardinal de Ω ou encore la somme des n_i ;
- **fréquence cumulée en** x_i : la somme $\sum_{j=1}^{i} f_j$.

Remarque

Lorsque le nombre des valeurs atteintes est important, nous préférons regrouper les valeurs en classes pour rendre la statistique plus lisible. Nous partageons alors l'ensemble C des valeurs du caractère en classes $]a_i ; a_{i+1}]$ avec $a_i < a_{i+1}$.
Nous parlons alors de **statistique groupée** ou **continue**.

Définition

Nous appelons

- **effectif de** $]a_i; a_{i+1}]$: le nombre n_i de valeurs prises dans $]a_i; a_{i+1}]$, c'est-à-dire $X^{-1}(]a_i; a_{i+1}])$;
- **effectif cumulé en** a_i : le nombre de valeurs prises dans $]-\infty; a_i]$;
- **fréquence de** $]a_i; a_{i+1}]$: le rapport $f_i = \dfrac{n_i}{N}$;
- **fréquence cumulée en** a_i : la somme $\displaystyle\sum_{j=1}^{i} f_j$.

Définition

La famille $(x_i; n_i)_{i=1,\ldots,n}$ ou $(x_i; f_i)_{i=1,\ldots,n}$ est encore appelée **distribution statistique discrète**.

Définition

De même, la famille $(]a_i, a_{i+1}], n_i)_{i=1,\ldots,n}$ ou $(]a_i, a_{i+1}], f_i)_{i=1,\ldots,n}$ est encore appelée **distribution statistique groupée** ou **continue**.

Sommaire

Pourquoi faire des graphiques ?

Nous verrons plus loin que les méthodes statistique dépendent des suppositions que nous pouvons faire sur les variables. Il est donc indispensable de faire avant tout calcul des graphiques permettant de voir si ces suppositions sont plus ou moins bien respectées. C'est ce que nous appelons une **analyse exploratoire des données (EDA en anglais)**.
Ces graphiques permettent de répondre également aux deux questions suivantes :

1. La distribution de la variable est-elle normale ?
2. Est ce que des valeurs non représentatives sont-elles présentes ?

Les différents types de graphiques les plus classiques

Il existe beaucoup de graphiques, nous citerons les plus utilisés qui ne nécessitent pas d'avoir calculé des résumés numériques : un diagrame en bâtons, un histogramme, un graphique de densité (déjà rencontré en 3A), un graphique de normalité (qq plot en anglais).

Définition

Le **diagramme en bâtons** d'une distribution statistique discrète est constitué d'une suite de segments verticaux d'abscisses x_i dont la longueur est proportionnelle à l'effectif ou la fréquence de x_i.

Premier exemple

La distribution
$(1,1), (2,3), (3,4), (4,2), (5,5), (6,6), (7,2), (8,3), (9,1), (10,1)$ est représentée par le diagramme en bâtons de la figure ci-dessous.

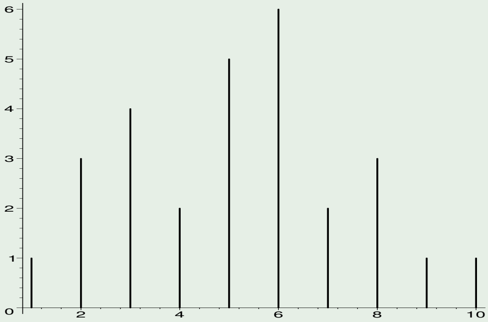


Figure: Diagramme en bâtons

Définition

Le **polygone des effectifs** (respectivement des fréquences) est obtenu à partir du diagramme en bâtons des effectifs (respectivement des fréquences) en joignant par un segment les sommets des bâtons.

Remarque

Le graphique de la figure suivante superpose le polygone des effectifs et le diagramme en bâtons des effectifs de l'exemple précédent.

Suite du premier exemple

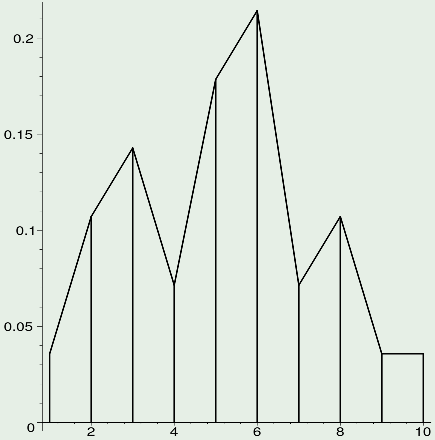


Figure: Diagramme en bâtons et polygone des fréquences

Définition

En remplaçant les effectifs (respectivement les fréquences) par les effectifs cumulés (respectivement les fréquences cumulées) nous obtenons le **diagramme en bâtons des effectifs cumulés** et le **polygone des effectifs cumulés** (respectivement des fréquences cumulées).

Suite du premier exemple

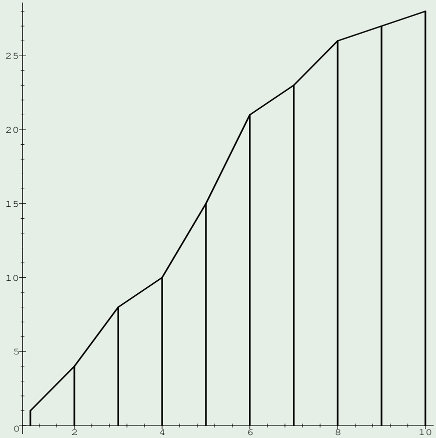


Figure: Diagramme en bâtons et polygone des effectifs cumulés

Définition

Nous appelons **histogramme** la représentation graphique d'un caractère quantitatif continu.
Dans le cas où les **amplitudes des classes sont égales**, cet histogramme est constitué d'un ensemble de rectangles dont la largeur est égale à a, l'amplitude de la classe, et la hauteur égale à $K \times n_j$ où n_j est l'effectif de la classe et K est un coefficient arbitraire (choix d'une échelle), de sorte que l'aire totale sous l'histogramme est égale à $K \times N \times a$ où N est l'effectif total.
Dans le cas où les **classes sont d'amplitudes** $k_j \times a$ **inégales**, multiples entiers de l'une d'entre elles a, nous convenons, pour conserver le résultat précédent, de prendre pour hauteur du rectangle de la classe numéro j le quotient $\dfrac{K \times n_j}{k_j}$.

Un deuxième exemple

Nous donnons l'histogramme de la distribution suivante :
$(]1;3],4), (]3;4],8), (]4;5,5],10), (]5,5;6],14), (]6;8],20), (]8;10],12), (]10;11],9), (]11;12,5],3)$.

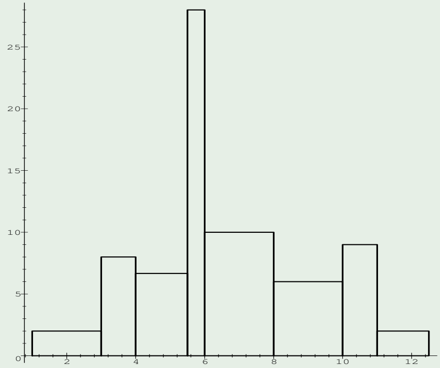


Figure: Histogramme

Définition

Le **polygone des effectifs** ou **des fréquences** d'une distribution statistique est obtenu en joignant dans l'histogramme de cette distribution les milieux des côtés horizontaux supérieurs.

Suite du deuxième exemple

La figure suivante superpose l'histogramme des fréquences de l'exemple précédent et le polygone des fréquences associé.

Suite du deuxième exemple

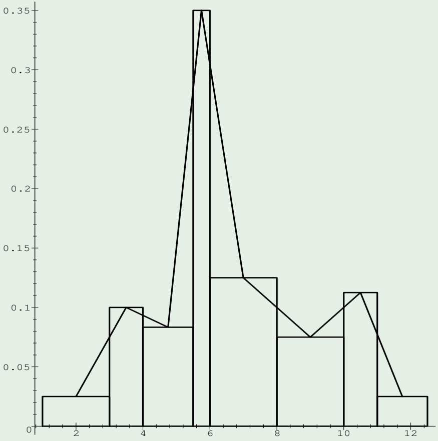


Figure: Histogramme et polygone des fréquences

Définition

Le **polygone des fréquences cumulées** d'une distribution statistique groupée est la représentation graphique de la fonction définie par :

$$f(x) = \sum_{j=1}^{i-1} f_j + \frac{x - a_i}{a_{i+1} - a_i} f_i$$

sur l'intervalle $]a_i ; a_{i+1}]$.

Remarque

En particulier, remarquons que $f(a_i) = \sum_{j=1}^{i-1} f_j$ et $f(a_{i+1}) = \sum_{j=1}^{i} f_j$.

Fin du deuxième exemple

Pour cet exemple, nous obtenons la figure ci-dessous.

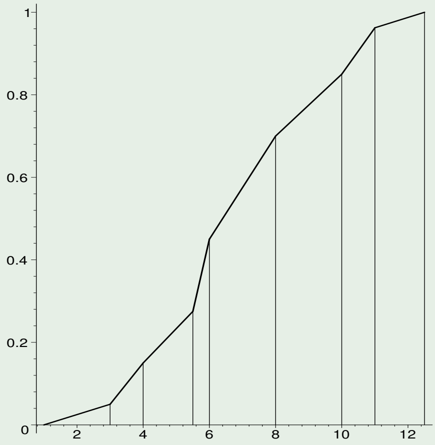


Figure: Polygone des fréquences cumulées d'une distribution statistique groupée

Un troisième exemple

Voici les 44 notes de l'examen du module d'estimation de l'année scolaire 2014-2015 à l'ESIEA, promotion formation initiale.

12,5	04,5	06,0	17,5	05,5	12,0	04,0	12,5	20,0	00,0
05,0	09,5	11,5	07,5	13,0	06,0	14,5	09,5	12,5	13,0
06,5	07,5	17,5	11,0	09,5	04,0	11,0	14,0	14,0	09,5
05,0	06,5	04,0	13,0	12,5	01,5	17,0	04,0	12,0	08,0
06,0	09,5	17,0	04,5	12,5					

Suite du troisième exemple

Le nombre de classes, noté k a été calculé suivant la règle de Sturges, à savoir : $k = 1 + 3,3\log_{10} n$, où n représente le nombre de données.

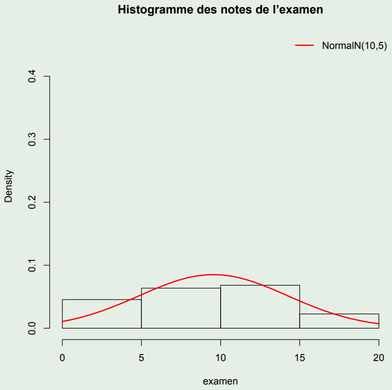


Figure: Représentation graphique de l'histogramme des notes de l'examen

Fin du troisième exemple

Les lignes de commande sous R sont les suivantes :

```
>pdf("histogramme.pdf")
>nn<-100
>k<-"sturges"
>bb<-1
>cols<-c("red")
>examen<c(12.5,4.5,6,17.5,5.5,12,4,12.5,20,0,5,9.5,11.5,7.5,
 13,6,14.5,9.5,12.5,13,6.5,7.5,17.5,11,9.5,4,11,14,9.5,5,6.5,
 4,13,12.5,1.5,17,4,12, 8,6,9.5,17,4.5,12.5)
>xx <- seq(min(examen),max(examen),length=nn)
>hist(examen,breaks=k,proba=T,ylim=c(0,.45),
 main="Histogramme des notes de l'examen")
>lines(xx,dnorm(xx,mean=mean(examen),sd=sd(examen )),
 col=cols[1],lwd=2)
>dev.off()
```

Définition

Nous renvoyons au cours de 3A pour une définition de la fonction de densité de probabilité.

Retour au troisième exemple

Pour l'exemple des notes de l'examen du module d'estimation 4055, nous obtenons comme représentation graphique de la fonction de densité le graphique ci-dessous.

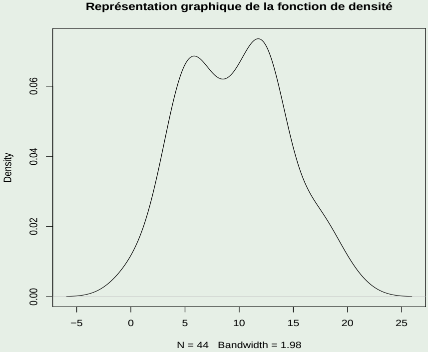


Figure: Représentation graphique de la fonction de densité du jeu de données des notes de l'examen

Fin du troisième exemple

Le code qui a permis de réaliser ce graphique est le suivant :

```
> examen<-c(12.5,4.5,6,17.5,5.5,12,4,12.5,20,0,5,
+ 9.5,11.5,7.5,13,6,14.5,9.5,12.5,13,6.5,7.5,17.5,
+ 11,9.5,4,11,14,9.5,5,6.5,4,13,12.5,1.5,17,4,12,
+ 8,6,9.5,17,4.5,12.5)
> str(examen)
 num [1:44] 12.5 4.5 6 17.5 5.5 12 4 12.5 20 0 ...
> pdf("densite.pdf")
> plot(density(examen),
+main="Représentation graphique de la densité")
> dev.off()
```

Définition

Le **Q-Q plot**, ou encore explicitement le **quantile-quantile plot**, est une technique graphique qui permet de comparer les distributions de deux ensembles de données .

Remarques

1. Les deux ensembles de données ne sont pas forcément de même taille. Il se peut également, et c'est ce qui nous intéresse dans le cas présent, qu'un des ensembles de données soient générées à partir d'une loi de probabilité qui sert de référentiel.
2. Nous ne donnerons pas ici la méthode de calcul car nous utiliserons le logiciel R pour tracer un Q-Q plot.

Retour au troisième exemple

Pour l'exemple précédent, nous obtenons la figure ci-dessous. Les cercles forment ce que nous appelons la **droite de Henry**.

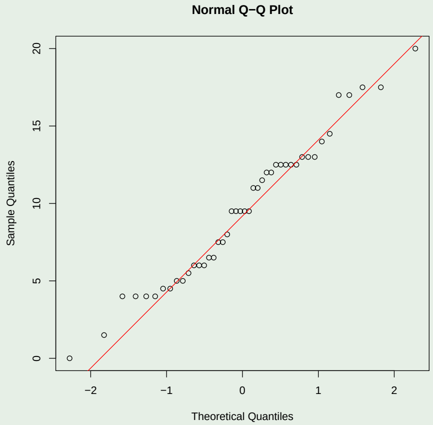


Figure: Q-Q plot du jeu de données des notes de l'examen du module d'estimation

Fin du troisième exemple

Les lignes de commande sous R qui ont permis de réaliser ce graphique sont les suivantes :

```
> pdf("qqplot.pdf")
> qqnorm(examen)
> qqline(examen,col="red")
> dev.off()
```

Sommaire

Définition

Le **mode** est l'une des valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_p$ dont la fréquence f_i est maximale.

Définition

La **classe modale** est une classe de densité, c'est-à-dire de rapport fréquence/longueur, maximale.

Définition

La distribution est **unimodale** si elle a un seul mode. Si elle en a plusieurs elle est **plurimodale** (bimodale, trimodale, ...).

Remarque

Nous déterminons aisément les modes à partir des représentations graphiques.

Définition

Soit m et d les parties entière et décimale de $(N+1)/2$. La **médiane**, notée $\mathrm{Q}_2(x)$, est définie par :

$$\mathrm{Q}_2(x) = x_{(m)} + d(x_{(m+1)} - x_{(m)})$$

où $x_{(m)}$ signifie la m-ème valeur lorsque la série des valeurs est classée par ordre croissant.
$x_{(m)}$ est aussi appelée la m-ème **statistique d'ordre**.

Définition

Pour tout nombre $\alpha \in]0;1[$, soit m et d les parties entière et décimale de $\alpha(N+1)$. Le **quantile d'ordre** α, noté $\mathrm{Q}_\alpha(x)$, est défini par :

$$\mathrm{Q}_\alpha(x) = x_{(m)} + d(x_{(m+1)} - x_{(m)}).$$

Remarque

Les quantiles les plus utilisés sont les quartiles. Ils sont au nombre de trois et sont notés : $Q_1(x), Q_2(x)$ et $Q_3(x)$.
Selon la même méthode que pour les quartiles, nous définissons les déciles, $D_1(x), \ldots, D_9(x)$ qui séparent les observations ordonnées en dixièmes successifs.
Pour des statistiques très abondantes, nous définissons de même des centiles, $C_1(x), \ldots, C_{99}(x)$ qui séparent les centièmes de la population observée.

Définition

La **moyenne arithmétique** d'une distribution statistique discrète $(x_i; f_i)_{i=1,\ldots,p}$ est le nombre réel μ défini par :

$$\mu(x) = \sum_{i=1}^{p} x_i f_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{p} x_i n_i,$$

où N est l'effectif total de la population.

Remarque

Nous pouvons aussi la calculer directement à partir des données brutes par :

$$\mu = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} X_j$$

c'est-à-dire en calculant le rapport entre la somme de toutes les valeurs relevée (avec répétitions éventuelles) et l'effectif total de la population.

Définition

Pour une distribution statistique groupée $(]a_i; a_{i+1}], f_i)_{i=1,\ldots,p}$ la **moyenne arithmétique** se calcule par :

$$\mu = \sum_{i=1}^{p} \frac{a_i + a_{i+1}}{2} f_i.$$

Remarque

Cela revient à faire une hypothèse d'homogénéité en considérant les valeurs équidistribuées à l'intérieur d'une classe ou, au contraire, à supposer que toute la fréquence est concentrée au centre de la classe (ce qui revient au même : nous remplaçons la distribution à l'intérieur de la classe par son isobarycentre).

Remarque

Il existe d'autres moyennes :

- la moyenne arithmétique pondérée,
- la moyenne géométrique,
- la moyenne quadratique,
- la moyenne harmonique,
- la moyenne arithmético-géométrique,
- ...

Remarque

Comparons les deux principales caractéristiques de position : la médiane et la moyenne arithmétique.

1. Pour la médiane,
   - Avantage :
     - Peu sensible aux valeurs extrêmes (caractéristique **robuste**).
   - Inconvénients :
     - Délicate à calculer (différentes définitions).
     - Ne se prête pas aux calculs algébriques.
2. Pour la moyenne arithmétique,
   - Avantages :
     - Facile à calculer.
     - Se prête bien aux calculs algébriques.
     - Répond au principe des moindres carrés.
   - Inconvénients :
     - Fortement influencée par les valeurs extrêmes.
     - Mauvais indicateur pour une distribution plurimodale ou fortement asymétrique.

Exemple

Tableau - Nombre d'heures travaillées par semaine des personnes ayant un emploi à plein temps (2015).

Pays	Durée (heures)
Allemagne	$41,4$
Autriche	$42,9$
Belgique	$41,4$
Bulgarie	$41,2$
Chypre	$42,3$
Croatie	$41,0$
Danemark	$39,0$
Espagne	$41,4$
Estonie	$40,8$

Exemple (suite)

Pays	Durée (heures)
Finlande	$40,1$
France	$\mathbf{40,4}$
Grèce	$44,5$
Hongrie	$40,9$
Irlande	$40,4$
Italie	$40,6$
Lettonie	$40,6$
Lituanie	$39,6$
Luxembourg	$40,8$
Malte	$41,4$

Exemple (suite)

Pays	Durée (heures)
Pays-Bas	$40,9$
Pologne	$42,2$
Portugal	$42,4$
République tchèque	$41,8$
Roumanie	$40,4$
Royaume-Uni	$42,9$
Slovaquie	$41,6$
Slovénie	$41,6$
Suède	$40,7$

Source : Eurostat.

Quelques caractéristiques de position

Calculer la moyenne, la médiane, le premier quartile et le troisième quartile sur la série de données « Nombre d'heures travaillées par semaine des personnes ayant un emploi à plein temps (2015) ».

Si vous utilisez le logiciel R, voici ce que vous devez taper pour répondre à la question :

```
> heure<-c(
41.4,42.9,41.4,41.2,42.3,41.0,39.0,41.4,40.8,
40.1,40.4,44.5,40.9,40.4,40.6,40.6,39.6,40.8,41.4,
40.9,42.2,42.4,41.8,40.4,42.9,41.6,41.6,40.7)
> summary(heure)
   Min.   1st Qu.  Median     Mean    3rd Qu.     Max.
   39.00  40.60    41.10      41.26   41.65       44.50
```

La moyenne est égale à 41,26, la médiane à 41,10, le premier quartile à 39 et le troisième quartile à 41,65.

Sommaire

Définition

L'**étendue** est la différence entre le maximum (la plus grande valeur) et le minimum (la plus petite valeur) de la série statistique.

Définition

L'**étendue interquartile**, notée $EIQ(x)$, est l'écart entre le troisième quartile et le premier quartile.

Remarque

Ce paramètre de dispersion est beaucoup plus stable que l'étendue.

Définition

L'**intervalle interquartile relatif** est égal à $\frac{Q_3-Q_1}{Q_2}$. Cette mesure est indépendante de l'unité employée.

Définition

La **variance**, notée $\sigma^2(x)$, est le nombre réel positif défini par :

$$\sigma^2(x) = \sum_{i=1}^{p} (x_i - \mu(x))^2 f_i.$$

La première caractéristique qui dérive de la variance est la suivante :

Définition

L'**écart-type**, noté $\sigma(x)$, est la racine carrée de la variance. Il s'exprime dans la même unité que la moyenne.

La deuxième caractéristique qui dérive de la variance est la suivante :

Définition

Le **coefficient de variation**, noté $CV(x)$, est le rapport exprimé en % de l'écart-type à la moyenne.

Remarque

Ce coefficient peut être intéressant pour comparer deux populations d'une même variable. De plus, étant sans dimension, il donne une mesure absolue de la variabilité.

Définition

La **médiane des écarts absolus à la médiane**, notée $\mathrm{MAD}(x)$, d'une série statistique est le nombre réel défini par :

$$\mathrm{MAD}(x) = \mathrm{Q}_2\left(\left(|x_i - \mathrm{Q}_2(x)|\right)_{1\leqslant i\leqslant n}\right).$$

Quelques caractéristiques de dispersion

Calculer l'étendue, l'étendue inter-quartile, l'écart-type et le coefficient de variation sur la série de données « Nombre d'heures travaillées par semaine des personnes ayant un emploi à plein temps (2015) ». Si vous utilisez le logiciel R, voici ce que vous devez taper pour répondre à la question :

```
> range(heure)
[1] 39.0 44.5
> diff(range(heure))
[1] 5.5
> IQR(heure)
[1] 1.05
> sd(heure)
1.107359
> cvar(heure)
[1] 2.669668
```

L'étendue est égale à 5,5 ; l'étendue inter-quartile 1,05 ; l'écart-type 1,107359.

Sommaire

Définition

Le **moment centré d'ordre** r est égal à :

$$_{\mu}m_r(x) = \sum_{i=1}^{p} (x_i - \mu(x))^r f_i.$$

Définition

Le **coefficient d'asymétrie (skewness en anglais) de Fisher** est la quantité $\gamma_1(x)$ définie par :

$$\gamma_1(x) = \frac{_{\mu}m_3(x)}{\sigma^3(x)} = \frac{_{\mu}m_3(x)}{(_{\mu}m_2(x))^{3/2}}.$$

Une valeur positive de ce coefficient indique une asymétrie à droite ; une valeur négative de ce coefficient implique au contraire une asymétrie à gauche et enfin une valeur nulle indique une distribution symétrique.

Définition

Le **coefficient d'asymétrie de Pearson** est la quantité $\beta_1(x)$ définie par :

$$\beta_1(x) = \frac{({}_\mu m_3(x))^2}{(\sigma^2(x))^3} = \frac{({}_\mu m_3(x))^2}{({}_\mu m_2(x))^3} = \gamma_1^2(x).$$

Définition

Le **coefficient d'aplatissement (kurtosis en anglais) de Fisher** est la quantité $\gamma_2(x)$ définie par :

$$\gamma_2(x) = \frac{{}_\mu m_4(x)}{({}_\mu m_2(x))^2} - 3.$$

Une valeur négative indique que la courbe est plus aplatie que la courbe représentative de la loi normale ; une valeur positive indique que la courbe est moins aplatie que la courbe représentative de la loi normale. Enfin une valeur nulle indique que la courbe est celle de la loi normale (mésokurtique).

Définition

Le **coefficient d'aplatissement de Pearson** est la quantité $\beta_2(x)$ définie par :

$$\beta_2(x) = \frac{{}_\mu m_4(x)}{({}_\mu m_2(x))^2} = \frac{{}_\mu m_4(x)}{\sigma^4(x)} = \gamma_2(x) + 3\cdot$$

Remarque

Certains logiciels utilisent plutôt le coefficient d'aplatissement de Pearson et par conséquent ce coefficient doit être comparé à la valeur 3. Vérifiez toujours quelle formule a été implémentée dans le logiciel avec lequel vous faites vos calculs.

Caractéristiques de forme

Calculer le coefficient d'asymétrie et d'aplatissement de Fisher sur la série de données « Nombre d'heures travaillées par semaine des personnes ayant un emploi à plein temps (2015) ».

Si vous utilisez le logiciel R, voici ce que vous devez taper pour répondre à la question :

```
> library(e1071)
Le chargement a nécessité le package : class
Message d'avis :
le package 'e1071' a été compilé avec la version R 2.15.2
> skewness(heure)
0.6880158
> kurtosis(heure)
0.9535537
```

Sommaire

Objectif

La **boîte de distribution**, « box-plot » en anglais, ou encore « boîte à moustaches », « boîte de dispersion », « diagramme de Tukey » en français, fournit en un seul coup d'œil les informations sur la tendance centrale, la dispersion, l'asymétrie et l'importance des valeurs extrêmes de la série de données que nous avons à explorer.

Elle est aussi particulièrement intéressante pour la comparaison de distributions sur plusieurs de ces critères.

Construction

Dans une **boîte de distribution** :

- la boîte représente l'intervalle interquartile ;
- à l'intérieur, la médiane sépare la boîte en deux parties ;
- les lignes qui partent du bord de la boîte s'étendent jusqu'aux valeurs les plus extrêmes qui ne sont pas considérées comme trop éloignées du reste de l'échantillon.

La plupart des logiciels de statistique note « valeur éloignée » les points situés à plus de 1,5 fois l'étendue interquartile par rapport aux bords de la boîte, et « valeur extrême », les points situés à plus de trois fois l'étendue interquartile.

Construction (suite)

Anisi, la taille de la boîte représente l'étendue interquartile, la position de la médiane est un bon indicateur de la symétrie de la distribution, la taille des lignes de part et d'autre de la boîte traduit la dispersion, et les valeurs éloignées ou extrêmes sont immédiatement repérées.

Construction – détails

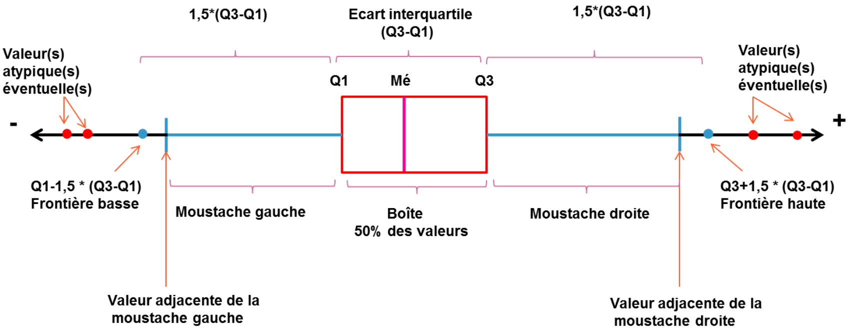
Nous représentons une **boîte de distribution** de la façon suivante :

1. Nous traçons un rectangle de largeur fixée à priori et de longueur $EIQ = Q_{0,75} - Q_{0,25}$.
2. Ensuite nous y situons la médiane par un segment positionné à la valeur $Q_{0,5}$, par rapport à $Q_{0,75}$ et $Q_{0,25}$. Nous avons alors la boîte.
3. Nous calculons $(Q_{0,75} + 1,5 \times EIQ)$ et nous cherchons la dernière observation x_h en deçà de la limite $(Q_{0,75} + 1,5 \times EIQ)$, soit

$$x_h = \max\{x_i / x_i \leqslant Q_{0,75} + 1,5 \times EIQ\}.$$

Construction – détails

4. Nous calculons $(Q_{0,25} - 1,5 \times EIQ)$ et nous cherchons la première observation x_b au delà de la limite $(Q_{0,25} - 1,5 \times EIQ)$, soit
$$x_b = \min\left\{x_i / x_i \geqslant Q_{0,25} - 1,5 \times EIQ\right\}.$$
5. Nous traçons deux lignes allant des milieux des largeurs du rectangle aux valeurs x_b et x_h.
6. Les observations qui ne sont pas comprises entre x_b et x_h sont représentés par des symboles spécifiques, généralement des étoiles.


1,5*(Q3-Q1)
Ecart interquartile
(Q3-Q1)
1,5*(Q3-Q1)
Valeur(s)
atypique(s)
éventuelle(s)
Valeur(s)
atypique(s)
éventuelle(s)
Q1
Mé
Q3
-
+
Q1-1,5 * (Q3-Q1)
Frontière basse
Moustache gauche
Boîte
50% des valeurs
Moustache droite
Q3+1,5 * (Q3-Q1)
Frontière haute
Valeur adjacente de la
moustache gauche
Valeur adjacente de la
moustache droite

Exemple

Avec le logiciel R, voici ce que vous obtenez

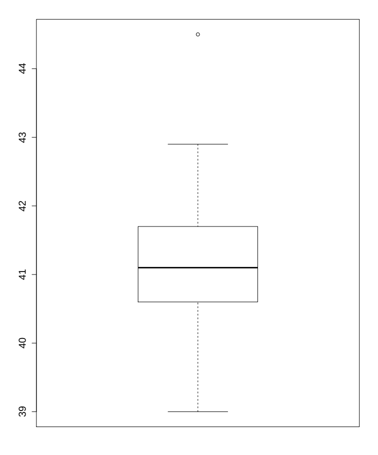


Figure: Boîte de distribution

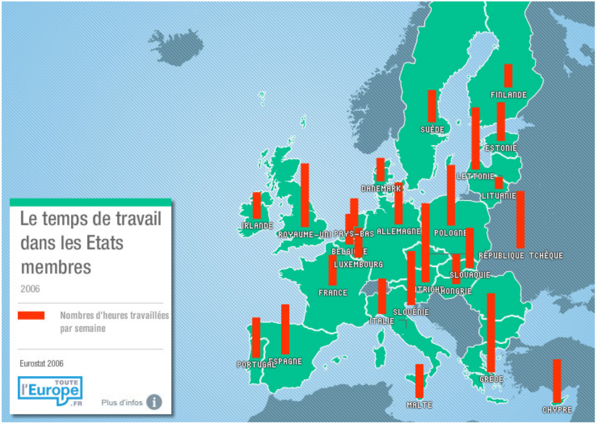


Figure: Carte des durées de travail

Interprétation d'une boîte de distribution

Ce type de diagramme permet de comparer facilement plusieurs distributions en terme de médiane, quartiles et valeurs éloignées ou extrêmes.

Interprétation d'une boîte de distribution (suite)

Une **boîte de distribution** rend compte de la tendance centrale, de la dispersion, des valeurs éloignées ou extrêmes et de la forme de la distribution, même si d'autre modes de représentations peuvent apporter un complément d'information sur la forme.

Interprétation d'une boîte de distribution (suite)

Auparavant, nous avons mentionné l'importance du triplet (N, μ, σ). La **boîte de distribution** est un complément qui se révèle intéressant puisqu'elle permet de détecter l'asymétrie, les valeurs extrêmes, et de repérer la médiane et l'intervalle interquartile qui contient la moitié des observations.

Dans le cas d'une asymétrie, l'écart-type qui mesure la dispersion symétriquement par rapport à la moyenne n'est pas la mesure de dispersion la mieux adaptée, et peut-être complété par l'étendue interquartile. D'autre part, si la **boîte de distribution** indique des valeurs éloignées ou extrêmes, nous savons que la moyenne et l'écart-type sont particulièrement influencés par ces valeurs.

Sommaire

Un autre jeu de données

Un autre jeu de données sur lequel il serait intéressant de calculer ces mêmes types de caractéristiques est le fichier de données `hdv2003`, « hdv » pour histoire de vie.
Ce fichier est un « Sample from 2000 people and 20 variables taken from the Histoire de Vie survey, produced in France in 2003 by INSEE ».
Pour plus d'informations, vous pouvez consulter également :
`http://www.insee.fr/fr/themes/detail.asp?ref_id=fd-HDV03`
Vous pouvez également le trouver dans le package `questionr` de Julien Barnier.