

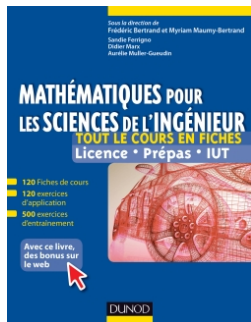
# *Estimation*

Myriam Maumy-Bertrand

IRMA, UMR 7501, Université de Strasbourg

09 janvier 2017

Ce chapitre s'appuie essentiellement sur les deux livres suivants :





## 2<sup>ème</sup> partie

# Théorie de l'estimation



# Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Définitions
- 3 Notation
- 4 Estimateur sans biais
- 5 Précision et efficacité d'un estimateur
- 6 Estimateur convergent

- **Le problème de l'estimation** est l'impossibilité de connaître exactement la valeur d'un **paramètre inconnu** noté  $\theta$ . Ce problème est très général et a des aspects distincts.
- Les observations, par exemple obtenues à partir d'une méthode d'échantillonnage, permettent de construire **une estimation de  $\theta$** . Nous supposons que chaque observation est la valeur d'une variable aléatoire  $X$  dont la loi dépend de  $\theta$ . Cela revient ainsi à doter **l'état de la nature** inconnu d'un **modèle probabiliste**. Ce dernier est complété par un **modèle d'échantillonnage** décrivant la manière dont les observations sont recueillies.

## Hypothèses

Nous nous plaçons dans le cas le plus simple :

Les  $n$  observations constituent un **échantillon aléatoire** composé de  $n$  variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (ce que nous noterons i.i.d.)  $\{X_1, \dots, X_n\}$ .

## Définition

*Un **modèle probabiliste** complété par un **modèle d'échantillonnage** est ce que nous appelons un **modèle statistique**.*

## Le problème

Comment pouvons-nous estimer  $\theta$  à partir de  $n$  observations  $\{X_1, \dots, X_n\}$  formant un **échantillon aléatoire** dont les valeurs sont notées  $\{x_1, \dots, x_n\}$  formant un **échantillon** ?

## Deux problèmes

Cette question recouvre deux problèmes :

- 1 Définir un estimateur possédant de bonnes qualités.
- 2 Trouver la manière adéquate de le choisir.

Nous allons évoquer ces deux questions successivement dans les paragraphes suivants.



# Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Définitions**
- 3 Notation
- 4 Estimateur sans biais
- 5 Précision et efficacité d'un estimateur
- 6 Estimateur convergent

## Notations

Soient :

- $\theta$  un paramètre réel **univarié** inconnu défini au sein d'une population  $U$ ,
- $\Theta$  l'ensemble des valeurs possibles du paramètre  $\theta$ .

## Définition

*Si  $\{X_1, \dots, X_n\}$  est un échantillon aléatoire d'effectif  $n$  prélevé dans la population  $U$ , alors nous appelons **estimateur** du paramètre inconnu  $\theta$  toute fonction  $h$  des  $n$  observations, noté  $\hat{\theta}_n$  :*

$$\hat{\theta}_n = h(X_1, \dots, X_n). \quad (2.1)$$

$\hat{\theta}_n$  est **une variable aléatoire** de loi de probabilité qui dépend du paramètre inconnu  $\theta$ .

## Définition

*Une fois l'échantillon prélevé, nous disposons de  $n$  valeurs observées  $x_1, \dots, x_n$ , ce qui nous fournit une valeur*

$$h(x_1, \dots, x_n)$$

*de  $\hat{\theta}_n$ , que nous appelons une **estimation** du paramètre  $\theta$ .*

## Remarques

- 1 Il est souhaitable de ne pas utiliser uniquement le bon sens ou l'intuition pour choisir entre deux estimateurs.
- 2 Pour pouvoir effectuer le bon choix, nous devons pouvoir les comparer en recourant à des objectifs choisis a priori.
- 3 Nous allons établir une liste de plusieurs propriétés que nous souhaitons retrouver dans un bon estimateur, permettant ainsi de mettre en évidence ceux qui en possèdent sinon le plus grand nombre, du moins les plus importantes.

# Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Définitions
- 3 Notation**
- 4 Estimateur sans biais
- 5 Précision et efficacité d'un estimateur
- 6 Estimateur convergent

Toute fonction des observations d'un échantillon aléatoire simple, définie par (2.1), peut permettre d'estimer la valeur du paramètre  $\theta$ .

### Rappel de la définition

Nous appelons **estimation** la valeur observée  $h(x_1, \dots, x_n)$  de l'**estimateur**  $h(X_1, \dots, X_n)$ .

### Remarque

La notation couramment utilisée « majuscule pour une variable aléatoire et minuscule pour sa valeur » est en contradiction avec (2.1) et veut que nous distinguons aussi la variable aléatoire  $\hat{\theta}_n$  de sa valeur observée, notée parfois  $\hat{\theta}_n(x_1, \dots, x_n)$ .

Pour fixer les idées, et étant donné les difficultés à distinguer variable aléatoire et valeur observée, nous utilisons la notation suivante :

## Notation

- 1 L'échantillon de taille  $n$  est désigné par  $\{x_1, \dots, x_n\}$ .
- 2 L'échantillon aléatoire de taille  $n$  est quant à lui désigné par  $\{X_1, \dots, X_n\}$ .

## Remarque

Il faudra toujours se poser la question « dans quel cas sommes-nous ? » car cela peut avoir des conséquences, surtout dans les calculs que nous effectuerons.

Introduction

Définitions

Notation

**Estimateur sans biais**

Précision et efficacité d'un estimateur

Estimateur convergent

Un exemple : l'estimation d'une moyenne

Un autre exemple : l'estimation d'une variance

Un dernier exemple : l'estimation d'une proportion

Illustration numérique

# Sommaire

1 Introduction

2 Définitions

3 Notation

**4 Estimateur sans biais**

5 Précision et efficacité d'un estimateur

6 Estimateur convergent



**Le choix d'un estimateur** va reposer sur **ses qualités**.

Comme nous l'avons souligné, il est habituel de comparer des estimateurs entre eux sur base de propriétés plus ou moins intéressantes qu'ils possèdent ou non.

### La première propriété

Elle concerne la possibilité de comporter un **biais**.

Il est souvent judicieux que la distribution d'un estimateur soit centrée sur le paramètre inconnu, c'est-à-dire qu'il possède la propriété suivante.

## Définition

$\hat{\theta}_n$  est un **estimateur sans biais** (ou *non biaisé*) du paramètre  $\theta$  si

$$\mathbb{E} \left[ \hat{\theta}_n \right] = \theta. \quad (4.1)$$

## Définition

Si l'équation (4.1) n'est pas vérifiée, le **biais** de  $\hat{\theta}_n$  se définit par

$$B \left( \hat{\theta}_n \right) = \mathbb{E} \left[ \hat{\theta}_n \right] - \theta. \quad (4.2)$$

## Définition

Un estimateur  $\hat{\theta}_n$  est un **asymptotiquement sans biais** pour le paramètre  $\theta$  si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \left[ \hat{\theta}_n \right] = \theta. \quad (4.3)$$

Pour estimer la moyenne  $\mu$  de la population  $U$  de taille  $N$  nous utilisons la moyenne  $\hat{\mu}_n$  que nous allons définir ci-dessous, d'un échantillon aléatoire de taille  $n$  ( $n < N$ ).

## Rappel

En tant que variable aléatoire,  $\hat{\mu}_n$  constitue un **estimateur** de la moyenne  $\mu$  de la population  $U$ .

## Définition

*Toute valeur observée de l'estimateur  $\hat{\mu}_n$  à partir d'un échantillon est appelée une **estimation** de la moyenne  $\mu$ .*

## Hypothèses de travail

Le mode de prélèvement retenu est tel que :

- 1 les  $X_i$  sont des v.a. **indépendantes et identiquement distribuées**.
- 2 Les  $X_i$  vérifient **les deux propriétés suivantes** :

$$\forall i = 1, \dots, n \quad \mathbb{E}[X_i] = \mu \quad \text{et} \quad \text{Var}[X_i] = \sigma^2.$$

## Définition

*L'estimateur de la moyenne  $\hat{\mu}_n$  d'un échantillon aléatoire de taille  $n$  est égal à :*

$$\hat{\mu}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

Calculons l'espérance de  $\hat{\mu}_n$  :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\hat{\mu}_n] &= \mathbb{E}\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right] = \frac{1}{n} \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i] = \frac{1}{n} \times \mu \times n = \mu.\end{aligned}$$

Nous établissons ainsi la propriété suivante.

### Propriété

*En moyenne, l'estimateur  $\hat{\mu}_n$  est égal à la moyenne  $\mu$  de la population  $U$ , ou encore  $\hat{\mu}_n$  est un estimateur sans biais de la moyenne  $\mu$ .*

Calculons la variance de  $\hat{\mu}_n$  :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}\text{ar}[\hat{\mu}_n] &= \mathbb{V}\text{ar}\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right] \\&= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \mathbb{V}\text{ar}[X_i], \text{ les } X_i \text{ sont indépendantes} \\&= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sigma^2, \text{ les } X_i \text{ sont identiquement distribuées} \\&= \frac{1}{n^2} \times \sigma^2 \times n = \frac{\sigma^2}{n}.\end{aligned}$$

## Les questions

Que signifie statistiquement ce dernier résultat ? Comment le statisticien l'interprète-t-il ?

## Les réponses

- Ce paramètre, destiné à connaître la dispersion des valeurs de  $\hat{\mu}_n$  autour de  $\mu$ , permet de mesurer **l'erreur d'échantillonnage**.
- Plus la  $\text{Var}[\hat{\mu}_n]$  est faible, plus il est probable que l'erreur sera petite et l'estimateur  $\hat{\mu}_n$  précis.
- La  $\text{Var}[\hat{\mu}_n]$  est faible si la variance  $\sigma^2$  de la population  $U$  est petite, ce qui correspond à une population homogène, et/ou si la taille  $n$  de l'échantillon est grande.



## Remarques

- 1 Cette erreur calculée dans le cas d'un échantillon aléatoire ne dépend pas de la taille  $N$  de la population  $U$ , ce qui n'est pas intuitif ! Savez-vous pourquoi ?
- 2 En fait, nous avons effectué les calculs avec des variables indépendantes ce qui correspond à un tirage aléatoire avec remise. Lorsque nous calculerons cette erreur dans le cas d'un tirage aléatoire sans remise, la taille  $N$  de la population  $U$  interviendra !

## Définition

*L'estimateur de la variance  $S_n^2$  d'un échantillon aléatoire de taille  $n$  est égal à :*

$$S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \hat{\mu}_n)^2.$$

Calculons l'espérance de l'estimateur  $S_n^2$  afin de savoir si  $S_n^2$  est un estimateur sans biais de la variance  $\sigma^2$  de la population  $U$ .

## Remarque

Avant de commencer le calcul de l'espérance de l'estimateur  $S_n^2$ , il est intéressant de noter que

$$\begin{aligned} S_n^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \hat{\mu}_n)^2 \\ &= \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 \right) - \hat{\mu}_n^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left[ S_n^2 \right] &= \mathbb{E} \left[ \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 \right) - \hat{\mu}_n^2 \right] \\&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left[ X_i^2 \right] - \mathbb{E} \left[ \hat{\mu}_n^2 \right] \\&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \mathbb{V}\text{ar}[X_i] + \mu^2 \right) - \left( \mathbb{V}\text{ar} [\hat{\mu}_n] + \mu^2 \right) \\&= \sigma^2 + \mu^2 - \frac{\sigma^2}{n} - \mu^2, \text{ car les } X_i \text{ sont indépendantes} \\&= \sigma^2 \left( \frac{n-1}{n} \right).\end{aligned}$$

Nous constatons alors que

$$\mathbb{E} \left[ S_n^2 \right] \neq \sigma^2.$$

Ce qui signifie que :

## Propriété

$S_n^2$  est un estimateur biaisé de la variance  $\sigma^2$  de la population  $U$  dont le biais vaut :

$$B \left( S_n^2 \right) = \sigma^2 \left( \frac{n-1}{n} \right) - \sigma^2 = -\frac{\sigma^2}{n}.$$

## Remarques

- 1  $B(S_n^2)$  tend vers 0 quand la taille  $n$  de l'échantillon tend vers plus l'infini.
- 2 Dans ce cas,  $S_n^2$  est un **estimateur asymptotiquement sans biais** de la variance  $\sigma^2$  de la population  $U$ .

À partir de cette remarque, nous allons construire un autre estimateur de la variance  $\sigma^2$  de la population  $U$ .

## Définition

*L'estimateur corrigé de la variance  $S_{n,c}^2$  d'un échantillon aléatoire de taille  $n$  simple est égal à :*

$$S_{n,c}^2 = \frac{nS_n^2}{n-1} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \hat{\mu}_n)^2.$$

Nous vérifions aisément, dans le cadre d'un tirage aléatoire avec remise, c'est-à-dire où les  $X_i$  sont indépendantes, que :

$$\mathbb{E} \left[ S_{n,c}^2 \right] = \sigma^2.$$

## Propriété

*L'estimateur corrigé de la variance  $S_{n,c}^2$  d'un échantillon aléatoire de taille  $n$  est donc un estimateur sans biais de la variance  $\sigma^2$  de la population  $U$ .*



Si  $\pi_A$  est une proportion d'individus qui possèdent une caractéristique  $A$  dans la population  $U$ .

## Définition

*Nous estimons la proportion  $\pi_A$  par la proportion observée dans un échantillon aléatoire de taille  $n$  prélevé dans la population  $U$  qui se définit par :*

$$\hat{\pi}_{n,A} = \frac{n_A}{n}$$

*où  $n_A$  est le nombre d'individus de l'échantillon qui possèdent la caractéristique  $A$ .*

$\pi_A$  peut-être considérée comme la moyenne d'une loi de Bernoulli en dotant tous les individus de la population  $U$  d'une valeur 1 ou 0 selon que les individus possèdent ou non la caractéristique  $A$  :

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{\text{Somme des valeurs 1} + \text{Somme des valeurs 0}}{\text{Taille de la population}} \\ &= \frac{\text{Nombre de 1}}{\text{Taille de la population}} \\ &= \text{Proportion de 1} \\ &= \pi_A.\end{aligned}$$

Si nous considérons la moyenne  $\hat{\mu}_n$  de l'échantillon composé de 1 et de 0 :

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_n &= \frac{\text{Somme des 1 observés} + \text{Somme des 0 observés}}{\text{Taille de l'échantillon}} \\ &= \frac{\text{Nombre de 1 observés}}{\text{Taille de l'échantillon}} \\ &= \frac{n_A}{n}.\end{aligned}$$

Comme

$$\mathbb{E} [\hat{\mu}_n] = \mu,$$

nous en déduisons que

$$\mathbb{E} [\hat{\mu}_n] = \mathbb{E} \left[ \frac{n_A}{n} \right] = \mathbb{E} [\hat{\pi}_{n,A}] = \mu = \pi_A.$$

Par conséquent, nous pouvons établir la propriété suivante.

## Propriété

*$\hat{\pi}_{n,A}$  est un estimateur sans biais de la proportion  $\pi_A$  de la population  $U$ .*

## Exemple

Soit la population  $U$  de trois enfants d'une famille âgés de 2, 4 et 12 ans. Décidons de prélever un enfant en attribuant à chacun d'eux la même probabilité d'être sélectionné. Nous dotons ainsi la population d'une loi discrète  $\{(x, p_x)\}$  définie dans le tableau suivant :

$x$	2	4	12
$p_x$	1/3	1/3	1/3

## Suite de l'exemple

L'âge de l'enfant prélevé n'est pas connu. Il constitue donc une variable aléatoire  $X$ .

Calculons la moyenne  $\mu$  et la variance  $\sigma^2$  de la population  $U$  :

- $\mu = 1/3 \times 2 + 1/3 \times 4 + 1/3 \times 12 = 6$
- $\sigma^2 = 1/3 \times (2-6)^2 + 1/3 \times (4-6)^2 + 1/3 \times (12-6)^2 = 56/3.$

Nous pouvons donc écrire :

- $\mathbb{E}[X] = \mu = 6$
- $\text{Var}[X] = \sigma^2 = 56/3.$

## Suite de l'exemple

Décidons maintenant de prélever deux observations par tirage aléatoire avec remise et à probabilités égales.

Notons  $X_1$  et  $X_2$  les v.a. correspondant à la première et à la seconde observation. Elles admettent toutes deux une distribution uniforme sur l'ensemble des trois valeurs, chaque élément pouvant être choisi avec une probabilité  $1/3$ .

Après calculs, nous obtenons :

- $\mathbb{E}[X_1] = \mathbb{E}[X_2] = \mu = 6$
- $\text{Var}[X_1] = \text{Var}[X_2] = \sigma^2 = 56/3$ .

## Remarques

- 1 Dans cet exemple, nous savons que la moyenne  $\mu$  de la population  $U$  vaut 6. Mais, de façon générale, lorsque nous étudions la population  $U$ , nous ne disposons pas d'une telle information !
- 2 Les paramètres de la population  $U$  sont inconnus (lesquels ?) et nous désirons les estimer.
- 3 Une façon d'atteindre ce but est d'utiliser l'information donnée par l'échantillon prélevé de la population  $U$ .
- 4 Pour estimer la moyenne  $\mu$ , il faut penser à calculer la moyenne arithmétique de l'échantillon.



## Suite de l'exemple

Introduisons donc :

$$\hat{\mu}_2 = \frac{X_1 + X_2}{2}.$$

Calculons la moyenne  $\hat{\mu}_2$  dans tous les cas :

$X_1$	$X_2$		
	2	4	12
2	2	3	7
4	3	4	8
12	7	8	12

Nous observons que  $\hat{\mu}_2$  peut prendre 9 valeurs, chacune avec une probabilité de  $1/9$ .

## Suite de l'exemple

Calculons maintenant « à la main » l'espérance et la variance de  $\hat{\mu}_2$  :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\hat{\mu}_2] &= \frac{1}{9} \times 2 + \frac{1}{9} \times 2 \times 3 + \frac{1}{9} \times 4 \\ &\quad + \frac{1}{9} \times 2 \times 7 + \frac{1}{9} \times 2 \times 8 + \frac{1}{9} \times 12 = 6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Var}[\hat{\mu}_2] &= \frac{1}{9} \times (2 - 6)^2 + \frac{1}{9} \times 2 \times (3 - 6)^2 + \frac{1}{9} \times (4 - 6)^2 \\ &\quad + \frac{1}{9} \times 2 \times (7 - 6)^2 + \frac{1}{9} \times 2 \times (8 - 6)^2 \\ &\quad + \frac{1}{9} \times (12 - 6)^2 = \frac{84}{9} = \frac{28}{3}.\end{aligned}$$

## Suite de l'exemple

Maintenant calculons la moyenne et la variance de  $\hat{\mu}_2$  d'une autre façon :

$$\begin{aligned} \bullet \mathbb{E}[\hat{\mu}_2] &= \mathbb{E}\left[\frac{X_1 + X_2}{2}\right] = \frac{1}{2} (\mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2]) = \\ &= \frac{1}{2} \times 2 \times \mathbb{E}[X_1] = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \mathbb{V}\text{ar}[\hat{\mu}_2] &= \mathbb{V}\text{ar}\left[\frac{X_1 + X_2}{2}\right] = \frac{1}{4} (\mathbb{V}\text{ar}[X_1] + \mathbb{V}\text{ar}[X_2]) = \\ &= \frac{1}{4} \times 2 \times \mathbb{V}\text{ar}[X_1] = \frac{1}{4} \times 2 \times \frac{56}{3} = \frac{28}{3}. \end{aligned}$$

## Remarques

Ces résultats permettent d'effectuer deux constatations très intéressantes.

- 1 La moyenne d'un échantillon de taille deux n'est jamais égale à la moyenne  $\mu = 6$  de la population  $U$ . Mais la variable aléatoire  $\hat{\mu}_2$  est en moyenne égale à  $\mu = 6$ .
- 2 La moyenne  $\hat{\mu}_2$  prend des valeurs qui se répartissent autour de  $\mu = 6$  avec une certaine dispersion mesurée par  $\text{Var}[\hat{\mu}_2] = 28/3$  qui est égale à la moitié de la variance  $\sigma^2 = 56/3$  de la population  $U$ . Ceci s'explique puisque nous avons montré que  $\text{Var}[\hat{\mu}_n] = \sigma^2/n$ .

## Remarque

Nous aurions pu choisir d'autres possibilités pour estimer la moyenne  $\mu$ .

## Exemples

La première observation, la seconde estimation ou encore la médiane, ce qui nous fournit trois autres estimateurs :

$$\hat{\mu}_{2,1} = X_1, \quad \hat{\mu}_{2,2} = X_2, \quad \hat{\mu}_{2,3} = Q_{1/2}.$$

Ces trois estimateurs possèdent aussi des lois de probabilités.

## Suite des exemples

Nous avons

- $\mathbb{E}[X_1] = \mathbb{E}[X_2] = 6 = \mu$
- $\text{Var}[X_1] = \text{Var}[X_2] = 56/3$
- $\hat{\mu}_{2,3} = \hat{\mu}_2$ .

Cette situation est très particulière. Elle résulte de la taille de l'échantillon. De façon générale, le comportement de  $\hat{\mu}_{2,3}$  n'est pas identique à celui de  $\hat{\mu}_2$ .

## Retour à l'exemple

- Intéressons-nous à présent à l'estimateur de la variance  $\sigma^2$  de la population  $U$  qui est égale à  $56/3$ .
- Interrogeons-nous sur le caractère sans biais ou non de l'estimateur de la variance  $\sigma^2$  de la population  $U$  fourni par la variance  $S_2^2$  de l'échantillon aléatoire.
- Le tableau qui va suivre donne les neuf valeurs possibles de l'estimateur  $S_2^2$  correspondant aux neuf échantillons.

## Suite de l'exemple

Les valeurs du tableau sont calculées par l'expression :

$$s_2^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 (x_i - \hat{\mu}_2)^2.$$

Les valeurs possibles de  $S_2^2$  :

$x_1$	$x_2$		
	2	4	12
2	0	1	25
4	1	0	16
12	25	16	0



## Suite de l'exemple

- Nous avons

$$\mathbb{E} \left[ S_2^2 \right] = \frac{3}{9} \times 0 + \frac{2}{9} \times 1 + \frac{2}{9} \times 16 + \frac{2}{9} \times 25 = \frac{28}{3}.$$

- Nous constatons ainsi que  $S_2^2$  est un estimateur biaisé de la variance  $\sigma^2$  de la population  $U$  puisque nous avons

$$\mathbb{E} \left[ S_2^2 \right] \neq \sigma^2.$$

- Le biais de  $S_2^2$  est égal à

$$B(S_2^2) = 28/3 - 56/3 = -28/3.$$

## Suite de l'exemple

Le tableau ci-dessous donne les neuf valeurs possibles de  $S_{2,c}^2$ .  
Ces neuf valeurs sont calculées par l'expression :

$$s_{2,c}^2 = \frac{1}{2-1} \sum_{i=1}^2 (x_i - \hat{\mu}_2)^2.$$

$x_1$	$x_2$		
	2	4	12
2	0	2	50
4	2	0	32
12	50	32	0

## Remarque

En calculant

$$\mathbb{E} \left[ S_{2,c}^2 \right] = \frac{3}{9} \times 0 + \frac{2}{9} \times 2 + \frac{2}{9} \times 32 + \frac{2}{9} \times 50 = \frac{56}{3},$$

nous vérifions bien que l'estimateur corrigé de la variance  $S_{2,c}^2$  est un estimateur sans biais de la variance  $\sigma^2$  de la population  $U$ .

# Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Définitions
- 3 Notation
- 4 Estimateur sans biais
- 5 Précision et efficacité d'un estimateur**
- 6 Estimateur convergent

Comme nous l'avons vu précédemment, la variance d'un estimateur joue un rôle important dans la mesure de précision.

### Cas d'un estimateur sans biais

Si  $\hat{\theta}_n$  est un estimateur sans biais de  $\theta$ , nous utilisons comme mesure de précision sa variance  $\text{Var} \left[ \hat{\theta}_n \right]$ . Plus la  $\text{Var} \left[ \hat{\theta}_n \right]$  est petite, plus l'estimateur  $\hat{\theta}_n$  est précis.

### La seconde propriété

Entre deux estimateurs non biaisés, nous choisirons le plus précis des deux, c'est-à-dire celui de plus petite variance.

Soit un échantillon aléatoire de taille  $n$  relativement élevée, prélevé dans une population  $U$  normale  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ . Si  $\hat{\mu}_n$  désigne la moyenne de l'échantillon aléatoire et  $Q_{1/2}$  la médiane de l'échantillon aléatoire alors, nous avons

- $\mathbb{E}[\hat{\mu}_n] = \mu, \quad \text{Var}[\hat{\mu}_n] = \frac{\sigma^2}{n}$
- $\mathbb{E}[Q_{1/2}] = \mu, \quad \text{Var}[Q_{1/2}] \simeq \frac{\pi}{2} \frac{\sigma^2}{n}.$

Nous avons donc :

$$\text{Var}[\hat{\mu}_n] < \text{Var}[Q_{1/2}].$$

Donc  $\hat{\mu}_n$  est un estimateur plus précis que  $Q_{1/2}$  dans le cas d'une population normale.

## Définition

Si  $\hat{\theta}_n$  est un estimateur de  $\theta$ , alors nous mesurons la précision de l'estimateur  $\hat{\theta}_n$  par l'**écart quadratique moyen (EQM)** :

$$EQM(\hat{\theta}_n) = \text{Var}[\hat{\theta}_n] + B^2(\hat{\theta}_n).$$

## Remarques

- 1 Si  $\hat{\theta}_n$  est un estimateur sans biais, c'est-à-dire si  $B(\hat{\theta}_n) = 0$ , alors nous retrouvons la propriété précédente.
- 2 Entre deux estimateurs de  $\theta$ , nous choisissons celui dont l'écart quadratique moyen est le plus faible.

## Propriété

*Un estimateur  $\hat{\theta}_{n,1}$  est **relativement plus efficace** que  $\hat{\theta}_{n,2}$  s'il est plus précis que le second.*



# Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Définitions
- 3 Notation
- 4 Estimateur sans biais
- 5 Précision et efficacité d'un estimateur
- 6 Estimateur convergent**

## Propriété

*Un estimateur  $\hat{\theta}_n$  de  $\theta$  est un estimateur **convergent** s'il « tend vers  $\theta$  » quand  $n$  tend vers plus l'infini.*

## Remarque

Il s'agit de la convergence en probabilité évoquée ici que nous allons rappeler ci-dessous.

## Définition

*Une suite de variables aléatoires  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge en probabilité vers une variable aléatoire  $X$  si, pour tout  $\varepsilon > 0$*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}[\{|X_n - X| \geq \varepsilon\}] = 0.$$

## Remarque

Cette propriété signifie que plus la taille  $n$  de l'échantillon est grande, plus l'événement selon lequel  $\hat{\theta}_n$  prend des valeurs très proches de  $\theta$ , a une probabilité élevée qui se rapproche de 1.

Une façon de vérifier cette propriété est fournie par la propriété suivante.

## Propriété

*Si un estimateur est non biaisé et que sa variance tend vers zéro quand  $n$  tend vers plus l'infini, alors cet estimateur est convergent.*

## Exemple

Nous avons montré auparavant, dans un tirage aléatoire avec remise, que :

$$\mathbb{E}[\hat{\mu}_n] = \mu \quad \text{et} \quad \text{Var}[\hat{\mu}_n] = \frac{\sigma^2}{n} \rightarrow 0, \quad \text{lorsque } n \rightarrow +\infty$$

Nous en déduisons que  $\hat{\mu}_n$  est un estimateur convergent.