# T. D. n° 3

# Intervalles de confiance
# Corrigé

**Exercice 1.** 1. Nous calculons la moyenne $\widehat{\mu}_n$ de l'échantillon en utilisant le logiciel `R` :

```
>billes<-c(19.6,20,20.2,20.1,20,19.9,20,20.3,20.1,19.8)
>mean(billes)
```

Le logiciel `R` renvoie comme résultat :

```
[1] 20
```

Calculons l'écart-type corrigé de l'échantillon en utilisant le logiciel `R` :

```
>sd(billes)
```

Le logiciel `R` renvoie comme résultat :

```
[1] 0.2
```

En utilisant le logiciel `R`, nous calculons le quantiles de Student à $0,975$ et à 9 degrés de liberté :

```
>qt(0.975,9)
```

Le logiciel `R` renvoie comme résultat :

```
[1] 2.262157
```

En utilisant le logiciel `R`, nous calculons les deux bornes de l'intervalle de confiance en écrivant ces deux lignes de commande suivantes :

```
>mean(billes)-qt(0.975,9)*(sd(billes)/sqrt(10))
>mean(billes)+qt(0.975,9)*(sd(billes)/sqrt(10))
```

L'intervalle de confiance à 95% de la masse des billes métalliques fabriquées est égal à :

$$]19,85693; 20,14307[.$$

2. Si l'écart-type $\sigma_{pop}$ de la population est connu, nous utilisons alors un quantile de la loi normale centrée et réduite à la place d'un quantile de Student. En utilisant le logiciel `R`, nous calculons les deux bornes de l'intervalle de confiance en écrivant ces deux lignes de commande suivantes :

```
>mean(billes)-qnorm(0.975)*(0.2/sqrt(10))
>mean(billes)+qnorm(0.975)*(0.2/sqrt(10))
```

L'intervalle de confiance à 95% de la masse des billes métalliques fabriquées est égal à :

$$]19,87604; 20,12396[.$$

**Exercice 2.** 1. En utilisant le logiciel `R`, nous calculons les deux bornes de l'intervalle de confiance en écrivant ces deux lignes de commande suivantes :

```
11-qnorm(0.975)*(2/sqrt(7))
11+qnorm(0.975)*(2/sqrt(7))
```

L'intervalle de confiance à 95% de la moyenne des 200 copies est égal à :

$$]9,518406; 12,48159[.$$

2. Si l'amplitude de l'intervalle (qui est la différence entre la borne supérieure et la borne inférieur) de confiance est égale à 2, nous devons résoudre l'équation suivante :

$$2 \times \texttt{qnorm}(0.975) \times \frac{2}{\sqrt{n}} = 2,$$

ce qui donne, en tapant la ligne de commande suivante :

```
(qnorm(0.975)*2)^2
```

$$n = 15,36584.$$

En corrigeant 16 copies, l'enseignant peut situer la moyenne générale de ses élèves dans un intervalle de confiance d'amplitude 2, avec un risque d'erreur de 5%.

3. Il faut que l'intervalle de confiance à 99% soit égal à $]10;12[$. Nous devons donc avoir :

$$2 \times \texttt{qnorm}(0.995) \times \frac{2}{\sqrt{n}} = 2,$$

ce qui donne, en tapant la ligne de commande suivante :

```
(qnorm(0.995)*2)^2
```

$$n = 26,53959.$$

Si l'enseignant corrige 27 copies et qu'il trouve une moyenne égale à 11, il peut dire que la moyenne générale de ses élèves est supérieure à 10, avec un risque d'erreur de 1%.

**Exercice 3.** 1. La moyenne $\mu$ de la population est estimée ponctuellement par la moyenne $\widehat{\mu}_n$ de l'échantillon

$$\widehat{\mu}_n = \frac{60\,000}{50} = 1\,200.$$

2. L'écart-type $\sigma_{pop}$ de la population est estimé ponctuellement par l'écart-type corrigé $s_{n,c}$ de l'échantillon. Nous commençons par calculer la variance non corrigée $s_n^2$ de l'échantillon et en utilisant la formule de Huygens, nous trouvons :

$$s_n^2 = \frac{74 \times 10^6}{50} - 1\,200^2 = 40\,000.$$

Maintenant, il nous reste à déduire la variance non corrigée $s_{n,c}^2$ de l'échantillon :

$$s_{n,c}^2 = s_n^2 \times \frac{50}{49} = 40\,816,33.$$

En tapant sous le logiciel `R`, la commande `sqrt(40816,33)`, nous trouvons alors :

$$s_{n,c} = 202,0305.$$

3. La variance $\sigma^2$ de la population étant estimée, nous utilisons les quantiles de Student. En utilisant le logiciel `R`, nous calculons les deux bornes de l'intervalle de confiance en écrivant ces deux lignes de commande suivantes :
```
>1200-qt(0.975,49)*(sqrt(40816.33)/sqrt(50))
>1200+qt(0.975,49)*(sqrt(40816.33)/sqrt(50))
```
L'intervalle de confiance à 95% de la durée de vie moyenne est égal à :
$$]1142,584; 1257,416[.$$
En utilisant le logiciel `R`, nous calculons les deux bornes de l'intervalle de confiance en écrivant ces deux lignes de commande suivantes :
```
>1200-qt(0.995,49)*(sqrt(40816.33)/sqrt(50))
>1200+qt(0.995,49)*(sqrt(40816.33)/sqrt(50))
```
L'intervalle de confiance à 99% de la durée de vie moyenne est égal à :
$$]1123,43; 1276,57[.$$

4. Puisque nous souhaitons avoir une amplitude de 60 heures, la taille de l'échantillon est nécessairement supérieure à 50 et nous sommes dans les conditions d'utilisation de la loi normale.
Nous devons avoir :
$$2 \times \texttt{qnorm}(0.975) \times \frac{\texttt{sqrt}(40816.33)}{\sqrt{n}} = 60.$$
En utilisant le logiciel `R` et en tapant la commande suivante :
```
((qnorm(0.975)*sqrt(40816.33))/30 )^2
```
nous obtenons :
$$n = 174,2158.$$
La taille de l'échantillon étant toujours un entier, est égale à 175.

**Exercice 4.** 1. Avec 1 000 personnes, nous pouvons déterminer un intervalle de confiance et utiliser la méthode de Wald.
En utilisant le logiciel `R`, nous calculons les deux bornes de l'intervalle de confiance en écrivant ces deux lignes de commande suivantes :
```
0.5-qnorm(0.975)*(sqrt(0.5*0.5)/sqrt(1000))
0.5+qnorm(0.975)*(sqrt(0.5*0.5)/sqrt(1000))
```

L'intervalle de confiance à 95% de la proportion de personnes ayant l'intention de voter pour Monsieur Dupont est égal à :
$$]0,4690102; 0,5309898[.$$
En utilisant le logiciel `R`, nous calculons les deux bornes de l'intervalle de confiance en écrivant ces deux lignes de commande suivantes :
```
0.25-qnorm(0.975)*(sqrt(0.25*0.75)/sqrt(1000))
0.25+qnorm(0.975)*(sqrt(0.25*0.75)/sqrt(1000))
```

L'intervalle de confiance à 95% de la proportion de personnes ayant l'intention de voter pour Monsieur Durand est égal à :

$$]0,2231621;0,2768379[.$$

En utilisant le logiciel `R`, nous calculons les deux bornes de l'intervalle de confiance en écrivant ces deux lignes de commande suivantes :

```
0.05-qnorm(0.975)*(sqrt(0.05*0.95)/sqrt(1000))
0.05+qnorm(0.975)*(sqrt(0.05*0.95)/sqrt(1000))
```

L'intervalle de confiance à 95% de la proportion de personnes ayant l'intention de voter pour Monsieur Duroc est :

$$]0,03649188;0,06350812[.$$

En utilisant le logiciel `R`, nous calculons les deux bornes de l'intervalle de confiance en écrivant ces deux lignes de commande suivantes :

```
0.5-qnorm(0.995)*(sqrt(0.5*0.5)/sqrt(1000))
0.5+qnorm(0.995)*(sqrt(0.5*0.5)/sqrt(1000))
```

L'intervalle de confiance à 99% de la proportion de personnes ayant l'intention de voter pour Monsieur Dupont est :

$$]0,4592726;0,5407274[.$$

En utilisant le logiciel `R`, nous calculons les deux bornes de l'intervalle de confiance en écrivant ces deux lignes de commande suivantes :

```
0.25-qnorm(0.995)*(sqrt(0.25*0.75)/sqrt(1000))
0.25+qnorm(0.995)*(sqrt(0.25*0.75)/sqrt(1000))
```

L'intervalle de confiance à 99% de la proportion de personnes ayant l'intention de voter pour Monsieur Durand est :

$$]0,214729;0,285271[.$$

En utilisant le logiciel `R`, nous calculons les deux bornes de l'intervalle de confiance en écrivant ces deux lignes de commande suivantes :

```
0.05-qnorm(0.995)*(sqrt(0.05*0.95)/sqrt(1000))
0.05+qnorm(0.995)*(sqrt(0.05*0.95)/sqrt(1000))
```

L'intervalle de confiance à 99% de la proportion de personnes ayant l'intention de voter pour Monsieur Duroc est :

$$]0,03224732;06775268[.$$

2. Pour un échantillon de taille $n$ (nous supposons $n > 1\,000$), l'intervalle de confiance à 95% du pourcentage de personnes ayant l'intention de voter Duval est

$$\left]0,17-\texttt{qnorm}(0.975)\times\sqrt{\frac{0,17\times 0,83}{n}};0,17+\texttt{qnorm}(0.975)\times\sqrt{\frac{0,17\times 0,83}{n}}\right[.$$

Puisque nous souhaitons une précision de 1%, cet intervalle de confiance doit être l'intervalle $]0,16;0,18[$.
Et nous devons avoir

$$\texttt{qnorm}(0.975) \times \sqrt{\frac{0,17 \times 0,83}{n}} = 0,01$$

ce qui donne, en tapant avec le logiciel `R` la commande suivante :
`(qnorm(0.975)*sqrt(0.17*0.83)/0.01)^2`
nous trouvons :

$$n = 5420,298.$$

Donc, comme la taille d'un échantillon est toujours un entier, la taille cherchée est 5421.