DEPARTAMENTO DE COMPUTACION

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

# Trabajo Práctico

26 de Mayo de 2016 — Inferencia Bayesiana


| Integrante | LU | Correo electrónico |
|---|---|---|
| Costa, Manuel José Joaquín | 035/14 | manucos94@gmail.com |
| Gatti, Mathias Nicolás | 477/14 | mathigatti@gmail.com |



**Facultad de Ciencias Exactas y Naturales**

Universidad de Buenos Aires

Ciudad Universitaria - (Pabellón I/Planta Baja)

Intendente Güiraldes 2160 - C1428EGA

Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Rep. Argentina

Tel/Fax: (54 11) 4576-3359

http://www.fcen.uba.ar

# Índice

**1. Ejercicio 1** **3**

**2. Ejercicio 2** **4**

2.1. Histogramas . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 5

2.2. Correlaciones . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 6

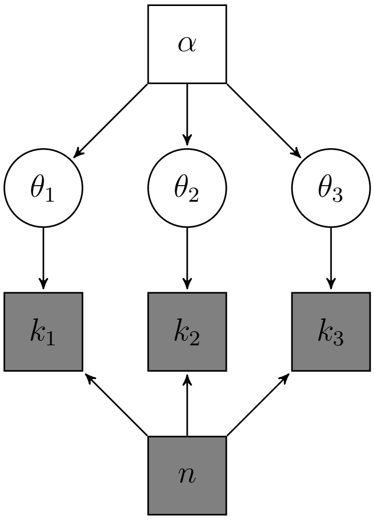
2.3. Media y Desvío Standard . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 7

**3. Ejercicio 3** **8**

**4. Ejercicio 4** **9**

# 1. Ejercicio 1

El modelo que escogimos se describe a continuación, en este entran en juego distintos parametros de distribuciones que modelan el problema y datos obtenidos que nos ayudaran a predecir mejor las distribuciones de los parámetros. Los cálculos de inferencia se realizaran con JAGS. Mas adelante se describe el código utilizado en el código del modelo.




$$
\begin{aligned}
&\beta \sim Categorical(pi)\\
&\theta_1 \sim \begin{cases} Beta(0{,}5, 0{,}5) & \text{if } \beta = 1 \\ Beta(100, 100) & \text{if } \beta \neq 1 \end{cases}\\
&k_1 \sim Binomial(\theta_1, n)\\
&k_2 \sim Binomial(\theta_2, n)\\
&k_3 \sim Binomial(\theta_3, n)\\
&n = 10
\end{aligned}
$$

```
model{
        # Observed Counts
        k1 ~ dbin(theta1,n)
        k2 ~ dbin(theta2,n)
        k3 ~ dbin(theta3,n)

        # Prior on Rates Theta
        theta1 ~ dbeta(param1, param1)
        theta2 ~ dbeta(param2, param2)
        theta3 ~ dbeta(param3, param3)

        # Auxiliary variables for Theta's distribution
        param1 <- ifelse(alpha== 1, 0.5, 100)
        param2 <- ifelse(alpha== 2, 0.5, 100)
        param3 <- ifelse(alpha== 3, 0.5, 100)

        # Prior on Rate Alpha
        for( i in 1:3){
        pi[i] <- 1/3
        }
        alpha ~ dcat(pi[])
}
```

# 2. Ejercicio 2

Como valores iniciales de las variables no observadas escogimos distintas opciones para asegurarnos de que no haya diferencia en los valores a los cuales convergen. Para los gráficos expuestos se utilizaron los siguientes parámetros para el algoritmo de muestreo.

```
% Sampling
%MCMC Parameters
nchains = 2; %How Many Chains?
nburnin = 10e2; %How Many Burn-in Samples?
nsamples = 10e4;  %How Many Recorded Samples?
nthin = 1; %How Often is a Sample Recorded?
doparallel = 0; % Parallel Option

% Assign Matlab Variables to the Observed Nodes
datastruct = struct('k1',k1,'k2',k2,'k3',k3,'n',n);

% Initialize Unobserved Variables
for i=1:nchains
    S.theta1 = 0.5; % Intial Value
    S.theta2 = 0.8; % Intial Value
    S.theta3 = 0.5; % Intial Value
    S.alpha = randi([1 3]); % Intial Value
    init0(i) = S;
end
```

## 2.1. Histogramas

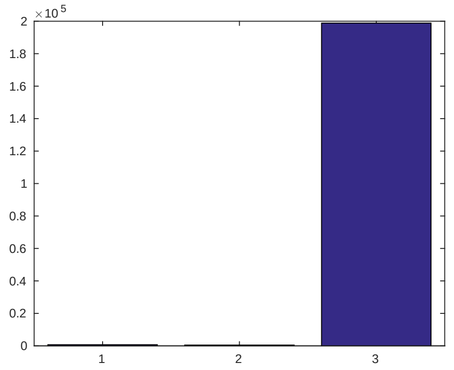



Figura 1: Histograma de la variable $\alpha$.

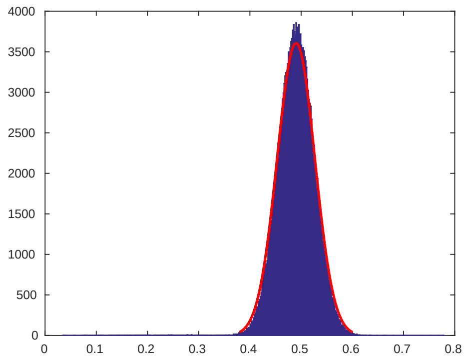



Figura 2: Histograma de la variable $\theta_1$. La linea azul es una aproximacion con una distribución normal.

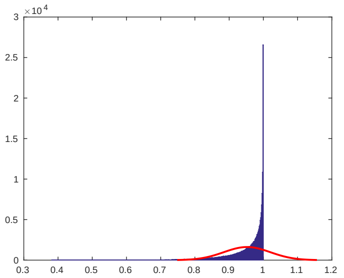



Figura 3: Histograma de la variable $\theta_3$. La linea azul es una aproximacion (Poco precisa como se podrá observar)con una distribución normal.

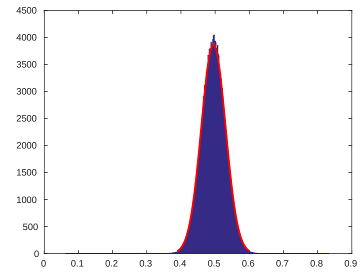



Figura 4: Histograma de la variable $\theta_2$. La linea azul es una aproximacion con una distribución normal.

## 2.2. Correlaciones

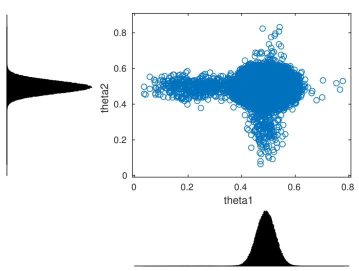



Figura 5: Correlación entre $\theta_1$ y $\theta_2$.

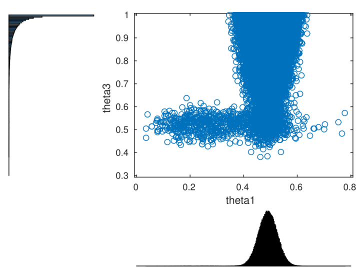



Figura 6: Correlación entre $\theta_1$ y $\theta_2$.

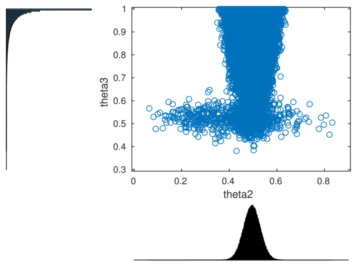



Figura 7: Correlación entre $\theta_1$ y $\theta_2$.

## 2.3. Media y Desvío Standard

media_alpha = 2.9907

desvioStandard_alpha = 0.1270

media_t1 = 0.4899

desvioStandard_t1 = 0.0368

media_t2 = 0.4951

desvioStandard_t2 = 0.0354

media_t3 = 0.9523

desvioStandard_t3 = 0.0680

# 3. Ejercicio 3

Esencialmente la diferencia va a tener que estar al nivel de los hiperparámetros, pues antes cada moneda no era indistinta a que las otras estuvieran cargadas o no, pero en este caso sí lo son. Por lo tanto, en lugar de tener un solo $\alpha$, ahora tendremos tres $\alpha_i$, con distribución Bernoulli de probabilidad $\frac{1}{2}$ cada una como *prior*. En la figura 8 puede verse el nuevo modelo y la representación gráfica del mismo usando DAGs.

```
model{
  # Observed Counts
  k1 ~ dbin(theta1,n)
  k2 ~ dbin(theta2,n)
  k3 ~ dbin(theta3,n)

  # Prior on Rates Theta
  theta1 ~ dbeta(param1, param1)
  theta2 ~ dbeta(param2, param2)
  theta3 ~ dbeta(param3, param3)

  # Auxiliary variables
    for Theta's distribution
  param1 <- ifelse(alpha1==1, 0.5, 100)
  param2 <- ifelse(alpha2==2, 0.5, 100)
  param3 <- ifelse(alpha3==3, 0.5, 100)

  # Prior on Rates Alpha
  alpha1 ~ dbern(0.5)
  alpha2 ~ dbern(0.5)
  alpha3 ~ dbern(0.5)
}
```

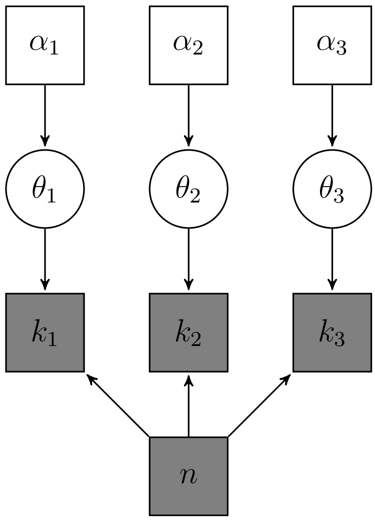



Figura 8: El modelo propuesto junto con su representación gráfica.

# 4. Ejercicio 4

A continuación desarrollamos la expresión para la probabilidad de obtener cara en la siguiente tirada de cualquiera de las tres monedas, aprovechando la información previa. Usamos fundamentalmente las tres propiedades vistas en clase: marginalización, reescritura de la probabilidad conjunta con probabilidad condicional, y la falacia del jugador.

$$
\begin{aligned}
P(cara_i|D) &= \int P(cara_i, \theta_i|D)d\theta_i \\
&= \int P(cara_i|D, \theta_i)P(\theta_i|D)d\theta_i \\
&= \int P(cara_i|\theta_i)P(\theta_i|D)d\theta_i \\
&= \int \theta_i(P(\theta_i, \alpha = i|D) + P(\theta_i, \alpha \neq i|D))d\theta_i \\
&= \int \theta_i(P(\theta_i|\alpha = i, D)P(\alpha = i|D) + P(\theta_i|\alpha \neq i, D)P(\alpha \neq i|D))d\theta_i
\end{aligned} \tag{1}
$$

En la última línea de esta ecuación podemos identificar las siguientes fuentes de incertidumbre:

- La incerteza inherente al *rate* de la moneda;
- Las incerteza de la *posterior* de $\theta_i$ separando en los casos en que el modelo determina que $i$ es la moneda cargada y los que no (recordar que el *prior* utilizado para $theta_i$ es condicional a este hecho);
- La incerteza de determinar si una moneda está cargada o no (usando la *posterior* de $\alpha$).