DEPARTAMENTO DE COMPUTACION

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

Trabajo Práctico

26 de Mayo de 2016 — Inferencia Bayesiana

Integrante	LU	Correo electrónico
Costa, Manuel José Joaquín	035/14	manucos94@gmail.com
Gatti, Mathias Nicolás	477/14	mathigatti@gmail.com

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Buenos Aires

Ciudad Universitaria - (Pabellón I/Planta Baja)

Intendente Güiraldes 2160 - C1428EGA

Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Rep. Argentina

Tel/Fax: (54 11) 4576-3359

http://www.fcen.uba.ar

Índice

1. Ejercicio 1 3

2. Ejercicio 2 4

2.1. Histogramas 5

2.2. Correlaciones 6

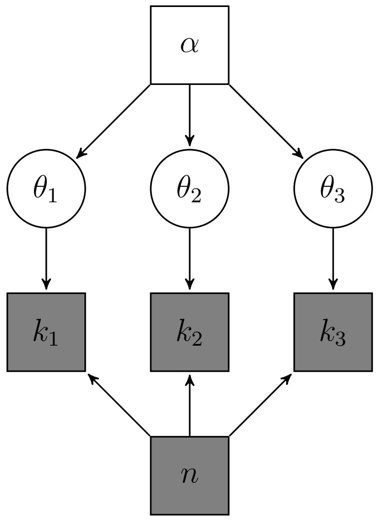
2.3. Media y Desvío Standard 7

3. Ejercicio 3 8

4. Ejercicio 4 9

1. Ejercicio 1

El modelo que escogimos se describe a continuación, en este entran en juego distintos parametros de distribuciones que modelan el problema y datos obtenidos que nos ayudaran a predecir mejor las distribuciones de los parámetros. Los cálculos de inferencia se realizaran con JAGS. Mas adelante se describe el código utilizado en el código del modelo.



$$\beta \sim Categorical(pi)$$
$$\theta_1 \sim \begin{cases} Beta(0{,}5, 0{,}5) & \text{if } \beta = 1 \\ Beta(100, 100) & \text{if } \beta \neq 1 \end{cases}$$
$$k_1 \sim Binomial(\theta_1, n)$$
$$k_2 \sim Binomial(\theta_2, n)$$
$$k_3 \sim Binomial(\theta_3, n)$$
$$n = 10$$

```
model{
        # Observed Counts
        k1 ~ dbin(theta1,n)
        k2 ~ dbin(theta2,n)
        k3 ~ dbin(theta3,n)

        # Prior on Rates Theta
        theta1 ~ dbeta(param1, param1)
        theta2 ~ dbeta(param2, param2)
        theta3 ~ dbeta(param3, param3)

        # Auxiliary variables for Theta's distribution
        param1 <- ifelse(alpha== 1, 0.5, 100)
        param2 <- ifelse(alpha== 2, 0.5, 100)
        param3 <- ifelse(alpha== 3, 0.5, 100)

        # Prior on Rate Alpha
        for( i in 1:3){
        pi[i] <- 1/3
        }
        alpha ~ dcat(pi[])
}
```

2. Ejercicio 2

Como valores iniciales de las variables no observadas escogimos distintas opciones para asegurarnos de que no haya diferencia en los valores a los cuales convergen. Para los gráficos expuestos se utilizaron los siguientes parámetros para el algoritmo de muestreo.

```
% Sampling
%MCMC Parameters
nchains = 2; %How Many Chains?
nburnin = 10e2; %How Many Burn-in Samples?
nsamples = 10e4;   %How Many Recorded Samples?
nthin = 1; %How Often is a Sample Recorded?
doparallel = 0; % Parallel Option

% Assign Matlab Variables to the Observed Nodes
datastruct = struct('k1',k1,'k2',k2,'k3',k3,'n',n);

% Initialize Unobserved Variables
for i=1:nchains
    S.theta1 = 0.5; % Intial Value
    S.theta2 = 0.8; % Intial Value
    S.theta3 = 0.5; % Intial Value
    S.alpha = randi([1 3]); % Intial Value
    init0(i) = S;
end
```

2.1. Histogramas

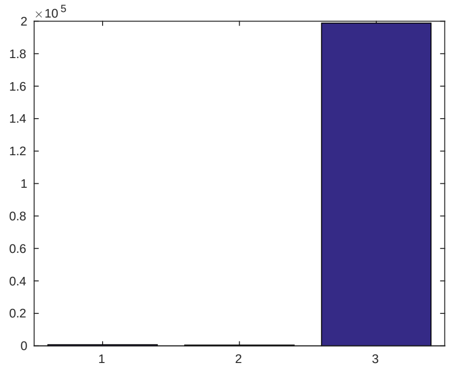


Figura 1: Histograma de la variable α.

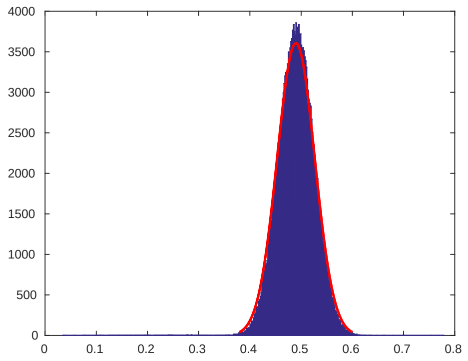


Figura 2: Histograma de la variable θ_1. La linea azul es una aproximacion con una distribución normal.

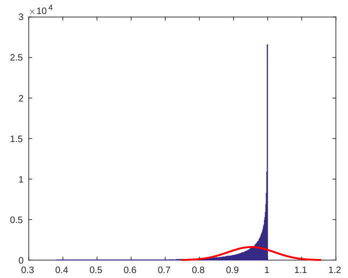


Figura 3: Histograma de la variable θ_3. La linea azul es una aproximacion (Poco precisa como se podrá observar)con una distribución normal.

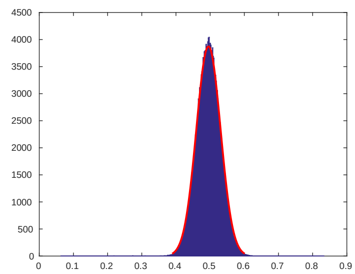


Figura 4: Histograma de la variable θ_2. La linea azul es una aproximacion con una distribución normal.

2.2. Correlaciones

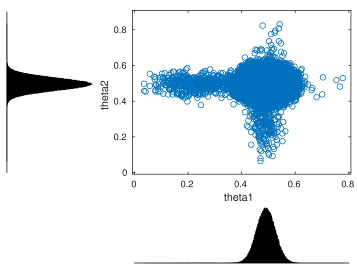


Figura 5: Correlación entre θ_1 y θ_2.

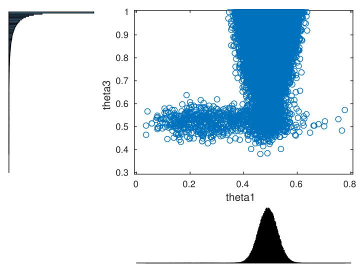


Figura 6: Correlación entre θ_1 y θ_2.

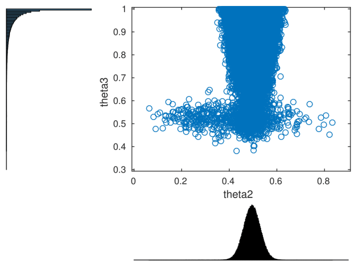


Figura 7: Correlación entre θ_1 y θ_2.

2.3. Media y Desvío Standard

media_alpha = 2.9907

desvioStandard_alpha = 0.1270

media_t1 = 0.4899

desvioStandard_t1 = 0.0368

media_t2 = 0.4951

desvioStandard_t2 = 0.0354

media_t3 = 0.9523

desvioStandard_t3 = 0.0680

3. Ejercicio 3

Esencialmente la diferencia va a tener que estar al nivel de los hiperparámetros, pues antes cada moneda no era indistinta a que las otras estuvieran cargadas o no, pero en este caso sí lo son. Por lo tanto, en lugar de tener un solo α, ahora tendremos tres α_i, con distribución Bernoulli de probabilidad $\frac{1}{2}$ cada una como *prior*. En la figura 8 puede verse el nuevo modelo y la representación gráfica del mismo usando DAGs.

```
model{
  # Observed Counts
  k1 ~ dbin(theta1,n)
  k2 ~ dbin(theta2,n)
  k3 ~ dbin(theta3,n)

  # Prior on Rates Theta
  theta1 ~ dbeta(param1, param1)
  theta2 ~ dbeta(param2, param2)
  theta3 ~ dbeta(param3, param3)

  # Auxiliary variables
    for Theta's distribution
  param1 <- ifelse(alpha1==1, 0.5, 100)
  param2 <- ifelse(alpha2==2, 0.5, 100)
  param3 <- ifelse(alpha3==3, 0.5, 100)

  # Prior on Rates Alpha
  alpha1 ~ dbern(0.5)
  alpha2 ~ dbern(0.5)
  alpha3 ~ dbern(0.5)
}
```

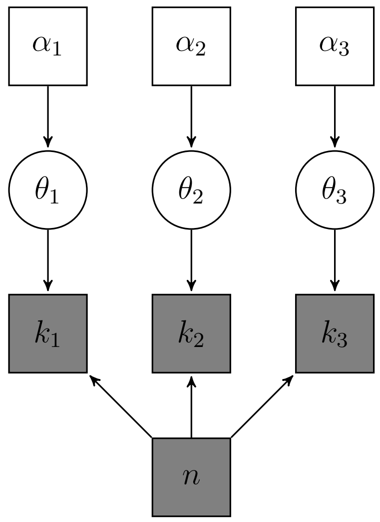


Figura 8: El modelo propuesto junto con su representación gráfica.

4. Ejercicio 4

$$
\begin{aligned}
P(cara_i|D) &= \int P(cara_i, \theta_i|D) d\theta_i \\
&= \int P(cara_i|D, \theta_i) P(\theta_i|D) d\theta_i \\
&= \int P(cara_i|\theta_i) P(\theta_i|D) d\theta_i \\
&= \int \theta_i \sum_j P(\theta_i, \alpha = j|D) d\theta_i \\
&\propto \int \theta_i \sum_j P(D|\theta_i, \alpha = j) P(\theta_i, \alpha = j) d\theta_i \\
&= \int \theta_i \sum_j P(D|\theta_i) P(\theta_i|\alpha = j) P(\alpha = j) d\theta_i
\end{aligned}
\tag{1}
$$