Transformaciones ortogonales de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

Álgebra II

Universidad de Salamanca

Manuel de la Cruz González
Cristina García Prado
Borja González Herrero
Bruno Martín González
Héctor Melchor Alaiz
Luisa del R. Montejo Fuentes
Óscar Pestañas Pérez

10 de abril, 2019

Contents

1 Descripción de las ecuaciones y matrices de giros y simetrías en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ 2

1.a Simetrías y giros en $\mathbb{R}^2$ 2

1.a.1 Simetría axial 2

1.a.2 Simetría respecto del origen 3

1.a.3 Giro de centro y ángulo α 3

1.b Simetrías y giros en $\mathbb{R}^3$ 4

1.b.1 Giro de ángulo α 4

1.b.2 Simetría axial 5

1.b.3 Simetría con respecto el origen 6

2 Demostración de ortogonalidad 6

2.a En $\mathbb{R}^2$ 6

2.a.1 Simetría axial 6

2.a.2 Simetría respecto del origen 7

2.a.3 Giro de centro y ángulo α 7

2.b En $\mathbb{R}^3$ 8

2.b.1 Giro de ángulo α 8

2.b.2 Simetría axial y respecto al origen 8

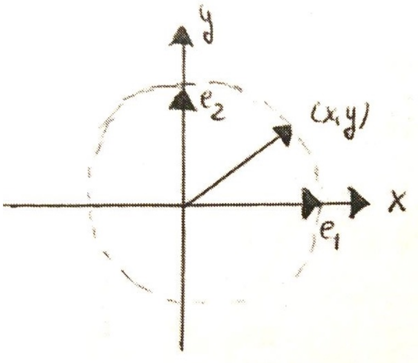
3 Demostración propuesta 9

1 Descripción de las ecuaciones y matrices de giros y simetrías en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

1.a Simetrías y giros en $\mathbb{R}^2$

La referencia ortonormal escogida en este caso es $\{0, x, y\}$ cuya base ortonormal es con base ortonormal $\{e_1, e_2\}$.

1.a.1 Simetría axial



Llamaremos a este giro S_x o S_y, según sea el eje sobre el que giro. Para el caso de S_x (análogo a S_y) :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\to (x,-y) \end{aligned} \tag{1}$$

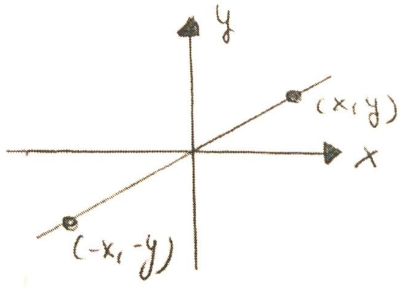
La matriz que describe este giro es:

$$S_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Si el giro es sobre el eje x, todo es análogo pero la matriz del giro en este caso es:

$$S_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.a.2 Simetría respecto del origen



Para este caso tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\to (-x,-y) \end{aligned} \tag{2}$$

$$S_0 = S_x \circ S_y$$

Y la matriz del giro resulta en:

$$S_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1.a.3 Giro de centro y ángulo α

Sea $\{e_1, e_2\}$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$. Para un giro de ángulo α su matriz de giro asociada es:

$$T_\alpha = \begin{pmatrix} cos\alpha & -sen\alpha \\ sen\alpha & cos\alpha \end{pmatrix}$$

Las ecuaciones del giro son:

$$T_\alpha(e_1) = cos\alpha e_1 + sen\alpha e_2 \tag{3}$$

$$T_\alpha(e_2) = -sen\alpha e_1 + cos\alpha e_2 \tag{4}$$

Podemos comprobar que si hago el giro y a continuación hago otro giro con alfa negativa, obtengo la identidad.

$$T_\alpha.T_\alpha = \begin{pmatrix} cos^2\alpha - sen^2\alpha & -sen\alpha cos\alpha - sen\alpha cos\alpha \\ sen\alpha cos\alpha + sen\alpha cos\alpha & cos^2\alpha - sen^2\alpha \end{pmatrix}$$

$$T_\alpha.T_{-\alpha} = I$$

1.b Simetrías y giros en $\mathbb{R}^3$

1.b.1 Giro de ángulo α

Ahora la matriz del giro dependerá de qué subespacio deje invariante (el eje x, el y o el z).

Para el eje z, el plano de giro será el xy.

$$T_{\alpha,z} = \begin{pmatrix} cos\alpha & -sen\alpha & 0 \\ sen\alpha & cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para el eje y, el plano de giro será el zx.

$$T_{\alpha,y} = \begin{pmatrix} cos\alpha & 0 & -sen\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ sen\alpha & 0 & cos\alpha \end{pmatrix}$$

Para el eje x, el plano de giro será el yz.

$$T_{\alpha,x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\alpha & -sen\alpha \\ 0 & sen\alpha & cos\alpha \end{pmatrix}$$

Para las ecuaciones, tomamos como ejemplo la del eje z:

$$T_{\alpha,z}(e_1) = cos\alpha e_1 + sen\alpha e_2 \tag{5}$$
$$T_{\alpha,z}(e_2) = -sen\alpha e_1 + cos\alpha e_2 \tag{6}$$
$$T_{\alpha,z}(e_3) = e_3 \tag{7}$$

Para las del eje y:

$$T_{\alpha,y}(e_1) = cos\alpha e_1 + sen\alpha e_3 \tag{8}$$
$$T_{\alpha,y}(e_2) = e_2 \tag{9}$$
$$T_{\alpha,y}(e_3) = -sen\alpha e_1 + cos\alpha e_3 \tag{10}$$

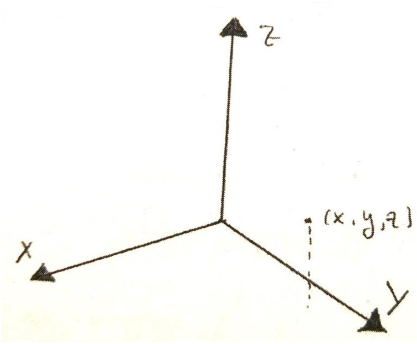
Para las del eje x:

$$T_{\alpha,x}(e_1) = e_1 \tag{11}$$
$$T_{\alpha,x}(e_2) = cos\alpha e_2 - sen\alpha e_3 \tag{12}$$
$$T_{\alpha,x}(e_3) = -sen\alpha e_2 + cos\alpha e_3 \tag{13}$$

Las ecuaciones son casi las mismas que para $\mathbb{R}^2$ pero con e_3 el subespacio que queda invariante.

1.b.2 Simetría axial

Como antes, la matriz cambiará con respecto al eje que giro.



$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) &\to (x,-y,-z)/(-x,y,-z)/(-x,-y,z) \end{aligned} \tag{14}$$

Con respecto al eje x:

$$S_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

y las ecuaciones serán:

$$S_x(e_1) = e_1 \tag{15}$$
$$S_x(e_2) = -e_2 \tag{16}$$
$$S_x(e_3) = -e_3 \tag{17}$$

Con respecto al eje y:

$$S_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

y las ecuaciones serán:

$$S_y(e_1) = -e_1 \tag{18}$$
$$S_y(e_2) = +e_2 \tag{19}$$
$$S_y(e_3) = -e_3 \tag{20}$$

Con respecto al eje z:

$$S_z = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y las ecuaciones serán:

$$S_z(e_1) = -e_1 \quad (21)$$
$$S_z(e_2) = -e_2 \quad (22)$$
$$S_z(e_3) = e_3 \quad (23)$$

Esta simetría también recibe el nombre de especular.

1.b.3 Simetría con respecto el origen

En este caso, tanto x como y y z cambiarán de signo.

$$S_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

y sus ecuaciones asociadas

$$S_z(e_1) = -e_1 \quad (24)$$
$$S_z(e_2) = -e_2 \quad (25)$$
$$S_z(e_3) = -e_3 \quad (26)$$

2 Demostración de ortogonalidad

Para demostrar que son ortogonales debemos comprobar que el producto de la matriz de giro por su traspuesta nos devuelve la identidad.

También, el determinante de una matriz ortogonal debe de ser ± 1.

Además, los únicos valores propios posibles para una aplicación ortogonal son ± 1.

2.a En $\mathbb{R}^2$

2.a.1 Simetría axial

La matriz que describe este giro es:

$$S_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Podemos ver que es un isomorfismo de valor propio 1 y -1 ya que descompone diagonalmente con esos valores. Podemos también observar que al aplicarla dos veces, obtenemos el estado inicial ya que:

$$S_x^2 = I$$

Con esto hemos demostrado que es ortogonal ya que la matriz de giro y su traspuesta es la misma. La demostración es igual para el caso del eje y.

Es claro que el determinante de S_x y S_y es -1 y que sus valores propios son ± 1.

2.a.2 Simetría respecto del origen

La matriz del giro es:

$$S_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Como $S_0 = S_0^t$:

$$S_0.S_0^t = S_0^2 = I$$

y $detS_0 = +1$

Los valores propios de esta matriz son ± 1

2.a.3 Giro de centro y ángulo α

Para un giro de ángulo α su matriz de giro asociada es:

$$T_\alpha = \begin{pmatrix} cos\alpha & -sen\alpha \\ sen\alpha & cos\alpha \end{pmatrix}$$

Hacemos el producto con su traspuesta y obtenemos:

$$T_\alpha.T_\alpha^t = \begin{pmatrix} cos^2\alpha + sen^2\alpha & -sen\alpha cos\alpha + sen\alpha cos\alpha \\ sen\alpha cos\alpha - sen\alpha cos\alpha & cos^2\alpha + sen^2\alpha \end{pmatrix} = I$$

$$T_\alpha.T_\alpha^t = I$$

Si hacemos su determinante: $detT_\alpha = cos^2\alpha + sen^2\alpha = 1$

Vamos a proceder ahora a calcular el determinante.

$$\begin{vmatrix} x - cos\alpha & sen\alpha \\ -sen\alpha & x - cos\alpha \end{vmatrix} = x^2 - 2cos\alpha x + 1$$

$$x = \frac{2cos\alpha \pm \sqrt{4cos^2\alpha - 4}}{2} = cos\alpha \pm \sqrt{cos^2\alpha - 1}$$

Por tanto alfa sólo puede 180º o 0º para valores propios reales. Entonces:

$$x = cos0^o = 1$$

o

$$x = cos180^o = -1$$

2.b En $\mathbb{R}^3$

2.b.1 Giro de ángulo α

La matriz para el eje z es

$$T_{\alpha,z} = \begin{pmatrix} cos\alpha & -sen\alpha & 0 \\ sen\alpha & cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y su traspuesta :

$$T^t_{\alpha,z} = \begin{pmatrix} cos\alpha & +sen\alpha & 0 \\ -sen\alpha & cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El producto de ambas

$$T_{\alpha,z}.T^t_{\alpha,z} = \begin{pmatrix} cos^2\alpha + sen^2\alpha & -sen\alpha cos\alpha + sen\alpha cos\alpha & 0 \\ sen\alpha cos\alpha - sen\alpha cos\alpha & cos^2\alpha + sen^2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

El determinante lo puedo calcular desarrollando por el menores (tomo el 1) y obtengo por tanto el mismo determinante que para la matriz de giro de $\mathbb{R}^2$.

$detT_{\alpha,z} = 1$

Procedemos al cálculo de los valores propios

$$\begin{vmatrix} x - cos\alpha & sen\alpha & 0 \\ -sen\alpha & x - cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} = (x-1)\begin{vmatrix} x - cos\alpha & sen\alpha \\ -sen\alpha & x - cos\alpha \end{vmatrix}$$

Donde el segundo determinante es el que hemos calculado antes para $\mathbb{R}^2$. Por tanto, queda demostrado que sólo puede tener como valores propios ± 1.

2.b.2 Simetría axial y respecto al origen

Como las matrices son diagonales, sus traspuestas coinciden con la matrices. Es secillo ver que las matrices: $S_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $S_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $S_z = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Al elevarlas al cuadrado, obtengo la identidad, ya que los signos desaparecen.

También podemos ver a simple vista que el determinante de todas ellas es 1.

Para el caso de la simetría respecto el origen, lo anteriormente dicho es válido; pero el determinante de esta es -1.

$$S_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Como todas son matrices diagonales, sabemos por el Primer Teorema de descomposición que los únicos valores propios posibles son aquellos que se encuentran en la diagonal y por tanto, ± 1.

3 Demostración propuesta

Demostrar que si T es una transformación ortogonal, existe una base ortonormal respecto de la que T es expresable como composición de giros y simetrías.

Demostración

Partimos de las siguientes condiciones:

1. Como t es una transformación ortogonal, los calores propios que puede tener son ± 1.
2. Si existe una base ortonormal, la matriz asociada a T es Id y por tanto

$$A^t.A = Id \rightarrow A^t = A^{-1}$$

3. Se sabe, además, que el determinante de A tiene que ser ± 1.

Como resultado de todo lo enumerado la matriz T asociada a la transformación ortogonal respecto a una base B ortonormal es semejante a:

$$T_B = \begin{pmatrix} \pm 1 & & & \\ & \pm 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \pm 1 \end{pmatrix}$$

\+ En caso de ser todos -1 tenemos simetría en el origen.

\+ Con un +1 tenemos simetría respecto los ejes.

\+ Si sólo tengo 1, tendríamos la matriz identidad.

Particularizando para $\mathbb{R}^3$. Las posibilidades de giro son, en base a lo anterior, las matrices de giro que hemos expresado en el apartado a).

$$T_{\alpha,z} = \begin{pmatrix} cos\alpha & \pm sen\alpha & 0 \\ \pm sen\alpha & cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

Para el eje y, el plano de giro será el zx.

$$T_{\alpha,y} = \begin{pmatrix} cos\alpha & 0 & \pm sen\alpha \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ \pm sen\alpha & 0 & cos\alpha \end{pmatrix}$$

Para el eje x, el plano de giro será el yz.

$$T_{\alpha,x} = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\alpha & \pm sen\alpha \\ 0 & \pm sen\alpha & cos\alpha \end{pmatrix}$$