Grado en Físicas

Métodos Numéricos

Tema 1. Ecuaciones no lineales de una variable

Alejandro Medina

Curso 2016/17, Septiembre 2016

Esquema

Esquema

Introducción

Planteamiento del problema

$$f(x) = 0 \quad \text{ó} \quad x = g(x) \qquad \Longrightarrow \quad ¿x?$$

donde las funciones f ó g son funciones no lineales, reales de variable real.

Ejemplos:

$$x^2 + 1 = 0; \qquad x - \cos x = 0; \qquad x = e^x$$

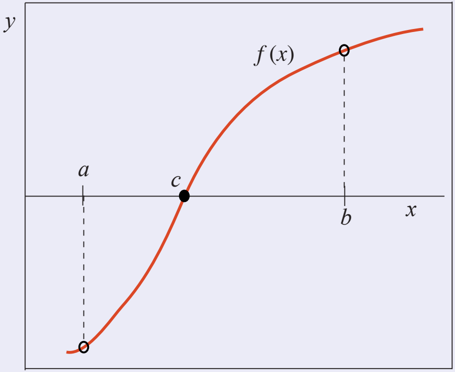
$$\tan x - e^{x^2} = \log x - \frac{1}{1 - \cos x}$$

Introducción

Proceso para calcular las soluciones

1. Localización de las raíces.
2. Separación.
3. Estimación de la aproximación numérica a la solución.

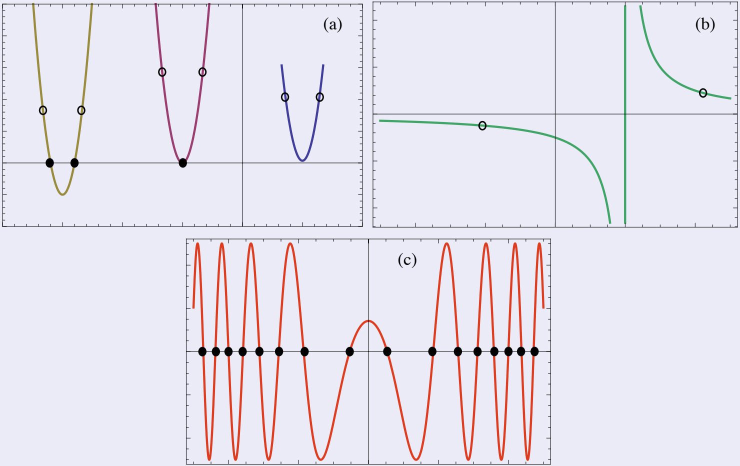
Situación más sencilla



Función continua, $f(x)$, de modo que $\exists\,[a,b] \quad / \quad f(a)\,f(b) < 0$

$$\Rightarrow \quad \exists\, c \quad / \quad f(c) = 0 \qquad \text{(Teorema de Bolzano)}$$

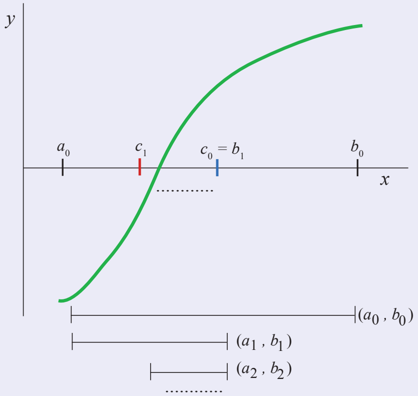
SITUACIONES *'patológicas'*



ESQUEMA

Métodos iterativos de aproximación de soluciones

Método de bisección



$$c_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}; \quad c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} \ldots$$

Formas de definir la tolerancia

1. Tolerancia en cuanto al tamaño del intervalo n-ésimo, ε:

$$\varepsilon = \frac{b-a}{2^n}$$

Tiene la ventaja de que se puede predeterminar el número de iteraciones, n necesario para alcanzar esa tolerancia:

$$n = \log_2 \frac{b-a}{\varepsilon}$$

2. Tolerancia en cuanto a la convergencia, β.

Se trata de realizar un número continuo de iteraciones comprobando la convergencia, hasta que se satisfaga la presupuesta:

$$|c_n - c_{n-1}| < \beta$$

Ejemplo:

Utilizando el método de la bisección, resuélvase la ecuación $e^{-x} - x = 0$ *en el intervalo* $[0, 1]$ *con una tolerancia* $\varepsilon = 0{,}002$.

Número de iteraciones:

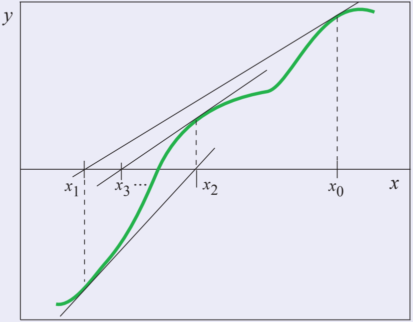
$$\frac{b-a}{2^n} = 0{,}002 \quad \Longrightarrow \quad n \simeq 9$$

n	a_n	b_n	c_n
0	0.0000	1.0000	0.5000
1	0.5000	1.0000	0.7500
2	0.5000	0.7500	0.6250
3	0.5000	0.6250	0.5625
...	...	...	...
8	0.5664	0.5703	0.5684
9	0.5664	0.5684	0.5674

Raíz aproximada: $c_9 = 0{,}5674$

(El valor *'exacto'*, con mayor precisión, es: $0{,}56714329$)

Método de Newton-Raphson



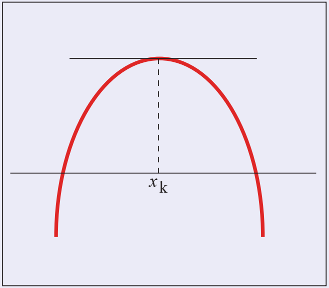
$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \qquad (k \geq 0)$$

Ejemplo:

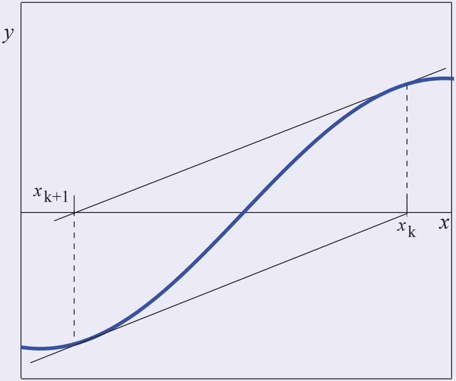
Ecuación	$x^2 - 5 = 0$	$1/x - 7 = 0$
Iteración $k+1$	$\frac{1}{2}\left(x_k + \frac{5}{x_k}\right)$	$x_k(2 - 7x_k)$
0	2.5000000	0.1000000
1	2.2500000	0.1300000
2	2.2361111	0.1417000
3	2.2360680	0.1428478
4	2.2360680	0.1428571
5		0.1428571
Raíz analítica	2,2360680	0,1428571

La convergencia del método no está asegurada

Ejemplos:

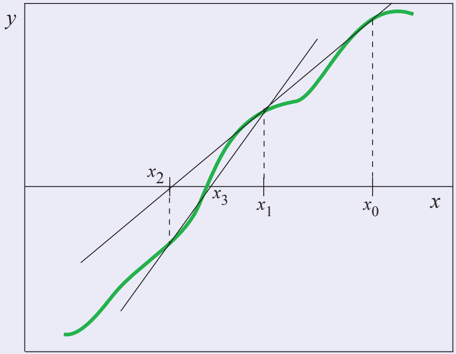


x_k coincide con algún extremo de la función



El algoritmo entra en algún bucle oscilante

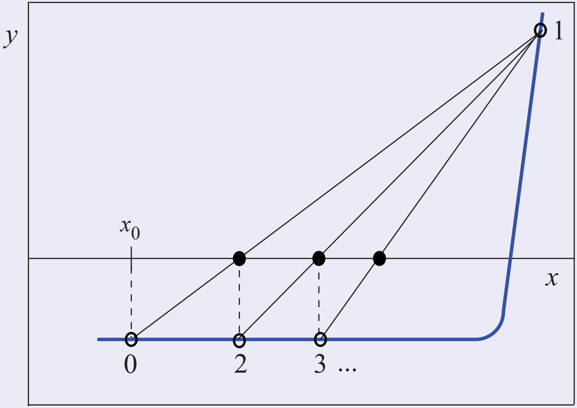
Método de la secante



$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

Método de la *regula-falsi*

Variante del método de la secante que siempre converge



Algunos ejemplos numéricos

Consideremos la ecuación:

$$f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0$$

Tiene una raíz en $[1,2]$, porque $f(1) = -5$ y $f(2) = 14$.

Valor de la raíz con 10 decimales: $\alpha = 1,3652300134$

1. Método de la bisección

Valores iniciales: $a_0 = 1{,}0,\ b_0 = 2{,}0;$ Tolerancia $= 0{,}0005$

n	a_n	b_n	c_n	$f(c_n)$
0	1,00000000	2,00000000	1,50000000	2,37500000
1	1,00000000	1,50000000	1,25000000	-1,79687500
2	1,25000000	1,50000000	1,37500000	0,16210937
3	1,25000000	1,37500000	1,31250000	-0,84838867
4	1,31250000	1,37500000	1,34375000	-0,35098266
...	...	...	...	...
7	1,35937500	1,36718750	1,36328125	-0,03214997
8	1,36328125	1,36718750	1,36523437	0,00007202
9	1,36328125	1,36523437	1,36425781	-0,01604669
10	1,364257812	1,36523437	1,36474609	-0,00798926

La convergencia se alcanza en $n = 10$.
En $n = 8$ se obtiene un valor más próximo a la raíz exacta, que se pasa de largo porque no se verifica para ese n la condición de convergencia.

2. Método de Newton

Valor inicial, $x_0 = 1,0000$; Tolerancia$= 0,0005$.

n	x_n	$f(x_n)$
1	1,45454545	1,54019534
2	1,36890040	0,06071969
3	1,36523660	0,00010877
4	1,36523001	0,0000000004

Ahora se obtiene la convergencia en la iteración $n = 4$. Además, para este ejemplo concreto $\mid \alpha - x_4 \mid \simeq 10^{-10}$.

Es decir, la convergencia es mucho más rápida que en el método de la bisección, pero en contra de aquél, no siempre converge.

3. Método de la secante

Valores iniciales, $x_0 = 1,0000$; $x_1 = 2,0000$; Tolerancia= 0,0005.

n	x_n	$f(x_n)$
2	1,26315789	-1,60227438
3	1,33882784	-0,43036474
4	1,36661639	0,02290943
5	1,36521190	-0,00029907
6	1,36523000	-0,00000020

La convergencia se consigue en $n = 6$.

$$\mid \alpha - x_6 \mid \simeq 1,3 \times 10^{-8}$$

Esquema

Análisis de la convergencia

Método	*Orden de converg.*	Convergencia
Bisección	1 (lineal)	Asegurada
Newton-Raphson	2 (cuadrático)	No asegurada
Secante	$\simeq 1{,}62$ (superlineal)	No asegurada

Ejemplo:
Supongamos que (x_n) converge linealmente a $c = 0$ y que (y_n) converge también a 0 pero cuadráticamente, siendo la constante γ igual en ambos casos. Entonces:

$$| x_1 | \leq \gamma | x_0 |; \quad | y_1 | \leq \gamma | y_0 |^2$$

$$| x_2 | \leq \gamma | x_1 | \leq \gamma^2 | x_0 |; \quad | y_2 | \leq \gamma | y_1 |^2 \leq \gamma^3 | y_0 |^4$$

$$| x_3 | \leq \gamma | x_2 | \leq \gamma^3 | x_0 |; \quad | y_3 | \leq \gamma | y_2 |^2 \leq \gamma^7 | x_0 |^8$$

Y, en general,

$$| x_n | \leq \gamma^n | x_0 |; \quad | y_n | \leq \gamma^{2^n - 1} | y_0 |^{2^n}$$

La siguiente tabla muestra cómo convergen estas cotas de error, considerando que:

$$| x_0 | = | y_0 | = 1 \quad \text{y} \quad \gamma = 0{,}5$$

n	Lineal $(0{,}5)^n$	Cuadrática $(0{,}5)^{2^n-1}$
1	$5,0000 \times 10^{-1}$	$5,0000 \times 10^{-1}$
2	$2,5000 \times 10^{-1}$	$1,2500 \times 10^{-1}$
3	$1,2500 \times 10^{-1}$	$7,8125 \times 10^{-3}$
4	$6,2500 \times 10^{-2}$	$3,0518 \times 10^{-5}$
...	...	...
7	$7,8125 \times 10^{-3}$	$5,8775 \times 10^{-39}$

La sucesión que converge cuadráticamente dista de cero menos de 10^{-38} a partir de su séptimo término, mientras que hacen falta al menos 126 términos de la otra para garantizar la misma precisión.

Ejercicios teóricos

1.- Utilizando el método de bisección, calcula la raíz en el intervalo $[0,1]$ de la función:

$$f(x) = x^3 - 7x^2 + 14x - 6 = 0$$

con las siguientes precisiones: 1) $\varepsilon = 10^{-1}$; 2) $\varepsilon = 10^{-2}$ y 3) $\varepsilon = 10^{-3}$.

2.- Utiliza el método de Newton para obtener una solución a la ecuación $x - \cos x = 0$ en el intervalo $[0, \pi/2]$ con precisión 10^{-4}. Toma, por ejemplo, como punto de partida $x_1 = 0{,}5$.

Ejercicios teóricos

3.- Una partícula parte del reposo y se desliza a lo largo de un plano inclinado cuya inclinación, θ, cambia con velocidad constante,

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega < 0.$$

Después de t segundos, la posición de la partícula viene dada por:

$$x(t) = \frac{g}{2\omega^2}\left(\frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2} - \operatorname{sen}\omega t\right)$$

Supongamos que la partícula ha recorrido 1,7 m en 1 s. Determina la velocidad ω con el método de la secante y con una precisión 10^{-5}. (Tómese $g = -9,8$ m/s^2).

Ejercicios teóricos

4.- Una estructura para una construcción dispone de un sistema de amortiguamiento ante movimientos de tipo oscilatorio. La coordenada y de la estructura responde a la ecuación:

$$y(t) = 10\,\mathrm{e}^{-t/2}\cos 2t$$

¿En qué instante de tiempo la coordenada y tiene un valor de 4,000? (Resuélvase el problema utilizando el método de la bisección con tolerancia $\varepsilon = 10^{-3}$.)

Ejercicios teóricos

5.- Una buena aproximación al crecimiento del número de nodos con que interacciona uno dado en una red de comunicaciones compleja viene dado aproximadamente por la ecuación:

$$t - \frac{\cos t}{\operatorname{sen} t} = 0$$

Obténgase su raíz, alrededor de $t = 0{,}5$, utilizando el método de Newton con 6 cifras significativas en los cálculos y precisión mayor que 10^{-4}.

6.- Las trayectorias de dos partículas en el plano (x, y) vienen dadas por $y_1(x) = e^x$ e $y_2(x) = 3x$. Determina aproximadamente los puntos de intersección, α y β, entre las 2 curvas. Para hacerlo utiliza el método de Newton tomando como puntos de partida: 0,5 para α y 1,5 para β. Como criterio de convergencia, se debe verificar que: $|x_{n+1} - x_n| < 10^{-3}$.