# Grado en Físicas
## *Métodos Numéricos*
# Tema 5. Sistemas de Ecuaciones Lineales

Alejandro Medina Domínguez

Diciembre 2016

# Esquema

# Esquema

# Introducción

Consideraremos sistemas de ecuaciones lineales de la forma:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n, \end{array}$$

que matricialmente se puede escribir como:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

esto es,

$$\mathbf{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

# Esquema

## Sistema triangular. Sustitución hacia atrás

Sistema triangular:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,n-1}x_{n-1} & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
0 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,n-1}x_{n-1} & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
0 & + & 0 & + & \cdots & + & a_{n-1,n-1}x_{n-1} & + & a_{n-1,n}x_n & = & b_{n-1} \\
0 & + & 0 & + & \cdots & + & 0 & + & a_{nn}x_n & = & b_n
\end{array}
$$

Sustitución hacia atrás:

- A partir de la ecuación n-ésima se obtiene,

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}.$$

- A continuación se despeja $x_{n-1}$, que sólo depende de $x_n$ (que ya conocemos):

$$x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1,n}x_n}{a_{n-1,n-1}}.$$

- El proceso se repite hacia atrás hasta llegar a la primera ecuación, en el caso i-ésimo se tiene:

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j}{a_{ii}}.$$

## Eliminación gaussiana

La solución de un sistema lineal no cambia si:

A) Se multiplica una ecuación por una constante distinta de cero.

B) Se suma o resta a una ecuación una combinación lineal de las otras.

C) Se intercambian dos ecuaciones.

D) Se efectúa una secuencia cualquiera de las operaciones anteriores.

## Descomposición LU

### Ejemplo

La matriz **A** viene dada por:

$$\mathbf{A}_0 \equiv \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 10 \\ 2 & 4 & 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Definimos,

$$\mathbf{L}_1 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a_{21}/a_{11} & 1 & 0 \\ -a_{31}/a_{11} & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 \\ -m_{31} & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4/2 & 1 & 0 \\ -2/2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donde $m_{i1} = a_{i1}/a_{11}$, $(i > 1)$.

$$\mathbf{A}_1 \equiv \mathbf{L}_1 \cdot \mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 14 \end{pmatrix}.$$

Análogamente se define:

$$\mathbf{L}_2 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -m_{32} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3/1 & 1 \end{pmatrix},$$

donde ahora,

$$m_{32} = \frac{\text{elemento } a_{32} \text{ de la nueva } \mathbf{A}_1}{\text{elemento } a_{22} \text{ de la nueva } \mathbf{A}_1}.$$

Multiplicando $\mathbf{L}_2$ por $\mathbf{A}_1$ se obtiene:

$$\mathbf{A}_2 \equiv \mathbf{L}_2 \cdot \mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \equiv \mathbf{U},$$

donde $\mathbf{U}$ es una matriz triangular superior. Finalmente se tiene que,

$$\mathbf{L}_2 \cdot \mathbf{L}_1 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{U}$$

En general,

$$\mathbf{L}_{n-1} \cdot \cdots \cdot \mathbf{L}_1 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{U},$$

donde **U** es la matriz triangular superior,

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix},$$

Las matrices $\mathbf{L}_j$ vienen dadas por:

$$\mathbf{L}_j \equiv \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -m_{j+1,j} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -m_{n,j} & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow \quad \text{fila } j \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{columna } j \end{array} & \end{array}$$

$$m_{ij} = \frac{\text{elemento } a_{ij} \text{ de la matriz } \mathbf{A}_{j-1}}{\text{elemento } a_{jj} \text{ de la matriz } \mathbf{A}_{j-1}} \qquad (i > j)$$

$$\mathbf{A}_j = \mathbf{L}_j \cdot \mathbf{A}_{j-1} \quad (j \geq 1); \qquad \mathbf{A}_0 = \mathbf{A}; \qquad \mathbf{A}_{n-1} = \mathbf{U}.$$

Es fácil comprobar que,

$$\mathbf{L}_j^{-1} \equiv \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & m_{j+1,j} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & m_{n,j} & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad \leftarrow \quad \text{fila } j$$

$$\uparrow$$
$$\text{columna } j$$

Teniendo en cuenta que,

$$\mathbf{A} = \underbrace{\mathbf{L}_1^{-1} \cdot \cdots \cdot \mathbf{L}_{n-1}^{-1}}_{\mathbf{L}} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U},$$

se obtiene, por inducción, que **L** es la siguiente matriz triangular inferior :

$$\mathbf{L} \equiv \mathbf{L}_1^{-1} \cdot \cdots \cdot \mathbf{L}_{n-1}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces podemos escribir:

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U},$$

**L** es una matriz triangular inferior con diagonal unidad y **U** es una matriz triangular superior.

## Descomposición $LU$ para resolver sistemas lineales

$$\mathbf{A} \cdot \vec{x} = \vec{b},$$

donde **A** se puede factorizar como:

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U},$$

Se tiene entonces:

$$\mathbf{A} \cdot \vec{x} = \mathbf{L} \cdot (\underbrace{\mathbf{U} \cdot \vec{x}}_{\equiv \vec{y}}) = \vec{b},$$

y, por tanto, podemos reescribir el sistema como:

$$\begin{array}{lllll} 1) & \mathbf{L} \cdot \vec{y} = \vec{b} & \longrightarrow & \vec{y} & \text{(por sustitución hacia adelante)} \\ 2) & \mathbf{U} \cdot \vec{x} = \vec{y} & \longrightarrow & \vec{x} & \text{(por sustitución hacia atrás)} \end{array}$$

La primera ecuación se puede resolver para $\vec{y}$ por *sustitución hacia adelante* (**L** es triangular inferior) y una vez obtenido $\vec{y}$, se resuelve la segunda ecuación por *sustitución hacia atrás* (**U** es triangular superior) .

# Algoritmo Doolittle

## Ejemplo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

a)

$$\begin{pmatrix} \circledast & \circledast & \circledast \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \circledast & & \\ \circledast & & \\ \circledast & & \end{pmatrix} \longrightarrow u_{11} \equiv \widehat{a_{11}}$$

$$\begin{pmatrix} \circledast & \circledast & \circledast \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} & \circledast & \\ & \circledast & \\ & \circledast & \end{pmatrix} \longrightarrow u_{12} \equiv \widehat{a_{12}}$$

$$\begin{pmatrix} \circledast & \circledast & \circledast \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} & & \circledast \\ & & \circledast \\ & & \circledast \end{pmatrix} \longrightarrow u_{13} \equiv \widehat{a_{13}}$$

b)

$$\begin{pmatrix} & & \\ \circledast & \circledast & \circledast \\ & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \circledast & & \\ \circledast & & \\ \circledast & & \end{pmatrix} \longrightarrow m_{21}\widehat{u_{11}} = \widehat{a_{21}} \longrightarrow m_{21} = \frac{a_{21}}{u_{11}}$$

$$\begin{pmatrix} & & \\ \circledast & \circledast & \circledast \\ & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} & \circledast & \\ & \circledast & \\ & \circledast & \end{pmatrix} \longrightarrow \widehat{m_{21}}\widehat{u_{12}} + u_{22} = \widehat{a_{22}} \longrightarrow u_{22} = a_{22} - m_{21}u_{12}$$

$$\begin{pmatrix} & & \\ \circledast & \circledast & \circledast \\ & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} & & \circledast \\ & & \circledast \\ & & \circledast \end{pmatrix} \longrightarrow \widehat{m_{21}}\widehat{u_{13}} + u_{23} = \widehat{a_{23}} \longrightarrow u_{23} = a_{23} - m_{21}u_{13}$$

c)

$$\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ \circledast & \circledast & \circledast \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \circledast & & \\ \circledast & & \\ \circledast & & \end{pmatrix} \longrightarrow m_{31}\widehat{u_{11}} = \widehat{a_{31}} \longrightarrow m_{31} = \frac{a_{31}}{u_{11}}$$

$$\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ \circledast & \circledast & \circledast \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} & \circledast & \\ & \circledast & \\ & \circledast & \end{pmatrix} \longrightarrow \widehat{m_{31}}\widehat{u_{12}} + m_{32}\widehat{u_{22}} = \widehat{a_{32}} \longrightarrow m_{32} = \frac{a_{32} - m_{31}u_{12}}{u_{22}}$$

$$\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ \circledast & \circledast & \circledast \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} & & \circledast \\ & & \circledast \\ & & \circledast \end{pmatrix} \longrightarrow \widehat{m_{31}}\widehat{u_{13}} + \widehat{m_{32}}\widehat{u_{23}} + u_{33} = \widehat{a_{23}} \longrightarrow$$

$$u_{33} = a_{33} - m_{32}u_{23} - m_{31}u_{13}$$

Las ecuaciones para el caso general serían las siguientes:

- $m_{ii} = 1 \quad (i = 1, 2 \dots n)$
- $u_{1i} = a_{1i} \quad (i = 1, 2 \dots n)$
- $m_{ki} = \dfrac{a_{ki} - \sum_{j=1}^{i-1} m_{kj} u_{ji}}{u_{ii}} (k = 2, 3 \dots n).$ Para cada $k : (i = 1, 2 \dots k - 1)$
- $u_{kp} = a_{kp} - \sum_{j=1}^{p-1} m_{kj} u_{jp} (k = 2, 3 \dots n).$ Para cada $k : (p = k, k + 1 \dots n)$

# Esquema

## Métodos iterativos. Método de Jacobi

$$
\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n.
\end{array}
$$

*Despejando* en cada ecuación:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - \cdots - a_{1n}x_n) \\
x_2 &= \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1 - \cdots - a_{2n}x_n) \\
&\vdots \\
x_n &= \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1 - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1})
\end{aligned}
$$

Con lo que el sistema se puede resolver iterativamente.

Término general:

- $a_{ii} \neq 0$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\right)$$

- $a_{ii} = 0$: En este caso sumamos y restamos en la fila $i$ la correspondiente incógnita, $x_i$. De este modo resulta:

$$x_i^{(k+1)} = b_i - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} + x_i^{(k)}$$

- **Condiciones iniciales**: Se pueden escoger aquellas que se consideren más convenientes. Otra posibilidad es tomar $x_j^{(0)} = 0$, esto es, $x_i^{(1)} = b_i / a_{ii}$.
- **Convergencia**: El proceso se itera hasta que se verifique una condición de convergencia, por ejemplo:

$$||\vec{x}^{(p+1)} - \vec{x}^{(p)}|| < \epsilon \quad \text{con } \epsilon > 0,$$

donde $\epsilon$ es el error elegido.

## Método de Jacobi

Ejemplo:

Supongamos que queremos resolver el sistema:

$$\begin{array}{ccccccc} 3x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 8 \\ x_1 & + & 4x_2 & - & x_3 & = & 6 \\ x_1 & - & 3x_2 & + & 6x_3 & = & 13 \end{array}$$

Si no tenemos otros datos, siempre podemos partir de la condición inicial:

$$x_1^{(0)} = \frac{8}{3}; \quad x_2^{(0)} = \frac{3}{2}; \quad x_3^{(0)} = \frac{13}{6}.$$

El método de Jacobi, daría una secuencia de este modo:

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{3}\left(8 - x_3^{(k)} - x_2^{(k)}\right)$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{4}\left(6 + x_3^{(k)} - x_1^{(k)}\right)$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{6}\left(13 + 3x_2^{(k)} - x_1^{(k)}\right)$$

# Método de Jacobi

| $k$ | $x_1^{(k)}$ | $x_2^{(k)}$ | $x_3^{(k)}$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 2,6666670 | 1,5000000 | 2,1666670 |
| 1 | 1,4444440 | 1,3750000 | 2,4722220 |
| 2 | 1,3842590 | 1,7569440 | 2,6134260 |
| 3 | 1,2098770 | 1,8072920 | 2,8144290 |
| 4 | 1,1260930 | 1,9011380 | 2,8686660 |
| 5 | 1,0767320 | 1,9356430 | 2,9295540 |
| 6 | 1,0449340 | 1,9632050 | 2,9550330 |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| 16 | 1,0002630 | 1,9997840 | 2,9997460 |
| 17 | 1,0001570 | 1,9998710 | 2,9998480 |
| 18 | 1,0000940 | 1,9999230 | 2,9999090 |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |

Solución exacta: $x_1 = 1; \quad x_2 = 2; \quad x_3 = 3$

# Método de Gauss-Seidel

EJEMPLO:

Consideremos el sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = 2 \\ x_1 - x_2 & = 1 \end{cases}$$

$$x_1 = 2 - x_2; \quad x_2 = -(1 - x_1) \longrightarrow \begin{cases} x_1^{(k+1)} & = 2 - x_2^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} & = -(1 - x_1^{(k+1)}) \end{cases}$$

En general,

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right)$$

## Método de Gauss-Seidel

EJEMPLO:
Para conocer las ventajas del método de Gauss-Seidel, consideremos el sistema

$$\begin{cases} x_1 & = 1 \\ x_1 + x_2 & = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 & = 3 \end{cases}$$

Este sistema es fácilmente soluble por sustitución.
Su solución analítica es: $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ y $x_3 = 1$.

Apliquemos el método de Jacobi, tomando como solución inicial: $x_1^{(0)} = 1$, $x_2^{(0)} = 2$ y $x_3^{(0)} = 3$

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} &= 1 \\ x_2^{(k+1)} &= 2 - x_1^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} &= 3 - x_1^{(k)} - x_2^{(k)} \end{cases}$$

Se necesitan tres iteraciones: $k = 0, 1, 2$. Con el método de Gauss-Seidel las ecuaciones serían estas:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} &= 1 \\ x_2^{(k+1)} &= 2 - x_1^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} &= 3 - x_1^{(k+1)} - x_2^{(k+1)} \end{cases}$$

Ahora el método converge a la primera.

| | *Jacobi* | | | *G.-S.* | |
|---|---|---|---|---|---|
| $k \rightarrow$ | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 |
| $x_1^{(k)}$ | 1,0 | 1,0 | 1,0 | 1,0 | 1,0 |
| $x_2^{(k)}$ | 2,0 | 1,0 | 1,0 | 2,0 | 1,0 |
| $x_3^{(k)}$ | 3,0 | 0,0 | 1,0 | 3,0 | 1,0 |

## Ejemplo:

Resolveremos el mismo ejemplo con las mismas condiciones iniciales que consideramos con el método de Jacobi. El método de Gauss-Seidel, daría una secuencia de este modo:

$$
\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{3}\left(8 - x_3^{(k)} - x_2^{(k)}\right)\\
x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{4}\left(6 + x_3^{(k)} - x_1^{(k+1)}\right)\\
x_3^{(k+1)} &= \frac{1}{6}\left(13 + 3x_2^{(k+1)} - x_1^{(k+1)}\right)
\end{aligned}
$$

| $k$ | $x_1^{(k)}$ | $x_2^{(k)}$ | $x_3^{(k)}$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 2,6666670 | 1,5000000 | 2,1666670 |
| 1 | 1,4444440 | 1,6805560 | 2,7662040 |
| 2 | 1,1844140 | 1,8954470 | 2,9169880 |
| 3 | 1,0625210 | 1,9636170 | 2,9713880 |
| 4 | 1,0216650 | 1,9874310 | 2,9901040 |
| 5 | 1,0074880 | 1,9956540 | 2,9965790 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 11 | 1,0000130 | 1,9999930 | 2,9999940 |
| 12 | 1,0000040 | 1,9999970 | 2,9998980 |
| 13 | 1,0000010 | 1,9999990 | 2,9999990 |
| 14 | 1,0000000 | 2,0000000 | 3,0000000 |

Jacobi: hacia $k = 18$ se alcanza con precisión $(10^{-4})$ la solución exacta.

Gauss-Seidel: en $k = 14$ converge a la solución analítica $(10^{-7})$.

# Esquema

# Ejercicios

1.- Obténgase, explicando cada uno de los pasos, la descomposición $LU$ de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 0 \\ 12 & 26 & 4 \\ 0 & 9 & 12 \end{pmatrix}.$$

A partir de la descomposición $LU$ obtenida calcúlense el determinante, $\det(A)$, y la inversa, $A^{-1}$, de la matriz A.

2.- Obténgase la descomposición $LU$ de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 12 & 8 & 4 & 10 \\ 3 & -13 & 3 & 3 \\ -6 & 4 & 2 & -18 \end{pmatrix}$$

Explíquense cada uno de los pasos seguidos. A partir de la descomposición $LU$ obtenida calcúlese el determinante de la matriz $A$.

3.- En un *experimento* de tiro parabólico se miden los siguientes valores de alturas $h$ y desplazamientos $x$,

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $h$ | 0,01 | 1,769 | 3,260 | 4,189 | 4,749 |

Sabiendo que los valores medidos son aproximados pero que siguen un modelo parabólico de *tres* parámetros del tipo

$$h = a + bx + cx^2,$$

a) Obténgase el sistema de 3 ecuaciones con tres incógnitas ($a$, $b$ y $c$) al que se llega por medio de un ajuste por mínimos cuadrados.
b) Resuelve el sistema haciendo uso de la técnica de *eliminación gaussiana con pivotación*.
c) Calcula el área subtendida por la curva, $h = a + bx + cx^2$ (el área comprendida entre esta curva y la recta h=0), haciendo uso de una regla de cuadratura exacta para este polinomio.

4.- En la tabla adjunta se indican los índices de refracción, $n$, para diversas longitudes de onda, $\lambda$, (en unidades de $10^{-7}$ m) del cristal de borosilicato. Considérese la *ecuación de Cauchy* del índice de refracción:

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4},$$

donde $A$, $B$ y $C$ son constantes a determinar.
a) Plantea un sistema de ecuaciones para determinar esas constantes a partir de los valores correspondientes a la segunda, cuarta y séptima posiciones de la serie de la tabla. Utilícese el criterio de los mínimos cuadrados.
b) Resuelve el sistema mediante una eliminación gaussiana sin pivotación para obtener $A$, $B$ y $C$.
c) Comprueba la bondad de la aproximación obtenida calculando el error relativo en la predicción del primer, tercer y octavo de la tabla.

| $\lambda$ ($10^{-7}$ m) | $n$ |
|---|---|
| $6,563$ | $1,50883$ |
| $6,439$ | $1,50917$ |
| $5,890$ | $1,51124$ |
| $5,338$ | $1,51386$ |
| $5,086$ | $1,51534$ |
| $4,861$ | $1,51690$ |
| $4,340$ | $1,52136$ |
| $3,988$ | $1,52546$ |

5.- Resuelve iterativamente el siguiente sistema lineal:

$$\begin{aligned} 10x_1 - x_2 + 2x_3 &= 6 \\ -x_1 + 11x_2 - x_3 + 3x_4 &= 25 \\ 2x_1 - x_2 + 10x_3 - x_4 &= -11 \\ 3x_2 - x_3 + 8x_4 &= 15 \end{aligned}$$

a) Utilizando el método de Jacobi hasta la iteración, $k = 6$.
b) Utilizando el método de Gauss-Seidel hasta la iteración, $k = 3$.
Considera en ambos casos la condición inicial, $x_i^{(0)} = 0,0$; $i = 1, \ldots 4$ y cuatro cifras decimales en los cálculos.

6.- Las leyes de Kirchoff para un circuito de corriente continua de varias mallas dan lugar al siguiente sistema de ecuaciones para las intensidades:

$$\begin{aligned} 2\, i_1 - i_2 &= 1 \\ -i_1 + 2\, i_2 - i_3 &= 0 \\ -i_2 + 2\, i_3 - i_4 &= 0 \\ -i_3 + 2\, i_4 &= 1 \end{aligned}$$

a) Hágase la descomposición $LU$ de la matriz de coeficientes.
b) Resuélvase el sistema de ecuaciones.
c) ¿Cuánto vale el determinante de la matriz?

7.- Resuélvase el siguiente sistema matricial,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$$

donde,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

para obtener la matriz $3 \times 3$, $\mathbf{X}$, utilizando una descomposición LU sin pivotación.

8.- Resuélvase el sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 5x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & & & = & 16 \\ x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 11 \\ -x_1 & + & 2x_2 & + & 6x_3 & - & 2x_4 & = & 23 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 4x_4 & = & -2 \end{array}$$

de forma iterativa mediante los *métodos de Jacobi y Gauss-Seidel*. En concreto, constrúyase la tabla de convergencia de la solución con los dos métodos hasta que se satisfaga el criterio de convergencia:

$$||\vec{x}^{(k+1)} - \vec{x}^{(k)}|| < 0{,}10$$

donde $|| \ldots ||$ denota la distancia euclídea entre los puntos considerados.

# Esquema

# Bibliografía


- *Numerical Recipes: the art of scientific computing (FORTRAN Version)*
  Press, W.H. y otros
  Cambridge University Press, 2007
- *Cálculo numérico. Métodos, Aplicaciones.*
  B. Carnahan, y otros
  Ed. Rueda, 1979
- *Análisis Numérico.*
  R.L. Burden and J.Douglas Faires
  Thomson, 2003
- *Introducción a los Métodos Numéricos con Pascal*
  L.V. Atkinson y P.J. Harley
  Addison-Wesley, 1987
- http://www.wolfram.com/mathematica/ (*Mathematica*)