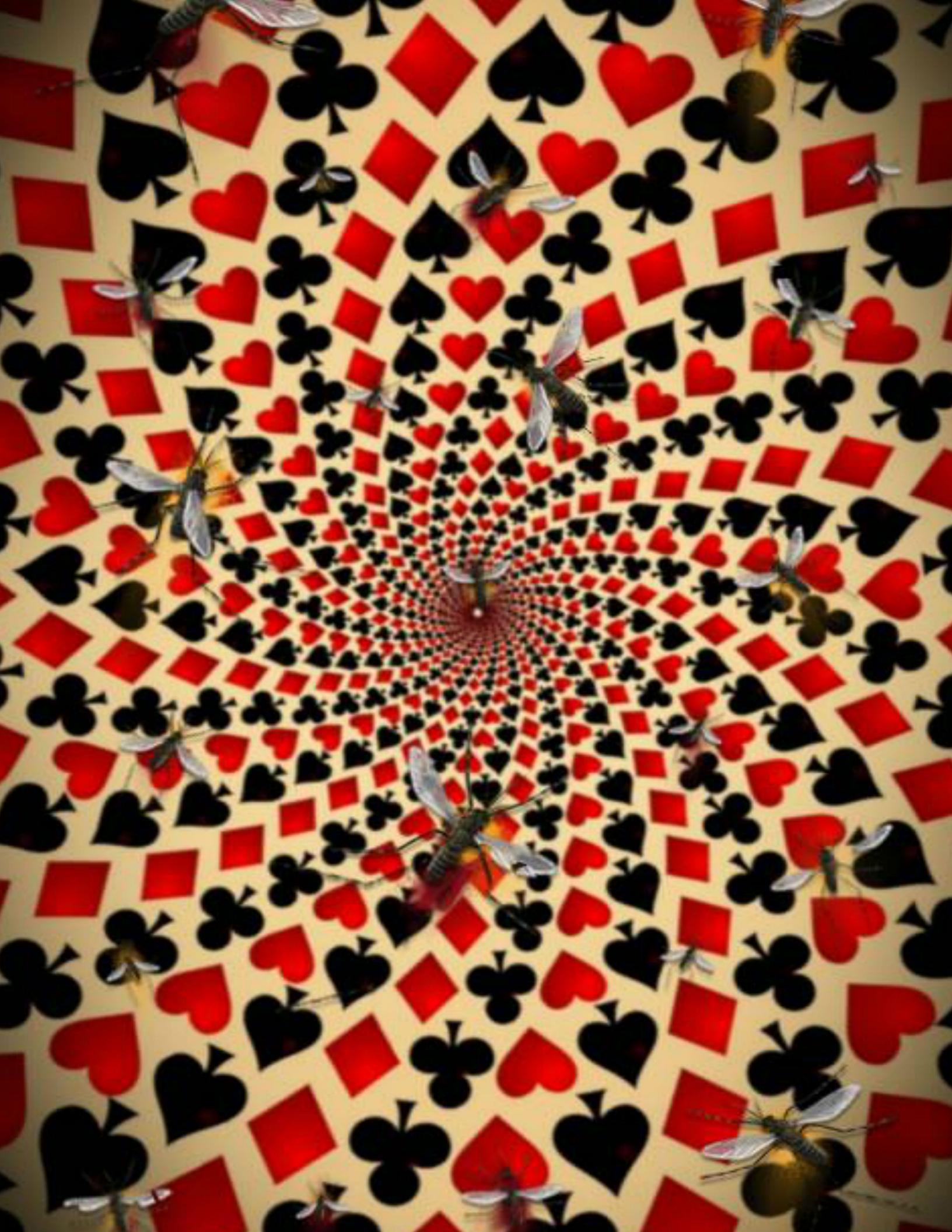


Apuntes de Probabilidad y Estadística

*Acosta Arenas Ana R.
CJC-JPN*



Índice general

1. Tarea 1	13
1.1. Probabilidad	13
1.2. Experimento Determinista	13
1.3. Experimento Aleatorio	14
1.4. Espacios muestrales	14
1.5. Probabilidad Clásica	15
1.6. Probabilidad Geométrica	15
1.7. Probabilidad Frecuentista	15
1.8. Probabilidad Subjetiva	15
1.9. Probabilidad Axiomática	16
2. Tarea 2	17
2.1. Permutaciones	17
2.2. Combinaciones	18
2.3. Generalizar el problema de caminos posibles para el caso de un rectángulo.	19
2.4. Generalizar el problema de caminos posibles para el caso de un cubo.	21
2.5. Pirámide de Pascal.	21
3. Tarea 3	25
3.1. Permutaciones circulares	25
3.2. Números de Catalán	26
3.3. Tensor Levi Civita	27
3.4. Problemas del libro Combinatorix	28
4. Tarea 4	31
4.1. Histogramas	31
4.2. Aproximación de Stirling	32
4.3. Aproximación del $\ln x!$ con Root	32
4.4. Números de Ramanujan	33
4.5. Números grandes	34
5. Tarea 5	35
5.1. Números infinitos	35
5.1.1. Álef 0 \aleph_0	35
5.1.2. Álef 1 \aleph_1	36
5.1.3. Álef 2	37
5.1.4. Álef \aleph_ω	37
5.2. ¿Porqué explotó el Challenger?	38
5.3. Amplitud Modulada	39
5.4. Frecuencia Modulada	39
5.5. Funcionamiento mp3	39

5.6. Simulación de un dado de tres caras	40
6. Tarea 6	43
6.1. Mínimos cuadrados	43
6.1.1. Formulación del problema bidimensional	43
6.2. Densidad de probabilidad	45
6.2.1. Propiedades	46
6.3. Gráficos densidad de Probabilidad	46
6.4. Comando Make	48
7. Tarea 7	49
7.1. Análisis de componentes principales	49
7.2. Ejemplos de Análisis de Componentes Principales	51
7.3. Eigenvalores y Eigenvectores	51
7.3.1. Ejemplos de Eigenvalores y Eigenvectores	51
7.3.2. Vectores propios	51
7.3.3. Cálculo de los valores propios	52
7.3.4. Cálculo de los vectores propios	52
7.3.5. Ejemplos	53
7.4. Ejemplos Mínimos cuadrados.	53
7.5. Distribución T-student	55
8. Tarea 8	57
8.1. Que es la multiplicidad en eigenvectores y eigenvalores.	57
8.2. Que es una matriz singular	58
8.3. Que es la traza de una matriz	59
8.4. Que es la traspuesta de una matriz.	59
8.4.1. Propiedades	60
9. Tarea 9	61
9.1. Teorema de Cayley-Hamilton	61
9.2. Ejemplo de cálculo de eigenvalores y eigenvectores	62
10.Tarea 10	67
10.1. Mínimos cuadrados en R	67
10.1.1. Ejemplo 1	67
10.1.2. Ejemplo 2	68
10.1.3. Ejemplo 3.	68
10.2. Matrices en R	69
10.2.1. Algunas funciones	69
11.Tarea 11	71
11.1. Coeficiente de Correlación de Pearson	71
11.1.1. Ejemplo Cálculo de Coeficiente de Correlación de Pearson	71
12.Tarea 12	75
12.1. Aproximación de $\ln(x)$ por series de Taylor	75
12.2. Aproximación de la Serie de Taylor en R	76

ÍNDICE GENERAL	5
13.Tarea 13	79
13.1. Mínimos cuadrados en Mathematica	79
13.2. BinCounts en Mathematica	80
13.3. Diagramas Box and Whisker	80
13.4. Cadenas de Markov en Mathematica	81
14.Tarea 14	83
14.1. Demostraciones de las Ecuaciones del libro Fundamentals of Statistical and Thermal Physics. F. Reif	83
14.1.1. Ecuación 46	83
14.1.2. Ecuación 54	84
14.1.3. Ecuación 55	84
14.1.4. Ecuación 56	85
14.1.5. Ecuación 57	85
14.1.6. Ecuación 58	86
14.1.7. Ecuación 59	86
14.1.8. Ecuación 60	87
14.1.9. Ecuación 61	87
14.1.10. Ecuación 62	88
15.Tarea 15	89
15.1. Congruencia Zeller	89
16.Tarea 16	91
16.1. Distribución Fermi Dirac	91
16.2. Distribución Bose-Einsten	92
16.3. Distribución Maxwell-Boltzmann	93
16.4. Señal WOW	94
17.Tarea 17	95
17.1. Problema de la Oveja	95
18.Tarea 18	97
18.1. Serie Geométrica	97
18.2. Sumatoria de los primeros n términos de la serie	97
18.3. Ejemplos	99
19.Conclusiones	101
20.Apéndice	103
20.1. Software Empleado	103
20.2. Exposición Análisis de Componentes Principales	103

Índice de cuadros

2.1. Propiedades de los Polinomios y el Triángulo de Pascal	22
11.1. Estaturas y pesos de jugadores.	72
12.1. Cálculo de derivadas	75
12.2. Evaluación de derivadas	76

Índice de figuras

2.1. Cálculo de caminos posibles caso del rectángulo.	19
2.2. Tablero rectangular para el cálculo de caminos posibles.	20
2.3. Triángulo de Pascal para el cálculo de caminos posibles.	20
2.4. Generalización problema de caminos posibles para un cubo.	21
4.1. Ejemplo de Histograma	31
4.2. Comparación de la aproximación del $\ln x!$	33
5.1. Temperaturas del SRB izquierdo	38
5.2. Temperaturas del SRB derecho. Se observa la anomalía en el SRB derecho (NASA).	38
5.3. Onda Modulada AM	39
5.4. Onda Modulada FM.	39
5.5. Simulacion con 10 lanzamientos	40
5.6. Simulacion con 100 lanzamientos	41
5.7. Simulacion con 1000 lanzamientos	41
5.8. Simulacion con 10000 lanzamientos	41
6.1. Densidad de Probabilidad Gausiana $n = 10,000$	47
6.2. Densidad de Probabilidad Gausiana $n = 100,000$	47
6.3. Densidad de Probabilidad Gausiana $n = 1,000,000$	48
6.4. Ejemplo solución de ecuación cuadrática.	48
10.1. Ejemplo 1. Mínimos cuadrados.	67
10.2. Ejemplo 2. Mínimos cuadrados.	68
10.3. Ejemplo 3. Mínimos cuadrados.	69
11.1. Gráfico de las Variables de Estatura y Peso	72
12.1. Aproximación de la función $\ln(x)$ por serie de Taylor	77
13.1. Ejemplo Mínimos Cuadrados en Mathematica.	80
13.2. Ejemplo Bitcounts en Mathematica.	80
13.3. Diagrama Box and Whiskers	81
13.4. Ejemplo Cadena de Markov en Mathematica	82
15.1. Ejemplo 1 del cálculo de la congruencia de Zeller	90
15.2. Ejemplo 2 del cálculo de la congruencia de Zeller	90
17.1. Problema de la oveja.	95

Introducción

En la vida cotidiana aparecen muchas situaciones en las que los resultados observados son diferentes aunque las condiciones iniciales en las que se produce la experiencia sean las mismas. Por ejemplo, al lanzar una moneda unas veces resultará cara y otras cruz. Estos fenómenos, denominados aleatorios, se ven afectados por la incertidumbre.

La teoría de la probabilidad pretende ser una herramienta para modelizar y tratar con situaciones de este tipo. Por otra parte, cuando aplicamos las técnicas estadísticas a la recogida, análisis e interpretación de los datos, la teoría de la probabilidad proporciona una base para evaluar la fiabilidad de las conclusiones alcanzadas y las inferencias realizadas. Debido al importante papel desempeñado por la probabilidad dentro de la estadística, es necesario familiarizarse con sus elementos básicos, lo que constituye el objetivo de los siguientes temas.

El presente trabajo está distribuido en 18 capítulos que corresponden a las tareas e investigaciones realizadas durante el semestre.

Capítulo 1

Tareal

1.1. Probabilidad

La probabilidad es un método por el cual se obtiene la frecuencia de un acontecimiento determinado mediante la realización de un experimento aleatorio, del que se conocen todos los resultados posibles, bajo condiciones suficientemente estables. Es un evento o suceso que puede ser improbable, probable o seguro.

1.2. Experimento Determinista

Es un fenómeno o acción que conducen a un resultado seguro o determinado, por lo tanto, en este tipo de experimentos podemos predecir el resultado que se obtendrá partiendo de las mismas condiciones iniciales. A continuación se muestran algunos ejemplos:

1. Marcar el número 36033540
2. Tomar un taxi a la universidad
3. Dejar caer una piedra de la ventana
4. Aventar una piedra hacia arriba
5. Calcular la hipotenusa de un triángulo rectángulo
6. Sumar la edad de una familia
7. Calcular el $\sin(x)$
8. Calcular la temperatura del agua
9. Calcular el número de segundos al mes
10. La mezcla de dos sustancias conocidas

1.3. Experimento Aleatorio

Es cualquier proceso o acción del cual no se tiene certeza de su resultado final.

En idénticas condiciones de ejecutarse, no siempre se obtiene el mismo resultado, y por otra parte, no se puede determinar cuál será el resultado particular en un experimento dado, pero si describir todos los resultados posibles.

1.4. Espacios muestrales

Un espacio muestral es un conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio. Estos resultados posibles también son conocidos como puntos muestrales. A continuación se muestran algunos ejemplos de experimentos aleatorios y sus espacios muestrales:

1. Lanzar un dado 1 vez.

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

2. Lanzar una moneda 1 vez.

$$A = \{A, S\}$$

3. Lanzar una moneda 10 veces y saber cuántas veces sale sol.

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

4. Sacar el Rey de Diamantes de una baraja.

$$A = \{52 \text{ cartas}\}$$

5. Analizar la vida en horas de duración de un foco.

$$A = \{0, 1, 2, \dots, N\}$$

6. El nacimiento de un bebé

$$A = \{\text{nino}, \text{nina}\}$$

7. Contar el número de accidentes automovilísticos que ocurren en 1 mes

$$A = \{0, 1, 2, \dots, N\}$$

8. Lanzar un dado y revisar si el resultado es par o impar

$$A = \{\text{par}, \text{impar}\}$$

9. Espacio de ciudades con poblaciones más grandes que un millón.

$$A = \{x/x \text{ es una ciudad con población mas de 1 millón}\}$$

10. Contar la concentración de gases contaminantes en un mes.

$$A = \{0, 1, 2, \dots, N\}$$

1.5. Probabilidad Clásica

La probabilidad clásica de un evento es la razón entre el número de casos favorables y el número total de casos posibles, siempre y cuando todos los elementos del espacio muestral tengan las mismas posibilidades de ocurrir.

Esta definición es para las situaciones que tienen resultados igualmente probables, como son los juegos de azar tales como el tiro de monedas, tiro de dados, cartas, etc.

Si un espacio muestral S consta de n eventos elementales, igualmente probables y A es un evento formado por m de estos eventos elementales, la probabilidad clásica de un evento A se define como:

$$P(A) = \frac{\text{Número de Resultados Favorables de } A}{\text{Número Total de Resultados Favorables}} = \frac{m}{n}.$$

1.6. Probabilidad Geométrica

La probabilidad geométrica describe la posibilidad de que un punto está en una parte de un segmento de n o en una parte de una región. Se define la probabilidad geométrica como:

$$P(A) = \frac{\text{Longitud}(A)}{\text{Longitud}(S)}.$$

La definición también puede ser escrita en términos de Área o volumen.

1.7. Probabilidad Frecuentista

Se entiende por probabilidad frecuentista que por cuantas más veces se repita el experimento, al final las posibilidades de que ocurra cada uno de los sucesos ser más regular. Aunque cualquier comportamiento sea aleatorio, por proceso empírico llegaremos a una regularidad. Es cuando se lanza un dado y suponiendo cuantas veces cae el número que se seleccionó.

La estadística que estamos acostumbrados a utilizar es la estadística frecuentista, que es la que se desarrolla a partir de los conceptos de probabilidad y que se centra en el cálculo de probabilidades y los contrastes de hipótesis

Utilizando la fórmula del límite cuando N tiende a infinito de $\frac{n}{N}$ y nos da la probabilidad del suceso $P(S)$, o más gráficamente:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n}{N} = P(S).$$

Por tanto, la forma de calcular la probabilidad es usar la frecuencia relativa, ya que si se trata de un experimento aleatorio en el cual se repite muchas veces, la frecuencia relativa se acercara mucho a la probabilidad del suceso $P(S)$.

1.8. Probabilidad Subjetiva

Se refiere a la probabilidad de ocurrencia de un suceso basado en la experiencia previa, la opinión personal o la intuición del individuo. En este caso después de estudiar la información disponible, se asigna un valor de probabilidad a los sucesos basado en el grado de creencia de que el suceso pueda

ocurrir.

1.9. Probabilidad Axiomática

Si hacemos un determinado experimento, que tiene un espacio muestral S , definimos la probabilidad como una función que asocia a cada suceso A una determinada probabilidad, $P(A)$, que cumple las siguientes propiedades:

1. Axioma 1

$$P(A) \geq 0.$$

2. Axioma 2

$$P(S) = 1.$$

3. Axioma 3

Si E_1, E_2, \dots son eventos mutuamente excluyentes (incompatibles dos a dos), entonces:

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \dots) = \sum P(E_i).$$

Capítulo 2

Tarea 2

2.1. Permutaciones

En matemáticas, una permutación es la variación del orden o de la disposición de los elementos de un conjunto. Ejemplos:

1. ¿De cuántas formas pueden colocarse 7 libros en un librero?.

$${}_7P_7 = 7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040.$$

2. Si tres libros determinados deben estar juntos?

Los tres libros pueden considerarse como un solo libro entonces se tienen $1 + 4 = 5$ libros, que pueden ordenarse en ${}_5P_5 = 5!$ formas. En todos estos tres casos los tres libros están juntos pero a su vez se pueden ordenar en ${}_3P_3 = 3!$. Entonces:

$$({}_5P_5)({}_3P_3) = 5!3! = (120)(6) = 720$$

3. Si dos libros determinados deben ocupar los extremos? Los 5 libros restantes se pueden ordenar en $5!$ formas diferentes y los libros que están en los extremos se pueden ordenar en $2!$ entre ellos. Entonces

$$({}_2P_2)({}_5P_5) = 2!5! = (2)(120) = 240.$$

4. Se quieren sentar cinco hombres y 4 mujeres en una fila de modo que las mujeres ocupen los sitios pares. ¿De cuántas formas pueden sentarse?

Hombres= ${}_5P_5$ Mujeres= ${}_4P_4$

$$({}_5P_5)({}_4P_4) = 5!4! = (120)(24) = 2880.$$

5. Determinar el numero de permutaciones de las letras a,b y c tomadas de dos en dos

$${}_3P_2 = \frac{3!}{(3-2)!} = (3)(2)(1) = 6$$

6. De A a B hay 8 caminos y de B a C hay 6 caminos. ¿De cuántas maneras se puede ir de A a C pasando por B?

$${}_8P_1 = \frac{8!}{(8-1)!} = 8$$

$${}_6P_1 = \frac{6!}{(6-1)!} = 6$$

$$({}_8P_1)({}_6P_1) = (8)(6) = 48$$

7. Se ordenan en una fila 5 bolas verdes, 3 bolas blancas y dos anaranjadas. Si las bolas de igual color no se distinguen entre sí. ¿De cuántas formas posibles pueden ordenarse?

$$n_1 = 5, n_2 = 3, n_3 = 2, n = 10$$

$$P = \frac{10!}{5!3!2!} = \frac{(10)(9)(8)(7)(6)}{(3)(2)(1)(1)} = 2520$$

8. ¿En cuántas formas pueden tres banderas rojas, dos azules y una amarilla elevarse en una asta para que den diferentes señales?

$$n_1 = 3, n_2 = 3, n_3 = 2, n = 6$$

$$P = \frac{6!}{3!(3!)} = \frac{(6)(5)(4)}{(2)(1)} = 60$$

9. Determinar del conjunto $A = \{a, b, c\}$ las permutaciones tomadas de dos en dos sin sustitución.

$$n = 3, r = 2$$

$${}_3P_2 = \frac{3!}{(3-2)!} = (3)(2)(1) = 6 = \{ab, ac, bc, ba, ca, cb\}$$

10. Determinar del conjunto $A = \{a, b, c\}$ las permutaciones tomadas de dos en dos con sustitución.

Número de opciones $n = 3$

Decisiones secuenciales $r = 2$

$$3^2 = 9 = \{ab, ac, bc, ba, ca, cd, aa, bb, cc\}$$

2.2. Combinaciones

Las combinaciones son aquellas formas de agrupar los elementos de un conjunto teniendo en cuenta que: no influye el orden en que se colocan.

1. Seleccionar dos platos de verduras de un menú en el que hay cinco opciones.

$${}_5C_2 = \frac{5!}{2!3!} = \frac{(5)(4)}{2} = 10.$$

2. Determinar el número de combinaciones de las letras a, b y c tomadas de dos en dos.

$${}_3C_2 = \frac{3!}{2!1!} = 3.$$

3. Un equipo de basquetbol consta de 12 jugadores. Para iniciar un partido se necesitan 5 jugadores. Si no importan las posiciones en que se acostumbra ubicar a cada jugador. ¿Cuántos equipos de basquetbol de 5 jugadores se podrían formar?

$${}_{12}C_5 = \frac{12!}{5!(12-5)!}.$$

4. En un senado hay 20 demócratas y 10 republicanos. Se va a elegir una junta de 5 senadores. ¿De cuantas maneras puede hacerse?

$${}_{30}C_5 = \frac{30!}{5!(30-5)!} = 142506.$$

2.3. GENERALIZAR EL PROBLEMA DE CAMINOS POSIBLES PARA EL CASO DE UN RECTÁNGULO.19

5. ¿De cuantas maneras si tiene que haber dos demócratas y tres republicanos puede hacerse?.

$${}_{20}C_3 \cdot {}_{10}C_2 = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} = 51300.$$

6. De cuantas maneras si todos han de ser del mismo partido?.

$${}_{20}C_5 + {}_{10}C_5 = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 15756.$$

7. Un estudiante tiene que resolver 10 preguntas de 13 en un examen de derecho. Cuántas maneras de escoger tiene?.

$${}_{13}C_{10} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 286.$$

8. ¿Cuántas posibilidades tiene de escoger si las dos primeras son obligatorias?.

$${}_{11}C_8 = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 165.$$

9. ¿Cuántas posibilidades tiene de escoger si una de las primeras es obligatoria?.

$${}_{11}C_9 = 2 \frac{11!}{9!2!} = \frac{11 \cdot 10}{2 \cdot 1} = 110.$$

10. Dos estudiantes que participan en un Congreso de Medicina han de dividirse en tres grupos, que contienen seis cuatro y dos estudiantes respectivamente. ¿En cuántas formas puede realizarse esto?. El grupo de seis puede elegirse en ${}_{12}C_6$ formas. El grupo de cuatro puede elegirse del de seis en ${}_6C_4$ formas. Los dos restantes forman el tercer grupo por lo que

$$({}_{12}C_6)({}_6C_4)(1) = \frac{12!}{6!6!} \cdot \frac{6!}{4!2!} = \frac{12!}{6!4!2!} = 13860.$$

2.3. Generalizar el problema de caminos posibles para el caso de un rectángulo.

Se requiere generalizar el problema de caminos posibles de A a B para el caso de un rectángulo como en el de la figura 2.1



Figura 2.1: Cálculo de caminos posibles caso del rectángulo.

Para la imagen anterior, la disposición que asume un tablero rectangular al utilizar combinaciones es el de la 2.2.

B			
${}_2C_1$	${}_3C_1$	${}_4C_1$	${}_5C_1$
${}_3C_2$	${}_4C_2$	${}_5C_2$	${}_6C_2$

A

Figura 2.2: Tablero rectangular para el cálculo de caminos posibles.

El total de caminos posibles que van de A a B de, longitud $2 + 4$, en este caso son

$${}_6C_2 = (2 + 4)C_2(K = 6, n = 2)$$

Las dimensiones de este tablero son $k - n, n$. Así el cálculo para el total de caminos posibles es:

$$\frac{[(k - n) + n!]}{(k - n)!n!}$$

Para el ejemplo:

$$N \frac{(4 + 2)!}{4!2!} = \frac{6!}{4!2!} = 15$$

Por otra parte, una de las propiedades interesantes del triángulo de Pascal, como el que se describe en la figura, siguiente:

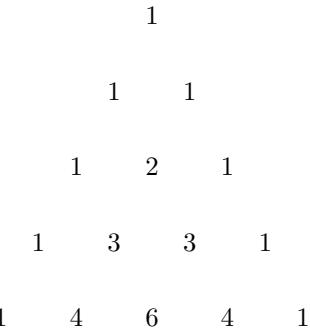


Figura 2.3: Triángulo de Pascal para el cálculo de caminos posibles.

Es posible calcular el total de caminos en tableros cuadrados, de acuerdo a la fórmula [1]:

$$2_m C_m = \sum_{k=0}^{k=n} ({}_m C_R)^2.$$

Los cálculos obtenidos para algunos casos particulares, son los siguientes que corresponden a los coeficientes del triángulo de Pascal previamente descrito.

$$\begin{aligned}
 2C_1 &= 1^2 + 1^2 \\
 4C_2 &= 1^2 + 2^2 + 1^2 \\
 6C_3 &= 1^2 + 3^2 + 3^2 + 1^2 \\
 6C_3 &= 1^2 + 4^2 + 6^2 + 4^2 + 1^2.
 \end{aligned}$$

2.4. Generalizar el problema de caminos posibles para el caso de un cubo.

Generalizando un espacio de tres dimensiones, si se trata de un arreglo cúbico de $k \times k \times k$ dimensiones, como el de la figura siguiente:

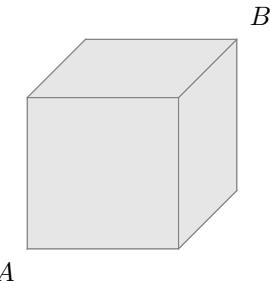


Figura 2.4: Generalización problema de caminos posibles para un cubo.

Tendremos que el total de caminos posibles (de menor longitud) para ir de un extremo A al extremo B más alejado es :

$$N = \frac{(3kl!)}{(k!)^3}.$$

2.5. Pirámide de Pascal.

En matemáticas, la pirámide de Pascal es un arreglo tridimensional de los números trinomio , que son los coeficientes de la expansión trinomial y la distribución trinomial. La Pirámide de Pascal es el análogo tridimensional del triángulo de dos dimensiones de Pascal , que contiene los números binomiales y se relaciona con la expansión binomial y la distribución binomial. Los números binomiales y trinomio, coeficientes, expansiones, y las distribuciones son subconjuntos de las construcciones multinomiales con los mismos nombres. La Pirámide de Pascal se llama precisamente "tetraedro de Pascal ", ya que cuenta con cuatro superficies triangulares.

Propiedades:

1. Hay tres vías de simetría de los números en cada capa. El número de términos en la capa n-ésimo es el número triangular n-ésimo $(n + 1)\frac{(n+2)}{2}$
2. La suma de los valores de los números en la capa n-ésimo es 3^n .
3. Cada número en cualquier capa es la suma de los tres números adyacentes en la capa de arriba.
4. Cada número en cualquier capa es una sencilla relación de número entero de los números adyacentes en la misma capa .

5. Cada número en cualquier capa es un coeficiente de la Distribución trinomial y la expansión trinomial .
6. Los números a lo largo de los tres bordes de la capa n-ésimo son los números de la línea n-ésima del triángulo de Pascal .

Casi todas las propiedades mencionadas anteriormente tienen paralelismos con el triángulo de Pascal y coeficientes multinomiales.

Tipo de Polinomio	Binomio	Trinomio	Multinomio
Orden del Polinomio	2	3	m
Ejemplo de polinomio	$A + B$	$A + B + C$	$A + B + C + \dots + M$
Estructura Geométrica	línea	capa	grupo
Simetria de elementos	2-way	3-way	m-way
Num. term. x elemento	$n + 1$	$(n + 1)^{\frac{(n+2)}{2}}$	$(n + 1)(n + 2) \dots \frac{(n+m+1)}{(m-1)}$
Suma de valores por elemento	2^n	3^n	m^n
Ejemplo de término	$A^x B^y$	$A^x B^y C^z$	$A^x B^y C^z \dots M^m$
Suma de exponentes , all terms	n	n	n
Coeficientes	$\frac{n!}{(x!y!)} \quad \frac{n!}{(x!y!z!)}$	$\frac{n!}{(x_1!x_2!x_3!\dots x_n!)}$	
Suma de coeficientes superiores	2	3	m
Radio de coeficientes adyacentes	2	6	$m(m - 1)$

Cuadro 2.1: Propiedades de los Polinomios y el Triángulo de Pascal

Otras propiedades :

Arbitrariamente cada capa n puede obtenerse en un solo paso utilizando la fórmula siguiente:

$$(b^{d(n+1)} + b^d + 1)^n,$$

donde b es el radio y d es el número de dígitos de cualquiera de los coeficientes multinomiales centrales que es:

$$d = 1 + [\log_b \left(\binom{n}{k_1, k_2, k_3} \right)], \sum_{i=1}^3 k_i = n, \left[\frac{n}{3} \right] \leq k_i \leq \left[\frac{n}{3} \right].$$

Luego dividir los dígitos de su resultado en $d(n+1)$ separados por d y eliminando los ceros iniciales. Este método generaliza a una dimensión arbitraria y es usado para obtener cortes de cualquier Complejo de Pascal

Sumando los números en cada fila de una capa n de la pirámide de Pascal da:

$$(b^d + 2)^n,$$

donde b es el radio y d es el número de dígitos de la suma de la fila central (la que tiene la suma mayor). Sumando los números en cada columna de una capa n de la pirámide de Pascal da:

$$(b^{2d} + b^d + 1)^n,$$

donde b es el radio y d es el número de dígitos de la suma de la columna central (la que tiene la suma mayor). [5]

Capítulo 3

Tarea 3

3.1. Permutaciones circulares

Las permutaciones circulares son un caso particular de las permutaciones. Se utilizan cuando los elementos se han de ordenar en círculo (por ejemplo, los comensales en una mesa), de modo que el primer elemento que se situe en la muestra determina el principio y el final de muestra.

1. Calcular las permutaciones circulares de 7 elementos.

$$PC_7 = (7 - 1)! = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$$

2. ¿De cuántas formas distintas pueden sentarse ocho personas alrededor de una mesa redonda?

$$PC_8 = (8 - 1)! = 7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$$

3. ¿Qué pasa si un asiento es azul y si importa quién se sienta en él?

$$PC = 8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40320$$

4. Se tienen 5 puntos sobre una circunferencia, ¿Cuántas cuerdas se pueden determinar?

$$PC_5 = (5 - 1)! = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

5. ¿De cuántas formas se pueden sentar 3 parejas de casados alrededor de una mesa circular, si no debe haber dos mujeres juntas ni dos hombres juntos?

$$PC = 2! \times 3! = 2 \cdot 6 = 12$$

6. ¿En cuántas formas pueden 6 niños formar un anillo?

$$PC_6 = (6 - 1)! = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

7. ¿De cuántas formas se pueden sentar cinco personas $\{A, B, C, D\}$ alrededor de una mesa circular, si A y B siempre se deben sentar juntos?

$$PC = 2! \times (4 - 1)! = 2 \times 3! = 12$$

8. ¿De cuántas maneras se pueden sentar si C y D no se deben sentar juntos?

$$PC = (5 - 1)! - (2 \times 3!) = 24 - 12 = 12$$

9. ¿En cuántas formas tres niños y tres niñas pueden sentarse en una mesa?

$$PC_6 = (6 - 1) = 5! = 120$$

10. ¿De cuántas maneras se pueden colocar 5 macetas en una mesa redonda?

$$PC_5 = (5 - 1)! = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

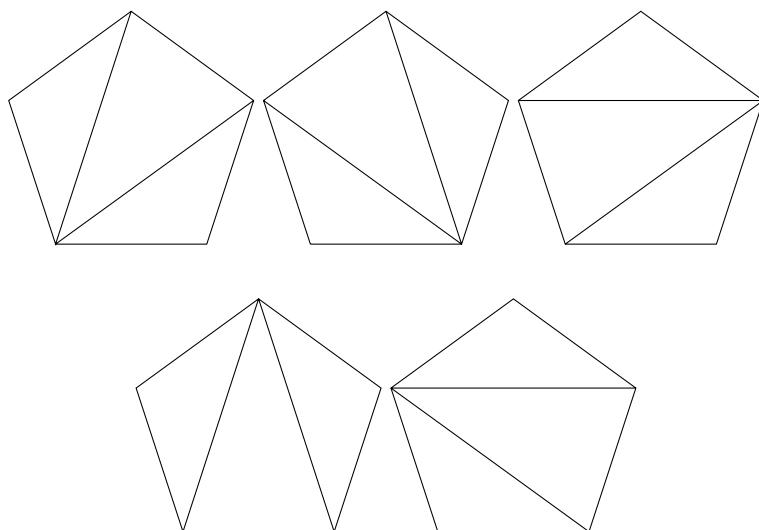
3.2. Números de Catalán

Estos números, los cuales son la solución de varios problemas en diferentes áreas de las matemáticas, deben su nombre al matemático Belga Eugéne Charles Catalan, (1814-1894), quien los descubrió en 1838 . Aunque éstos números fueron nombrados en honor a Catalan, ya se conocían antes de él; alrededor de 1751 Leonhard Euler, (1707-1783), los descubrió mientras estudiaba el problema de la triangulación de polígonos convexos, sin embargo de acuerdo a un artículo de 1988 escrito por el matemático chino J. J. Luo, éstos números ya eran conocidos por el matemático chino Antu Ming.

Una de las diferentes formas de definir los números de catalán es la siguiente:

$$C_n = \frac{n + 1!}{(n + 1)n!} = \frac{1}{n + 1} \left(\frac{2n}{n} \right), n \leq 0$$

Una triangulación de un polígono es una manera de descomponerlo como una unión disjunta de triángulos, cuyos vértices coinciden con los del polígono. Es fácil ver que para triangular un polígono con $n + 2$ vértices se necesitan exactamente n triángulos (y viceversa). Por ejemplo, en la Figura 1 ilustramos las cinco triangulaciones de un pentágono, cada una de ellas construida utilizando exactamente tres triángulos.



Hay varias maneras en que los números de Catalán pueden ser leídos del triángulo de Pascal. La manera más obvia para calcular C_n es usando la fórmula explícita descrita anteriormente pero existe otra forma.

Esta es dividiendo el coeficiente central binomial por la mitad del número del renglón más uno, es decir por $n + 1$.

Ejemplo

$$\frac{1}{2} \binom{2}{1} = 1$$

$$\frac{1}{3} \binom{4}{2} = 2$$

$$\frac{1}{4} \binom{6}{3} = 5$$

$$\frac{1}{5} \binom{8}{4} = 14$$

Otra forma de calcular los coeficientes.

Dado que

$$C_n = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!} = \frac{1}{n} \binom{2n}{n-1}.$$

C_n , puede también ser calculado dividiendo el término inmediatamente a la izquierda o a la derecha del coeficiente central binomial por la mitad del número de renglón. [?]

Finalmente C_n puede ser calculado restando al coeficiente central binomial el número inmediato a su izquierda o a su derecha.

$$C_n = \binom{2n}{n-1}.$$

3.3. Tensor Levi Civita

En 3 dimensiones, se define el tensor de Levi - Civita, ϵ_{ijk} totalmente antisimétrico, por lo que tenemos un signo menos bajo cada intercambio de cualquier par de índices tal como sigue:

$$\epsilon_{212} = -\epsilon_{212}$$

Tal que se cumple que:

$$\begin{aligned} \epsilon_{123} &= \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = +1 \\ \epsilon_{132} &= \epsilon_{213} = \epsilon_{321} = -1 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Todas las demás componentes son cero. Utilizando la expresión del tensor de Levi Civita ϵ_{ijk} La expresión del producto cruz se define de acuerdo a la siguiente expresión:

$$[a \times b] = \epsilon_{ijk} a_j b_k. \quad (3.2)$$

Escribiendo las sumas de cada componente tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
 [a \times b]_1 &= \epsilon_{1jk} a_j b_k \\
 &= \epsilon_{111} a_1 b_1 + \epsilon_{112} a_1 b_2 + \epsilon_{113} a_1 b_3 + \epsilon_{121} a_2 b_1 + \epsilon_{122} a_2 b_2 + \epsilon_{123} a_2 b_3 + \epsilon_{131} a_3 b_1 + \epsilon_{132} a_3 b_2 + \epsilon_{133} a_3 b_3 \\
 &= \epsilon_{123} a_2 b_3 + \epsilon_{132} a_3 b_2 \\
 &= a_2 b_3 - a_3 b_2.
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}
 [a \times b]_2 &= \epsilon_{2jk} a_j b_k \\
 &= \epsilon_{211} a_1 b_1 + \epsilon_{212} a_1 b_2 + \epsilon_{213} a_1 b_3 + \epsilon_{221} a_2 b_1 + \epsilon_{222} a_2 b_2 + \epsilon_{223} a_2 b_3 + \epsilon_{231} a_3 b_1 + \epsilon_{232} a_3 b_2 + \epsilon_{233} a_3 b_3 \\
 &= \epsilon_{231} a_3 b_1 + \epsilon_{213} a_1 b_3 \\
 &= a_3 b_1 - a_1 b_3
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}
 [a \times b]_3 &= \epsilon_{3jk} a_j b_k \\
 &= \epsilon_{311} a_1 b_1 + \epsilon_{312} a_1 b_2 + \epsilon_{313} a_1 b_3 + \epsilon_{321} a_2 b_1 + \epsilon_{322} a_2 b_2 + \epsilon_{323} a_2 b_3 + \epsilon_{331} a_3 b_1 + \epsilon_{332} a_3 b_2 + \epsilon_{333} a_3 b_3 \\
 &= \epsilon_{312} a_1 b_2 + \epsilon_{321} a_2 b_1 \\
 &= a_1 b_2 - a_2 b_1
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

3.4. Problemas del libro Combinatorix

- 1.6 A palindrome is a finite sequence of characters that reads the same forwards and backwards. Find the numbers of 7-digit and 8-digit palindromes, under the restriction that no digit may appear more than twice.

By the mirror-symmetry of a palindrome (of length n , only the first $[(n+1)/2]$ positions need be considered. In our case this number is 4 for both lengths. Since the first digit may not be 0, there are 9 ways to fill the first position. There are then $10 - 1 = 9$ ways to fill the second position; $10 - 2 = 8$ ways for the third; $10 - 3 = 7$ ways for the fourth.

Thus there are $(9)(9)(8)(7) = 4536$ palindromic numbers of either length.

- 1.7 Prove that a palindromic (decimal) number of even length is divisible by 11.

The inductive proof exploits the fact that when the first and last characters are stripped from a palindrome, a palindrome remains. Thus, let N be a palindromic number of length $2k$. If $k = 1$, the theorem obviously holds. If $k \geq 2$ we have:

$$\begin{aligned}
 N &= a_{2k-1} 10^{2k-1} + a_{2k-2} 10^{2k-2} + \dots + a_k 10^k + a_k 10^{k-1} + \dots + a_{2k-2} 10^1 + a_{2k-1} 10^0 \\
 &= a_{2k-1} (10^{k-1} + 10^0) + (a_{2k-2} 10^{2k-2} + \dots + a_{2k-2} 10^1) \\
 &= a_{2k-1} P + Q
 \end{aligned}$$

Here,

$$P = \underbrace{100\dots001}_{\text{length } 2k} = 11 \times \underbrace{9090\dots9091}_{\text{length } 2k-2}$$

And either $Q = 0$ (divisible by 11) or, for some $1 \leq r \leq k - 1$

$$Q = 10' \{ \text{palindrome of length } (1k - r) \} = 10' \{ 11R \}$$

where the last step follows from the induction hypothesis. Therefore, N is divisible by 11, and the proof is complete.

- 1.8 In a binary palindrome the first digit is 1 and each succeeding digit may be 0 or 1. Count the binary palindromes of length n .

According with the Problem 1.6. Here we have $[(n + 1)/2] - 1 = [(n - 1)/2]$ free positions, so the desired number is

$$2^{(\frac{n-1}{2})}$$

Capítulo 4

Tarea 4

4.1. Histogramas

Es una representación gráfica de una variable en forma de barras, como en la Figura 4.1, donde la superficie de cada barra es proporcional a la frecuencia de los valores representados, ya sea en forma diferencial o acumulada. Sirven para obtener una primera vista general, o panorama, de la distribución de la población, o la muestra, respecto a una característica, cuantitativa.

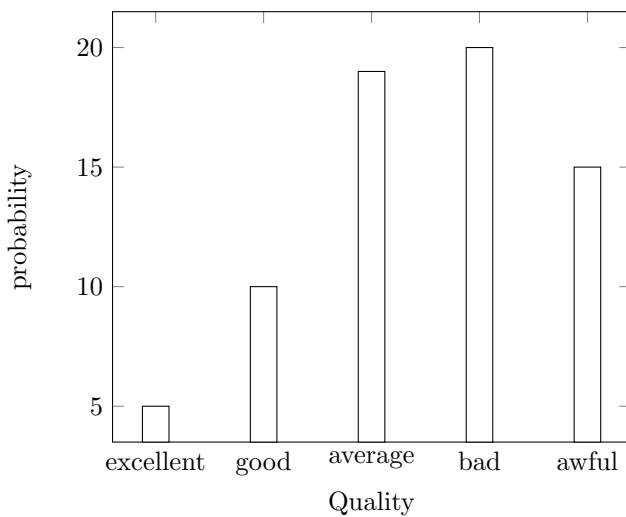


Figura 4.1: Ejemplo de Histograma

4.2. Aproximación de Stirling

Es una aproximación para factoriales grandes. Lleva el nombre en honor al matemático escocés del siglo XVIII James Stirling. La aproximación se expresa como sigue:

$$\ln n! \approx n \ln n - n,$$

para n suficientemente grande, donde \ln es el logaritmo natural.

La fórmula de Stirling está dada por:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1,$$

que se reescribe frecuentemente como:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

o bien:

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3} + \frac{1}{1260n^5} - \frac{1}{1680n^7} + \dots}$$

donde el último término del producto tiende a 1 cuando n tiende a infinito.

Desarrollando este último término también se puede reescribir la fórmula como:

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \frac{139}{51840n^3} - \frac{571}{2488320n^4} + \dots\right).$$

Una acotación de la fórmula es:

$$\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{1}{12n+1}} < n! < \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{1}{12n}}.$$

Ejemplo:

$$29! = 8841761993739701954543616000000.$$

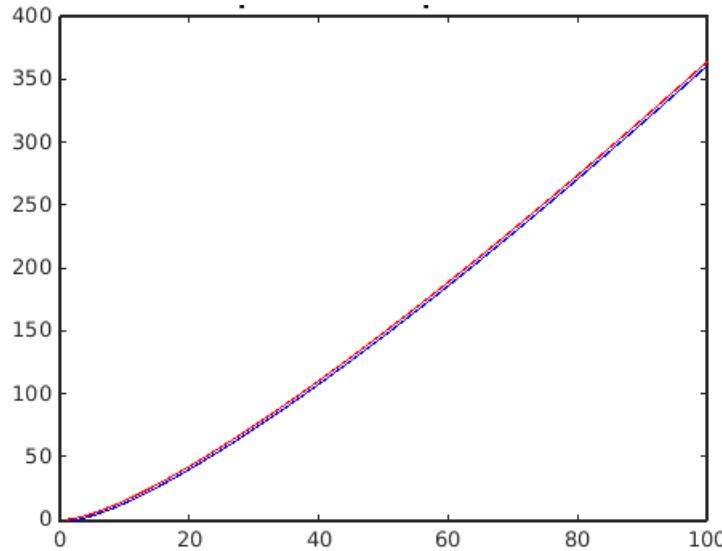
$$e^{\frac{1}{12 \cdot 29 + 1}} = 1,002869438\dots$$

$$e^{\frac{1}{12 \cdot 29}} = 1,002877696\dots$$

$$29! = \sqrt{2\pi \cdot 29} \left(\frac{29}{e}\right)^{29} 1,002877577\dots$$

4.3. Aproximación del $\ln x!$ con Root

En la Figura 4.2 se observa la comparación del $\ln x!$ representada con la curva color rojo y la curva de la aproximación $x \ln(x) - x$ azul mediante el software Root.

Figura 4.2: Comparación de la aproximación del $\ln x!$

4.4. Números de Ramanujan

Ramanujan ha aportado la siguiente fórmula:

$$1 + \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} + \cdots + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{2}{1 + \frac{3}{1 + \frac{4}{1 + \cdots}}}}} = \sqrt{\frac{e \cdot \pi}{2}}.$$

Se trata de una especie de obra de arte matemática donde se conecta una serie matemática infinita y una fracción continua para aportar así una relación entre dos célebres constantes de matemáticas.

Una segunda fórmula, demostrada en 1985 por Jonathan y Peter Borwein, es la que descubrió él en 1910 :

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4k)!(1103 + 26390k)}{(k!)^4 396^{4k}}.$$

Es muy eficaz porque ella aporta 8 decimales a cada iteración.

Se denomina número de Hardy-Ramanujan a todo entero natural que se puede expresar como la suma de dos cubos de dos maneras diferentes.

El 1729 es el llamado número de Hardy-Ramanujan es el número natural más pequeño que puede ser expresado como la suma de dos cubos positivos de dos formas diferentes:

$$1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3.$$

Otros números que poseen esta propiedad habían sido descubiertos por el matemático francés Bernard Frénicle

$$\begin{aligned} 2^3 + 16^3 &= 9^3 + 15^3 = 4104 \\ 10^3 + 27^3 &= 19^3 + 24^3 = 20683 \\ 2^3 + 34^3 &= 15^3 + 33^3 = 39312 \\ 9^3 + 34^3 &= 16^3 + 33^3 = 40033 \end{aligned}$$

El más pequeño de los números descomponibles de dos maneras diferentes en suma de dos potencias a la cuarta es 635 318 657, y fue descubierto por Euler :

$$158^4 + 59^4 = 133^4 + 134^4 = 635318657.$$

4.5. Números grandes

Un gúgol es aproximadamente igual al factorial de 70, y sus únicos factores primos son 2 y 5 (cien veces cada uno). Escrito en el sistema binario ocupa 333 bits.

$$1 \text{ gugol} = 10^{100}.$$

Un gúgolplex (googolplex en inglés) es un uno seguido de un gúgol de ceros, esto es, 10 elevado a la gugol-ésima potencia

$$1 \text{ gugolplex} = 10^{10^{100}}.$$

De la misma forma que el gúgolplex es un uno seguido de gúgol ceros, el gúgolduplex (googolduplex en inglés) es un uno seguido de gúgolplex ceros. Es decir:

$$1 \text{ gugolduplex} = 10^{10^{10^{100}}}.$$

Capítulo 5

Tarea 5

5.1. Números infinitos

Álef (\aleph) es un signo empleado para referirse a ciertos números transfinitos que de hecho resultan ser números ordinales iniciales y por tanto números cardinales.

Georg Cantor, que inauguró la teoría de conjuntos, demostró que existían diferentes tipos de infinitos incommensurables entre sí, y por tanto no todos los conjuntos infinitos eran equipotentes.

De hecho, Cantor demostró que el conjunto de los números reales tenía "más elementos" que los números enteros (si bien ninguno de los dos conjuntos es finito, ambos diferían en su grado de infinitud). El número de elementos de la recta real se representó como Álef 1.

Puede probarse que dada la clase formada por todos los números ordinales, existe un único isomorfismo (de orden) entre esta clase y la clase de los cardinales transfinitos. Este isomorfismo, denotado como \aleph , se emplea en teoría de conjuntos para construir cardinales transfinitos arbitrariamente grandes, matemáticamente todos los cardinales transfinitos resultan ser un cardinal de tipo álef.

5.1.1. Alef 0 \aleph_0

El más pequeño de todos los números transfinitos (cardinales), y el más simple de entender conceptualmente es \aleph_0 (se lee como álef sub cero o álef cero), este cardinal es el número de elementos del conjunto de los números naturales. En análisis matemático puede definirse de manera sencilla e intuitiva la clase de conjuntos numerables (conjuntos cuyo cardinal es \aleph_0). Cualquier conjunto que pueda ponerse en correspondencia biunívoca con los números naturales es un conjunto numerable. En términos prácticos, esto significa que los elementos de un conjunto numerable pueden etiquetarse como 1, 2, 3 ... de tal manera que a cada elemento de dicho conjunto le corresponda un número natural (y nada más que un número natural).

5.1.2. Álef 1 \aleph_1

En matemáticas, se define \aleph_1 como el menor cardinal mayor que \aleph_0 , es decir, el menor cardinal mayor que el cardinal del conjunto de los números naturales. Es decir, \aleph_1 es el sucesor de \aleph_0 , lo cual se escribe $\aleph_1 = \aleph_0^+$.

En análisis matemático, se interpreta usualmente al cardinal \aleph_1 como la cantidad de números reales, asumiendo como cierta la hipótesis del continuo. Para justificar esto se parte del teorema de Cantor. Este teorema afirma que el cardinal de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ es mayor que \aleph_0 , donde $\text{card}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) = \text{card}(\mathbb{R})$ es el cardinal del conjunto potencia de los números naturales, que es exactamente el mismo que el cardinal de los números reales. Así pues,

$$\aleph_0 < \text{card}(\mathbb{R}), \quad (5.1)$$

lo que, considerando que $\text{card}(\mathbb{R}) = 2^{\aleph_0}$, puede escribirse también así:

$$\aleph_0 < 2^{\aleph_0}. \quad (5.2)$$

En la teoría ZFC, el axioma de elección permite probar que

$$\aleph_1 \leq 2^{\aleph_0}, \quad (5.3)$$

mientras que la hipótesis del continuo que afirma que

$$\aleph_1 = 2^{\aleph_0}, \quad (5.4)$$

Es decir, que el cardinal de los números reales es exactamente \aleph_1 .

Más allá de álef 1 (\aleph_1) El teorema de Cantor sobre el conjunto potencia afirma que para cualquier conjunto A se cumple que

$$\text{card}(A) < \text{card}(\mathcal{P}(A)). \quad (5.5)$$

Esto abre la posibilidad de que existan cardinales transfinitos mayores que \aleph_1 . La hipótesis del continuo generalizada de hecho permite ordenar los cardinales transfinitos de manera sencilla, ya que en esencia afirma que:

$$\forall n \geq 0 : (\text{card}(A) = \aleph_n \rightarrow \text{card}(\mathcal{P}(A)) = \aleph_{n+1}). \quad (5.6)$$

5.1.3. Álef 2

El cardinal Álef 2 (\aleph_2) designa, el cardinal transfinito del conjunto potencia de los números reales, y por tanto podrá adoptarse como definición también $\aleph_2 = 2^{\aleph_1}$, por tanto, la cantidad de posibles subconjuntos de números reales sería \aleph_2 . Igualmente aceptando la hipótesis del continuo generalizada, puede demostrarse que \aleph_2 también es el cardinal del conjunto de todas las funciones reales ya que:

$$\aleph_1^{\aleph_1} = 2^{\aleph_1} = \aleph_2. \quad (5.7)$$

Mientras que las funciones continuas tienen cardinal \aleph_1 , ya que

$$\aleph_1^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph_1 < \aleph_2. \quad (5.8)$$

Esto último se debe a que una función continua queda determinada si se especifica su valor sobre los números racionales, que son numerables y por tanto tienen \aleph_0 como cardinal.

El conjunto de todas las funciones reales tiene cardinal $\aleph_2 = \aleph_1^{\aleph_1}$; sin embargo, el conjunto de las funciones continuas tiene cardinal $\aleph_1 = \aleph_1^{\aleph_0}$, ya que una función continua queda especificada si se conoce su valor sobre los números racionales, que son un conjunto numerable.

El conjunto de partes de cualquier espacio vectorial real o complejo de dimensión finita tiene también cardinal \aleph_2

5.1.4. Álef \aleph_ω

En matemática, se define \aleph_ω como el cardinal singular (cardinal no regular) más pequeño de todos. A diferencia de \aleph_ω , los primeros cardinales transfinitos como $\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \dots$ son todos ellos cardinales regulares. Otra propiedad notoria de \aleph_ω es que es un cardinal que no es sucesor ningún otro (a diferencia de lo que pasa con \aleph_n , $n \in N, n \geq 1$), ya que su índice ω es un ordinal límite. El hecho de que \aleph_ω sea el cardinal singular más pequeño posible significa que es el cardinal más pequeño tal que su cofinalidad es menor que el propio cardinal, es decir:

$$\text{cf}(\aleph_\omega) < \aleph_\omega. \quad (5.9)$$

Dado que el ordinal ω coincide con el cardinal \aleph_0 (los dos signos representan el mismo conjunto), técnicamente se podría escribir el cardinal \aleph_ω como una aplicación reiterada de la función álef, es decir:

$$\aleph_\omega = \aleph_{\aleph_0}. \quad (5.10)$$

5.2. ¿Porqué explotó el Challenger?

Unas semanas antes del lanzamiento del Challenger, los técnicos lanzaron una voz de alerta: Las juntas de caucho que sellaban las juntas del vehículo mostraron signos de deterioro en todos los viajes anteriores, y las bajas temperaturas de ese enero podían generarles gran rigidez y abrirles grietas. Sin embargo, los cuatro aparatos que formaban la unidad de lanzamiento costaban nueve mil millones de dólares cada uno (poderosa razón económica) y el viaje con una tripulación no militar significaba un fuerte impacto mundial (poderosa razón política en la carrera espacial).

El anillo de goma que formaba parte de una de las juntas entre secciones del cohete debido a las bajas temperaturas reinantes la noche anterior al despegue había perdido su flexibilidad y se rompió bajo la presión de los gases durante el lanzamiento, es como si coges un chicle, normalmente flexible, y lo metes en el congelador: se volverá rígido y muy fácil de romper, y esto es exactamente lo que le pasó a aquella junta. Figura 5.1 y Figura 5.2

Después de esto lo que sucedió es que el hidrógeno y oxígeno líquido que escaparon del tanque principal se incendiaron formando una enorme bola de fuego a algo más de 15 kilómetros de altura, pero no hubo ninguna onda de choque ni detonación; de hecho los cohetes de combustible sólido siguieron volando sin haber sido dañados por ninguna explosión. Lo que destrozó el transbordador fueron las fuerzas aerodinámicas cuando al quedar suelto se giró de lado contra el sentido de la marcha. Finalmente lo que acabó con el transbordador fue una llama que se escapó de una de las juntas situadas entre cada una de las cuatro secciones que forman estos cohetes, pero hacerlos de una sola pieza también representa riesgos, y las juntas habían funcionado adecuadamente siempre que fueron utilizadas dentro de sus parámetros.

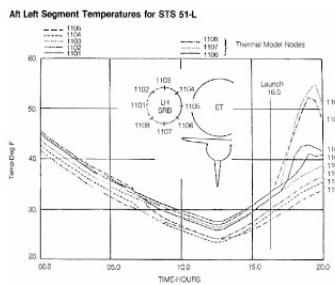


Figura 5.1: Temperaturas del SRB izquierdo

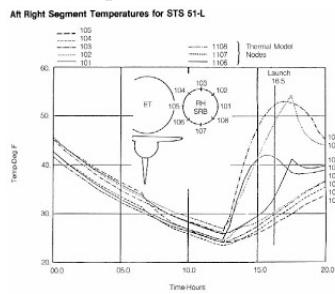


Figura 5.2: Temperaturas del SRB derecho.
Se observa la anomalía en el SRB derecho (NASA).

5.3. Amplitud Modulada

La modulación de amplitud o amplitud modulada (AM) es una técnica utilizada en la comunicación electrónica, más comúnmente para la transmisión de información a través de una onda transversal de televisión. La modulación en amplitud (AM) funciona mediante la variación de la amplitud de la señal transmitida en relación con la información que se envía. Figura 5.3.

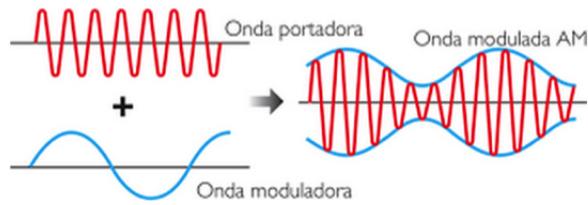


Figura 5.3: Onda Modulada AM

5.4. Frecuencia Modulada

La modulación de frecuencia, o frecuencia modulada (FM), es una técnica de modulación que permite transmitir información a través de una onda portadora variando su frecuencia. En aplicaciones analógicas, la frecuencia instantánea de la señal modulada es proporcional al valor instantáneo de la señal moduladora. Datos digitales pueden ser enviados por el desplazamiento de la onda de frecuencia entre un conjunto de valores discretos, una modulación conocida como modulación por desplazamiento de frecuencia. Figura 5.4.

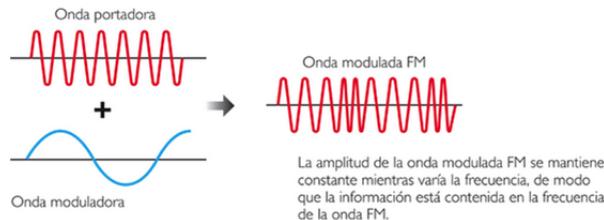


Figura 5.4: Onda Modulada FM.

5.5. Funcionamiento mp3

La compresión se basa en la reducción del margen dinámico irrelevante, es decir, en la incapacidad del sistema auditivo para detectar los errores de cuantificación en condiciones de enmascaramiento. Este estándar divide la señal en bandas de frecuencia que se aproximan a las bandas críticas, y luego cuantifica cada subbanda en función del umbral de detección del ruido dentro de esa banda. El modelo psicoacústico es una modificación del empleado en el esquema II, y utiliza un método denominado predicción polinómica. Analiza la señal de audio y calcula la cantidad de ruido que se puede introducir

en función de la frecuencia, es decir, calcula la cantidad de enmascaramiento o umbral de enmascaramiento en función de la frecuencia.

El codificador usa esta información para decidir la mejor manera de gastar los bits disponibles. Este estándar provee dos modelos psicoacústicos de diferente complejidad: el modelo I es menos complejo que el modelo psicoacústico II y simplifica mucho los cálculos.

Estudios demuestran que la distorsión generada es imperceptible para el oído experimentado en un ambiente óptimo desde los 192 kbps y en condiciones normales. Para el oído no experimentado, o común, con 128 kbps o hasta 96 kbps basta para que se oiga bien (a menos que se posea un equipo de audio de alta calidad donde se nota excesivamente la falta de graves y se destaca el sonido de *fritura* en los agudos). Las personas que tienen experiencia en la parte auditiva de archivos digitales de audio, especialmente música, desde 192 hasta 256 kbps basta para oír bien, pero la compresión en 320 kbps es la óptima para cualquier escucha.

La música que circula por Internet, en su mayoría, está codificada entre 128 y 192 kbps, aunque hoy debido al aumento de ancho de banda es cada vez más frecuente compartir archivos en calidad máxima de compresión.

5.6. Simulación de un dado de tres caras

Utilizando la Herramienta de Root, realizar la simulación del lanzamiento de un dado de tres caras utilizando histogramas para 10, 100 y 1000 lanzamientos. De acuerdo a las figuras 5.5,5.6,5.7

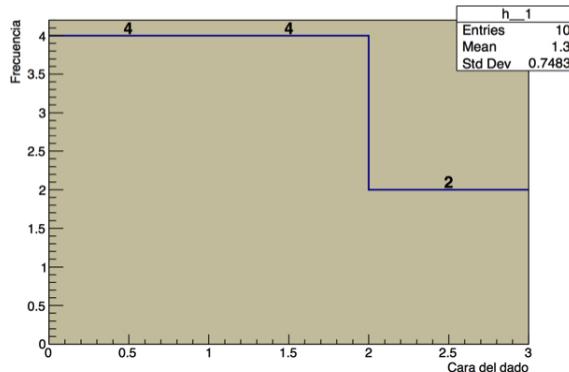


Figura 5.5: Simulacion con 10 lanzamientos

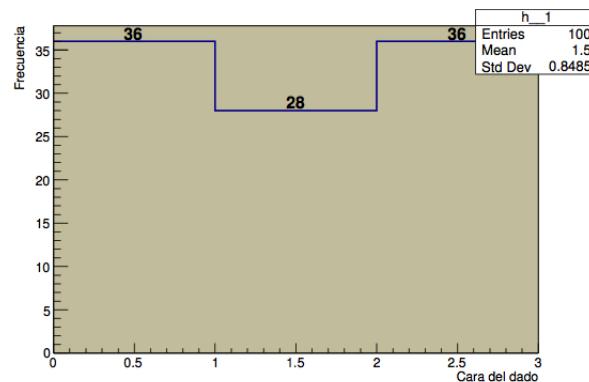


Figura 5.6: Simulacion con 100 lanzamientos

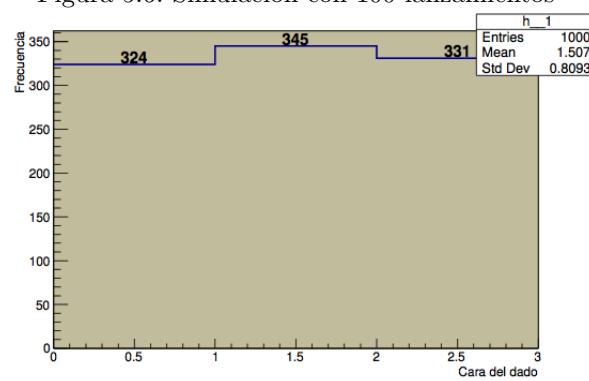


Figura 5.7: Simulacion con 1000 lanzamientos

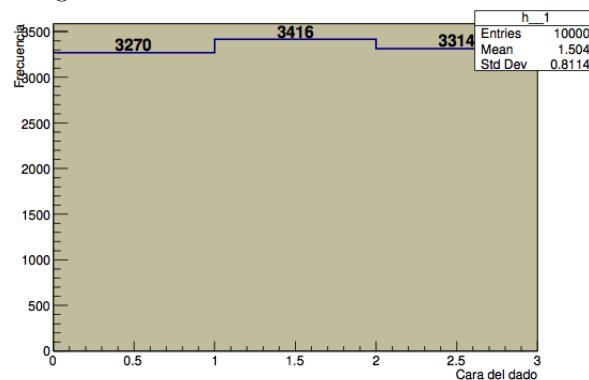


Figura 5.8: Simulacion con 10000 lanzamientos

Capítulo 6

Tarea 6

6.1. Mínimos cuadrados

Es una técnica de análisis numérico enmarcada dentro de la optimización matemática, en la que, dados un conjunto de pares ordenados: variable independiente, variable dependiente, y una familia de funciones, se intenta encontrar la función continua, dentro de dicha familia, que mejor se aproxime a los datos (un "mejor ajuste"), de acuerdo con el criterio de mínimo error cuadrático.

En su forma más simple, intenta minimizar la suma de cuadrados de las diferencias en las ordenadas (llamadas residuos) entre los puntos generados por la función elegida y los correspondientes valores en los datos. Específicamente, se llama mínimos cuadrados promedio (LMS) cuando el número de datos medidos es 1 y se usa el método de descenso por gradiente para minimizar el residuo cuadrado. Se puede demostrar que LMS minimiza el residuo cuadrado esperado, con el mínimo de operaciones (por iteración), pero requiere un gran número de iteraciones para converger.

Desde un punto de vista estadístico, un requisito implícito para que funcione el método de mínimos cuadrados es que los errores de cada medida estén distribuidos de forma aleatoria. El teorema de Gauss-Márkov prueba que los estimadores mínimos cuadráticos carecen de sesgo y que el muestreo de datos no tiene que ajustarse, por ejemplo, a una distribución normal. También es importante que los datos a procesar estén bien escogidos, para que permitan visibilidad en las variables que han de ser resueltas (para dar más peso a un dato en particular, véase mínimos cuadrados ponderados).

La técnica de mínimos cuadrados se usa comúnmente en el ajuste de curvas. Muchos otros problemas de optimización pueden expresarse también en forma de mínimos cuadrados, minimizando la energía o maximizando la entropía.

6.1.1. Formulación del problema bidimensional

Sea $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^n$ un conjunto de n puntos en el plano real, y sea $\{f_j(x)\}_{j=1}^m$ una base de m funciones linealmente independiente en un espacio de funciones. Queremos encontrar una función $f(x)$ que sea combinación lineal de las funciones base, de modo que $f(x_k) \approx y_k$, esto es:

$$f(x) = \sum_{j=1}^m c_j f_j(x).$$

Por tanto, se trata de hallar los m coeficientes c_j que hagan que la función aproximante $f(x)$ dé la mejor aproximación para los puntos dados (x_k, y_k) . El criterio de "mejor aproximación" puede variar, pero en general se basa en aquél que minimice una "acumulación" del error individual (en cada punto) sobre el conjunto total. En primer lugar, el error (con signo positivo o negativo) de la función $f(x)$ en un solo punto, (x_k, y_k) , se define como:

$$e_k = y_k - f(x_k),$$

pero se intenta medir y minimizar el error en todo el conjunto de la aproximación, $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^n$. En matemáticas, existen diversas formas de definir el error, sobre todo cuando éste se refiere a un conjunto de puntos (y no sólo a uno), a una función, etc. Dicho error (el error "total" sobre el conjunto de puntos considerado) suele definirse con alguna de las siguientes fórmulas:

Error Máximo:

$$E_\infty(f) = \max(|e_k|).$$

Error Medio:

$$E_m(f) = \frac{\sum_{k=1}^n |e_k|}{n}.$$

Error cuadrático medio:

$$E_{cm}(f) = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n (e_k)^2}{n}}.$$

La aproximación por mínimos cuadrados se basa en la minimización del error cuadrático medio o, equivalentemente, en la minimización del radicando de dicho error, el llamado error cuadrático, definido como:

$$E_c(f) = \frac{\sum_{k=1}^n (e_k)^2}{n}.$$

Para alcanzar este objetivo, se utiliza el hecho que la función f debe poder describirse como una combinación lineal de una base de funciones. Los coeficientes de la combinación lineal serán los parámetros que queremos determinar. Por ejemplo, supongamos que f es una función cuadrática, lo que quiere decir que es una combinación lineal, $f(x) = ax^2 + bx + c$, de las funciones $f_1(x) = x^2, f_2(x) = xy, f_3(x) = 1$ ($m=3$ en este caso), y que se pretende determinar los valores de los coeficientes: a, b, c , de modo que minimicen la suma (S) de los cuadrados de los residuos:

$$S = \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i^2 - bx_i - c)^2.$$

Esto explica el nombre de **mínimos cuadrados**. A las funciones que multiplican a los coeficientes buscados, que en este caso son: x^2, x y 1 , se les conoce con el nombre de funciones base de la aproximación, y pueden ser funciones cualesquiera. Para ese caso general se deduce a continuación la fórmula de la mejor aproximación discreta (i.e. para un conjunto finito de puntos), lineal y según el criterio del error cuadrático medio, que es la llamada aproximación lineal por mínimos cuadrados. Es posible generar

otro tipo de aproximaciones, si se toman los errores máximo o medio, por ejemplo, pero la dificultad que entraña operar con ellos, debido al valor absoluto de su expresión, hace que sean difíciles de tratar y casi no se use. [?]

6.2. Densidad de probabilidad

La función de densidad de probabilidad, función de densidad, o, simplemente, densidad de una variable aleatoria continua describe la probabilidad relativa según la cual dicha variable aleatoria tomará determinado valor. La probabilidad de que la variable aleatoria caiga en una región específica del espacio de posibilidades estará dada por la integral de la densidad de esta variable entre uno y otro límite de dicha región.

La función de densidad de probabilidad (FDP o PDF en inglés) es no-negativa a lo largo de todo su dominio y su integral sobre todo el espacio es de valor unitario.

Una función de densidad de probabilidad caracteriza el comportamiento probable de una población en tanto especifica la posibilidad relativa de que una variable aleatoria continua X tome un valor cercano a x .

Una variable aleatoria X tiene densidad f , siendo f una función no-negativa integrable de Lebesgue, si:

$$P[a \leq X \leq b] = \int_a^b f(x) dx.$$

Por lo tanto, si F es la función de distribución acumulativa de X , entonces:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du,$$

y (si f es continua en x)

$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x).$$

Intuitivamente, puede considerarse $f(x)dx$ como la probabilidad de X de caer en el intervalo infinitesimal $[x, x + dx]$.

Se define como el cociente entre la probabilidad de X de tomar un valor en el intervalo $[x, x + dx]$ y dx , siendo dx un infinitésimo.

La mayoría de las funciones de densidad de probabilidad requieren uno o más parámetros para especificarlas totalmente. Recíprocamente respecto de la definición ya desarrollada, pueden hacerse las siguientes consideraciones.

La probabilidad de que una variable aleatoria continua X quede ubicada entre los valores a y b está dada por el desenvolvimiento en el intervalo de la FDP; de los valores comprendidos en el rango entre a y b .

$$P[a \leq X \leq b] = \int_a^b f(x) dx.$$

La FDP es la derivada (cuando existe) de la función de distribución:

$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x).$$

Así, si F es la función de distribución acumulativa de X , entonces:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du,$$

y (si f es continua en x)

$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x).$$

6.2.1. Propiedades

De las propiedades de la función de densidad se siguen las siguientes propiedades de la fdp

$$f(x) \geq 0,$$

para toda x . El área total encerrada bajo la curva es igual a 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.$$

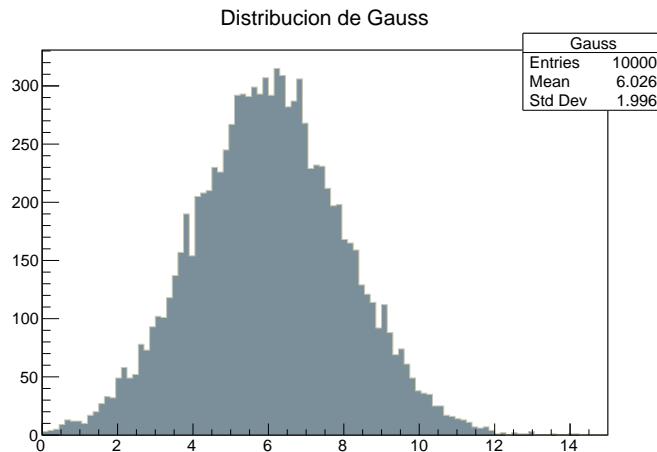
La probabilidad de que X tome un valor en el intervalo $[a, b]$ es el área bajo la curva de la función de densidad en ese intervalo o lo que es lo mismo, la integral definida en dicho intervalo. La gráfica $f(x)$ se conoce a veces como curva de densidad.

$$\Pr(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

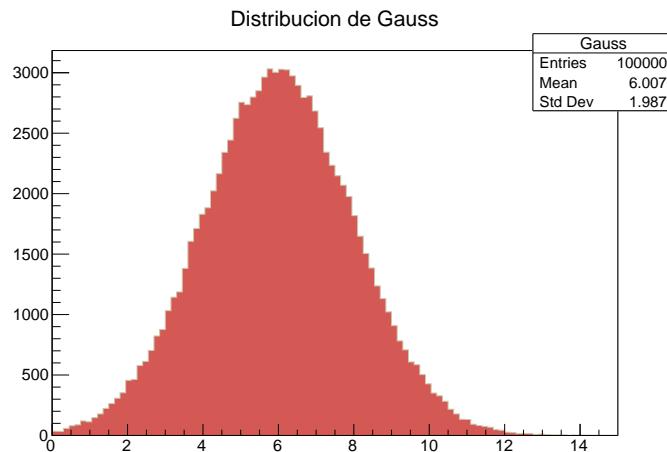
Algunas FDP están declaradas en rangos de $-\infty$; $a +\infty$, como la de la distribución normal.[?]

6.3. Gráficos densidad de Probabilidad

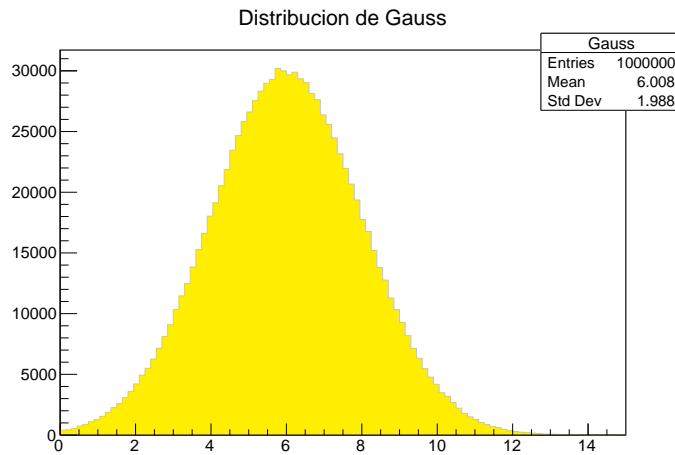
Se realizó la implementación mediante el software R, el gráfico de la densidad de probabilidad para entradas de 10 000, 100 000 y 1 000 000 de datos. En la figura 6.1 se observa el gráfico con una densidad de probabilidad Gaussiana para una entrada de 10,000 datos

Figura 6.1: Densidad de Probabilidad Gausiana $n = 10,000$

En la figura 6.2 se observa el gráfico con una densidad de probabilidad Gaussiana para una entrada de 100,000 datos

Figura 6.2: Densidad de Probabilidad Gausiana $n = 100,000$

En la figura 6.3 se observa el gráfico con una densidad de probabilidad Gaussiana para una entrada de 1,000,000 datos

Figura 6.3: Densidad de Probabilidad Gausiana $n = 1,000,000$

6.4. Comando Make

Se solicita realizar un programa que permita la solución de ecuaciones cuadráticas y ejecutarlo mediante el comando make desde la terminal. En este caso se programa desde el lenguaje c y se debe ejecutar mediante el comando gcc desde la terminal. En la figura 6.4 se muestra un ejemplo de la ejecución del programa.

```
mac — a.out — 90x35
Last login: Tue Jan  5 00:55:58 on ttys000
anataffy:~ mac$ /Users/mac/Desktop/a.out ; exit;

Solucion de una ecuacion de segundo grado
_____
Escribe el valor de a --> 2
Escribe el valor de b --> 5
Escribe el valor de c --> 10
La raiz real es -1.25 y la imaginaria es 1.85
logout
```

Figura 6.4: Ejemplo solución de ecuación cuadrática.

Capítulo 7

Tarea 7

7.1. Análisis de componentes principales

Es una técnica utilizada para reducir la dimensionalidad de un conjunto de datos. Intuitivamente la técnica sirve para hallar las causas de la variabilidad de un conjunto de datos y ordenarlas por importancia.

Técnicamente, el ACP busca la proyección según la cual los datos queden mejor representados en términos de mínimos cuadrados. El ACP se emplea sobre todo en análisis exploratorio de datos y para construir modelos predictivos. El ACP comporta el cálculo de la descomposición en autovalores de la matriz de covarianza, normalmente tras centrar los datos en la media de cada atributo.

El ACP construye una transformación lineal que escoge un nuevo sistema de coordenadas para el conjunto original de datos en el cual la varianza de mayor tamaño del conjunto de datos es capturada en el primer eje (llamado el Primer Componente Principal), la segunda varianza más grande es el segundo eje, y así sucesivamente. Para construir esta transformación lineal debe construirse primero la matriz de covarianza o matriz de coeficientes de correlación. Debido a la simetría de esta matriz existe una base completa de vectores propios de la misma. La transformación que lleva de las antiguas coordenadas a las coordenadas de la nueva base es precisamente la transformación lineal necesaria para reducir la dimensionalidad de datos. Además las coordenadas en la nueva base dan la composición en factores subyacentes de los datos iniciales.

Una de las ventajas del ACP para reducir la dimensionalidad de un grupo de datos, es que retiene aquellas características del conjunto de datos que contribuyen más a su varianza, manteniendo un orden de bajo nivel de los componentes principales e ignorando los de alto nivel. El objetivo es que esos componentes de bajo orden a veces contienen el aspecto "más importante" de esa información.

Supongamos que existe una muestra con n individuos para cada uno de los cuales se han medido m variables (aleatorias) F_j ; El ACP permite encontrar un número de factores subyacentes $p < m$ que explican aproximadamente el valor de las m variables para cada individuo. El hecho de que existan

estos p factores subyacentes puede interpretarse como una reducción de la dimensionalidad de los datos. Cada uno de los p encontrados se llama componente principal.

Existen dos formas básicas de aplicar el ACP:

Método basado en la matriz de correlación, cuando los datos no son dimensionalmente homogéneos o el orden de magnitud de las variables aleatorias medidas no es el mismo.

Método basado en la matriz de covarianzas, que se usa cuando los datos son dimensionalmente homogéneos y presentan valores medios similares.

Método basado en correlaciones

El método parte de la matriz de correlaciones, consideremos el valor de cada una de las m variables aleatorias F_j . Para cada uno de los n individuos tomemos el valor de estas variables y escribamos el conjunto de datos en forma de matriz:

$$(F_j^\beta)_{j=1,\dots,m}^{\beta=1,\dots,n}.$$

Obsérvese que cada conjunto

$$\mathcal{M}_j = \{F_j^\beta | \beta = 1, \dots, n\}.$$

puede considerarse una muestra aleatoria para la variable F_j . A partir de los $m \times n$ datos correspondientes a las m variables aleatorias, puede construirse la matriz de correlación muestral, que viene definida por:

$$\mathbf{R} = [r_{ij}] \in M_{m \times m} \quad \text{donde} \quad r_{ij} = \frac{\text{cov}(F_i, F_j)}{\sqrt{\text{var}(F_i)\text{var}(F_j)}}.$$

Puesto que la matriz de correlaciones es simétrica entonces resulta diagonalizable y sus valores propios λ_i , verifican:

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1.$$

Debido a la propiedad anterior estos m valores propios reciben el nombre de pesos de cada uno de los m componentes principales. Los factores principales identificados matemáticamente se representan por la base de vectores propios de la matriz \mathbf{R} . Está claro que cada una de las variables puede ser expresada como combinación lineal de los vectores propios o componentes principales.

La aplicación del ACP está limitada por varios supuestos.

Asunción de linealidad: Se asume que los datos observados son combinación lineal de una cierta base.

Importancia estadística de la media y la covarianza: el ACP utiliza los vectores propios de la matriz de covarianzas y sólo encuentra las direcciones de ejes en el espacio de variables considerando que los datos se distribuyen de manera gaussiana.

7.2. Ejemplos de Análisis de Componentes Principales

Un análisis consideró las calificaciones escolares $n = 15$ estudiantes en $m = 6$ materias (lengua, matemáticas, física, inglés, filosofía, historia, química, gimnasia). Los dos primeros componentes principales explicaban juntos el 82.1 % de la varianza. El primer de ellos parecía fuertemente correlacionado con las materias de humanidades (lengua, inglés, filosofía, historia) mientras que el segundo aparecía relacionado con las materias de ciencias (matemáticas, física, química). Así parece que existe un conjunto de habilidades cognitivas relacionadas con las humanidades y un segundo relacionado con las ciencias, estos dos conjuntos de habilidades son estadísticamente independientes por lo que un alumno puede puntuar alto en sólo uno de ellos, en los dos o en ninguno.

Un análisis de metodología docente, consideró las calificaciones de $n = 54$ estudiantes de la facultad de Biología de la ULA y $m = 8$ tipos de habilidades. El primer factor principal que explicaba las calificaciones era la inteligencia del estudiante y en segundo lugar la metodología de aprendizaje usada.

7.3. Eigenvalores y Eigenvectores

Los eigenvectores son los vectores no nulos que, cuando son transformados por el operador, dan lugar a un múltiplo escalar de sí mismos, con lo que no cambian su dirección. Este escalar λ recibe el nombre valor propio, autovalor, valor característico o eigenvalor. A menudo, una transformación queda completamente determinada por sus vectores propios y valores propios. Formalmente, se definen los vectores propios y valores propios de la siguiente manera: Si $A : V \rightarrow V$ es un operador lineal en un cierto \mathbb{K} -espacio vectorial V , v es un vector diferente de cero en V y c es un escalar tal que:

$$A\mathbf{v} = c\mathbf{v}, \quad \mathbf{v} \neq \mathbf{0}, c \in \mathbb{K},$$

entonces decimos que v es un vector propio del operador A , y su valor propio asociado es c .

7.3.1. Ejemplos de Eigenvalores y Eigenvectores

A medida que la Tierra rota, los vectores en el eje de rotación permanecen invariantes. Si se considera la transformación lineal que sufre la Tierra tras una hora de rotación, una flecha que partiera del centro de la Tierra al polo Sur geográfico sería un vector propio de esta transformación, pero una flecha que partiera del centro a un punto del ecuador no sería un vector propio. Dado que la flecha que apunta al polo no cambia de longitud por la rotación, su valor propio es 1.

7.3.2. Vectores propios

Matemáticamente, $v\lambda$ es un vector propio y λ el valor propio correspondiente de una transformación T si verifica la ecuación:

$$T(\mathbf{v}_\lambda) = \lambda \mathbf{v}_\lambda,$$

donde $T(v\lambda)$ es el vector obtenido al aplicar la transformación T a $v\lambda$. Supóngase que T es una transformación lineal (lo que significa que $T(av + b\mathbf{w}) = aT(\mathbf{v}) + bT(\mathbf{w})$ para todos los escalares a, b , y los vectores \mathbf{v}, \mathbf{w}). Considérese una base en ese espacio vectorial. Entonces, T y $v\lambda$ pueden representarse en relación a esa base mediante una matriz AT y un vector columna $v\lambda$?un vector vertical unidimensional. La ecuación de valor propio en esta representación matricial se representa de la siguiente forma:

$$\mathbf{A}_T \mathbf{v}_\lambda = \lambda \mathbf{v}_\lambda.$$

7.3.3. Cálculo de los valores propios

Una herramienta importante para encontrar valores propios de matrices cuadradas es el polinomio característico: decir que λ es un valor propio de A es equivalente a decir que el sistema de ecuaciones lineales $Av = \lambda v = Av - \lambda v = 0$ (factorizando por v queda) $(A - \lambda I)v = 0$ (donde I es la matriz identidad) tiene una solución no nula v (un vector propio), y de esta forma es equivalente al determinante:

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

La función $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ es un polinomio de λ pues los determinantes se definen como sumas de productos. Éste es el polinomio característico de A : los valores propios de una matriz son los ceros de su polinomio característico.

Todos los valores propios de una matriz A pueden calcularse resolviendo la ecuación

$$p_A(\lambda) = 0.$$

Si A es una matriz $n \times n$, entonces p_A tiene grado n y A tiene como máximo n valores propios.

7.3.4. Cálculo de los vectores propios

Una vez que se conocen los valores propios λ , los vectores propios se pueden hallar resolviendo el sistema de ecuaciones homogéneo:

$$(A - \lambda I)v = 0.$$

7.3.5. Ejemplos

Obtener los valores propios de A

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Su polinomio característico es $-\lambda^2 - 1$ y sus valores propios son el par de conjugados complejos $i, -i$.

Considérese la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Obtener los valores propios de A, determinando el polinomio característico:

$$p(x) = \det(A - xI) = \det \quad (7.1)$$

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} -x & 1 & -1 \\ 1 & 1-x & 0 \\ -1 & 0 & 1-x \end{vmatrix} \\ &= -x^3 + 2x^2 + x - 2 \end{aligned}$$

y porque $p(x) = -(x-2)(x-1)(x+1)$ se ve que los valores propios de A son 2, 1 y -1. El teorema de Cayley-Hamilton establece que cada matriz cuadrada satisface su propio polinomio característico. Es decir

$$(A - 2I)(A - I)(A + I) = 0$$

Efectivamente, para el caso del valor propio 2, se puede comprobar que

$$(A - I)(A + I) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

de donde $(1, 1, -1)$ es un vector propio asociado a 2.

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

7.4. Ejemplos Mínimos cuadrados.

Sean los siguientes datos obtener la recta de mínimos cuadrados

<i>x</i>	<i>y</i>
1.2	101
0.8	92
1.0	110
1.3	120
0.7	90
0.8	82
1.0	93
0.6	75
0.9	91
1.1	105
9.4	959

$$\sum_{k=1}^n y_k = Na + b \sum_{k=1}^n x_k$$

$$\sum_{k=1}^n x_k y_k = a \sum_{k=1}^n x_k + b \sum_{k=1}^n (x_k)^2$$

sustituyendo:

$$\left. \begin{array}{l} 959 = 10a + 9,4b \\ 924,8 = 9,4a + 9,28b \end{array} \right\}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se tiene

$$a = 46,49$$

$$b = 52,57$$

$$y = a + bx$$

$$y = 46,49 + 52,57x$$

Ejemplo: Supongamos un muelle sometido a tracción, se ha cargado el muelle con diferentes pesos (*F*, variable independiente) y se han anotado los alargamientos (*l* variable dependiente). Los distintos datos que se necesitan son:

<i>gr</i>	<i>mm</i>
200	60
400	120
500	150
700	210
900	260
1000	290

$$\begin{aligned}
 b &= -18,4153 \\
 a &= 3,4959 \\
 \Delta b &= 0,08164966 \\
 \Delta a &= 0,00102217; r = 0,9995 \\
 b &= -18,42 \pm 0,08mm; a = 3,50 \pm 0,00mm/Kp
 \end{aligned}$$

Ajustar los siguientes datos a una recta por mínimos cuadrados

x	-1	0	3	7
$f(x)$	2	0	4	7

$$\left. \begin{array}{l} a * n + b * \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n f_i \\ a * \sum_{i=1}^n x_i + b * \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i * f_i \end{array} \right\} \begin{array}{l} 4a + 9b = 13 \\ 9a + 59b = 59 \end{array}$$

$$y = 1,52258 + 0,767742 * x \rightarrow f(1) \approx 2,2903$$

7.5. Distribución T-student

Es una distribución de probabilidad que surge del problema de estimar la media de una población normalmente distribuida cuando el tamaño de la muestra es pequeño.

Aparece de manera natural al realizar la prueba t de Student para la determinación de las diferencias entre dos medias muestrales y para la construcción del intervalo de confianza para la diferencia entre las medias de dos poblaciones cuando se desconoce la desviación típica de una población y ésta debe ser estimada a partir de los datos de una muestra.

La distribución t de Student es la distribución de probabilidad del cociente tal como se muestra en la Ec. 7.2

$$T = \frac{Z}{\sqrt{V/\nu}} = Z \sqrt{\frac{\nu}{V}}. \quad (7.2)$$

Donde:

Z es una variable aleatoria distribuida según una normal típica (de media nula y varianza 1).

V es una variable aleatoria que sigue una distribución χ^2 con ν grados de libertad.

Z y V son independientes.

Si μ es una constante no nula, el cociente $\frac{Z+\mu}{\sqrt{V/\nu}}$ es una variable aleatoria que sigue la distribución t de Student no central con parámetro de no-centralidad μ .

Capítulo 8

Tarea 8

8.1. Que es la multiplicidad en eigenvectores y eigenvalores.

La multiplicidad algebraica de un valor propio λ de A es el orden de λ como cero del polinomio característico de A ; en otras palabras, si λ es una de las raíces del polinomio, es el numero de factores $(t - \lambda)$ en el polinomio característico tras la factorización. Una matriz $n * n$ tiene n valores propios, contados de acuerdo con su multiplicidad algebraica, ya que su polinomio característico tiene grado n . Un valor propio de multiplicidad algebraica 1 recibe el nombre de "valor propio simple".

Lo que significa que la multiplicidad algebraica de 4 es dos, la de 3 es tres, la de 2 es dos y la de 1 es uno. Se emplea este estilo porque la multiplicidad algebraica es la clave de muchas demostraciones matematicas en teoria de matrices.

Anteriormente se ha definido la multiplicidad geometrica de un valor propio como la dimension del espacio propio asociado, o el nucleo (espacio propio de los vectores propios del valor propio nulo) de $\lambda I - A$. Por ejemplo:

La multiplicidad algebraica tambien puede entenderse como una dimension: es la dimension del espacio propio generalizado (1.er sentido) asociado, que es el nucleo de la matriz $(\lambda I - A)^k$ para k suficientemente grande. Es decir, es el espacio de los vectores propios generalizados (1.er sentido), donde un vector propio generalizado es cualquier vector que toma valor 0 si $\lambda I - A$ se aplica suficientes veces en sucesion.

Cualquier vector propio es un vector propio generalizado, asi que cualquier espacio propio esta contenido en el espacio propio generalizado asociado. Esto proporciona una demostracion simple de que la multiplicidad geometrica es siempre menor o igual a la algebraica. El primer sentido no debe de confundirse con el problema de valores propios generalizados tal y como se muestra mas adelante.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solo tiene un valor propio $\lambda = 1$. El polinomio caracteristico es $(\lambda - 1)^2$, as que este valor propio tiene

multiplicidad algebraica 2. Sin embargo, el espacio propio asociado es el eje, que normalmente recibe el nombre de eje x, generado por el vector unitario

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

así que la multiplicidad geometrica es 1.

Los vectores propios generalizados pueden usarse para calcular la forma normal de Jordan de una matriz (comentado mas adelante). El hecho de que los bloques de Jordan en general no son diagonales sino nilpotentes esta directamente relacionado con la distincion entre vectores propios y vectores propios generalizados.

8.2. Que es una matriz singular

Una matriz cuadrada A de orden n se dice que es invertible, no singular, no degenerada o regular si existe otra matriz cuadrada de orden n, llamada matriz inversa de A y representada como A^{-1} , tal que:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n, \quad (8.1)$$

donde I_n es la matriz identidad de orden n y el producto utilizado es el producto de matrices usual. Una matriz no invertible se dice que es singular o degenerada. Una matriz es singular si y solo si su determinante es nulo. La inversa de una matriz, si existe, es única. La inversa del producto de dos matrices es el producto de las inversas cambiando el orden: [?]

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1} \quad (8.2)$$

Si la matriz es invertible, también lo es su transpuesta, y el inverso de su transpuesta es la transpuesta de su inversa, es decir:

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T \quad (8.3)$$

Y, evidentemente:

$$(A^{-1})^{-1} = A \quad (8.4)$$

Una matriz es invertible si y sólo si el determinante de A es distinto de cero. Además la inversa satisface la igualdad:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}(A) * \quad (8.5)$$

Ejemplo numérico:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

8.3. Que es la traza de una matriz

Sea una matriz cuadrada A de orden n, se define la traza de la matriz A y se denota por $tr(A)$ al valor obtenido al sumar todos los elementos de la diagonal principal, es decir

$$tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii} \quad (8.6)$$

donde a_{ij} representa el elemento que está en la fila i-ésima y en la columna j-ésima de A. Debido al especial comportamiento de la traza de una matriz al cambiar de base puede definirse únicamente la traza de una aplicación lineal, independientemente de cual sea la base elegida. Si un espacio vectorial de dimensión finita está dotado de un producto escalar, y se tiene una base ortonormal entonces la traza de un endomorfismo de dicho espacio viene dada por:

$$\text{tr } f := \sum_k \langle f(e_k), e_k \rangle \quad (8.7)$$

Puede comprobarse que si Af es la matriz de dicha aplicación respecto a dicha base la cantidad anterior es igual a la traza de la matriz A. Y de hecho si Bf es la matriz de la misma aplicación respecto a cualquier otra base ortonormal se tiene:

$$\text{tr } f = \text{tr } A_f = \text{tr } B_f \quad (8.8)$$

Veamos algunos ejemplos considerando las siguientes matrices

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$c = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 4 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

Para obtener la traza de A, basta sumar $1 + 1 + 0 = 2$

La traza de B es $1 + 4 - 5 = 0$

La traza de C es $2 + 3 - 5 = 0$

8.4. Que es la traspuesta de una matriz.

Sea A una matriz con m filas y n columnas. La matriz transpuesta, denotada con A^t

Está dada por:

$$(A^t)_{ij} = A_{ji}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq m \quad (8.9)$$

En donde el elemento a_{ji} de la matriz original A se convertirá en el elemento a_{ij} de la matriz transpuesta A^t

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

8.4.1. Propiedades

Para toda matriz A

$$(A^t)^t = A \quad (8.10)$$

Sean A y B matrices con elementos pertenecen a un anillo \mathcal{A} y sea $c \in \mathcal{A}$:

$$(A + B)^t = A^t + B^t \quad (8.11)$$

$$(cA)^t = cA^t \quad (8.12)$$

Si el producto de las matrices A y B está definido,

$$(AB)^t = B^t A^t \quad (8.13)$$

Si A es una matriz cuadrada cuyas entradas son números reales, entonces

$$A^t A \quad (8.14)$$

es semidefinida positiva.

Capítulo 9

Tarea 9

9.1. Teorema de Cayley-Hamilton

En algebra lineal, el teorema de Cayley-Hamilton (que lleva los nombres de los matematicos Arthur Cayley y William Hamilton) asegura que todo endomorfismo de un espacio vectorial de dimension finita sobre un cuerpo cualquiera anula su propio polinomio caracteristico

En terminos matriciales, eso significa que :
si A es una matriz cuadrada de orden n y si

$$p(x) = \det(X I - A) = X^n + p_{n-1}X^{n-1} + \dots + p_1X + p_0 \quad (9.1)$$

Es su polinomio caracteristico (polinomio de indeterminada X), entonces al sustituir formalmente X por la matriz A en el polinomio, el resultado es la matriz nula:

$$p(A) = A^n + p_{n-1}A^{n-1} + \dots + p_1A + p_0I_n = 0_n \quad (9.2)$$

El teorema de Cayley-Hamilton se aplica tambien a matrices cuadradas de coeficientes en un anillo comutativo cualquiera.

Un corolario importante del teorema de Cayley-Hamilton afirma que el polinomio minimo de una matriz dada es un divisor de su polinomio caracteristico, y no solo eso, el polinomio minimo tiene los mismos factores irreducibles que el polinomio caracteristico.

Efectuamos la demostracion sobre la matriz A . Definamos la matriz $B(X) = {}^t \text{com}(XI - A)$. Sabemos que

$$(XI - A).B(X) = \det(XI - A).I = P(X).I \quad (9.3)$$

Podemos interpretar los miembros y factores de esta igualdad como polinomios en X con coeficientes en el anillo de las matrices cuadradas nxn con coeficientes en K y esa igualdad implica que $P(X).I$ es divisible por la izquierda por $XI - A$. Esto implica entonces que el valor a la derecha (igual en realidad aqui tambien a su valor a la izquierda, ya que se obtiene $B(X).(XI - A) = \det(XI - A).I$) del polinomio $P(X).I$ para $X = A$ es nula. Este valor solo es $P(A)$, lo que termina la demostracion.

9.2. Ejemplo de cálculo de eigenvalores y eigenvectores

Considérese la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Obtener los valores propios de A , determinando el polinomio característico:

$$p(x) = \det(A - xI) = \det$$

$$\begin{vmatrix} -x & 1 & -1 \\ 1 & 1-x & 0 \\ -1 & 0 & 1-x \end{vmatrix}$$

$$= -x^3 + 2x^2 + x - 2$$

y porque $p(x) = -(x-2)(x-1)(x+1)$ se ve que los valores propios de A son 2, 1 y -1. El teorema de Cayley-Hamilton establece que cada matriz cuadrada satisface su propio polinomio característico. Es decir:

$$(A - 2I)(A - I)(A + I) = 0$$

Efectivamente, para el caso del valor propio 2, se puede comprobar que

$$(A - I)(A + I) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

de donde $(1, 1, -1)$ es un vector propio asociado a 2.

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Para la matriz A indique cuales vectores son vectores propios

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$V1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad V2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad V3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad V4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Solucion

Debemos multiplicar cada vector por la matriz A y ver si el vector resultante es un multiplo escalar del vector

$$Av_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

V1 si es vector propio de A asociado al valor propio 3

$$Av_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix} \neq k \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

v2 no es vector propio de A

$$Av_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

V3 si es vector propio de A asociado al valor propio -1

$$Av_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \neq k \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

V4 no es vector propio de A

Determine los valores y los vectores propios correspondientes de las matrices:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, A_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_3 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Solucion:

Para A1:

$$PA(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$PA(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$PA(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} PA_1(\lambda) = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4$$

$$PA_1(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda - 3)(\lambda + 1)$$

Por tanto los unicos valores propios de A_1 son $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = -1$

Vector propio para $\lambda_1 = 3$

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \\ 6 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

Para la matriz siguiente

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \\ 6 & 6 & 9 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 - \lambda & 2 & 2 \\ 3 & 6 - \lambda & 3 \\ 6 & 6 & 9 - \lambda \end{bmatrix}$$

El determinante de esta ultima matriz puede ser obtenida con la expresión de cofactores, que es

$$-\lambda^3 + 20\lambda^2 - 93\lambda + 126 = -(\lambda - 3)^2(\lambda - 14)$$

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \\ 6 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

Para esta matriz.

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \\ 6 & 6 & 9 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 - \lambda & 2 & 2 \\ 3 & 6 - \lambda & 3 \\ 6 & 6 & 9 - \lambda \end{bmatrix}$$

Considérese la matriz.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Empezando a determinar el polinomio característico:

$$p(x) = \det(A - xI) = \det \begin{vmatrix} -x & 1 & -1 \\ 1 & 1-x & 0 \\ -1 & 0 & 1-x \end{vmatrix}$$

$$= -x^3 + 2x^2 + x - 2$$

y porque $p(x) = -(x - 2)(x - 1)(x + 1)$ se ve que los valores propios de A son 2, 1 y -1.

El teorema de Cayley-Hamilton establece que cada matriz cuadrada satisface su propio polinomio característico. Es decir.

$$(A - 2I)(A - I)(A + I) = 0 \quad (9.4)$$

Para el caso del valor propio 2, se puede comprobar que:

$$(A - I)(A + I) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

de donde $(1, 1, -1)$ es un vector propio asociado a 2.

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Considérese la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$$

La matriz identidad I multiplicada por λ para matrices 2x2 queda

$$\lambda I = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$(\lambda I - A) = \begin{bmatrix} \lambda - 4 & -1 \\ 6 & \lambda + 3 \end{bmatrix}$$

$$(\lambda I - A) = (\lambda - 4)(\lambda + 3) + 6 = \lambda^2 - \lambda - 12 + 6 = \lambda^2 - \lambda - 6$$

Las raíces son

$$\lambda = 3$$

$$\lambda = -2$$

Los eigenvectores se calculan como sigue:

$$(\lambda I - A)\bar{v} = \begin{bmatrix} \lambda - 4 & -1 \\ 6 & \lambda + 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

El vector propio que corresponde a λ_1

$$\bar{v}_1 = \begin{bmatrix} -y \\ y \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

El vector propio que corresponde a λ_2

$$\begin{bmatrix} -2 - 4 & -1 \\ 6 & -2 + 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -y \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -1 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -y \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Donde:

$$\bar{v_2} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{6}y \\ y \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} \frac{-1}{6} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Si $y = 6$

$$\bar{v_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Capítulo 10

Tarea 10

10.1. Mínimos cuadrados en R

10.1.1. Ejemplo 1

```
x <- c(8, 2 , 11 , 6 , 5,4,12,9,6,1)
y <- c(3,10,3,6,8,12,1,4,9,14)
plot(x,y,pch=16,main="Ejemplo 1 de minimos cuadrados")
cor(x,y)
fit <- lm(y ~ x)
lm(formula = y ~ x)
abline(fit)
summary(fit)
```

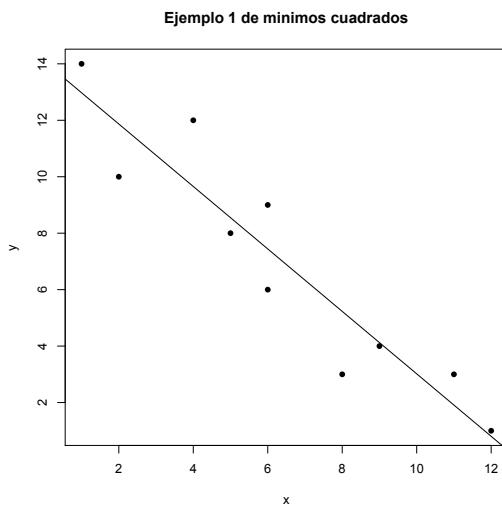


Figura 10.1: Ejemplo 1. Mínimos cuadrados.

10.1.2. Ejemplo 2

```
A <- structure(list(X = c(1, 2, 3, 4, 5, 6),
                     Y = c(10, 40, 120, 300, 800, 500)),
                     .Names = c("X", "Y"),
                     row.names = c(1L, 2L, 3L, 4L, 5L, 6L),
                     class = "data.frame")

attach(A)
names(A)
exponential.model <- lm(log(Y) ~ X)
summary(exponential.model)
timevalues <- seq(0, 30, 0.1)
Y.exponential2 <- exp(predict(exponential.model, list(X=timevalues)))
plot(X, Y, pch=16, main = "Ejemplo 4 de minimos cuadrados")
lines(timevalues, Y.exponential2, lwd=2, xlab = "X", ylab = "Y")
```

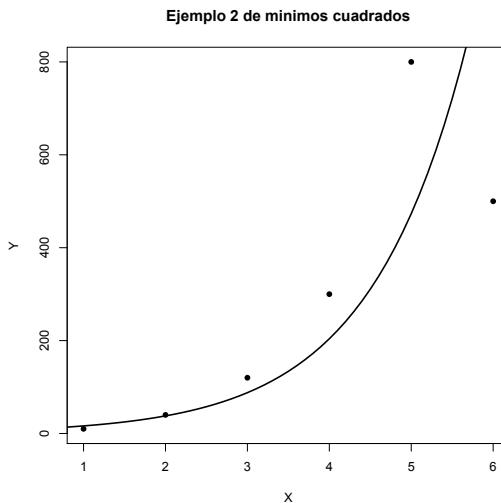


Figura 10.2: Ejemplo 2. Mínimos cuadrados.

10.1.3. Ejemplo 3.

```
x <- c(1, 2, 3, 5, 6, 8, 9, 10)
y <- c(1.5, 2.0, 4.0, 4.6, 4.7, 8.5, 8.8, 9.9)
plot(x, y, pch=16, main="Ejemplo 3 de minimos cuadrados")
cor(x, y)
fit <- lm(y ~ x)
lm(formula = y ~ x)
abline(fit)
summary(fit)
```

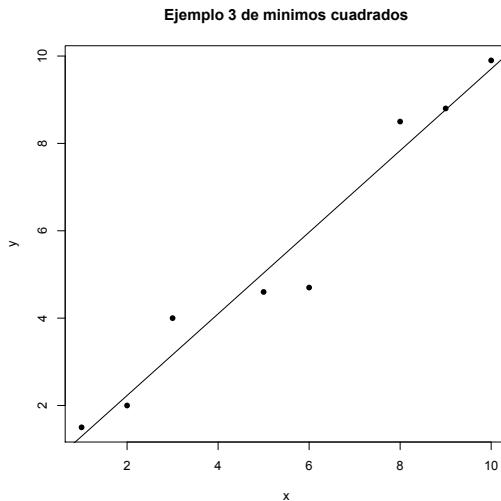


Figura 10.3: Ejemplo 3. Mínimos cuadrados.

10.2. Matrices en R

Una matriz en R es un conjunto de objetos indizados por filas y columnas. Un array en R es lo mismo, salvo que puede tener más de dos dimensiones.

La sintaxis general de la orden para crear una matriz es la siguiente:

```
matrix(data, nrow, ncol, byrow=F)
```

data Datos que forman la matriz

nrow Número de filas de la matriz

ncol Número de columnas de la matriz

byrow Los datos se colocan por filas o por columnas según se van leyendo. Por defecto se colocan por columnas.

10.2.1. Algunas funciones

dim Devuelve las dimensiones de una matriz.

dimnames devuelve el nombre de las dimensiones de una matriz.

colnames devuelve el nombre de las columnas de una matriz.

rownames devuelve el nombre de las filas de una matriz.

mode devuelve el tipo de datos de los elementos de una matriz.

length devuelve el número total de elementos de una matriz.

is.matrix devuelve T si el objeto es una matriz, F si no lo es.

[,] accede a elementos dentro de la matriz.

apply Aplica una función sobre las filas o columnas de una matriz.

cbind Añade una columna a una matriz dada.

rbind Añade una fila a una matriz dada.

t() transpuesta de la matriz.

diag() da un vector formado por los elementos de la diagonal principal.

eigen() regresa una lista con los autovalores y autovectores de la matriz.

Capítulo 11

Tarea 11

11.1. Coeficiente de Correlación de Pearson

Es una medida de la relación lineal entre dos variables aleatorias cuantitativas. A diferencia de la covarianza, la correlación de Pearson es independiente de la escala de medida de las variables.

De manera menos formal, podemos definir el coeficiente de correlación de Pearson como un índice que puede utilizarse para medir el grado de relación de dos variables siempre y cuando ambas sean cuantitativas.

En el caso de que se esté estudiando dos variables aleatorias X y Y sobre una población; el coeficiente de correlación de Pearson se simboliza con la letra $\rho_{x,y}$, siendo la expresión que nos permite calcularlo:

$$\rho_{X,Y} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]}{\sigma_X \sigma_Y},$$

Donde:

$$\begin{aligned} \sigma_{XY} &\text{ es la covarianza de } (X, Y) \\ \sigma_X &\text{ es la desviación típica de la variable } X \\ \sigma_Y &\text{ es la desviación típica de la variable } Y \end{aligned} \tag{11.1}$$

11.1.1. Ejemplo Cálculo de Coeficiente de Correlación de Pearson

En el siguiente ejemplo, las estaturas y pesos de 10 jugadores de baloncesto de un equipo se muestran en la tabla 11.1 y en la Figura 11.1:

<i>Estatura(x)</i>	<i>Pesos(y)</i>
186	85
189	85
190	86
192	90
193	87
193	91
198	93
201	103
203	100
205	101

Cuadro 11.1: Estaturas y pesos de jugadores.

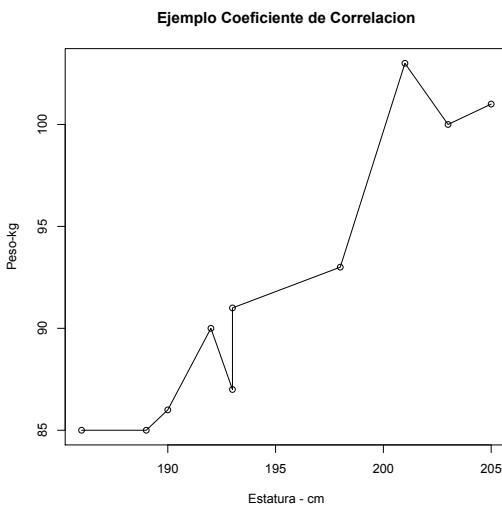


Figura 11.1: Gráfico de las Variables de Estatura y Peso

Se procede a calcular las desviaciones estándar , medias y coeficiente de correlación de Pearson a partir de los datos anteriores.

$$\bar{x} = \frac{1950}{10} = 195$$

$$\bar{y} = \frac{921}{10} = 92,1$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{380618}{10} - 195^2} = 6,07$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{85255}{10} - 92,1^2} = 6,56$$

$$\sigma_{xy} = \frac{179971}{10} - (195 \cdot 92,1) = 37,6$$

$$\rho_{xy} = \frac{37,6}{6,07 \cdot 6,56} = 0,94$$

El coeficiente de correlación de Pearson para este ejemplo es de 0,94 lo cual significa que existe una alta correlación entre las variables estudiadas.

Capítulo 12

Tarea 12

12.1. Aproximación de $\ln(x)$ por series de Taylor

Una serie de Taylor es una aproximación de funciones mediante una serie de potencias o suma de potencias enteras de polinomios como $(x - a)^n$ llamados términos de la serie, dicha suma se calcula a partir de las derivadas de la función para un determinado valor o punto a suficientemente derivable sobre la función y un entorno sobre el cual converja la serie. Si esta serie está centrada sobre el punto cero, $a = 0$, se le denomina serie de McLaurin.

La serie de Taylor de una función f real o compleja $f(x)$ infinitamente diferenciable en el entorno de un número real o complejo a es la siguiente serie de potencias:

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x - a)^3 + \dots$$

que puede ser escrito de una manera más compacta como la siguiente suma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n,$$

donde:

$n!$ es el factorial de n

$f(n)(a)$ denota la n -ésima derivada de f para el valor a de la variable respecto de la cual se deriva.

Para el cálculo de la serie de Taylor de la función $\ln(x)$ centrada en $a = 1$ se procede a calcular las derivadas como se muestra en el cuadro 12.1

Cuadro 12.1: Cálculo de derivadas

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \ln(x) \\
 f'(x) &= \frac{1}{x} \\
 f''(x) &= -x^{-2} \\
 f'''(x) &= 2x^{-3} \\
 f^v(x) &= -6x^{-4} \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

Después de calcular las derivadas se procede a evaluar las funciones en $a = 1$ como se muestra en el cuadro 12.2

Cuadro 12.2: Evaluación de derivadas

$$\begin{aligned}
 f(1) &= \ln(1) = 0 \\
 f'(1) &= 1 \\
 f''(1) &= -1^{-2} = -1 \\
 f'''(1) &= 2(1)^{-3} = 2 \\
 f^v(1) &= -6(1)^{-4} = -6 \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

Sustituyendo en la formula general se obtiene:

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots$$

$$f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f^{(3)}(1)}{3!}(x-1)^3 + \dots$$

$$0 + \frac{1}{1}(x-1) + \frac{-1}{2}(x-1)^2 + \frac{2}{6}(x-1)^3 + \frac{-6}{24}(x-1)^4 + \dots$$

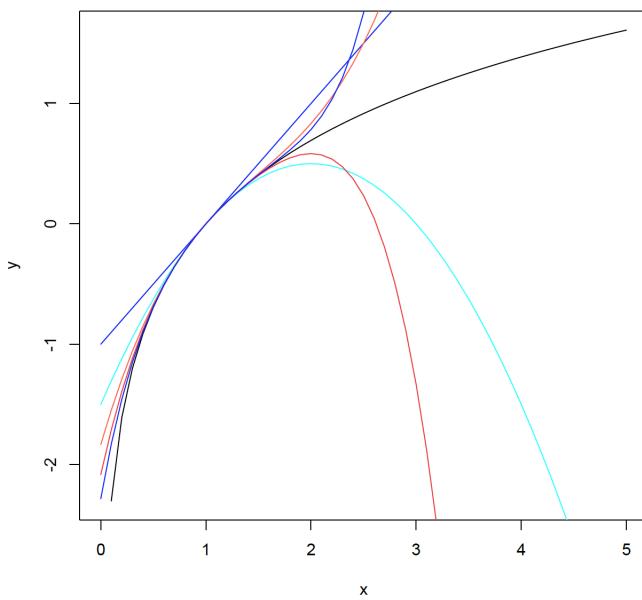
$$(x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \dots$$

O en su forma de sumatoria queda :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^n}{n}.$$

12.2. Aproximación de la Serie de Taylor en R

La gráfica de la figura 12.1 muestra la aproximación en Serie de Taylor realizada en el Software R.

Figura 12.1: Aproximación de la función $\ln(x)$ por serie de Taylor

Capítulo 13

Tarea 13

13.1. Mínimos cuadrados en Mathematica.

Se realizo el siguiente notebook en mathematica para el cálculo de mínimos cuadrados con el software Mathematica.

Ejemplo :

Halla la recta de mínimos cuadrados para el conjunto de puntos
(2, 2), (4, 11), (5, 23), (6, 28) (7, 38) y (8, 40).

En primer lugar consideraremos la ecuación de la recta
 $y = a_0 + a_1 \cdot x$.

Imponiendo las ecuaciones anteriores obtenemos la matriz A y el vector b dados por:

```
A = {{1, 2}, {1, 4}, {1, 5}, {1, 6}, {1, 7}, {1, 8}};
```

```
b = {2, 11, 23, 28, 38, 40};
```

Planteamos las ecuaciones normales.

```
matriz = Transpose[A].A;
```

```
vector = Transpose[A].b;
```

```
MatrixForm[matriz]
```

```
MatrixForm[vector]
```

```
sol = LinearSolve[matriz, vector]
```

```
recta = {1, x}.sol
```

Dibujando los puntos y la recta, resulta

```
puntos = {{2, 2}, {4, 11}, {6, 28}, {8, 40}};
```

```
dibu1 = ListPlot[puntos, Prolog -> AbsolutePointSize[7]];
```

```
dibu2 = Plot[recta, {x, 1, 11}];
```

```
Show[dibu1, dibu2]
```

En la figura 13.1 se observa el resultado de dicha aproximación.

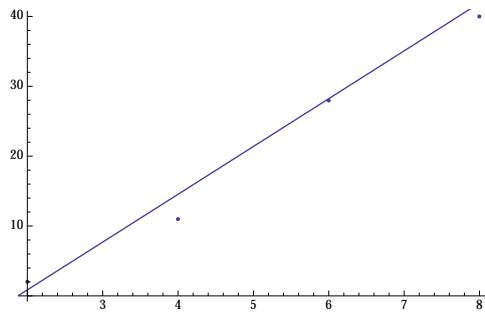


Figura 13.1: Ejemplo Mínimos Cuadrados en Mathematica.

13.2. BinCounts en Mathematica.

En Mathematica se usa el comando BinCounts para determinar el ancho de las barras de un histograma.

BinCounts [*x1* , *y1* , ... , *x2* , *y2* , ... , ... , *xbins* , *ybins* , ...] *x1,x2,y1* Corresponde a un arreglo con la frecuencia de los datos y *xbins* , *ybins* corresponde al tamaño de los bins., como se muestra en la figura 13.2.

```
a = RandomInteger[{1, 5}, 10];
b = Sort[Tally[a]][[All, 2]] // MatrixForm
BinCounts[a, {2, 5, 2}]
Histogram[a]
a = RandomVariate[NormalDistribution[0, 1], 10000];
BinCounts[a, {-3, 3, 1}]
Histogram[a]
```

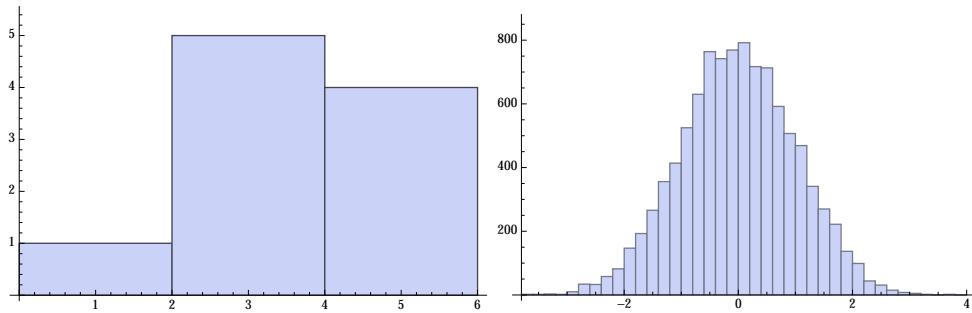


Figura 13.2: Ejemplo Bitcounts en Mathematica.

13.3. Diagramas Box and Whisker

Los diagramas de Caja-Bigotes (boxplots o box and whiskers) son una presentación visual que describe varias características importantes, al mismo tiempo, tales como la dispersión y simetría.

Para su realización se representan los tres cuartiles y los valores mínimo y máximo de los datos, sobre un rectángulo, alineado horizontal o verticalmente.

Una gráfica de este tipo consiste en una caja rectangular, donde los lados más largos muestran el recorrido intercuartílico. Este rectángulo está dividido por un segmento vertical que indica donde se posiciona la mediana y por lo tanto su relación con los cuartiles primero y tercero(recordemos que el segundo cuartil coincide con la mediana).

Esta caja se ubica a escala sobre un segmento que tiene como extremos los valores mínimo y máximo de la variable. Las lineas que sobresalen de la caja se llaman bigotes. Estos bigotes tienen un límite de prolongación, de modo que cualquier dato o caso que no se encuentre dentro de este rango es marcado e identificado individualmente. [3].

Con la función de BoxWhiskerChart en Mathematica se puede crear un diagrama box and whisker como el de la figura 13.3 siguiente:

```
a = RandomInteger[{1, 6}, 100];
BoxWhiskerChart[{a}]
```

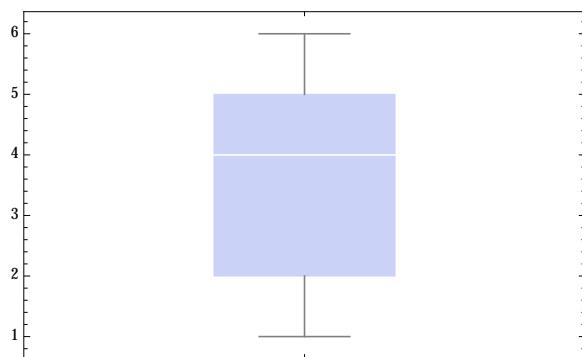


Figura 13.3: Diagrama Box and Whiskers

13.4. Cadenas de Markov en Mathematica

Tres fabricantes de automóviles tienen los siguientes datos con respecto a las compras de los clientes:

Estados	n_0	n_1	N_1	N_2
s1	Ford	40	30	30
s2	Chevrolet	20	50	30
s3	Nissan	25	25	50

Donde:

n_0 auto que posee actualmente

n_1 porcentaje en decimales de que compre un Ford

N1 porcentaje en decimales de que compre un Chevrolet

N2 porcentaje en decimales de que compre un Nissan

Apartir de los datos anteriores se genera la matriz de transición.

$$P = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,3 & 0,3 \\ 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0,25 & 0,25 & 0,5 \end{bmatrix}$$

¿Cuál es la probabilidad de que el propietario de un Nissan compre un Ford en la siguiente ocasión? Esto es en $n=0$, el estado es S3, y se desea saber en $n=1$ la probabilidad de compra de un Ford (S1).

Apartir de la matriz de transición es posible generar en Mathematica el gráfico como se muestra en la figura 13.4

```
P = ({ {0.4, 0.3, 0.3}, {0.2, 0.5, 0.3}, {0.25, 0.25, 0.5} });
proc = DiscreteMarkovProcess[1, P];
h = Graph[{ "s1", "s2", "s3"}, proc, GraphStyle -> "DiagramRed"];
ToExpression@StringReplace[ToString@FullForm@h, "Tooltip" :> ".1"]
```

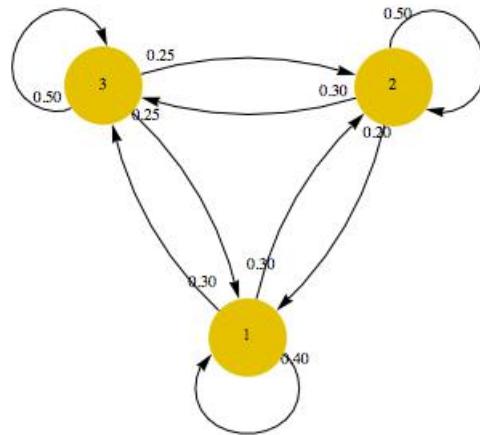


Figura 13.4: Ejemplo Cadena de Markov en Mathematica

Con el grafo de la cadena de markov de la figura 13.4 es claro observar que la probabilidad es 0.25, para que el propietario de un Nissan compre un Ford en la siguiente ocasión

Capítulo 14

Tarea 14

14.1. Demostraciones de las Ecuaciones del libro Fundamentals of Statistical and Thermal Physics. F. Reif

Las siguientes ecuaciones corresponden al capítulo 1- Random Walk and Calculation of mean Values for the Random Walk Problem

14.1.1. Ecuación 46

$$\ln W(n_1) = \ln W(\tilde{n}_1) + B_1\eta + \frac{1}{4}B_2\eta^2 + \frac{1}{6}B_3\eta^3 + \dots \quad (14.1)$$

De la Serie de Taylor

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots \quad (14.2)$$

Para el caso del $f(n_1) = \ln W(n_1)$, cerca de su máximo, tenemos las siguientes ecuaciones

$$n_1 \equiv \tilde{n}_1 + \eta \quad (14.3)$$

$$\eta = n_1 - \tilde{n}_1 \quad (14.4)$$

Usando la expansión en series de Taylor para $\ln W(n_1)$ en el punto \tilde{n}_1 :

$$\ln W(n_1) = \ln W(\tilde{n}_1) + \frac{d \ln W(\tilde{n}_1)}{dn_1} \frac{(n_1 - \tilde{n}_1)}{1!} + \frac{d^2 \ln W(\tilde{n}_1)}{dn_1^2} \frac{(n_1 - \tilde{n}_1)^2}{2!} + \frac{d^3 \ln W(\tilde{n}_1)}{dn_1^3} \frac{(n_1 - \tilde{n}_1)^3}{3!} + \dots \quad (14.5)$$

Sustituyendo η y haciendo $B_k = \frac{d^k \ln W(\tilde{n}_1)}{dn_1^k}$ la k-ésima derivada evaluada en \tilde{n}_1 , donde $k \geq 1$ se tiene la expresión:

$$\ln W(n_1) = \ln W(\tilde{n}_1) + B_1\eta + \frac{1}{4}B_2\eta^2 + \frac{1}{6}B_3\eta^3 + \dots \quad (14.6)$$

14.1.2. Ecuación 54

$$\ln W(n_1) = \ln N! - \ln n_1! - \ln(N - n_1)! + n_1 \ln p + (N - n_1) \ln q \quad (14.7)$$

Dada la ecuación de la distribución binomial $W(n_1)$:

$$W(n_1) = \frac{N!}{n_1!(N - n_1)!} p^{n_1} q^{N-n_1} \quad (14.8)$$

Aplicando \ln a ambos lados de la ecuación, y reduciendo mediante las propiedades de logaritmos,

$$\ln W(n_1) = \ln \left(\frac{N!}{n_1!(N - n_1)!} p^{n_1} q^{N-n_1} \right) \quad (14.9)$$

Aplicando la propiedad de la multiplicación de logaritmos tenemos:

$$\begin{aligned} \ln W(n_1) &= \ln \left(\frac{N!}{n_1!(N - n_1)!} \right) + \ln(p^{n_1} q^{N-n_1}) \\ \ln W(n_1) &= \ln \left(\frac{N!}{n_1!(N - n_1)!} \right) + \ln(p^{n_1}) + (q^{N-n_1}) \end{aligned}$$

Se aplica la propiedad del cociente de logaritmos para el primer sumando de la ecuación anterior, así como la propiedad de los exponentes para los últimos dos términos. Se obtiene entonces:

$$\ln W(n_1) = \ln(N!) - \ln(n_1!(N - n_1)!) + n_1 \ln p + (N - n_1) \ln q \quad (14.10)$$

$$\ln W(n_1) = \ln(N!) - (\ln n_1! + \ln(N - n_1)!) + n_1 \ln p + (N - n_1) \ln q \quad (14.11)$$

$$(14.12)$$

Finalmente se tiene:

$$\ln W(n_1) = \ln(N!) - \ln n_1! - \ln(N - n_1)! + n_1 \ln p + (N - n_1) \ln q \quad (14.13)$$

14.1.3. Ecuación 55

$$\frac{d \ln(n!)}{dn} \approx \ln(n+1)$$

Para cuando n es un entero grande $n \gg 1$, entonces $\ln(n!)$ se puede considerar casi una función continua de n , de forma que se puede aproximar la derivada de la función con $\ln(n+1)!$ como ese ligero cambio entre $\ln(n!)$ y el siguiente paso, entonces:

$$\frac{d \ln(n!)}{dn} \approx \ln(n+1)! - \ln(n)!$$

Por leyes de logaritmos:

$$\log_b \left(\frac{x}{y} \right) = \log_b(x) - \log_b(y)$$

Entonces:

$$\ln(n+1)! - \ln(n)! = \ln \frac{(n+1)!}{n!}$$

14.1. DEMOSTRACIONES DE LAS ECUACIONES DEL LIBRO FUNDAMENTALS OF STATISTICAL AND THERM

Ya que se hizo la consideración de q n es un entero muy grande de forma que $n \gg 1$ entonces:

$$\ln \frac{(n+1)!}{n!} = \ln(n+1)$$

Por lo que:

$$\frac{d \ln(n!)}{dn} \approx \ln(n+1)$$

14.1.4. Ecuación 56

$$\frac{d \ln n}{dn} \approx \ln n$$

Ya que se considera n como un entero muy grande de forma que $n \gg 1$, entonces mediante la fórmula de Stirling se tiene:

$$\ln n! \approx n \ln n - n \quad (14.14)$$

Derivando ambos lados de la ecuación:

$$\begin{aligned} \frac{d \ln n}{dn} &\approx \frac{d(n \ln n - n)}{dn} \\ \frac{d \ln n}{dn} &\approx \frac{n}{n} + \ln n - 1 \\ \frac{d \ln n}{dn} &\approx \ln n \end{aligned} \quad (14.15)$$

14.1.5. Ecuación 57

$$\frac{d \ln W(n_1)}{dn_1} = -\ln n_1 + \ln(N - n_1) + \ln p - \ln q$$

Dada la ecuación:

$$\ln W(n_1) = \ln(N!) - \ln n_1! - \ln(N - n_1)! + n_1 \ln p + (N - n_1) \ln q$$

Obtenemos la primera derivada con respecto a n_1 :

$$\begin{aligned} \frac{d \ln W(n_1)}{dn_1} &= \frac{d}{dn_1} (\ln(N!) - \ln n_1! - \ln(N - n_1)! + n_1 \ln p + (N - n_1) \ln q) \\ \frac{d \ln W(n_1)}{dn_1} &= \frac{d \ln(N!)}{dn_1} - \frac{d \ln n_1!}{dn_1} - \frac{d \ln(N - n_1)!}{dn_1} + \frac{dn_1 \ln p}{dn_1} + \frac{d(N - n_1) \ln q}{dn_1} \end{aligned}$$

Cada término da como resultado lo siguiente:

$$\begin{aligned}\frac{d \ln(N!)}{dn_1} &= 0 \\ \frac{dn_1 \ln p}{dn_1} &= \ln p \\ \frac{d(N - n_1) \ln q}{dn_1} &= -\ln q\end{aligned}$$

Recordamos que $\frac{d \ln n!}{dn} \approx \ln n!$, por lo tanto

$$\begin{aligned}\frac{d \ln n_1!}{dn_1} &\approx \ln n_1 \\ \frac{d \ln(N - n_1)!}{dn_1} &\approx \ln(N - n_1)\end{aligned}$$

Entonces

$$\frac{d \ln W(n_1)}{dn_1} = -\ln n_1 + \ln(N - n_1) + \ln p - \ln q \quad (14.16)$$

14.1.6. Ecuación 58

Igualando la ecuación 57 a 0, se encuentra el valor $n_1 = \tilde{n}_1$, donde W es el máximo, entonces, se obtiene:

$$\frac{d \ln W}{dn} = -\ln(n_1) + \ln(N - n_1) + \ln(p) - \ln(q) = 0 \quad (14.17)$$

Por propiedades de los logaritmos:

$$[\ln(N - n_1) - \ln(n_1)] + [\ln(p) - \ln(q)] = 0 \quad (14.18)$$

$$\ln\left(\frac{N - n_1}{n_1}\right) + \ln(pq) = 0 \quad (14.19)$$

$$\ln\left(\frac{N - n_1}{n_1} \cdot \frac{p}{q}\right) = 0 \quad (14.20)$$

$$n_1 = \tilde{n}_1$$

14.1.7. Ecuación 59

$$\tilde{n}_1 = Np$$

$$(N - \tilde{n}_1)p = \tilde{n}_1q$$

Despejando N y p de lado derecho

$$-\tilde{n}_1 = \tilde{n}_1 \frac{q}{p} - N$$

14.1. DEMOSTRACIONES DE LAS ECUACIONES DEL LIBRO FUNDAMENTALS OF STATISTICAL AND THERM

Invirtiendo los signos

$$\tilde{n}_1 = N - \tilde{n}_1 \frac{q}{p}$$

Multiplicando por p de ambos lados

$$\tilde{n}_1 p = Np - \tilde{n}_1 q$$

Sumando $\tilde{n}_1 p$ de ambos lados y factorizando

$$\tilde{n}_1(p + q) = Np$$

Dado que $(p + q) = 1$

$$\tilde{n}_1 = Np$$

14.1.8. Ecuación 60

Recordando que $p + q = 1$ y de forma análoga a la ecuación 50.

$$\begin{aligned}
 (N - \tilde{n}_1)p &= \tilde{n}_1 q \\
 Np - \tilde{n}_1 p &= \tilde{n}_1 q \\
 Np &= \tilde{n}_1 q + \tilde{n}_1 p \\
 Np &= \tilde{n}_1(q + p) \\
 Np &= \tilde{n}_1
 \end{aligned} \tag{14.21}$$

14.1.9. Ecuación 61

$$\frac{d^2 \ln W(n_1)}{dn_1^2} = -\frac{1}{n_1} - \frac{1}{N - n_1}$$

Partiendo la primera derivada

$$\begin{aligned}
 \frac{d \ln W(n_1)}{dn_1} &= -\ln n_1 + \ln N - n_1 + \ln p - \ln q \\
 \frac{d}{dn_1} \left(\frac{d \ln W(n_1)}{dn_1} \right) &= \frac{d}{dn_1} (-\ln n_1 + \ln N - n_1 + \ln p - \ln q) \\
 \frac{d^2 \ln W(n_1)}{dn_1^2} &= -\frac{d(\ln n_1)}{dn_1} + \frac{d \ln (N - n_1)}{dn_1} + \frac{d(\ln p)}{dn_1} - \frac{d(\ln q)}{dn_1}
 \end{aligned}$$

Resolviendo las derivadas se tiene que:

$$\begin{aligned}
-\frac{d(\ln n_1)}{dn_1} &= -\frac{1}{n_1} \\
\frac{d \ln(N - n_1)}{dn_1} &= \frac{d \ln(N - n_1)}{dn_1} \frac{d(N - n_1)}{dn_1} \\
&= \frac{1}{N - n_1}(-1) = -\frac{1}{N - n_1} \\
\frac{d \ln p}{dn_1} &= 0 \\
\frac{d \ln q}{dn_1} &= 0
\end{aligned} \tag{14.22}$$

Sumando los términos obtenidos, comprobamos que:

$$\frac{d^2 \ln W(n_1)}{dn_1^2} = -\frac{1}{n_1} - \frac{1}{N - n_1}$$

14.1.10. Ecuación 62

Evaluando la ecuación 61 con lo obtenido en la ecuación 60 se obtiene:

$$b_2 = -\frac{1}{Np} - \frac{1}{N - Np}$$

Desarrollando se obtiene:

$$\begin{aligned}
b_2 &= -\frac{1}{N} \frac{1}{p} - \frac{1}{N(1-p)} \\
b_2 &= -\frac{1}{N} \frac{1}{p} - \left(\frac{1}{N} \frac{1}{(1-p)} \right) \\
b_2 &= -\frac{1}{N} \frac{1}{p} - \left(\frac{1}{N} \frac{1}{q} \right) \\
b_2 &= -\frac{1}{N} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) \\
b_2 &= -\frac{1}{N} \frac{q+p}{pq}
\end{aligned} \tag{14.23}$$

Dado que $p + q = 1$

$$b_2 = -\frac{1}{Npq}$$

Capítulo 15

Tarea 15

15.1. Congruencia Zeller

La congruencia de Zeller es un algoritmo ideado por Julius Christian Johannes Zeller para calcular el día de la semana de cualquier fecha del calendario.

Para el calendario gregoriano la congruencia de Zeller es:

$$h = \left(q + \left\lfloor \frac{(m+1)26}{10} \right\rfloor + K + \left\lfloor \frac{K}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{J}{4} \right\rfloor - 2J \right) \pmod{7},$$

para el calendario juliano es:

$$h = \left(q + \left\lfloor \frac{(m+1)26}{10} \right\rfloor + K + \left\lfloor \frac{K}{4} \right\rfloor + 5 - J \right) \pmod{7},$$

Donde:

h es el día de la semana (0 = sábado, 1 = domingo, 2 = lunes,...),

q es el día del mes,

m es el mes,

J es la centuria (año / 100)

K el año de la centuria (año mod 100).

Se programó el algoritmo de la congruencia Zeller en Mathematica para el calendario gregoriano, utilizando cajas de texto para la entrada de la fecha (Día, Mes y Año) y la función Dynamic para que los resultados se actualicen automáticamente.

A continuación en las figuras 15.1 y 15.2 se muestran algunos ejemplos:

Dia : **26**

Mes : **05**

Año : **1960**

La fecha corresponde al : **Jueves**

Figura 15.1: Ejemplo 1 del cálculo de la congruencia de Zeller

Dia : **30**

Mes : **03**

Año : **1810**

La fecha corresponde al : **Viernes**

Figura 15.2: Ejemplo 2 del cálculo de la congruencia de Zeller

Capítulo 16

Tarea 16

16.1. Distribución Fermi Dirac

La distribución de Fermi-Dirac se aplica a los fermiones, partículas con espín semientero, que obedece el principio de exclusión de Pauli. Cada tipo de función de distribución tiene un término de normalización multiplicando el denominador del exponente, que puede ser dependiente de la temperatura. Para el caso de Fermi-Dirac, ese término se suele escribir:

$$e^{-\frac{E_f}{kT}} \quad (16.1)$$

Donde:

E_f es la energía de Fermi

La importancia de la energía de Fermi se ve más claramente estableciendo $T = 0$. En el cero absoluto, la probabilidad es igual a 1 para energías menores que la energía de Fermi y cero para energías mayores que la energía de Fermi. Se puede imaginar todos los niveles hasta la energía de Fermi llenos, pero ninguna partícula tiene una energía mayor. Esto es totalmente coherente con el principio de exclusión de Pauli, donde cada estado cuántico no puede tener más que una sola partícula.

$$f(E) = \frac{1}{e^{(E-E_f)/k_B T} + 1}. \quad (16.2)$$

Donde:

$f(E)$ es la probabilidad que una partícula tenga una energía E.

En valor absoluto cero, los fermiones encontrarán toda la energía disponible sobre un nivel E_f llamada la energía de Fermi con una y única partícula. Están restringidos por el principio de exclusión de Pauli

. A altas temperaturas algunos de ellos son elevados a niveles superiores del nivel de Fermi.

Para temperaturas bajas, éstos estados de energía que corresponden a E_f tienen una probabilidad de escencialmente 1 y estos debajo de la energía de Fermi tienen energía de escencialmente zero.

La diferencia cuántica de las arista partiendo que las partículas son indistinguibles.

E es la energía en el estado i-ésimo

E_F es el potencial químico

T es la temperatura

k_B la constante de Boltzmann

16.2. Distribución Bose-Einstein

Considerando un gas con un número fijo de partículas N con energías E_r que requiere el uso de estadísticas cuánticas para la descripción del mismo. Esto es, que sea un gas de partículas idénticas obedeciendo la estadística de Bose-Einstein (bosones).

$$N = \sum in_i, E_r = \sum in_i E_i \quad (16.3)$$

donde n_i corresponde al número de ocupación del estado asumiendo desde cero hasta infinito con energías $E_1 < E_2 < \dots E_n$

Se utiliza la distribución de Gibbs o distribución macrocanónica. La descripción se hace a través de la función de macro partición del sistema (no confundir con Z la función de partición para moléculas en un baño térmico) y recordando que el potencial químico está definido como:

$$\begin{aligned} \mu &= -T \frac{\delta S_2}{\delta N_0} \\ Z(T, V, \mu) &= \sum re^{-\beta(\mu N - E_{nr})} \end{aligned} \quad (16.4)$$

además con la distribución de probabilidad normalizada (Gibbs)

$$P_r = \frac{e^{-\beta(\mu N - E_r)}}{Z} = p(n_1, n_2 \dots) \quad (16.5)$$

y sustituyendo ahora en la función de probabilidad

$$\prod_{i=1} \frac{e^{-\beta(\mu - E_i)n_i}}{Z_i} = \prod_{i=1} p_i(n_i) = pN_r \quad (16.6)$$

lleva a que la distribución de probabilidad depende de un estado i solamente. Significa que la probabilidad de encontrar n_i partículas es independiente de los otros números de ocupación n_j donde $j \neq i$. Interpretando este resultado, se concluye que el estado de un sistema de partículas que no interactúan entre sí puede especificarse en términos de los estados individuales. La energía del sistema es la suma de las energías individuales y es posible considerar un estado a la vez.

Además, debe cumplirse que la probabilidad esté normalizada

$$\sum n_i p_i(n_i) = 1, \quad (16.7)$$

para las estadísticas de Bose-Einstein, donde $n_i = 0, 1, 2, \dots$ la función de macro partición se convierte en una serie geométrica que converge solo si el exponencial es menor que 1, esto ocurre cuando $\mu < E$

$$Z_i = \frac{1}{1 - e^{-\beta(\mu - E_i)}}, \quad (16.8)$$

ahora calculando el número medio de ocupación (n_i) del iésimo estado

$$n_i = \frac{1}{1 - e^{-\beta(\mu - E_i)}} = f_{be}(E), \quad (16.9)$$

generalizando para el número total de partículas en el sistema:

$$N = \sum i = 1n_i = \sum i = 1 \frac{1}{1 - e^{-\beta(\mu - E_i)}}. \quad (16.10)$$

16.3. Distribución Maxwell-Boltzmann

La estadística de Maxwell-Boltzmann es una función estadística desarrollada para modelar el comportamiento de sistemas físicos regidos por la mecánica clásica. Esta función estadística clásica, formulada originalmente por los físicos J.C. Maxwell y L. Boltzmann, rige la distribución de un conjunto de partículas en función de los posibles valores de energía de los estados que éstas pueden ocupar. Para cada sistema termodinámico, la distribución de Maxwell-Boltzmann no es otra cosa que la aplicación del colectivo canónico de la mecánica estadística, bajo el supuesto no-cuántico de que los números de ocupación de cada estado disponible son pequeños comparados con el número máximo de ocupación.

Esta función es una densidad de probabilidad cuya expresión es:

$$f(\epsilon_i) = A(N; T)e^{(-\epsilon_i)/kT}$$

O de forma más generalizada, puede expresarse como:

$$\frac{N_i}{N} = \frac{g_i}{e^{(\epsilon_i - \mu)/kT}} = \frac{g_i e^{-\epsilon_i/kT}}{Z}$$

Donde:

$A(N; T)$: es una función dependiente de N , el número de partículas en el sistema y de T , la temperatura del sistema en Kelvin.

N_i es el número de partículas en el estado i .

ϵ_i es la energía del estado i -ésimo.

g_i es la degeneración del nivel de energía i , es decir, el número de estados (excluyendo el estado de partícula libre) con energía ϵ_i .

μ es el potencial químico.

k es la constante de Boltzmann.

N es el número total de partículas:

$$N = \sum_i N_i \quad (16.11)$$

Z es la función partición:

$$Z = \sum_i g_i e^{-\epsilon_i/kT} \quad (16.12)$$

e es el número de Euler.

La distribución de Maxwell-Boltzmann se ha aplicado especialmente a la teoría cinética de gases, y otros sistemas físicos, además de en econofísica para predecir la distribución de la renta. En realidad la distribución de Maxwell-Boltzmann es aplicable a cualquier sistema formado por N "partículas." individuos que intercambian estacionariamente entre sí una cierta magnitud M y cada uno de ellos tiene una cantidad m_i de la magnitud M y a lo largo del tiempo se cumple que $M := m_1 + m_2 + \dots + m_N$. [4]

16.4. Señal WOW

La señal Wow! es la denominación por la cual se conoce en círculos astronómicos a una captación de radio que constituiría el único mensaje recibido hasta la fecha que podría tener un origen extraterrestre y haber sido emitido por seres inteligentes.

El 15 de agosto de 1977 a las 23:16, el radiotelescopio Big Ear recibió una señal de radio de origen desconocido durante exactamente 72 segundos proveniente de la zona oriental de la constelación de Sagitario y alcanzando una intensidad 30 veces superior al ruido de fondo.

De acuerdo al protocolo utilizado, esta señal no fue grabada sino que fue registrada por la computadora del observatorio en una sección de papel continuo diseñada para tal efecto. Unos días después, el joven profesor de la Universidad Estatal de Ohio Jerry R. Ehman, que estaba trabajando como voluntario en el proyecto SETI revisando los registros de la computadora, descubrió la señal anómala más intensa que se hubiera detectado hasta entonces por un radiotelescopio. La señal fue conocida como Wow debido a la anotación que Jerry Ehman hizo en el papel continuo, denotando su sorpresa y emoción. La secuencia de dicha señal fue: 6EQUJ5.

En la actualidad aún se investiga el origen de la señal. Las explicaciones de la señal van desde el mensaje de una civilización extraterrestre inteligente, hasta alguna interferencia cercana al radiotelescopio. [2]

Capítulo 17

Tarea 17

17.1. Problema de la Oveja

There are 100 equally spaced points around a circle. At 99 of the points, there are sheep, and at 1 point, there is a wolf. At each time step, the wolf randomly moves either clockwise or counterclockwise by 1 point. If there is a sheep at that point, he eats it. The sheep don't move. What is the probability that the sheep who is initially opposite the wolf is the last one remaining?

Nombremos a la oveja que esta inicialmente al lado opuesto del lobo como i^* . Si i es la última oveja que queda, quiere decir que las vecinas de i son comidas antes que i . Sin embargo, para que lo anterior se cumpla, el lobo tuvo que comer a una de las vecinas de i , y luego ir todo el camino para comer al siguiente vecino de i .

Consideramos entonces el momento justo cuando el lobo se ha comido a la primer vecina de i . La pregunta entonces se vuelve ¿Cuál es la probabilidad que el lobo se coma a la siguiente vecina de i antes que a i ? Esto se convierte entonces en un problema similar a La ruina del jugador(Gambler's ruin)

Podemos desplegar el círculo formando una línea recta, y tomando como referencia a la oveja i , la nombramos como "0", el lobo, que está adyacente a i , será la posición "1" la segunda vecina de i será n .[?]

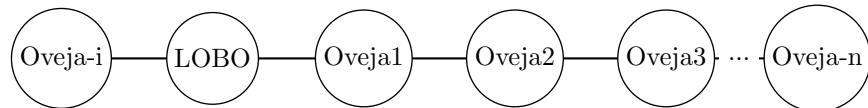


Figura 17.1: Problema de la oveja.

$$\text{Probabilidad de avance (+1)} \rightarrow p$$

$$\text{Probabilidad de retroceso (-1)} \rightarrow q = 1 - p$$

$P_0 = 0 \rightarrow$ Probabilidad que se coma a n antes que 0

$P_n = 1 \rightarrow$ Probabilidad que se coma a n antes que 0

$$P_i = pP_{i+1} + qP_{i-1} \quad (17.1)$$

P_i es la probabilidad que el lobo se coma a n antes que 0

Ya que $p + q = 1$, entonces:

$$\begin{aligned} (p+q)P_i &= pP_{i+1} + qP_{i-1} \\ pP_i + qP_i &= pP_{i+1} + qP_{i-1} \\ P_{i+1} - P_i &= \frac{q}{p}(P_i - P_{i-1}) \end{aligned} \quad (17.2)$$

Para el caso $i = 1$ (Cuando el lobo comienza en 1)

$$P_2 - P_1 = \frac{q}{p}(P_1 - P_0) = \frac{q}{p}P_1$$

Para el caso $i=2$

$$P_3 - P_2 = \frac{q}{p}(P_2 - P_1) = \left(\frac{q}{p}\right)^2 P_1$$

Para el caso general i

$$P_{i+1} - P_i = \left(\frac{p}{q}\right)^i P_1$$

Sumando todas las ecuaciones(desde 1 hasta i)

$$P_{i+1} - P_1 = \sum_{k=1}^i (P_{k+1} - P_k) = \sum_{k=1}^i \left(\frac{q}{p}\right)^k P_1$$

Despejando P_{i+1}

$$P_{i+1} = P_1 + P_1 \sum_{k=1}^i \left(\frac{q}{p}\right)^k = P_1 \sum_{k=0}^i \left(\frac{q}{p}\right)^k \quad (17.3)$$

$$P_{i+1} = \begin{cases} P_1 \left(\frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{i+1}}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)} \right) & \text{si } p \neq q \\ P_1(i+1) & \text{si } p = q \end{cases} \quad (17.4)$$

Suponiendo que $i = n - 1$

$$P_{i+1} = \begin{cases} P_1 \left(\frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^n}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)} \right) & \text{si } p \neq q \\ P_1(n) & \text{si } p = q \end{cases}$$

Y ya que $P_n = 1$

$$\begin{aligned} P_n &= P_1 n \\ 1 &= P_1 n \\ P_1 &= \frac{1}{n} \end{aligned} \quad (17.5)$$

Para un caso general en el que el lobo comienza en la posición i

$$P_{i+1} = \begin{cases} P_1 \left(\frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^i}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^n} \right) & \text{si } p \neq q \\ \frac{i}{n} & \text{si } p = q \end{cases} \quad (17.6)$$

Capítulo 18

Tarea 18

18.1. Serie Geométrica

Es una serie en la cual la razón entre los términos sucesivos de la serie permanece constante.

Por ejemplo la serie

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n} \quad (18.1)$$

es geométrica, pues cada término sucesivo se obtiene al multiplicar el anterior por $\frac{1}{2}$

El comportamiento de los términos depende de la razón común r :

- Si $|r| < 1$ los términos decrecen y se acercan a cero en el límite. En tal caso, la serie converge.
- Si $|r| > 1$ los términos de la serie se incrementan en magnitud. La suma de los términos también aumenta y la serie no tiene suma. La serie diverge.

18.2. Sumatoria de los primeros n términos de la serie

Se denomina como S_n a la suma de los n primeros términos consecutivos de una progresión geométrica:

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

Si se quiere obtener una fórmula para calcular de una manera rápida dicha suma, se multiplica ambos miembros de la igualdad por la razón de la progresión r .

$$r \cdot S_n = r \cdot (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n)$$

$$r \cdot S_n = r \cdot a_1 + r \cdot a_2 + \dots + r \cdot a_{n-1} + r \cdot a_n$$

puesto que $r \cdot a_i = a_{i+1}$

$$r \cdot S_n = a_2 + a_3 + \dots + a_n + a_{n+1}$$

Si se procede a restar de esta igualdad la primera:

$$r \cdot S_n - S_n = a_{n+1} - a_1$$

ya que todos los términos intermedios se cancelan mutuamente. Despejando S_n

$$S_n = \frac{a_{n+1} - a_1}{r - 1} = \frac{a_1 \cdot r^n - a_1}{r - 1} = a_1 \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

De esta manera se obtiene la suma de los n términos de una progresión geométrica cuando se conoce el primer y el último término de la misma. Si se quiere simplificar la fórmula, se puede expresar el término general de la progresión n como

$$S_n = \frac{a_1 \cdot r^n - a_1}{r - 1} = a_1 \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

que expresa la suma de n términos consecutivos de una progresión geométrica en función del primer término y de la razón de la progresión. Se puede generalizar el procedimiento anterior para obtener la suma de los términos consecutivos comprendidos entre dos elementos arbitrarios

$$a_m \text{ y } a_n$$

(ambos inclusive):

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^n a_k &= \frac{r \cdot a_n - a_m}{r - 1} = \\ a_1 \cdot \frac{(r^{n+1} - r^m)}{r - 1} &= \\ a_m \cdot \frac{(r^{n-m+1} - 1)}{r - 1} \end{aligned}$$

Suma de infinitos términos de una progresión geométrica

Si el valor absoluto de la razón es menor que la unidad $|r| < 1$, la suma de los infinitos términos decrecientes de la progresión geométrica converge hacia un valor finito. En efecto, si $|r| < 1$, r^∞ tiende hacia 0, de modo que:

$$S_\infty = a_1 \frac{r^\infty - 1}{r - 1} = a_1 \frac{0 - 1}{r - 1}$$

Finalmente, la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica de razón inferior a la unidad es:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - r}$$

Producto de los primeros "n" términos de una progresión geométrica

El producto de los n primeros términos de una progresión geométrica se puede obtener mediante la fórmula

$$\prod_{i=1}^n a_i = (\sqrt{a_1 \cdot a_n})^n$$

(si $a_1, r > 0$). Dado que los logaritmos de los términos de una progresión geométrica de razón r (si $a_1, r > 0$), están en progresión aritmética de diferencia $\log r$, se tiene:

$$\log\left(\prod_{i=1}^n a_i\right) = \sum_{i=1}^n \log a_i = \frac{(\log a_1 + \log a_n)n}{2} = \log\left(\sqrt{a_1 \cdot a_n}\right)^n$$

18.3. Ejemplos

- La serie geométrica: $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{8}{10^2}\right) \left(\frac{1}{10^2}\right)^n$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{8}{10^2}\right) \left(\frac{1}{10^2}\right)^n = \frac{8}{10^2} + \frac{8}{10^4} + \frac{8}{10^6} + \frac{8}{10^8} + \dots$$

Tiene $r = \frac{1}{10^2}$ y $a = \frac{8}{10^2}$
como $|r| < 1$ la serie converge, y su suma es:

$$\frac{a}{1-r} = \frac{(8/10^2)}{1 - (1/10^2)} = \frac{8}{99}$$

- La serie geométrica: $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = 1 + \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^3 + \dots$$

Como $|r| \geq 1$ la serie diverge, y no tiene suma

Capítulo 19

Conclusiones

La actividad del área de Probabilidad y Estadística está enfocada a un amplio espectro de temas tanto teóricos como aplicados, entre los que se incluyen varios enfoques de la inferencia estadística y relaciones con otras ramas de las matemáticas y las ciencias de la computación.

Durante este curso se abordaron diversos temas relacionados con procesos de probabilidad y estadística que nos proporcionaron un panorama más general acerca de su aplicación en la resolución de problemas, de este modo los temas se fueron construyendo de manera dinámica complementándose con algunas investigaciones que hicieron de este curso muy práctico. Lo más interesante de la estadística como ciencia es que en muchos casos, la información cuantitativa que nos brinda nos permite conocer a ese nivel mucho mejor a la sociedad.

Capítulo 20

Apéndice

20.1. Software Empleado

- TeXShop
- Wolfram Mathematica
- Root Data Analysis Framework
- R Project for Statistical Computing.

20.2. Exposición Análisis de Componentes Principales

¿Qué es?
¿Para qué sirve?
Fases del Análisis de Componentes Principales
Aplicación

Analisis de Componentes principales

Ana Acosta Arenas

18 de enero de 2016

Table of Contents

1 ¿Qué es?

2 ¿Para qué sirve?

3 Fases del Análisis de Componentes Principales

- Análisis de la Matriz de Correlaciones
- Selección de Factores
- Análisis de la Matriz Factorial
- Interpretación de los Factores

4 Aplicación

¿Qué es?

- Es una técnica estadística
- Sintetizar un gran conjunto de datos
- Crear unas nuevas variables que son función lineal de las originales
- Reducir la dimensión de un conjunto de variables a un conjunto de menor número de variables para mejorar la interpretabilidad de los datos.

Correlación

La correlación estadística nos indica si dos variables están relacionadas o no.

Ejemplo:

- El ingreso familiar y los gastos familiares están correlacionados; cuando el ingreso aumenta también los gastos tenderá a incrementarse y viceversa.

Variabilidad

Se refiere a lo que varía, cambia o se modifica. Por ejemplo:

- La gran variabilidad climática de la actualidad es una consecuencia de la contaminación
- Te recomiendo que consultes en distintos bancos antes de tomar el crédito: existe una importante variabilidad de las condiciones de acuerdo a la entidad
- La variabilidad de los síntomas hace que sea una enfermedad difícil de diagnosticar.

Coeficiente de Correlación de Pearson

$$\rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\sum \frac{XY}{N} - \bar{X}\bar{Y}}{\sigma_x \sigma_y} \quad (1)$$

Media de X

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{N} \quad (2)$$

Media de Y

$$\bar{Y} = \frac{\sum Y}{N} \quad (3)$$

Desviación estándar de X

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum X^2}{N} - \bar{X}^2} \quad (4)$$

Desviación estándar de Y

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum Y^2}{N} - \bar{Y}^2} \quad (5)$$

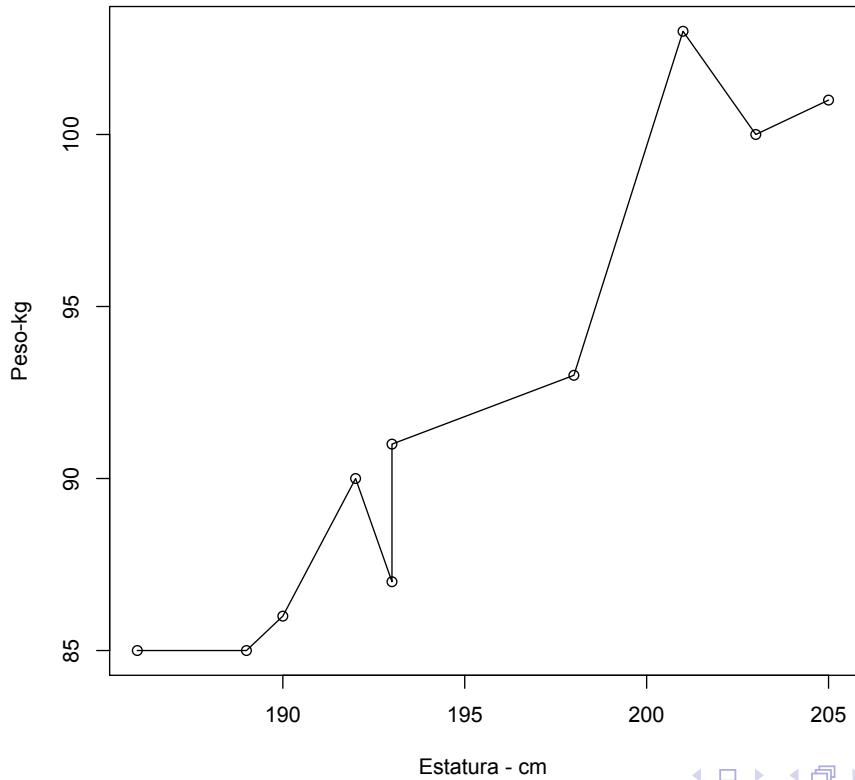
Ejemplo Calcular el Coeficiente de Correlación

Las estaturas y pesos de 10 jugadores de baloncesto de un equipo son:

<i>Estatura(x)</i>	<i>Pesos(y)</i>
186	85
189	85
190	86
192	90
193	87
193	91
198	93
201	103
203	100
205	101

Gráfico de datos

Ejemplo Coeficiente de Correlacion



Ejemplo

$$\bar{x} = \frac{1950}{10} = 195 \quad (6)$$

$$\bar{y} = \frac{921}{10} = 92.1 \quad (7)$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{380618}{10} - 195^2} = 6.07 \quad (8)$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{85255}{10} - 92.1^2} = 6.56 \quad (9)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{179971}{10} - (195 \cdot 92.1) = 37.6 \quad (10)$$

$$\rho_{xy} = \frac{37.6}{6.07 \cdot 6.56} = 0.94 \quad (11)$$

¿Para qué sirve?

- Cuando se recoge la información de una muestra de datos, lo más frecuente es tomar el mayor número posible de variables.
- Muchas variables implican demasiados coeficientes de correlación

Ejemplo:

40 Variables=780 Coeficientes de Correlación

- Si existe fuerte Correlación entre las variables, Es posible simplificar y determinar las componentes que pueden representar al conjunto de variables sin tener que recurrir a la totalidad de variables

El ACP soluciona esto.

¿Qué es?
¿Para qué sirve?
Fases del Análisis de Componentes Principales
Aplicación

Análisis de la Matriz de Correlaciones
Selección de Factores
Análisis de la Matriz Factorial
Interpretación de los Factores

Análisis de la Matriz de Correlaciones

- El ACP se puede realizar sólo si existen altas correlaciones entre las variables
- Alta correlación implica existencia de información redundante

Selección de Factores

- Los factores son las componentes principales.
- Se toman en cuenta los factores que expliquen el mayor porcentaje de variabilidad
- El primer factor explica la mayor cantidad de variabilidad
- El segundo factor explica la máxima variabilidad posible no explicada por el primer factor

¿Qué es?
¿Para qué sirve?
Fases del Análisis de Componentes Principales
Aplicación

Análisis de la Matriz de Correlaciones
Selección de Factores
Análisis de la Matriz Factorial
Interpretación de los Factores

Análisis de la Matriz Factorial

- Se representan los Componentes Principales en forma de Matriz
- La matriz tendrá tantas columnas como Componentes Principales y filas como variables

Interpretación de los Factores

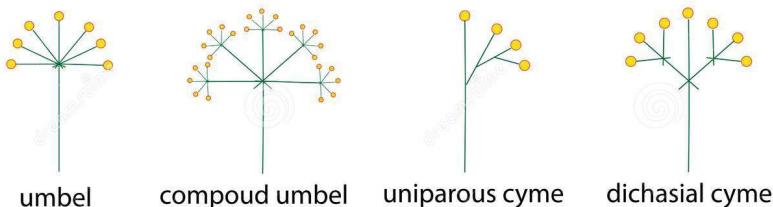
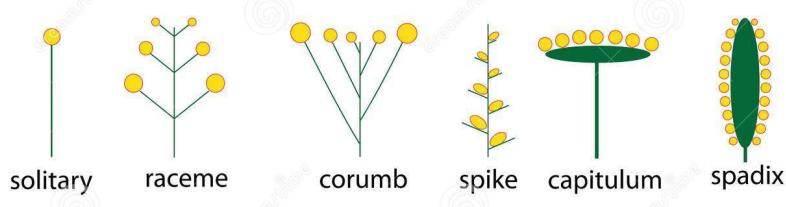
- La interpretación depende del objetivo de la investigación
- Coeficientes factoriales próximos a 1 o -1 (Si el estudio está normalizado)
- No deben existir factores con coeficientes factoriales similares

Ejemplo sobre capacidad reproductiva de plantas invasoras del género Acacia

En un estudio sobre la capacidad reproductiva de plantas invasoras se requiere investigar si el número de **inflorescencias** (un atributo que puede caracterizar el éxito de una planta para colonizar nuevos nichos) que desarrollan plantas invasoras frente a plantas no invasoras de un mismo género (**Acacia**) está **relacionado** con las **características climáticas** predominantes en la región de origen de la planta.

Tipos de Inflorescencias

Types of inflorescence



Download from
Dreamstime.com
This watermarked comp image is for previewing purposes only.

25450931
Niko275 | Dreamstime.com

Planteamiento del Problema

54 Especies de Plantas del Género Acacia

- Acacia Aneura
- Acacia Auriculiformis
- Acacia Baileyana
- Acacia Cultriformis
- Acacia Cyclops
- Acacia Dealbata
- etc....

¿Qué es?
¿Para qué sirve?
Fases del Análisis de Componentes Principales
Aplicación

Especies de Acacias



Planteamiento del Problema

45 Variables climáticas

- Temperatura media Anual TM_Anual
- Temperatura mínima mes frío $Tmin_mes_frio$
- Temperatura máxima mes cálido $Tmax_mes_calido$
- Presión mínima mes frío $Pmin_mes_frio$
- Presión máxima mes cálido $Pmax_mes_calido$
- etc...

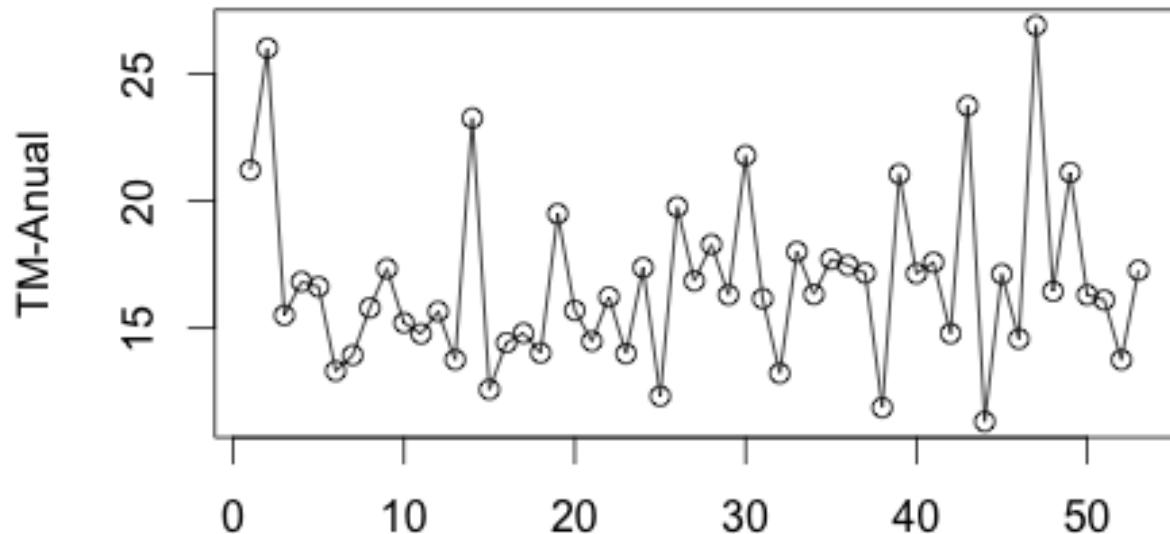
¿Qué es?
¿Para qué sirve?
Fases del Análisis de Componentes Principales
Aplicación

Objetivo

Reducir la dimensionalidad de las Variables mediante ACP

Gráfico de las variables climáticas respecto a la variedad de especies de Acacia

TM-Anual



Variables de Acacias

Gráfico de las variables climáticas respecto a la variedad de especies de Acacia

Tmin_mes_frio

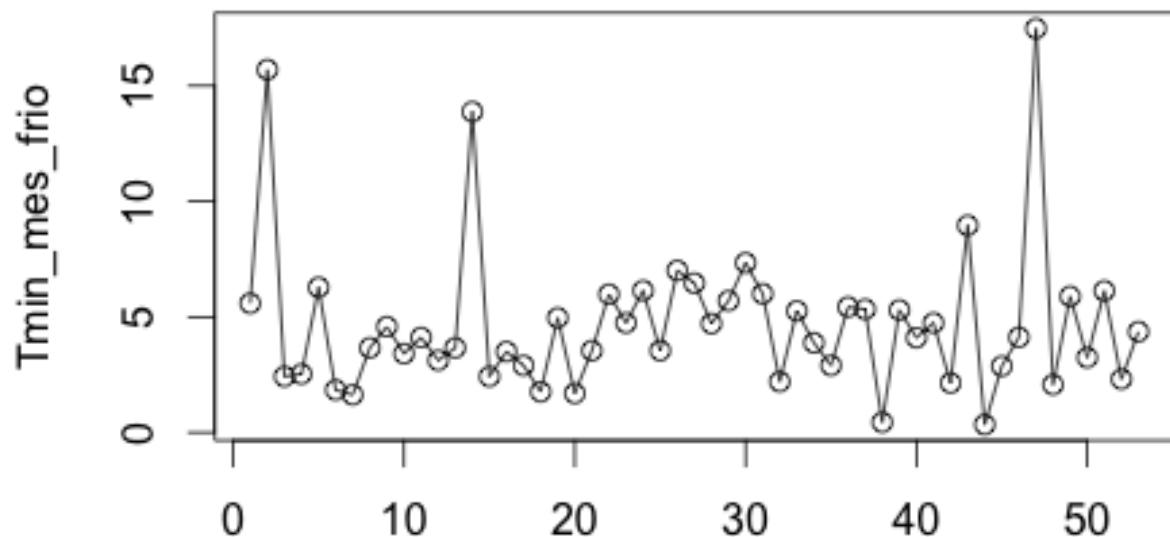
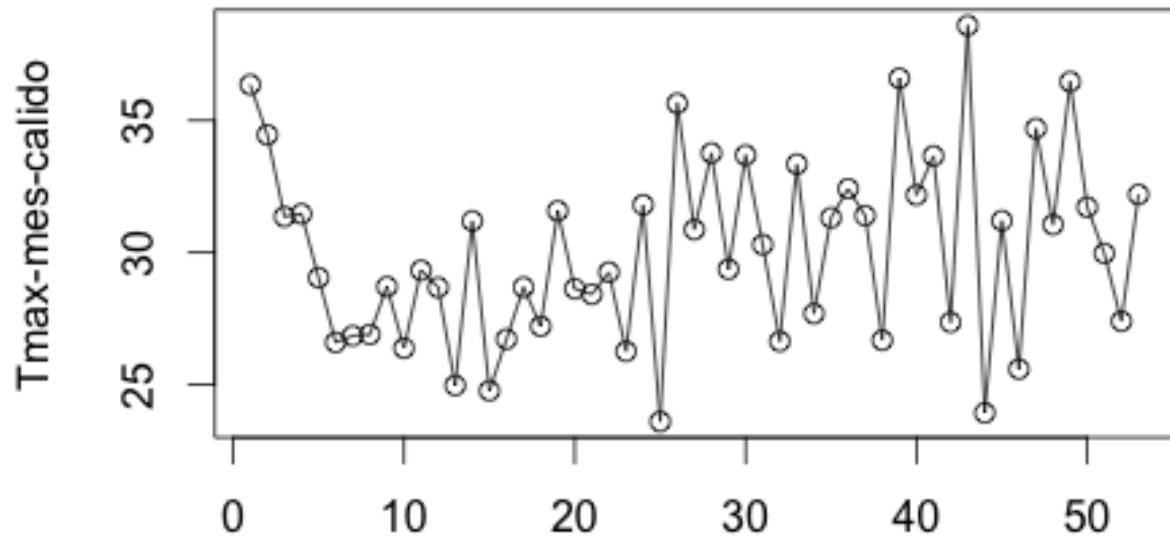


Gráfico de las variables climáticas respecto a la variedad de especies de Acacia

Tmax-mes-calido



¿Qué es?

¿Para qué sirve?

Fases del Análisis de Componentes Principales
Aplicación

Fases de ACP

- Obtener Matriz de Correlación
- Obtener Eigenvalores y Eigenvectores de la Matriz de Covarianzas
- Selección de los factores
- Interpretación de los factores

Matriz de Correlación

Es una matriz cuadrada constituida por los coeficientes de correlación de cada pareja de variables; de manera que tendrá unos en su diagonal principal, y los correspondientes coeficientes de correlación ρ_{ij}

$$R = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & 1 & \cdots & \rho_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Matriz de Correlación

Donde el coeficiente de correlación está dado por:

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j} = \frac{\sum \frac{X_i X_j}{N} - \mu_{X_i} \mu_{X_j}}{\sigma_{X_i} \sigma_{X_j}} \quad (13)$$

$$\mu_{X_i} = \frac{\sum X_i}{N} \quad (14)$$

$$\mu_{X_j} = \frac{\sum X_j}{N} \quad (15)$$

$$\sigma_{X_i} = \sqrt{\frac{\sum X_i^2}{N} - \mu_{X_i}^2} \quad (16)$$

$$\sigma_{X_j} = \sqrt{\frac{\sum X_j^2}{N} - \mu_{X_j}^2} \quad (17)$$

Matriz de Correlación

- Si $\rho < 0$ Existe una correlación negativa, las variables se relacionan en sentido inverso. Para $\rho = -1$ hablaremos de correlación negativa perfecta.
- Si $\rho > 0$. Existe una correlación positiva, las variables se relacionan en sentido directo. Si $\rho = 1$, existe una correlación perfecta.
- Si $\rho = 0$ se dice que las variables no están correlacionadas

Cálculo Matriz de Correlación de 3x3

$$\mu_1 = \frac{891.04}{53} = 16.81 \quad (18)$$

$$\mu_2 = \frac{1595.07}{53} = 30.0956 \quad (19)$$

$$\mu_3 = \frac{250.29}{53} = 22.30 \quad (20)$$

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{15557}{53} - 16.81^2} = 3.30 \quad (21)$$

$$\sigma_2 = \sqrt{\frac{48646}{53} - 30.0956^2} = 3.48 \quad (22)$$

$$\sigma_3 = \sqrt{\frac{1736.19}{53} - 22.30^2} = 3.23 \quad (23)$$

Cálculo de Matriz de Correlación

$$\rho_{11} = \frac{10.89}{3.30 \cdot 3.30} = 1 \quad (24)$$

$$\rho_{12} = \rho_{21} = \frac{9.69}{3.30 \cdot 3.48} = 0.843509 \quad (25)$$

$$\rho_{22} = \frac{12.11}{3.48 \cdot 3.48} = 1 \quad (26)$$

$$\rho_{13} = \rho_{31} = \frac{9.1235}{3.30 \cdot 3.23} = 0.85473169 \quad (27)$$

$$\rho_{32} = \rho_{23} = \frac{6.15}{3.23 \cdot 3.48} = 0.546925 \quad (28)$$

$$\rho_{33} = \frac{10.45}{3.23 \cdot 3.23} = 1 \quad (29)$$

¿Qué es?
¿Para qué sirve?
Fases del Análisis de Componentes Principales
Aplicación

	Tm_anual	Tmax_mes_calido	Tmin_mes_frio	Rango_T_diurno	Rango_T_anual	P_anual	P_mes_humedo
Tm_anual	1.00000000	0.84350901	0.8547316872	0.291684110	0.049763130	-0.06832957	0.35839044
Tmax_mes_calido	0.84350901	1.00000000	0.5469255310	0.700206883	0.530227796	-0.52672026	-0.12535355
Tmin_mes_frio	0.85473169	0.54692553	1.0000000000	-0.184877967	-0.419798371	0.18760141	0.60407666
Rango_T_diurno	0.29168411	0.70020688	-0.1848779669	1.000000000	0.946398108	-0.76942431	-0.63814609
Rango_T_anual	0.04976313	0.53022780	-0.4197983711	0.946398108	1.000000000	-0.75893525	-0.74596030
P_anual	-0.06832957	-0.52672026	0.1876014136	-0.769424309	-0.758935255	1.00000000	0.88039773
P_mes_humedo	0.35839044	-0.12535355	0.6040766590	-0.638146087	-0.745960300	0.88039773	1.00000000
P_mes_seco	-0.74439946	-0.83807005	-0.6860438646	-0.419995653	-0.211997277	0.55073796	0.10046320
Estacionalidad_T	-0.12334269	0.37506979	-0.5635909380	0.862493617	0.977394957	-0.71522029	-0.78532485
Estacionalidad_P	0.80589431	0.54862765	0.9160750363	-0.105520627	-0.332875964	0.20170273	0.61612685
Altitud	-0.44013544	-0.42580355	-0.590195778	0.009736469	0.138452452	0.33484220	0.03092810
P_cuarto_seco	-0.74534326	-0.83682829	-0.6907312520	-0.414680994	-0.205985020	0.54731850	0.09365648
Max_Tm_anual	0.81559732	0.61021836	0.6631785607	0.166963123	-0.007333875	0.07816835	0.36143264
Max_Tmax_mes_calido	0.74278501	0.87096181	0.5161679844	0.568413115	0.422110623	-0.51352274	-0.14598170
Max_Tmin_mes_frio	0.59710377	0.21995868	0.6749901065	-0.277259658	-0.442370287	0.40606249	0.60818754
Max_Rango_T_diurno	0.09648471	0.34194347	-0.2992473646	0.679462314	0.675990965	-0.47632690	-0.49583635
Max_Rango_T_anual	-0.06282489	0.33858919	-0.4495258788	0.750722588	0.823370178	-0.67100292	-0.71899947
Max_P_anual	-0.15775271	-0.53932647	0.0440137224	-0.657709630	-0.626244639	0.81500884	0.65015902
Max_P_mes_humedo	0.12746556	-0.27497836	0.3004757329	-0.544784621	-0.599269779	0.74999492	0.73865124
Max_P_mes_seco	-0.50201835	-0.71960444	-0.3616734205	-0.567183401	-0.411558656	0.65629633	0.32082456
Max_Estacionalidad_T	-0.22047996	0.24669246	-0.5588157034	0.709749990	0.833557755	-0.73665216	-0.82597079
Max_Estacionalidad_P	0.73348414	0.56747699	0.7526882822	0.038487671	-0.145780508	-0.02739828	0.33138380
Max_Altitud	-0.44214984	-0.58137516	-0.4352031237	-0.343372943	-0.186622302	0.52464489	0.19838757
Max_P_cuarto_seco	-0.52304410	-0.72863166	-0.3836607439	-0.562016341	-0.399093134	0.62508353	0.27768950
Min_Tm_anual	0.84705732	0.82614894	0.7423409296	0.373212864	0.142758281	-0.28976649	0.14628292
Min_Tmax_mes_calido	0.75078089	0.85646365	0.5621665724	0.539346630	0.358053050	-0.44075306	-0.05048634
Min_Tmin_mes_frio	0.75715130	0.65829033	0.8266854836	0.105692038	-0.125206684	-0.156244402	0.27688263
Min_Rango_T_diurno	0.37653500	0.66205140	0.0903912433	0.680083954	0.625045168	-0.53797592	-0.33703675
Min_Rango_T_anual	0.17061447	0.50682851	-0.1552713957	0.684358702	0.705644453	-0.48778150	-0.40838798
Min_P_anual	0.16407938	-0.22569322	0.2411220762	-0.417916733	-0.486802762	0.78510892	0.74744214
Min_P_mes_humedo	0.50548614	0.08606774	0.6300430361	-0.386160594	-0.543150130	0.68060677	0.84749323
Min_P_mes_seco	-0.56483361	-0.53862499	-0.6352732312	-0.094910868	0.059393808	0.31585635	-0.03261207
Min_Estacionalidad_T	-0.07558005	0.30143058	-0.4126312084	0.658327916	0.743575122	-0.47434585	-0.52083909
Min_Estacionalidad_P	0.73226891	0.48731953	0.8690347383	-0.141584724	-0.352123071	0.24036728	0.62862410
Min_Altitud	-0.06239717	0.12563499	-0.1390915325	0.204140324	0.275656820	-0.12943836	-0.13124165
Min_P_cuarto_seco	-0.59788878	-0.56173467	-0.6596886434	-0.092480779	0.058918362	0.29438414	-0.06097156
Rango_Tm	-0.35901234	-0.488054708	-0.3509454769	-0.293603854	-0.162424410	0.37422894	0.09326954
Rango_Tmax_mes_calido	-0.45952247	-0.50902035	-0.3698047640	-0.307730626	-0.175512011	0.21996157	-0.03084400
Rango_Tmin_mes_frio	-0.18133296	-0.39421634	-0.1797607290	-0.310436192	-0.241711483	0.45590456	0.24191715
Rango_P_anual	-0.20175895	-0.53315773	-0.0008287815	-0.621779334	-0.574337872	0.71727887	0.54807926
Rango_P_mes_humedo	0.01348682	-0.32083867	0.1710360950	-0.497603860	-0.518018567	0.64809795	0.59436013
Rango_P_mes_seco	-0.40413811	-0.64378514	-0.2368260062	-0.585852393	-0.455623091	0.62887647	0.35191765
Rango_Estacionalidad_T	-0.11759047	-0.09087208	-0.0712816785	-0.047164558	-0.025021779	-0.16535669	-0.19671045
Rango_Estacionalidad_P	0.24526977	0.25875711	0.1492671708	0.169657923	0.131187786	-0.24234674	-0.14856392
Rango_Altitud	-0.43174913	-0.58307029	-0.4192181196	-0.353990429	-0.204582379	0.52736337	0.20559604



Eigenvalores

Standard deviations:

```
[1] 1.765046e+03 1.053476e+03 8.993028e+02 3.999199e+02 1.940626e+02
[6] 1.426307e+02 1.094291e+02 7.604858e+01 6.985248e+01 3.930846e+01
[11] 3.423963e+01 2.597206e+01 1.280611e+01 1.0044484e+01 6.230769e+00
[16] 5.428090e+00 4.103804e+00 2.590079e+00 2.309581e+00 2.107357e+00
[21] 1.821563e+00 1.465158e+00 1.014820e+00 8.442915e-01 7.137008e-01
[26] 5.774068e-01 5.156526e-01 4.329869e-01 3.566562e-01 3.149967e-01
[31] 2.145660e-01 1.776317e-01 1.396874e-01 8.184085e-02 4.947053e-02
[36] 5.532076e-03 1.318572e-13 1.318572e-13 1.318572e-13 1.318572e-13
[41] 1.318572e-13 1.318572e-13 1.318572e-13 1.318572e-13 1.318572e-13
```

¿Qué es?
 ¿Para qué sirve?
 Fases del Análisis de Componentes Principales
 Aplicación

Eigenvectores

	PC1	PC2	PC3	PC4
Tm_anual	-2.237267e-04	-0.0010875979	-8.974304e-04	-1.969103e-03
Tmax_mes_calido	-1.097775e-03	-0.0002035039	-8.062524e-04	-2.534438e-03
Tmin_mes_frio	3.176583e-04	-0.0018118522	-1.534715e-03	-1.633682e-03
Rango_T_diurno	-5.489443e-04	0.000478449	1.090209e-04	-5.428479e-04
Rango_T_anual	-1.407176e-03	0.0016181868	7.389874e-04	-8.899701e-04
P_anual	1.500864e-01	-0.1079189669	1.110769e-01	1.044963e-01
P_mes_humedo	2.541222e-02	-0.0335728266	6.033322e-03	-3.435343e-03
P_mes_seco	4.055222e-03	0.0036282916	9.736921e-03	1.113883e-02
Estacionalidad_T	-3.393701e-01	0.4688364610	2.532257e-01	-1.686808e-01
Estacionalidad_P	1.298257e-03	-0.0106573836	-8.080383e-03	-1.189284e-02
Altitud	1.210727e-02	0.0353058359	8.940676e-02	8.912241e-02
P_cuarto_seco	1.366795e-02	0.0126829277	3.311518e-02	3.644429e-02
Max_Tm_anual	3.996583e-04	0.0001534909	-7.937893e-04	-1.843651e-03
Max_Tmax_mes_calido	-5.925641e-04	0.0005646121	-1.475326e-03	-1.484130e-03
Max_Tmin_mes_frio	1.310326e-03	-0.0003701054	-1.376503e-03	-1.802853e-03
Max_Rango_T_diurno	-1.326533e-04	0.0006341872	-3.516599e-05	-7.866963e-05
Max_Rango_T_anual	-6.406711e-04	0.0019562471	-3.493573e-05	-3.912409e-04
Max_P_anual	5.526473e-01	0.0814124818	2.611152e-01	-3.103437e-01
Max_P_mes_humedo	8.457200e-02	-0.0057887725	2.079552e-02	-1.087006e-01
Max_P_mes_seco	1.794452e-02	0.0108764646	1.825814e-02	6.057395e-03
Max_Estacionalidad_T	-2.153673e-01	0.5621674412	-1.945282e-02	-1.491576e-01
Max_Estacionalidad_P	2.675384e-03	-0.0011666710	-1.498446e-02	-2.033858e-02
Max_Altitud	1.938224e-01	0.24644496412	2.735551e-01	5.352914e-01
Max_P_cuarto_seco	6.507889e-02	0.0440923002	6.462240e-02	2.586765e-02
Min_Tm_anual	-1.320682e-03	-0.0026396876	-1.658873e-03	-3.497669e-03
Min_Tmax_mes_calido	-2.052017e-03	-0.0023010828	-7.832282e-04	-3.953342e-03
Min_Tmin_mes_frio	-7.252412e-04	-0.0027709089	-2.075518e-03	-3.340616e-03
Min_Rango_T_diurno	-9.027965e-04	-0.0004368808	5.471074e-04	-1.393234e-03
Min_Rango_T_anual	-1.761464e-03	-0.0003718264	2.217638e-03	-1.909918e-03
Min_P_anual	4.472029e-02	-0.0986349309	7.432479e-02	9.777378e-02
Min_P_mes_humedo	8.072918e-03	-0.0252698769	3.441609e-03	1.003815e-02
Min_P_mes_seco	-8.920308e-05	-0.0002990823	7.065205e-03	8.459343e-03
Min_Estacionalidad_T	-3.624848e-01	0.0412862566	5.647431e-01	-1.766595e-01
Min_Estacionalidad_P	4.980512e-04	-0.0121949158	-4.970358e-03	-9.589350e-03
Min_Altitud	-8.286225e-03	-0.0059753079	2.172013e-02	-2.069515e-02
Min_P_cuarto_seco	-5.709707e-04	-0.0006760712	2.301602e-02	2.912600e-02
Rango_Tm	1.720340e-03	0.0027931784	8.642841e-04	1.654018e-03
Rango_Tmax_mes_calido	1.459453e-03	0.0028656149	-6.920978e-04	2.469212e-03
Rango_Tmin_mes_frio	2.035567e-03	0.0024008035	6.990151e-04	1.537763e-03
Rango_P_anual	5.079270e-01	0.1800474127	1.867904e-01	-4.081175e-01
Rango_P_mes_humedo	7.649909e-02	0.0194811044	1.735391e-02	-1.187387e-01
Rango_P_mes_seco	1.883372e-02	0.0111755469	1.119293e-02	-2.401949e-03
Rango_Estacionalidad_T	1.471175e-01	0.5208811846	-5.841959e-01	2.750186e-02
Rango_Estacionalidad_P	2.177333e-03	0.0110282449	-1.001410e-02	-1.074923e-02
Rango_Altitud	2.021086e-01	0.2524249492	2.518349e-01	5.559866e-01



¿Qué es?
 ¿Para qué sirve?
 Fases del Análisis de Componentes Principales
 Aplicación

Eigenvectores

	PC5	PC6	PC7	PC8
Tm_anual	-0.0052898593	-2.427159e-03	-0.0152539302	1.279187e-02
Tmax_mes_calido	-0.0045428979	-4.010857e-03	-0.0142704866	1.245949e-02
Tmin_mes_frio	-0.0014787553	-1.120586e-03	-0.0115884788	1.176978e-02
Rango_T_diurno	-0.0016054076	-1.313574e-03	-0.0026592127	-3.552602e-04
Rango_T_anual	-0.0030875217	-2.862711e-03	-0.0026431535	6.220980e-04
P_anual	-0.3369618841	4.235635e-01	0.2426803088	4.391363e-01
P_mes_humedo	-0.08861883293	6.114943e-02	-0.0879708716	1.792965e-01
P_mes_seco	-0.0034660496	1.288860e-02	0.0582491724	-3.276155e-02
Estacionalidad_T	-0.5405990438	-5.032593e-01	0.0799300473	1.040259e-01
Estacionalidad_P	-0.0174847353	2.299975e-02	-0.0819785739	6.592432e-02
Altitud	-0.2042543948	1.530203e-01	0.0923255375	-8.462499e-01
P_cuarto_seco	-0.0109474686	4.714902e-02	0.1966480268	-1.117121e-01
Max_Tm_anual	-0.0052214248	-1.802790e-03	-0.0149087816	1.221488e-02
Max_Tmax_mes_calido	-0.0022039408	-3.098756e-04	-0.0123427423	1.095288e-02
Max_Tmin_mes_frio	-0.0050894159	-1.112493e-03	-0.0138274461	8.860506e-03
Max_Rango_T_diurno	-0.00111265753	1.315016e-03	-0.0014933054	-6.349003e-04
Max_Rango_T_anual	-0.0005242663	1.853408e-03	-0.0029873291	-7.157651e-05
Max_P_anual	-0.2256124975	1.210441e-01	0.0322735057	-4.736948e-02
Max_P_mes_humedo	-0.14001114567	6.468354e-02	-0.5017185112	6.203187e-04
Max_P_mes_seco	0.0194497045	-1.229912e-02	0.1394513451	1.710484e-02
Max_Estacionalidad_T	0.1963696502	4.878921e-01	-0.0213378452	2.300042e-02
Max_Estacionalidad_P	-0.0205828180	-1.744221e-03	-0.1397810615	6.218151e-02
Max_Altitud	0.1121713855	-6.167371e-02	-0.1158962920	2.603611e-02
Max_P_cuarto_seco	0.0913022853	3.072161e-02	0.5452299428	2.736278e-02
Min_Tm_anual	-0.0062192819	-2.318693e-03	-0.0150697883	1.036500e-02
Min_Tmax_mes_calido	-0.0043318989	-2.520111e-03	-0.0191603974	1.268227e-02
Min_Tmin_mes_frio	-0.0028163676	-5.703888e-05	-0.0080983864	6.124168e-03
Min_Rango_T_diurno	-0.0009717058	-2.487901e-03	-0.0017835432	-1.274390e-04
Min_Rango_T_anual	-0.0001286238	-1.357901e-03	-0.0032313114	3.308583e-04
Min_P_anual	-0.4966671791	3.0844082e-01	-0.0303298566	-4.446391e-02
Min_P_mes_humedo	-0.0887331201	4.493057e-02	-0.0574835980	5.718477e-02
Min_P_mes_seco	-0.0056413254	8.994059e-03	0.0326797788	-2.062254e-02
Min_Estacionalidad_T	0.2631384851	3.274694e-01	-0.0495606217	1.383362e-02
Min_Estacionalidad_P	-0.0177050628	1.954634e-02	-0.0514358871	4.365729e-02
Min_Altitud	0.0283524585	1.956369e-02	0.0120713659	-2.581104e-02
Min_P_cuarto_seco	-0.0217660497	3.814033e-02	0.1290886768	-6.697436e-02
Rango_Tm	0.0009978571	5.159032e-04	0.0001610067	1.849884e-03
Rango_Tmax_mes_calido	0.0021279580	2.210235e-03	0.0068176551	-1.729394e-03
Rango_Tmin_mes_frio	-0.0022730484	-1.055454e-03	-0.0057291397	2.736338e-03
Rango_P_anual	0.2710546816	-1.873641e-01	0.0626033623	-2.905575e-03
Rango_P_mes_humedo	-0.0512783366	1.975297e-02	-0.4442349132	-5.656445e-02
Rango_P_mes_seco	0.0250910299	-2.129318e-02	0.1067715663	3.772738e-02
Rango_Estacionalidad_T	-0.0667688350	1.604228e-01	0.0282227765	9.166885e-03
Rango_Estacionalidad_P	-0.0028777552	-2.129056e-02	-0.0883451743	1.852422e-02
Rango_Altitud	0.0838189270	-8.123740e-02	-0.1279676579	5.184714e-02



¿Qué es?

¿Para qué sirve?

Fases del Análisis de Componentes Principales
Aplicación

Resumen

	PC1	PC2	PC3	PC4	PC5			
Standard deviation	1765.0462	1053.4762	899.3028	399.9199	194.06264			
Proportion of Variance	0.5902	0.2103	0.1532	0.0303	0.00713			
Cumulative Proportion	0.5902	0.8005	0.9537	0.9840	0.99114			
	PC6	PC7	PC8	PC9	PC10			
Standard deviation	142.63066	109.42914	76.0486	69.85248	39.30846			
Proportion of Variance	0.00385	0.00227	0.0011	0.00092	0.00029			
Cumulative Proportion	0.99500	0.99727	0.9984	0.99929	0.99958			
	PC11	PC12	PC13	PC14	PC15	PC16		
Standard deviation	34.23963	25.97206	12.80611	10.04484	6.23077	5.42809		
Proportion of Variance	0.00022	0.00013	0.00003	0.00002	0.00001	0.00001		
Cumulative Proportion	0.99980	0.99993	0.99996	0.99998	0.99999	0.99999		
	PC17	PC18	PC19	PC20	PC21	PC22	PC23	PC24
Standard deviation	4.104	2.59	2.31	2.107	1.822	1.465	1.015	0.8443
Proportion of Variance	0.000	0.00	0.00	0.000	0.000	0.000	0.000	0.0000
Cumulative Proportion	1.000	1.00	1.00	1.000	1.000	1.000	1.000	1.0000
	PC25	PC26	PC27	PC28	PC29	PC30	PC31	
Standard deviation	0.7137	0.5774	0.5157	0.433	0.3567	0.315	0.2146	
Proportion of Variance	0.0000	0.0000	0.0000	0.000	0.0000	0.000	0.0000	
Cumulative Proportion	1.0000	1.0000	1.0000	1.000	1.0000	1.000	1.0000	
	PC32	PC33	PC34	PC35	PC36	PC37		
Standard deviation	0.1776	0.1397	0.08184	0.04947	0.005532	1.319e-13		
Proportion of Variance	0.0000	0.0000	0.00000	0.00000	0.00000	0.000e+00		
Cumulative Proportion	1.0000	1.0000	1.00000	1.00000	1.00000	1.000e+00		
	PC38	PC39	PC40	PC41	PC42			
Standard deviation	1.319e-13	1.319e-13	1.319e-13	1.319e-13	1.319e-13			
Proportion of Variance	0.000e+00	0.000e+00	0.000e+00	0.000e+00	0.000e+00			
Cumulative Proportion	1.000e+00	1.000e+00	1.000e+00	1.000e+00	1.000e+00			
	PC43	PC44	PC45					
Standard deviation	1.319e-13	1.319e-13	1.319e-13					

Selección de Componentes Principales

	PC1	PC2	PC3
Standard deviation	1765.0462	1053.4762	899.3028
Proportion of Variance	0.5902	0.2103	0.1532
Cumulative Proportion	0.5902	0.8005	0.9537

¿Qué es?

¿Para qué sirve?

Fases del Análisis de Componentes Principales
Aplicación



ANÁLISIS DE COMPONENTES PRINCIPALES. , *PCA.*, [FECHA DE CONSULTA: 25 DE SEPTIEMBRE DE 2015, DISPONIBLE EN [HTTPS://ES.WIKIPEDIA.ORG/WIKI/ANALISISDECOMPONENTESPRINCIPALES](https://es.wikipedia.org/wiki/Analisisdecomponentesprincipales)



VECTORES Y VALORES PROPIOS. , *Eigenvalores y Eigenvectores.*, [FECHA DE CONSULTA: 25 DE SEPTIEMBRE DE 2015, DISPONIBLE EN [HTTPS://ES.WIKIPEDIA.ORG/WIKI/VECTORPROPIOYVALORPROPIO](https://es.wikipedia.org/wiki/Vectorpropioyvalorpropio)



TEMARIO COMPUTACIÓN ITESM , *Sistemas Aleatorios: Axiomas de Probabilidad*, [FECHA DE CONSULTA: 09 DE SEPTIEMBRE DE 2015, DISPONIBLE EN [HTTP://WWW.MTY.ITESM.MX/DMTI/MATERIAS/MA2006-1/RECURSOS/MA2006-02.PDF](http://www.mty.itesm.mx/dmti/materias/ma2006-1/recursos/ma2006-02.pdf)

Bibliografía

- [1] Salvador Anaya Debernard. *Carrusel matemático*. Limusa, 1990.
- [2] Robert; Kevin Marvel Gray. A vla search for the ohio state 'wow', nov.
- [3] Antonio Perez Sanz. Diagrama de caja y bigotes, nov 2015.
- [4] Rodolfo N Selva. Distribución de boltzmann, dec 2014.
- [5] Kirby Urner. Beyond flatland:geometry for the 21st centur. Disponible en <http://www.4dsolutions.net/ocn/urner.html>, feb 2014.

