Fakultät für Physik
WiSe 2017/18
T4: Thermodynamik und Statistische Physik
Dozent: Ulrich Schollwöck
Übungen: M. Buser, L. Stenzel, A. Swoboda

www.physik.uni-muenchen.de/lehre/vorlesungen/wise_17_18/T4_stat_mech/index.html

Blatt 09: New Year's Bonus

Ausgabe: Freitag, 22.12.17; Abgabe: Montag, 15.01.18, 13:00 Uhr

7 Bonuspunkte möglich: Bei Abgabe von ausführlichen Erklärungen + Quellcode.

Aufgabe 1 Gezinkter Würfel

(**1 Bonuspunkt**) Ihr Freund aus der Experimentalphysik schenkt Ihnen einen gezinkten Würfel und lädt Sie zum Glühweintrinken ein (Sie haben immerhin seine T4-Zettel gerechnet!). Nachdem Sie die ganze Nacht gewürfelt haben, treffen Sie Ihre Mitbewohnerin beim Frühstück und erklären:

"...ouh man, so viel Glühwein, ich habe (fast) alles vergessen! Ich weiß nur noch: der Erwartungswert der Augenzahl ist 4.5!"

Ihre Mitbewohnerin schwärmt von ihrem neuen open-source Computer Algebra System und macht Ihnen folgenden Vorschlag für die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Würfels:

P(⚀) $= 0.0543532$ P(⚁) $= 0.0787715$ P(⚂) $= 0.11416$
P(⚃) $= 0.165447$ P(⚄) $= 0.239774$ P(⚅) $= 0.347494$

– Wie kommt sie denn darauf?

Aufgabe 2 Bayessche Updates

Wir wissen von einem Experiment, dass die Ergebnisse normalverteilt um 0 sind mit zu bestimmender Varianz $\sigma^2 \in (0, 10]$.

(1.a) (**1 Bonuspunkt**) Simulieren Sie das Experiment: Schreiben Sie ein Computerprogramm, das Zufallszahlen entsprechend dieser Wahrscheinlichkeitsverteilung (z. B. für $\sigma^2 = 3$) erzeugt.

(1.b) (**1 Bonuspunkt**) Wählen Sie eine a priori Annahme für die Varianz (z. B. maximale Ignoranz). Diskretisieren sie dazu das Intervall möglicher Werte (0, 10] geeignet. Ergänzen Sie das Programm um eine Funktion, die diese Annahme auf Basis von Ergebnissen aus dem Experiment updatet.

(1.c) (**1 Bonuspunkt**) Plotten Sie die a priori Verteilung sowie die Verteilungen nach $10, 100$ und 1000 Updates.

Aufgabe 3 Barometrische Höhenformel und Inverse Transform Sampling

Die Energie eines Teilchens der Masse m welches sich im Schwerefeld der Erde in der Höhe h befindet, ist gegeben als mgh (mit $h \in [0, \infty)$, $g > 0$). Weiterhin sei der Erwartungswert der Energie des Teilchens bekannt und gegeben als (Temperatur T und Boltzmann-Konstante k_B)

$$\langle mgh \rangle = k_B T. \tag{1}$$

(1.a) (**1 Bonuspunkt**) Benutzen Sie *Jaynes' Principle* um zu motivieren, dass die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte $\rho(h)$ des Teilchens exponentiell mit der Höhe abnimmt:

$$\rho(h) = \frac{mg}{kT} \exp\left(-\frac{mgh}{kT}\right). \tag{2}$$

(1.b) (**1 Bonuspunkt**) Mithilfe der *Inverse Transform Sampling* Methode lassen sich Zufallszahlen bestimmter Verteilungen aus gleichverteilten Zufallszahlen erzeugen. Tipp: Die englischsprachige Wikipedia bietet einen guten Überblick zu dieser Methode. Erzeugen Sie mithilfe der *Inverse Transform Sampling* Methode Zufallszahlen, welche der Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(h)$ genügen. Visualisieren Sie den Erfolg Ihrer Implementierung mit einem geeigneten Plot.

(1.c) (**1 Bonuspunkt**) Verwenden Sie die so erzeugten Zufallszahlen um die Erwartungswerte $\langle h \rangle$ und $\left\langle (h - \langle h \rangle)^2 \right\rangle$ zu bestimmen.