

3.5 Kernspaltung

- Spontane Spaltung: z.B. $A \rightarrow Z \cdot \left(\frac{A}{2}\right)$, $Z \rightarrow Z \cdot \left(\frac{Z}{2}\right)$
 $\rightarrow Q = M(A, Z) c^2 - 2 M\left(\frac{A}{2}, \frac{Z}{2}\right) c^2 > 0$

$$M(A, Z) c^2 = Z \cdot m_p c^2 + (A - Z) m_n c^2 - a_v A + a_o A^{2/3} + a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} + a_s \frac{(A - 2Z)^2}{A} \left(1 + \frac{1}{A^{1/2}}\right)$$

$$M\left(\frac{A}{2}, \frac{Z}{2}\right) c^2 = \frac{Z}{2} m_p c^2 + \left(\frac{A}{2} - \frac{Z}{2}\right) m_n c^2 - a_v \frac{A}{2} + a_o \left(\frac{A}{2}\right)^{2/3} + a_c \frac{(Z/2)^2}{(A/2)^{1/3}} + a_s \frac{(A/2 - Z/2)^2}{A/2}$$

$$\Rightarrow Q = a_o A^{2/3} \left(1 - 2 \left(\frac{1}{2}\right)^{2/3}\right) + a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} \left(1 - 2 \frac{(1/2)^2}{(1/2)^{1/3}}\right)$$

$$= a_o A^{2/3} \left(1 - 2^{-1/3}\right) + a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} \left(1 - 2^{-4/3}\right)$$

$$a_o = 17,23 \text{ MeV}$$

$$a_c = 0,71 \text{ MeV}$$

$$\Rightarrow Q = (-4,48 \cdot A^{2/3} + 0,263 \cdot Z^2 \cdot A^{-1/3}) \text{ MeV} > 0$$

$$\text{mit Tal der Stabilität: } Z = A(1,97 + 0,015 A^{2/3})$$

$$\Rightarrow \text{notwendige Bedingung: } A > 87,5$$

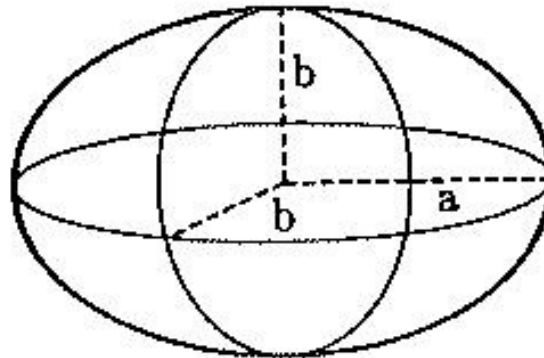
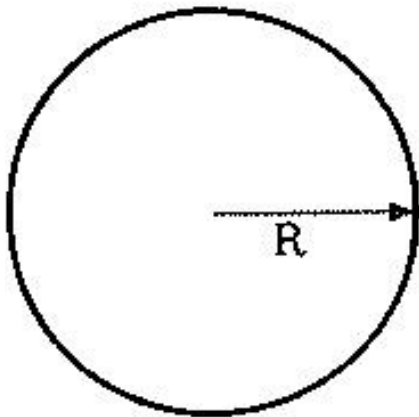
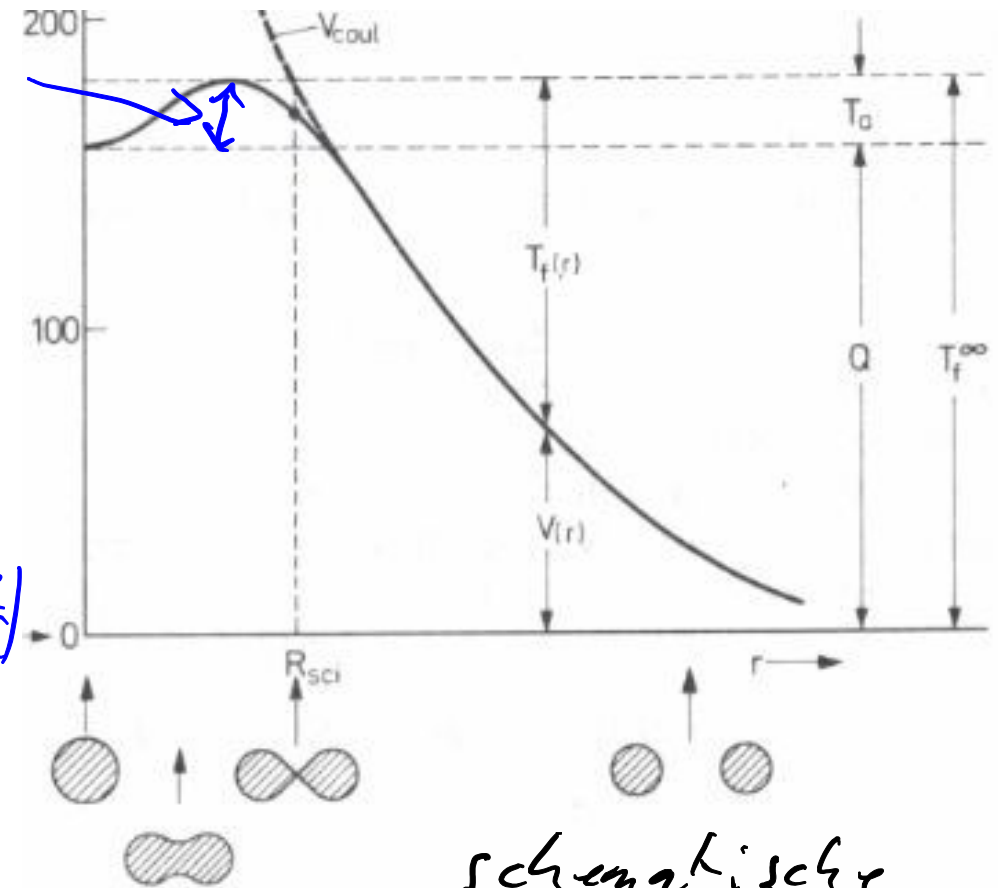
Spaltbarriere

Aktivierungsenergie ΔE_F

- Betrachte ellipsoidal deformierten Kern

$$R \rightarrow \begin{cases} a = R(1+\epsilon) \\ b = \frac{R}{\sqrt{1+\epsilon}} \approx R(1-\frac{\epsilon}{2}) \end{cases}$$

Deformationsradius $r \rightarrow$



schematische Darstellung des Potentialverlaufs bei Spaltung eines Kerns

Oberfläche $4\pi R^2 \rightarrow 4\pi R^2 (1 + \frac{2}{5} \varepsilon^2 - \frac{52}{105} \varepsilon^3 + \dots)$

\Rightarrow Oberflächenenergie: $E_0 = a_0 A^{\frac{2}{3}} (1 + \frac{2}{5} \varepsilon^2 + \dots)$

Coulombenergie: $E_c = a_c \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} (1 - \frac{1}{5} \varepsilon^2 + \dots)$

$\Rightarrow \Delta E = (E_0 + E_c)|_{\varepsilon=0} - (E_0 - E_c)|_{\varepsilon=0} = \frac{\varepsilon^2}{5} (2a_0 A^{\frac{2}{3}} - a_c \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}})$

$\Delta E < 0 \Rightarrow$ Energiegewinnung durch Verformung

\Rightarrow spontane Spaltung möglich

$\Delta E < 0 \Rightarrow 2a_0 A^{\frac{2}{3}} < a_c \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} \Rightarrow \frac{Z^2}{A} > \left(\frac{Z^2}{A}\right)_{\text{krit}} = \frac{2a_0}{a_c} \approx 50$

Gilt für Kerne mit $Z > 114$ und $A \geq 270$

\Rightarrow Spaltparameter $x_s := \frac{(Z^2/A)}{(Z^2/A)_{\text{krit}}}$

\Rightarrow Kerne mit $x_s > 1$ spalten spontan

- Kerne mit $x_s < 1$ haben Spaltbarriere ΔE_F

\Rightarrow Induzierte Spaltung

z.B. ${}_{92}^{235}\text{U} : x_s = 0,7, \Delta E_F = 5,8 \text{ MeV}$

${}_{92}^{238}\text{U} : x_s = 0,69, \Delta E_F = 6,2 \text{ MeV}$

$$Q_{235} = [M({}^{235}\text{U}) + m_n - M({}^{236}\text{U})]c^2 = 6,5 \text{ MeV} > \Delta E_F = 5,8 \text{ MeV}$$

$$Q_{238} = [M({}^{238}\text{U}) + m_n - M({}^{239}\text{U})]c^2 = 5,0 \text{ MeV} < \Delta E_F = 6,2 \text{ MeV}$$

\Rightarrow Induzierte Spaltung von ${}^{235}\text{U}$ mit thermischen Neutronen weil Energiegewinnung durch Coulombenergie + Paarungsenergie und geringere Spaltbarriere

- Verteilung der Spaltfragmente
(etwa $90:10 \approx 1:2$)

3.5.1 Energiegewinnung bei Kernspaltung

- kinetische Energieanteile bei ^{235}U -Spaltung
- Spaltfragmente $167 \pm 5 \text{ MeV}$
- Spaltneutronen 5 MeV
- prompte γ -Strahlung 8 MeV
- verzögerte γ -Strahlung 6 MeV
- e^- aus β -Zerfall 6 MeV
- $\bar{\nu}_e$ aus β -Zerfall 12 MeV

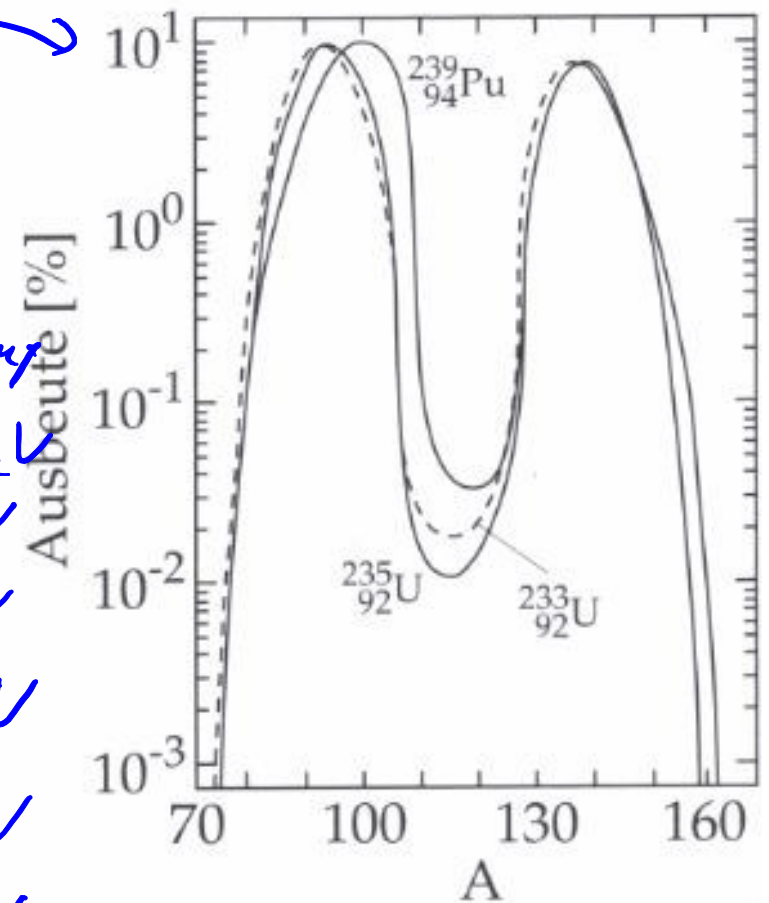
Summe

$204 \pm 6 \text{ MeV}$

→ nutzbare Energie: $(204 - 12) \text{ MeV} = 192 \text{ MeV}$ pro ^{235}U -Spalt.

→ $1 \text{ J} = 1 \text{ Ws} \hat{=} 3,25 \cdot 10^{10} \text{ U-Spaltungen}$

→ $1 \text{ g } ^{235}\text{U} \hat{=} 2,55 \cdot 10^{21} \text{ Kerne} \hat{=} 22000 \text{ kWh}$



- natürliches Uran enthält nur 0,7% ^{235}U , aber 99,3% ^{238}U
 → Anreicherung von ^{235}U erforderlich, typ. 3-5% ^{235}U
- Moderation / Abbremsen der Neutronen, z.B. durch H aus H_2O
- Reaktor: kontinuierliche Kettenreaktion

Neutronen: $N_{i+1} = k_{\text{eff}} \cdot N_i$ k_{eff} : effektiver Neutronenvermehrungsfaktor

für: $t_{i+1} = t_i + T_0$ T_0 : Zeit pro Vermehrungszyklus

$$\rightarrow \frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{N_{i+1} - N_i}{t_{i+1} - t_i} = \frac{k_{\text{eff}} - 1}{T_0} N_i$$

$$\frac{dN}{dt} = \frac{k_{\text{eff}} - 1}{T_0} N \rightarrow$$

$$N(t) = N_0 \exp\left(\frac{k_{\text{eff}} - 1}{T_0} t\right)$$

→ stationärer Betrieb

$$k_{\text{eff}} \stackrel{!}{=} 1$$

• Steuerung des Betriebs: Reaktivität $\rho = \frac{k_{eff} - 1}{k_{eff}}$

→ Anzahl der Neutronen: $N(t) = N_0 \exp(\rho \cdot k_{eff} \cdot t / T_0)$

Exponentielle Änderung mit Zeitkonstante $\tau = \frac{T_0}{\rho \cdot k_{eff}} = \frac{T_0}{k_{eff} - 1}$

• Vermehrungszyklen

▶ prompte Spaltneutronen: $T_0 \approx 1 \mu s \rightarrow \tau \approx 0,1 s$ für $k_{eff} - 1$

→ zu schnell für mechanische Steuerung $\approx 0,1\%$

✱ verzögerte Neutronen aus angeregten neutronenreichen

Spaltfragmenten: $N_i^V \approx 0,0075 N_i$, $T_0 = 0,1 \dots 80 s$

→ $\tau = 14 \dots 11000 s \rightarrow$ mechanische Steuerung

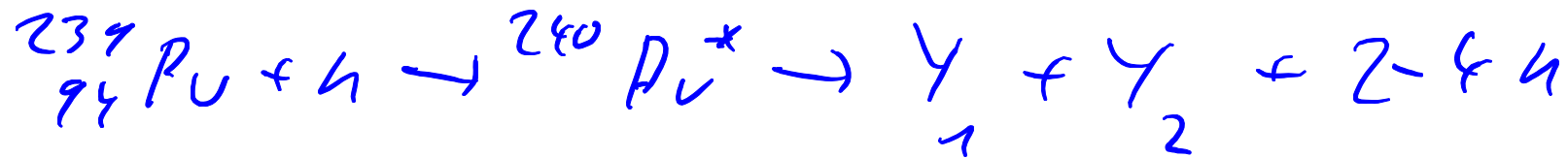
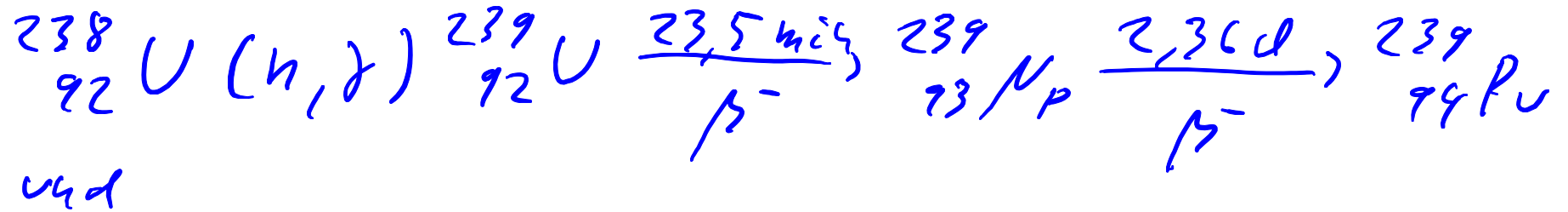
$\rho < 0$ ohne verzögerte Neutronen \rightarrow keine Kettenreaktion

Regelung: $\rho > 0$ mit " " " \rightarrow zunehmende "

$\rho \approx 0$ mit " " " \rightarrow stationärer Betrieb

• Brutreaktor

→ schnelle Neutronen erlauben Brutprozess:



→ Neutronen-Vermehrungsfaktor > 1

n -Einfang-Wirkungssquerschnitt für ${}^{238}\text{U}$
größer für hohe $E_{kin}(n)$

• Moderation von Neutronen unerwünscht

→ Kühlmittel z. B. fl. Natrium

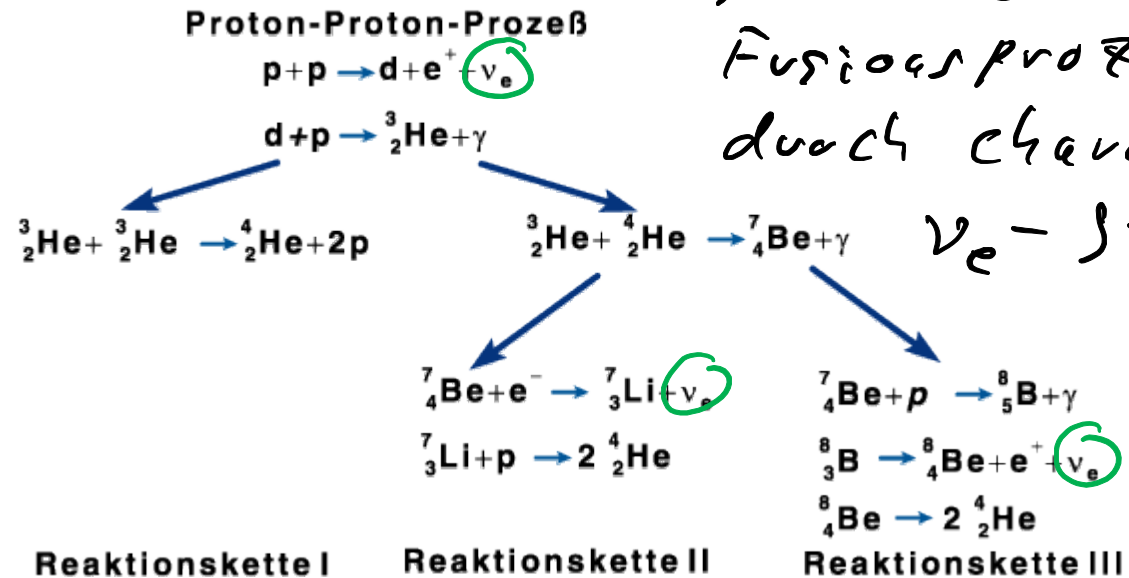
→ mehrere Kühlkreisläufe erforderlich

3.6 Kernfusion

- Transurane d.h. Elemente mit $Z > 92$ aus Kern-Kern-Stößen, z. B. ${}_{92}^{238}\text{U} ({}_{80}^{180}, x \cdot 4) {}_{100}^{236-x}\text{Fu}$
 \rightarrow Suche nach "Stabilitätsinsel" bei $Z > 117$
- Exotherm, d.h. $Q > 0$ für Kerne unterhalb von Eisen, weil $\langle B/A \rangle$ maximal für Fe

• Beispiel: Sonne

• Fusionsreaktor:
 $t + d \rightarrow {}^4\text{He} + n$



Nachweis der
Fusionsprozesse
durch charakter.
 ν_e -Strahlung

3.7 γ -Strahlung

- bei vielen spontanen / induzierten Kernumwandlungen entsteht ein Tochterkern im angeregten Zustand
 → Übergang in Grundzustand durch γ -Strahlung

z.B. ${}^{60}_{27}\text{Co}, T_{1/2} = 5.2 \text{ a}$

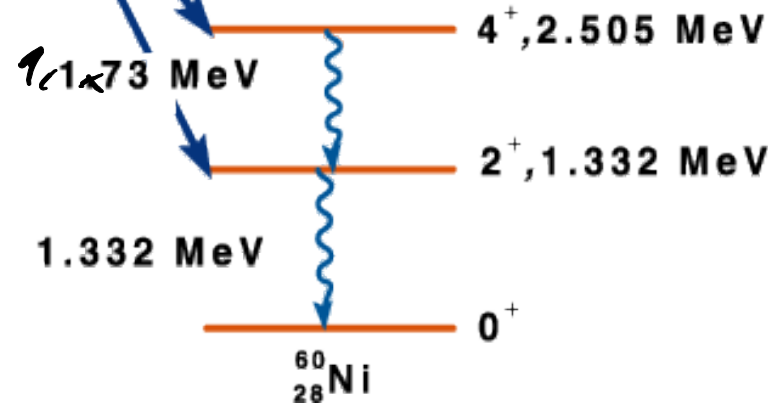
β^-

J : Gesamtdrehimpuls
 P : Parität

J^P

↓

Übergänge zwischen
diskreten Energieniveaus



→ monoenergetische
Photonstrahlung

- Nicht alle energetisch möglichen Übergänge sind durch Quantenzahlen erlaubt (Drehimpuls, Parität)

→ Auswahlregeln

- Parität \hat{P} : $\hat{P} |\psi(\vec{r}, t)\rangle \rightarrow |\psi(-\vec{r}, t)\rangle = \underset{\substack{\pm 1 \\ \text{Parität}}}{\pm 1} |\psi(\vec{r}, t)\rangle$
Photon hat intrinsische Parität -1

- Drehimpuls \vec{J} :

→ γ hat bezgl. Kern Drehimpuls \vec{J} mit $|\vec{J}| = \sqrt{J(J+1)} \hbar$

$$|J_a - J_e| \leq J \leq |J_a + J_e|$$

J klassifiziert Moden des elektromagn.

Strahlungsfelds: Multipolmoden*

$J = 1, 2, 3, \dots \hat{=} \text{Dipol, Quadrupol, Oktupol, } \dots - \text{Strahlung}$

• Multipolmoden - Bezeichnung

$E1, M2, E3, \dots$ für $J = 1, 2, 3, \dots$ und
Paritätsänderung

$M1, E2, M3, \dots$ für $J = 1, 2, 3, \dots$ und
keine Paritätsänderung

allgem.: $EJ: P = (-1)^J$, $MJ: P = (-1)^{J+1}$

• Modusstärke:

MJ schwächer als $EJ \rightarrow \frac{\tau_{MJ}}{\tau_{EJ}} \approx 4,5 \cdot A^{2/3}$

für fester $J: \tau_{MJ}, \tau_{EJ} \sim 1/E_\gamma^{2J+1}$

Falls Zerfall nur durch hohe E - oder M -
Mode \rightarrow lange Lebensdauer \rightarrow Kernisomere

z.B. $3^+ \rightarrow 1^+ : J = 2, 3, 4$

\rightarrow dominant
 $+1 = (-1)^{J=2,4} = (-1)^{(J=3)+1} \rightarrow E2, M3, E4$

