

2. Globale Kerneigenschaften

- Kernbausteine: Nukleonen

	Proton	Neutron	Elektronen
Masse	$1,6726 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ $\hat{=} 938,27 \text{ MeV}/c^2$	$1,6749 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ $\hat{=} 939,56 \text{ MeV}/c^2$ $= 1,0014 m_p$	$9,109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ $\hat{=} 0,511 \text{ MeV}/c^2$ $= 1/1836 m_p$
el. Ladung	$+1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$	0	$-1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Lebensdauer	$> 10^{31} \text{ a}$	$(885,7 \pm 0,9) \text{ s}$	$> 1,6 \cdot 10^{28} \text{ a}$
Spin (\hbar)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
mag. Moment	$+2,71 \cdot \mu_N$	$-1,91 \cdot \mu_N$	$+2,6023 \cdot \mu_B$
	$\mu_N = \frac{e \hbar}{2 m_p}$		$\mu_B = \frac{e \hbar}{2 m_e}$

* Kern-Bezeichnung: A_ZX , A_ZX , A_ZX_N

$A = Z + N$ Massenzahl

Z Ordnungszahl (Ladungszahl, Protonenzahl)

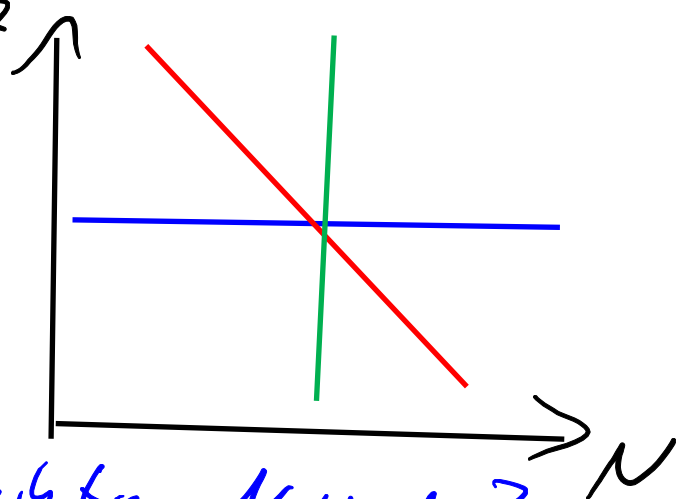
N Neutronenzahl

Kombinationen von Z und N : Nuklide

Nuklide mit gleichem Z : Isotope $Z \uparrow$

Nuklide mit gleichem A : Isobare

Nuklide mit gleichem N : Isotone



Spiegelkerne: Nuklide mit vertauschten N und Z

$$N_1 = Z_2, Z_1 = N_2 \quad \text{z.B.} \quad {}^3_1\text{H}_2 = {}^3_2\text{He}_1$$

interessant weil Kernkraft nicht zwischen Protonen und Neutronen unterscheidet \rightarrow nahezu gleiche Eigenschaften

2.1 Kernmasse, Massenzahl, Kernladung

- Kernmasse: $M_K = Z \cdot m_p + N \cdot m_n - B/c^2$ $\langle \frac{B}{A} \rangle \approx 8 \text{ MeV}$
d.h. Bindungsenergie $\hat{=}$ Massendefekt

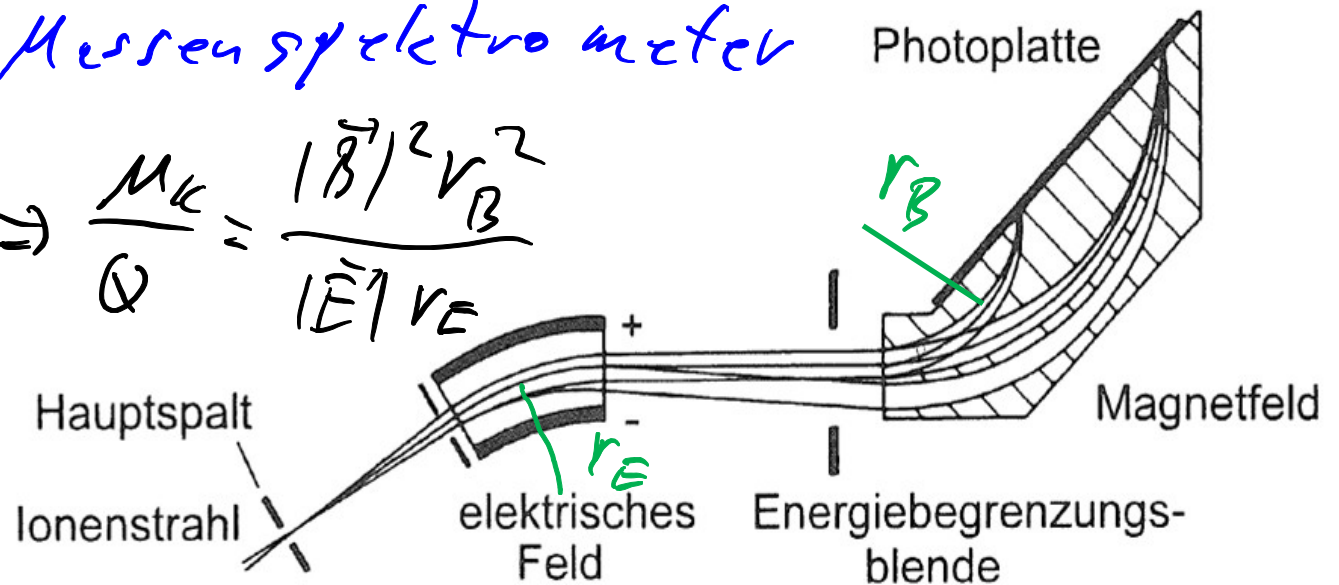
- exp. Massenbestimmung: Massenspektrometer

z.B. Mattausches Massenspektrometer

$$Q \cdot |\vec{E}'| = \frac{M_K v^2}{r_E}$$

$$Q \cdot |\vec{B}'| v = \frac{M_K v^2}{r_B}$$

$$\Rightarrow \frac{M_K}{Q} = \frac{|\vec{B}'|^2 v_B^2}{|\vec{E}'| v_E}$$



- exp. Bestimmung der Kernladung:
charakteristische Röntgenstrahlung der K_α -Linie
Energie $\sim (Z-1)^2$ Moseley-Gesetz

• Neutronenzahl $A = \frac{M_{\text{ic}}}{\frac{1}{2}(m_p + m_n) - \langle \frac{B}{A} \rangle \frac{1}{c^2}} \Rightarrow N = A - Z$

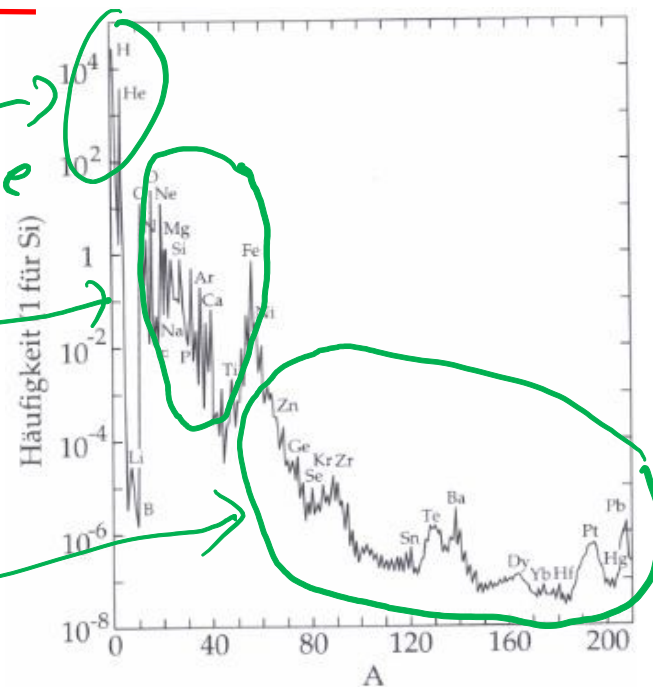
• atomare Masseneinheit: $1u = \frac{1}{12} M_{\text{ic}} = \frac{1g}{N_A} = 1,660 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
 $1u \approx m_p - 7 \text{ MeV}/c^2$
 $\approx m_n - 8 \text{ MeV}/c^2 \rightarrow \text{typ. Bindungsenergie} = 7-8 \frac{\text{MeV}}{\text{Nukleon}}$
 $\approx 937,484 \frac{\text{MeV}}{c^2}$

• Häufigkeit der Elemente
 (im Sonnensystem)

aus primordiale Nukleosynthese
 (3 min nach Urknall)

aus Fusion in Sternen
 (> 1 Mrd Jahre nach Urknall)

aus Sternarexplosionen
 (Supernovae)



2.2 magnetisches Moment

- System mit Drehimpuls \vec{J} im Magnetfeld \vec{B}

→ Aufspaltung der Energiezustände

magnetisches Moment

Kernmagnetron

vgl. Bohrmagnetron des Elektrons

Landé-Faktor

- Gesamtdrehimpuls: $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$

↑
Bahndrehimpuls

← Spin

$$E_{\text{mag}} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

$$\vec{\mu} = g_k \mu_k \cdot \frac{\vec{J}}{\hbar}$$

$$\mu_k = \frac{e\hbar}{2m_p} = 3,10 \cdot 10^{-8} \frac{\text{eV}}{\text{T}}$$

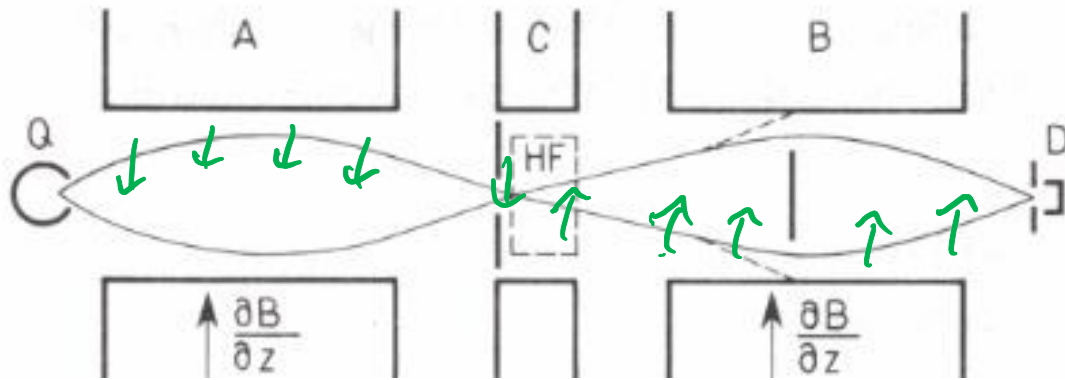
$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 5,79 \cdot 10^{-5} \frac{\text{eV}}{\text{T}}$$

$g=2$ für punktförmiges Teilchen

$g \neq 2$ anomales mag. Moment

• Messung des mag. Moments

→ klassisch (Rabi 1939)



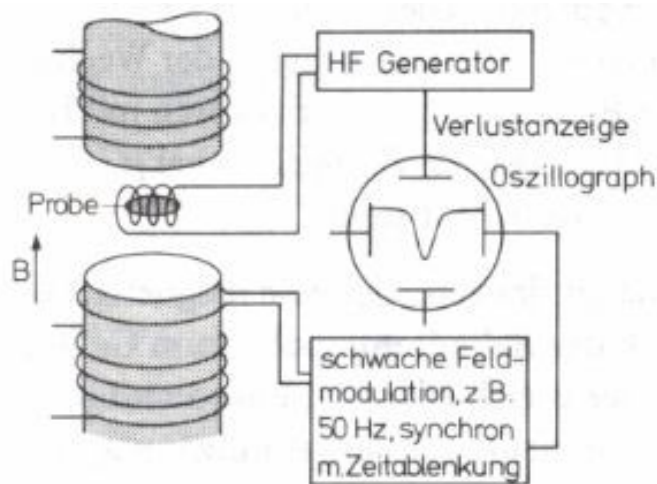
$$\text{in A: } F_z = \mu_z \frac{\partial B}{\partial z}$$

$$\text{in B: } F_z = \mu_z \frac{\partial B}{\partial z}$$

$$\text{in C: } B=0 \quad B>0$$

HF flipp't Drehimpuls
 $\Delta E = \mu \cdot B$

→ Kernspinresonanz (Purcell, Bloch 1947)



Aufspaltung der Energieniveaus

$$\text{in } B\text{-Feld } \Delta E = -\mu_z B = g_k \mu_k \cdot \Delta m_j B$$

Dipolübergang mit $\Delta m_j = \pm 1$

$$\Delta E = g_k \mu_k B = \hbar \omega_L \rightarrow \omega_L = \frac{1}{\hbar} g_k \mu_k B$$

Larmorfrequenz

2.3 Bindungsenergie

Exp. Bestimmung

$$B = (Z \cdot m_p + (A - Z) m_n - M_K) c^2$$

aus Kernreaktionen



$$\text{Impulserhaltung: } 0 + 0 = \vec{p}_D + \vec{p}_\gamma$$

$$E_n^{\text{kin}} \approx \frac{1}{40} \text{ eV} \quad (\text{therm. Neutronen})$$

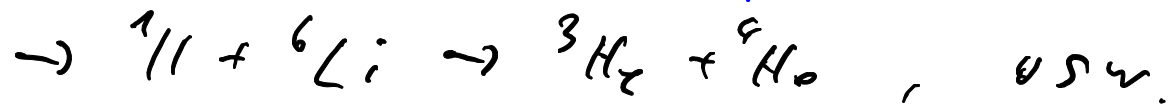
$$\Rightarrow |\vec{p}_D| = |\vec{p}_\gamma| = E_\gamma \quad (\text{für } c=1)$$

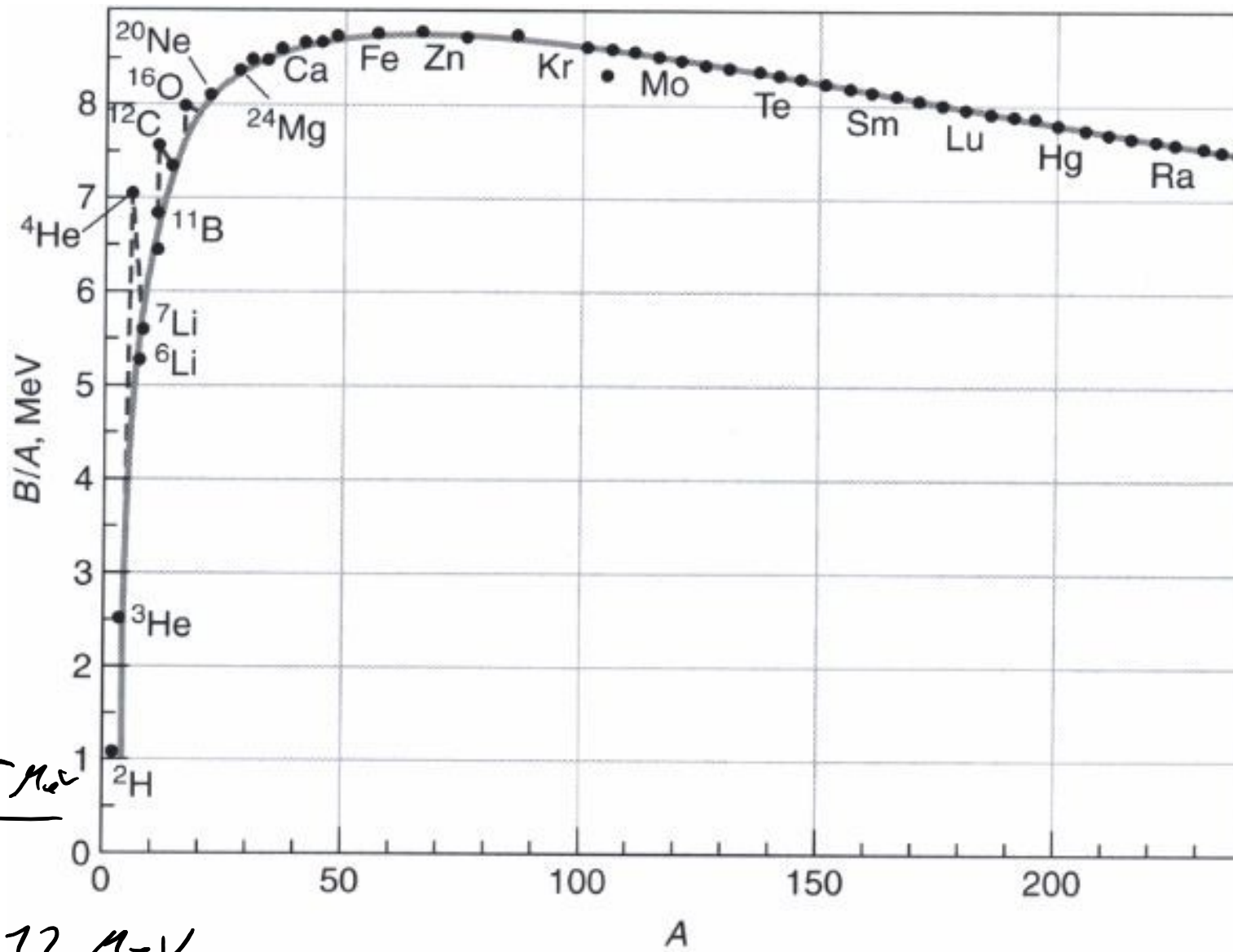
$$E_D = \sqrt{M_D^2 + |\vec{p}_D|^2} = M_D \sqrt{1 + |\vec{p}_D|^2 / M_D^2} \quad (|\vec{p}_D| \ll M_D) \approx M_D \left(1 + \frac{1}{2} \frac{|\vec{p}_D|^2}{M_D^2}\right)$$

$$= M_D + \frac{1}{2} \frac{E_\gamma^2}{M_D}$$

$$\text{Energieerhaltung: } m_n + M_{{}^1_1\text{H}} = E_D + E_\gamma = M_D + \frac{1}{2} \frac{E_\gamma^2}{M_D} + E_\gamma$$

$$\Rightarrow B = (m_n + M_{{}^1_1\text{H}} - M_D) c^2 = E_\gamma + \frac{1}{2} \frac{E_\gamma^2}{M_D} = 2,225 \text{ MeV}$$





- für schwere Elemente nur schwach massen abh.
- Maximum bei $\approx {}^{56}\text{Fe}$ mit $\frac{B}{A} = 8,77 \text{ MeV}$
- Linie ist weit stärker Massenformel

^2H :

$$\frac{2,225 \text{ MeV}}{2}$$

2

$$= 1,112 \text{ MeV}$$

2.3.1 Tröpfchenmodell

- Kern: Tropfen aus kondensierten Protonen und Neutronen
- Kernradius: $r \sim \sqrt[3]{\text{Volumen}} \sim \sqrt[3]{A}$

$$r = r_0 \sqrt[3]{A}, \quad r_0 = 12 \text{ fm}$$

- Beiträge zur Bindungsenergie

1. Volumenenergie / Kondensationsenergie $B_V \sim \text{Volumen} \sim r^3$

$$\rightarrow B_V = +a_V A$$

2. Oberflächenenergie

$$B_O \sim \text{Oberfl.} \sim r^2$$

$$\rightarrow B_O = -a_O A^{2/3}$$

3. Coulombenergie

$$B_C \sim \frac{Z(Z-1)}{r} \approx \frac{Z^2}{r}$$

$$\rightarrow B_C = -a_C \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}}$$

4. Asymmetric energy

Coulomb, abstoßung der Protonen
 → Fermiger Modell

$$B_A = -a \frac{(N-Z)^2}{A}$$

alternativ $B_A = a' \frac{(A-2Z)^2}{4A}$
 mit $a' = 4a$

5. Paarungsenergie

$$B_p = -a_p \frac{1}{A^{1/2}} \delta$$

mit $\delta = \begin{cases} -1 & \text{gg (Z, N gerade)} \\ 0 & \text{ug, gu} \\ +1 & \text{uu} \end{cases}$

Weizsäcker Massenformel

$$B = +a_v A - a_o A^{2/3} - a_c \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} - a \frac{(N-Z)^2}{A} - a_p \frac{\delta}{A^{1/2}}$$

Anpassung der
Weizsäcker formel
an gemessenen
Bindungsenergien

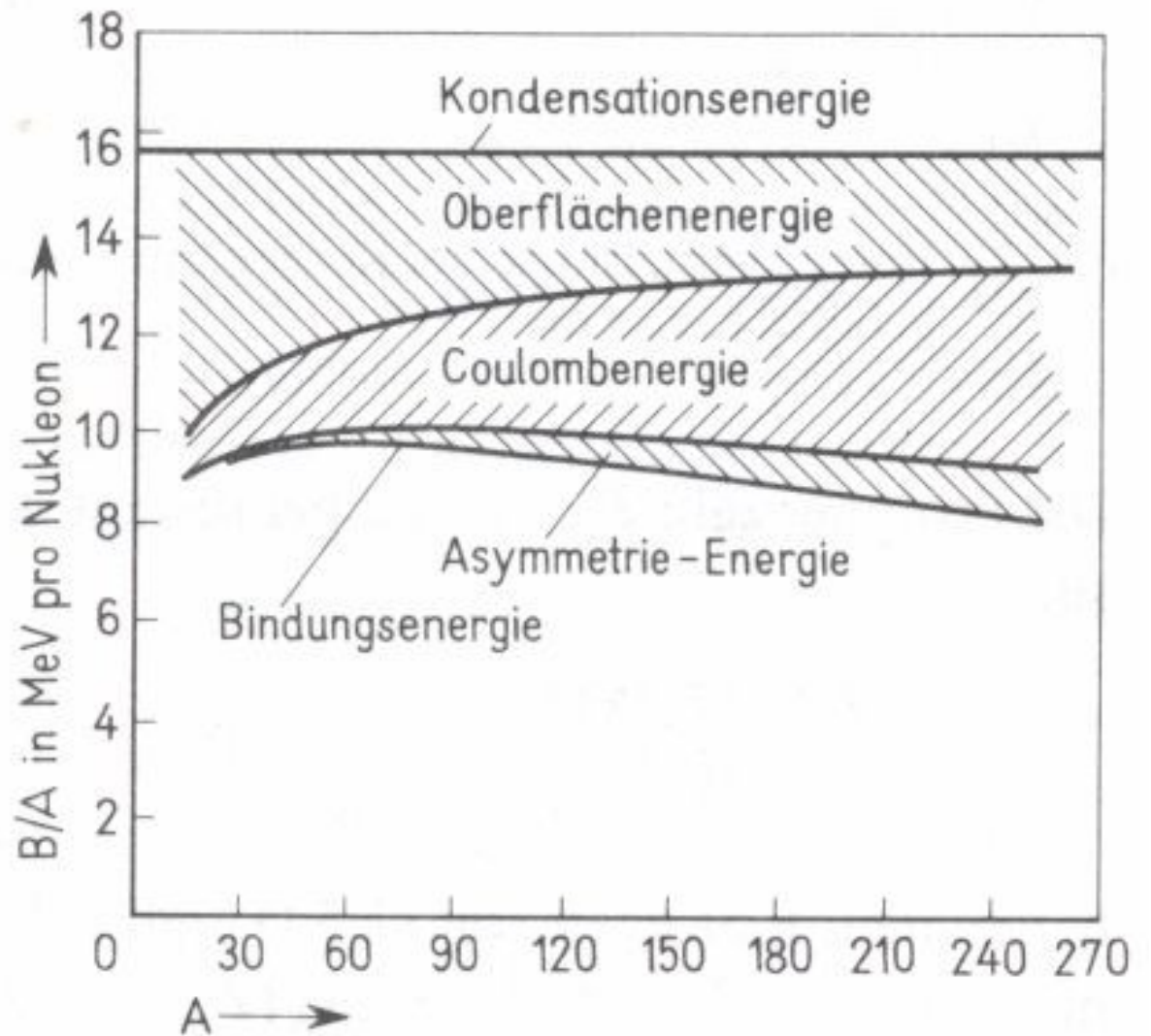
$$a_v = 15,67 \text{ MeV}$$

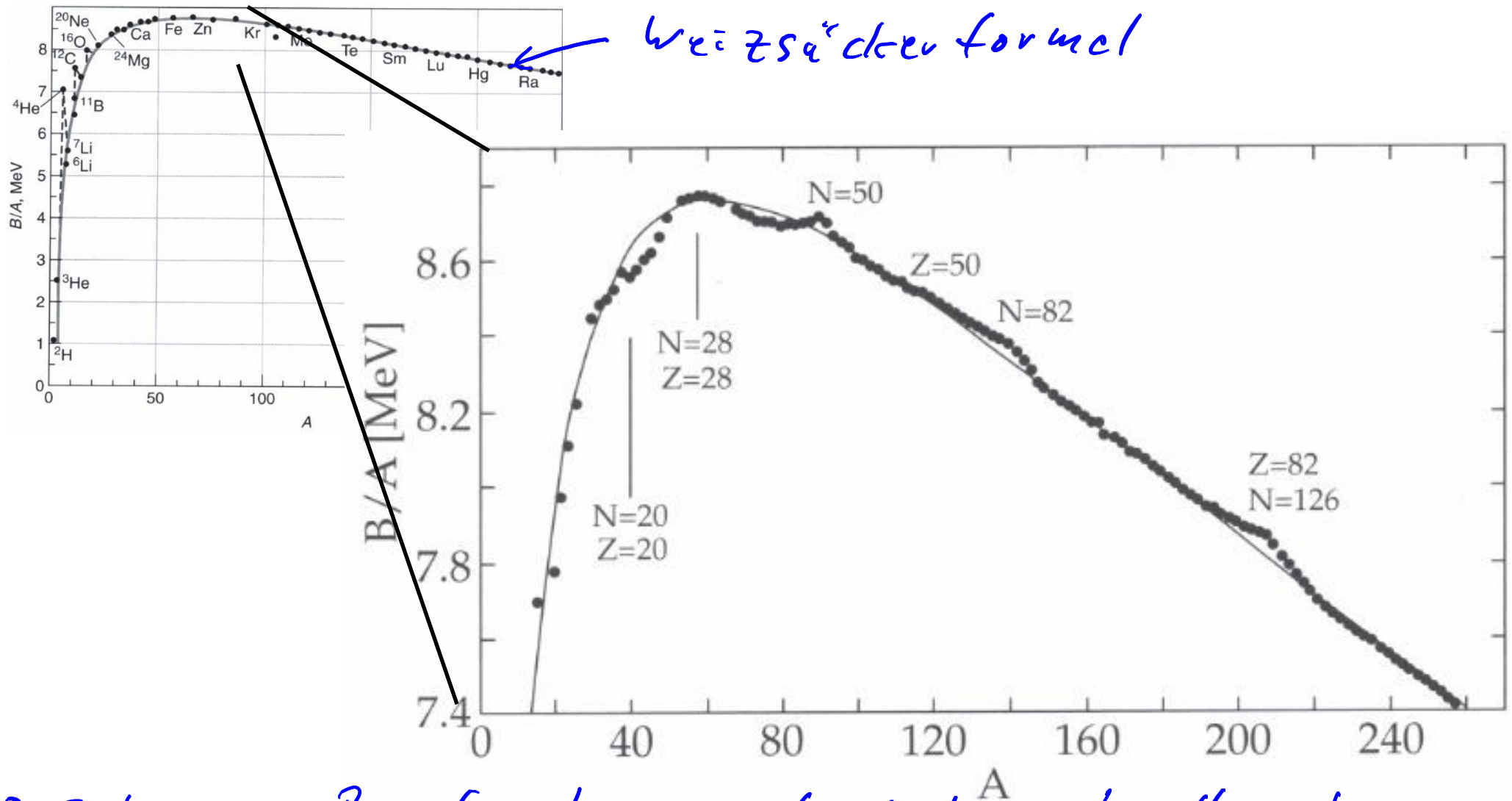
$$a_o = 17,23 \text{ MeV}$$

$$a_c = 0,71 \text{ MeV}$$

$$a_A = 23,29 \text{ MeV}$$

$$a_p = 12,2 \text{ MeV}$$





→ genauere Beschreibung erfordert detaillierteres Modell, z.B. Abweichung von Kugelform, Kernspin, ...
 höhere Bindungsenergien für $N, Z = 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126$

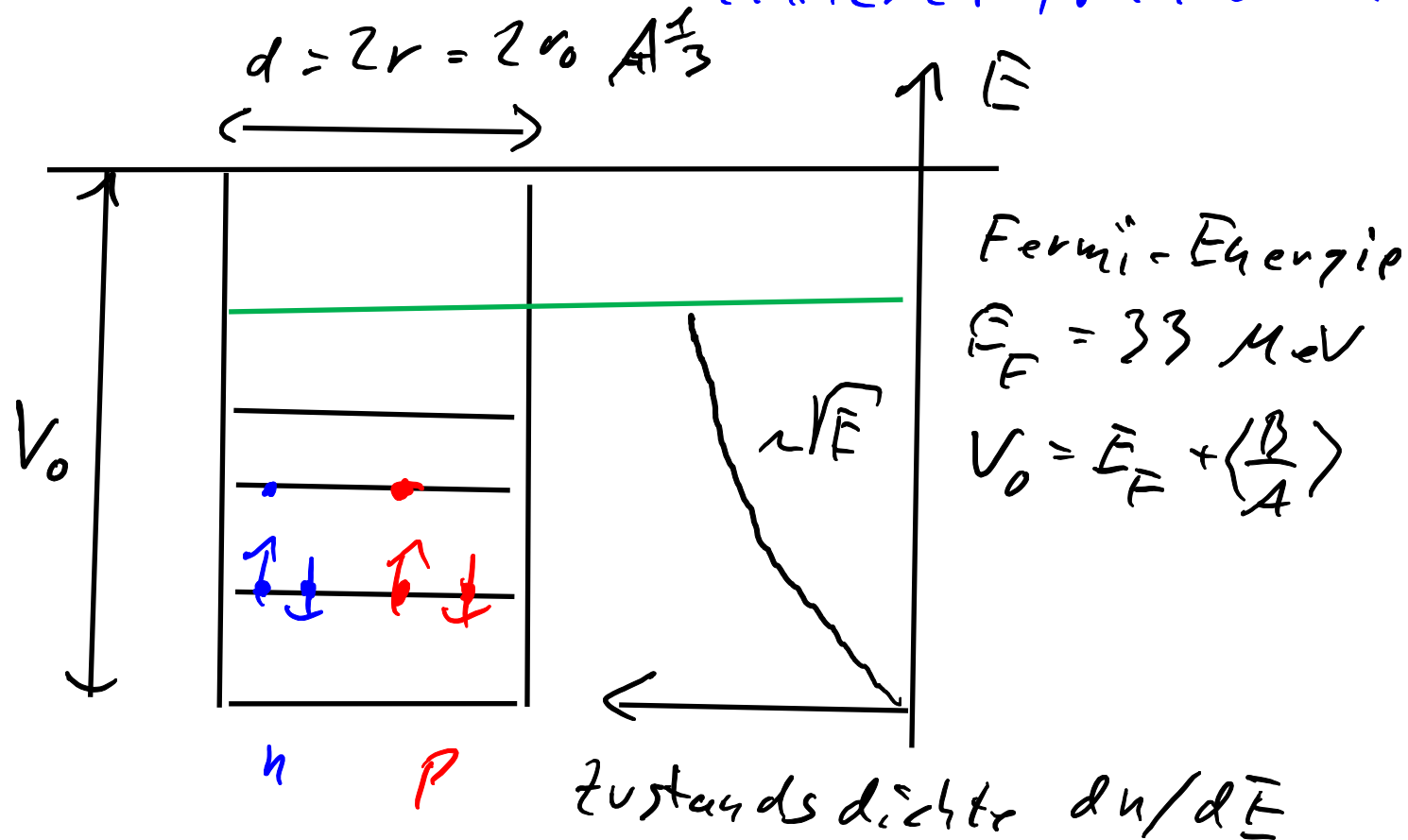
2.3.2 Fermigas - Modell *

Beobachtungen, Annahmen:

- Kernkraft kurzreichweitig
- Kernkraft gleich für Protonen und Neutronen

3-dig. Kastenpotential als Näherung für Kernpotential

→ Betrachte Nukleonen als eingetragenen im mittleren Potential der anderen Nukleonen



$$dN \sim V p^2 dp$$

$$N, Z \sim p_F^3 r_0^3 A$$

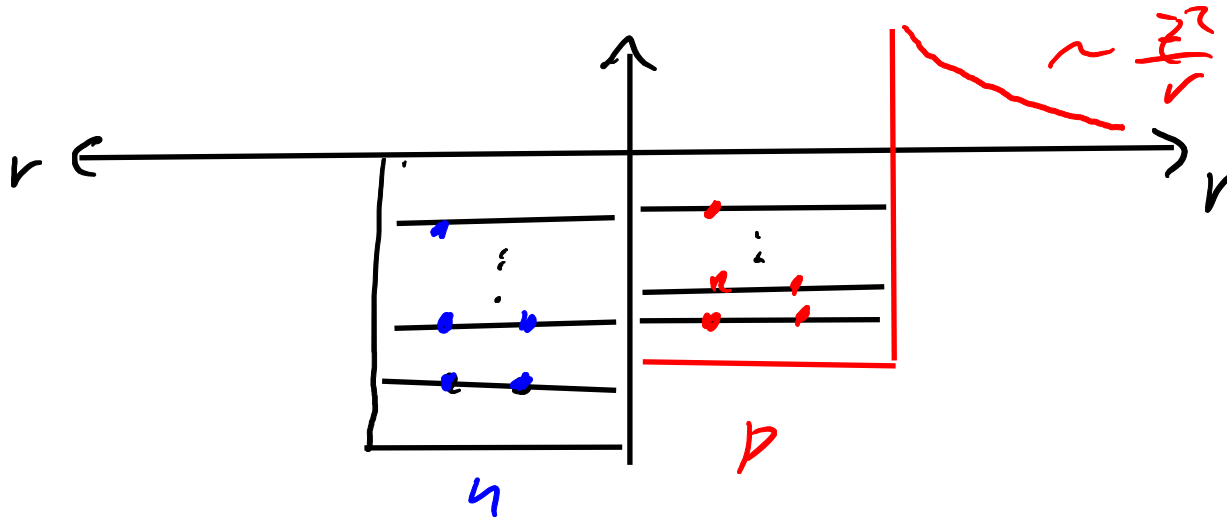
$$\Rightarrow p_F \sim \frac{1}{r_0} \left(\frac{N, Z}{A} \right)^{1/3}$$

$$\approx \text{const}$$

$$p_F \approx 250 \text{ MeV}/c$$

Coulombabstoßung der Protonen

→ Verschiebung der Proton-Energielevel gegenüber Neutronen

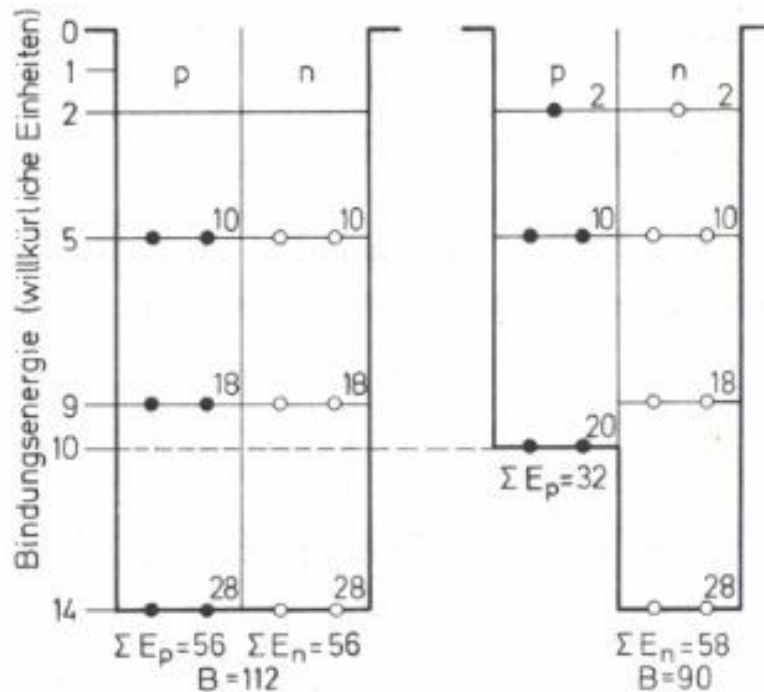


$$|E_F^n - E_F^p| \leq 1 \text{ MeV}$$

sonst Umwandlung

$p \rightarrow n$ oder $n \rightarrow p$

$$A=12$$

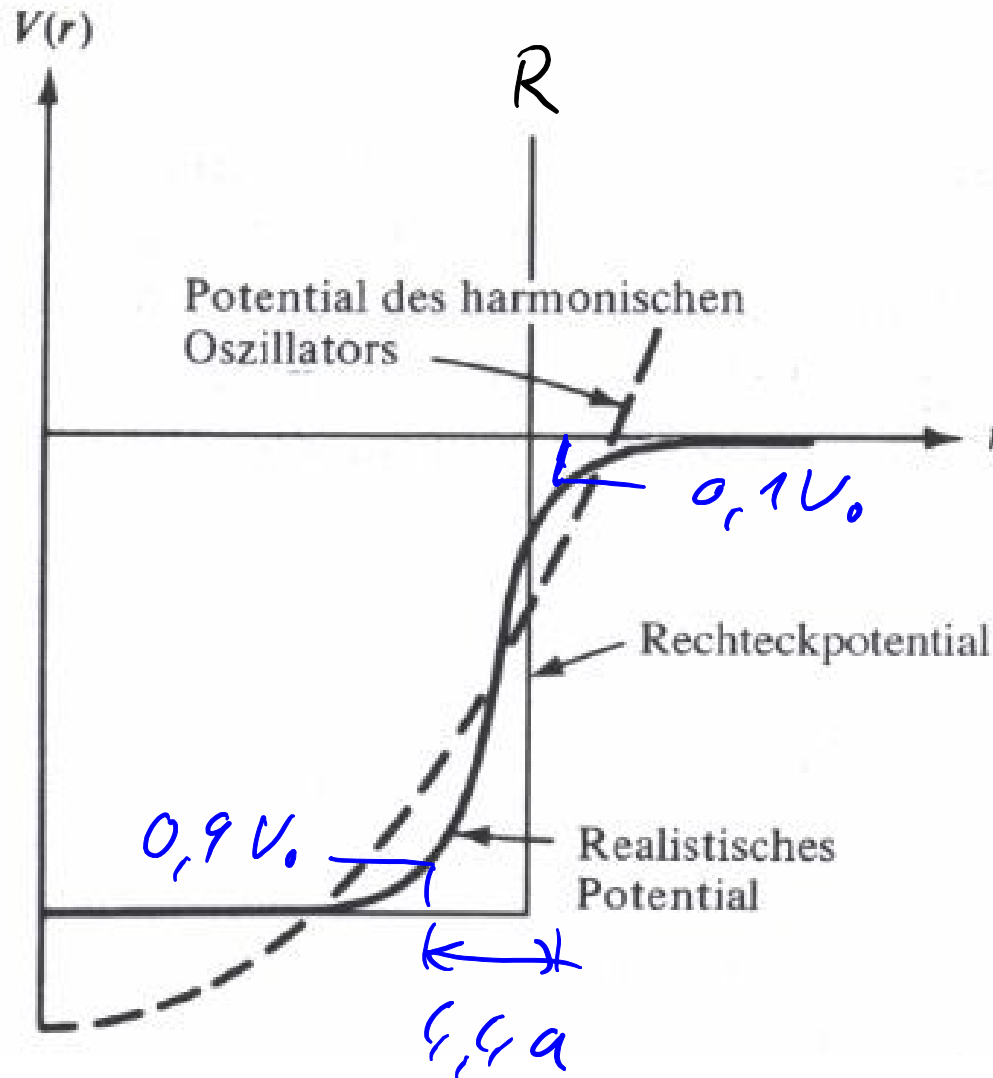


→ Asymmetrie zw. Protonen und Neutronen bei großer Coulombabstoßung (Z groß)

→ Asymmetrieterm in Weizsäcker-Formel

2.4 Schalenmodell, magischen Zahlen *

- Kastenpotential ist nur grobe Näherung des tatsächlichen Kernpotentials
- Streu-Experiment \rightarrow Kernpotential



$$V_{ws}(r) = \frac{-V_0}{1 + e^{(r-R)/a}}$$

Wood-Saxon-Potential

Skindicke $a \approx 0,7 \text{ fm}$

$V_{ws}(r)$ ist Zentralpotential
d.h. kugelsymmetrisch

Gilt nicht für alle Kerne

\rightarrow weitere Beiträge zum
Potential, z.B. Spin-Bahn-
Kopplung

quantenmechanische Betrachtung
mit Schrödinger gl.: $H\psi = E\psi = T\psi + V_{ws}\psi$

Schrittweise Verfeinerung des Potentials

1) Oszillator-Potential: $V_0 \sim r^2$

→ äquidistante Energieniveaus

2) Wood-Saxon-Potential V_{ws}

→ Aufkürzung entarteter
Energieniveaus

3) V_{ws} + Spin-Bahn-Kopplung

→ dicht liegende Energie-
niveaus mit Lücken bei

2, 8, 20, 28, 50, 82, 126

(analog: Schalenabschluss bei Atomen)

Kerne mit magischen Z, N:

viele stabile Isotope/Isotone

Z und N: doppelt magisch: z.B. ${}^4_2\text{He}_2$, ${}^{16}_8\text{O}_8$, ${}^{40}_{20}\text{Ca}_{20}$, ${}^{82}_{42}\text{Pb}_{40}$, ${}^{126}_{50}\text{Sn}_{76}$

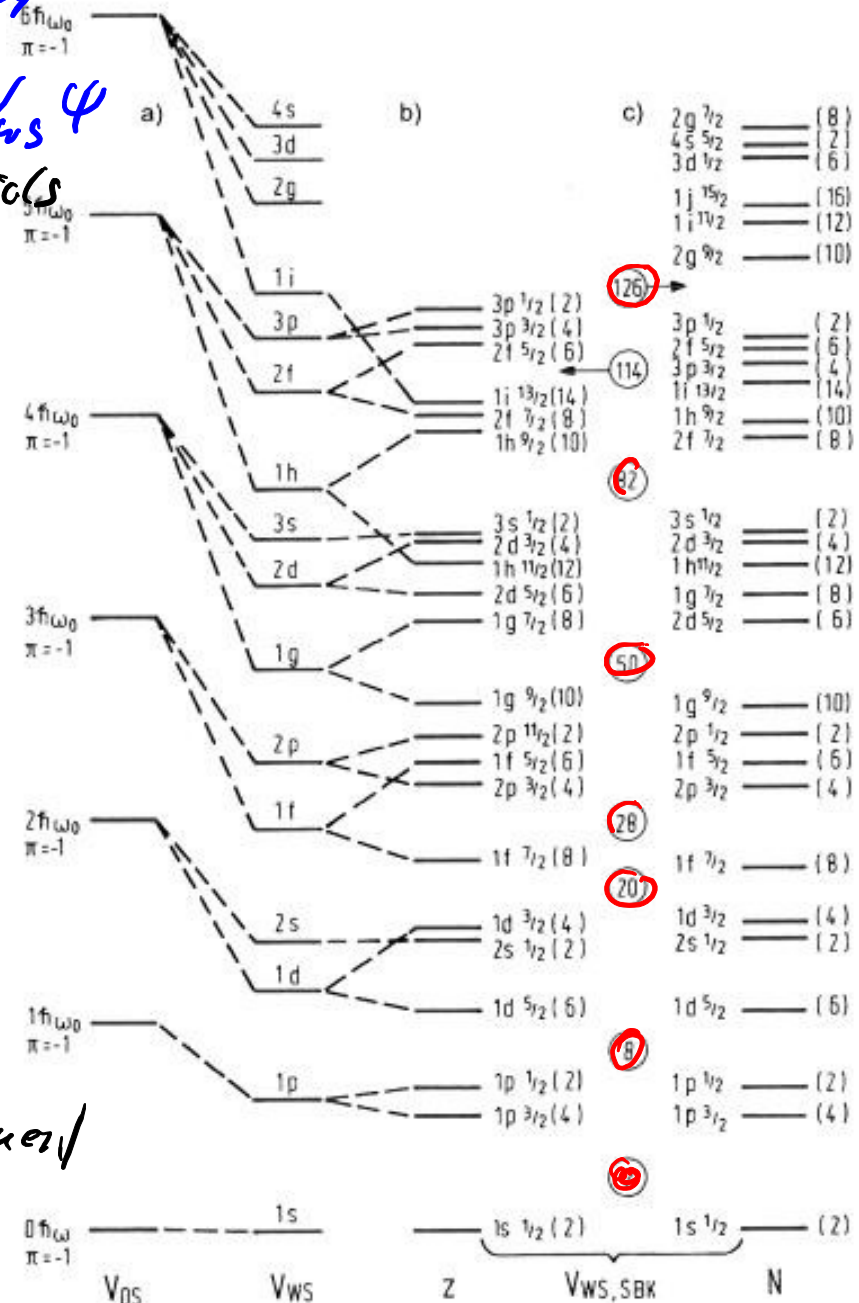


Bild 4.10. Schalenmodellzustände unter Berücksichtigung der Spin-Bahn-Kopplung

2.5 Z-N-Diagramm, Tal der Stabilität

- stabilste Kerne \rightarrow Maximale Bindungsenergie
 \rightarrow Minimale Kernmasse
 \rightarrow (doppelt) magische Kerne

\rightarrow Betrachte: $\frac{\partial M_K}{\partial Z} \Big|_{A=\text{const}}$ (Isobare)

$$M_K(A, Z) = Z \cdot m_p + (A - Z) m_n - \frac{B}{c^2}$$

$$B = a_v A - a_o A^{2/3} - a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_A \frac{(A - 2Z)^2}{A} - a_p \frac{1}{A^{1/2}}$$

$$\frac{\partial M_K}{\partial Z} \Big|_{A=\text{const}} \stackrel{!}{=} 0 = m_p - m_n + \left(2a_c \frac{Z}{A^{1/3}} - 4a_A \frac{A - 2Z}{A} \right) \cdot \frac{1}{c^2}$$

$$\Rightarrow Z = \frac{A}{2} \left[\frac{(m_n - m_p) c^2 + 4a_A}{4a_A - a_c A^{2/3}} \right] \approx \frac{A}{1,97 + 0,015 A^{2/3}} \approx \frac{A}{2}$$

z - N -Diagramm

