

## Blatt 03: Zustandsgleichungen und Gibbs-Duhem Relation

Ausgabe: Freitag, 10.11.17; Abgabe: Montag, 20.11.17, 13:00 Uhr

### Aufgabe 1 Zustandsgleichungen

Lassen Sie uns mit den folgenden Beispielen demonstrieren, dass Zustandsgleichungen die Form der inneren Energie einschränken. (In dieser Aufgabe betrachten wir die Teilchenzahl  $N$  als konstanten Parameter.)

- (1.a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die innere Energie  $E(T, V)$  nur von der Temperatur  $T$  abhängt (und nicht vom Volumen  $V$ ), falls für den Druck  $p(T, V)$  folgende Bedingung erfüllt ist

$$T \left. \frac{\partial p}{\partial T} \right|_V = p. \quad (1)$$

Tipp: Betrachten Sie zunächst das totale Differential  $d(E(T, S) - TS)$  und zeigen Sie, dass für die Entropie  $S(V, T)$  gilt:  $\partial_V S|_T = \partial_T p|_V$ .

- (1.b) (2 Punkte) Vergewissern Sie sich, dass die innere Energie eines idealen Gases (mit Zustandsgleichung  $pV = Nk_B T$ ) nur von der Temperatur (und nicht vom Volumen) abhängig ist. Lässt sich diese Aussage auf das van-der-Waals-Gas (Zustandsgleichung  $(p - a \frac{N^2}{V^2})(V - Nb) = Nk_B T$ ) übertragen?
- (1.c) (2 Punkte) Wir interessieren uns nun für die Wärmekapazität  $C_V = \partial_T E|_V$  des van-der-Waals-Gases: Überprüfen sie bitte, ob  $C_V$  vom Volumen  $V$  abhängig ist.

### Aufgabe 2 Elastischer Faden

Für das Dehnen eines Fadens der Länge  $x$  muss eine Kraft

$$J = ax - bT + cTx \quad (2)$$

aufgewendet werden. Hierbei sind  $a$ ,  $b$  und  $c$  konstant. Tipp: Das totale Differential der inneren Energie  $E(S, x)$  ist gegeben,  $dE = TdS + Jdx$ .

- (2.a) (2 Punkte) Bestimmen Sie  $\left. \frac{\partial S}{\partial x} \right|_T$ .
- (2.b) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die Wärmekapazität  $C_x(T, x) = \partial_T E|_x$  unabhängig von der Länge des Fadens  $x$  ist.
- (2.c) (2 Punkte) Ihr Freund (aus der Experimentalphysik) versichert Ihnen, dass die Wärmekapazität des Fadens die Form  $C_x = AT$  besitzt ( $A$  ist konstant). Bestimmen Sie nun die Entropie  $S$  als Funktion der Variablen  $T$  und  $x$  mit den Parametern  $A$ ,  $c$ ,  $b$ ,  $x_0$ ,  $T_0$  und  $S_0 = S(x = x_0, T = T_0)$ .

### Aufgabe 3 Gibbs-Duhem Gleichung

Wir kommen zurück zu unserem Lieblingsmodell. Die Entropie  $S$  eines idealen Gases ist gegeben ( $A$  ist eine Konstante):

$$S(T, V, N) = Nk_B \log \left( \frac{AV}{N} T^{\frac{3}{2}} \right). \quad (3)$$

Natürlich gilt auch die Zustandsgleichung  $pV = Nk_B T$ . Erinnern Sie sich noch an die Gibbs-Duhem Gleichung aus der Vorlesung?

- (3.a) (**6 Punkte**) Bitte bestimmen Sie das chemische Potential  $\mu(T, V, N)$  als Funktion von Temperatur  $T$ , Teilchenzahl  $N$  und Volumen  $V$  bis auf eine Konstante.
- (3.b) (**1 Bonuspunkt**) Bestimmen Sie das chemische Potential  $\mu(S, V, N)$  als Funktion von Entropie  $S$ , Teilchenzahl  $N$  und Volumen  $V$  bis auf eine Konstante.