

§ Relativitätsprinzipien

Relativitätsprinzipien sind ordnende Prinzipien.

§(1) Galilei

Trägheitssatz von Galilei: In einem Inertialsystem hat ein Massenpunkt, der keinen Kräften ausgesetzt ist, eine konstante Geschwindigkeit.
Für abgeschlossene Systeme gilt das

Spezielle Relativitätsprinzip von Galilei: Die grundlegenden Gesetze der klassischen Mechanik sind identisch in allen Bezugssystemen, die sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit relativ zueinander bewegen.

Dies bedeutet: Die Gesetze der Physik sind invariant unter den speziellen Galilei-Transformationen:

$$g_v : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}, \\ (q, t) \rightarrow g_v(q, t) \stackrel{\text{df}}{=} (q + vt, t)$$

für alle $v \in \mathbb{R}^3$. Somit:

Spezielle Galilei-Transformationen sind Symmetrien physikalischer (mechanischer) Systeme und führen Inertialsysteme ineinander über.

Neben der Relativität der Geschwindigkeit ist auch die Richtung im Raum relativ (Isotropie). Weiterhin sind die Festlegungen des Ursprungs im Raum und in der Zeit relativ (affiner Raum).
 Dies bedeutet: ① Die Gesetze abgeschlossener Systeme sind auch invariant gegenüber

Rotations: $R: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$,
 $(q, t) \rightarrow (Rq, t) \quad \forall R \in SO(3)$

Translations: $T_w: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$,
 $(q, t) \rightarrow T_w(q, t) \stackrel{\text{df}}{=} (q + w, t)$

$T_s: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$,
 $(q, t) \rightarrow T_s(q, t) \stackrel{\text{df}}{=} (q, t + s)$

für alle $w \in \mathbb{R}^3$, $s \in \mathbb{R}$.

Die Gruppe von bijektiven Abbildungen $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$, die von den Transformationen g_v ($v \in \mathbb{R}^3$), $R \in SO(3)$, T_w ($w \in \mathbb{R}^3$) und T_s ($s \in \mathbb{R}$) erzeugt wird, heißt die eigentliche, orthochrone Galilei-Gruppe Γ .

Relativitätsprinzip von Galilei: Alle Inertialsysteme sind gleichberechtigt. Die grundlegenden Gesetze abgeschlossener Systeme sind invariant gegenüber Γ .

Γ ist also eine Symmetriegruppe der Mechanik abgeschlossener Systeme. Symmetrien erzeugen Erhaltungsräume. Im Falle von Γ sind es 10 Erhaltungsräume:

Impuls, Energie, Drehimpuls, Geschwindigkeit des Massenschwerpunktes.

Γ legt eine Geometrie fest, die Galilei-Raumzeit.

Erinnerung: Eine Galilei-Raumzeit ist ein 4-dimensionaler affiner Raum M mit folgenden Eigenschaften:

(1) Auf dem zu M gehörigen 4-dimensionalen Vektorraum V ist eine Linearform $\Delta: V \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben.

(2) Auf dem Kern $V_0 \stackrel{\text{df}}{=} \{v \in V : \Delta(v) = 0\}$ von Δ ist ein euklidisches Skalarprodukt gegeben, das V_0 zu einem 3-dimensionalen euklidischen Vektorraum macht.

M ist dabei als Raum der Ereignisse zu interpretieren. Zu den Ereignissen $a, b \in M$ ist $\Delta(\underline{ab})$ der Zeitunterschied.

Die Tasern $V_t \stackrel{\text{df}}{=} \Delta^{-1}(t)$ ($t \in \mathbb{R}$) beschreiben in V und damit auch in M Schichten gleicher Zeit \cong räumliche Hyperbelsebenen.

Diese erhalten durch die euklidische Metrik von V_0 ebenfalls eine Metrik: Für $a, b \in M$ mit $\Delta(\underline{ab}) = 0$, ist

$$d(a, b) \stackrel{\text{df}}{=} |\underline{ab}|$$

wegen $\underline{ab} \in V_0$ wohldefiniert. Durch diese Metrik auf V_t wird also der räumliche Abstand von Ereignissen in dieser Zeitschicht (räumlicher Hyperbelsektor) festgelegt. Ereignisse aus unterschiedlichen Zeitschichten ist kein Abstand zugeordnet.

Standardmodell für eine Galilei-Raumzeit:

$M = \mathbb{R}^4$ als affiner Raum, $V = \mathbb{R}^4$ als Gruppe von Hyperbelsebenen.

$$\Delta: V = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \\ (q, t) \mapsto \Delta(q, t) \stackrel{\text{df}}{=} t + V(q, t) \in V.$$

d ist durch das übliche Skalarprodukt auf \mathbb{R}^3 gegeben, und wird direkt auf $V_0 = \mathbb{R}^3 \times \{0\}$ übertragen.

Aufgabe: Skizze.

Aufgabe: Die volle Symmetriegruppe der Galilei-Raumzeit.

Soll Γ als die volle Symmetriegruppe der Galilei-Raumzeit fungieren, so ist folgende Ergänzung notwendig:

(3) Die Vektorräume V, V_0 sind orientiert.

Aufgabe: Zeigen Sie, daß Γ die volle Symmetriegruppe der Mechanik ist.

Kritik: Da die speziellen Galilei-Transformationen eine Gruppe bilden, gilt

$$(q, t) \xrightarrow{v_1} g_{v_1}(q, t) = (q + v_1 t, t) \xrightarrow{v_2} (g_{v_2} \circ g_{v_1})(q, t) \\ = (q + (v_1 + v_2)t, t)$$

$$\rightsquigarrow g_{v_2} \circ g_{v_1} = g_{v_1 + v_2} \quad (\text{Addition der Geschwindigkeiten})$$

Diese einfache Folgerung hält nun experimentell Überprüfung nicht stand! Insbesondere gibt es in der Natur keine sofortigen Wirkungen (Fernwirkungen). Auf der Annahme der Existenz von Fernwirkungen beruht aber die Mechanik nach Newton. Vielmehr beobachtet wir eine Maxima (Geschwindigkeit)

mit der sich Informationen ausbreten. Wir bezeichnen diese 6
Grenzgeschwindigkeit mit c . Im Rahmen der Meßgenauigkeit, kann
 c nicht von der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum unterschieden
werden.

Die Mechanik nach Newton ist sowit nicht exakt, sondern
stellt vielmehr eine sehr brauchbare Näherung dar, solange
 $v/c \ll 1$ gilt.

Aufgabe: Finden Sie in der Literatur den präzisen Wert für
die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum, und beschreiben
Sie den zugehörigen Meßprozeß.

Darauf ist auch die Galilei-Raumzeit kein exaktes Raum -
zeit-Modell! Es bedarf einer Erweiterung dieses Modells,
die der Existenz einer Grenzgeschwindigkeit strukturell
Rechnung tragen kann.

$O(2)$ Einstein

9

Aus den speziellen Galilei-Transformationen folgt ein Additivitätsgesetz der Geschwindigkeiten, das unverträglich mit Beobachtungen ist. Diese Unverträglichkeit beruht auf der Hypothese der absoluten Zeit, die wir offenbar aufgeben müssen. Mit anderen Worten:

Die Zeit läuft in verschiedenen Bezugssystemen verschieden schnell ab. Die Angabe eines Zeitintervalls ist zweit nur sinnvoll, wenn auch das Bezugssystem angegeben wird, auf das sich die Aussage bezieht. Die Erfahrung zeigt also, daß ein allgemeineres als das Galileische Relativitätsprinzip gelten muß.

Relativitätsprinzip von Einstein: Es ist unmöglich, aufgrund irgendwelcher physikalischer Erscheinungen (nicht nur solcher der Mechanik) ein absolut ruhendes Koordinatensystem zu bestimmen. Inertialsysteme sind absolut gleichwertig. Die Naturgesetze können so geschrieben werden, daß sie forminvariant (konsistent) sind gegenüber den nach zu bestimmenden Transformationen von einem Inertialsystem in ein anderes.

Die gesuchten Transformationen heißen Lorentz-Transformationen.

Herleitung der Lorentz-Transformation aus dem Relativitätsprinzip von Einstein:

8

Ausnahme:

(A1) Der Raum ist isotrop.

(A2) Raum und Zeit sind homogen.

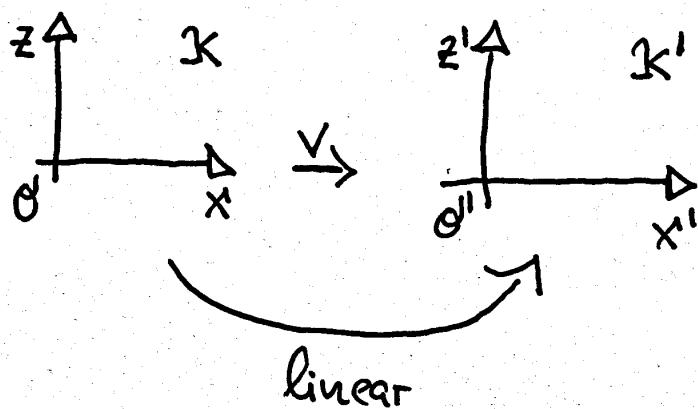
(A3) Alle Inertialsysteme sind gleichberechtigt. ↴

Bemerkungen: (A1) & (A2) definieren Inertialsysteme bereits vollständig.

Wegen (A2) müssen die gesuchten Transformationen linear sein.

Aufgabe: Erläutern Sie die Bemerkungen. ↴

Wir analysieren die folgende Situation:



$$\Theta(t=0) = \Theta'(t=0)$$

$$\Theta'(t) = (vt, 0, 0)$$

Für die gesuchte lineare Transformation schreiben wir

$$\left. \begin{array}{l} x' = \gamma(v) (x - vt) \\ y' = \alpha(v) y \\ z' = \alpha(v) z \\ t' = \mu(v) t + \varepsilon(v) x \end{array} \right\} (H1)$$

Bemerkungen: $\gamma, \alpha, \mu, \varepsilon$ sind von den Koordinaten unabhängig, sie hängen höchstens von der Relativgeschwindigkeit v ab.

Wegen der Isotropie des Raumes (A1) ist die Transformation $(y, z) \rightarrow (y', z')$ alleine durch $\alpha(v)$ gegeben.

In der Gleichung für t' kommen die Koordinaten (y, z) nicht vor (A1).

Aufgabe: Erklären Sie die Bemerkungen.

Wir bestimmen nun $\gamma, \alpha, \mu, \varepsilon$.

(H2): Wir transformieren $x \rightarrow -x$, $x' \rightarrow -x'$, $v \rightarrow -v$ und erhalten die Orientierung. Wegen (A1) gilt:

$$-x' = \gamma(-v) (-x + vt)$$

$$-y' = -\alpha(-v) y$$

$$z' = +\alpha(-v) z$$

$$\underline{t'} = \mu(-v) t - \varepsilon(-v) x$$

Der Vergleich mit (H1) liefert:

$$\gamma(-v) = \gamma(v), \alpha(-v) = \alpha(v), \mu(-v) = \mu(v),$$

$$\text{aber } \varepsilon(-v) = -\varepsilon(v).$$

Statt der ungeraden Funktion $\varepsilon(v)$ führen wir durch

$$\varepsilon(v) =: -\frac{v}{\eta(v)} \mu(v)$$

die in v gerade Funktion $\eta(v)$ e. Einsetzen liefert:

$$x' = \gamma(v) (x - vt) \quad \left. \right\}$$

$$y' = \alpha(v) y \quad \left. \right\}$$

$$z' = \alpha(v) z \quad \left. \right\}$$

$$t' = \mu(v) \left(t - \frac{v}{\eta(v)} x \right) \quad \left. \right\} (H2)$$

(H3): Für die inverse Transformation notieren wir wegen (A3):¹

$$\left. \begin{array}{l} x = \gamma(v) (x' + vt') \\ y = \alpha(v) y' \\ z = \alpha(v) z' \\ t = \mu(v) \left(t + \frac{\gamma}{\alpha(v)} x' \right) \end{array} \right\} \quad (\text{H3})$$

(H2)

$$\alpha^2(v) = 1 \rightsquigarrow \alpha = \pm 1.$$

Damit die Transformation für $v \rightarrow 0$ stetig in die identische Abbildung übergeht, wählen wir

$$\alpha = +1.$$

Jetzt rechnen wir: $\mu \cdot 1. \text{ Gl. (H2)} + v\gamma \cdot 4. \text{ Gl. (H2)}$ liefert

$$\mu x' + v\gamma t' = \mu \gamma \left(1 - \frac{v^2}{\mu} \right) x.$$

Auflösen nach x gibt

$$x = \frac{x'}{\gamma \left(1 - \frac{v^2}{\mu} \right)} + \frac{vt'}{\mu \left(1 - \frac{v^2}{\mu} \right)}.$$

Der Vergleich mit 1. Gl. (H3) liefert

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} , \quad \gamma = \frac{1}{\mu(1 - \frac{v^2}{c^2})}$$

$$\rightsquigarrow \gamma = \mu , \quad \gamma^2 = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} .$$

Wegen unserer Forderung, daß die Transformation für $v \rightarrow 0$ stetig in die identische Abbildung übergehen soll, wählen wir

$$\gamma = +\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} .$$

Jetzt ist nur noch η unbekannt. Wir wissen bereits, daß $\eta(v)$ eine gerade Funktion der Relativgeschwindigkeit v sein muß. Wir betrachten folgende Situation:

$$K \xrightarrow{v_1} K' \xrightarrow{v_2} K'' \quad (\text{wie auf S.8})$$

\curvearrowright

Aus dem Relativitätsprinzip (A3) folgt, daß die Komposition von zwei Lorentz-Transformationen ebenfalls eine Lorentz-Transformation ist. Außerdem sind die Transformationen assoziativ und die inverse Transformation und die identische existieren. Lorentz-Transformationen bilden somit eine Gruppe. Dazu später mehr.

Es ist

$$x' = \gamma(v_1)(x - v_1 t) , \quad x'' = \gamma(v_2)(x' - v_2 t')$$

$$t' = \gamma(v_1)\left(t - \frac{v_1}{\gamma(v_1)}x\right) , \quad t'' = \gamma(v_2)\left(t' - \frac{v_2}{\gamma(v_2)}x'\right)$$



$$x'' = \gamma(v_2)\gamma(v_1) \left\{ x - v_1 t - v_2 \left(t - \frac{v_1}{\gamma(v_1)}x \right) \right\}$$

$$t'' = \gamma(v_2)\gamma(v_1) \left\{ t - \frac{v_1}{\gamma(v_1)}x - \frac{v_2}{\gamma(v_2)}(x - v_1 t) \right\}$$

Wie oben dargelegt liefert (A8),

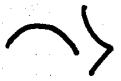
$$x'' = \gamma(w)(x - wt)$$

$$t'' = \gamma(w)\left(t - \frac{w}{\gamma(w)}x\right)$$



$$\gamma(w) = \gamma(v_2)\gamma(v_1) \left\{ 1 + \frac{v_1 v_2}{\gamma(v_1)} \right\} =$$

$$= \gamma(v_2)\gamma(v_1) \left\{ 1 + \frac{v_1 v_2}{\gamma(v_2)} \right\}$$



$$\gamma(v_1) = \gamma(v_2) = \text{const.}$$

Die Größe γ ist also eine universelle Konstante mit der

Dimension einer Geschwindigkeit zum Quadrat. Diese Konstante muss endlich sein: Für $\gamma \rightarrow \infty$ gehen die Lorentz-Transformationen in die (speziellen) Galilei-Transformationen über. Diese wider-

Sprechen aber Einsteins Relativitätsprinzip und gelten lediglich approximativ für $v \ll c$. 14

Wir rechnen

$$\gamma(w) = \gamma(v_1) \gamma(v_2) \left\{ 1 + \frac{v_1 v_2}{c^2} \right\} \quad \curvearrowright$$

$$\curvearrowright 1 - \frac{w^2}{c^2} = \frac{\left(1 - \frac{v_1^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{v_2^2}{c^2}\right)}{\left(1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}\right)^2} \quad \curvearrowright$$

$$\curvearrowright \frac{w^2}{c^2} = \frac{1}{c^2} \frac{(v_1 + v_2)^2}{\left(1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}\right)^2}$$

Vergleich der Koeffizienten von c^{-2} liefert:

$$w = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}$$

Dies ist Einsteins Additionstheorem bei gleichgerichteten Geschwindigkeiten v_1 und v_2 .

Aufgabe: Zeigen Sie, daß $\sigma \stackrel{\text{df.}}{=} \sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}$ eine Gravgeschwindigkeit darstellt. Und: Selbst wenn ein Vorgang mit σ in System K' propagiert, ergibt das Additionsgesetz zu einer beliebigen Lurchialsystem $w = \sigma$. ↴

Nach allen experimentellen Erkenntnissen stimmt die Gravgeschwindigkeit σ mit der Lichtgeschwindigkeit c im Vakuum überein.¹⁵

Aufgabe: Leiten Sie die Lorentz-Transformationen aus Einsteins Relativitätsprinzip und der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit her.

Bei beliebiger Richtung der Relativgeschwindigkeit gehen wir so vor:

Wir definieren Projektoren (mit den üblichen Eigenschaften)

$$P_{(v)}^{(0)} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\underline{x} \rightarrow P_{(v)}^{(0)}(\underline{x}) \stackrel{\text{df}}{=} \frac{\langle \underline{v}, \underline{x} \rangle}{\langle \underline{v}, \underline{v} \rangle} \underline{v},$$

$$P_{(v)}^{(1)} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\underline{x} \rightarrow P_{(v)}^{(1)}(\underline{x}) \stackrel{\text{df}}{=} (\text{id} - P_{(v)}^{(0)})(\underline{x}).$$

Aufgabe: Finden Sie die Matrixdarstellung dieser Projektoren.
Mit $\underline{x}^{(0)} \stackrel{\text{df}}{=} P_{(v)}^{(0)}(\underline{x})$, $\underline{x}^{(1)} \stackrel{\text{df}}{=} P_{(v)}^{(1)}(\underline{x})$ gilt offenbar

$$\underline{x}^{(0)'} = \gamma(v) (\underline{x}^{(0)} - \underline{v} t)$$

$$\underline{x}^{(1)'} = \underline{x}^{(1)}$$

$$t' = \gamma(v) \left(t - \frac{\langle \underline{v}, \underline{x}^{(0)} \rangle}{c^2} \right)$$

Wir rechnen:

$$\begin{aligned}
 \underline{x}' &= \underline{x}^{(0)}' + \underline{x}^{(1)}' \\
 &= \gamma(v) (\underline{x}^{(0)} - vt) + \underline{x}^{(1)} \\
 &= \gamma(v) (P_{(v)}^{(0)}(\underline{x}) - vt) + P_{(v)}^{(1)}(\underline{x}) \\
 &= \gamma(v) (P_{(v)}^{(0)}(\underline{x}) - vt) + (\text{id} - P_{(v)}^{(0)})(\underline{x}) \\
 &= \underline{x} + (\gamma(v)-1) P_{(v)}^{(0)}(\underline{x}) - \gamma(v) vt
 \end{aligned}$$

→

$$\left. \begin{aligned}
 \underline{x}' &= \underline{x} + (\gamma(v)-1) \frac{\langle v, \underline{x} \rangle v}{\langle v, v \rangle} - \gamma(v) vt \\
 t' &= \gamma(v) \left(t - \frac{\langle v, \underline{x} \rangle}{c^2} \right)
 \end{aligned} \right\}$$

Dies sind die gesuchten Transformationsgleichungen.

Aufgabe: Finden Sie die mit dieser Transformation
assoziierte Matrix.

$\Theta(3)$ Minkowski

Was interessiert hauptsächlich eine rationale Formulierung der speziellen Relativitätstheorie, die auch ein mit dem Relativitätsprinzip von Einstein verträgliches Raumzeit-Modell erlaubt.

Wir denken an Ereignisse (Raumzeit-Punkte) folgendermaßen koordinatisiert:

$$x^0 = ct, \quad \underline{x} = (x^1, x^2, x^3); \quad x = (x^0, \underline{x})$$

Offenbar kann der Raumzeit-Punkt x zuerstens lokal bezüglich einer festen Basis von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$,

$$\{e_\mu\}_{\mu \in I}, \quad I \stackrel{\text{df}}{=} \{0, 1, 2, 3\},$$

$$(e_\mu)^\nu = \delta_\mu^\nu = \begin{cases} 1 & \text{für } \mu = \nu \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

dargestellt werden:

$$x = x^\lambda e_\lambda \quad (\text{Summenkonvention!})$$

Weigentlich kann die Raumzeit mit \mathbb{R}^4 identifiziert werden. Diese Identifikation muß noch mit einer mit dem Relativitätsprinzip verträglichen geometrischen Struktur ergänzt werden. In der Galilei-Raumzeit war diese gerade

durch die Euklidische Metrik gegeben, die ja als Isometrie die vollständige Galilei-Gruppe hatte.

Das Relativitätsprinzip von Einstein impliziert insbesondere, daß alle Teilchen, welche sich in einem Bezugssystem mit c bewegen, dies auch in allen Bezugssystemen tut.

Aufgabe: Zeigen Sie dies. Diskutieren Sie die Möglichkeit, in das Ruhesystem der Teilchen zu transformieren.

Dies ist eine absolute Implikation des Relativitätsprinzips:

In allen Bezugssystemen gilt:

$$\left\langle \frac{dx}{dt}, \frac{dx}{dt} \right\rangle \leq c^2$$

$$\rightsquigarrow -c^2(dt)^2 + dx^a dx^b \langle e_a, e_b \rangle \leq 0$$

$$\rightsquigarrow -c^2(dt)^2 + \sum_{ab} dx^a dx^b \leq 0, \quad a, b \in \{1, 2, 3\}$$

↑

Euklidische Metrik

Wir fassen dies folgendermaßen zusammen:

$$-(ds)^2 \stackrel{\text{def}}{=} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu,$$

wobei die Minkowski-Metrik η in unserer Konvention
die folgender Komponenten hat:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bemerkung: Die Differentialgeometrischen mögen mir verzeihen.

Da im gewählten Koordinatensystem η nicht von Raumzeit-Punkt abhängt, kann die Raumzeit global mit \mathbb{R}^4 identifiziert werden (globale Koordinaten). Genauer:

Das Paar (\mathbb{R}^4, η) besteht aus der differenzierbaren
Mannigfaltigkeit \mathbb{R}^4 und der Minkowski Metrik η (zusammen
mit den üblichen Orientierungen) heißt Minkowski-Raumzeit,

$$M^4 \text{ def } (\mathbb{R}^4, \eta)$$

Wegen $(ds)^2 \leq 0$ (in unserer Konvention) handelt es sich
um eine Lorentz-Mannigfaltigkeit.

Zur Interpretation von ds : Gegeben sei eine C^1 -Kurve

$$\gamma: [\lambda_1, \lambda_2] \subset \mathbb{R} \rightarrow M^4,$$

$$\lambda \rightarrow \gamma(\lambda) = x^\mu(\lambda) e_\mu.$$

Dann ist das Funktional

$$L = \int_{\gamma}^{\gamma(x)} ds = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}}$$

die Bogenlänge der Kurve γ .

Während die Angabe eines Raumzeitpunktes von Koordinatensystemen abhängt, ist die Bogenlänge koordinatenunabhängig.

Größen, die in allen Koordinatensystemen übereinstimmen, kommt in der Physik eine besondere Rolle zu: Sie erfüllen die notwendige Voraussetzung, um als Observablen zu fungieren.

Aufgabe: Zeigen Sie, daß L koordinatenunabhängig ist.

Wie sieht es mit der Minkowski-Metrik aus?

Offenbar enthält g die essentielle geometrische Information.

Weiter unten untersuchen wir die Isometrien dieser Geometrie.

Zuvor jedoch: Das Quadrat der Länge eines Lorentz-Vektors

$x = x^\mu e_\mu$ ist

$$\|x\|^2 \stackrel{\text{def}}{=} -g(x, x) = -x^\mu x^\nu g_{\mu\nu}$$

$$= -x^\mu x^\nu g_{\mu\nu}$$

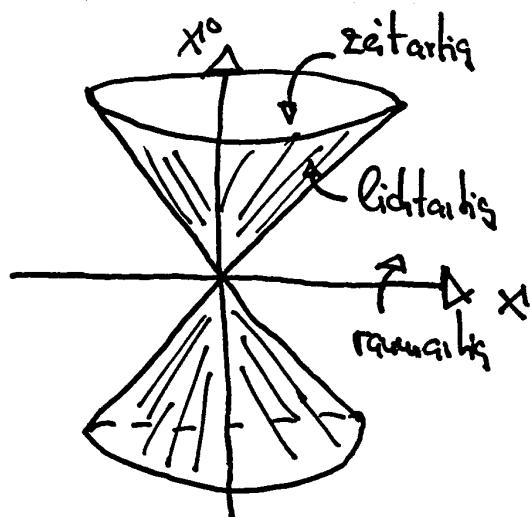
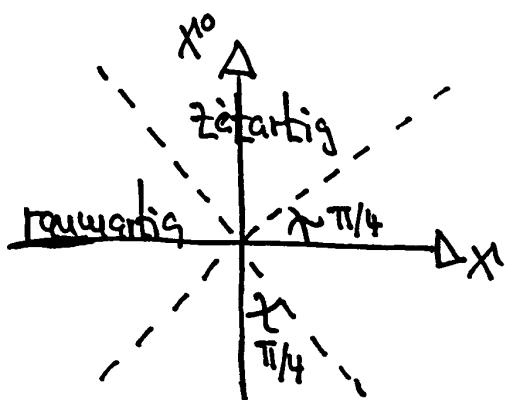
$$= (x^\mu)^2 - |\underline{x}|^2$$

Dadurch entsteht eine Klassifizierung von Lorentz-Vektoren in der Minkowski-Raum M^4 : Vektoren mit

(1) $\|x\|^2 = 0$ heißen lichtartig

(2) $\|x\|^2 < 0$ heißen räumlich

(3) $\|x\|^2 > 0$ heißen zeitartig



Aufgabe: Diskutieren Sie den skizzierten Lichtkegel. In welche Raumzeit-Regionen bewegen sich messbare und unmessbare Teilchen? Ist ein räumliches Ereignis von Ursprung des Lichtkegels aus absolut unverrückbar? Kann Ereignisse, die in einer Bezugssystem durch einen zeitartigen Abstand voneinander getrennt sind, in einem anderen gleichzeitig stattfinden?

Die Lorentz-Gruppe fungiert auch als Isometriegruppe, wie wir nun sehen werden: Die Lorentzgruppe ist

$$\begin{aligned} O(1,3) &\stackrel{\text{def}}{=} \left\{ M \in \mathbb{R}(4) : \eta(Mx, My) = \eta(x, y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^4 \right\} \\ &= \left\{ M \in \mathbb{R}(4) : M^T \eta M = \eta \right\}. \end{aligned}$$

Die Koeffizienten der Matrizen aus $O(1,3)$ sind nicht beschränkt. Daher ist $O(1,3)$ nicht kompakt. Außerdem ist $O(1,3)$ nicht zusammenhängend. Für $M \in O(1,3)$ gilt $|\det M| = 1$ wegen

$$\begin{aligned} -1 &= \det(\eta) = \det(M^T \eta M) = \det(M^T) \det(\eta) \det(M) \\ &= -(\det(M))^2. \end{aligned}$$

Für den Einheitsvektor $e_0 = (S_0^A)$ gilt

$$\begin{aligned} -1 &= \eta(e_0, e_0) = \eta(Me_0, Me_0) \\ &= -(M_{00})^2 + (M_{10})^2 + (M_{20})^2 + (M_{30})^2 \rightsquigarrow \end{aligned}$$

$$\rightsquigarrow (M_{00})^2 = 1 + (M_{10})^2 + (M_{20})^2 + (M_{30})^2 \geq 1.$$

Daher sind folgende vier Teilmengen von $O(1,3)$ abgeschlossen und offen in $O(1,3)$:

$$L_+^{\uparrow} \stackrel{\text{df}}{=} \{ M \in O(1,3) : \det M = 1 \text{ und } -M_{00} \geq 1 \},$$

$$L_-^{\uparrow} \stackrel{\text{df}}{=} \{ M \in O(1,3) : \det M = -1 \text{ und } -M_{00} \geq 1 \},$$

$$L_+^{\downarrow} \stackrel{\text{df}}{=} \{ M \in O(1,3) : \det M = 1 \text{ und } -M_{00} \leq 1 \},$$

$$L_-^{\downarrow} \stackrel{\text{df}}{=} \{ M \in O(1,3) : \det M = -1 \text{ und } -M_{00} \leq 1 \}.$$

In der Tat sind diese Mengen abgeschlossen direkt nach Definition, denn $M \rightarrow M^{\circ}$ und \det sind stetige Abbildungen. Sie sind auch offen, weil z.B. L_+^{\uparrow} folgendermaßen beschrieben werden kann:

$$L_+^{\uparrow} = \{ M \in O(1,3) : \det M \in (\frac{1}{2}, 2) \text{ und } M_0^{\circ} > \frac{1}{2} \}.$$

Wieder wegen der Stetigkeit ist eine solche Menge offen.

Die Lorentz-Gruppe läßt sich also zerlegen in die disjunkten Mengen

$$O(1,3) = L_+^{\uparrow} \cup L_-^{\uparrow} \cup L_+^{\downarrow} \cup L_-^{\downarrow},$$

die alle vier zugleich abgeschlossen und offen sind. Daher ist $O(1,3)$ nicht zusammenhängend.

Die eigentliche, orthodrome Lorentz-Gruppe ist

$$\begin{aligned} SO(1,3) &\stackrel{\text{df}}{=} \{ M \in O(1,3) : \det M = 1 \text{ und } M_0^{\circ} \geq 1 \} \\ &= L_+^{\uparrow}. \end{aligned}$$

$SO(1,3)$ ist zusammenhängend. Das liegt daran, daß jedes $\sigma \in SO(1,3)$ als Produkt von „Drehungen“

$$R(\beta) \stackrel{\text{df}}{=} \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \beta \in SO(3)$$

und „Boosts“ (die auf S. 8 betrachteten speziellen Lorentz-Transformationen) L_j ($j \in \{1, 2, 3\}$) entlang der durch e_j gegebenen räumlichen Richtung darstellen läßt. Es gilt:

$$\sigma = R(\beta) L_j R(\beta')$$

mit geeigneter $\beta, \beta' \in SO(3)$ und $j \in \{1, 2, 3\}$.

Aufgabe: Zeigen Sie dies.

Weil $SO(3)$ zusammenhängend ist, gibt es einen stetigen Weg γ in $SO(3)$, der β mit der Einheitsmatrix verbindet. Also einen stetigen Weg $(R(\gamma)) L_j(v) R(\beta')$ in $SO(1,3)$, der σ mit $L_j(v) R(\beta')$ verbindet. Und einen weiteren, der $L_j(v) R(\beta')$ mit $L_j(v)$ in $SO(1,3)$ verbindet. Schließlich findet sich leicht ein stetiger Weg in $SO(1,3)$, der $L_j(v)$ mit der Einheitsmatrix $L_j(0)$ verbindet. Als Ergebnis finden wir die folgende Charakterisierung von $SO(1,3)$: $SO(1,3)$ ist die größte zusammenhängende Teilmenge von $O(1,3)$, welche $id_{\mathbb{R}^4}$ enthält.

Außerdem sind auch die anderen Bestandteile in der Zerlegung

Von $O(1,3)$ zusammenhängend, weil sie jeweils diffenormph zu L_+^\uparrow sind. Zum Beispiel ist $L_-^\uparrow = \{\eta A : A \in L_+^\uparrow\}$. \square

Wir halten fest: $SO(1,3)$ fungiert einerseits als Gruppe von Transformationen zwischen Bezugssystemen, und andererseits als Isometriegruppe der Minkowski-Raumzeit.

Aufgabe: Ist dies ein Zufall?

1 Tensoren

(3) a

Die folgenden Betrachtungen sind rein heuristischer Natur und entbehren jeglicher algebraischen und geometrischer Präzision.

Sei wieder $\{e_\mu\}_{\mu \in I}$ die kavariische Basis von M^4 , also

$$(e_\mu)^\alpha = \delta_\mu^\alpha$$

Hierbei bezeichnet α die entsprechende Komponente des Einheitsvektors e_μ . Der Index μ gibt also an, welche Einheitsvektor betrachtet wird und bestimmt keineswegs eine Komponente.

Ausschauung: e_μ liegt tangentiel (lokal) an der Koordinatenkurve x^μ . Damit kann e_μ^α als Ableitungsoperator $\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ aufgefasst werden. In der Tat gilt

$$e_\mu(x^\alpha) = \partial_\mu x^\alpha = \delta_\mu^\alpha.$$

Wir haben also die Entsprechung $\partial_0 \hat{=} (1, 0, 0, 0)^T$, usw. Wegen der einfachen Geometrie von M^4 und der kavariischen Koordinatenwahl, ist der lokale Charakter dieser Koeffizienten nicht transparent, ist aber dennoch sehr essentiell.

Die allgemeine Situation ist ganz groß die folgende:

2.

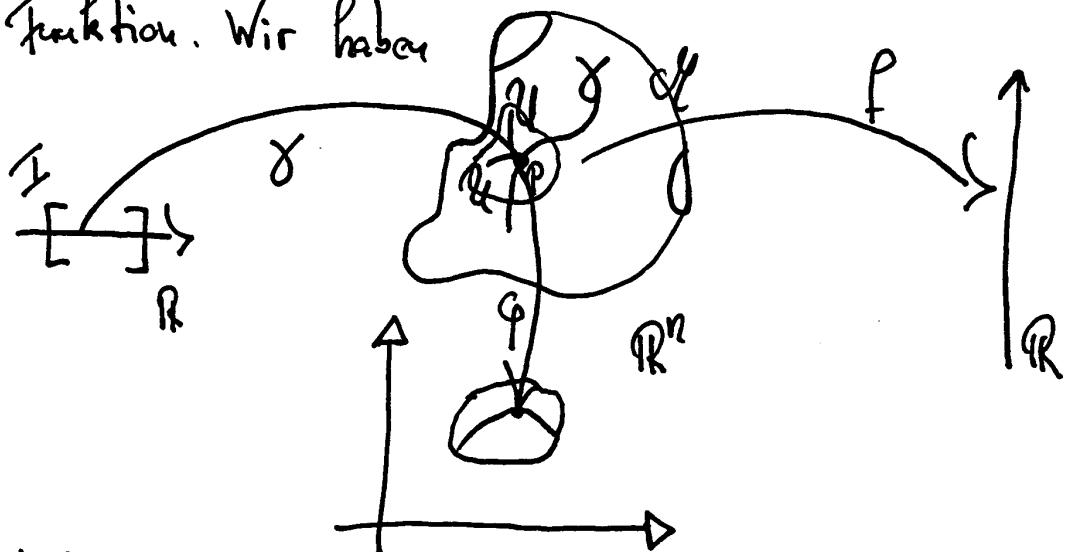
Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, $I = [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$ mit $0 \in I$, und γ eine Kurve in M , d.h.

$$\gamma: I \rightarrow M.$$

Sei $(U(p), \varphi)$ eine Koordinatenumgebung von $p \in U(p) \subset M$ und

$$\varphi: U(p) \rightarrow \mathbb{R}^{\dim M}$$

ein Diffeomorphismus. Außerdem sei $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Wir haben



Wie ändert sich f entlang γ mit der "Zeit" t ? Am Punkt $\gamma(0) = p$ gilt

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f(\gamma(t)) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \left\{ f \underbrace{\left(\varphi^{-1}(\varphi(\gamma(t))) \right)}_{\text{id}} \right\}$$

Koordinaten -
darstellung von γ in $U(p)$

Bereichuen wir die lokalen Koordinaten mit $x^1, \dots, x^{\dim M}$
 so ist $\forall t \in I$ mit $\gamma(t) \in U(\gamma_0)$

$$\varphi(\gamma(t)) = (x^1(t), \dots, x^{\dim M}(t)) =: x(t).$$

Dann gilt mit der Kettenregel

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f(\gamma(t)) = \dot{x}^A(0) \frac{\partial}{\partial x^A} \Big|_{\varphi(p)} f(\varphi^{-1}(x_0)),$$

wobei $A \in \{1, \dots, \dim M\}$. Also,

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f(\gamma(t)) = \dot{x}^A(0) \frac{\partial}{\partial x^A} \Big|_{\varphi(p)} f(\gamma(t)).$$

Wir identifizieren daher

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \stackrel{\wedge}{=} \dot{x}^A(0) \frac{\partial}{\partial x^A} \Big|_{\varphi(p)}$$

Technischer Art und Weise kann die gesamte Analysis über lokale Koordinatenkoordinaten übertragen werden, sofern diese sich häufisch zu einem Atlas kleben lassen (garantiert für differenzierbare Spezifiziertheit nach Definition).

\dot{x}^A ist die A-te Komponente des Geschwindigkeitsvektors, der im Punkt $p \in M$ tangential zu $\gamma(t)$ auftrifft, ausgedrückt durch lokale Koordinaten. \dot{x} ist also ein Tangentenvektor.

Die Menge der Tangentenvektoren an $p \in M$ (\cong alle Geschwindigkeitsvektoren aller Kurven durch p) bildet eine Vektorraum, den sogenannten Tangentialraum $T_p M$ an p .

Es lohnt sich auch an Buchstabenstaaten Gründen, die Erwähnung (und die geometrische Ausdeutung) zu vermeiden. Das scha wir schnell ein:

Sei V_p ein Tangentenvektor an $p \in M$ (d.h. $V_p \in T_p M$), und $(M(p), \varphi)$ eine Koordinatenangabe von $p \in M$. Dann gilt ja

$$V_p = V_p^A \frac{\partial}{\partial x^A} \Big|_{\varphi(p)}.$$

Sei nun $(V(p), \Psi(p))$ eine weitere Koordinatenangabe von p . Dann gilt auch

$$V_p = \tilde{V}_p^A \frac{\partial}{\partial y^A} \Big|_{\Psi(p)},$$

wobei wir die Koordinaten mit y bezeichnet haben.

Frage: Wie hängen beide Beschreibungen zusammen?

Kennen wir die Transformationsgleichungen $y = f(x)$,
 so folgt aus der Kettenregel ganz einfach

$$V_p = V_p^A \frac{\partial}{\partial x^A} \Big|_{f(p)} = V_p^A \frac{\partial y^B}{\partial x^A} \Big|_{f(p)} \frac{\partial}{\partial y^B} \Big|_{\Psi(p)}$$

→

$$\tilde{V}_p^A = V_p^B \frac{\partial y^A}{\partial x^B} \Big|_{f(p)}$$

Beachten Sie, daß f nicht linear zu sein braucht. Obige
 Beziehung für das Transformationsverhältnis von Vektorkomponenten
 gilt für beliebige Koordinatenwechsel (Diffeomorphismen).

Aufgabe: Können Sie diese Beziehung nun algebraisch herleiten?

Aufgabe: Überzeugen Sie sich, daß diese Beziehung für Drehungen
 des \mathbb{R}^3 das korrekte Resultat liefert.

Vektoren, deren Komponenten sich unter Koordinatentransformationen
 wie oben transformieren, heißen in der Physik kontravariante
 Vektoren. Zur Kennzeichnung tragen deren Komponenten den
 Index immer über.

Anschluß an die klassische Vorstellung von einem Einheitsvektor:

Sei $(U(\varphi), \varphi)$ eine Koordinateneinheitung von \mathcal{M} . Die Koordinaten bezeichnen wir mit x^1, \dots, x^n , $n = \dim \mathcal{M}$. Das ist Buchhaltend noch nicht zufriedenstellend (ohne weitere Erläuterung), schließlich müssen wir ja die Koordinaten aller Punkte in $U(\varphi)$ unterscheiden können. Etwa so: für jedes $q \in U(\varphi)$ ist

$$\varphi(q) = (x^1(q), \dots, x^n(q))^T \in \mathbb{R}^n.$$

Also sind die Koordinaten selbst Funktionen

$$x^j: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^1, j \in \{1, \dots, n\}.$$

Aufgabe: Welche Qualifikationen müssen diese erfüllen?

Sei $\{\frac{\partial}{\partial x^j}\}_{j \in \{1, \dots, n\}}$ eine Basis in dieser Koordinateneinheitung.

Diese besteht aus partiellen Ableitungen nach den Koordinaten x^j . Partielle Ableitungen wirken aber auf Funktionen wirken.

Elauent ist die Wirkung auf Koordinaten:

$$\frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_{\varphi(q)} x^i(q) = \delta_j^i \stackrel{\text{def}}{=} (0, \dots, \underset{i=j}{\overset{\uparrow}{1}}, \dots, 0)^T =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_{\varphi(q)} \varphi(q)$$

Ein Vektorfeld ist eine differenzierbare Zuordnung

$$V: M \rightarrow \bigcup_{p \in M} T_p M,$$

d.h. jedem Punkt der Mannigfaltigkeit wird ein Vektor aus der an diesem Punkt verankerten Tangentialebene zugeordnet.

Die Qualifikation differenzierbar bedeutet sich auf die Bedeutung, daß die Komponenten des Vektorfeldes differenzierbar von ihrem Argument abhängen. Gilt dies in einer Basis, so ist alles.

Zunächst gilt zunächst für differenzierbare Funktionen

$$\begin{aligned} V(p)(f) &= V(p)(f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi) \\ &= \partial_{\varphi(p)}(f \circ \varphi^{-1}) \\ &= \sum_j \frac{\partial}{\partial \varphi^j} \Big|_{\varphi(p)} (f \circ \varphi^{-1}) \end{aligned}$$

in einer Kordinatenumgebung (U_q, φ) mit $p \in U_q$. Gegeben wir die Koordinaten wieder mit x^1, \dots, x^n und unterdrücken die Abhängigkeit von p in der Notation, so gilt z.B.:

$$V(p) = V^j(x) \frac{\partial}{\partial x^j} \quad \forall p \in M.$$

Achtung: Dabei haben wir die Koordinaten aller Punkte mit x^1, \dots, x^n bezeichnet. Dies meint nicht, daß wir ein globales Koordinatensystem haben!

Bem.: Natürlich dürfen Sie auch folgendes schreiben:

5

$$V(x) = V^j(x) e_j(x) . \quad \square$$

Wir könnten nun durch Vektoren in euklidischer Matrix einführen.
Oder aber wie folgt. Gegeben sei eine differenzierbare Funktion
 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ und ein Vektor $V_p \in T_p M$. Eine interessante
Frage ist, wie sich f in Richtung V_p ändert. Die Antwort hierauf
gibt das Differential von f am Punkt $p \in M$. Dabei handelt es sich
um das Lineare Funktional

$$df: T_p M \rightarrow \mathbb{R}, \\ V_p \mapsto df(V_p) \stackrel{\text{def}}{=} V_p(f) . \quad (*)$$

Diese Definition ist unabhängig von Koordinaten. In einer lokalen
Koordinatenangabe gilt seit den üblichen Bezeichnungen

$$df(V_p) = df\left(V_p^j \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \stackrel{(*)}{=} V_p^j \frac{\partial f}{\partial x^j}(p) .$$

Dabei meint

$$\frac{\partial f}{\partial x^j}(p) = \left. \frac{\partial}{\partial x^j} \right|_{\varphi(p)} (f \circ \varphi^{-1})(x)$$

Aufgabe: Gehört Ihnen eine andere Definition des Differentials?

□

In besondere könnte uns folgende Fragestellung interessieren:

$$dx^i \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) \stackrel{(*)}{=} \frac{\partial}{\partial x^j} x^i = \delta_j^i.$$

Diese Betrachtung führt uns natürlich zum Konzept der euklidischen Koordinatenbasis dieser Basis. Natürlich: Sei $p \in M$ und $U(p)$ eine Koordinatenumgebung. Wir bezeichnen die Koordinaten mit x^1, \dots, x^n , $n \stackrel{\text{def}}{=} \dim M$, und entsprechend die Koordinatenbasis mit $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^j} \right\}_{j \in \{1, \dots, n\}}$. Dann ist die hierzu duale Basis $\{dx^j\}_{j \in \{1, \dots, n\}}$.

Diese spannt der sogenannte Kotangentialraum T_p^*M auf.

Das allgemeine Lineare Funktional ist in dieser Koordinate durch

$$\alpha = \alpha_j \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) dx^j = \alpha_j dx^j$$

gegeben, und heißt eine Differentialform. Beachten Sie: Nicht jede Differentialform ist das Differential einer Funktion.

Abbildungstechnisch verarbeiten wir: Eine 1-Form ist ein Linearkontraktionsprinzip

$$\alpha: T_p M \rightarrow \mathbb{R}.$$

Eine differenzierbare Funktion ist eine 1-Form zu jedem $p \in M$ (oder $p \in U(p)$) heißt ein kovariantes Vektorfeld. In Koordinaten,

$$\alpha = \alpha_j(x) dx^j.$$

Beispiel: $df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$. Die Ziffern $\frac{\partial f}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n}$ bilden also die Komponenten des kovarianten Vektorfeldes.

Aufgabe: Überdecken Sie \mathbb{R}^3 mit Kugelkoordinaten (r, θ, φ) wie üblich. Gegeben sei eine Funktion $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Geben Sie df an.

Warum macht es keinen Sinn, die Komponenten von df in dieser Koordinatensystem (und daher zualler!) als Komponenten des Gradienten von f zu bezeichnen?

Wieder führen wir aus die buchhalterische Leichtigkeit dieses Bruches vor Augen: Sei α_p eine 1-Form an $p \in M$ (d.h. $\alpha_p \in T_p^*M$), und $(U(p), \varphi)$ eine Koordinatenumgebung von p . Dann gilt ja

$$\alpha_p = \alpha_p^A dx^A$$

Bei offensichtlicher Berechnung der Komponenten. Sei nun $(V(p), \psi)$ eine weitere Koordinatenumgebung von $p \in M$. Wir berechnen die Komponenten mit y . Dann gilt auch

$$\alpha_p = \tilde{\alpha}_p^A dy^A$$

Kennen wir die Transformationsgleichungen $y = f(x)$, so folgt elementar

$$dy^A \Big|_{V(p)} = \left. \frac{\partial f^A}{\partial x^B} \right|_{f(p)} dx^B \Big|_{\varphi(p)} .$$

Also,

$$d\varphi_A = \tilde{d}\varphi_B \left. \frac{\partial y^B}{\partial x^A} \right|_{\varphi(\varphi)}$$

für beliebige Koordinatenwechsel.

Vektoren, deren Komponenten sich unter Koordinatentransformationen wie oben transformieren, heißen in der Physik Kovariante Vektoren.

Zur Kennzeichnung tragen deren Komponenten den Index immer unten.

Erinnerung: Sei E ein n -dimensionaler Vektorraum, ausgestattet mit einem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Dann gilt für $v, w \in E$ in einer Basis $\{e_A\}_{A \in \{1, \dots, n\}}$,

$$\langle v, w \rangle = \langle v^A e_A, w^B e_B \rangle = v^A w^B \langle e_A, e_B \rangle.$$

Wir definieren eine Matrix g mit Komponenten

$$g_{AB} \stackrel{\text{def}}{=} \langle e_A, e_B \rangle.$$

Damit

$$\langle v, w \rangle = v^A g_{AB} w^B.$$

Die Matrix g heißt Metrik oder metrischer Tensor.

Aufgabe: Wann erhalten Sie die Euklidische Metrik?

Wie gewöhnlich, können wir die Metrik benutzen, um kontrahierte
lineare Funktionale zu konstruieren und eine Vorstellung von dieser
zu entwickeln. Sei $v \in E$. Dann ist durch

$$v^*(w) \stackrel{\text{df}}{=} \langle v, w \rangle \quad \forall w \in E$$

ein lineares Funktional definiert, $v^* \in E^*$.

Mittels des Skalarproduktes (der Metrik) können wir also jedem Vektor
 $v \in E$ einen dualen Vektor $v^* \in E^*$ zuordnen.

Sei $\{e_A\}_{A \in I}$ eine beliebige Basis von E und $\{e^B\}_{B \in I}$ die
zugehörige dualen Basis von E^* , so gilt

$$\begin{aligned} v^* &= v^*_B e^B = v^*(e_B) e^B = \langle v, e_B \rangle e^B = \\ &= \langle v^A e_A, e_B \rangle e^B = v^A \langle e_A, e_B \rangle e^B = \\ &= (v^A g_{AB}) e^B \end{aligned}$$

$$\rightarrow v^*_B = v^A g_{AB}$$

Traditionell spielt man sich den $*$ und nutzt gängig

$$v_B = v^A g_{AB}.$$

Deshalb spielt die Indexstellung zur Unterscheidung von ko-
und kontravarianten Vektorkomponenten eine wichtige Rolle (Rimmi)

Aufgabe: Drücken Sie wie oben nur die Komponenten eines kontravarianten Vektors durch die des zugehörigen kovarianten Vektors aus.]

Aufgabe: Definieren Sie den Gradient einer Funktion als kontravarianten Vektor.]

Wir kommen nun zu den zentralen Sprachbegriffen der gesuchten Physik. Auch wenn hier die geometrische Ausdehnung bestand wird, so handelt es sich trotzdem schlicht und einfach um Konstruktionen, die gänzlich in der Linearen Algebra angeordnet sind, oder präziser: der Multilinearalen Algebra.

Vorbereitung: Sei $T_p M$ der Raum von Tangentenvektoren am Punkt $p \in M$ einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit mit $\dim M = n \in \mathbb{N}$. $I \stackrel{\text{def}}{=} \{1, \dots, n\}$. Eine Basis von $T_p M$ bezeichnen wir mit $\{e_\alpha\}_{\alpha \in I}$. Bezeichnen wir die lokalen Koordinaten mit x^1, \dots, x^n , so notieren wir $e_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \alpha \in I$. Da Zusammenhang zwischen Basisvektoren und Ableitungen ist für uns der Moment nun relevant, nur das Verhalten von Tensoren unter Koordinatentransformation zu studieren. Das weitere funktioniert aber selbstverständlich genau, wenn Sie an der klassischen Vorstellung eines Vektors festhalten wollen.

Sei $T_p^*\mathcal{M}$ der zugehörige duale Vektorraum. Eine Basis von $T_p^*\mathcal{M}$
 bezeichnen wir mit $\{e^\alpha\}_{\alpha \in I}$, und $e^\alpha = dx^\alpha$ für $\alpha \in I$. 3c

Ein kovarianter Tensor vom Rang r am Punkt $p \in M$ ist
 eine multilinearare Abbildung

$$T^*: \underbrace{T_p M \times \dots \times T_p M}_r \rightarrow \mathbb{R}.$$

Multilinear meint hierbei, daß die Funktion $T^*(v_1, \dots, v_r)$,
 $v_1, \dots, v_r \in T_p M$, linear in jedem Argument ist, vorausgesetzt,
 daß alle anderen Argumente fest gehalten werden.

Beispiele: Ein kovarianter Vektor ist ein kovarianter Tensor
 vom Rang 1. Ein kovarianter Tensor 2. Stufe (\cong Rang 2)
 heißt auch eine bilineare Abbildung (von Vektoren).
 Der bekannteste kovariante Tensor 2. Stufe ist wohl die Metrik.
 In Koordinaten gilt:

$$\begin{aligned} T^*(v_1, \dots, v_r) &= T^*(v_1^{a_1} e_{a_1}, \dots, v_r^{a_r} e_{a_r}) = \\ &= v_1^{a_1} T^*(e_{a_1}, \dots, v_r^{a_r} e_{a_r}) = \dots = \\ &= v_1^{a_1} \dots v_r^{a_r} T^*(e_{a_1}, \dots, e_{a_r}), \end{aligned}$$

wobei $a_j \in I$ für $j \in \{1, \dots, r\}$. Dies notieren wir auch so: ⁴⁾

$$T^*(v_1, \dots, v_r) = T^*_{a_1 \dots a_r} v_1^{a_1} \dots v_r^{a_r}$$

mit der Schreibweise $T^*_{a_1 \dots a_r} \stackrel{\text{df}}{=} T^*(e_{a_1}, \dots, e_{a_r})$.

Unter einem Basiswechsel $\tilde{e}_b = \frac{\partial x^a}{\partial \tilde{x}^b} e_a \quad \forall a, b \in I$

Transformieren sich die Komponenten eines kovarianten Tensors von Rang r wie folgt:

$$\begin{aligned} \tilde{T}^*_{a_1 \dots a_r} &= T^*(\tilde{e}_{a_1}, \dots, \tilde{e}_{a_r}) = \\ &= \frac{\partial x^b_1}{\partial \tilde{x}^{a_1}} \dots \frac{\partial x^b_r}{\partial \tilde{x}^{a_r}} T^*(e_{b_1}, \dots, e_{b_r}) \end{aligned}$$

Wegen der Multilinearität der Abbildung.

Zum merken:

$$\tilde{T}^*_{a_1 \dots a_r} = \frac{\partial x^b_1}{\partial \tilde{x}^{a_1}} \dots \frac{\partial x^b_r}{\partial \tilde{x}^{a_r}} T^*_{b_1 \dots b_r}$$

Aufgabe: Wie transformiert sich die euklidische Metrik beim Übergang von kartesischen zu sphärischen Polarkoordinaten. Wie ist ihr Koeffizient?

Die Menge aller kovarianten Tensoren vom Rang r ist ein
Vektorraum (unter den üblichen Operationen). Die Addition wird hierbei
komponentenweise erklärt, ebenso die Multiplikation mit reellen Zahlen.

Aufgabe: Wie viele Komponenten hat ein kovariante Tensor vom
Rang r ?]

Der Vektorraum aller kovarianten Tensoren von Rang r
bezeichnen wir mit

$$\underbrace{T_p^*M \otimes \cdots \otimes T_p^*M}_{r \text{ Faktoren}} = \overset{\circ}{\otimes} T_p^*M.$$

Sind α und β kovariante Vektoren, $\alpha, \beta \in T_p^*M$, so können
wir aus ihnen leicht einen kovarianten Tensor 2.-Stufe bilden,
das sogenannte Tensorprodukt von α und β . Dafür erklären wir

$$\alpha \otimes \beta : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(v, w) \mapsto \alpha \otimes \beta(v, w) \stackrel{\text{df}}{=} \alpha(v) \beta(w).$$

In Koordinaten,

$$\alpha \otimes \beta(e_a, e_b) = \alpha(e_a) \beta(e_b) = \underline{\alpha_a \beta_b}$$

Nach einer Vorbemerkung können wir alsbald zu kontravarianten Tensoren. Zunächst erinnern wir uns, daß kontravariante Vektoren, als Differenzierbar auf Funktionen wirken. Dies macht die Beziehungen zwischen kontra- und kovarianten Vektoren nicht sehr transparent. Um diese manifest zu machen, bemerken wir:

Ein kontravarianter Vektor $v \in T_p M$ kann als lineares Funktional aufgefasst werden:

$$v : T_p^* M \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\alpha \mapsto v(\alpha) \stackrel{\text{df}}{=} \alpha(v)$$

Aufgabe: Zeige Sie, daß $v(\alpha)$ linear ist.

Ein kontravarianter Tensor vom Rang s ist eine multilinear Abbildung

$$T : \underbrace{T_p^* M \times \dots \times T_p^* M}_{s \text{ Faktoren}} \longrightarrow \mathbb{R} .$$

Ähnlich wie zuvor ist

$$\begin{aligned} T(d_1, \dots, d_s) &= T(d_{1a_1} e^{a_1}, \dots, d_{sa_s} e^{a_s}) = \\ &= d_{1a_1} T(e^{a_1}, \dots, d_{sa_s} e^{a_s}) = \dots = \\ &= d_{1a_1} \cdots d_{sa_s} T(e^{a_1}, \dots, e^{a_s}) \end{aligned}$$

Wir setzen

$$\Gamma^{q_1 \dots q_s} \stackrel{\text{df}}{=} \Gamma(e^{q_1}, \dots, e^{q_s})$$

und notieren

$$\Gamma(\alpha_1, \dots, \alpha_s) = \alpha_1{}_{q_1} \dots \alpha_s{}_{q_s} \Gamma^{q_1 \dots q_s}.$$

Unter einem Basiswechsel $\tilde{e}^a = \frac{\partial \tilde{x}^a}{\partial x^b} e^b \quad \forall a, b \in I$

transformieren sich die Komponenten eines kontravarianten Tensors der Stufe s wie folgt

$$\begin{aligned}\widetilde{\Gamma}^{q_1 \dots q_s} &= \Gamma(\tilde{e}^{q_1}, \dots, \tilde{e}^{q_s}) = \\ &= \frac{\partial \tilde{x}^{q_1}}{\partial x^{b_1}} \dots \frac{\partial \tilde{x}^{q_s}}{\partial x^{b_s}} \Gamma(e^{b_1}, \dots, e^{b_s}) = \\ &= \frac{\partial \tilde{x}^{q_1}}{\partial x^{b_1}} \dots \frac{\partial \tilde{x}^{q_s}}{\partial x^{b_s}} \Gamma^{b_1 \dots b_s}\end{aligned}$$

Zum merken:

$$\boxed{\widetilde{\Gamma}^{q_1 \dots q_s} = \frac{\partial \tilde{x}^{q_1}}{\partial x^{b_1}} \dots \frac{\partial \tilde{x}^{q_s}}{\partial x^{b_s}} \Gamma^{b_1 \dots b_s}}$$

Aufgabe: Neuen Sie Beispiele für kontravariante Tensoren.

Zeigen Sie, daß die zu g inverse Metrik g^{-1} ein kontravariante Tensor d. Stufe ist.

Die Menge aller kontravarianten Tensoren der Stufe s ist auch ein
Vektorraum (übliche Qualifikationen, kontravarianterweise realisiert). 4

Diese bezeichnen wir mit

$$\underbrace{T_p \mathcal{M} \otimes \cdots \otimes T_p \mathcal{M}}_{s \text{ Faktoren}} = \overset{s}{\otimes} T_p \mathcal{M}.$$

Ähnlich wie oben erklären wir für $v, w \in T_p \mathcal{M}$:

$$v \otimes w : T_p^* \mathcal{M} \times T_p^* \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R} \\ (\alpha, \beta) \mapsto v \otimes w(\alpha, \beta) \stackrel{\text{df}}{=} v(\alpha)w(\beta).$$

Ein gewischter Tensör, r mal kovariant und s mal kontravariant,
ist eine multilinearare Abbildung T mit

$$T : \underbrace{T_p \mathcal{M} \times \cdots \times T_p \mathcal{M}}_{r \text{ Faktoren}} \times \underbrace{T_p^* \mathcal{M} \times \cdots \times T_p^* \mathcal{M}}_{s \text{ Faktoren}} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Mit den üblichen Bezeichnungen gilt

$$T(v_1, \dots, v_r, \alpha_1, \dots, \alpha_s) =$$

$$= \alpha_1 a_1 \cdots \alpha_s a_s T^{a_1 \cdots a_s}_{b_1 \cdots b_r} v_1^{b_1} \cdots v_r^{b_r},$$

Aufgabe: Zeigen Sie dies.]

Aufgabe: Zeigen Sie: Unter einer Basiswechsel transformieren sich die Komponenten eines gewischten Tensors wie folgt:

$$\widetilde{T}^{c_1 \dots c_s}_{\quad \quad d_1 \dots d_r} = \\ = \frac{\partial x^{c_1}}{\partial x^{a_1}} \dots \frac{\partial x^{c_s}}{\partial x^{a_s}} \frac{\partial x^{b_1}}{\partial x^{d_1}} \dots \frac{\partial x^{b_r}}{\partial x^{d_r}} T^{a_1 \dots a_s}_{\quad \quad b_1 \dots b_r}$$

Aufgabe: Neurau Sie Beispiele für gewischte Tawore.

Zeigen Sie, daß die lineare Abbildung $A: T_p M \rightarrow T_q M$ einen gewischten Tensor 2. Stufe reduziert.

Sei $v \in T_p M$, $\alpha \in T_p^* M$. Das Taworprodukt $v \otimes \alpha$ ist der durch

$$(v \otimes \alpha)(\beta, w) \stackrel{df}{=} \beta(v) \alpha(w)$$

definierte gewischte Tawor geweckt.

Aufgabe: In Anlehnung unseres Vorgehens beim Übergang von der punktweisen Kontraktion von Vektoren zu Vektorfeldern, erläutern Sie das Konzept eines gewischten Taworfeldes.

Bemerkung: Sei A ein kovariantes Vektorfeld. In Koordinaten bezüglich einer lokalen Basis, $A = A_\alpha dx^\alpha$. Wir fragen nun, ob $\partial_\alpha A_\beta$ in dieser Basis die Komponenten eines kovarianten Tensors 2. Stufe sein können? Hierbei haben wir die populäre Abkürzung $\partial_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$ verwendet.

Zur Beantwortung dieser Frage untersuchen wir das Verhalten von $\partial_\alpha A_\beta$ unter beliebigen Koordinatentransformationen $x = f(\tilde{x})$. Zunächst ist

$$A(x) = A_\alpha(x) dx^\alpha = A_\alpha(f(\tilde{x})) \frac{\partial f^\alpha(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}^\beta} d\tilde{x}^\beta$$

$$\rightarrow \tilde{A}_\beta(\tilde{x}) = A_\alpha(f(\tilde{x})) \frac{\partial f^\alpha(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}^\beta}$$

dessen Sie aus nicht zu häufig sein und das Kehlenschlacken:

$$\tilde{A}_\beta(\tilde{x}) = A_\alpha(x) \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\beta} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow A_\beta(x) = \tilde{A}_\alpha(\tilde{x}) \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\beta}$$

Jetzt ist es ökonomisch sinnvoll!

2 Minkowski-Raumzeit

48

Wir hatten das Paar (\mathbb{R}^4, η) Minkowski-Raumzeit M^4 genannt.

M^4 ist die einfachste Vakuumlösung der Allgemeinen Relativitätstheorie. In natürlichen Koordinaten, siehe $O(3)$,

$$\begin{aligned}- (ds)^2 &= \eta_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu \\ &= - dx^0 \otimes dx^0 + \sum_{ab} dx^a \otimes dx^b.\end{aligned}$$

Diese Koordinaten heißen natürlich, weil Geodäten von folgender Form sind:

$$\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow M^4, \lambda \mapsto \gamma(\lambda),$$

$$x^\alpha(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi^\alpha(\gamma(\lambda)) = \lambda u^\alpha + c^\alpha,$$

wobei u^α, c^α Konstanten sind.

Nur beschreibbar Geodätenbahnen von Teilchen, die sich frei bewegen. In obigen Koordinaten bewegen sich freie Teilchen also auf Geraden. Sie bilden sich daher als natürliche Koordinaten an, mit denen wir Inertialsysteme überdecken.

Außerdem reicht eine einzige solche Koordinatenverteilung für ganz M^4 . Da zwei beliebige Raumzeit-Punkte von M^4 endlich durch eine Geodäte verbunden werden können, heißt M^4 auch geodätisch vollständig.

Eine in die Zukunft gerichtete zeitartige Kurve ist eine differenzierbare Kurve

49

Zukunft
Gesch.
Qualifikation

$$\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow M^4, t \mapsto \gamma(t),$$

$$-\eta(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) = \|\dot{\gamma}(t)\|^2 > 0 \quad \forall t \in I.$$

Mit $G^+(p)$ bezeichnen wir die chronologische Zukunft von $p \in M^4$. Dabei handelt es sich um die folgende Menge von Raumzeit-Punkten (Ergebnisse):

$$G^+(p) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ q \in M^4 \mid \exists \gamma: I \rightarrow M^4, \gamma(0) = p \text{ und } \gamma(1) = q, \right.$$

$$\left. \text{und } -\eta(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) > 0 \quad \forall t \in I \right\}.$$

Man kann zeigen, daß $G^+(p)$ ist immer eine offene Teilmenge von M^4 . Im allgemeinen ist $p \notin G^+(p)$.

Aufgabe: Kann $p \in G^+(p)$ gelten in M^4 ? []

Für jede Teilmenge $S \subset M^4$ definieren wir

$$I^+(S) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{p \in S} I^+(p).$$

$I^+(S)$ ist offen in M^4 .

Aufgabe: Definieren Sie die chronologische Vergangenheit von $p \in M^4$. []

In M^4 ist $I^+(p)$ exakt die Menge von Raumzeit-Punkten, die von $p \in M^4$ aus mit einer in die Zukunft gerichteten Zeitartigen Geodäte erreicht werden können. Der Rand von $I^+(p)$ (oder die Hülle), $\overset{\circ}{I}{}^+(p)$ nennen, wird von den Lichtartigen Geodäten generiert, die von $p \in M^4$ aus starten.

Bemerkung: Für andere Raumzeiten gelten diese Aussagen im allgemeinen nicht, lokal jedoch immer. Dies zeigt die besondere Bedeutung von M^4 für die lokale Auslegung von Raumzeiten.]

Eine Teilmenge $S \subset M^4$ heißt achraum, wenn

$$\nexists p, q \in S : q \in \overset{\circ}{G}{}^+(p).$$

Tatsächlich ist $\overset{\circ}{G}{}^+(S)$ für jede Teilmenge $S \subset M^4$ achraum.

Das sehen wir so: Sei $q \in \overset{\circ}{G}{}^+(S)$, und $p \in \overset{\circ}{G}{}^+(q)$.

Dann ist $q \in G^-(p)$. Da $G^-(p)$ offen in M^4 ist, gibt es

eine offene Umgebung $U(q)$ von q mit $U(q) \subset G^-(p)$

Da $q \in \overset{\circ}{G}{}^+(S)$ nach Voraussetzung, folgt $U(q) \cap G^+(S) \neq \emptyset$.

Also, $p \in G^+(U(q) \cap G^+(S)) \subset G^+(S) \leadsto G^+(q) \subset G^+(S)$.

Ahnlich zeigen wir, daß $\overset{\circ}{G}^+(q) = M^4 \setminus G^+(q)$.

Wir nehmen jetzt an, daß $\overset{\circ}{G}^+(S)$ nicht achrausl ist und führen diese Annahme zum Widerspruch. Wäre $\overset{\circ}{G}^+(S)$ nicht achrausl, dann gäbe es $q, r \in \overset{\circ}{G}^+(S)$ mit $r \in G^+(q)$, und somit auch $r \in G^+(S)$. Nun ist $G^+(S)$ aber offen, daher gilt

$$\overset{\circ}{G}^+(S) \cap G^+(S) = \emptyset \quad \nabla$$

Folglich muß $\overset{\circ}{G}^+(S)$ achrausl sein.

Aufgabe: Fertigen Sie eine aussagekräftige Skizze an. □

Aufgabe: Geben Sie explizite Beispiele (auch nicht-triviale) für achraale Teilmengen im Zusammenhang mit dem Lichtkegel q_4 . □

Achraale Teilmengen von M^4 spielen eine wichtige Rolle, um Anfangswertprobleme global zu analysieren.

Zuvor ist allerdings eine Ausweitung unserer Kurven-Begriff notwendig. Nämlich:

Eine in die Zukunft gerichtete Kurve γ ist eine differenzierbare Kurve

$\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow M^4$, $2 \mapsto \gamma(2)$,
 $-\eta(\dot{\gamma}(2), \dot{\gamma}(2)) \geq 0 \quad \forall 2 \in I$.

Die kausale Zukunft $K^+(p)$ von $p \in M^4$ ist definiert als die folgende Teilmenge von Ereignissen:

$$K^+(p) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ q \in M^4 \mid \exists \gamma: I \rightarrow M^4, \gamma(0) = p, \gamma(1) = q, \right. \\ \left. \text{und } -\eta(\dot{\gamma}(2), \dot{\gamma}(2)) \geq 0 \quad \forall 2 \in I \right\}.$$

Es gilt also immer $p \in K^+(p)$. In M^4 ist $K^+(p)$ eine abgeschlossene Teilmenge. Ähnlich wie zuvor sehen wir

$$K^+(S) = \bigcup_{p \in S} K^+(p)$$

für eine Teilmenge $S \subset M^4$. Analog definieren wir die kausale Vergangenheit eines Raumzeit-Punktes und einer Teilmenge. □

Aufgabe: Zeigen Sie: Ist $q \in K^+(p) \setminus G^+(p)$, dann ist jede q und p verbindende kausale Kurve Richtstetig. □

Sei $\gamma(t)$ eine in die Zukunft gerichtete kausale Kurve.

$p \in M^4$ heißt zukünftiger Endpunkt von γ , wenn es zu jeder Umgebung $U(p)$ ein $t_0 \in I$ gibt mit $\gamma(t) \in U(p) \forall t_0 < t \in I$.

Wir denken uns M^4 immer so topologisiert, daß das Trennungssatz von Hausdorff gilt. Daher hat γ höchstens einen zukünftigen Endpunkt. Diese Bracht allerdings nicht auf der Kurve zu liegen.

Die Kurve $\gamma(t)$ heißt ungeweitbar in die Zukunft, wenn sie keinen zukünftigen Endpunkt besitzt. Ungeweitbarkeit in die Vergangenheit wird analog erklärt.

Bisher lag unsere Argumentik auf Teilmenigen von Ereignissen, $C^+(S)$ oder $K^+(S)$, die von einer vorgegebenen Teilmenge S von Ereignissen bestimmt werden konnten. Jetzt werden wir weniger und früher nach Ereignissen, die ganzlich durch S bestimmt sind. Teile von M^4 sind sogar alle Ereignisse durch ein entsprechend gewähltes S bestimmt, wie wir unten sehen werden.

Sei S eine abgeschlossene, adirokele Teilmenge von M^4 . Der zukünftig Einflußbereich $D^+(S)$ von S ist

$D^+(S) \stackrel{\text{def}}{=} \{p \in M^4 \mid \text{Jede in die Vergangenheit ungeweitbare kausale Kurve durch } p \text{ schneidet } S\}$.

Offenbar gilt immer $S \subset D^t(S) \subset G^t(S)$. Da S als schrumpf 54 angewandt wird, ist außerdem $D^t(S) \cap G^t(S) = \emptyset$.

Aufgabe: Interpretieren Sie $D^t(S)$ informationstheoretisch.

$D^t(S)$ ist von großer Interesse, da es bei geeignet vorgegebenen Ausgangsbedingungen auf S erlaubt die kausale Struktur Vorfahren für Ereignisse in $D^t(S)$ zu machen.

Umgekehrt, ist $P \in G^t(S)$ aber $P \notin D^t(S)$...

Aufgabe: Vollständigen Sie den Satz.

Der vergangene Einflussbereich $D^-(S)$ von S ist

$D^-(S) \stackrel{\text{df}}{=} \{ P \in M^4 \mid \text{Jede in die Zukunft unauwendbare kausale Kurve durch } P \text{ schneidet } S \}$.

Der totale Einflussbereich von S ist definiert als

$$D(S) \stackrel{\text{df}}{=} D^t(S) \cup D^-(S).$$

$D(S)$ ist die vollständige Menge von Ereignissen, die durch Kontakt geister Daten auf S vollständig bestimmt sind.

Eine abgeschlossene, achrause Teilmenge $\Sigma \subset M^4$ mit

$$\mathcal{D}(\Sigma) = M^4$$

heißt eine Cauchy-Fläche. Jede Cauchy-Fläche ist eine eingeschlossene C^0 -Untermannigfaltigkeit von M^4 . Dies rechtfertigt unsere Sprechweise. Da Σ nach Voraussetzung achraus ist, können wir uns Σ als im ganzen Raum fixierten Zeitpunkt vorstellen.

Kontinuierlich sind die Flächen

$$X^0(p) = \text{const. } \forall p \in M^4$$

Eine Familie von Cauchy-Flächen, die ganz M^4 überdecken.

Da M^4 eine Cauchy-Fläche besitzt, ist M^4 eine sogenannte global-hyperbolische Raumzeit. Dies meint, daß die gesamte Zukunft und Vergangenheit eines physikalischen Systems aus der Kausaliß grüßen Bedingungen zuer durch Σ repräsentierter Zeitpunkt bestimmt werden kann.

Aufgabe: Was passiert in Raumzeiten, die keine Cauchy-Fläche haben? Ist dies physikalisch sinnvoll?

—

Bemerkung: In natürlichen Koordinaten (vgl. S. 48) bleibt das räumliche Volumenelement unter Dorsatz-Transformation erhalten,

$$d^4x = d^4\tilde{x}$$

Wir werden dies später geometrisieren. Es findet hier Erwähnung, weil wir bald invariante Ausdrücke in Vektorfeldern konstruieren werden, wobei die Invarianz sich lediglich auf Dorsatz-Transformationen von Koordinatensystemen in natürlicher Koordinaten bezieht.

Wir hätten ja auch Kugelkoordinaten einführen können. In der üblichen Notation ist dann

$$-(ds)^2 = -dx^0 \otimes dx^0 + dr \otimes dr + r^2(d\theta \otimes d\theta + \sin^2\theta d\varphi \otimes d\varphi)$$

Aufgabe: Zeigen Sie dies. Wie sieht das entsprechende räumliche Volumenelement aus?]

Aufgabe: Wie viele Koordinatenwechselungen braucht Sie mindestens, um ganz M^4 zu überdecken?]

Erinnerung: Wir fanden früher:

Die Lorentz-Gruppe ist

$$\begin{aligned} O(1,3) &\stackrel{\text{df}}{=} \{ \Lambda \in \mathbb{R}(4) \mid \eta(\Lambda x, \Lambda y) = \eta(x, y) \quad \forall x, y \in M^4 \} \\ &= \{ \Lambda \in \mathbb{R}(4) \mid \Lambda^T \eta \Lambda = \eta \}. \end{aligned}$$

Die eigentliche, orthochrone Lorentzgruppe ist

$$SO(1,3) = \{ \Lambda \in O(1,3) \mid \det \Lambda = 1 \text{ und } \Lambda^\circ \geq 1 \}.$$

Elemente dieser Gruppe haben bezüglich der natürlichen Basis die Komponenten

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta_x \gamma & -\beta_y \gamma & -\beta_z \gamma \\ -\beta_x \gamma & 1 + (\gamma-1)\beta_x^2/\beta^2 & (\gamma-1)\beta_x \beta_y/\beta^2 & (\gamma-1)\beta_x \beta_z/\beta^2 \\ -\beta_y \gamma & (\gamma-1)\beta_x \beta_y/\beta^2 & 1 + (\gamma-1)\beta_y^2/\beta^2 & (\gamma-1)\beta_y \beta_z/\beta^2 \\ -\beta_z \gamma & (\gamma-1)\beta_x \beta_z/\beta^2 & (\gamma-1)\beta_y \beta_z/\beta^2 & 1 + (\gamma-1)\beta_z^2/\beta^2 \end{pmatrix}$$

mit $\underline{\beta} = \underline{v}/c$ und $\beta^2 = \langle \underline{\beta}, \underline{\beta} \rangle$.

Aufgabe: Zeigen Sie, daß dies mit unserer früheren Ergebnis auf S. 16 übereinstimmt.

Wir kommen nun zu der auf S. 49 angestrebten Erweiterung.⁵⁹

Zuerst überdecken wir M^4 global mit euklidischen Koordinaten.

Dies repräsentiert ein Tachisystem (Laborsystem).

Mittels $\Lambda(v) \in SO(1,3)$ transformieren wir in ein anderes Tachisystem. Die beiden Koordinatensysteme stehen folgendermaßen zueinander in Beziehung: $\tilde{x} = \Lambda(v) \cdot x$.

Wir spezialisieren jetzt:

Ein kovariantes Lorenz-Tensorfeld vom Rang r
ist eine multilinear Abbildung

$$T: M^4 \times \dots \times M^4 \rightarrow \mathbb{R}.$$

In Koordinaten,

$$T(v_1(x), \dots, v_r(x)) = v_1^{\mu_1}(x) \cdots v_r^{\mu_r}(x) T_{\mu_1 \dots \mu_r}(x),$$

wobei

$$\tilde{T}_{\mu_1 \dots \mu_r}(x) = (\Lambda^{-1}(v))^{\nu_1}_{\mu_1} \cdots (\Lambda^{-1}(v))^{\nu_r}_{\mu_r} T_{\nu_1 \dots \nu_r}(x)$$

$$\text{mit } x = \Lambda(v) \cdot \tilde{x}.$$

Ein Lorentz-Tensor braucht kein Tensor zu sein, da die Spezialisierung $\text{Diff}(M^4) \rightarrow \text{SO}(1,3)$ als Transformationsgruppe eine vektorielle Einschränkung bedeutet und insbesondere nichtlineare Transformationen ausschließt.

Zum Beispiel können die $\partial_\alpha A_\beta$ (vgl S. 49) Komponenten eines kontravarianten Lorentz-Tensors 2. Stufe sein. Wir wissen aber bereits, daß sie nicht die Komponenten eines Tensors sein können. — dort

Ein kontravariantes T -Tensorfeld von Rang s ist eine multilinearare Abbildung

$$T: M^4 \times \dots \times M^4 \rightarrow \mathbb{R}.$$

In Koordinaten,

$$T(\alpha_1(x), \dots, \alpha_s(x)) = \alpha_{1\mu_1}(x) \dots \alpha_{s\mu_s}(x) T^{\mu_1 \dots \mu_s}(x),$$

wobei $\widetilde{T}^{\mu_1 \dots \mu_s}(x) = \Lambda^{(v)}{}^{\mu_1}{}_{v_1} \dots \Lambda^{(v)}{}^{\mu_s}{}_{v_s} T^{v_1 \dots v_s}(x)$.

Bemerkung: Wir haben ja eine Metrik. Daher

$$\partial_\mu \stackrel{\text{df}}{=} \gamma(\partial_{\mu,0}) : M^4 \xrightarrow{\text{linear}} \mathbb{R}$$

ein kovariantes Lorentz-Vektorfeld, und zwar

$$\partial_0 = -dx^0, \quad \partial_a \stackrel{\text{df}}{=} dx^a \text{ für } a \in \{1,2,3\}.$$

Umgekehrt, sei

$$\gamma^{-1} \stackrel{\text{df}}{=} \gamma^{\alpha\beta} \partial_\alpha \otimes \partial_\beta, \quad \gamma^{-1} = \text{diag}(-1,1,1,1).$$

Dann ist

$$V^\mu \stackrel{\text{df}}{=} \gamma^{-1}(dx^\mu_{1,0}) : M^4 \xrightarrow{\text{linear}} \mathbb{R}$$

ein kontravariantes Lorentz-Vektorfeld, und zwar

$$V^0 = -\partial_0, \quad V^a = \partial_a \text{ für } a \in \{1,2,3\}.$$

Dies lässt sich geradezu multilinear verallgemeinern.

Die Metrik erlaubt so einen begrenzten Wechsel zwischen kovarianten und kontravarianten Lorentz-Vektorfeldern.

Aufgabe: Referat zur Ricci-Kalkül.

Ein r -fach Kovariantes und s -fach Koeffizienten
Lorentz-Tensorfeld ist eine wohldefinierte Abbildung

$$T: \underbrace{M^4 \times \cdots \times M^4}_{r} \times \underbrace{M^{4*} \times \cdots \times M^{4*}}_{s} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

In Koordinaten,

$$\begin{aligned} T(v_1(x), \dots, v_r(x), d_1(x), \dots, d_s(x)) &= \\ = \nabla_1^{\mu_1} \dots \nabla_r^{\mu_r} & d_{1, v_1}(x) \dots d_{s, v_s}(x) T^{\nu_1 \dots \nu_s}_{\mu_1 \dots \mu_r}(x), \end{aligned}$$

Wobei

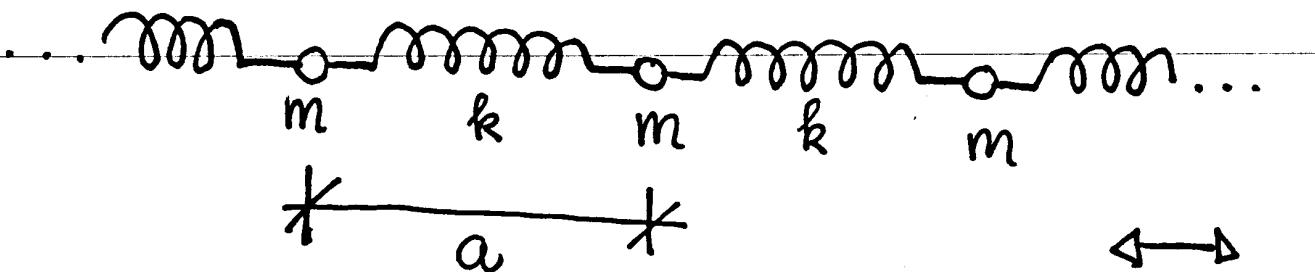
$$\tilde{T}^{\mu_1 \dots \mu_s}_{\nu_1 \dots \nu_r}(x) =$$

$$= \int_{d_1}^{\mu_1} \dots \int_{d_s}^{\mu_s} T^{d_1 \dots d_s}_{\beta_1 \dots \beta_r} (\Lambda^{-1})^{\beta_1}_{\nu_1} \dots (\Lambda^{-1})^{\beta_r}_{\nu_r}$$

$$\text{mit } x = \Lambda^{-1} \cdot \tilde{x}.$$

3 Heuristischer Übergang zur klassischen Feldtheorie

Wir betrachten ein System aus N gleichen Punktmasse m , die durch Federn gleicher Federkonstanten k verbunden sind, so daß der Konfigurationsraum \mathbb{R}^1 ist:



Der Abstand zweier Punktmasse beträgt in der Ruhelage a .

Was interessiert die Dynamik dieses Systems um die Ruhelage, also die Gleichgewichtslage, ohne diese zu destabilisieren.

Die kinetische Energie des Gesamtsystems ist

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N m \dot{\Phi}_j^2,$$

wobei $\Phi_j = f(t)$ die Auslenkung der j -ten Punktmasse aus ihrer Gleichgewichtslage zum Zeitpunkt t bezeichnet.

Die potentielle Energie ist

$$V = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N k (\Phi_{j+1} - \Phi_j)^2.$$

Damit finden wir für die Lagrange-Funktion dieses Systems ϵ

$$L = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \left\{ m \dot{\Phi}_j^2 - m \omega^2 (\Phi_{j+1} - \Phi_j)^2 \right\}.$$

Wir normieren die Auslenkungen auf den Abstand zweier Punktmasse in der Ruhelage und erhalten

$$L = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N a \left\{ \frac{m}{a} \dot{\Phi}_j^2 - \frac{m}{a} \omega^2 a^2 \left(\frac{\Phi_{j+1} - \Phi_j}{a} \right)^2 \right\} = \sum_{j=1}^N a L_j.$$

Tatsächlich liefert dies die gleichen Bewegungsgleichungen wie

$$L = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N a \left\{ \dot{\Phi}_j^2 - a^2 \omega^2 \left(\frac{\Phi_{j+1} - \Phi_j}{a} \right)^2 \right\}$$

Der Ausdruck für die potentielle Energie ist gewissermaßen nicht-lokal, da die Auslenkung der $(j+1)$. Punktmasse mit der Auslenkung der j . Punktmasse relativ zum Abstand beider in der Ruhelage verglichen wird.

Im Grenzfall $a \rightarrow 0$ (und $N \rightarrow \infty$) geht der diskrete Index j in einen kontinuierlichen über. Die Bedeutung des kontinuierlichen Index ist offenbar die Position (der Ort) an dem die Auslenkung abgefragt wird.

Die Zeit, ebenso ein kanturieller Index, haben wir als Argument von Φ notiert, und genauso wollen wir die Ortsabhängigkeit notieren:

$$\Phi_j(t) \rightarrow \Phi(t, x).$$

Damit ist im Grenzfall $a \rightarrow 0, N \rightarrow \infty$ die dyonische Variable ein Feld geworden. Zeit und Ort parametrisieren dies lediglich, man aber weist es gleichberechtigt.

In diesem Rahmen ist

$$\frac{\Phi_{j+1} - \Phi_j}{a} \rightarrow \frac{\Phi(t, x+a) - \Phi(t, x)}{a} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \Phi(t, x).$$

Die Größe $\tilde{v} \stackrel{\text{def}}{=} aw$ geht in dieser Grenzfall gegen eine Konstante v , die die Dimension einer Geschwindigkeit trägt, $[v] = \text{m/s}$.

Hieraus folgend finden wir

$$L(t) = \int_{\mathbb{R}} dx \left\{ \frac{1}{2} (\partial_t \Phi)^2(t, x) - \frac{1}{2} v^2 (\partial_x \Phi)^2(t, x) \right\}.$$

Der Integrand

$$L(\dot{\Phi}, \Phi', t, x) \stackrel{df}{=} \frac{1}{2} \dot{\Phi}^2(t, x) - \frac{1}{2} v^2 \Phi'^2(t, x)$$

heißt die Lagrange-Dichte des betrachteten Systems.

Die Wirkung ist jetzt ein Funktional der Felder:

$$S[\Phi] = \int_{t_i}^{t_f} dt L = \int_{t_i}^{t_f} dt \int_{\mathbb{R}} dx L(\dot{\Phi}, \Phi', t, x).$$

Das Prinzip von Hamilton auf diese Verallgemeinerung übertragen, fordert, daß die Wirkung (das Wirkungsfunktional) für physikalische Prozesse, die das System im Zustand zum Zeitpunkt t_i in den Zustand zum Zeitpunkt t_f überführen, stationär sei. Hieraus folgen die Bewegungsgleichungen als Euler-Lagrange-Gleichungen für das Variationsproblem (mehr zur Mathematik unten)

$$\delta S[\Phi] = 0 \quad | \quad \delta \Phi(t_i, x) = 0, \quad \delta \Phi(t_f, x) = 0 \\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Die Herleitung der Euler - Lagrange - Gleichung verläuft analog zur klassischen Mechanik. Grob,

$$S[\Phi] = \int_{t_i}^{t_f} dt \int_{\mathbb{R}} dx \frac{\delta S[\Phi]}{\delta \dot{\Phi}(t, x)} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\xrightarrow{\quad} \frac{\delta S[\Phi]}{\delta \dot{\Phi}(t, x)} \stackrel{!}{=} 0, \quad t \in [t_i, t_f]$$

Wir setzen $I \stackrel{\text{def}}{=} [t_f, t_i] \subset \mathbb{R}$ und reduzieren für $a \in \{t, x\}$

$$\begin{aligned} & \frac{\delta}{\delta \dot{\Phi}(\xi, x)} \int_I dt \int_{\mathbb{R}} dx \frac{1}{2} (\partial_a \dot{\Phi})^2(\xi, x) = \\ &= \int_I dt \int_{\mathbb{R}} dx [\partial_a \delta^{(a)}(t - \xi) \delta^{(a)}(x - x)] \partial_a \dot{\Phi}(\xi, x) = \\ &= - \int_I dt \int_{\mathbb{R}} dx \delta^{(a)}(t - \xi) \delta^{(a)}(x - x) \partial_a^2 \dot{\Phi}(\xi, x) \\ &= - (\partial_a^2 \dot{\Phi})(t, x) \end{aligned}$$

Aufgabe: Qualifizieren Sie dies verständlich.

Als Bewegungsgleichung erhalten wir somit

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right\} \Phi(t, x) = 0,$$

also eine homogene, lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung, die noch um die Anfangsdaten ergänzt werden muß, damit das Problem vollständig formuliert ist. Die allgemeine Lösung dieser Gleichung ist von folgender Form:

$$\Phi(t, x) = f^{(-)}(z^-) + f^{(+)}(z^+),$$

Wobei $z^s \stackrel{\text{def}}{=} x + s \cdot vt$, $s \in \{-, +\}$, und $f^{(s)}$ zweimal stetig differenzierbar sei in (t, x) . Aussehen werden die Funktion $f^{(s)}$ nicht weiter eingeschränkt.
Die Anfangsdaten seien

$$\begin{cases} \Phi(t_i, x) = f^{(-)}(x - vt_i) + f^{(+)}(x + vt_i) \\ \dot{\Phi}(t_i, x) = v \left\{ - \frac{\partial f^{(-)}}{\partial z^-}(x - vt_i) + \frac{\partial f^{(+)}}{\partial z^+}(x + vt_i) \right\} \end{cases}$$

In der Tat gilt

$$\frac{\partial}{\partial t} f(z^s) = \frac{\partial z^s}{\partial t} \frac{df^{(s)}}{dz^s} = sv \frac{df^{(s)}}{dz^s} \quad \curvearrowright$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} f(z^s) = sv \frac{\partial}{\partial t} \frac{df^{(s)}}{\partial z^s} = s^2 v^2 \frac{d^2 f^{(s)}}{dz^s 2},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^i} f(z^s) = \frac{d^2 f^{(s)}}{dz^s 2}.$$

Da $s^2 = +1$, folgt

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^i} \right\} f(z^s) = 0.$$

Über Endartigkeit etc. werden wir später nachdenken.

Aufgabe: Verallgemeinern Sie unsere heristischen Betrachtungen auf drei räumliche Dimensionen.

Wir bleiben zunächst noch bei einer räumlichen Dimension.

Was interessiert jetzt das folgende Anfangswertproblem:
Für $v > 0$ geben wir als Daten zuerst Zeitpunkt t_i :

$$\begin{aligned}\underline{\Phi}(t_i, x) &= \underline{S}_\epsilon(t_i, x_0), \\ \dot{\underline{\Phi}}(t_i, x) &= \underline{Y}_\epsilon(t_i, x_0)\end{aligned}$$

Vor, wobei \underline{S}_ϵ und \underline{Y}_ϵ den kompakten Träger $I_\epsilon \stackrel{\text{df.}}{=} [x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon]$ ($\epsilon > 0$) haben. Ausdrücklich handelt es sich um bei $x_0 \in \mathbb{R}$ lokalisierte Funktionen. Außerdem sei für $x \in I_\epsilon$ das Feld $\underline{\Phi}$ von der Form $\underline{\Phi}(t_i, x) = f(x - vt_i)$.

Zum Zeitpunkt $t > t_i$ ist $\underline{\Phi}$ dann nur $x_0 + v(t - t_i) > x_0$ lokalisiert. Interpretieren wir $\underline{\Phi}(t, x)$ als anfängliches Signal (Information mit kompakter Träger), so propagiert dieses mit fortschreitender Zeit nach rechts. Die Geschwindigkeit dieser Informationausbreitung ist offenbar durch den Parameter v bestimmt. Damit ist die Interpretation von v geklärt.
Eine formale Analyse folgt später.

Aufgabe: Zeichnung & Beispiele für $\underline{\Phi}(t, x)$. □

In Übereinstimmung mit Einsteins Relativitätsprinzip ist es nicht möglich vor allen der Fall $v=c$, d.h. die maximale Ausbreitungsgeschwindigkeit von Information ist durch die in der Spezieller Relativitätstheorie gebotene Grenzgeschwindigkeit gegeben. Diese ist bei heutiger Präzision, nicht von der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum zu unterscheiden.

In M^4 ist die von uns betrachtete Lagrange-Dichte auf

$$\begin{aligned} L'(\partial_\mu \Phi, x) &= \frac{1}{2} \left\{ \dot{\Phi}^2(t, x) - c^2 \delta_{ab} (\partial^a \Phi \partial^b \dot{\Phi})(t, x) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ c^2 (-g_{00}) (\partial^0 \Phi \partial^0 \dot{\Phi})(x) - c^2 g_{ab} (\partial^a \Phi \partial^b \dot{\Phi})(x) \right\} \\ &= -c^2 \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\partial^\mu \Phi \partial^\nu \dot{\Phi})(x) \end{aligned}$$

Diese Lagrange-Dichte liefert die gleiche Bewegungsgleichung wie

$$L(\partial_\mu \Phi, x) = -\frac{1}{2} \partial_\lambda \Phi(x) \partial^\lambda \dot{\Phi}(x).$$

Die Euler-Lagrange-Gleichung ist

$$\square \Phi(x) = 0 \quad (+\text{Anfangsbedingungen}), \quad \square \stackrel{\text{def}}{=} + g_{ab} \partial^a \partial^b$$

Aufgabe: Zeigen Sie dies. \square

Bemerkung: Die maximal mögliche Ausbreitungsgeschwindigkeit ist im \square -Operator implementiert, unabhängig davon, ob sich das Feld (bzw. Beobachtungsgröße) tatsächlich mit dieser Gratzgeschwindigkeit ausbreitet. Damit prägt der \square -Operator den entsprechenden physikalischen Prozessen gestalterisch, die durch den lokalen Lichtkegel wirkende Energiestrahlung auf. Dies ist sinnvoll, da $L(\Omega_E^F, x)$ offenbar ein freies Feld beschreibt, genauer davor kinetische Energiedichte. Wechselwirkungsfreie Systeme unterliegen aber keiner kausalen Anforderungen und daher sind diese immer in dem Operator implementiert, der die freie Evolution des Systems beschreibt.

Aufgabe: Erläutern Sie die Bemerkung so quantitativ wie möglich.

Aufgabe: Referat zu sogenannten Massen- bzw. Energie-dimensionalen,

Bemerkung: Sei $c=1$ und $\hbar=1$. Bezeichne

$E \triangleq$ Energieeinheit,

$T \triangleq$ Zeiteneinheit, $L \triangleq$ Längeneinheit,

und $[]$ die durch

$$[E] = E,$$

$$[T] = E^{-1}, [L] = E^{-1},$$

$$[T^\alpha L^\beta] = [T]^\alpha [L]^\beta \quad \text{für } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

charakterisierte Vorschrift. Dann gilt außerdem,

$$[\ell] = \frac{E}{[L]^3} = E^4$$

und ausdrückt

$$[h] = [\partial \Phi]^2 = \frac{[E]^2}{L^2} = E^2 [\Phi]^2$$

$$\rightarrow [\Phi] = E$$

Damit können wir nun allgemeinere Theorie skalaren Felder konstruieren. Zunächst eine Erinnerung:

Sei \mathbb{B} ein Inertialsystem, ausgestattet mit einem kartesischen Koordinatensystem Σ , und $\tilde{\mathbb{B}}$ ein Beobachter, der sich relativ zu \mathbb{B} gleichförmig mit der Geschwindigkeit v bewegt.

$\tilde{\mathbb{B}}$ sei ebenfalls mit kartesischen Koordinaten $(\tilde{\Sigma})$ ausgestattet

Sei $P \in M^4$ ein Raumzeit-Punkt mit Koordinaten

$$x^\mu(P) \in \Sigma, \tilde{x}^\mu(P) \in \tilde{\Sigma}, \mu \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

Dann gibt es eine Lorentz-Transformation

$$(L_v): \Sigma \rightarrow \tilde{\Sigma}, x \mapsto L_v(x) \stackrel{df}{=} \tilde{x}.$$

Genauer,

$$x(P) \rightarrow L_v(x(P)) \stackrel{df}{=} \tilde{x}(P).$$

Ein Lorentz-Skalarfeld

$$\Phi: M^4 \rightarrow \mathbb{R}$$

transformiert sich unter Lorentz-Transformationen, d.h.

$$\tilde{\Phi}(\tilde{x}) = \Phi(x).$$

Es ist üblich $P \in M^4$ zu unterdrücken. Genauer haben wir

$$\tilde{\Phi}(\tilde{x}(p)) = \tilde{\Phi}(x(p)).$$

Mit Hilfe der entsprechenden inversen Lorentz-Transformation
finden wir

$$\tilde{\Phi}(\tilde{x}(p)) = \tilde{\Phi}(L^{-1}(v)(x(p))) \rightsquigarrow \tilde{\Phi} = \tilde{\Phi} \circ L^{-1}(v).$$

Als Funktion von \tilde{x} hat $\tilde{\Phi}$ im allgemeinen nicht dieselbe Form
wie Φ als Funktion von x ! Die oft verwendete abkürzende
Schreibweise $\Phi = \tilde{\Phi}$ darf nicht zu Missverständnissen führen.

Wir verallgemeinern jetzt weitere Kontraktions (im Hinblick
auf die Elektrodynamik, es geht noch allgemeiner):

Zusammenfassung:

$$d^{(0)}(\partial\tilde{\Phi}, x) = -\frac{1}{2} \partial_2 \tilde{\Phi}(x) \partial^1 \tilde{\Phi}(x)$$

Betrachtet. Diese Terme transformiert sich wie ein Lorentz-
Schaufeld, dann

$$d^{(0)}(\partial\tilde{\Phi}, x) = -\frac{1}{2} \eta(d\tilde{\Phi}(x), d\tilde{\Phi}(x)).$$

Wir wollen das expliziter machen und reduzieren ganz über
ausführlich:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\Gamma}(\tilde{\Phi}, \tilde{x}) &= -\frac{1}{2} \eta(d\tilde{\Phi}(x), d\tilde{\Phi}(x)) = \\
 &= -\frac{1}{2} \tilde{\eta}(dx^\alpha, dx^\beta) \tilde{\nabla}_\alpha \tilde{\Phi}(x) \tilde{\nabla}_\beta \tilde{\Phi}(x) = \\
 &= -\frac{1}{2} \tilde{\eta}^{\alpha\beta} \tilde{\nabla}_\alpha \tilde{\Phi}(x) \tilde{\nabla}_\beta \tilde{\Phi}(x) = \\
 &= -\frac{1}{2} (\tilde{L}^{-1})^\mu_\alpha(v) (\tilde{L}^{-1})^\nu_\beta(v) \tilde{\eta}^{\alpha\beta} \partial_\mu \tilde{\Phi}(x) \partial_\nu \tilde{\Phi}(x) = \\
 &= -\frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \tilde{\Phi}(x) \partial_\nu \tilde{\Phi}(x) = \\
 &= -\frac{1}{2} \eta(d\tilde{\Phi}(x), d\tilde{\Phi}(x)) = \underbrace{L^{(0)}(\tilde{\Phi}, x)}
 \end{aligned}$$

In der Tat transformiert sich die Lagrange-Dichte wie ein Lorentz-Skalarfeld.

Aufgabe: Konsequenzen für die Bewegungsgleichungen?

Wie stark schränkt nun die Forderung nach Lorentz-Kästigung die Konstruktion der freien Skalarfeld-Theorie ein?
Zunächst scheint doch auch

$$L^{(0)}/(\tilde{\Phi}, x) = C_0 \tilde{\Phi}(x) \square \tilde{\Phi}(x)$$

ein legitimer Ausdruck zu sein.

c
7

Aufgabe: Leiten Sie die Euler-Lagrange-Gleichung für $\mathcal{L}^{(0)}[\varphi]$ her.
Auch ohne die Bewegungsgleichung herzulegen, können wir aus folgenderweise ein Vorgehen erläutern:

$$\int_{M^4} d^4x \mathcal{L}^{(0)}[0\varphi, x] = \int_{M^4} d^4x \mathcal{L}^{(0)}[0\varphi, x] + R[\varphi],$$

Wobei der Randterm ($c_0 \doteq \frac{1}{2}$)

$$R[\varphi] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \int_{M^4} d^4x \partial_\mu \left\{ \varphi(x) \partial^\mu \varphi(x) \right\}.$$

In der Abwesenheit von Randern fordern wir stets, daß $R[\varphi] = 0$ gilt.

Aufgabe: Interpretieren Sie diese Forderung. Warum ist sie gerechtfertigt?

Aufgabe: Konstruieren Sie die allgemeine Lagrange-Dichte, in der jeder Term aus den Ableitungen u. ges. Felder besteht, sich Lorentz-Kovariant transformiert und Massadienzen via hat.

Auch wenn es von Standpunkt moderner mathematischer Überlegungen hier unverständlich ordnet, so liefert zumindest Lorentz-Kovarianz der Lagrange-Dichte auch folgende Tautie 4:

$$C_{[4-4p]} \stackrel{M^p}{\mathcal{M}}(d\Phi, d\Phi), \quad p \in \mathbb{N}, \quad C_{[4-4p]} \in \mathbb{R}$$

wobei $[C_{[4-4p]}] = E^{4-4p}$. $p \in \mathbb{N}$ garantiert einen polynomischen Beitrag. Dies bedeutete aber die Erfahrung einer kompensierenden Energieskala (für $p > 1$), deren physikalische Bedeutung hier nicht gewürdigt werden kann jedoch nicht im Gange. Folgendes kann man an dieser Stelle aber meinten: Sei Λ diese Energieskala, also

$$C_{[4-4p]} = \frac{c}{\Lambda^{4(p-1)}}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Der Einfachheit halber betrachten wir lediglich ein Modell mit $p > 1$. Im Moment noch etwas lax interpretieren wir

$$\mathcal{E}^{(0)} = \frac{1}{2} \mathcal{M}(d\Phi, d\Phi)$$

als kinetische Energiedichte. Wir betrachten

$$\begin{aligned}
 L &= E^{(0)} + C_{[4-4p]} \eta^p(d\Phi, d\Phi) \quad (p>1) \\
 &= E^{(0)} + \frac{c}{1^{4(p-1)}} \eta^p(d\Phi, d\Phi) \\
 &= E^{(0)} + \frac{2^p c}{1^{4(p-1)}} \left\{ \frac{1}{2} \eta(d\Phi, d\Phi) \right\}^p \\
 &= E^{(0)} + \frac{2^p c}{1^{4(p-1)}} \left\{ E^{(0)} \right\}^p \\
 &= E^{(0)} \left\{ 1 + 2^p c \left[\frac{E^{(0)}}{1^4} \right]^{p-1} \right\}
 \end{aligned}$$

Wir verstehen: 1 ist die energetische Grenze zwischen zwei Regimen. Für kinetische Energien $E^{(0)} \ll 1^4$ finden wir, daß $L \approx L^{(0)}$ gilt. In diesem Regime haben wir den klassischen Übergang zur klassischen freien Feldtheorie vollzogen und berücksichtigt dabei Gereib exige Ausdrückung. Diese Ausdrückung verlangt vor aly., das Manu als Quotient der Schleuderwirkung von Φ zu interpretieren. Im betrachteten Regime ist Φ also ungebunden frei und "gibt sich selbst Raum".

für kinetische Energien $E^{(k)} \gg 1^4$ dagegen dominiert diese Selbstwechselwirkung gegenüber der freien Dynamik.

Das System besteht hauptsächlich aus potentieller Energie.

Offenbar unterscheidet Λ also zwei grundverschiedene Regime, die physikalisch anders entgegengesetzten Situationen entsprechen.

Daher muß die Skala Λ selbst irgendwie physikalisch konstituiert werden, muß eine physikalische Ursache haben.

Für die in dieser Vorlesung betrachteten Effekte kann immer $E^{(k)} \ll 1^4$ angedehnt werden, also $P = 1$ und dieser Beitrag ist ja bereits in $E^{(k)}$ enthalten.]

Welche Wechselwirkungsformen können wir modellieren, die sich Lorentz-Kovariant transformieren, keine Ableitungen enthalten und Massendimension vier haben? Hier ein Vorschlag:

$$L^{(k)}(\Phi, x) = C_{[0]} \Phi^4 + C_{[1]} \Phi^3 + C_{[2]} \Phi^2 + C_{[3]} \Phi^1$$

$$C_{[j]} \in \mathbb{R}, j \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

Wir setzen zunächst $C_{[3]} = 0$ und rechtfertigen dies a posteriori.

Dann ist

$$L^{(0)}(\Phi, x) = \sum_{j=0}^2 C_{[j]} \Phi^{4-j}(x).$$

Die Parameter $C_{[1]}, C_{[2]}$ tragen eine positive Masse - dimension. Diese stellen kein Problem dar, denn

$$\begin{aligned} L(\Phi, x) &= L^{(0)}(\Phi, x) + L^{(1)}(\Phi, x) = \\ &= \mathcal{E}^{(0)}(\Phi, x) \left\{ 1 + \sum_{j=0}^2 \frac{C_{[j]}}{\{\mathcal{E}^{(0)}(\Phi, x)\}^{j/4}} \frac{\Phi^{4-j}(x)}{\{\mathcal{E}^{(0)}(\Phi, x)\}^{(4-j)/4}} \right\} \end{aligned}$$

Hier ist es also möglich, $\mathcal{E}^{(0)} \gg$ beliebige Stufen zu haben und erwartungsgemäß eine Macherungswise freie Theorie vorzufinden, d.h. $L \approx L^{(0)}$.

Der Koeffizient $C_{[1]}$ heißt die dem Feld Φ zugeordnete Masse.

Aufgabe: Warum hat $C_{[2]}$ diese Interpretation?

Tipp: Relativistische Energie-Masse-Beziehung.

Wir widmen uns nun dem Term $C_{[B]} \dot{\Phi}$. Zunächst:

Hätten wir das diskrete System von S.61 nach der Aufzähllung nicht einfach sich selbst überlassen (frei), sondern einer externen Kraft (Antrieb) unterworfen, so hätte sich dies durch einen Beitrag $f_j(t) \dot{f}_j(t)$ in der Lagrange-Funktion bemerkbar gemacht. In der Mechanik der Punktteile darf diese externe Kraft $f_j(t)$ nicht explizit vom Ort abhängen, da der Ort ja ein dynameischer Freiheitsgrad ist. Hier wird dagegen $f_j(t)$ voraus vorgegeben und die Rückwirkung des Systems auf die Kraftanwendung als verschleissiger Gegenwart. Daraus wird die externe Kraft nicht in dynameische Freiheitsgrade aufgelöst.

Die externe Kraft kann Auslenkungen aus der Ruhelage selbst erzeugen oder diese entgegawirken. Beim heuristischen Übergang zu einer Feldtheorie entspricht der externen Kraft eine Quelldichte $\rho(x)$, die sowohl als Quelle als auch als Senke des Feldes fungiert, dieses also „emittieren und absorbieren“ kann. Diese Quelldichte bleibt eine externe Größe, zu die

das Feld zwar koppelt, jedoch ohne eine Rückwirkung zu erzeugen. Eine solche Rückwirkung kann berücksichtigt werden, erfordert aber selbst eine dyonische Theorie für die die Quellendichte konstituierenden Freiheitsgrade.

Der Betrag $C_{[3]} \Phi(x)$ kann nur in $\rho(x) \Phi(x)$ absoziert werden und findet prinzipiell keine Berücksichtigung.

Es hat sich eingebürgert, die quadratische Terme (in der Theorie) der freien Theorie zu zutreden, höhere Potenzen von Φ als Selbstwellenwirkungen zu betreuen und den Term linear zu Φ als Aufkopplung an eine externe Quelle zu interpretieren. Wir finden so

$$\begin{aligned} L(\Phi, x) = & -\frac{1}{2} \eta(d\Phi(x), d\Phi(x)) - \frac{1}{2} m^2 \Phi^2(x) + \\ & + C_{[1]} \Phi^3(x) + C_{[0]} \Phi^4(x) + \rho(x) \Phi(x) \end{aligned}$$

Aufgabe: Formulieren Sie einen präzisen Regelkatalog, der die Gestalt dieser Lagrange-Dichte erzwingt.

Diskutieren Sie die Terme der Form $C_{[-n]} \Phi^{4+n}$ ($n \in \mathbb{N}_{\geq 0}$), $C_{[4+n]} \Phi^{-n}$, etc.

Aufgabe: Gegeben sei

$$L(\Phi, x) = -\frac{1}{2} \eta(d\Phi(x), d\Phi(x)) + \varrho(x)\Phi(x).$$

Diskutieren Sie, ob eine räumlich homogene Quelle
besteht.

Bemerkung: Die Integrationstheorie der zugehörigen

Bewegungsgleichungen verschieben wir auf später. Sie folgt
sobald wir angeben haben, in wie weit diese etwas mit
Elektrodynamik zu tun haben.

Bemerkung: Folgende Schreibweise ist üblich:

$$L(\Phi, d\Phi, x) = \dots$$

4 Lagrange-Dichte für das elektromagnetische Potential

Aus Beobachtungen folgt, daß die mit elektromagnetischen Phänomenen verknüpfte Zustandsbeschreibung auf sogenannten Feldstärke-Vektoren beruht.

Da wir eine manifest Lorentz-kovariante Beschreibung anstreben, konstruiere wir die zugehörige Lagrange-Dichte aus Lorentz-Vektorfeldern und deren Ableitungen.

Diese Beschreibung fällt etwas läppig aus: Im Vakuum tragen die Feldstärke-Vektoren lediglich zwei Freiheitsgrade, während unsere Beschreibung vierkomponentige Objekte nutzt. Für eine Lorentz-kovariante Beschreibung zahlt wir also den Preis, redundante Komponenten in die Zustandscharakterisierung einzubauen zu haben.

In dieser Redundanz kann keine Physik abgelegt werden, sie ist absolut unphysikalisch und wir dürfen aus ihrer Bequemheit aber gern voll profitieren.

Wir versuchen zunächst diese Aussagen etwas präziser zu würdigen. Hierbei hilft eine fundamentale Erfahrung, welche besagt: Es gibt keine Quellen oder Senken für elektrische Ladungen.

Betrachten wir einen Raumbereich \mathcal{B} , so gilt für die elektrische Ladung $Q_{\mathcal{B}}$ in diesem Bereich folgende Bilanzgleichung:

$$\dot{Q}_{\mathcal{B}} + I_{(\mathcal{B})} = 0,$$

wobei $I_{(\mathcal{B})}$ der Strom von elektrischer Ladung durch die Oberfläche (S) von \mathcal{B} bedeutet. Da auf der rechten Seite dieser Gleichung weder eine Erzeugungsrate noch eine Verlustrate auftritt, liefert diese spezielle Bilanzgleichung einen wichtigen Schub für die Erhaltung der elektrischen Ladung.

Aufgabe: Interpretieren Sie den Erhaltungssatz. □

In Anlehnung an unsere Betrachtungen auf S.81, formulieren wir das Erhaltungssatz mittels Dichten. Sei ρ die Ladungsdichte der Gesamtladung $Q_{\mathcal{B}}$ im Raumbereich \mathcal{B} und \underline{j} die zu $I_{(\mathcal{B})}$ gehörende Stromdichte. In der Sprache der klassischen Vektoranalysis: $I_{(\mathcal{B})} = \int_{(S)} \langle \underline{dF}, \underline{j} \rangle$.

Mit dem Satz von Gauß finden wir für den Erhaltungssatz

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}} dV \varrho + \int_{\mathcal{B}} dV \operatorname{div} \underline{j} = 0.$$

Bei zeitunabhängigen Integrationsbereich \mathcal{B} folgt daraus die sogenannte Kontinuitätsgleichung,

$$\frac{\partial \varrho(t, \underline{x})}{\partial t} + \operatorname{div} \underline{j}(t, \underline{x}) = 0,$$

was gerade die differentielle Form der Ladungserhaltung ausdrückt. Dieser Sachverhalt lässt sich leicht konservativisieren: Sei $\underline{J}(\underline{x})$ das kontravariante Vektorfeld mit Komponenten

$$\underline{J}^k = (\varrho \underline{v}^k, \underline{j}^k).$$

Dann gilt

$$\partial_x J^2(x) = 0.$$

Da die Lorentz-Stromdichte \underline{J} nicht von Freiheitsgraden abhängt, kann sie als externe Quelle für die Lorentz-Vektorfelder $A^{(\alpha)}$ dienen, die wir zur (redundanten) Beschreibung von elektromagnetischen Phänomenen benötigen.

Die Lorentz-Strömungsdichte (zusammengesetzt aus einer Ladungsdichte und einer räumlichen Strömungsdichte) kann das konservierte Vektorfeld $A(x)$ aufnehmen (absorbieren) oder abgeben (emittieren). In der Sprache der klassischen Elektrodynamik können Ladung- und räumliche Strömungsdichten als Quellen und Senken für $A(x)$ fungieren. Diese Kopplung modellieren wir analog zu unserer Betrachtung auf S.81 durch folgende Terme (univariante Autokopplung) in der Lagrangefunktion:

$$L_{\text{ext}} = A_2(x) J^2(x).$$

Sanierung: $[J] = E^3 \rightsquigarrow [A] = E^1$.

L_{ext} transformiert sich offenbar wie ein Lorentz-Skalarfeld.

Ladungserhaltung ist nun eine wichtige Konsequenz:

Felder der Form $A_2^{(II)}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \partial_2 f(x)$ (f eine Funktion) entkoppeln von der externen Quelle, können also weder emittiert noch absorbiert werden. Wir sehen das so:

$$\int_{M^4} d^4x \ A_2^{(II)}(x) J^2(x) = 0.$$

Vom Standpunkt der Quelle her sind also zwei kovariante Vektorfelder $A_1(x)$ und $A_2(x)$ äquivalent, wenn sie sich lediglich um den Lorentz-Gradienten einer Funktion $f(x)$ unterscheiden:

$$A_1(x) \sim A_2(x), \text{ wenn } A_1(x) - A_2(x) = df(x).$$

Buchhalterisch haben wir es zunächst also immer mit einer Äquivalenzklasse zu tun:

$$[A] = \{\tilde{A} : \tilde{A} = A + df \text{ für } f: M^4 \rightarrow \mathbb{R}\}.$$

Der Raum der kovarianten Vektorfelder zerfällt so und es interessiert der entsprechende Quotientenraum.

Diese Wahlfreiheit ist Ausdruck der aufgang erwähnten Redundanz. Die externe Quelle koppelt aufgrund der Ladungs-erhaltung an Äquivalenzklassen von kovarianten Vektorfeldern. Die Quelle diskriminiert lediglich zwischen Repräsentanten, nicht aber innerhalb einer Äquivalenzklasse.

Nun sind für die Physik natürlich nur die Vektorfelder interessant, die auch abgesintet werden können, d.h. die an einen Detektor koppeln und so prinzipiell beobachtet

wenden können (über die von ihnen induzierten Phasowerte).

Es ist hierbei wichtig zu beachten, daß die Kopplung

$$A_{\mu}^{(II)}(x) J^{\mu}(x)$$

im allgemeinen nicht verschwindet, aber diese sogenannte Vertexdichte ist eben auch kein Lorentz-Skalar! Daher wird in der Wirkung über ganz M^4 integriert, also

$$S_{\text{ext}}[A] \stackrel{\text{df}}{=} \int_{M^4} d^4x \ A_{\mu}(x) J^{\mu}(x).$$

Dies macht auch physikalische Sinn: Wir „summieren“ über alle Quellenereignisse in der Raumzeit. Wir wissen bereits, daß $S_{\text{ext}}[A_{\text{ext}}] = 0$.

Da in dieser Sime $A^{(II)}$ weder erfüllt noch absohbar wird, wollen wir diese Felder auch keine kinetische Energie ablegen: Nur die Feldkonfigurationen sorgen sich in der Raumzeit ausbreiten, die auch an Quellen koppeln können. Dies schränkt die Variabilität der „freien“ Wirkung wesentlich ein!

Prinzipiell kommen für die freie Wirkung folgende Terme in Frage:

$$S_{\text{fre}}[A] = \int_{M^4} d^4x \left\{ \tilde{c}_1 \partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu + \tilde{c}_2 \partial_\mu A^\mu \partial_\nu A^\nu + \tilde{c}_3 A_2 \square A^2 + \tilde{c}_4 A_\mu \partial^\mu \partial^\nu A_\nu \right\} (x),$$

mit $\tilde{c}_i \in \mathbb{R}$ für $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Aufgabe: Erläutern Sie das Konstruktionsprinzip.

Mittels partieller Integration finden wir

$$S_{\text{fre}}[A] = \int_{M^4} d^4x \left\{ c_1 \partial_\mu A_\nu \partial^\mu A_\nu + c_2 \partial_\mu A^\mu \partial_\nu A^\nu \right\} (x)$$

mit $c_i \in \mathbb{R}$. Nun ist

$$S_{\text{fre}}[A^{(ii)}] = \int_{M^4} d^4x (c_1 + c_2) \square f(x) \square f(x)$$

$$\stackrel{!}{=} 0 \quad \begin{matrix} f \in C^2(M^4) \\ \curvearrowright \end{matrix} \quad c_1 = -c_2 .$$

!!
c

Somit ist

$$\begin{aligned}
 S_{\text{frei}}[A] &= \int_{M^4} d^4x \, c \left\{ \partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu A^\mu \partial_\nu A^\nu \right\}(x) \\
 &\stackrel{\text{Pf.}}{=} \int_{M^4} d^4x \, c \left\{ \partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - \partial_\nu A_\mu \partial^\mu A^\nu \right\}(x) \\
 &= \int_{M^4} d^4x \, c \left\{ \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \right\}(x) \partial^\mu A^\nu(x)
 \end{aligned}$$

Die Kombination $\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ bilden die Komponenten eines zweifach kovarianten Durch-Tensorfeldes des $F(x)$

$$F_{\mu\nu}(x) \stackrel{\text{df.}}{=} \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x).$$

Dieses hat eine sehr schöne Eigenschaft, nämlich

$$\partial_\mu A_{\nu}^{(I)}(x) - \partial_\nu A_{\mu}^{(II)}(x) = 0$$

auf ganz M^4 (und weiterlichen Forderungen an die Komponenten).

Hierfür war wesentlich, daß

$$F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$$

gilt, $F(x)$ ist also ein antisymmetrisches Durch-Tensorfeld.

Damit wird

$$\begin{aligned} S_{\text{frei}}[A] &= \int_{M^4} d^4x \, c F_{\mu\nu}(x) \partial^\mu A^\nu(x). \\ &= \int_{M^4} d^4x \, \frac{c}{2} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) \end{aligned}$$

Aufgabe: Zeigen Sie dies. □

$A(x)$ heißt aus Gründen, die abschließend klar sind, der elektromagnetische Feldstärke-Tensor. Die Komponenten dieses Tensorsfeldes sind observabel.

Aufgabe: Ist auch $A(x)$ beobachtbar? □

Zusätzlich finden wir mit $k_j \in \mathbb{R}$ ($j \in \{1, 2\}$)

$$S[A] = \int_{M^4} d^4x \left\{ k_1 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + k_2 A_\mu J^\mu \right\}(x)$$

Aufgabe: Unter welchen Voraussetzungen darf der Term $(*F)_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ vernachlässigt werden? □

Das zweifach kovariante Lorentz-Vektorfeld $F_{\alpha\beta}$ hat drei Komponententypen: $F_{00}(x) = 0$, $F_{0a}(x) = -F_{a0}(x)$, und $F_{ab}(x) = -F_{ba}(x)$ ($a, b \in \{1, 2, 3\}$). Der Historie ist folgende aus der Perspektive der Speziellen Relativitätstheorie als unglücklich zu kennzeichnende Konvention geschehet:

Folkloristisch werden die drei Komponenten F_{0a} zu einem Galilei-Vektorfeld $\underline{E} \in \mathbb{R}^3$ zusammengefaßt, mit Komponenten

$$E_a(x) = -F_{0a}(x).$$

$\underline{E}(x)$ heißt die elektrische Feldstärke.

Ebenfalls folkloristisch werden die drei Komponenten des (Pseudo-) Vektorfeldes $\underline{B} \in \mathbb{R}^3$ eingeführt:

$$F_{ab}(x) = + \epsilon_{abc} B_c(x).$$

$\underline{B}(x)$ heißt die magnetische Feldstärke (Induktion).

Aufgabe: Lösen Sie $F_{ab} = -\epsilon_{abc} B_c$ nach B_c auf.]

Wir rechnen

$$\begin{aligned}
 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} &= F_{\mu\nu} \gamma^{\mu\alpha} \gamma^{\nu\beta} F_{\alpha\beta} = \\
 &= F_{0a} \gamma^{00} \gamma^{ab} F_{0b} + F_{a0} \gamma^{ab} \gamma^{00} F_{b0} + \\
 &\quad + F_{ab} \gamma^{ac} \gamma^{bd} F_{cd} \\
 &= -2 F_{0a} S^{ab} F_{0b} + F_{ab} S^{ac} S^{bd} F_{cd} \\
 &= -2 \langle \underline{E}, \underline{E} \rangle + 2 \langle \underline{B}, \underline{B} \rangle
 \end{aligned}$$

Aufgabe: Gelingt es Ihnen, die Quellankopplung durch die elektrische und magnetische Feldstärke auszudrücken?

Bevor wir nun die Bewegungsgleichungen für A und die Feldstärken $\underline{E}, \underline{B}$ herleiten, gibt es auch recht trockenen Einschub.

Einschub: Definition der Funktionalableitung

Sei S ein Funktional auf $\mathcal{D}(S)$ und $A \in \mathcal{D}(S)$.

Wir fragen: Wie verändert sich $S[A]$, wenn wir A "etwas" verändern. Dabei heißt "etwas" verändern, daß wir $A+h \in \mathcal{D}(S)$ mit $\|h\|$ klein betrachten. Für $\|h\| \rightarrow 0$, sollte $S[A+h] \Rightarrow S[A]$ sein, sonst wäre S an der Stelle A nicht quasi stetig. Wie aber konvergiert $S[A+h]$ gegen $S[A]$? Wir streben eine Lineare Approximation an (ein Paradigma der gewöhnlichen Analysis):

$$S[A+h] \approx S[A] + L[h] \quad \text{wenn } h \approx 0,$$

wobei L ein lineares Funktional sei. Selbstverständlich hängt L von S und der Stelle A ab. Diese Abhängigkeit notieren wir folgendermaßen: $L = \frac{\delta S}{\delta A}$.

L heißt die Ableitung des Funktionals S an der Stelle A .

Wir werden endlich präziser.

Definition: Ein Funktional S auf $\mathcal{D}(S)$ heißt an der Stelle $A \in \mathcal{D}(S)$ differenzierbar, wenn es einer linear-beschränkten Operator $\frac{\delta S}{\delta A}$ gibt (die Funktionsableitung von S an der Stelle A), so daß

$$\|S[A+h] - S[A] - \frac{\delta S}{\delta A} h\| \leq \|h\| \varepsilon(\|h\|),$$

für alle h mit $\|h\| < \delta$.

Hierbei ist ε eine Nullfunktion: $\varepsilon(x) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow 0$.

Bemerkung: Die Normen auf der linken und rechten Seite sind unterschiedlich trotz gleicher Bezeichnung.

Aufgabe: Zeigen Sie Endlichkeit der Funktionsableitung.

Zeigen Sie, daß ein differenzierbares Funktional auf reell stetig ist.

Aufgabe: Euler-Lagrange-Gleichungen der Klassischen Mechanik.

In der Literatur findet wir häufig die Schreibweise

$$\frac{\delta}{\delta A(x)} S[A],$$

gelesen so: Die Änderung des Funktionals $S[A]$ bei Änderung der Funktion A an der Stelle x . Daher der Name Funktionalableitung. Nur ist diese Funktionalableitung aber selbst ein linear-stetiges Funktional und hat als solches seine Bedeutung als Auswandler auf geeignete Funktionsräume $\mathcal{H} \supset D(S)$.

Es ist also selbst Element des zugehörigen dualen Raumes,

$$\frac{\delta S[A]}{\delta A} \in \mathcal{H}^*$$

und seine Wirkung kann wie üblich als inneres Produkt wertet werden: Für $h \in \mathcal{H}$ ist

$$\left\langle \frac{\delta}{\delta A} S[A] \mid h \right\rangle = \int dz \frac{\delta}{\delta A(z)} S[A] h(z).$$

Aufgabe: Wie erhalten Sie hieraus obige lokale Ausweitung der Funktionalableitung (an der Stelle x)?

Ein instruktives Beispiel ist folgendes: Sei $S[A]$ die Zuordnung

$$S[A] = A(y) \in \mathbb{R} \quad (\text{od. } \mathbb{C}).$$

Dann ist

$$\begin{aligned} S[A+h] - S[A] &= h(y) \\ &= \int dz \frac{\delta}{\delta A(z)} S[A] h(z). \end{aligned}$$

Folglich existiert die Funktionalableitung und es gilt die ausführliche Formel

$$\frac{\delta A(y)}{\delta A(z)} = \delta(y-z).$$

Nun interessiert hauptsächlich, wie Feldgleichungen (d.h. Bewegungsgleichungen für Felder) aus dem Extremalprinzip der Wirkung folgen. Sei

$$S[f] = \int d^4x \mathcal{L}(f(x), \partial_\mu f(x), x).$$

Extremalprinzip:

$$\frac{\delta S[f]}{\delta f(x)} = 0 \rightsquigarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\frac{\partial f}{\partial x^\mu})} = 0.$$

Aufgabe: Zeigen Sie dies!

Beispiel: $\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \gamma(d\Phi, d\Phi) - \frac{1}{2} m^2 \Phi^2 + J\Phi$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} = -m^2 \Phi + J, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial \Phi} = -\partial^2 \Phi \quad \rightsquigarrow$$

Euler-Lagrange-Gleichung (Feldgleichung)

$$(\square - m^2) \Phi(x) = -J(x).$$

Dies ist die sogenannte Klein-Gordon-Gleichung für ein reelles Skalarfeld.

In manchen Anwendungen ist es zweckmäßig, die Funktionalableitung auf die gewöhnliche Ableitung dadurch zurückzuführen, daß $S[A+\tau h]$ als Funktion von $\tau \in \mathbb{R}$ aufgefaßt wird.

Dafür definieren wir das Richtungsdifferential des Funktionsals S an der Stelle A durch

$$\partial S[A; h] \stackrel{\text{df}}{=} \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{S[A+\tau h] - S[A]}{\tau},$$

sofern dieser Linies existiert. Beachten Sie, daß ∂S nicht nur von der „Stelle“ A abhängt, sondern auch von der „Richtung“ h .

Die Abhängigkeit des Richtungsdifferentials von der Richtung kann linear sein, muß es aber nicht!

Wäre $\partial S[A; h]$ bzgl. h durch einen linearen Operator zu beschreiben, ist,

$$\partial S[A; h] \stackrel{!}{=} \frac{\partial S}{\partial A} h \equiv \left\langle \frac{\partial S}{\partial A} \mid h \right\rangle,$$

so nennen wir den linearen Operator $\frac{\partial S}{\partial A}$ über einer geeigneten Funktionenraum die Richtungsableitung.

Der Zusammenhang seit der Funktionsableitung ist folgender:

(I) Wenn (!) S an der Stelle A funktional differenzierbar ist, so existiert erst recht die Richtungsableitung, und

es gilt: $\frac{\partial S}{\partial A} = \frac{\partial S}{\partial A}$

(II) Existiert (!) $\partial S[A; h]$ in einer Umgebung $\|A - A'\| \leq r$ von $A + h$, und ist es in h stetig sowie in A gleichmäßig stetig, so ist S in dieser Umgebung funktional differenzierbar.]

Höhere Funktionalableitungen können ohne weitere Probleme
durchgeführt werden. Es gelten die Ketten- und die Produktregel.
Für Funktionale gilt ein Mittelwertsatz und eine Taylor-Entwicklung
mit Restgliedabschätzung.

Aufgabe: Informieren Sie sich hierüber und formulieren Sie
die Sachverhalte so präzise wie möglich.
Ein Blick in die Beweiskultur sei empfohlen.]

Auf S.91 finden wir

$$S[A] = \int_{M^4} d^4x \underbrace{\left\{ k_1 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + k_2 A_\mu A^\mu \right\}}_{L(A_\mu, \partial^\mu A_\nu, x)}$$

Zunächst eingesetzt ist

$$F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = F_{\mu\nu} \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} F_{\alpha\beta}$$

und

$$\frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \frac{\partial}{\partial F_{\alpha\beta}} = (\eta^\mu_\alpha \eta^\nu_\beta - \eta^\nu_\alpha \eta^\mu_\beta) \frac{\partial}{\partial F_{\alpha\beta}}$$

Wir rechnen:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} = k_2 J^\mu,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (Q_\mu A_\nu)} &= (\eta^\mu_\alpha \eta^\nu_\beta - \eta^\mu_\beta \eta^\nu_\alpha) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{\alpha\beta}} = \\ &= (\eta^\mu_\alpha \eta^\nu_\beta - \eta^\mu_\beta \eta^\nu_\alpha) 2k_1 F^{\alpha\beta} = 4k_1 F^{\mu\nu}\end{aligned}$$

Die Feldgleichungen sind somit

$$k_2 J^\mu(x) - 4k_1 \partial_\lambda F^{\lambda\mu}(x) = 0,$$

wobei $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ noch zu bestimmen sind.

Nun ist

$$\partial_\lambda F^{\lambda\mu} = \square A^\mu - \partial^\mu (\partial_\lambda A^\lambda) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \underbrace{4k_1 \square A^\mu}_{\sim} - \underbrace{4k_1 \partial^\mu (\partial_\lambda A^\lambda)}_{\sim} = k_2 J^\mu$$

Eine Frage die sich hier stellt ist, ob überhaupt interessante Information in den Koeffizienten steht. Wir untersuchen diese Frage mit einem strukturellen Vorgehen.

Dieser Vorgang besteht in der Formulierung von klassischer Feldtheorie nach Hamilton und ist, salopp gesprochen, eine nahe liegende Verallgemeinerung von Hamiltons Formulierung der Theorie dynamischen Systeme von Punktteilchen auf dynamische Systeme von Feldern.

Zunächst ist

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = 4k_1 F^{\mu\nu} =: \Pi^\mu.$$

Insofern ist $\Pi^\mu = 0$, weshalb A^μ kein dynamischer Freiheitsgrad sein kann. Hierzu später mehr!

Die Hamilton-Funktion ist damit

$$H = \int d^3x \left\{ \langle \Pi, \dot{A} \rangle - \mathcal{L} \right\}.$$

Es genügt den quellen-freien Fall zu betrachten, also

$$H = \int d^3x \left\{ \langle \Pi, \dot{A} \rangle - k_1 F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right\}.$$

$$= \int d^3x \left\{ \langle \Pi, \dot{A} \rangle + 2k_1 (F_{0a})^2 - k_1 (F_{ab})^2 \right\}$$

Für die kanonisch konjugierten Gruppelfelder finden wir

$$\begin{aligned}\Pi^0 &= \emptyset, \quad \Pi^c = 4k_1 F^{0c} = 4k_1 F^0_c \\ &= -4k_1 F_{0c} = \Pi_c\end{aligned}$$

Also ist

$$\underline{\Pi} = -4k_1 (\underline{A} - \nabla A_0) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \langle \underline{\Pi}, \underline{A} \rangle = -\frac{1}{4k_1} \langle \underline{\Pi}, \underline{\Pi} \rangle + \langle \underline{\Pi}, \nabla A_0 \rangle$$

Weiterhin gilt

$$\langle F_{0a}, F_{0a} \rangle = \left(\frac{1}{4k_1}\right)^2 \langle \underline{\Pi}, \underline{\Pi} \rangle \rightsquigarrow$$

$$\begin{aligned}\rightsquigarrow H &= \int d^3x \left\{ -\frac{1}{2} \frac{1}{4k_1} \langle \underline{\Pi}, \underline{\Pi} \rangle + \langle \underline{\Pi}, \nabla A_0 \rangle - k_1 (F_{00})^2 \right\} \\ &= \int d^3x \left\{ -\frac{1}{2} \frac{1}{4k_1} \langle \underline{\Pi}, \underline{\Pi} \rangle - \frac{1}{2k_1} \langle \nabla \times \underline{A}, \nabla \times \underline{A} \rangle \right. \\ &\quad \left. + \langle \underline{\Pi}, \nabla A_0 \rangle \right\}\end{aligned}$$

Wir müssen nun Klarheit über den letzten Term verschaffen.

Da A_0 kein dynamischer Freiheitsgrad ist ($\Pi^0 = 0$), liefert die Euler-Lagrange-Gleichung für $v=0$ statt einer Bewegungsgleichung (zweite Ordnung in der Zeitableitung) folgende Einschränkung im quellen-freien Fall:

$$\partial_a \mathcal{F}^{q0} = \partial_a \left(-\frac{1}{4k_1} \Pi^q \right) \stackrel{!}{=} 0,$$

also die Einschränkung $\nabla \cdot \underline{\Pi} = 0$.

Partielle Integration des letzten Terms in H liefert

$$\int d^3x \langle \underline{\Pi}, \nabla A_0 \rangle = - \int d^3x \langle \nabla \cdot \underline{\Pi}, A_0 \rangle \stackrel{!}{=} 0.$$

Wir finden somit

$$H = \int d^3x \left\{ -\frac{1}{2} \frac{1}{4k_1} \langle \underline{\Pi}, \underline{\Pi} \rangle - 2k_1 \langle \nabla \times \underline{A}, \nabla \times \underline{A} \rangle \right\}$$

Der Integrand ist gerade die Energiedichte der quellen-freien (überhaupt freien) Theorie.

Daher auf

$$\mathcal{H} \stackrel{\text{df.}}{=} -\frac{1}{2} \frac{1}{4k_1} \langle \mathbf{II}, \mathbf{II} \rangle - 2k_1 \langle \nabla \times \mathbf{A}, \nabla \times \mathbf{A} \rangle \geq 0$$

$$\rightarrow k_1 < 0.$$

Aus Kosten ist k_1 unbestimmt und wir dürfen die Felder geweckmäßig redefinieren. Zum Beispiel $k_1 = -1/4$. Dann ist

$$\mathcal{H} = +\frac{1}{2} \langle \mathbf{II}, \mathbf{II} \rangle + \frac{1}{2} \langle \nabla \times \mathbf{A}, \nabla \times \mathbf{A} \rangle.$$

Der Koeffizient k_2 kann (ggf. nach geeigneter Feldredefinition) in der externen Quelle (Straudichte) absorbiert werden.

Als Resultat finden wir

$$S[\mathbf{A}] = \int_{M^4} d^4x \left\{ -\frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + A_2 \right\}^2. \quad (*)$$

Aufgabe: ① Drücken Sie \mathcal{H} durch \underline{E} und \underline{B} aus. □

Aufgabe: Warum fehlen Terme wie $C_{[2]} A_2 A^2$, $C_{[0]} (A_2 A^2)^2$, $C_{[-4]} (F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta})^2, \dots$?

Aus der Maxwell-Wirkung (*) folgen die berühmten und überaus mächtigen Maxwell-Gleichungen mit Quellen:

106

$$\square A^\mu - \partial^\mu (\partial_\lambda A^\lambda) = -J^\mu$$

Die nicht manifest Lorentz-kovariante Zerfällung geht so:
Wir haben zunächst die Gleichungen

$$\begin{cases} \partial_\lambda F^{\lambda\mu} = -J^\mu \\ F_{0a} = -E_a, \quad F_{ab} = \epsilon_{abc} B_c \end{cases}$$

$\mu = 0$:

$$\partial_a F^{a0} = -J^0 \leftrightarrow \partial^a F_{a0} \eta^{00} = -J^0$$

$$\leftrightarrow \nabla \cdot \underline{E} = \rho$$

$\mu = b$: Für $b \in \{1, 2, 3\}$ finden wir ähnlich

$$\partial_A F^{Ab} = -J^b \leftrightarrow -\dot{\underline{E}} + \nabla \times \underline{B} = \underline{J}$$

Bemerkung $J^0 = \eta^{0A} \partial_A = -\partial_0$

Wir haben also vier Bewegungsgleichungen

$$\operatorname{div} \underline{E} = \rho, \quad \operatorname{rot} \underline{B} - \dot{\underline{E}} = \underline{J}$$

und sechs definiierende Gleichungen

$$-E_a = F_{0a}, \quad \epsilon_{abc} B_c = F_{ab}.$$

Aus nostalgischen Gründen formulieren wir die definiierenden Gleichungen folgendermaßen neu:

$$\epsilon_{abc} B_c = F_{ab} \rightsquigarrow \underline{B} = \operatorname{rot} \underline{A} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \operatorname{div} \underline{B} = 0$$

$$-E_a = F_{0a} \rightsquigarrow \underline{E} = -\dot{\underline{A}} + \operatorname{grad} A_0 \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \operatorname{rot} \underline{E} + \dot{\underline{B}} = 0$$

Zusammen finden wir somit

$$\operatorname{div} \underline{E} = \rho, \quad \operatorname{rot} \underline{B} - \dot{\underline{E}} = \underline{J}$$

$$\operatorname{div} \underline{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \underline{E} + \dot{\underline{B}} = 0$$

Aufgabe: Korrigieren Sie die definiierenden Gleichungen. □

Lösungstheorie

108

(1) Quellenfreie Theorie

Wir beginnen mit

$$\square \Phi(x) = 0.$$

Offenbar handelt es sich hierbei um eine lineare partielle Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

Sie wird als homogene (mit quellenfrei) Wellengleichung in der Literatur geführt. Eine algebraische Charakterisierung funktioniert so: Betrachte

$$\sum_{a,b=0}^{\ell} M^{ab} \partial_a \partial_b \Phi(x_0, \dots, x_\ell) = 0,$$

wobei $M \in \mathbb{R}(\ell)$. Mit dieser Matrix können wir andererseits die quadratische Form

$$F(x_0, \dots, x_\ell) = \sum_{a,b=0}^{\ell} M^{ab} x_a x_b$$

bilden. Setzen wir $F = \text{const.}$, so beschreibt sie in 2 Dimensionen die üblichen Kegelschäfte, in 3 Dimensionen Kegelschiffflächen und Analogen in höheren Dimensionen.

Nun unterscheiden sich Hyperbeln von Ellipsen geometrisch sehr, und welche der beiden Möglichkeiten realisiert ist, hängt von den Vorzeichen der stets existierenden Eigenwerte der Matrix \mathcal{M} ab. Im vorersten Fall ist $\mathcal{M} = \mathcal{N}$, die Wellengleichung ist also mit einer hyperbolischen Form assoziiert. Und nach dieser Form wird die Wellengleichung auch als hyperbolische Differentialgleichung bezeichnet.

Aufgabe: Geben Sie eine algebraische Charakterisierung der Schrödinger-Gleichung. ↴

Es wird sich herstellen, daß die algebraische Charakterisierung extra relevant für den physikalischen Inhalt einer Theorie und sogar für deren Konsistenz ist.

(1.1) Die eindimensionale Wellengleichung

für eine Raumdimension haben wir

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \right) \Phi(x_0, x_1) = 0.$$

Wir nennen $U_{\pm} \stackrel{\text{def}}{=} x^1 \pm x^0$ und betrachten Funktionen

110

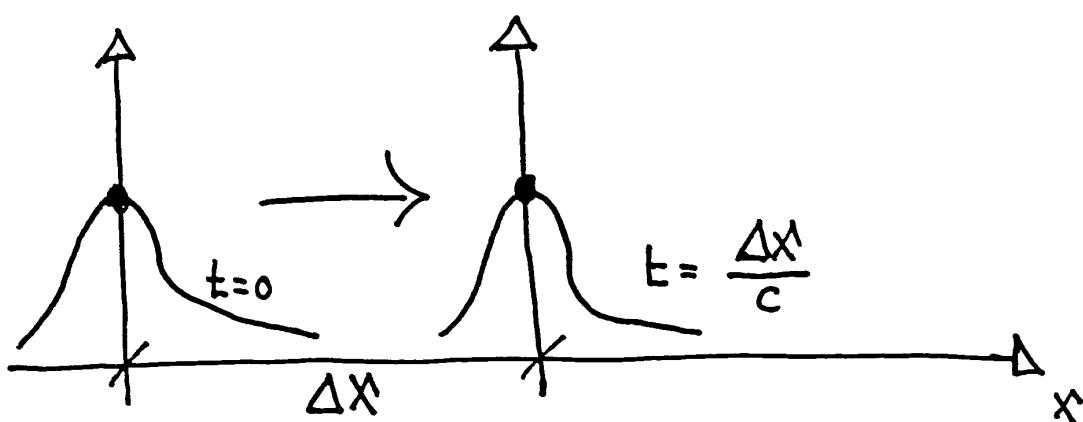
$$C^2(M^2) \ni f: M^2 \rightarrow \mathbb{K}, (x^0, x^1) \mapsto f(U_{\pm}).$$

Wegen der speziellen Abhängigkeit gilt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{d^2 f}{d U_{\pm}^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2} = \frac{d^2 f}{d U_{\pm}^2}.$$

Somit löst jede solche Funktion die Wellengleichung in einer Raumdimension.

Offenbar beschreibt $f(U_-)$ eine Funktion, die sich ohne Veränderung ihrer Form, also startet mit der konstanten Geschwindigkeit c von links nach rechts verschiebt, und $f(U_+)$ entspricht.



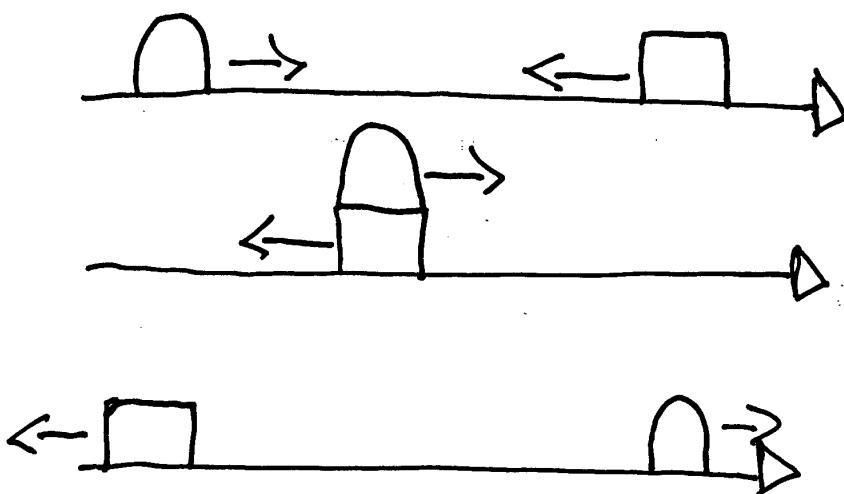
Viele unter Ihnen werden sich unter einer „Welle“ etwas ganz ¹¹¹ anderes vorgestellt haben, nämlich irgendeine räumlich periodische Struktur. Wir kommen hierauf zurück.

Zunächst: Wir betrachten die mit konstanter Geschwindigkeit laufenden allgemeinen Lösungen als Wellenförmig. Da die Wellengleichung linear ist, lassen sich mehrere Wellenförmig superponieren (überlagern).

Das ist nicht sonderlich aufregend, solange sie die gleiche Laufrichtung haben:



Gegenseitige Lösungen durchdringen sich regelhaft. In diesem Fall ändert sich die Gestalt der Gesamt Lösung in charakteristischer Weise:



Die allgemeine Lösung ist eine Überlagerung:

112

$$g(x^0, x^1) = f^{(+)}(u_-) + f^{(-)}(u_+).$$

Da die Wellengleichung eine Differentialgleichung von zweiter Ordnung in der Zeit ist, braucht die zur Berechnung einer eindeutigen Lösung notwendigen Aufgabendaten aus Aufgabewerten $g(x^0_*, x^1_*)$ und Anfangsgeschwindigkeiten $\dot{g}(x^0_*, x^1_*)$.

Aufgabe: Was reicht die Angabe der Aufgabewerte?

Interessant (später) sind zubereidete Lösungen des Form

$$\cos(ku_{\pm}) = \cos(kx \pm kct) \\ = \operatorname{Re} \{ e^{i(kx \pm kct)} \}, \quad k > 0.$$

Ihre Periodizität in der Phase u_{\pm} führt zu einer doppelten Periodizität in Zeit und Ort. Zu gegebener Zeit t_* ist sie räumlich zeitlich periodisch mit der Wellenlänge

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

und am festen Ort x_* zeitlich periodisch mit der

Schwingungsdauer

113

$$T = \frac{2\pi}{ck} = \frac{\lambda}{c} .$$

In der Zeit T schließt sich die Lösung gerade um λ weiter und ist dann natürlich nicht mehr von der unverzögerten Lösung zu unterscheiden.

Weiterhin nennen wir

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{c}{\lambda} = \frac{ck}{2\pi}$$

die Frequenz und

$$\omega = 2\pi\nu = ck$$

die Kreisfrequenz dieser Lösung. Die Größe k wird als Wellenzahl bezeichnet. Offenbar gilt für diese Lösung

$$\cos(ku_{\pm}) = \operatorname{Re}\{e^{i(kx \pm \omega t)}\}.$$

Der Ursprung des Koordinatensystems ist natürlich willkürlich:

$$\cos(k(x-x_*) \pm \omega(t-t_*)) = \cos(kx \pm \omega t + \varphi),$$

wobei φ der Phasenwinkel heißt. Für beliebiges $A \in \mathbb{C}$

ist damit auch

114

$$|A| \operatorname{Re}\{e^{i(kx \pm \omega t + \varphi)}\} = \operatorname{Re}\{A e^{i(kx \pm \omega t)}\}$$

eine Lösung der Wellengleichung.

Addieren wir die beiden gegenüberliegenden Wellen $\cos(ku_+)$, so erhalten wir

$$\cos(ku_+) + \cos(ku_-) = 2\cos(kx)\cos(\omega t).$$

Diese Lösung läuft nicht mehr, sondern steht. Sie heißt stehende Welle.

Aufgabe: Betrachten Sie $k \rightarrow -k$, $\omega \rightarrow -\omega$.

Und: $k > 0$, $\omega \rightarrow -\omega$. Diskutieren Sie Physik!

Die gerade betrachteten Lösungen entsprechen unserer intuitiven Vorstellung von Wellen. Zuerst handelt es sich hierbei aber um höchst spezielle Lösungen der Wellengleichung. Sie sind aber trotzdem die wichtigsten, da jede Wellengleichung kann als Superposition solcher periodischer Lösungen dargestellt werden.

(J2) Die mehrdimensionale Wellengleichung

für z.B. drei räumliche Variablen, $x = (x^0, \underline{x})$ mit $\underline{x} = (x^1, x^2, x^3)$, ist

$$\square \Phi(x) = (-\partial_0^2 + \Delta) \Phi(x^0, \underline{x}) \stackrel{!}{=} 0.$$

Wir beginnen mit einem speziellen Lösungstyp, nämlich den ebenen Wellen, die sehr direkt das Lösungen der $(1+1)$ -dimensionalen Wellengleichung entsprechen.

für jeden beliebigen Länge-Vektor $k = (k^0, \underline{k})$ mit $k^0 = \pm |k|$ und $\underline{k} \neq 0$ lösen die Funktionen

$$f(x^0, \underline{x}) = \operatorname{Re} \{ e^{i \eta(k, x)} + i \varphi \}$$

die Wellengleichung. Wir schreiben $\eta(k, x) =: k \cdot x$.
In der Tat gelten ja

$$-\partial_0^2 f = (k^0)^2 f, \quad \Delta f = -|\underline{k}|^2 f \rightarrow$$

$$\rightarrow ((k^0)^2 - |\underline{k}|^2) f = 0,$$

was gerade für $k^0 = \pm |k|$ erfüllt ist.

Wie sehen ebene Wellen aus? Zu einem festen Zeitpunkt

116

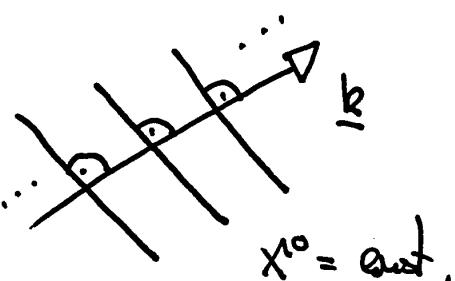
$x^0 = x_*^0$ gilt doch

$$f(x_*^0, \underline{x}) = \text{const.} \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^3: \langle \underline{k}, \underline{x} \rangle = \text{const.}$$

Das sind aber alle Punkte auf einer Normalenebene zu \underline{k} .

Jeder dieser Ebenen heißt Wellenfront, da $f(x_*^0, \underline{x})$ auf ihnen konstant ist.

Lassen wir x^0 laufen, so bewegen sich die Wellenfronten parallel und



mit der Geschwindigkeit c längs \underline{k} , und zwar in Richtung $\hat{k} = \underline{k}/|\underline{k}|$ für $k^0 > 0$ und entgegengesetzt zu \hat{k} für $k^0 < 0$. Für ebene Wellen gelten folgende Beziehungen:

\underline{k} heißt Wellenvektor, $|\underline{k}|$ heißt Wellenzahl und \hat{k}

Ausbreitungsrichtung. Für Wellenlängen gilt wieder

$\lambda = 2\pi/|\underline{k}|$ und für die Frequenz

$$\nu = \frac{ck^0}{2\pi} = \frac{c}{\lambda}.$$

Ebene Wellen spielen eine fundamentale Rolle für die allgemeine Lösung der Wellengleichung.

119

Ein anderer wichtiger Lösungstyp ist durch die sogenannten Kugelwellen gegeben,

$$f(x^0, \underline{x}) = \frac{1}{|\underline{x}|} \operatorname{Re} \left\{ e^{i(-k^0 x^0 \pm |\underline{k}| |\underline{x}|)} \right\}.$$

Um diese kugelsymmetrischen Lösungen der geläufigen Wellengleichung darstellen, zeigen wir den aufgedeckten in Kugelkoordinaten:

Offenbar gilt

$$\Delta f(x^0, |\underline{x}|) = \frac{1}{|\underline{x}|^2} \frac{\partial}{\partial |\underline{x}|} \left(|\underline{x}|^2 \frac{\partial f}{\partial |\underline{x}|} \right).$$

Wir reduzieren:

$$\frac{\partial f}{\partial |\underline{x}|} = \operatorname{Re} \left\{ \left(\pm i \frac{|\underline{k}|}{|\underline{x}|} - \frac{1}{|\underline{x}|^2} \right) e^{-i(k^0 x^0 \mp |\underline{k}| |\underline{x}| + \varphi)} \right\}$$

$$|\underline{x}|^2 \frac{\partial f}{\partial |\underline{x}|} = \operatorname{Re} \left\{ \left(\mp i |\underline{k}| |\underline{x}| - 1 \right) e^{-i(k^0 x^0 \mp |\underline{k}| |\underline{x}| + \varphi)} \right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial |\underline{x}|} |\underline{x}|^2 \frac{\partial f}{\partial |\underline{x}|} = - \operatorname{Re} \left\{ |\underline{k}|^2 |\underline{x}| e^{-i(k^0 x^0 \mp |\underline{k}| |\underline{x}| + \varphi)} \right\}$$

$$\rightarrow \Delta f = -|\underline{k}|^2 f, \quad \nabla^2 f = -(\frac{k^0}{k})^2 f$$

Insgesamt erhalten wir

118

$$(\kappa^0)^2 - |\underline{k}|^2 f = 0 \quad \text{für } (\kappa^0)^2 = |\underline{k}|^2.$$

Wie sehen Kuglwellen aus?

(1) Die Wellenfronten werden bestimmt durch

$$|\underline{k}| |\underline{x}| - \kappa^0 x^0 = \text{const.}$$

Es handelt sich also um Kugelflächen um den Ursprung.
Bei κ^0 und $\pm |\underline{k}|$ das gleiche Vorzeichen, bewegen sie
sich mit konstanter Phasengeschwindigkeit c vom Ursprung
fort, andernfalls in den Ursprung hinein. Daher werden
diese Lösungstypen auslaufende bzw. einlaufende Kugl-
wellen genannt.

(2) Wir können als Wellenlänge $\lambda = 2\pi/|\underline{k}|$ den Abstand
zwischen zwei aufeinanderfolgenden Nullkurven angeben.
Kuglwellen sind allerdings nicht gleichzeitig periodisch.
Es gilt immer noch

$$f(|\underline{x}|) = 0 \rightsquigarrow f(|\underline{x}| + \mathbb{Z} \cdot \lambda) = 0,$$

hingegen nicht mehr

$$f(|x| + \mathbb{Z} \setminus \{0\} \cdot 2) = f(|x|).$$

Aufgabe: Fertigen Sie eine Skizze an.

(13) Vektorwellen

Sei $\underline{V}(x)$ ein Vektorfeld mit $\underline{V}(x) = \sum_{j=1}^3 V_j^j(x) e_j$.

Wir betrachten

$$\square \underline{V}(x) = \underline{0}.$$

homogen

Jede Komponente von \underline{V} genügt für sich dieser \checkmark Wellengleichung, und folglich liefert der Ausdruck

$$V_j = \operatorname{Re} \{ V_j^{(0)} e^{i \underline{k} \cdot \underline{x}} \}, \quad V_j^{(0)} \in \mathbb{C}, \quad j \in \{1, 2, 3\}$$

eine Lösung, falls nur $|k^{(0)}| = |\underline{k}|$ gilt.

Der komplexe Vektor $\underline{V}^{(0)}$ heißt Ampitutdevektor. Diesen können wir in jede ONB entwickeln, insbesondere auch in folgender:

$$\underline{c}_3 = \hat{\underline{k}}, \quad \hat{\underline{k}} \text{ def } \underline{k} / |\underline{k}|.$$

Damit bedeutet $V^{(0)}_3$ die Amplitude in Ausbreitungsrichtung und $V^{(0)}_1, V^{(0)}_2$ sind die Amplituden \perp zur Ausbreitungsrichtung. 120
 Liegt speziell $\underline{V}^{(0)}$ in Richtung von \underline{k} , $\underline{V}^{(0)} \parallel \underline{k}$, so schwingt die Vektorwelle ausschließlich in Ausbreitungsrichtung. In diesem Fall sprechen wir von einer Längsschwingenden Welle.

Gilt hingegen $\underline{V}^{(0)} \perp \underline{k}$, so finden die Auslenkungen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung statt und wir sprechen von einer transversalen Welle. Wir werden später sehen, daß freie elektromagnetische Wellen stets transversal sind.

Transversale Wellen besitzen weitere Charakteristiken, die sogenannte Polarisation, die mit der relativen Phase der komplexen Amplituden $V^{(0)}_1$ und $V^{(0)}_2$ zusammenhängt,

$$\underline{V} = \operatorname{Re} \left\{ |V^{(0)}_1| e^{i(kx + \varphi_1)} \underline{e}_1 + |V^{(0)}_2| e^{i(kx + \varphi_2)} \underline{e}_2 \right\}.$$

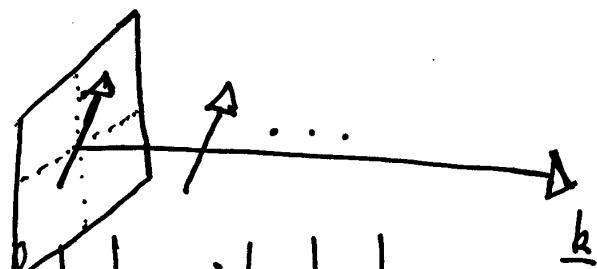
Für $\varphi_1 = \varphi_2 (\dots)$ ist

$$\underline{V} = (|V^{(0)}_1| \underline{e}_1 + |V^{(0)}_2| \underline{e}_2) \operatorname{Re} \{ e^{i(kx + \varphi)} \},$$

121

und es gibt genau eine wohldefinierte Richtung $\underline{\epsilon}$ auf der Normalenebene $\perp \underline{k}$, in der die transversale Welle unabhängig von $\underline{x} = (x^0, \underline{x})$ schwingt.

Eine solche Welle heißt
linear polarisiert, ihre Amplitude ist durch



$$|\underline{V}^{(0)}| = \sqrt{V_1^{(0)} V_1^{(0)*} + V_2^{(0)} V_2^{(0)*}}$$

gegeben, wobei $V_j^{(0)} \in \mathbb{C}$ für $j \in \{1, 2\}$.

Eine weitere Möglichkeit ist gegeben, wenn $|V_1^{(0)}| = |V_2^{(0)}| = |V^{(0)}|$ und $\varphi_2 = \varphi_1 \pm \pi/2$. In diesem Fall haben wir

$$\underline{V} = |V^{(0)}| \left(\cos(k \cdot \underline{x} + \varphi_1), \sin(k \cdot \underline{x} + \varphi_1), 0 \right)^T.$$

Die Schwingungsrichtung ist nicht länger unabhängig von der Phase, vielmehr beschreibt $\underline{V} = (V_1, V_2, 0)^T$ eine Kreisspirale mit Achse \underline{k} und Ganghöhe 2 , die für $\Delta\varphi = \pm\pi/2$ als Rechts-spirale durchlaufen wird. Bei fixiertem \underline{x} durchläuft sie mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\omega = c k^0$ einen Kreis mit Radius $|V^{(0)}|$. Entsprechend sprechen wir von $\begin{matrix} \text{rechts} \\ \text{links} \end{matrix}$ -zirkular polarisierten Wellen.

Aufgabe: Zeigen Sie: Ist eine transversale Welle weder linear noch
zirkular polarisiert, so ist sie elliptisch polarisiert.

(14) Quellenfreie elektromagnetische Wellen

Aus der Maxwell-Wirkung und den Definiti ausgleichungen
für E - und B -Feld folgen die sogenannten Maxwell-Gleichungen

$$\operatorname{div} \underline{E} = \varrho, \quad -\dot{\underline{E}} + \operatorname{rot} \underline{B} = \underline{J}$$

$$\operatorname{div} \underline{B} = 0, \quad \dot{\underline{B}} + \operatorname{rot} \underline{E} = \underline{0}.$$

Quellenfrei bezieht sich auf die Abwesenheit von elektrischen Ladungen, also $\varrho = 0$ und $\underline{J} = \underline{0}$.

Da die Maxwell-Gleichungen linear sind, werden der Real- und der Imaginärteil komplexer Lösungen in ihnen nicht gewischt.

Finden wir also, daß bereits die komplexen Wellen Lösungen dieser Gleichungen sind, so können wir durchgegängig mit ihnen rechnen und der Übergang zum Reellteil erst am Endergebnis vorgenommen.

Noch wissen wir aber nicht, ob elektromagnetische Wellen
faktisch die Maxwell-Gleichungen lösen.

Das Vorgehensweise erkennt evident:

123

- (1) Wir untersuchen, ob die kovarianten Bewegungsgleichungen für Ap. Wellenlösungen haben. Dies wird im Moment noch dadurch erschwert, daß wir die in dieser Gleichungen vorkommende eindimensionale Radialheit noch nicht fixiert haben.
- (2) Wir leiten Differentialgleichungen zweiter Ordnung in der Zeit für E, B her und untersuchen deren Lösungstypen.
- (3) Wir setzen auf den Wellengleichungen an und prüfen die Richtigkeit dieses Auskuges mit den quellenfreien Maxwell-Gleichungen.

Aufgabe: Arbeiten Sie alle Strategien & detaill aus.

Wir verfolgen (3), also

$$E(x) = \underline{E}^a e^{ik \cdot x}, \quad B(x) = \underline{B}^a e^{ik \cdot x}.$$

Wir finden

124

$$\operatorname{div} \underline{E} = 0 \rightsquigarrow i \langle \underline{k}, \underline{E} \rangle = 0 \quad (1)$$

$$-\dot{\underline{E}} + \operatorname{rot} \underline{B} = 0 \rightsquigarrow i(\kappa_0 \underline{E} + \underline{k} \times \underline{B}) = 0 \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \underline{B} = 0 \rightsquigarrow i \langle \underline{k}, \underline{B} \rangle = 0 \quad (3)$$

$$\dot{\underline{B}} + \operatorname{rot} \underline{E} = 0 \rightsquigarrow -i(\kappa_0 \underline{B} - \underline{k} \times \underline{E}) = 0 \quad (4)$$

Aus (1) & (3) folgt, daß die ebenen Wellen freivonwell sein müssen, um die Maxwell-Gleichungen zu erfüllen.

Die Gleichungen (2) und (4) multiplizieren wir vektoriell (folkloristisch für Kreuzprodukt) mit \underline{k} und ziehen sie dann ineinander ein. Wir erhalten

$$\left. \begin{aligned} \underline{k} \times (\underline{k} \times \underline{B}) &= -\kappa_0 \underline{k} \times \underline{E} = -(\kappa_0)^2 \underline{B} \\ \underline{k} \times (\underline{k} \times \underline{E}) &= -(\kappa_0)^2 \underline{E} \end{aligned} \right\} \rightsquigarrow \left. \begin{aligned} (-\kappa_0^2 + |\underline{k}|^2) \underline{B} &= 0 \\ (-\kappa_0^2 + |\underline{k}|^2) \underline{E} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Somit: Transversale ebene Wellen lösen die Maxwell-Gleichungen¹²⁵ genau dann, wenn

$$k_0 = \pm |\underline{k}|$$

gilt. Dies ist aber genau der in den vorher Abschritten geforderte Zusammenschluß.

Interessant ist hierbei, daß elektrovernetische Wellen, erneut angeregt, sich im Vakuum ungehemmt ausbreiten.

Das ist aber noch nicht die gesuchte Information, die in den quellfreien Maxwell-Gleichungen steht. Aus der Definitionsgleichung (4) folgt ja direkt, daß

$$\underline{B} = \frac{1}{k_0} \underline{k} \times \underline{E}. \quad (*)$$

Also steht \underline{B} nicht nur auf \underline{k} senkrecht, sondern auch auf \underline{E} . Und zwar gilt diese Aussage für den Real- als auch den Imaginärteil der komplexen Wellenlösung getrennt.

\underline{E} folgt unmittelbar,

$$|B| = \frac{1}{|k_0|} |\underline{k}| |\underline{E}| \sin \varphi(\underline{k}, \underline{E})$$

$$= \frac{|\underline{k}|}{|k_0|} |\underline{E}| \rightsquigarrow \frac{|B|}{|\underline{E}|} = \frac{|\underline{k}|}{|k_0|}.$$

Insofern impliziert (*), daß der Polarisationszustand von E -und B -Feld der gleiche ist.

126

(15) Die allgemeine Lösung der homogenen Wellengleichung

Wie Sie bereits wissen, erhält die Fourier-Transformation die Darstellung jeder (transformierbaren) Funktion $f(x)$ durch kontinuierliche Überlagerung von periodischen Funktionen der Wellenlänge $\lambda = 2\pi/|k|$.

Gleiches gilt

$$f(x) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^2} e^{ik \cdot x} \tilde{f}(k),$$

dab jede Fourier-transformierbare Funktion durch eine kontinuierliche Überlagerung von ebenen Wellen erzeugt werden kann, wobei $k_\mu \in (-\infty, +\infty)$ für $\mu \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Wir stellen nun den Zusammenhang zu Lösungen der homogenen Wellengleichung her. Um eine Lösung der homogenen Wellengleichung zu bekommen, dürfen wir nur solche ebenen Wellen überlagern, die selbst Lösungen sind, für die also $|k_0| = |k|$ gilt.

Folglich muss für die Fourier-Amplitude folgendes gelten:

$$\tilde{f}(\underline{k}) = \tilde{f}_{(-)}(\underline{k}) \delta^{(2)}(\underline{k}_0 + |\underline{k}|) + \tilde{f}_{(+)}(\underline{k}) \delta^{(2)}(\underline{k}_0 - |\underline{k}|),$$

Wobei $\tilde{f}_{(\mp)}$ auswärts frei wählbar sind. Somit,

$$f(x^0, \underline{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^2} \left\{ \tilde{f}_{(-)}(\underline{k}) e^{i(\langle \underline{k}, \underline{x} \rangle + |\underline{k}|x^0)} + \right. \\ \left. \tilde{f}_{(+)}(\underline{k}) e^{i(\langle \underline{k}, \underline{x} \rangle - |\underline{k}|x^0)} \right\}.$$

Dies ist die allgemeine Lösung der homogenen Wellengleichung.
Speziell für eine Raumdimension besteht diese genau aus aller (transfierierbaren) Funktionen der Gestalt

$$f(x^0, x^1) = f^{(+)}(x^1 - x^0) + f^{(-)}(x^1 + x^0),$$

in denen wir unsere Wellenzüge wiederentdecken.

Aufgabe: Zeigen Sie, daß dieses Resultat immer in Ausbreitungsrichtung gilt. \square

Wir hätten auch so vorgehen können:

$$\square f(x) = 0 \rightsquigarrow \square \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^2} e^{ik \cdot x} \tilde{f}(k) = 0 \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^2} e^{ik \cdot x} i^2 \eta(k, k) \tilde{f}(k) = 0 \quad \text{Aufgabe!}$$

$$\rightsquigarrow \eta(k, k) \tilde{f}(k) = 0.$$

D.h. $\tilde{f}(k)$ muß überall verschwinden mit Ausnahme der Nullstellen von $\eta(k, k)$. Auf dieser Nullstellenmenge kann $\tilde{f}(k)$ aber nicht identisch verschwinden, dann wäre ja $\tilde{f} \equiv 0$ und f wäre die triviale Lösung.

Dies impliziert wiederum (zeigen Sie dies), daß

$$\tilde{f}(k) = \tilde{f}_{(-)}(k) \delta^{(x)}(k + |k|) + \tilde{f}_{(+)}(k) \delta^{(x)}(k - |k|),$$

also unser altes Resultat.

Wie lassen sich diese Resultate nun auf die quellenfreien Maxwell-Gleichungen übertragen. Nicht direkt, da die Beaugesgleichungen sind ja von der Form

$$\square A_\mu - \partial_\mu (\mathcal{D} \cdot A) = 0.$$

Wir Fourier-transformieren in gewohnter Weise und erhalten als Bestimmungsgleichung für die Fourier-Amplituden, bzw. deren Koeffizienten:

$$\{ \eta(k, k) \eta_\mu^2 - k_\mu k^\lambda \} \tilde{A}_\lambda(k) = 0.$$

Für $\eta(k, k) \neq 0$, muß folgendes gelten:

$$P_{\mu}^{(1)}{}^\lambda(k) \tilde{A}_\lambda(k) = 0, \text{ wobei}$$

$$P_{\mu}^{(1)}{}^\lambda(k) \stackrel{\text{df}}{=} \eta_\mu^2 - \frac{k_\mu k^\lambda}{\eta(k, k)}.$$

Im Kern des Projektionsoptors $P^{(1)}$ liegen die sogenannten longitudinalen Fourier-Amplituden, im Bild die transversalen Anteile. Die Neuausgebung ist folgenden Verstand geschuldet:

$$P_{\mu}^{(1)}{}^\lambda \tilde{A}_\lambda(k) = 0 \Leftrightarrow \tilde{A}_\lambda(k) \sim k_\lambda.$$

Für $\eta(k, k) = 0$ finden wir (und $k \neq 0$)

$$k^\lambda \tilde{A}_\lambda(k) = 0.$$

Die Analyse dieser Gleichung ist ein wenig komplizierter.

Zunächst einmal ist $\tilde{A} \sim k$ wieder eine Lösung, allerdings die triviale, da $\eta(A, A) = 0$. Eine interessante Lösung ist

$$\tilde{A}_\mu(k) = P_\mu^\lambda \tilde{a}_\lambda(k) \eta(k, k) \tilde{a}_\lambda(k).$$

Aufgabe: Welche Forderungen stellen Sie an $\tilde{a}(k)$?

für $\eta(k, k) \neq 0$ finden wir also longitudinalen Fourier-Ampelstude, während für $\eta(k, k) = 0$ ausschließlich transversale Vorfälle. Die Frage ist nun, ob sowohl longitudinal als auch transversale Kavie-Ampelstude physikalisch relevant sind. Tatsächlich gilt ja für die longitudinalen Fourier-Ampelstude

$$\eta(k, \tilde{A}(k)) \neq 0 \quad \text{für } \eta(k, k) \neq 0.$$

Nun ist aber die algebraische Gestaltungsgleichung für $\tilde{A}(k)$ invariant unter der Ersatzung

$$\tilde{A}(k) \rightarrow \tilde{A}(k) + k \tilde{X}(k) =: \tilde{A}'(k).$$

Dies ist der algebraische Ausdruck für die Reduktion, die sich aus dem Ladungserhaltung ergibt.

Wir finden

$$\eta(k, \tilde{A}(k)) = \underbrace{\eta(k, A(k))}_{\neq 0} + \eta(k, k) \tilde{X}(k)$$

Da $\tilde{X}(k)$ beliebig ist (bis auf die üblichen Qualifikationen), können wir aussetzen die folgende Wahl treffen:

$$\tilde{X}(k) = -\frac{1}{\eta(k, k)} \eta(k, A(k)), \quad \eta(k, k) \neq 0$$

und erreichen so immer, daß

$$\eta(k, \tilde{A}(k)) = 0$$

gilt. ① Die Reduktion lässt sich also daran fixieren, daß die longitudinalen Norma-Amphtuden abgenommen werden müssen. Sie stellen keine physikalischen Freiheitsgrade dar, können also keine Physik tragen.

Die Forderung $\eta(k, A(k)) = 0$

kann zwit für alle Norma-Amphtuden gestellt werden.

Die dynamischen Freiheitsgrade der Maxwell-Theorie sind also transversale Polarisatoren.

Mit dieser Forderung wird die algebraische Bestimmungsgleichung¹³²

$$\left. \begin{array}{l} \eta(k, k) \tilde{A}(k) = 0 \\ \eta(k, \tilde{A}(k)) = 0 \end{array} \right\}$$

Die inverse Faria-Transformation liefert als Bewegungsgleichung für die transversale Polarisatoren

$$\left. \begin{array}{l} \square A(x) = 0 \\ \partial \cdot A(x) = 0 \end{array} \right\}$$

Die zweite Gleichung ist eine Restktion, keine dynamische Gleichung. Diese Restktion heißt Lorentz-Eichung, $A(x)$ wird Eichpotential oder Eichfeld genannt.

Die Lorentz-Eichung erlaubt offenbar, eine Komponente von $A(x)$ zu eliminieren und durch die anderen aufzudrücken.

Wir fragen nun, ob die Lorentz-Eichung alle Redundanz in der Beschreibung fixiert, die wir aus den Günter einer manifest Lorentz-kovarianten Formulierung erwartet haben?

Die in Frage kommenden Transformationen von $A(x)$ müssen 133
 konsistent mit der geforderten Quellenerhaltung sein, dann diese
 verursacht ja physikalisch die Redundanz. Daher kommen lediglich
 Transformationen der Form

$$A \rightarrow A + d\chi'$$

in Frage. Die Funktion χ' muss gehorcht der hängenden
 Wellengleichung, $\square \chi'(x) = 0$. Welche Auflagebedingungen
 wünschen wir? $\chi(t_0, x)$ sei Lösung von

$$\Delta \chi(t_0, x) = - \operatorname{div} \underline{A}(t_0, x)$$

und für die erste Zeitableitung seien wir

$$\dot{\chi}'(t_0, x) = - A_0(t_0, x). \quad (c=1)$$

Die durch $f \stackrel{\text{def}}{=} A_0 + \dot{\chi}'$ definierte Funktion
 gehorcht

$$\square f(x) = 0.$$

Die Auflagebedingungen sind

$$f = 0$$

$$\dot{f} = \dot{A}_0(t_0, x) + \ddot{\chi}'(t_0, x) = 0,$$

dann $\dot{A}_0 = \operatorname{div} \underline{A}$ (Lorentz-Eichung) und \dot{x}' gehorcht der homogenen Wellengleichung mit Aufgrundwert $\Delta \dot{x}' = -\operatorname{div} \underline{A}$.

Die eindeutige Lösung der homogenen Wellengleichung für f mit den gegebenen Auflösungsbedingungen ist

$$f(x') = 0 \rightsquigarrow \dot{x}' = -A_0 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Daher erlaubt die Transformation $A \rightarrow A + d\underline{x}'$ die Komponente A_0 zu eliminieren. Diese nachfolgende Eichung (setzt die Lorentz-Eichung voraus) heißt auch eingeschränkte Eichung. Die Wahl $A_0 = 0$ wird Pauli-Eichung genannt. Damit ist gesuchte Redundanz eliminiert und wir verbleiben mit zwei dyonischen Freiheitsgraden in der quellenfreien Theorie!

Aufgabe: Beweisen Sie die letzte Aussage!]

Aufgabe: Führen Sie die Argumentation zu Maxwells-Gleichungen durch.

Referat: Eichungen]

(II) Absorption & Emission

Wir beginnen mit einer heuristischen Vorüberlegung aufgrund von

$$\square \Phi(x) = P(x), \quad x = (x^o, x).$$

Wir können diese Gleichung so lesen: Φ hängt funktional von der Quelle ab, also

$$\Phi[\rho] = f(x).$$

Wegen des Superpositionsprinzips handelt es sich in der Tat um ein lineares Funktional,

$$\Phi[\rho_1 + \rho_2] = \Phi[\rho_1] + \Phi[\rho_2].$$

Wir machen daher den folgenden Ausatz:

$$\Phi[\rho](x) = \int_{M^4} d^4y \, G(x, y) \rho(y)$$

mit einem unbekannten bilokalen Objekt G , dessen mathematische Qualifikationen noch im Dunkeln liegen.

Einsetzen in die Bewegungsgleichung liefert

136

$$\begin{aligned}\square_x \Phi[\varrho](x) &= \square_x \int_{M^4} d^4y G(x,y) \varrho(y) = \\ &= \underbrace{\int_{M^4} d^4y \varrho(y)}_{\sim} \square_x G(x,y) \stackrel{!}{=} \\ &= \varrho(x) \\ &= \underbrace{\int_{M^4} d^4y \varrho(y)}_{\sim} \delta^{(4)}(x-y) \xrightarrow{\text{bel. Quelle}}\end{aligned}$$

$$\rightarrow \square_x G(x,y) = \delta^{(4)}(x-y)$$

Die Raumzeit-Homogenität von M^4 erlaubt folgende Notation:

$$\boxed{\square_x G(x-y) = \delta^{(4)}(x-y)}$$

Es handelt sich bei G nun um eine Distribution, die durch obige Gleichung bestimmt wird. Die Distribution $\square G$ ist ein alter Bekannter, nämlich das Dirac-Maß.

In der Physik schreiben wir fast

$$\Phi(x) = \int_{M^4} d^4y G(x-y) \rho(y)$$

für die Lösung der inhärenten Wellengleichung.

Vorsicht: Diese Beschreibung bedeutet $\Phi[0](x) = 0$. Dabei handelt es sich doch gerade um die Lösungen der geladenen Theorie! Im Moment sollten wir also den folgenden Ausdruck vorbereiten:

$$\Phi[\epsilon](x) = \Phi[0](x) + \int_{M^4} d^4y G(x-y) \rho(y),$$

wobei

$$\square \Phi[0](x) = 0 \quad \text{gilt.}$$

Andererseits müssen Wellenfunktionen an irgendeinem Raumzeitpunkt von einer Quelle generiert worden sein. Lassen Sie uns im Moment vereinfachend annehmen, daß $\rho(x)$ die einzige Quelle in M_4 ist (insbesondere zu allen Zeiten). Dann wäre es physikalisch konsistent, in diesem Fall $\Phi[0] = 0$ zu setzen. Eine

mathematische Begründung hierfür überlegen wir uns später. 138

Wie interpretieren wir nun die Distribution $G(x-y)$?

Zunächst einmal haben wir zwei Raumzeitpunkte $x, y \in M^4$.

An Raumzeitpunkt x fragen wir das Wert des Feldes Φ ab.

Dies ist noch kein physikalischer Maßprozess. Dieser wird ja in der Wirkung durch die Vertexdichte

$$\rho_a(x) \Phi(x) = \int_{M^4} d^4y \rho_a^1(x) G(x-y) \rho_e(y)$$

bestimmt. Hierbei bezeichnet ρ_a^1 die zu einem Absorber gehörige Queldichte (Ladungsdichte) und ρ_e die zu einer Quelle gehörende. Nun hatten wir aber angenommen, daß nur eine Quelle ρ in M^4 existiert. Außerdem ist die Quellen - ankopplung minimal. Daha schreiben wir

$$\rho = \rho_a + \rho_e .$$

für die Vertexdichte finden wir somit

$$\rho(x) \Phi(x) = \int_{M^4} d^4y \rho(x) G(x-y) \rho(y) .$$

Der Einfachheitshalber nehmen wir an, daß Emitter (Quelle) und Absorber (Senke) im Hauptschlitz getrennt sind in M_1 , sagen wir

$$\text{Supp } \rho_e = [z_e - \varepsilon_e, z_e + \varepsilon_e],$$

$$\text{Supp } \rho_a = [z_a - \varepsilon_a, z_a + \varepsilon_a],$$

mit $\text{Supp } \rho_e \cap \text{Supp } \rho_a = \{\emptyset\}$, wobei wir aus ρ_e und ρ_a hinreichend gut von z_e und z_a lokalisiert denken.

Nun versucht es sinnvoll zu fordern, daß ein Absorber (Detektor) ausschließlich dann ein Signal registriert, wenn dieses zuvor emittiert wurde. Diese Forderung nach Kausalität sagt nun, daß die Kombination

$$\rho_a(x) G(x-y) \rho_e(y) \quad (*)$$

nur dann von Null verschieden sein sollte, wenn $x_0 > y_0$.

Diese Einschränkung kann aber weder in ρ_a noch in ρ_e kodiert sein, da diese lokale Kombinationen sind. Das einzige bilokale Objekt ist die Distribution $G(x-y)$.

Damit (*) sinnvoll ist, muß also gelten, daß

$$G(x-y) = \Theta(x^0 - y^0) G^>(x-y) + f(x-y).$$

Hierfür ist die Distribution

$$\Theta(x^0) \stackrel{\text{df}}{=} \begin{cases} 1 & \text{für } x^0 > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und f bedeute eine Distribution, für die (*) verschwindet.
Folgendes liegt nahe:

$$f(x-y) = \Theta(y^0 - x^0) G^<(x-y).$$

Die Distribution

$$G^{\text{ret}}(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \Theta(x^0 - y^0) G^>(x-y)$$

heißt retardierte Green-Funktion, die Distribution

$$G^{\text{adv}}(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \Theta(y^0 - x^0) G^<(x-y)$$

heißt avancierte Green-Funktion.

Effektiv haben wir dann für (*)

$$\rho_e(x) G^{\text{ret}}(x,y) \rho_e(y).$$

Nun gibt es aber auch die Konvolution

$$\rho_e(x) G(x-y) \rho_e(y).$$

Die macht offenbar nur Sinn für $x^0 < y^0$, daher haben wir

$$\rho_e(x) G^{\text{av}}(x,y) \rho_e(y).$$

Schließlich verlangt die Lorentz-Konvention der Wirkung
die ~~die~~ Vertexdichte über M^4 aufzaintegrieren:

$$\int_{M^4} d^4x \rho(x) \bar{\Phi}(x) = \int_{M^4} d^4x \int_{M^4} d^4y \rho(x) G(x-y) \rho(y).$$

Wir schau, die Unterscheidung in Emitter und Absorber
macht keinen Sinn. In beiden Fällen wird von Quelle
gesprochen. Olige Überlegungen liefern uns aber eine Interpretation
der Distributions $G(x-y)$.

142

Nur die Distribution G hängt von Raumzeit-Abstand zwischen Emittor und Absorber ab. Folglich beschreibt G , wie sich die Information, daß ein Emittor am Raumzeit-Punkt $y \in M^4$ sitzt, zum Absorber hin am Raumzeit-Punkt $x \in M^4$ ausbreitet (oder umgekehrt). Dieser Informationsausbreitung entspricht aber gerade die Ausbreitung des emittierten Feldes selbst.

Damit ist die esentielle Felddynamik in G kodiert. Distributionen, die die raumzeitliche Ausbreitung von Feldern zwischen Emissions- und Absorptionsereignis beschreiben sind von grundlegender Bedeutung für das Verständnis von Wechselwirkungen in der Natur!

Wir beginnen unsere heristische Betrachtungswelt mit folgender Annahme: Offensichtlich gilt

$$[G] = E^2.$$

Weiterhin wissen wir, daß sich ein wechselndes Feld ausschließlich auf dem Lichtkegel ausbreitet.

Dies und weitere bisherige heristischen Betrachtungen legen 143
nahe, daß

$$G^<(x-y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{x_0} S^{(a)}((x-y)^2) .$$

Wir haben somit

$$G(x-y) = \underbrace{\Theta(x^0-y^0) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{x_0} S^{(a)}((x-y)^2)}_{G^{\text{ret}}(x,y)} + \underbrace{\Theta(y^0-x^0) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{y_0} S^{(a)}((x-y)^2)}_{G^{\text{adv}}(x,y)}$$

Aufgabe: Zeigen Sie, daß die Zerlegung von G in retardierte und avancierte Anteile von Beugungsspektren unabhängig ist. Dies ist nicht selbstverständlich, da die Stufenfunktion die Zeitkoordinate aufweist.

Zum Schluß extrahieren wir noch eine wichtige Abschätzregel. Wir betrachten

$$S^{(a)}(\eta(z,z)) = S^{(a)}\left((z^0)^2 - \underbrace{\langle z, z \rangle}_{\equiv r^2}\right) = S^{(a)}((z^0)^2 - r^2)$$

Das Argument der S-Distribution verschwindet für

$$z^o = \pm r.$$

Aus dem Transformationsverhältnis für diese Distribution folgt

$$\delta^{(c)}(\eta(z,z)) = \frac{1}{2r} \left\{ \delta^{(c)}(z^o - r) + \delta^{(c)}(z^o + r) \right\}$$

Aufgabe: Zeigen Sie dies. □

Als Ergebnis zweier heuristischer Überlegungen weiter

Wir:

$$\boxed{G(x-y) = \Theta(x^o - y^o) \frac{1}{4\pi |x-y|} \delta^{(c)}(x^o - y^o - |x-y|) + \\ + \Theta(y^o - x^o) \frac{1}{4\pi |x-y|} \delta^{(c)}(y^o - x^o - |x-y|)}$$

Aufgabe: Interpretieren Sie dieses Skalierungsverhalten. □

Wir werden nun aus der inhomogenen Wellengleichung

$$\square A^\mu(x) = -j^\mu(x), \quad \partial_\lambda A^\lambda(x) = 0$$

für die Potentiale (Φ, A) unter Lorentz-Eichung zu.

Wir nehmen vereinfachend an, daß J die einzige Straudichte in M^4 ist. Wie oben argumentieren wir, daß $A = f[J]$ ein lineares Funktional der Straudichte ist. Dies motiviert folgenden Ansatz:

$$A^\mu[J](x) = \int_{M^4} d^4y G_{,\lambda}^\mu(x,y) J^\lambda(y).$$

Einsetzen in die inhomogene Wellengleichung unter Lorentz-Eichung liefert

$$\square_x G_{,\lambda}^\mu(x,y) = -\eta_{,\lambda}^\mu S^{(4)}(x-y), \quad \partial_\mu G_{,\lambda}^\mu(x,y) = 0.$$

Es ist klar, daß $G_{,\lambda}^\mu \sim \eta_{,\lambda}^\mu + \dots$; dann die Komponenten von A müssen ja nicht in der Bewegungsgleichung.

Nun können wir aber prinzipiell zu η einen Operator addieren, der \mathcal{J} in seinem algebraischen Kern hat. Wir verallgemeinern:

$$\square_x G_{\lambda}^{\mu}(x, y) = -P_{\lambda}^{\mu} \delta^{(4)}(x-y), \quad \partial_{\mu} G_{\lambda}^{\mu}(x, y) = 0.$$

In Fourier-Raum bedeutet dies

$$-\eta(k, k) \tilde{G}_{\lambda}^{\mu}(k) = -\tilde{P}_{\lambda}^{\mu}(k), \quad k_{\mu} \tilde{G}_{\lambda}^{\mu}(k) = 0$$

$$\leadsto \tilde{G}_{\lambda}^{\mu}(k) = \frac{\tilde{P}_{\lambda}^{\mu}(k)}{\eta(k, k)}, \quad k_{\mu} \tilde{P}_{\lambda}^{\mu}(k) = 0$$

Damit handelt es sich $\tilde{P}(k)$ um die Fourier-Darstellung des strukturellen Projektors,

$$\tilde{P}_{\lambda}^{\mu}(k) = \eta_{\lambda}^{\mu} - \frac{k^{\mu} k_{\lambda}}{\eta(k, k)}.$$

Als Zwischenresultat halten wir fest:

$$\tilde{G}_{\lambda}^{\mu}(k) = \frac{\eta_{\lambda}^{\mu} - \frac{k^{\mu} k_{\lambda}}{\eta(k, k)}}{\eta(k, k)}.$$

Wir sehen dies im zweiten Ausdruck an:

$$A^k[\vec{J}](x) = \int_{M^4} d^4y G^k_\lambda(x, y) J^\lambda(y) =$$

$$= \int_{M^4} d^4y \int_{\frac{d^4q}{(2\pi)^4}} e^{iq \cdot (x-y)} \tilde{G}_\lambda^k(q) \int_{\frac{d^4k}{(2\pi)^4}} e^{ik \cdot y} \tilde{J}^\lambda(k) =$$

$$= \int_{\frac{d^4q}{(2\pi)^4}} e^{iq \cdot x} \tilde{G}_\lambda^k(q) \int_{\frac{d^4k}{(2\pi)^4}} \tilde{J}^\lambda(k) \underbrace{\int_{M^4} d^4y e^{i(k-q) \cdot y}}_{(2\pi)^4 \delta^{(4)}(k-q)} =$$

$$= \int_{\frac{d^4q}{(2\pi)^4}} e^{iq \cdot x} \tilde{G}_\lambda^k(q) \tilde{J}^\lambda(q) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k-q)$$

$$= \int_{\frac{d^4q}{(2\pi)^4}} e^{iq \cdot x} \frac{\eta_\lambda^k - \frac{q \cdot k}{\eta(q, q)}}{\eta(q, q)} \tilde{J}^\lambda(q) \quad \eta(q, \tilde{J}(q)) = 0 \\ \equiv$$

$$= \int_{\frac{d^4q}{(2\pi)^4}} e^{iq \cdot x} \frac{\eta_\lambda^k}{\eta(q, q)} \tilde{J}^\lambda(q) =$$

$$= \int_{\frac{d^4q}{(2\pi)^4}} \frac{e^{iq \cdot x}}{\eta(q, q)} \int_{M^4} d^4y e^{-iq \cdot y} J^\lambda(y)$$

$$= \int_{M^4} d^4y J^\mu(y) \underbrace{\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{e^{iq \cdot (x-y)}}{m(q, q)}}$$

=: G(x-y)

$$= \int_{M^4} d^4y G(x-y) J^\mu(y)$$

Also finden wir

$$A^\mu[j](x) = \int_{M^4} d^4y G(x-y) J^\mu(y)$$

mit

$$\square_x G(x-y) = -\delta^{(4)}(x-y).$$

Unsere Macher während der heuristischen Betrachtung der inhomogenen Wellengleichung für ein Skalarfeld haben sich damit gelehrt.

Es bleibt unsere Heuristik ausführlich zu untersuchen.

Wir wissen bereits, daß

$$G(x) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{i \eta(k, x)} \tilde{G}(k), \quad \tilde{G}(k) = \frac{1}{\eta(k, k)}.$$

Die Fourier-Transformation war möglich, da die Fourier-
amplitude einer algebraischen Gleichung genügt, und damit
das Problem $\square G = -S$ kommt auf Integrieren reduziert
wurde. Es ist

$$\begin{aligned} G(x) &= - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i \langle k, x \rangle} \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{2\pi} \frac{e^{-ik_0 x^0}}{(k_0)^2 - |k|^2} = \\ &= - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i \langle k, x \rangle}}{2|k|} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{2\pi} e^{-ik_0 x^0} \left\{ \frac{1}{k_0 - |k|} - \frac{1}{k_0 + |k|} \right\}}_{=: I(|k|, x^0)} \end{aligned}$$

Der Integrand von $I(|k|, x^0)$ hat zwei einfache Pole auf
der reellen Achse bei $k_0 = \pm |k|$. Dies hat zur Folge, daß das
reelle Integral nicht mit funktionstheoretischen Mitteln sinn-
voll ein reeller Wert zugewiesen werden kann.

Die Idee ist zunächst, den Integrationsweg ~~in~~ ins
Komplexe zu verschieben, schiefwinklig $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R} + i\epsilon, \epsilon > 0$.

Dies kann aber äquivalent auch so interpretiert werden,
dass die Pole ins Komplexe verschoben werden, $\pm |k| \rightarrow$
 $\pm |k| + i\epsilon$ oder $\pm |k| \rightarrow \pm |k| - i\epsilon$. Es wird so immer er-
reicht, dass der Integrationsweg frei von Polen ist. Natürlich
müssen wir nach der Integration den Limes $\epsilon \rightarrow 0^+$ betrachten.

Die Berechnung des Integrals vereinfacht sich auf diese Weise.
Wann wir von Residuenkalkül Gebrauch machen können.
Wir hoffen also, einen Pfad γ' zu finden mit folgenden
Eigenschaften:

$$\begin{aligned} I^c(|k|, x_j^0; \epsilon) &= \lim_{K \rightarrow \infty} \int_{-K}^K \frac{dk_0}{2\pi} f(k_0; |k|, x_j^0; \epsilon) = \\ &= \lim_{K \rightarrow \infty} \left\{ \int_{-K}^0 f \Big|_{\gamma'_K} \right\} \frac{dk_0^c}{2\pi} f(k_0^c; |k|, x_j^0; \epsilon) = \\ &= \lim_{K \rightarrow \infty} \oint_{\gamma_K} \frac{dk_0^c}{2\pi} f(k_0^c; |k|, x_j^0; \epsilon), \quad \text{wobei} \end{aligned}$$

$$\gamma_K \stackrel{\text{df}}{=} [-K, K] \cup \gamma'_K \text{ geschlossen}$$

und

$$\oint_{\gamma'_K} \frac{dk_0^c}{2\pi} f(k_0^c; |k|, x_j^0; \epsilon) \xrightarrow{K \rightarrow \infty} 0.$$

Auf jeden Bezeichnet k_0^c die Komplexifizierung von k_0 .
 Aber wie wählen wir γ'_k ? Da der Weg γ_k nach Voraussetzung geschlossen sein soll, muß er bei $K \in \mathbb{R}^+$ in die komplexe Ebene einbiegen und dabei einer nicht verschwindenden Imaginärteil entwickeln. Einschränkend fordern wir weiter, daß der Realteil der Punkte entlang des Weges immer $\leq K \in \mathbb{R}^+$ sein soll. In einer geeigneten Umgebung von K berücksichtigen die Punkte des in $U(k)$ verlaufenden Wegstückes den folgenden Polardarstellung: Für $k_0^c \in \gamma'_k \cap U(k)$ gilt

$$k_0^c = A(k) e^{i\varphi},$$

wobei $A(k) \in \mathbb{R}^+$, $\varphi \in [0, \pi]$, $\mathbb{R} \ni \delta \ll 1$.

Dann ist $k_0^c = A(k) (1 + i\varphi) + O(\delta^2)$.

Daraus folgt

$$e^{-ik_0^c x^0} \approx e^{-iA(k)x^0} e^{+A(k)\varphi x^0}$$

Das Wegintegral entlang γ'_k verschwindet sicherlich, wenn für fixierten x^0 gilt: $e^{+A(k)\varphi x^0} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$.

Aus unserer lokalen Betrachtung lernen wir aber noch mehr.¹⁵²
 Für $x^0 < 0$ muß $q > 0$ gewählt werden, und für $x^0 > 0$ muß $q < 0$ gewählt werden, also

$$x^0 > 0 : \text{Pole bei } \pm |k| - i\epsilon$$

$$x^0 < 0 : \text{Pole bei } \pm |k| + i\epsilon$$

Entlang γ_K' wählen wir einfach $c\ell(\mathcal{Q}) = K$, so daß γ_K' einen großen Halbkreis mit Radius K in der unteren Halbebene für $x^0 > 0$ ist, und entsprechend für $x^0 < 0$.

Der Grenzübergang $\leftrightarrow 0^+$ gilt dann

$$\begin{aligned} I(|k|, x^0) &= \\ &= \Theta(x^0) \left\{ -\frac{2\pi i}{2\pi} (-2i) \sin(|k|x^0) \right\} + \\ &\quad + \Theta(-x^0) \left\{ +\frac{2\pi i}{2\pi} (-2i) \sin(|k|x^0) \right\} \end{aligned}$$

Einsetzen in $G(x)$ auf S. 149 liefert

$$G(x) = G^{\text{ret}}(x) + G^{\text{av}}(x),$$

$$G^{\text{ret}}(x) = +\Theta(x^0) \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i \langle k, x \rangle} \frac{\sin(|k|x^0)}{|k|}$$

$$G^{\text{av}}(x) = -\Theta(x^0) \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i \langle k, x \rangle} \frac{\sin(|k|x^0)}{|k|}$$

Nun ist

$$\langle k, x \rangle = |k| |x| \cos \underbrace{\varphi(k, x)}_{=: \theta}$$

Wir rechnen weiter:

$$\begin{aligned}
 G^{\text{ret}}(x) &= \Theta(x^0) \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty d|k| |k| \sin(|k|x^0) \int_{-1}^1 d\cos \theta e^{i|k||x| \cos \theta} \\
 &= \frac{\Theta(x^0)}{(2\pi)^2} \frac{2}{|x|} \int_0^\infty d|k| \sin(|k|x^0) \sin(|k||x|) \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{\Theta(x^0)}{|x|} \int_{-\infty}^\infty d|k| \sin(|k|x^0) \sin(|k||x|) \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{\Theta(x^0)}{|x|} \frac{2}{(2i)^2} \int_{-\infty}^\infty d|k| \left\{ e^{i|k|(x^0+|x|)} - e^{i|k|(x^0-|x|)} \right\} \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{\Theta(x^0)}{|x|} \frac{2}{(2i)^2} 2\pi \left\{ S^{(1)}(x^0+|x|) - S^{(1)}(x^0-|x|) \right\} \\
 &= \Theta(x^0) \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x|} S^{(1)}(x^0-|x|) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \Theta(x^0) S^{(1)}(\eta(x, x))
 \end{aligned}$$

Aufgabe: Berechnen Sie G^{ad}

6 Elektrare schwungen

① Zur Rechengren einer Ladung q ist

$$J(x) = \varrho(x) U(x),$$

wobei $U^k(x) = \eta_0^k$ und $\int_{\mathbb{R}^3} d^3x' \varrho(x', x) = q \quad \forall x' \in \mathbb{R}$.

Also ist $\varrho(x', x) = f(x')$. Die Ladung soll sich am Ort x befinden (für alle Zeiten). Diese Information muß in die Ladungsdichte implementiert werden:

$$\varrho(x; x_*),$$

wobei der $x_* \in \mathbb{R}^3$ beliebig aber fest gewählt ist.

Dann gilt aber für eine beliebige Umgebung von x_* , namely wir diese $U(x_*)$, daß

$$\int d^3x' \varrho(x'; x_*) = q.$$

$$U(x_*)$$

Wählen wir Kugeln $K(x_*, r)$ mit Mittelpunkt x_* und Radius r , dann gilt also

$$\int d^3x \rho(x; \underline{x}_*) = q \quad \forall r \in \mathbb{R}^+.$$

$\mathcal{K}(\underline{x}_*, r)$

Nun haben wir alle trivialen Bedingungen an die Ladungsdichte aufgelistet. Konkreteres verlangt nach Modellbildung, dass wir haben ja keine Theorie für die Ladungsträger.

Ein primitives Modell (angewandelter Geltungsbereich) ist, einzelne Ladungsträger mit Punktladen zu identifizieren. Für diese benötigen wir dann aber eine Dichte die meint, dass die Ladungsträger ausschließlich am Punkt \underline{x}_* lokalisiert ist und nirgends anders zu finden ist. Da Träger von ρ besteht also aus einer einzigen Punktladung, nennen wir \underline{x}_* .

Insgesamt soll gelten: $\rho(x; \underline{x}_*) = 0 \quad \forall x \neq \underline{x}_*$.

Dies legt folgendes nahe:

$$\rho(x; \underline{x}_*) = q \delta^{(3)}(x - \underline{x}_*)$$

Unser primitives Modell für einen Ladungsträger als Punktladen führt also zu einer Distribution als Ladungsdichte. Dies reflektiert unsere radikale Überidealisierung, die Aus sagen

über das Verhalten von Ladungsträgern wird, die vollständig unbegründet sind und auch nicht aus den physikalischen Gleichungen heraus gefüllt werden können.

Ladungen sind in der Maxwell-Theorie aber extreme Einheiten. Natürlich fällt nun Beachtung auf, daß der darin Modell zu Grunde liegende Lokalisierungsbegriff ohne Quantenmechanik gar nicht realisierbar ist.

Die Überidealisierung von Ladungsträgern als Punktteilchen hat eine eingeschränkte Gültigkeitsbereich, auf den wir noch zu sprechen haben.

Es ist aber auch verheerisch klar, daß Punktteilchen ein nur begrenzt tragfähiges Konzept darstellen. Deshalb wir schluß so: Wir analysieren das sogenannte universelle Kopplungsform (Absorptions-/Emissionsverlust) in der Wirkung,

$$S_{\text{ext}}[A] = \int_{M^4} d^4x \, A_2(x) J^2(x) =$$

$$= \int_{M^4} d^4x \int_{M^4} d^4y \, J^2(x) G(x-y) J_2(y)$$

In dem von uns betrachteten Fall gibt es eine Ladung am Ort \underline{x}_* und einen Beobachter in dem Rehersystem (der wir ohne Mühe in die Beschreibung einführen können, es also zunächst unterlassen). Daher ist

$$\begin{aligned} S_{\text{ext}}^{\text{SW}} &= -q^2 \int_R dx^0 dy^0 \int_{R^3} d^3x d^3y \delta^{(3)}(\underline{x}_* - \underline{x}) G(x, y) \delta^{(3)}(y - \underline{y}) \\ &= -\frac{q^2}{4\pi} \int_R dx^0 dy^0 \Theta(x^0 - y^0) \int_{R^3} d^3x d^3y \delta^{(3)}(\underline{x}_* - \underline{x}) \frac{\delta^{(3)}(x^0 - y^0 - |\underline{x} - \underline{y}|)}{|\underline{x} - \underline{y}|} \delta^{(3)}(y - \underline{y}) \\ &= -\frac{q^2}{4\pi} \int_R dx^0 \int_{R^3} d^3x \delta^{(3)}(\underline{x}_* - \underline{x}) |\underline{x} - \underline{x}_*|^{-1} \end{aligned}$$

Physikalisch macht diese Vorgehensweise natürlich auch keinen Sinn, da sie vorgibt, die Selbstwechselwirkung einer Ladungsträger Beschreiber zu kennen, obwohl diese ja extar sind und in der Maxwell-Theorie keine dynamischen Freiheitsgrade darstellen.

Diese Selbstwechselwirkungsträger könnten nur leicht oder weniger elegant behandelt werden in der klassischen Maxwell-

Da hierin aber keine Physik vorliegen liegt, die in der Anwendungsbereich der klassischen Maxwell-Theorie fiele, subtrahieren wir diese Beiträge einfach:

$$S_{\text{ext}}^{\dagger}[A] \rightarrow S_{\text{ext}}^{\dagger}[A] - S_{\text{ext}}^{\text{SW}}$$

Das bedeutet eine Modifikation der Maxwell-Wirkung, die keinen Einfluss auf die Maxwell-Gleichungen hat.

Welche Physik einer distributivartigen Ladungsdichte können wir erwartet nehmen? Für Abstände $r > r_0$, wobei r_0 die Längsschall'sche Grenze, außerhalb derer quantenmechanische Effekte nicht vernachlässigt werden dürfen, ergibt doch folgendes Sicer:

$$A^2(x) = \int_{M^4} d^4y G(x-y) J^2(y) =$$

$$= \int_{M^4} d^4y G(x-y) \eta^2 \rho(y) \sim$$

$$A(x) = (A^0(x), \underline{0})^T,$$

mit

$$\begin{aligned}
 A^0(x) &= \int_{M^4} d^4y \, G(x-y) \rho(y) = \\
 &= \frac{q}{4\pi} \int_{M^4} d^4y \, \Theta(x^0 - y^0) \frac{\delta^{(4)}(x^0 - y^0 - |\Delta|)}{|\Delta|} \rho(\Delta) \\
 &= \frac{q}{4\pi} \frac{1}{|\Delta|} \quad \underline{\text{Aufgabe: }} E = ?
 \end{aligned}$$

② Nun können Sie erweisen, daß mit einer einzigen Ladung als Quelle nicht viel Physik betrieben werden kann. Insbesondere besteht ein Meßprozeß immer aus deuterer zwei Ladungen - eine Quelle und eine Lade. Beide Ladungen seien relativ fiktiv in Ruhe. In deren Ruhesystemen gelte

$$J(x) = J_1(x) + J_2(x),$$

mit ($a \in \{1, 2\}$)

$$J_a(x) = P_a(x) U_a(x), \quad U_a^\mu(x) = \eta^\mu.$$

und $\int_{R^3} d^3x \, P_a(x^0, \Delta) = q_a \quad \forall x^0 \in \mathbb{R}.$

Hierbei ist eigentlich

$$\varrho_a = f_a(x; \underline{x}_a)$$

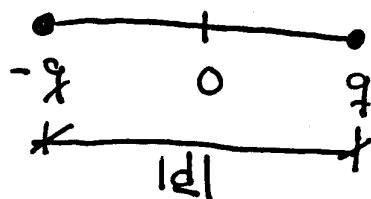
gewusst, wie oben. Wir finden dann

$$A^o(x) = \frac{q_1}{4\pi} \frac{1}{|x - \underline{x}_1|} + \frac{q_2}{4\pi} \frac{1}{|x - \underline{x}_2|}$$

aufgrund des Superpositionsprinzips.

Als Spezialfall studieren wir

$$q \equiv q_1, \quad q_2 = -q_1; \quad \underline{x}_1 = \frac{1}{2} \underline{d}, \quad \underline{x}_2 = -\underline{x}_1$$



für diese Ladungskonfiguration gilt

$$\begin{aligned} A^o(x) &= \frac{q}{4\pi} \left\{ \frac{1}{|x - \underline{d}/2|} - \frac{1}{|x + \underline{d}/2|} \right\} \\ &= q \left\{ G^{(0)}(x - \underline{d}/2) - G^{(0)}(x + \underline{d}/2) \right\} \end{aligned}$$

mit $G^{(0)} = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x|}$.

Formel ist

$$A^0(x) = -2q \left\{ \left(\frac{|\underline{d}|}{2}\right)^1 (\nabla_{\underline{d}} G^0)(x) + \frac{1}{3!} \left(\frac{|\underline{d}|}{2}\right)^3 (\nabla_{\underline{d}}^3 G^0)(x) + \dots \right\},$$

wobei $\hat{\underline{d}} \stackrel{\text{df.}}{=} \underline{d}/|\underline{d}|$ und $\nabla_{\underline{d}} \stackrel{\text{df.}}{=} \sum_{i=1}^3 \hat{d}_i \partial_i$.

Wir betrachten nun folgender Grenzwertprozess:

$$|\underline{d}| \rightarrow 0, q \rightarrow \infty : q|\underline{d}| = \text{const.}$$

In dieser Limes gilt

$$\begin{aligned} A^0(x) &= -q|\underline{d}| (\nabla_{\underline{d}} G^0)(x) \\ &= + \frac{q|\underline{d}|}{4\pi} \frac{\langle \hat{\underline{d}}, \underline{x} \rangle}{|\underline{x}|^3} \end{aligned}$$

wichtig $\sim |\underline{x}|^{-2}$

Wir nennen $P = q|\underline{d}| = \text{const}$ die Dipolstärke, die im Grenzwertprozess (fiktive) Ladungverteilung eines Punktdipol mit dem reellen Dipolfeld

$$A^0(x) = \frac{\langle P, \underline{x} \rangle}{4\pi |\underline{x}|^3} \sim |\underline{x}|^{-2}$$

Aufgabe: Berechnen Sie das zugehörige E-Feld.

Bauerkung: Per Konstruktion verschwindet für einen Punktdipol die Gesamtladung,

$$Q = \int_{R^3} d^3x \rho(x) = 0.$$

Wir kehren zurück auf Seite 159 unten und fragen, welche Wechselwirkungsenergie (potentielle Energie) diese Ladungsverteilung zugewiesen werden kann.

Wir reduzieren

$$\begin{aligned} S_{\text{ext}} &= \int_{M^4} d^4x_1 J_2(x_1) A^2(x_1) + \text{Subtraktionen} \\ &= \int_{M^4} d^4x_1 d^4y (\rho_1(x_1) + \rho_2(x_1)) G(x-y) (\rho_1(y) + \rho_2(y)) \\ &\quad + \text{Subtraktionen} \\ &= 2 \int_{M^4} d^4x_1 d^4y \rho_1(x_1) G(x-y) \rho_2(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{\text{ext}} &= \frac{2q_1 q_2}{4\pi} \int_{M^4} d^4x_1 d^4y \delta^{(3)}(\underline{x}_1 - \underline{x}_2) \Theta(x^0 - y^0) \frac{\delta^{(3)}(x^0 - y^0 - |\underline{x}_1 - \underline{x}_2|)}{|\underline{x}_1 - \underline{x}_2|} \delta^{(3)}(\underline{x} - \underline{x}_1) \\
 &= \frac{2q_1 q_2}{4\pi} \int_{R^3} dx^0 dy^0 \Theta(x^0 - y^0) \frac{\delta^{(3)}(x^0 - y^0 - |\underline{x}_1 - \underline{x}_2|)}{|\underline{x}_1 - \underline{x}_2|} \\
 &= \frac{2q_1 q_2}{4\pi} \frac{1}{|\underline{x}_1 - \underline{x}_2|} \int_{R^3} dx^0
 \end{aligned}$$

Im Analogie zur Mechanik definieren wir die (in diesem Fall zeitlich konstante) Wechselwirkungsenergie der betrachteten Ladungskonfiguration

$$V(x_1, x_2) \stackrel{\text{df.}}{=} -\frac{1}{2\pi} \frac{q_1 q_2}{|\underline{x}_1 - \underline{x}_2|}$$

für $|\underline{x}_1 - \underline{x}_2| > r_0$.

③ Häufig interessieren wir uns für das elektrostatische Potential einer auf einem Raumbereich \mathcal{B} konzentrierten Ladungsverteilung weit außerhalb von \mathcal{B} .

Sei $\underline{x}' \in \mathcal{B} \subset K(\theta, R)$, wobei $\theta \in \mathcal{B}$, und $\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus K(\theta, R)$, also $|\underline{x}| > R$. Dann gilt die Entwicklung

$$G^{(0)}(\underline{x} - \underline{x}') = (\exp\{-\nabla_{\underline{x}'}\} G^{(0)}) (\underline{x}) ,$$

wobei $\nabla_{\underline{x}'}^l$ die Richtungsableitung in Richtung \underline{x}'^l bezeichnet. Nun gilt aber

$$\begin{aligned} |\underline{x}'|^{2\ell+1} (\exp\{-\nabla_{\underline{x}'}\}_e G^{(0)}) (\underline{x}) &= \\ = |\underline{x}'|^{2\ell+1} (\exp\{-\nabla_{\underline{x}'}\}_e G^{(0)}) . (\underline{x}') , \end{aligned}$$

wobei $\exp\{-\nabla_{\underline{x}'}\}_e = \frac{(-1)^\ell}{\ell!} (\nabla_{\underline{x}'})^\ell$. Die Notation bedarf eriger Vorsicht, denn $(\nabla_{\underline{x}'})^\ell = x_1^{i_1} \dots x_\ell^{i_\ell} \partial_{i_1} \dots \partial_{i_\ell}$.
Somit

$$G^{(0)}(\underline{x} - \underline{x}') = \frac{|\underline{x}'|}{|\underline{x}|} \left(\exp\left\{-\nabla_{\frac{|\underline{x}'|^2}{|\underline{x}|^2} \underline{x}}\right\} G^{(0)} \right) (\underline{x}')$$

Damit wird eine konsistente Separation von Skalen erreicht:

$$A^{(6)}(\underline{x}) = \int_B dV' G^{(0)}(\underline{x}-\underline{x}') \rho(\underline{x}') = \\ = \frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \frac{1}{|\underline{x}|^{2l+1}} Q^{(l)}_{i_1 \dots i_l} x^{i_1} \dots x^{i_l}$$

mit

$$Q^{(l)}_{i_1 \dots i_l} \stackrel{df}{=} 4\pi (-1)^l \int_B dV' \rho(\underline{x}') |\underline{x}'|^{2l+1} (\partial_{i_1} \dots \partial_{i_l} G^{(0)})(\underline{x}')$$

Die Koeffizienten $Q^{(l)}_{i_1 \dots i_l}$ in dieser Entwicklung
heißen Multipolesmomente der Ladungsdistribution.

~~Multiplikatoren~~

Bezeichnungen:

$l=0$ $\hat{=}$ Monopolelement

$l=1$ $\hat{=}$ Dipolelement

$l=2$ $\hat{=}$ Quadripolelement

$l=3$ $\hat{=}$ Oktopolelement

:

Für das Monopolmoment erhalten wir den Ausdruck

$$Q^{(0)} = 4\pi \int_B dV' \rho(\underline{x}') |\underline{x}'| G^{(0)}(\underline{x}') = Q,$$

wobei Q die Gesamtladung der Ladungsverteilung bedeutet.

Sei A^0 Betrag eines Potentials, das sogenannte Monopol-Potential, ist

$$A^0|_{l=0}(\underline{x}) = \frac{Q}{4\pi} \frac{1}{|\underline{x}|} \sim |\underline{x}|^{-1}.$$

Für das Dipolmoment erhalten wir den Ausdruck

$$\underline{Q}^{(1)} = \int_B dV' \rho(\underline{x}') \underline{x}'.$$

Sein Betrag eines Potentials, das sogenannte Dipol-Potential, ist (siehe auch früher)

$$A^0|_{l=1}(\underline{x}) = \frac{1}{4\pi} \frac{\langle \underline{Q}^{(1)}, \underline{x} \rangle}{|\underline{x}|^3} \sim |\underline{x}|^{-2}.$$

Für das Quadropolmoment erhalten wir den Ausdruck

$$Q^{(2)} = \int_B dV' \rho(\underline{x}') (3\underline{x}' \otimes \underline{x}' - |\underline{x}'|^2 \delta).$$

Sein Beitrag zum Potential, das sogenannte Quadrupol-Potential,¹⁶⁹ ist

$$A^0|_{l=2}(x) = \frac{1}{8\pi} \frac{Q^{(2)}_{ab} x^a x^b}{|x|^5} \sim |x|^{-3}.$$

Allgemeine Multipol-Potentiale skizzieren mit dem Abstand wie folgt:

$$\begin{aligned} A^0|_e(x) &\sim |x|^{-(2l+1)} |x|^l \\ &= |x|^{-(l+1)} \end{aligned}$$

Die relative Wichtigkeit von aufeinander folgenden Multipolmomenten der Ladungverteilung zum Potential skaliert wie

$$\frac{A^0|_{l+1}(x)}{A^0|_l(x)} \sim \frac{|x|^{l+1}}{|x|^{l+2}} = \frac{1}{|x|} \leq \frac{1}{R}.$$

Nähern wir uns mit einem Detektor einer gleichmäßigen Ladungverteilung aus großer Entfernung ($|x| \gg R$), so „beobachten“ wir bei entsprechender Auflösung

Zunächst sei von da Gesamtladung $Q^0 = Q$ erzeugtes $|x|^{-1}$ -Potential. Die beliebige Ladungsverteilung erscheint also zunächst als Punktladung. Nähern wir uns der Ladungsverteilung weiter an, so gewinnen wir sukzessive mehr Information über diese in Form von höheren Multipolmomenten.

Die spezielle Form der Multipol-Potentiale

$$A^0(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} A_{(\ell)}^0(x),$$

$$A_{(\ell)}^0(x) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\ell!} \frac{1}{|x|^{2\ell+1}} Q_{i_1 \dots i_\ell}^{(\ell)} x^{i_1} \dots x^{i_\ell}$$

legt nahe, auf Kugelkoordinaten zu transformieren. Wir finden

$$A_{(\ell)}^0(x) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\ell!} Q_{i_1 \dots i_\ell}^{(\ell)} \frac{P_{i_1 \dots i_\ell}^{(\ell)}(\theta, \varphi)}{|x|^{\ell+1}}$$

$$\sim |x|^{-(\ell+1)}$$

Dies kann dann nach Kugelflächenfunktionen entwickelt werden, siehe ausführliche Literatur. —

④ Wir bleiben in der Elektrostatik,

$$\Delta \Phi = -\rho,$$

wobei die Ladungsdichte einen kompakten Träger haben soll.

Dann ist

$$\Phi[\rho](x) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3y G^{(0)}(x-y) \rho(y) \quad (*)$$

mit $G^{(0)}(x) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x|}$ eine Lösung der Poisson-Gleichung.

Die Darstellungsfomule (*) hat den Nachteil, daß sie keine Lösungen der Poisson-Gleichung auf beschränkten Gebieten liefert, bei den wir Kontrolle über die Randwerte habe.

Diese Kontrolle gewinnen wir aber, wenn wir von Coulomb-Potential $G^{(0)}$ zu einer Green-Funktion G (es sollte keine Verwechslungen mit der zu \square gehörigen Green-Funktion auftreten) übergehen, die bestimmte Forderungen erfüllt,

$$\Phi(x) = \int_{\Omega} d^3y G^{(0)}(x-y) \Phi(y)$$

$$= \int_{\Omega} d^3y (-\Delta G(x,y)) \Phi(y),$$

wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein Gebiet bedeute. Partielle Integration impliziert

140

$$\begin{aligned}\bar{\Phi}(x) = & - \int_{\Omega} d^3y G(x,y) \Delta \bar{\Phi}(y) - \int_{\partial\Omega} d^2y (\nabla_n G(x,y)) \bar{\Phi}(y) + \\ & + \int_{\partial\Omega} d^2y G(x,y) \nabla_n \bar{\Phi}(y).\end{aligned}$$

Hierbei steht n löscher senkrecht auf dem Rand $\partial\Omega$. Die Idee ist nun folgende: falls $G(x,y)$ die Gleichung $-\Delta G = \rho(x)$ erfüllt und $G(x,y) = 0 \quad \forall y \in \partial\Omega$, so verschwindet das zweite Randintegral. Wir erwarten dann für Lösungen $\bar{\Phi}$ der Poisson-Gleichung $\Delta \bar{\Phi} = -\rho$ mit $\bar{\Phi}|_{\partial\Omega} = \varphi$ die Darstellungsformel

$$\bar{\Phi}(x) = \int_{\Omega} d^3y G(x,y) \rho(y) - \int_{\partial\Omega} d^2y (\nabla_n G)(x,y) \varphi(y)$$

für jeden Raumpunkt $x \in \Omega$. Der Beweis dieser wichtigen Darstellungsformel ist leicht insb. viert, da $\nabla_n G$ ja keine Funktion, sondern eine Distribution ist.

Wir kommen nun zur Konstruktion von G aus dem Poisson-Potential. Bei den bisherigen "Rechnungen" haben wir lediglich gezeigt, daß $\Delta G = -\delta$ gelten soll. Daraus können wir also auch

$$G(\underline{x}, \underline{y}) = G^{(0)}(\underline{x} - \underline{y}) + F(\underline{x}, \underline{y})$$

sezetzen, wenn $F(\underline{x}, \cdot) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit $\Delta F = 0$ ist. Wir wählen dabei die Randbedingungen an $F(\underline{x}, \cdot)$ so, daß $G(\underline{x}, \underline{y}) = 0 \quad \forall \underline{x} \in \Omega \text{ und } \underline{y} \in \partial\Omega$. Mit einer solchen Funktion F und $G = G^{(0)} + F$ erhalten wir obige Darstellungsfomel. Genauer:

für jedes $\underline{x} \in \Omega$ sei die Funktion $F(\underline{x}, \cdot) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung von

$$\Delta F(\underline{x}, \cdot) = 0 \quad \text{in } \Omega$$

$$F(\underline{x}, \cdot) = -G^{(0)}(\underline{x} - \cdot) \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Dann heißt die Funktion $G(\underline{x}, \underline{y}) = G^{(0)}(\underline{x} - \underline{y}) + F(\underline{x}, \underline{y})$ die Green-Funktion des Dirichlet-Problems auf Ω .

Wir fassen unsere heristischen Betrachtungen zum Dirichlet-¹⁷²
Problem zusammen:

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ offen und beschränkt. Dann gibt es eine Green-Funktion G zum Dirichlet-Problem wie oben. Unter gewissen hier nicht spezifizierten Regularitätsbedingungen sei Φ eine Lösung von

$$\Delta \Phi = +f \text{ in } \Omega, \quad \Phi = \varphi \text{ auf } \partial\Omega.$$

Dann gilt in fast jedem Punkt $x \in \Omega$

$$\Phi(x) = \int_{\Omega} d^3y G(x,y) \varphi(y) - \int_{\partial\Omega} d^2y (\nabla_n G)(x,y) \varphi(y).$$

]

Wir betrachten nun das zweite wichtige Randwertproblem für die Poisson-Gleichung, das sogenannte Nevanlinna-Probleme.

Hierbei schreibt man $\nabla_n \Phi$ am Rand vor. Also:

Zu vorgegebenen $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ und $\Psi: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ suchen wir eine Lösung $\Phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ von

$$\Delta \Phi = -f \text{ in } \Omega,$$

$$\nabla_n \Phi = \Psi \text{ auf } \partial\Omega.$$

Auch in diesem Fall gibt es eine Darstellung der Lösung mittels einer geeigneten Green-Funktion:

Die Funktion $G(x,y) = G^{(0)}(x-y) + F(x,y)$ heißt Green-Funktion für das Naumann-Problem auf Ω , falls für jedes $x \in \Omega$ die Funktion $F(x,\cdot)$ harmonisch auf Ω ist und die Randbedingung $\nabla_n F(x,\cdot) = -\nabla_n G^{(0)}(x,\cdot)$ auf $\partial\Omega$ erfüllt. Dann gilt

$$\Phi(x) = \int_{\Omega} d^3y \, G(x,y) \rho(y) + \int_{\partial\Omega} d^2y \, G(x,y) \Psi(y).$$

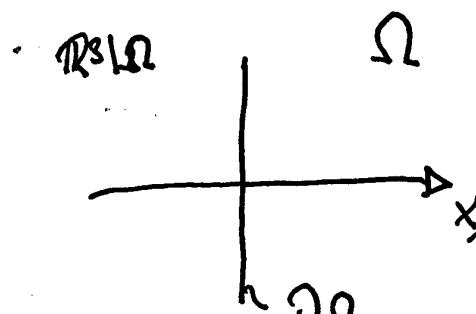
Beispiele:

(a) Wir betrachten das Halbraum

$$\Omega \stackrel{\text{df}}{=} \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 > 0\}$$

und das Dirichlet-Problem auf Ω . Wir kennen die harmonische Funktion F und damit die Green-Funktion G mit einem Spiegelungsprinzip erhalten.

Wir gehen von der elementaren Lösung $G^{(0)}(x-y)$ aus. Für beliebiges $x \in \Omega$ wollen wir eine harmonische Funktion $F(x, \cdot) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ finden, so daß die Randbedingung



$f(x, \cdot) = -G^{(0)}(x - \cdot)$ auf $\partial\Omega$ erfüllt wird. Wir wählen 144

$$f(x, y) = -G^{(0)}(x - y),$$

$$G(x, y) = G^{(0)}(x - y) - G^{(0)}(\tilde{x} - y),$$

wobei $\tilde{x} = x - 2(x_1, 0, 0) = (-x_1, x_2, x_3)$ der seit x assoziierten gespiegelten Punkt bedeutet. Insbesondere ist $\tilde{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega$. Die Funktion $f(x, \cdot)$ ist harmonisch, da $G^{(0)}$ aufhalb der Singularität harmonisch.

Wir haben außerdem Dirichlet-Randbedingungen in Ω implementiert: für alle $y \in \partial\Omega$ gilt doch $G(x, y) = 0$.

Auf dem Rand $\partial\Omega = \{y \in \mathbb{R}^3 : y_1 = 0\}$ gilt

$$\nabla_n G(x, y) = \frac{2}{4\pi} \frac{x_1}{|x-y|^3}.$$

Mit der Darstellungsformel auf S. 142 finden wir

$$\Phi(x) = \int_{\Omega} d^3 y \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{1}{|x-y|} - \frac{1}{|\tilde{x}-y|} \right\} \varrho(y) +$$

$$+ \int_{\partial\Omega} d^2 y \frac{x_1}{2\pi} \frac{\varphi(y)}{|x-y|^3}$$

Zur Diskussion spezifizieren wir: Auf dem Rand $\partial\Omega$ sei das konstante Potential $\Phi(\partial\Omega) \equiv 0$ vorgegeben, und

$$\rho(\underline{y}) = Q \delta^{(3)}(\underline{y} - \underline{x}), \quad \underline{x} = (a, 0, 0), \quad a > 0.$$

Einfache L^eistung

$$\begin{aligned}\Phi(\underline{x}) &= \frac{Q}{4\pi} \int_{\Omega} d^3y \left\{ \frac{1}{|\underline{x}-\underline{y}|} - \frac{1}{|\underline{x}-\underline{y}_*|} \right\} \delta^{(3)}(\underline{y}-\underline{a}) \delta^{(3)}(\underline{y}_1) \delta^{(3)}(\underline{y}_3) \\ &\stackrel{*}{=} \frac{Q}{4\pi} \left\{ \frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}_*|} - \frac{1}{|\underline{x}+\underline{x}_*|} \right\}\end{aligned}$$

Das Potential Φ setzt sich aus zwei elektrostatischen Potentialelementen zusammen, die scheinbar von Punktladungen bei \underline{x}_* und $-\underline{x}_*$ erzeugt werden, obwohl es nur eine Punktladung Q bei \underline{x}_* gibt. Die scheinbare Ladung bei $-\underline{x}_*$ heißt in dieser einfachen Situation Spiegelladung. Schein- und Spiegelladungen haben keinerlei reale Bedeutung. Im weiteren Fall gibt es ja gar keine Quelle im $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$. Vielmehr erlaubt die Spiegelladung eine auf Ladungsträgern basierende Interpretation der Randbedingung. In den vorher

betrachteten Fall kann die Randbedingung durch Einbringen einer (beliebig dicken) geerdeten Metallplatte in das \mathbb{R}^3 physikalisch realisiert werden. Diese unterteilt das \mathbb{R}^3 in eine mit einer Punktladung ausgestattete Region Ω und einen Ladungsfreien Halbraum $(\mathbb{R}^3) \setminus \Omega$, der vollständig gegen elektrische Felder aus Ω abgeschirmt ist. Dieses Prinzip macht sich auch da Faraday-Käfig zu Nutze.

Wir berechnen die Normalkomponente des elektrischen Feldstärke auf dem Rand,

$$\langle \hat{n}, \underline{E} \rangle = - \nabla_{\hat{n}} \underline{\Phi} \Big|_{\partial\Omega} = - \frac{Q}{2\pi} \frac{a}{\sqrt{a^2 + x_2^2 + x_3^2}}^3.$$

Hingegen verschwinden die Tangentialkomponenten

$$\langle \hat{t}, \underline{E} \rangle = 0 \quad \forall \hat{t} \perp \hat{n}.$$

In $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$ verschwindet mit $\underline{\Phi}$ auch \underline{E} identisch. Das bedeutet aber, daß $\langle \hat{n}, \underline{E} \rangle$ einen Sprung auf $\partial\Omega$ macht, während die Tangentialkomponenten stetig sind.

Auf $\partial\Omega$ muss also eine Flächenladung der Dichte

$$\sigma(0, x_2, x_3) = -\frac{Q}{2\pi} \frac{a}{\sqrt{a^2 + x_2^2 + x_3^2}}^3$$

existieren, damit die Randbedingung überhaupt gelten kann.

Integrieren wir diese über $\partial\Omega$, so erhalten wir

$$\int_{\partial\Omega} dF \sigma(0, x_2, x_3) = -Q \int_0^\infty dr \frac{r}{\sqrt{a^2 + r^2}}^3 = -Q,$$

also gerade die der Punktladung entgegengesetzte Ladung.

Im Gegensatz zur Spiegelladung ist diese Flächenladung aber physikalisch. Sie heißt auch Influenzladung.

(b) Aufgabe / Referat: Die geendete Kugel.

⑤ Bewegte Punktladungen: Die Liénard-Wiechert-Potentiäle

Gegeben sei eine Kurve (Bahn)

$$\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow M^4$$

$$t \rightarrow \gamma(t) \stackrel{\text{def}}{=} (t, \underline{x}(t))^T, \underline{x}(t) \in C^2(\mathbb{R}),$$

auf der sich eine Punktladung q bewege, und zwar mit der Geschwindigkeit

$$\dot{\gamma}(t) = (1, \dot{\underline{x}}(t))^T.$$

Die Stromdichte wird daher durch folgendes Lorentz-Vektorfeld modelliert:

$$\mathbf{j} = \rho \dot{\gamma}, \rho \stackrel{\text{def}}{=} q \delta^{(3)}(\underline{x} - \underline{x}(t)).$$

Für das Eichpotential finden wir mit der Darstellungsformel

$$A(x) = \int_{M^4} d^4y G(x-y) j(y)$$

$$= \frac{q}{4\pi} \int_{M^4} d^4y \frac{\delta^{(3)}(x^0 - y^0 - |\underline{x} - \underline{y}|)}{|\underline{x} - \underline{y}|} \delta^{(3)}(y - \underline{x}(\tau)) \dot{\gamma}(\tau)$$

$$A(x) = \frac{2}{4\pi} \int_{\mathbb{R}} dy^0 \dot{\gamma}(y^0) \frac{\delta^{(1)}(x^0 - y^0 - |\underline{x} - \underline{\gamma}(y^0)|)}{|\underline{x} - \underline{\gamma}(y^0)|}$$

149

Das ist ein recht komplizierter Ausdruck. Definiere

$$f(y^0) \stackrel{\text{df.}}{=} y^0 - x^0 + |\underline{x} - \underline{\gamma}(y^0)|.$$

Was wissen wir über diese Funktion? Nur,

$$\dot{f}(y^0) = 1 - \frac{\langle \underline{x} - \underline{\gamma}(y^0), \dot{\underline{\gamma}}(y^0) \rangle}{|\underline{x} - \underline{\gamma}(y^0)|}$$

$$= 1 - \langle \widehat{\underline{x} - \underline{\gamma}(y^0)}, \dot{\underline{\gamma}}(y^0) \rangle$$

$$= 1 - \langle \widehat{\underline{x} - \underline{\gamma}(y^0)}, \widehat{\dot{\underline{\gamma}}(y^0)} \rangle |\dot{\underline{\gamma}}(y^0)|.$$

Wir gehen davon aus, daß der Ladungsträger massiv ist.

Dann gilt $|\dot{\underline{\gamma}}| < 1$, und stets

$$\dot{f}(y^0) > 0.$$

Die Funktion ist also streng monoton steigend. Folglich besitzt sie maximal eine einfache Nullstelle.

Aufgabe: Zeigen Sie, daß f stets eine Nullstelle hat.

Sei y_*^0 diese Nullstelle. Dann ist

$$g^{(a)}(f(y^0)) = \frac{1}{1 - \frac{\langle \dot{x} - \dot{x}(y_*^0), \dot{x}(y_*^0) \rangle}{|\dot{x} - \dot{x}(y_*^0)|}} g^{(a)}(y^0 - y_*^0).$$

Damit kann man auch die Zeitintegration genau ausgeführt werden. Wir finden

$$A(x) = \frac{g}{4\pi} \frac{\dot{y}(y_*^0)}{|\dot{x} - \dot{x}(y_*^0)| - \langle \dot{x} - \dot{x}(y_*^0), \dot{x}(y_*^0) \rangle}. \quad (*)$$

Bemerkung: $y_*^0 = g(x; \gamma)$.

Die Potentiale (*) heißen Liénard-Wiechert Potentiale.

Warnung: (*) ist ein extrem komplizierter Ausdruck!

Beispiel: Der Hertz-Dipol

Gegeben sei eine Kurve (Bahn)

$$\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow M^4$$

$$t \rightarrow \underline{\gamma}(t) \stackrel{\text{df}}{=} (t, \underline{x}(t))^T, \underline{x}(t) \in C^1(\mathbb{R}^3)$$

auf der sich eine Punktladung q mit der Geschwindigkeit

$$\dot{\underline{x}}(t) = (1, \dot{\underline{x}}(t))^T$$

relativ zu einer im Ursprung fixierten (stetig ruhenden) Ladung $-q$ bewege. Dabei soll weiterhin gelten, dass

$$|\underline{\gamma}(t)| < \gamma_0 \quad \forall t \in I \subset \mathbb{R}.$$

Die Stromdichte wird durch folgendes Lorentz-Vektorfeld
modelliert:

$$\underline{J} = \underline{J}_q + \underline{J}_{-q},$$

$$\underline{J}_q = \underline{\rho}_q \dot{\underline{x}}_q, \underline{\rho}_q = q \delta^{(3)}(\underline{x} - \underline{\gamma}(t)),$$

$$\underline{J}_{-q} = \underline{\rho}_{-q} \underbrace{(1, \underline{0})^T}_{\dot{\underline{x}}_{-q}}, \underline{\rho}_{-q} = -q \delta^{(3)}(\underline{x}).$$

Mittels des Grenzwertprozesses

$$\gamma_0 \rightarrow 0, q \rightarrow \infty : q\gamma_0 = \text{const. } (*)$$

Führen wir einen zeitabhängigen Punktdipol am Ort $\underline{x} = 0$

bei:

$$\underline{P}(t) = \lim_{(*)} (q\gamma_0) \frac{|\underline{x}(t)|}{\gamma_0} \hat{\underline{x}}(t).$$

\uparrow \uparrow
 Größe Richtung

Für die Debye-Wiechart Potentiale dieser diskusischen Ladungsconfiguration erhalten wir

$$A(x) = \frac{1}{4\pi} \lim_{(*)} \left\{ \frac{q \dot{\underline{x}}(\gamma_*^0)}{|\underline{x} - \underline{x}(\gamma_*^0)|} - \langle \underline{x} - \underline{x}(\gamma_*^0), \dot{\underline{x}}(\gamma_*^0) \rangle \right\} +$$

$$- \frac{q}{4\pi} \frac{\dot{\underline{x}}(-q)}{|\underline{x}|} \} = A_0 [\underline{\delta}_q](x) + A[\underline{\delta}_q](x)$$

Generalisierung: $\dot{\underline{x}}(-q) = \text{const.}$

Mit $\underline{\gamma}_x = \underline{\gamma}(\gamma_*^\circ)$ haben wir zunächst

$$A[\dot{J}_q](x) = \frac{1}{4\pi} \lim_{(x)} \frac{q \dot{\gamma}_q}{|x - \underline{\gamma}_x|} \frac{1}{1 - \langle \hat{x} - \hat{\gamma}_x, \dot{\gamma}_x \rangle}.$$

Wir nehmen wieder massive Ladungsträger an, also $|\dot{\gamma}_x| < 1$.
 Dann können wir den letzten Term in eine geometrische Reihe entwickeln:

$$A[\dot{J}_q](x) = \frac{1}{4\pi} \lim_{(x)} \frac{q \dot{\gamma}_q}{|x - \underline{\gamma}_x|} \sum_{j=0}^{\infty} \langle \hat{x} - \hat{\gamma}_x, \dot{\gamma}_x \rangle^j$$

Wir nehmen an, daß gilt

$$\frac{|\dot{\gamma}_x|}{\gamma_0} < \infty.$$

Dann ist

$$\lim_{(x)} \frac{q \dot{\gamma}_q}{|x - \underline{\gamma}_x|} \sum_{j=2}^{\infty} \langle \hat{x} - \hat{\gamma}_x, \dot{\gamma}_x \rangle^j =$$

$$= \lim_{(x)} q \dot{\gamma}_q \sum_{j=2}^{\infty} \gamma_0^j \langle \hat{x} - \hat{\gamma}_x, \dot{\gamma}_x / \gamma_0 \rangle$$

$$= 0$$

Somit wird

$$A[\mathcal{J}_q](x) = \frac{1}{4\pi} \lim_{(*)} \left\{ \frac{q \dot{\mathcal{J}}_q}{|\underline{x} - \underline{x}_*|} + \frac{q \dot{\mathcal{J}}_q \langle \underline{x} - \underline{x}_*, \dot{\mathcal{J}}_x \rangle}{|\underline{x} - \underline{x}_*|^2} \right\}$$

Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{1}{4\pi} \lim_{(*)} \left\{ \frac{q \dot{\mathcal{J}}_q}{|\underline{x} - \underline{x}_*|} - \frac{q \dot{\mathcal{J}}_{-q}}{|\underline{x}|} + \frac{q \dot{\mathcal{J}}_q \langle \underline{x} - \underline{x}_*, \dot{\mathcal{J}}_x \rangle}{|\underline{x} - \underline{x}_*|^2} \right\} = \\ &= \frac{1}{4\pi} \lim_{(*)} \left\{ q (\dot{\mathcal{J}}_q - \dot{\mathcal{J}}_{-q}) \frac{1}{|\underline{x}|} + \frac{\langle \underline{x}, \dot{\mathcal{J}}_* \rangle}{|\underline{x}|^3} q \dot{\mathcal{J}}_q + \right. \\ &\quad \left. + \frac{q \dot{\mathcal{J}}_q \langle \underline{x} - \underline{x}_*, \dot{\mathcal{J}}_x \rangle}{|\underline{x} - \underline{x}_*|^2} \right\} \end{aligned}$$

Aufführlich,

$$A^0(x) = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{\langle \underline{x}, \dot{\mathcal{P}}_* \rangle}{|\underline{x}|^3} + \frac{\langle \underline{x}, \dot{\mathcal{P}}_* \rangle}{|\underline{x}|^2} \right\}$$

$$A^\alpha(x) = \frac{1}{4\pi} \frac{\dot{\mathcal{P}}_*}{|\underline{x}|} , \quad \alpha \in \{1, 2, 3\} .$$

Die Retardierung lässt sich wegen der Lokalisierung des Dipols explizit auswerten:

$$x^0 - \gamma_*^0 = \lim_{\gamma_0 \rightarrow 0} |\underline{x} - \underline{\gamma}_0 \frac{\underline{\gamma}_*}{\gamma_0}| = |\underline{x}| c^{-1}$$

Folglich ist

$$A^0(x) = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{\langle \underline{x}, \dot{P}(x^0 - |\underline{x}|) \rangle}{|\underline{x}|^3} + \frac{\langle \underline{x}, \dot{P}(x^0 - |\underline{x}|) \rangle}{|\underline{x}|^2} \right\}$$

$$A^a(x) = \frac{1}{4\pi} \frac{\dot{P}(x^0 - |\underline{x}|)}{|\underline{x}|}$$

Aufgabe: Berechnen Sie $\underline{E}, \underline{B}$. Diskutieren Sie die unterschiedlichen Abstandsschlämme. Wann spielen beidseitige Ladungen eine Rolle?

Betrachten Sie konkret einen linearen Dipol

$$\underline{P}(t) = P_0 \sin(\omega t) \underline{e}_3$$

Berechnen Sie $\underline{E}, \underline{B}$ für diesen Fall. Diskutieren Sie Ihre Resultate.