

Blatt 04: Thermodynamische Potentiale

Ausgabe: Freitag, 17.11.17; Abgabe: Montag, 27.11.17, 13:00 Uhr

Aufgabe 1 Gas massiver Teilchen

Ein Gas massiver, nicht wechselwirkender Teilchen erfüllt die Zustandsgleichung $P(V - Nb) = Nk_B T$. Weiterhin sei die Wärmekapazität bei konstantem Volumen temperaturunabhängig, d.h. $C_V(T, V) \equiv C_V(V)$.

- (2 Punkte) Zeigen Sie, dass $E(T, V)$ und $C_V(V)$ nicht vom Volumen V abhängen.
- (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $\gamma := \frac{C_P}{C_V} = 1 + \frac{Nk_B}{C_V}$ gilt (d. h. $\gamma = \text{const}$).
- (3 Punkte) Zeigen Sie, dass die Adiabatangleichung in der P - V -Ebene folgende Form hat:

$$P(V - Nb)^\gamma = \text{const.}$$

Aufgabe 2 Grenzflächenspannung

Im thermodynamischen Gleichgewicht beschreibt die Grenzflächenspannung σ die Grenzfläche zwischen zwei Phasen. Sie ist definiert über die Energie, die bei Vergrößerung der Grenzfläche um dA aufgebracht werden muss, d. h. es gilt $\delta W = \sigma dA$. Wir betrachten zunächst Systeme, die so klein sind, dass alle anderen mechanischen Kräfte (z. B. Gravitation) gegenüber der Grenzflächenspannung vernachlässigbar sind.

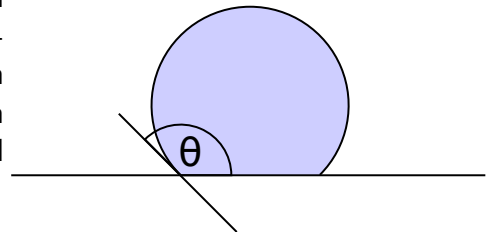
- (2 Punkte) Gehen Sie zunächst von einem Wassertropfen mit Radius R aus, der in der Luft schwebt. Berechnen Sie den Druck im Inneren des Tropfens abhängig vom Luftdruck und der Grenzflächenspannung σ_{aw} zwischen Luft und Wasser. Betrachten Sie dafür die Arbeit, die bei infinitesimaler Änderung von R verrichtet wird.

- (3 Punkte) Wir betrachten nun einen Wassertropfen mit Volumen V , der an der Grenzfläche zwischen einem Festkörper und Luft kondensiert ist. Wir gehen wieder davon aus, dass nur die Grenzflächenspannungen zwischen Luft und Wasser (σ_{aw}), zwischen Luft und Festkörper (σ_{as}) und zwischen Wasser und Festkörper (σ_{ws}) relevant sind.

Berechnen Sie den Kontaktwinkel θ (siehe Skizze)!

Hinweis: Sie können z. B. argumentieren, dass der Tropfen die Form eines Kugelsegments annimmt. Die entsprechenden Flächen sind $A_{aw} = 2\pi R^2 (1 - \cos \theta)$ und $A_{ws} = \pi R^2 \sin^2 \theta$ zwischen Luft und Tropfen bzw. zwischen Tropfen und Festkörper. Das Volumen ist $V = \frac{\pi R^3}{3} (\cos^3 \theta - 3 \cos \theta + 2)$.

Damit können Sie beweisen, dass im Gleichgewicht für die Grenzflächen A_{ws} und A_{aw} der Zusammenhang $dA_{ws} \cos \theta = dA_{aw}$ gilt.



Aufgabe 3 Phasenübergang zum Supraleiter

Viele Metalle gehen bei tiefer Temperatur T und kleinem Magnetfeld B von der normalleitenden Phase (Superskript n) in eine supraleitende Phase (Superskript s) über. Für niedrige Temperaturen bis in die Nähe des Phasenübergangs hinein sind die Wärmekapazitäten der beiden Phasen in guter Näherung gegeben durch

$$C_V^s(T, V) = V \alpha T^3 \quad (1)$$

$$C_V^n(T, V) = V (\beta T^3 + \gamma T). \quad (2)$$

α, β , und γ sind Konstanten.

Sie dürfen im Folgenden davon ausgehen, dass sich das Volumen beim Phasenübergang nicht ändert, also dass mechanische Arbeit keine Rolle spielt.

- a) (2 Punkte) Berechnen Sie die Entropien $S^s(T)$ und $S^n(T)$ für den Fall, dass kein Magnetfeld vorhanden ist.

Hinweis: Sie dürfen den dritten Hauptsatz der Thermodynamik benutzen.

- b) (1 Punkt) Aus Experimenten ist Ihnen bekannt, dass beim Phasenübergang keine latente Wärme auftritt, d. h. die Entropie $S(T, V)$ ist stetig. Bestimmen Sie mit dieser Information die Übergangtemperatur T_c in Abhängigkeit der Konstanten α, β , und γ .

- c) (2 Punkte) Weiterhin sei Ihnen bekannt, dass die supraleitende Phase bei $T = 0$ eine um $V \Delta$ erniedrigte Energie hat: $E^n(T = 0, V) = E_0$ und $E^s(T = 0, V) = E_0 - V \Delta$.

Berechnen Sie die inneren Energien der beiden Phasen für kleine Temperaturen!

- d) (2 Punkte) Wie Ihnen aus der Vorlesung bekannt ist, wird bei gegebener Temperatur die Phase mit der niedrigeren Freien Energie realisiert.

Bestimmen Sie darüber T_c in Abhängigkeit von Δ und γ .

- e) (3 Punkte) Ein Supraleiter ist im Inneren magnetfeldfrei. Das wird bei Anwesenheit eines äußeren Magnetfelds B durch eine entgegengesetzte Magnetisierung $M^s = -\frac{BV}{4\pi}$ (in entsprechenden Einheiten) erreicht. Das Aufbauen dieser Magnetisierung kostet die Arbeit $-B dM$. Im Normalleiter gelte hingegen $M^n = 0$. Zeigen Sie damit, dass das kritische Feld $B_c(T)$, bei dem die supraleitende Phase bei konstanter Temperatur in die normalleitende Phase übergeht, die Form

$$B_c(T) = B_0 \left(1 - \frac{T^2}{T_c^2} \right) \quad (3)$$

hat. Bestimmen Sie B_0 .