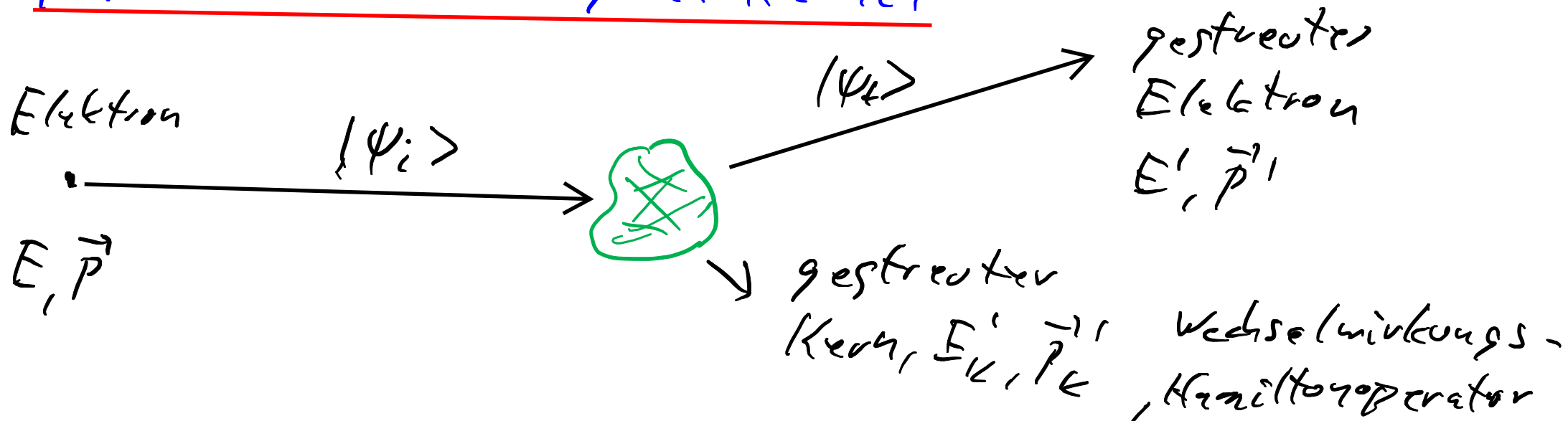


1

7 Elektronenstreuung an Kernen *



Fermis Goldene Regel:

$$\omega = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle \psi_f | H_{\text{int}} | \psi_i \rangle|^2 \frac{d\eta}{dE'}$$

Reaktionsrate

Matrixelement

Zustands-
dichte

Zahl möglicher
Zustände f
mit Energie E'

→ Wirkungsquerschnitt

$$\sigma = \frac{\omega}{\Phi} = \frac{\omega}{v_s/V}$$

Fluss

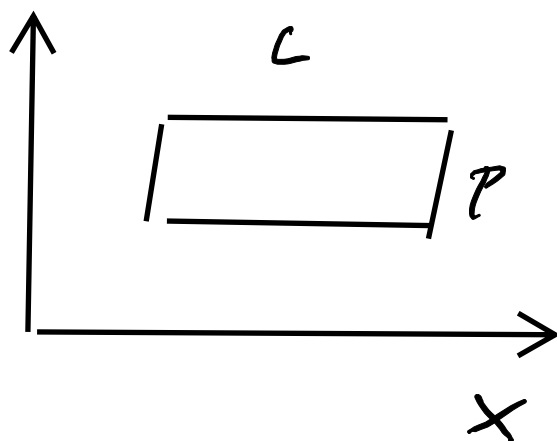
Strahlgeschw.

Zustandsdichte

(Phasenraum dichte)

$$\frac{dn}{dE}$$

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq h = 2\pi\hbar$$

 $\frac{p}{\hbar}$


Zahl
möglicher
Zustände

$$n = \frac{L \cdot P}{h}$$

$$3 \text{ dim: } n_1 = \frac{\int d^3x d^3p}{h^3} = \frac{V}{h^3} \int p^2 dp d\Omega$$

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 \Rightarrow \frac{d}{dp} E^2 = 2E \frac{dE}{dp} = 2pc^2 \Rightarrow dE = \frac{pc^2}{E} dp$$

$$\frac{dn_1}{dE} = \frac{1}{dE} \frac{V}{h^3} \int p^2 dp d\Omega = \frac{V}{h^3} \frac{E}{pc^2} \frac{1}{dp} \int p^2 dp d\Omega$$

$$\frac{dn_1}{dE d\Omega} = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \frac{pE}{c^2}$$

Z.1 Rutherford Wirkungsquerschnitt

ein/aus (auf/en de) Elektronen: $(\psi_i) \approx \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{p}\vec{r}/\hbar}$, $(\psi_f) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{p}'\vec{r}/\hbar}$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{d\Omega} \frac{\omega}{v_s/V} = \frac{V}{v_s} \frac{2\pi}{\hbar} |\langle \psi_f | H_{\text{int}} | \psi_i \rangle|^2 \frac{dn_f}{dE' d\Omega}$$

für $v_s \approx c$, $p'c \approx E'$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \approx V^2 \frac{E^2}{(2\pi)^2 (\hbar c)^4} |\langle \psi_f | H_{\text{int}} | \psi_i \rangle|^2$$

dabei ist $H_{\text{int}} = e \phi(\vec{r})$ mit elektr. Potential $\phi(\vec{r})$

$$\rightarrow \langle \psi_f | H_{\text{int}} | \psi_i \rangle = \frac{e}{V} \int e^{-i\vec{p}'\vec{r}/\hbar} \phi(\vec{r}) e^{i\vec{p}\vec{r}/\hbar} d^3r$$

$$\vec{q} := \vec{p} - \vec{p}'$$

$$= \frac{e}{V} \int \phi(\vec{r}) e^{i\vec{q}\vec{r}/\hbar} d^3r$$

4

Gauß - Theorem: $\int (\nabla \cdot \mathbf{V} - \mathbf{V} \cdot \nabla) d^3r = 0$

$$V = -\frac{\hbar^2}{|\vec{q}|^2} e^{i\vec{q}\vec{r}/\hbar} \Rightarrow \Delta V = e^{i\vec{q}\vec{r}/\hbar}$$

$$\underbrace{\int \phi(\vec{r})}_{V} \underbrace{e^{i\vec{q}\vec{r}/\hbar}}_{\Delta V} d^3r = \underbrace{\int \Delta \phi(\vec{r})}_{= -\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}} \left(-\frac{\hbar^2}{|\vec{q}|^2}\right) e^{i\vec{q}\vec{r}/\hbar} d^3r$$

$$\rho(\vec{r}) = Ze \cdot f(\vec{r}) \text{ mit } \int f(\vec{r}) d^3r = 1$$

$$\Rightarrow \langle \psi_f | H_{\text{int}} | \psi_i \rangle = \frac{Ze^2 \hbar}{\epsilon_0 V |\vec{q}|^2} \underbrace{\int f(\vec{r}) e^{i\vec{q}\vec{r}/\hbar} d^3r}_{= F(\vec{q}) \text{ Formfaktor}}$$

$= F(\vec{q})$ Formfaktor

$\hat{=}$ Fouriertransformierte der Ladungsdichte

5

Für kugelsymmetrische Ladungsverteilung: $\rho(\vec{r}) = ze f(r)$

$$\langle \psi_f | H_{int} | \psi_i \rangle = 4\pi \frac{ze (\hbar c)^3}{|\vec{q}|^2 \cdot V} \int f(r) e^{i\vec{q}\vec{r}/\hbar} d^3r \quad r=|\vec{r}|$$

Punktförmiger Kern: $f(r) = \delta(r) \rightarrow F(\vec{q}) = 1$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Rutherford}} = \frac{4 z^2 \alpha^2 (\hbar c)^2 \cdot E'^2}{|\vec{q}|^4}$$

elastisch, ohne Rückstoß

$$E' = E, \quad |\vec{p}'| = |\vec{p}|$$

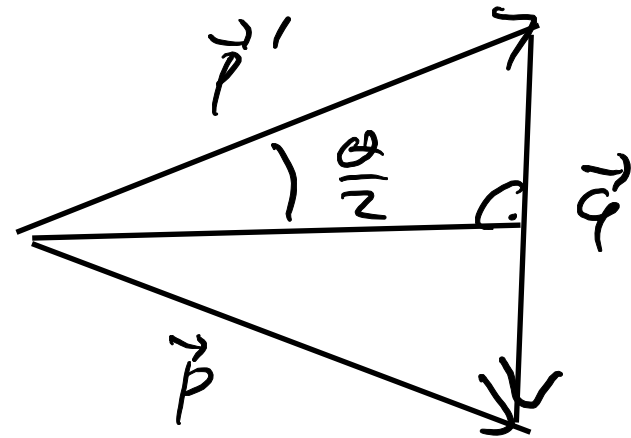
$$\Rightarrow |\vec{q}'| = |\vec{p}' - \vec{p}| = 2 |\vec{p}| \sin \frac{\Theta}{2}$$

relativistisch: $|\vec{p}| c = E$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Rutherford}} = \frac{Z^2 \alpha^2 (\hbar c)^2}{4 E^2 \sin^4 \frac{\Theta}{2}}$$

nicht relativistisch: $E_{\text{kin}} = \frac{p^2}{2m}, \quad E' \approx mc^2$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Rutherford}} = \frac{Z^2 \alpha^2 (\hbar c)^2}{16 E_{\text{kin}}^2 \sin^4 \frac{\Theta}{2}}$$



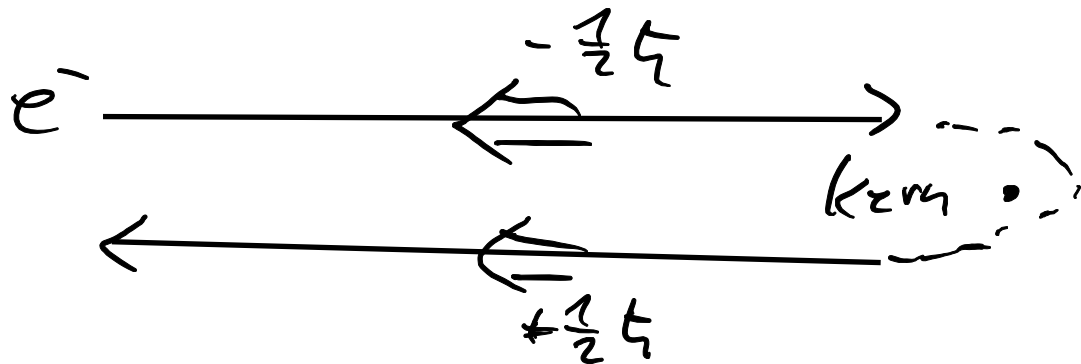
7.2 Mott-Wirkungsquerschnitt

Rutherford-Wirkungsquerschnitt gilt falls

- 1) Kernrückstoß vernachlässigbar
- 2) Kernladung Z nicht zu groß (d. $Z \ll 1$)
- 3) Kern ist punktförmig
- 4) Kern ist spinlos
- 5) Projektil ist spinlos und relativistisch

Abweichungen, falls 1-5) nicht erfüllt

z.B. Elektron hat Spin $\frac{1}{2}\hbar$, d.h. ~~X~~



Spinflip für $\Theta = 180^\circ$

Mott - Wirkungsquerschnitt

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^*_{\text{Mott}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Rutherford}} \cdot \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)$$

* rückstoß frei

Für $v \approx c$:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^*_{\text{Mott}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Rutherford}} \cdot \cos^2 \frac{\theta}{2} \xrightarrow{\theta \rightarrow 180^\circ} 0$$

7.3 Formfaktor

Falls Kern nicht punktförmig, d.h. ~~X~~

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^* = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{not}} |F(\vec{q})|^2$$

mit $F(\vec{q}) = \int f(\vec{r}) e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}/\hbar} d^3r$

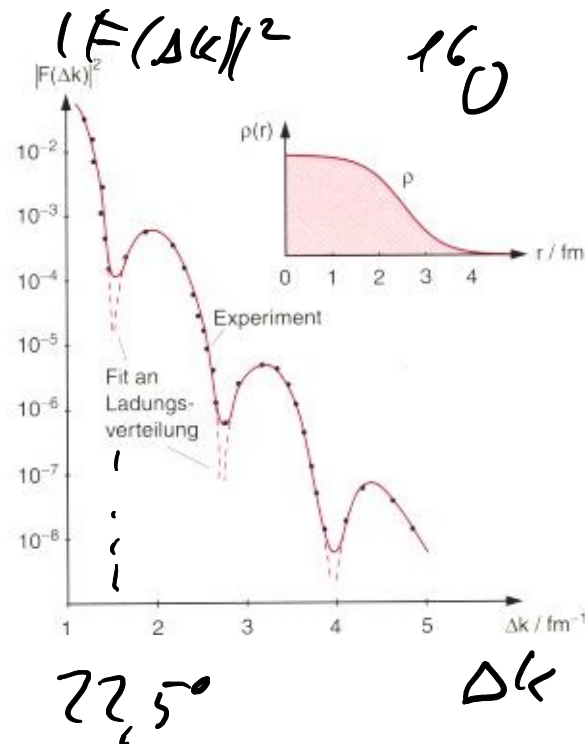
Beispiele:

Ladungsverteilung $f(r)$		Formfaktor $F(q^2)$	
Punkt	$\delta(r)/4\pi$	1	konstant
exponentiell	$(a^3/8\pi) \cdot \exp(-ar)$	$(1 + q^2/a^2\hbar^2)^{-2}$	Dipol
Gauß	$(a^2/2\pi)^{3/2} \cdot \exp(-a^2r^2/2)$	$\exp(-q^2/2a^2\hbar^2)$	Gauß
homogene Kugel	$\begin{cases} C \text{ für } r \leq R \\ 0 \text{ für } r > R \end{cases}$	$3\alpha^{-3}(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha)$ mit $\alpha = q R/\hbar$	oszillierend

erste
Nullstelle
bei $\alpha \approx 4,5$

Formfaktor und Kernradius

Ladungsverteilung $\rho(r)$	Formfaktor $F(q)$	Beispiel
punktförmig	konstant	Elektron
exponentiell	Dipol	Proton
gaußförmig	gaußförmig	${}^6\text{Li}$
homogene Kugel	oszillierend	—
Kugel mit diffusem Rand	verwackelte Oszillation	${}^{40}\text{Ca}$



$$\Delta k = \frac{|\vec{q}|}{\hbar c} = \frac{2|\vec{p}|}{\hbar c} \sin \frac{\theta}{2}$$

$$p = 750 \text{ MeV}/c$$

1. Minimum bei

$$\alpha = \frac{|\vec{q}| \cdot R}{\hbar} \approx 4.5$$

$$\Rightarrow R \approx 3 \text{ fm}$$

- Mittlerer quadratischer Kernradius zur Formfaktor für $|\vec{q}| \rightarrow 0$

$$F(\vec{q}) = \int f(r) e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}/\hbar} d^3r = \int f(r) \left(1 + i\vec{q} \cdot \vec{r}/\hbar - \frac{(\vec{q} \cdot \vec{r})^2}{2\hbar^2} + \dots \right) d^3r$$

$$= 1 - \frac{1}{6} \frac{|\vec{q}|^2 \langle r^2 \rangle}{\hbar^2} + \dots$$

$$\langle r^2 \rangle = \int r^2 f(r) d^3r = -6\hbar^2 \frac{dF(\vec{q})}{d|\vec{q}|^2} \bigg|_{|\vec{q}|^2=0}$$

7.4 Formfaktor der Nukleonen

- Kernrückstoß nicht vernachlässigbar, d.h. ~~*~~

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{hott}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^*_{\text{hott}} - \frac{E'}{E}$$

\Rightarrow Energieverlust nicht vernachlässigbar \rightarrow 4-Impuls $q \equiv p - p'$

$$q^2 = (p - p')^2 \approx -2 \frac{E E'}{c^2} (1 - \cos \Theta) = -4 \frac{E E'}{c^2} \sin^2 \frac{\Theta}{2} \leq 0$$

Definiere $Q^2 = -q^2 \geq 0$

- Nukleon hat Spin $\frac{1}{2}$, d.h. ~~*~~

\rightarrow Zusätzlich zur Coulomb-WW gibt es WW mit magnet. Kern.

für punktförmiges
Nukleon mit Masse m_N

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{punkt. Spin } \frac{1}{2}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{hott}} \left[1 + 2\tau \tan^2 \frac{\Theta}{2} \right]$$

$$\tau = Q^2 / 4 m_N c^2$$

- Nukleon ist nicht punktförmig, d.h. ~~X~~
 → elektr. / magn. Formfaktor $G_E(Q^2)$, $G_M(Q^2)$
 mit $G_E^p(0)=1$, $G_M^p(0)=\frac{\mu_p}{\mu_N}=+2,79$, $G_E^n(0)=0$, $G_M^n(0)=\frac{\mu_n}{\mu_N}=-1,91$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{ep} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{n.t.}} \cdot \left[\frac{G_E^2(Q^2) + \tau G_M^2(Q^2)}{1 + \tau} + 2\tau G_M^2(Q^2) \tan^2 \frac{\Theta}{2} \right]$$

Rosenbluth-Formel

für festes Q^2

$$\frac{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{ep}}{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{n.t.}}} = A(Q^2) + B(Q^2) \tan^2 \frac{\Theta}{2}$$

$$A(Q^2), B(Q^2) \rightarrow G_E(Q^2), G_M(Q^2)$$

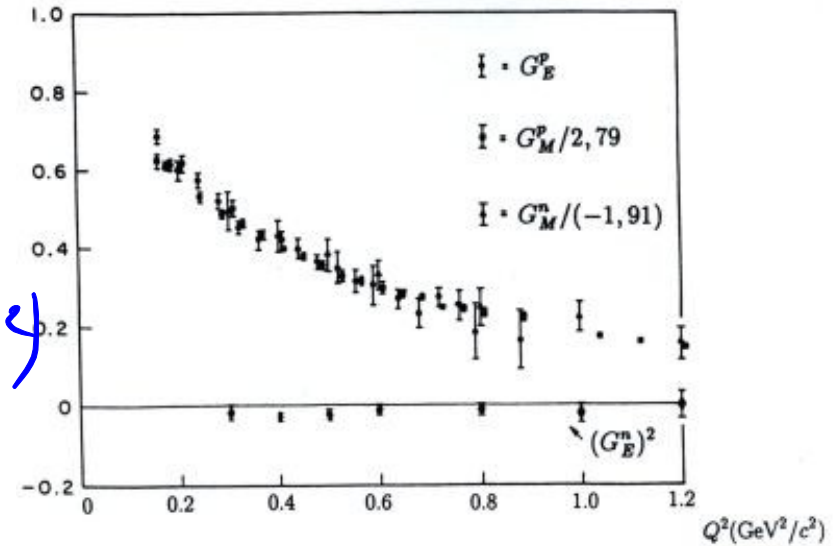
elektr. und magn. Formfaktoren

Es gilt (näherungsweise):

$$G_E^h(Q^2) = 0 \text{ und}$$

$$G_E^p(Q^2) = \frac{G_M^p(Q^2)}{2,79} = \frac{G_M^h(Q^2)}{-1,91} = G^{\text{Dirac}}(Q^2)$$

mit $G^{\text{Dirac}}(Q^2) = \left(1 + \frac{Q^2}{0,77(\text{GeV}/c)^2}\right)^{-2}$



Formfaktor des Nukleons

→ Ladungsverteilung: $\rho(r) = \frac{a^3}{8\pi} e^{-ar}$, $a = \sqrt{0,77(\text{GeV}/c)^2} = 4,28/\text{fm}$

→ $\langle r^2 \rangle = \frac{12}{a^2}$

$\sqrt{\langle r^2 \rangle} = \sqrt{12}/a \approx 0,81 \text{ fm}$

Fouriertransformatoren von $G_E^p(Q^2)$ und $G_E^n(Q^2)$
 \rightarrow Ladungsdichte

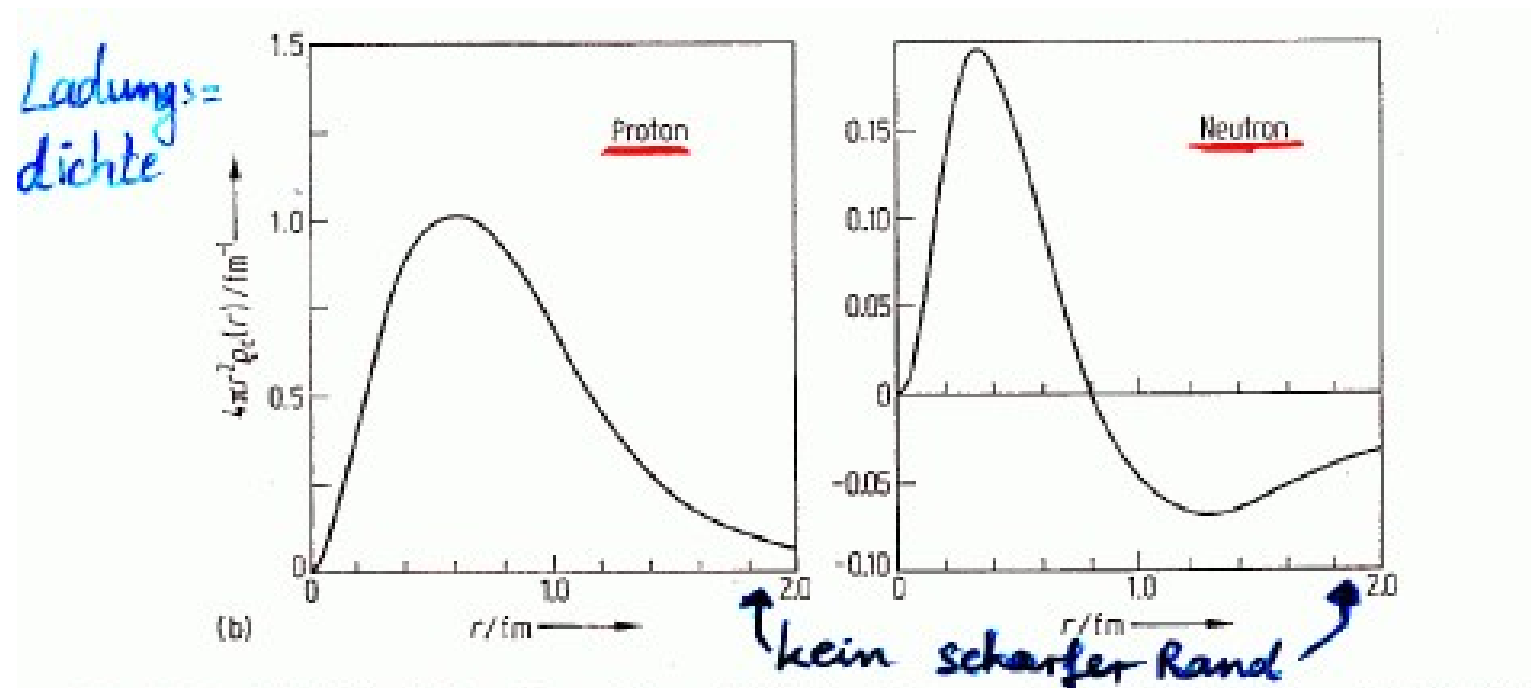


Abb. 2.22 (a) Elektrischer Formfaktor $F(q^2)$ des Protons als Funktion des quadrierten Impulsübertrages q^2 . (b) Ladungsdichten $4\pi r^2 \rho_c(r) dr$ von Proton und Neutron [60].