

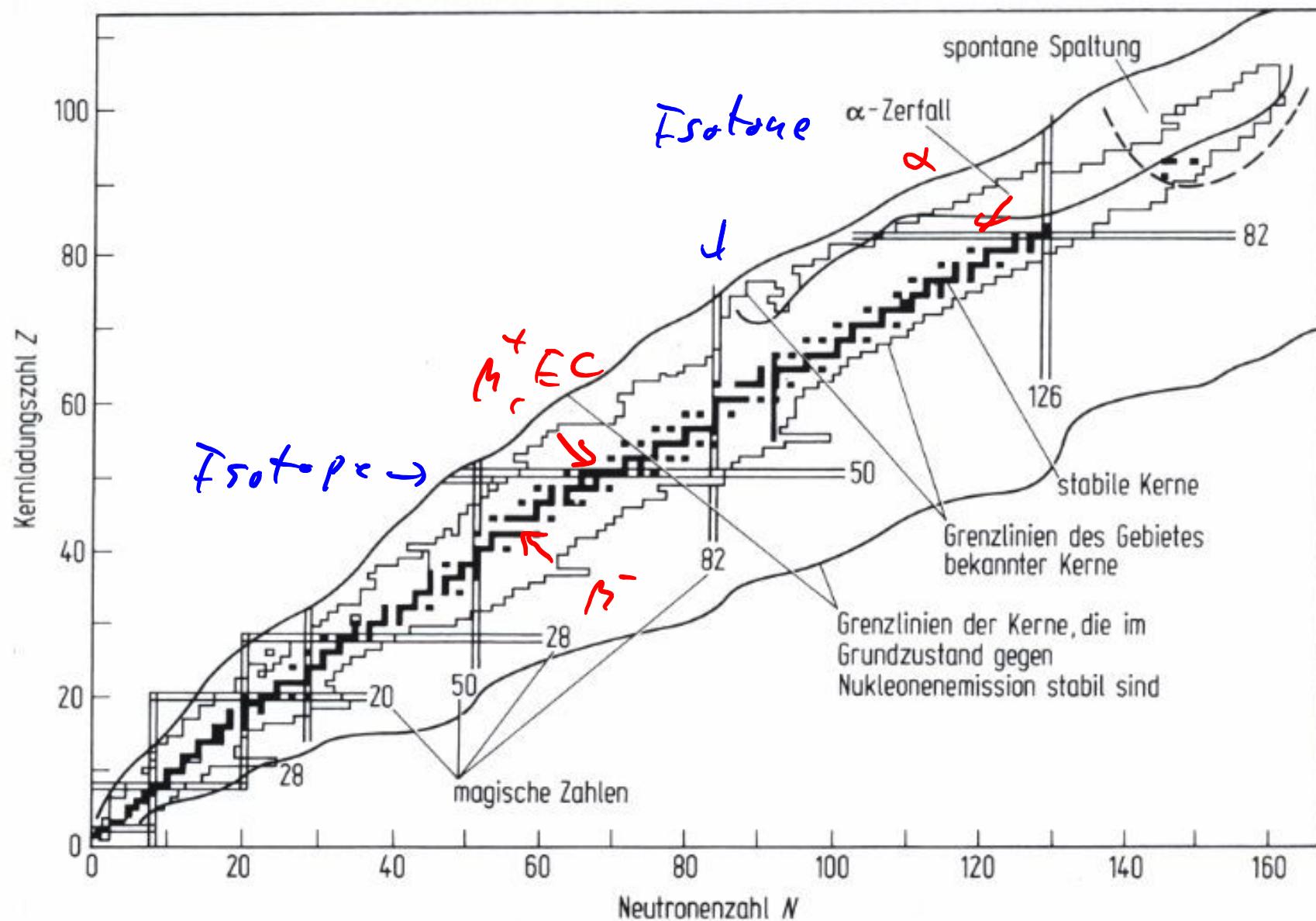
## 3. Stabilität von Kerzen

Becquerel, Marie und Pierre Curie ab 1896

- Spontane Kernumwandlungen beobachtet → Radioaktivität
- stabil? Lebensdauer  $\geq$  Alter des Universums / Sonnensystems
- Arten von Radioaktivität

	$\Delta Z$	$\Delta N$	$\Delta A$
$\alpha$ -Zerfall	-2	-2	-4
$\bar{n}$ -Zerfall ( $n \rightarrow p + e^0 + \bar{\nu}_e$ )	+1	-1	0
$\beta^+$ -Zerfall ( $p \rightarrow n + e^+ + \nu_e$ )	-1	+1	0
Elektroneneinfang (EC) ( $p + e^- \rightarrow n + \nu_e$ )	-1	+1	0
$\gamma$ -Zerfall	0	0	0
Neutronenemission	0	-1	-1
Protonenemission	-1	0	-1
Clusterradioaktivität	$-Z_{Cl}$	$-N_{Cl}$	$-(Z_{Cl} + N_{Cl})$
Spontane Spaltung	$\approx -\frac{1}{2}Z$	$\approx -\frac{1}{2}N$	$\approx -\frac{1}{2}A$

Lage instabiler Kerne im  $Z$ - $N$ -Diagramm



### 3.1 Zerfallsgesetz, Lebensdauer, Aktivität

- Fall der zerfallenden Kräfte

$$\Delta N = -\lambda \cdot N \cdot \Delta t$$

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N(t)$$

Lösung der DGL

Zerfallsgesetz:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}, \quad N_0 = N(t=0)$$

- Mittlere Lebensdauer  $\bar{\tau}$

$$\begin{aligned} \bar{\tau} &= \frac{1}{N_0} \cdot \int_0^{\infty} t \cdot \left( -\frac{dN}{dt} \right) dt = \int_0^{\infty} t \cdot \lambda e^{-\lambda t} dt = [t \cdot e^{-\lambda t}]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dt \\ &= \left[ -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

$\lambda$ : Zerfallskonstante

$$\boxed{\bar{\tau} = \frac{1}{\lambda}}$$

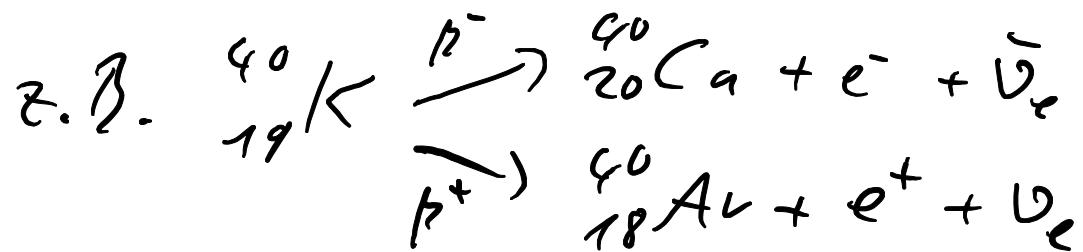
- Halbwertszeit  $t_{1/2}$

$$\frac{1}{2} N_0 \stackrel{!}{=} N(t_{1/2}) = N_0 e^{-\lambda t_{1/2}} \Rightarrow -\lambda t_{1/2} = \ln \frac{1}{2}$$

$$\boxed{t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} \approx T_{1/2}}$$

4

- Partielle Zerfallsbreite  $\lambda_k$



$$\lambda = \sum_{k=1}^N \lambda_k, \quad c = \frac{1}{\lambda}$$

Verzweigungsverhältnis (engl. branching ratio):

$$BR_k = \frac{\lambda_k}{\lambda}$$

- Aktivität A

$$A := -\frac{dN}{dt} = \lambda \cdot N = \lambda \frac{m \cdot N_A}{M}$$

m: Masse der Substanz

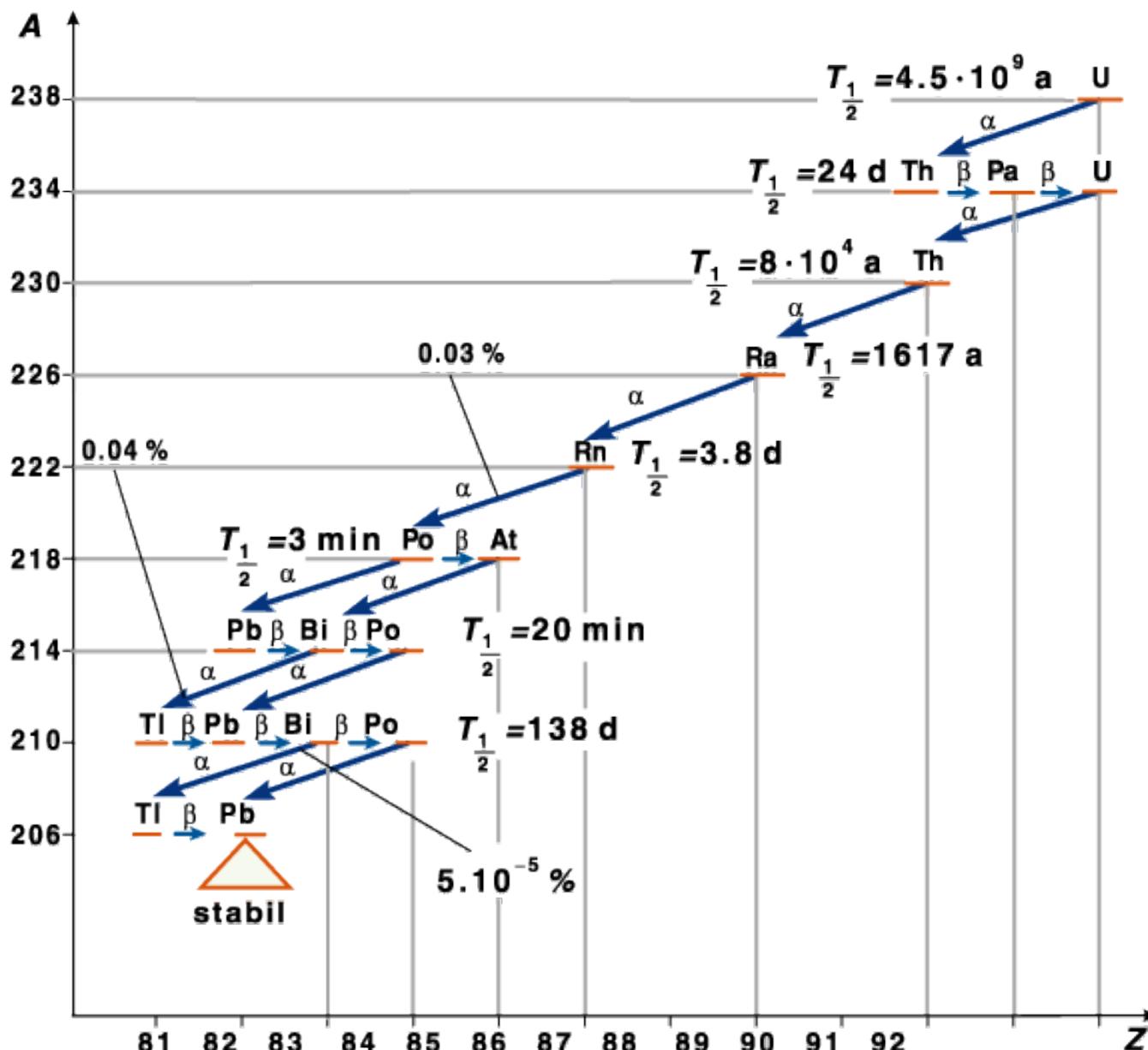
$N_A$ : Avogadrozahl

M: Molmasse

Einheit der Aktivität: Becquerel,  $1\text{Bq} \equiv 1\text{Zerfall/s}$

(alt. Curie:  $1\text{Ci} \equiv 3,7 \cdot 10^{10}\text{Bq}$ , Aktivität von  $1\text{g}$  Radion)

# Erfolgskriterien





$$\left. \begin{array}{l} 1) \frac{dN_\mu}{dt} = -\lambda_\mu N_\mu(t) \rightarrow N_\mu(t) = N_\mu(0) e^{-\lambda_\mu t} \\ 2) \frac{dN_\tau}{dt} = +\lambda_\mu N_\mu(t) - \lambda_\tau N_\tau(t) \end{array} \right\} \text{gekoppelte DGL}$$

$$\text{Ansatz: } N_\tau(t) = a e^{-\lambda_\mu t} - b e^{-\lambda_\tau t}$$

$$\rightarrow \frac{dN_\tau}{dt} = -a \lambda_\mu e^{-\lambda_\mu t} + b \lambda_\tau e^{-\lambda_\tau t}$$

$$\text{für } t=0: N_\tau(0) = 0 = a - b \Rightarrow a = b$$

$$\begin{aligned} \left. \left( \frac{dN_\tau}{dt} \right) \right|_{t=0} &= \lambda_\mu N_\mu(0) - \lambda_\tau N_\tau(0) = \lambda_\mu N_\mu(0) \\ &= -a \lambda_\mu + b \lambda_\tau = a (\lambda_\tau - \lambda_\mu) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a = b = \frac{\lambda_\mu N_\mu(0)}{\lambda_\tau - \lambda_\mu}$$

$$N_T(t) = \frac{\lambda_M N_M(0)}{\lambda_T - \lambda_M} \left( e^{-\lambda_M t} - e^{-\lambda_T t} \right)$$

$$\lambda_M \gg \lambda_T, t \gg \tau_M \Rightarrow N_T(t) = N_M(0) e^{-\lambda_T t}$$

$$\lambda_M \ll \lambda_T, t \gg \tau_T \Rightarrow N_T(t) = \frac{\lambda_M}{\lambda_T} N_M(0) e^{-\lambda_M t}$$

\*  $N_T(t)$  maximal wenn  $\frac{dN_T}{dt} = 0$

$$\lambda_M e^{-\lambda_M t} = \lambda_T e^{-\lambda_T t} \Rightarrow e^{(\lambda_T - \lambda_M)t} = \frac{\lambda_T}{\lambda_M}$$

$$t_{max} = \frac{\ln(\lambda_T / \lambda_M)}{\lambda_T - \lambda_M}$$

\* Für  $\lambda_T > \lambda_M$  und  $t \rightarrow \infty$ : Zerfallsgleichgewicht für  $\lambda_T \gg \lambda_M$

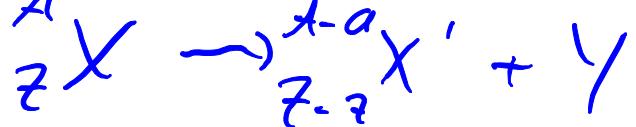
$$\frac{N_T}{N_M} = \frac{\lambda_M}{\lambda_T - \lambda_M} \left( 1 - e^{-(\lambda_T - \lambda_M)t} \right) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{\lambda_M}{\lambda_T - \lambda_M}$$

Z.B.  $\frac{^{226}Ra}{^{238}U} = \frac{1617 \text{ a}}{85 \cdot 10^2 \text{ a}} = 0,38 \cdot 10^{-6}$  d.h. 1 g Radium pro 3 x  $^{238}U$

$$\frac{N_T}{N_M} = \frac{\lambda_M}{\lambda_T} = \frac{\tau_T}{\tau_M}$$

## 3.2 Stabilitätskriterien

- Nicht-eindige Bedingung für spontanen Zerfall



$$\mu(A, Z) > \mu(A-a, Z-z) + \mu_Y$$

z.B.  $\alpha$ -Zerfall

$$Q = (\mu(A, Z) - \mu(A-\alpha, Z-2) - \mu_\alpha)^c^2 > 0$$

$$M_A = E_A = E_{A-\alpha} + E_\alpha = M_{A-\alpha} + E_{\text{kin}, A-\alpha} + m_\alpha + E_{\text{kin}, \alpha}$$

$$Q = E_{\text{kin}, A-\alpha} + E_{\text{kin}, \alpha}$$

Q-Wert der Zerfalls ist Summe der kinetischen Energien

9

$\frac{p}{c} \ll \mu_{A-\gamma}$ , und: Impuls-

$$E_{\text{kin}, A-\gamma} = \frac{(\vec{p}_{A-\gamma})^2}{2 M_{A-\gamma}} = \frac{(\vec{p}_\alpha)^2}{2 M_{A-\gamma}} = \frac{m_\alpha}{M_{A-\gamma}} E_{\text{kin}, \alpha}$$

$$\Rightarrow Q = E_{\text{kin}, A-\gamma} + E_{\text{kin}, \alpha} = \left( \frac{m_\alpha}{M_{A-\gamma}} + 1 \right) E_{\text{kin}, \alpha}$$

$$E_{\text{kin}, \alpha} = Q \frac{M(A-\gamma, Z-2)}{m_\alpha + M(A-\gamma, Z-2)}$$

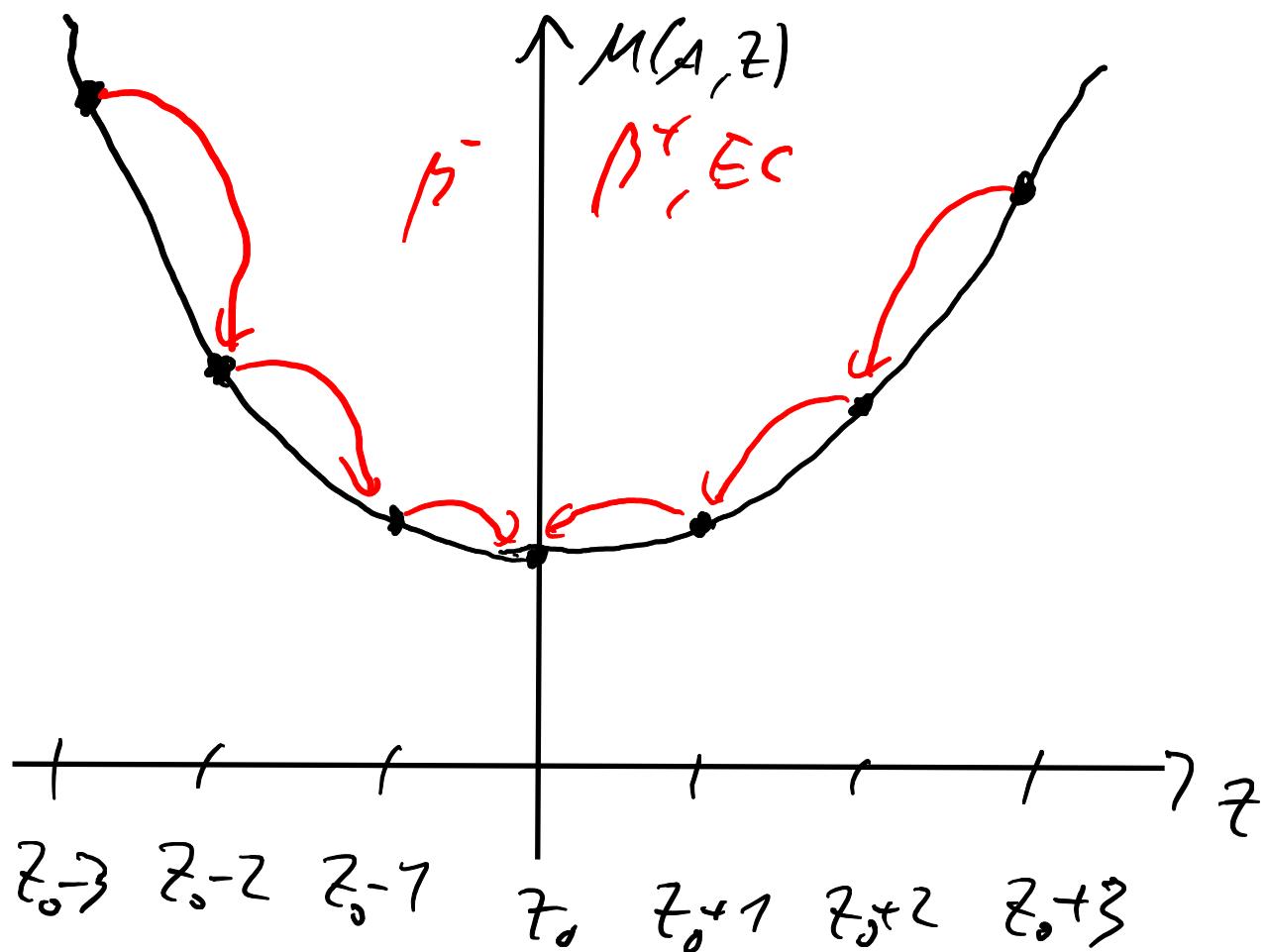
für  $M_{A-\gamma} \gg m_\alpha$ :  $E_{\text{kin}, \alpha} = Q$

### 3.2.1 Stahl: (litäts)kriterium: $\mu$ -Zerfall

Weizsäcker-Formel:  $B = a_v A - a_0 A^{2/3} - a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_p \frac{(A-Z)^2}{A} - a_f \frac{f}{A^{1/2}}$

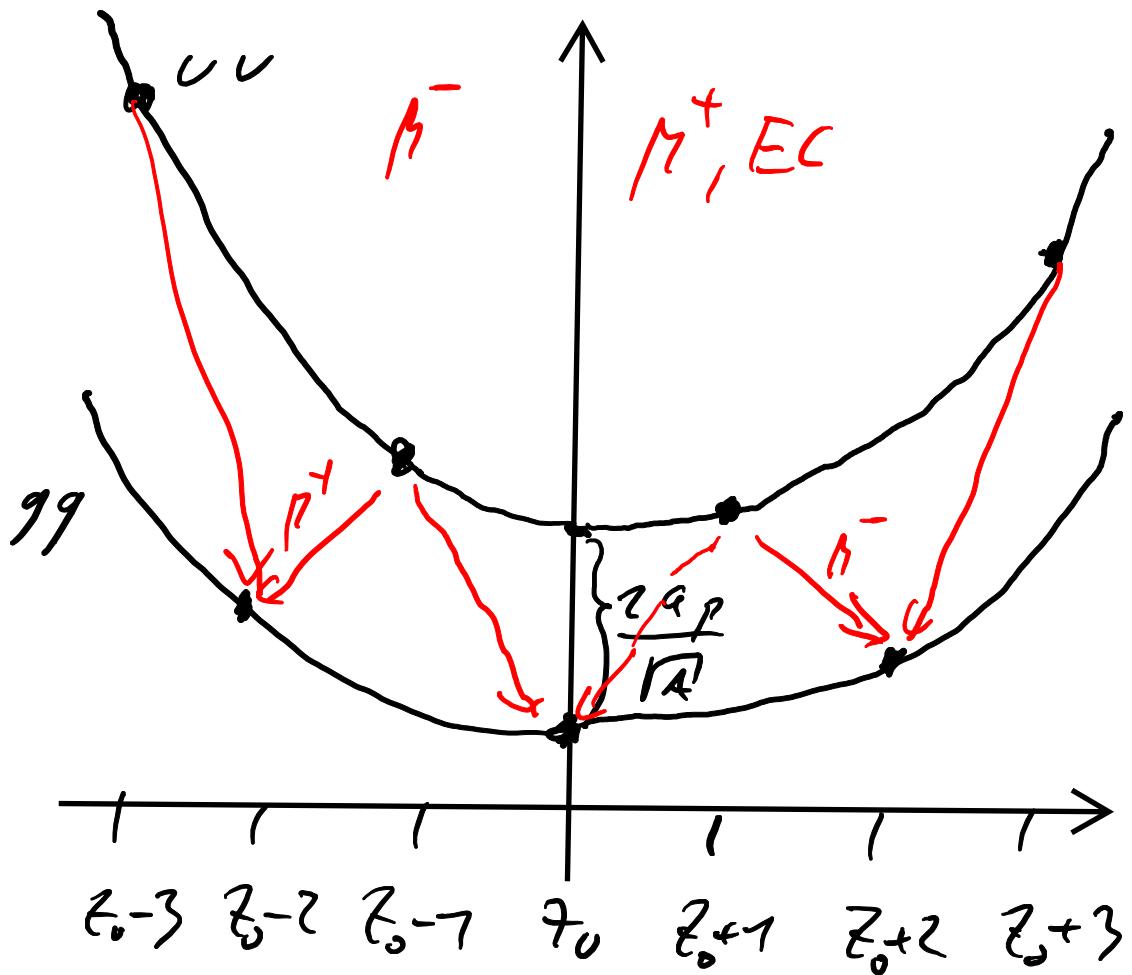
Isobare:  $A = \text{const}$      $B = c_1 + c_2 Z + c_3 Z^2 - a_p \frac{f}{A^{1/2}}$

•  $q_g, q_d$ -Kurve:  $f = 0$



In der Regel  
für ungerade A  
nur 1 stabiles Isobar  
(bzw.  $\mu$ -Zerfall)

$^{99, \text{uv}}\text{-Krone}, Z > 7$

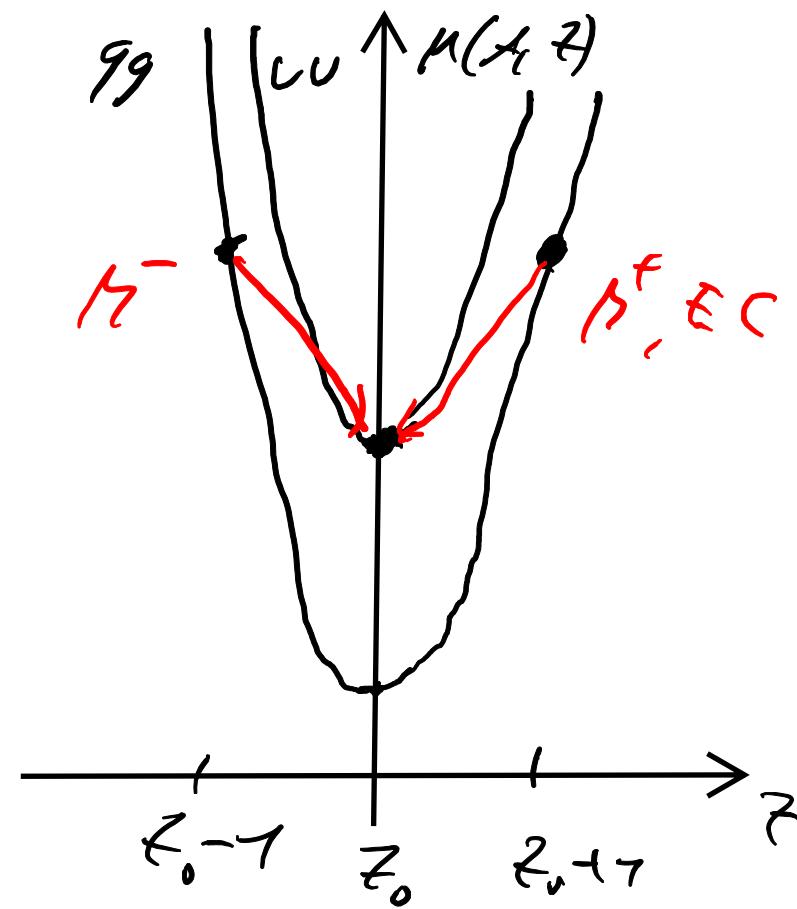


für gerade  $A$  und  $Z > 7$ :

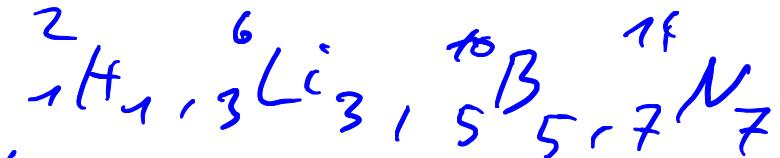
mehrere stabile Esbarre möglich,

die 97-Krone sind; keine stabile uv-Krone

$Z \leq 7$



für  $Z < 7$  gibt es  
nur stabile uv-Krone:



## 3.3.2 Nuklidkarte

Be  
9,01218  
 $\sigma$  0,0092

chemisches Symbol  
Masse in AME gemittelt über alle  
radioaktiven Isotope  
Einfangquerschnitt  $\sigma$  für  
Neutronen in barn =  $10^{-28} \text{ m}^2$

H 2  
0,015  
 $\sigma$  0,00053

rot: stabile Isotope  
Massenzahl A  
Isotopenhäufigkeit in %  
Einfangquerschnitt  $\sigma_n$  in barn

H 3  
12,346 a  
 $\beta$  0,02

weiß: instabile Isotope  
Massenzahl A  
mittlere Lebensdauer  
Energie der emittierten  $\beta$ ,  $\gamma$  in MeV,  
 $n$  = Neutronenemitter  
 $p$  = Protonenemitter

			O 15,9994 $\sigma$ 0,000270		O 13 8,9 ms $\beta^+$ 1,9 (p 1,44 6,44; 0,93 ...)	O 14 70,59 s $\beta^+$ 1,8; 4,1 $\gamma$ 2313	O 15 2,03 m $\beta^+$ 1,7 $n \sigma \gamma$	O 16 99,756 $\sigma$ 0,000178
			N 14,0067 $\sigma_{\text{abs}}$ 1,85		N 12 11,0 ms $\beta^+$ 16,4 $\gamma$ 4439 ( $\sigma$ ~ 1,6; 2,8)	N 13 9,96 m $\beta^+$ 1,2 $n \sigma \gamma$	N 14 99,64 $\sigma$ 0,075 $\sigma_{n,p}$ 1,81	N 15 0,36 $\sigma$ 0,000024
			C 12,011 $\sigma_{\text{abs}}$ 0,0034	C 9 126,5 ms $\beta$ 3,5 (p 8,24; 10,92)	C 10 19,3 s $\beta^+$ 1,9 $\gamma$ 718, 1022	C 11 20,3 m $\beta$ 1,0 $n \sigma \gamma$	C 12 98,89 $\sigma$ 0,0034	C 13 1,11 $\sigma$ 0,0009
			B 10,81 $\sigma_{\text{abs}}$ 759	B 8 762 ms $\beta$ 14,1 ( $2\sigma$ -1,6..8,3) p	B 9 20 $\sigma$ 0,5 $\sigma_{n,p}$ 3836	B 10 80 $\sigma$ 0,0005	B 11 80 $\sigma$ 0,0005	B 12 20,3 ms $\beta$ 13,4 $\gamma$ 4439 ( $\sigma$ 0,2 ...) B 13 17,33 ms $\beta$ 13,4 $\gamma$ 3684 ( $\sigma$ 3,6; 2,4)
4	Be 9,01218 $\sigma$ 0,0092			Be 7 53,4 d $\gamma$ 478 $\sigma_{n,p}$ 48000	Be 8 100 $2\sigma$ 0,05	Be 9 100 $\sigma$ 0,0092	Be 10 1,6 $\cdot 10^6$ a $\beta$ 0,6 $n \sigma \gamma$	Be 11 13,8 s $\beta$ 11,5 $\gamma$ 2125 6791 ( $\sigma$ ) Be 12 11,4 ms $\beta$ 11,7 ( $\sigma$ )
3	Li 6,941 $\sigma$ 70,7			Li 5 p	Li 6 7,5 $\sigma$ 0,028 $\sigma_{n,p}$ 940	Li 7 92,5 $\sigma$ 0,037	Li 8 844 ms $\beta$ 12,5 (2n ~ 1,6)	Li 9 176 ms $\beta$ 11,0; 13,5 (n 0,7 ...)
2	He 4,00260 $\sigma_{\text{abs}} < 0,05$		He 3 0,00013 $\sigma$ 0,00006 $\sigma_{n,p}$ 5327	He 4 99,99987 $\sigma$ 0	He 5 n	He 6 802 ms $\beta$ 3,5	He 7 n	He 8 122 ms $\beta\gamma$ ~ 10 $\gamma$ 981 (n)
1	H 1,0079 $\sigma$ 0,332	H 1 99,985 $\sigma$ 0,332	H 2 0,015 $\sigma$ 0,00053	H 3 12,346 a $\beta$ 0,02				

N →

1

2

3

4

5

6

7

8

### 3.3 $\mu$ -Zerfall

notwendige Bedingung:

- $\beta^-$ -Zerfall ( $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$ ):  $Q(\beta^-) = (\mu(A, Z) - \mu(A, Z+1) - m_e)c^2 > 0$
- $\beta^+$ -Zerfall ( $p \rightarrow n + e^+ + \nu_e$ ):  $Q(\beta^+) = (\mu(A, Z) - \mu(A, Z-1) - m_e)c^2 > 0$
- EC ( $p + e^- \rightarrow n + \nu_e$ ):  $Q(EC) = (\mu(A, Z) + m_e - \mu(A, Z-1))c^2 > 0$

• freies Neutron.

$$Q(\beta^-) = (m_n - m_p - m_e)c^2 = +0,87 \text{ MeV} > 0$$

$\Rightarrow$  freies Neutron zerfällt

• freies Proton:

$$Q(\beta^+) = (m_p - m_n - m_e)c^2 = -1,80 \text{ MeV} < 0$$

$\Rightarrow$  freies Proton zerfällt nicht

d.h. bei  $\beta^+$ -Zerfall wird Energie aus dem Kern benötigt

## Darstellung im Termschema

Berücksichtigung der Kiffernelektronen

$\rightarrow$  Atommasse  $M_A$  statt Kernmasse  $M_K$

$$M_A(A, Z) \approx M_K(A, Z) + Z \cdot m_e$$

$$\begin{aligned} Q(\gamma^+)/c^2 &= M_K(A, Z) - M_K(A, Z-1) - m_e \\ &= M_A(A, Z) - M_A(A, Z-1) - 2m_e \end{aligned}$$

Energie der  $\beta^-$  oder  $\beta^+$

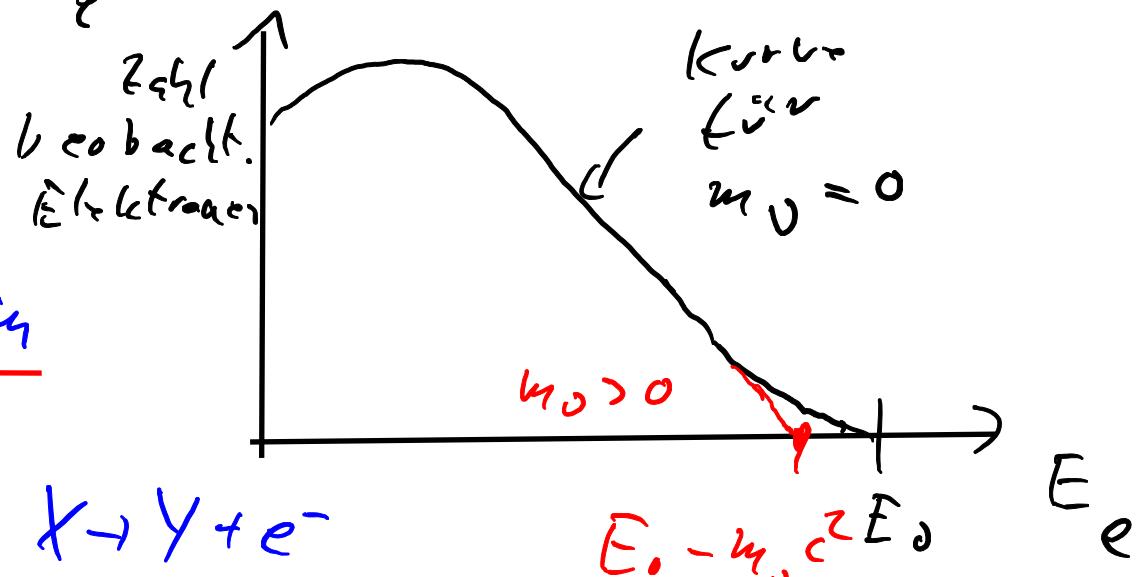
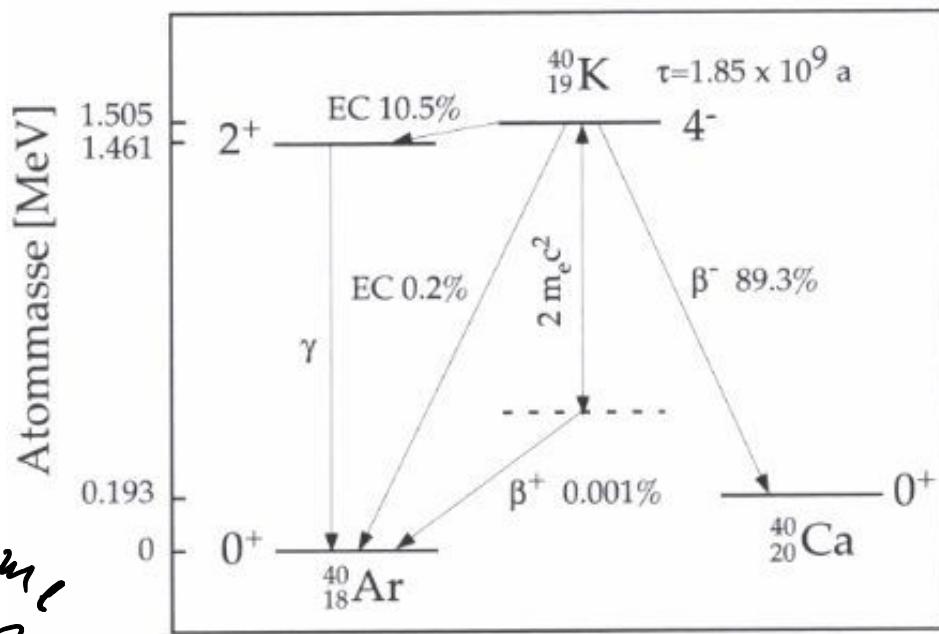
$\rightarrow$  exp. Beobachtung:

kontinuierliches Spektrum

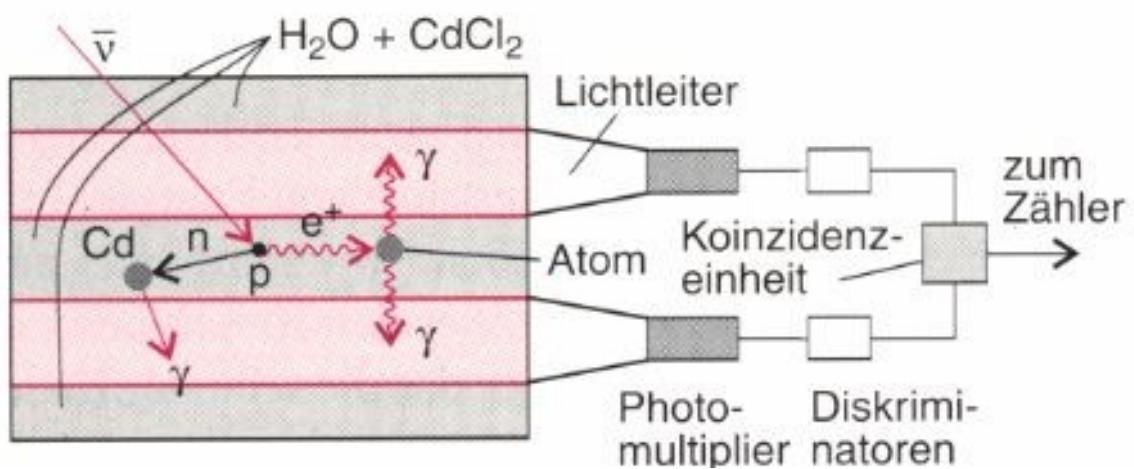
$\rightarrow$  max.  $\mu$ -Energie

betrachte 2-Körperzustand ( $\approx X \rightarrow Y + e^-$ )

$$E_{kin, e, max} = Q \cdot \frac{M_Y}{M_Y + m_e} m_e c^2 M_Y = Q \left(1 - \frac{m_e}{M_Y}\right) =: E_0$$



- Neutrino-Hypothese von W. Pauli (1930), damit Energie im  $\mu$ -Zerfall erhalten
- Neutrino-Nachweis von Reines-Cowan (1930):



Kernreaktor als  $\bar{\nu}_e$ -Quelle  
Reaktion: inverse  $\beta$ -Zerfall  

$$\bar{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+$$

Nachweis:

- theoretischer Behandlung:

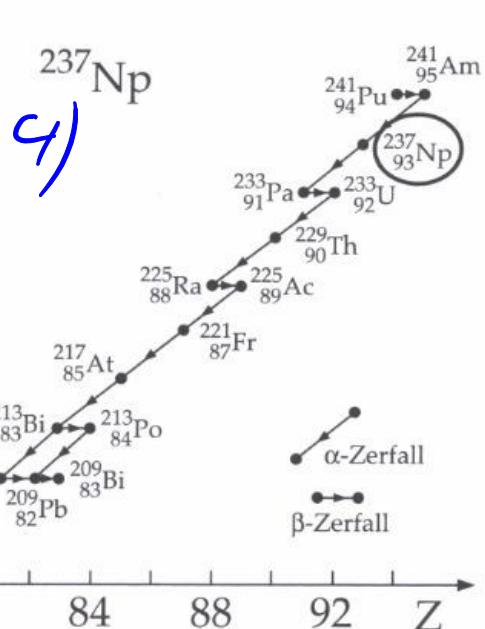
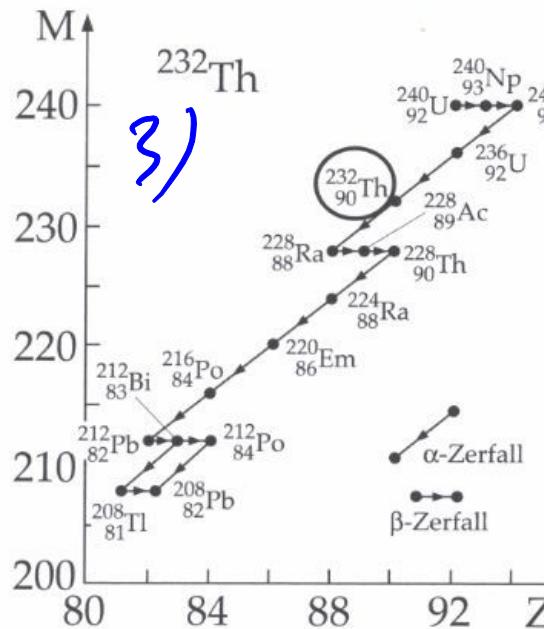
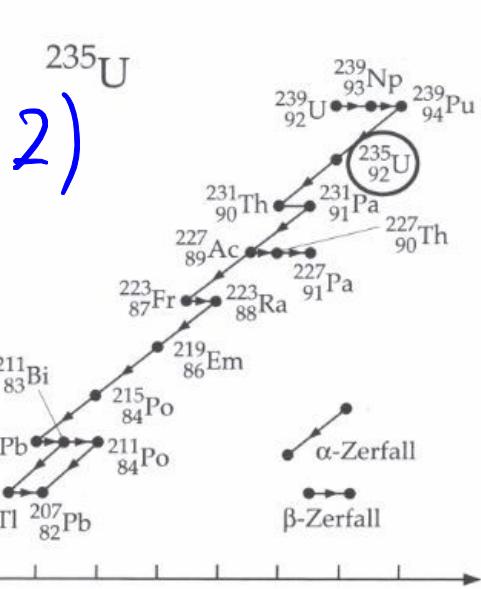
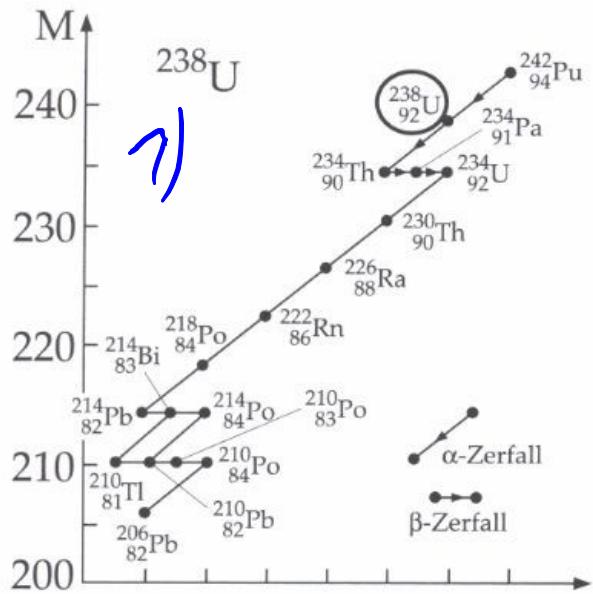
Fermi-Theorie (später)

- $e^+$  durch Annihilation
$$e^+ + e^- \rightarrow \gamma\gamma$$
- $n$  durch Erfang
$$_{\alpha}n + ^{118}\text{Cd}$$

$$^{118}\text{Cd} + n \rightarrow ^{119}\text{Cd} + \gamma$$

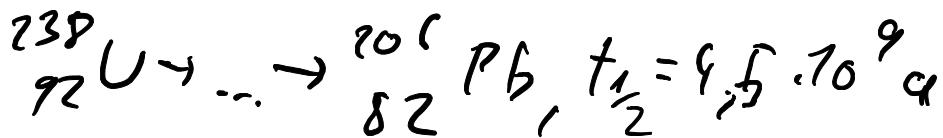
$$\Delta E = 91 \text{ MeV}$$

## 3.4 $\alpha$ -Zerfall II

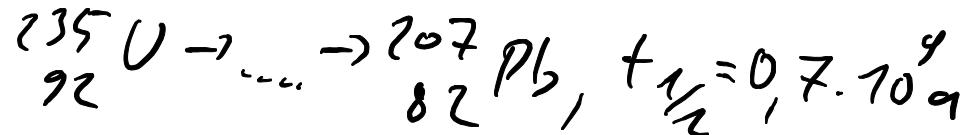


Wegen  $A_A = 9$ : Vier Zerfallsstufen

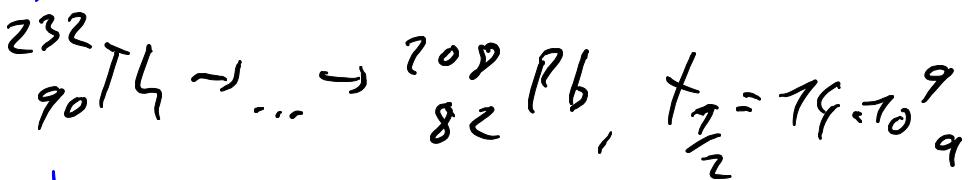
### 1) Uran-Radium-Reihe



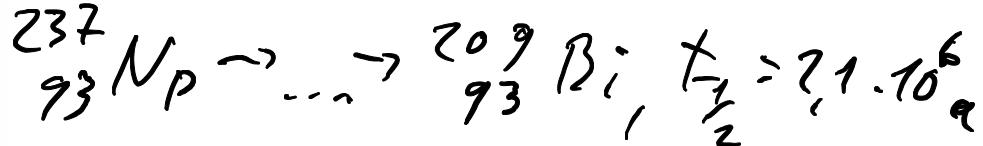
### 2) Aktinium-Reihe



### 3) Thorium-Reihe

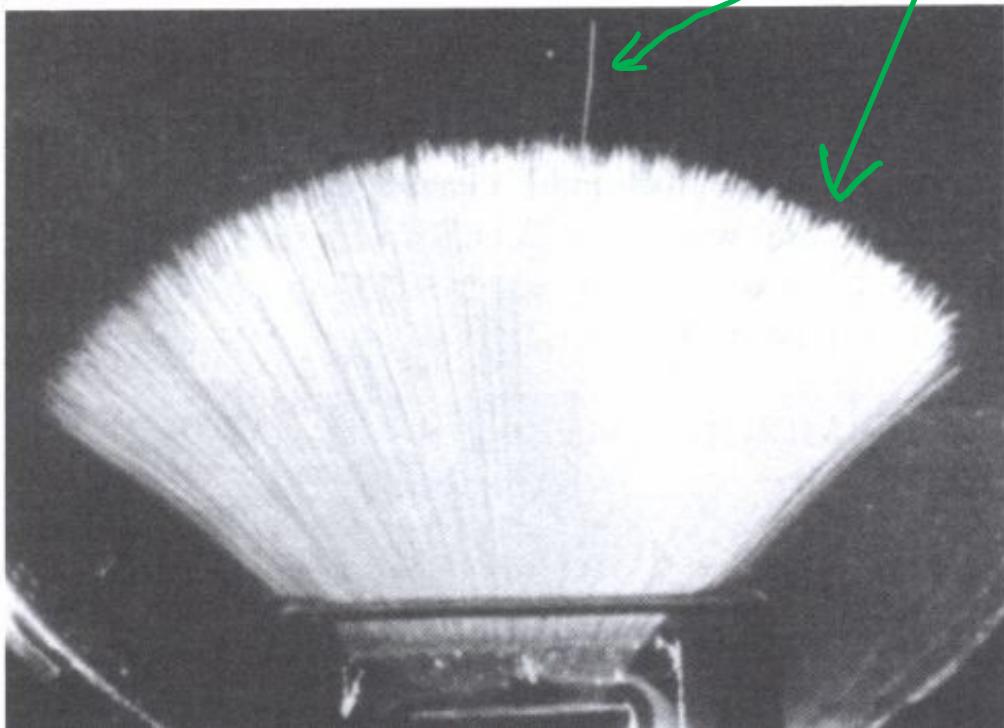
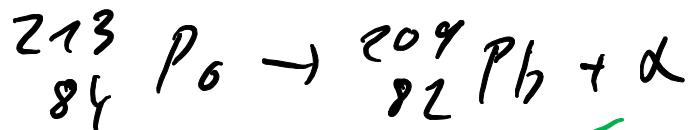
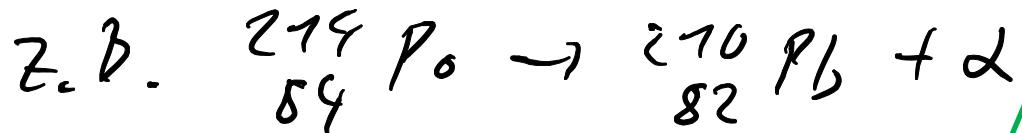


### 4) Neptunium-Reihe



(bereits vollständig  
Zerkalkt)

$\alpha$ -Zerfallsstrikche sind monoenergetisch  
 $\rightarrow \alpha$ -Zerfall ist 2-Körperzcofall



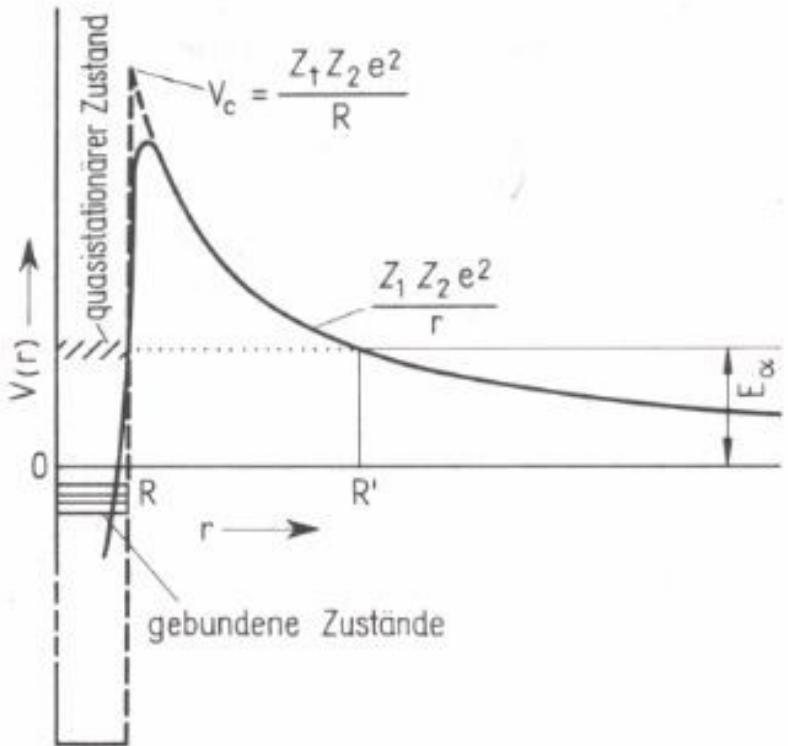
Nebelkammer -  
aufnahme der  
 $\alpha$ -Teilchenspuren  
aus Po-Zerfall  
Reichweite  
 $\geq$  Teilchenernergie

### 3.4.1 $\alpha$ -Zerfall: Gamov-Modell \*

- Betrachte Annäherung eines  $\alpha$ -Teilchens mit  $E_\alpha$  an Doppelkern
  - elektrostat. Abstoßung für  $r > R = R_Q + R_T$
  - $V_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z_T \cdot Z_\alpha e^2}{R}$ ,  $R = r_o (A_+^{1/3} + A_-^{1/3})$
  - kurzreichweite Kraft für  $r < R$
  - für  $E_\alpha > V_C$ : sofortiger  $\alpha$ -Zerfall des Mutterkerns
  - für  $E_\alpha < V_C$ : Quantenmechanische Tunneleffekt
- Gamov-Modell des  $\alpha$ -Zerfalls

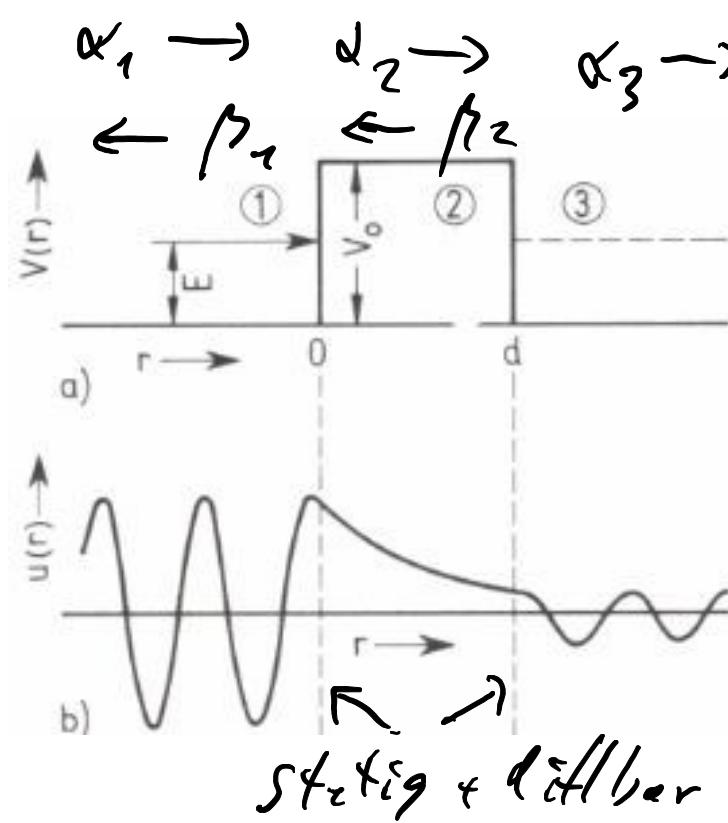
Zerfallskonstante:

$$\lambda_\alpha = \lambda_0 \cdot \lambda_i \cdot \tau_\alpha$$



mit  $\left\{ \begin{array}{l} \lambda_0: \text{Bildung von } \alpha\text{-Teilchen mit } E_\alpha \\ \lambda_i: \text{Stopfrate gegen Potenzialwand} \\ \tau_\alpha: \text{Tunnelwahrscheinlichkeit} \end{array} \right.$

- Erinnerung: Tunnel effekt an Potentialschwelle



$\alpha_i$ : Amplitude der einlaufender Welle  
 $\beta_i$ : Amplitude der auslaufenden Welle

$$\psi_1 = \alpha_1 e^{ik_1 r} + \beta_1 e^{-ik_1 r}, \quad k_1 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE}$$

$$\psi_2 = \alpha_2 e^{-k_1 r} + \beta_2 e^{+k_2 r}, \quad k_2 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(V_0 - E)}$$

$$\psi_3 = \alpha_3 e^{ik_1 r}$$

$$\psi_1(0) = \psi_2(0), \quad \psi_1'(0) = \psi_2'(0)$$

$$\psi_2(d) = \psi_3(d), \quad \psi_2'(d) = \psi_3'(d)$$

→ Transmissions- / Tunnelwahrscheinlichkeit  $T$

$$T = \left| \frac{\alpha_3}{\alpha_1} \right|^2 = \left[ 1 + \frac{V_0^2}{V_0^2 - (2E - V_0)^2} \cdot \sinh^2(k_2 d) \right]^{-1}$$

$$^{20} k_2 d \gg 1 \rightarrow T \approx q \underbrace{\frac{V_0^2 - (2E - V_0)^2}{V_0^2}}_{O(1)} \cdot e^{-2k_2 d} \approx e^{-\frac{2\sqrt{2m}(V_0 - E)}{\hbar} d / k_2}$$

Für  $V(r) = V_C$

mit Geiger-Faktor

$$T_d = e^{-G} \quad R' \\ G = \frac{2\sqrt{2m}}{\hbar} \int_R^{R'} \sqrt{\frac{Z_T \cdot Z_d \cdot e^2}{4\pi \epsilon_0 r}} - E \, dr$$

Analytische Integration:  $G = G\left(\frac{R}{R'}\right)$

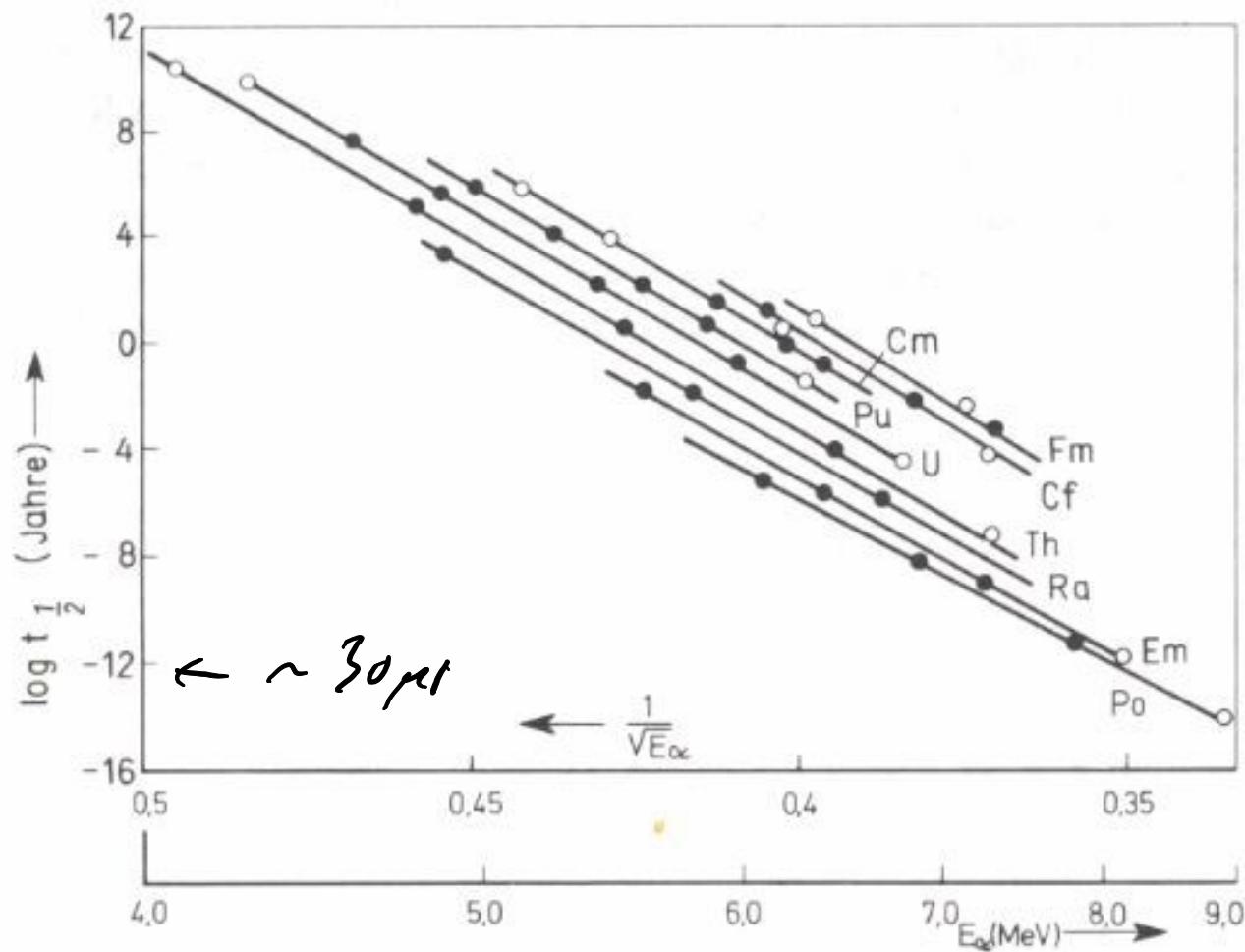
für  $R' \gg R \rightarrow$

$$G = i \alpha Z_T Z_d \sqrt{\frac{2mc^2}{E_d}} \sim \frac{1}{\sqrt{E_d}}$$

Geiger - Nuttal - Regel (empirisch gefunden, von Geiger - Modell erklärt)

$$T_d \sim \frac{1}{Z_d}, \quad Z_d \sim T_d \sim e^{-G}, \quad G \sim \frac{1}{\sqrt{E_d}} \Rightarrow$$

$$\log T_d \sim \frac{1}{\sqrt{E_d}}$$



Isotope liegt  
auf einer  
Geraden

Kleine Variationen von  $E_\alpha \Rightarrow$  große Variationen von  $t_{1/2}$   
aufgrund von  $e^{Y/E_\alpha}$

Die meisten  $\alpha$ -Strahler sind schwerer als Pb