Wichtig: Vorlesung und Übung am **30.01.2018** finden in **N 120** (Geschwister-Scholl-Platz 1) respektive **S 005** (Schellingstraße 3) zur gewohnten Zeit statt.

www.physik.uni-muenchen.de/lehre/vorlesungen/wise_17_18/T4_stat_mech/index.html

Blatt 12: Zwei und mehr Teilchen

Ausgabe: Freitag, 26.01.18; Abgabe: Montag, 05.02.18, 13:00 Uhr

Aufgabe 1 Potts-Modell in einer Dimension

Wir betrachten N Atome auf einer eindimensionalen Kette mit periodischen Randbedingungen. Jedes Atom j ist in einem von p möglichen Zuständen $n_j \in \{1, \ldots, p\}$. Nachbaratome wechselwirken, sofern sie im selben Zustand sind,

$$H = -J \sum_j \delta_{n_j, n_{j+1}} , \tag{1}$$

wobei die Kopplung $J > 0$ positiv ist und durch die periodischen Ränder gilt $n_{N+1} \equiv n_1$.
Führen Sie folgende Rechnungen im thermodynamischen Limes $N \to \infty$ durch:

(1.a) (**2 Punkte**) Berechnen Sie für den Fall $p = 2$ die kanonische Zustandssumme und freie Energie.

(1.b) (**3 Punkte**) Berechnen Sie die freie Energie für allgemeine p.

(1.c) (**2 Punkte**) Welche Energie E finden Sie in den Limites hoher und niedriger Temperatur? Diskutieren Sie Ihr Ergebnis.

Aufgabe 2 Diatomare Moleküle in zwei Dimensionen

Wir überlegen uns im Folgenden die thermodynamischen Eigenschaften diatomarer, *heteronuklearer* Moleküle in zwei räumlichen Dimensionen.
Wir beschränken uns dabei auf Rotationsfreiheitsgrade. Die Energie dieser Moden ist gegeben durch,

$$\epsilon_J = k_B \Theta_{\mathrm{rot}} J^2 , \quad J = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{2}$$

Alle angeregten Zustände $J > 0$ sind dabei zweifach entartet.

(2.a) (**2 Punkte**) Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme Z_{rot} in den Limites hoher und niedriger Temperaturen – verglichen mit Θ_{rot}.

(2.b) (**2 Punkte**) Berechnen Sie Energie E_{rot} und die Wärmekapazität C_{rot} in diesen Limites.

Aufgabe 3 Quantenmechanische harmonische Oszillatoren

Betrachten Sie N unabhängige quantenmechanische Oszillatoren

$$H = \sum_{i}^{N} \hbar\omega(n_i + \tfrac{1}{2})\,. \tag{3}$$

Hier ist n_i die Besetzungszahl des $i$ten Oszillators.

(3.a) (**3 Punkte**) Berechnen Sie die *mikrokanonische* Zustandssumme und daraus die Entropie S als Funktion der totalen Energie E.

(3.b) (**2 Punkte**) Berechnen Sie die Energie E und die Wärmekapazität C als Funktionen der Temperatur T und N. Zwischenergebnis:

$$E(T, N) = N\hbar\omega\Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1}\Big)\,. \tag{4}$$

(3.c) (**2 Punkte**) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $p(n)$, dass ein bestimmter Oszillator Besetzungszahl n hat.

(3.d) (**2 Punkte**) Wie unterscheidet sich die Wärmekapazität zum klassischen Fall? Betrachten Sie dafür Grenzwerte in Abhängigkeit von der Temperatur.