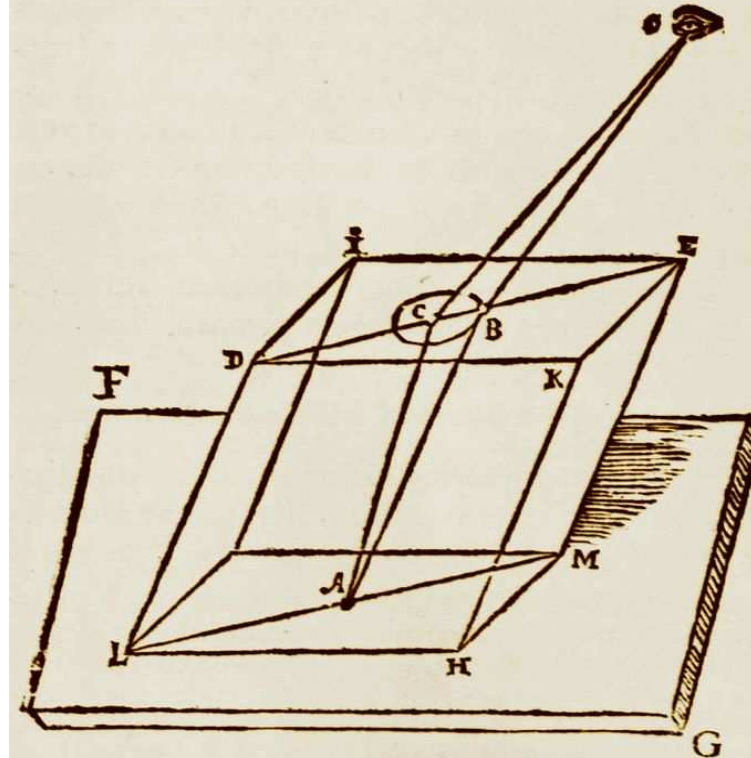


# Doppelbrechung und Anwendungen

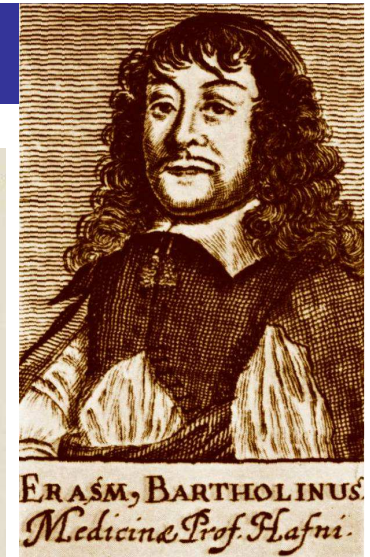




re, neque imago in superficie nisi remotione ob-  
jecti vacillare; heic observavimus, unam ex dua-



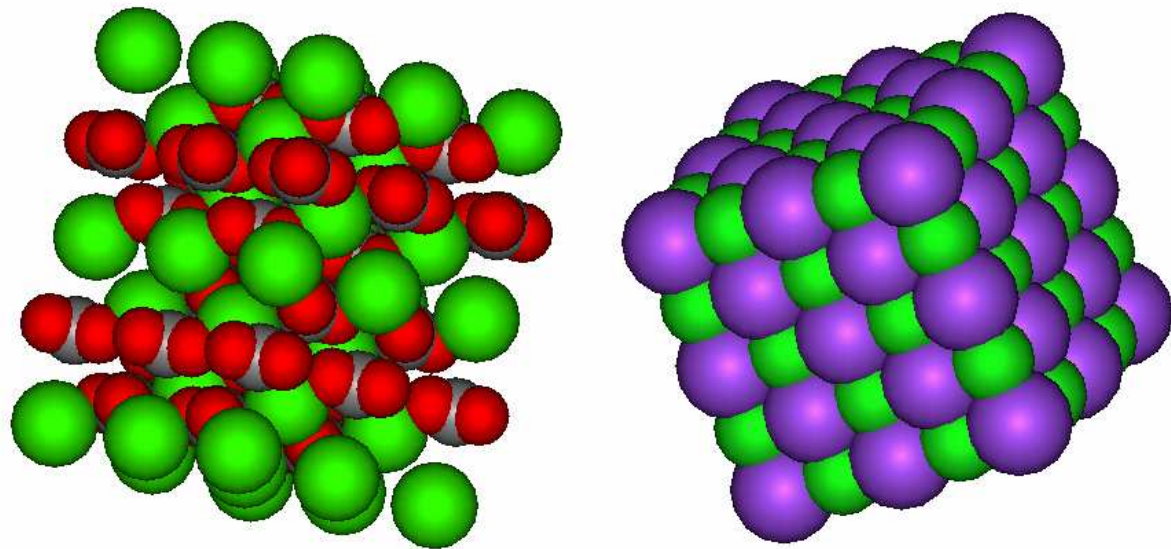
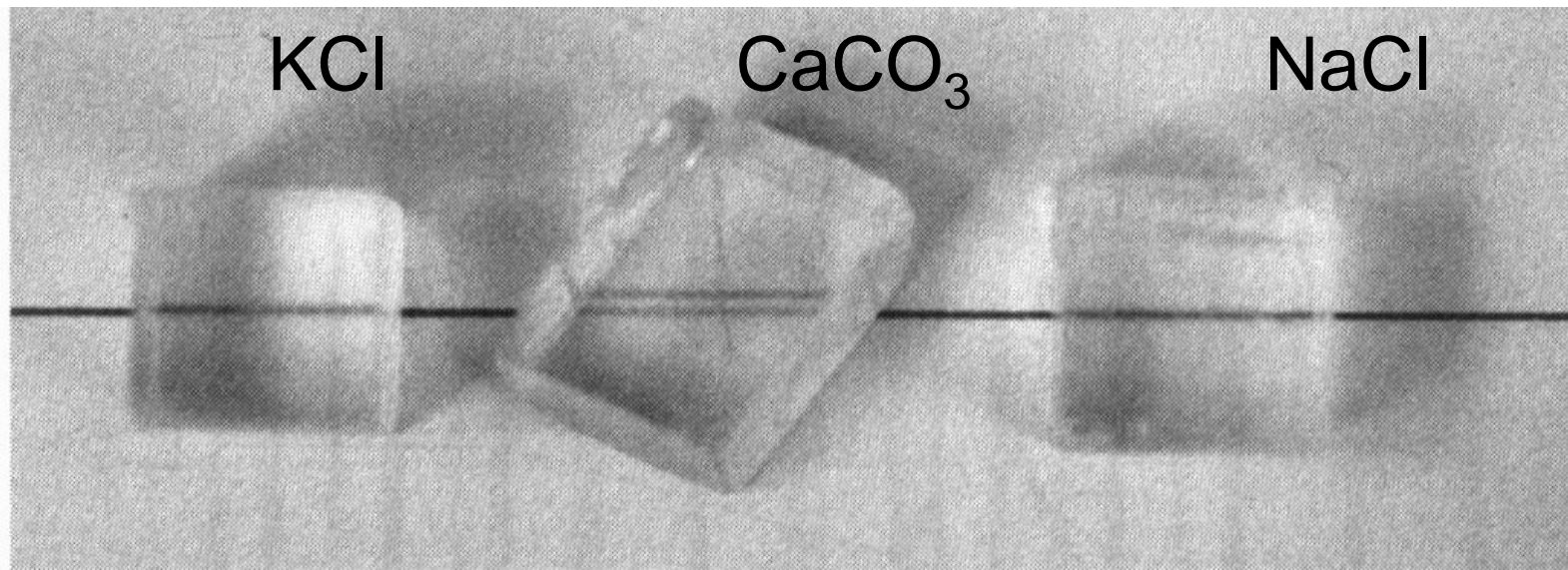
bus imaginibus esse mobilem: id quod hac ra-  
tione indagare licet. In schemate præcedente,  
C 3 ma-



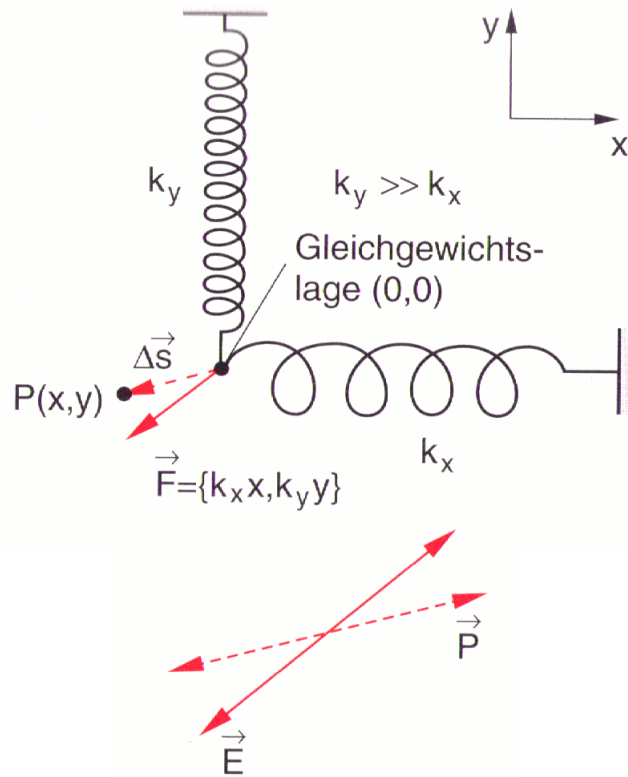
1669: Doppelbrechung in isländischem Kalkspat



# Doppelbrechung in Kristallen



# Ausbreitung von Lichtwellen in anisotropen Medien



$$\vec{P} = \epsilon_0 (\tilde{\epsilon} - 1) \vec{E}$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \tilde{\epsilon} \epsilon_0 \vec{E}$$

$$\tilde{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix}$$

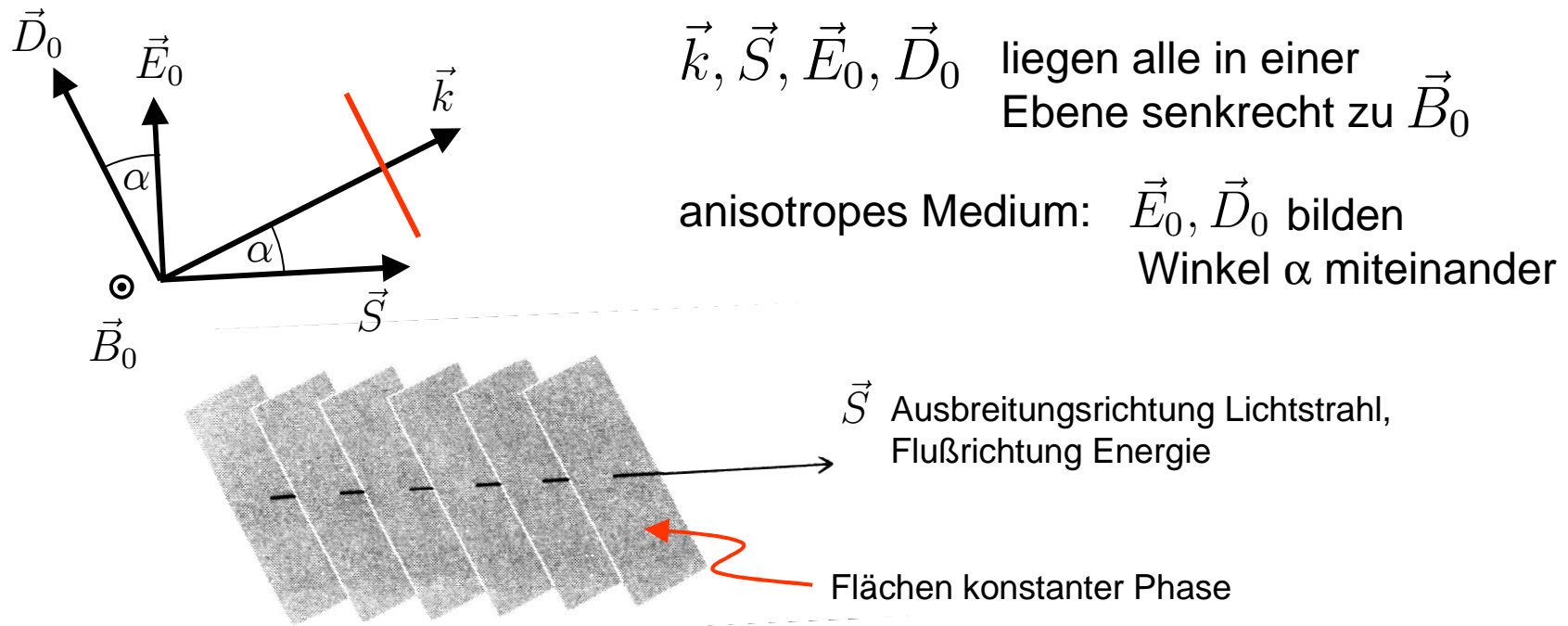
verlustfrei, nichtmagnetisch:  
Tensor symmetrisch

$$\begin{aligned} \frac{1}{\epsilon_0} D_x &= \epsilon_{xx} E_x + \epsilon_{xy} E_y + \epsilon_{xz} E_z \\ \frac{1}{\epsilon_0} D_y &= \epsilon_{yx} E_x + \epsilon_{yy} E_y + \epsilon_{yz} E_z \\ \frac{1}{\epsilon_0} D_z &= \epsilon_{zx} E_x + \epsilon_{zy} E_y + \epsilon_{zz} E_z \end{aligned}$$

Anisotropie:

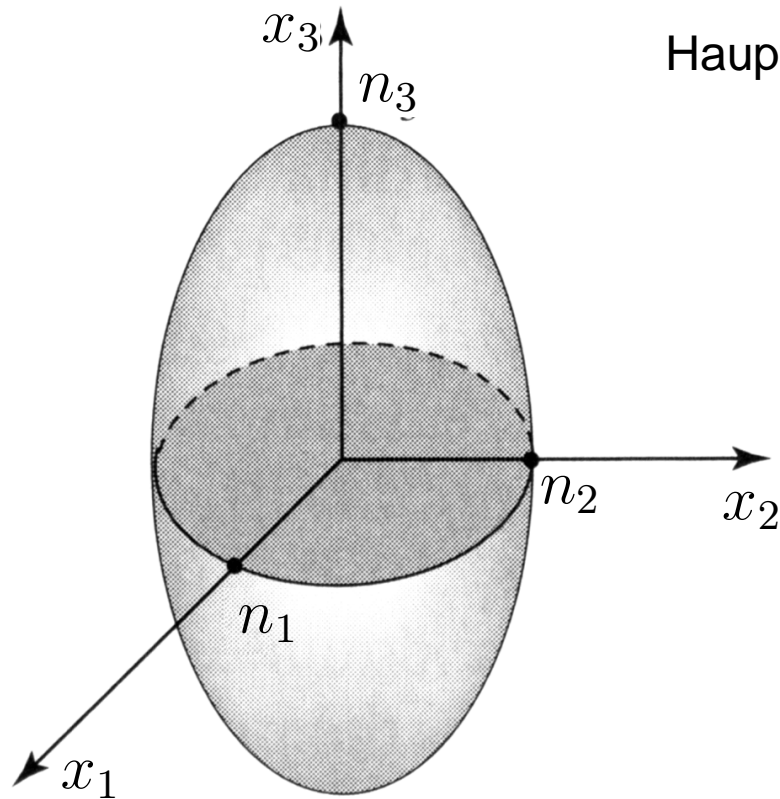
- ⇒ Polarisation und anregendes Feld nicht mehr parallel
- ⇒ Schwingungsrichtung der induzierten Dipole nicht mehr parallel zum E-Feld der einfallenden Welle

# Feldrichtungen in anisotropen Medien



- Phasenflächen senkrecht zu  $\vec{k}$
  - Flußrichtung Energie entlang  $\vec{S}$
- ⇒ in anisotropen Kristallen Richtung Wellenvektor und Flußrichtung der Energie i. Allg. verschieden

# Brechungsindex-Ellipsoid (optische Indikatrix)



Hauptachsentransformation:

$$\tilde{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_3^2 \end{pmatrix}$$

$$n_1 < n_2 < n_3$$

$$\epsilon_0 \vec{E}_0 = \tilde{\eta} \vec{D}_0 = \begin{pmatrix} 1/n_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/n_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/n_3^2 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\eta} = \tilde{\epsilon}^{-1} \quad \text{Impermeabilitätstensor}$$

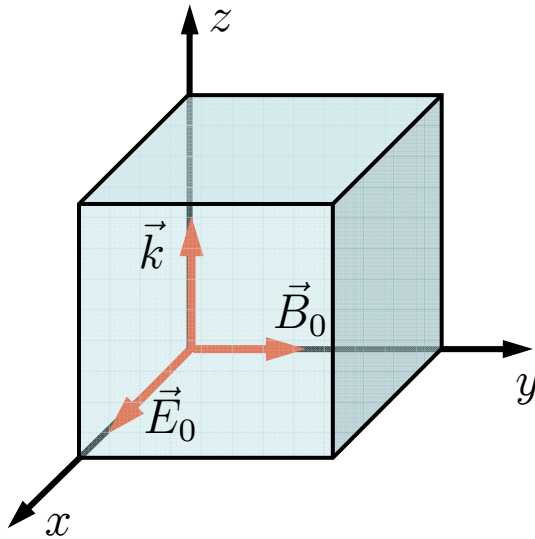
$$\sum_{ij} \eta_{ij} x_i x_j = \frac{x^2}{n_1^2} + \frac{y^2}{n_2^2} + \frac{z^2}{n_3^2} = 1$$

Ellipsoid,  
„optische Indikatrix“

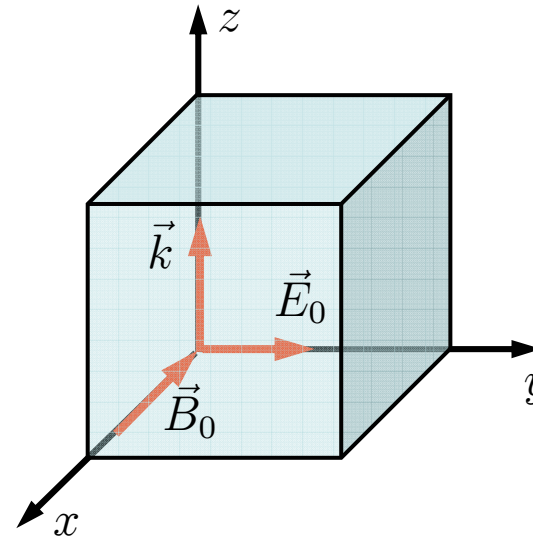
Optische Eigenschaften des Kristalls  
vollständig durch optische Indikatrix beschrieben.

## Propagation entlang Hauptachsen, Polarisation entlang Hauptachsen

$$\vec{D}_0 = \epsilon_0 \begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{pmatrix} \vec{E}_0 = \epsilon_0 \begin{pmatrix} n_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_3^2 \end{pmatrix} \vec{E}_0$$



$$\vec{D}_0 = \epsilon_0 n_1^2 \vec{E}_0 \quad v = c/n_1$$



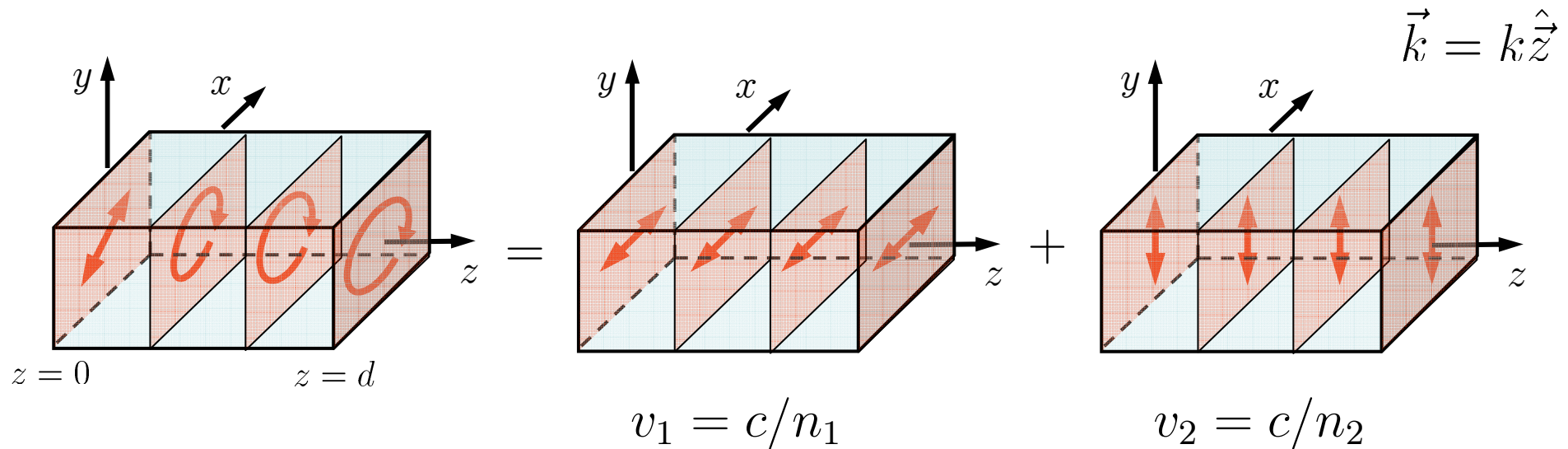
$$\vec{D}_0 = \epsilon_0 n_2^2 \vec{E}_0 \quad v = c/n_2$$

$$\vec{k} = k \hat{z}$$

- ⇒ Ausbreitungsgeschwindigkeit entlang Hauptachsen hängt vom Polarisationszustand des Lichtes ab
- ⇒ „Normalmode“: Polarisationszustand ändert sich nicht



# Propagation entlang Hauptachsen, Polarisation beliebig



$$\vec{E} = E_x \hat{x} + E_y \hat{y}$$

Zerlegung in zwei linear polarisierte Komponenten,  $\vec{E}_x$  und  $\vec{E}_y$  parallel zu den Hauptachsen

$$\begin{aligned} E_x(z=d) &= E_{0x} e^{i(kd-\omega t)} \\ &= E_{0x} e^{i(n_1 k_0 d - \omega t)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_y(z=d) &= E_{0y} e^{i(kd-\omega t)} \\ &= E_{0y} e^{i(n_2 k_0 d - \omega t)} \end{aligned}$$

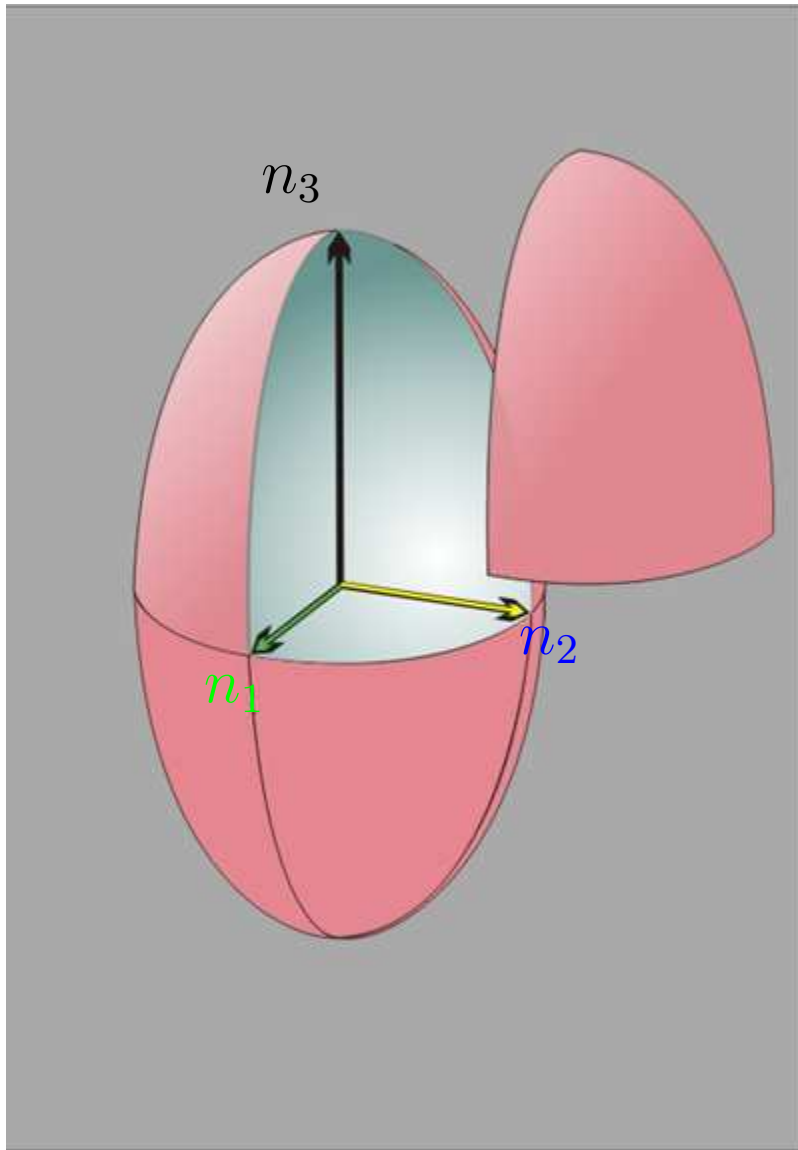
$$\Delta\varphi = (n_1 - n_2) k_0 d \quad \text{Phasendifferenz zwischen den Komponenten}$$

⇒ aus linear polarisiertem Licht wird elliptisch polarisiertes Licht

⇒ allgemein: zwei senkrecht zueinander polarisierte Normalmoden für jede Richtung



# Propagation in beliebiger Richtung



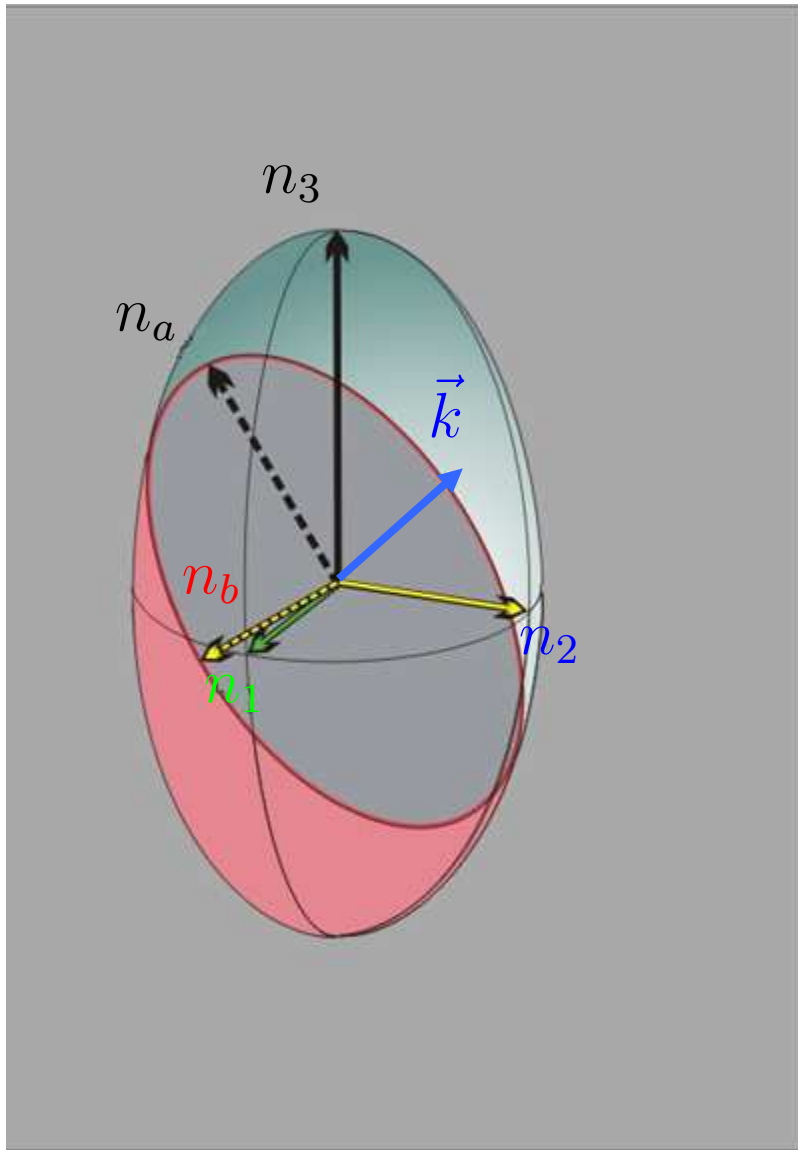
- optische Indikatrix = dreiachsiger Ellipsoid
- k-Vektor, Schnittfläche senkrecht dazu  
⇒ Schnittellipse
- Halbachsen der Schnittellipsen:  
Brechungsindizes  $n_a, n_b$  für Normalmoden
- Richtung der Halbachsen: Richtungen von  $\vec{D}_a, \vec{D}_b$   
⇒ zwei senkrecht zueinander polarisierte Normalmoden
- zwei Kreisschnitte,  
Lote darauf = „optische Achsen“  
⇒ Welle entlang optische Achse wie in isotropem Medium

$n_1 \neq n_2 \neq n_3 \neq n_1$  : zwei optische Achsen,  
„biaxial“

$n_1 = n_2 \neq n_3$  : Rotationsellipsoid  
eine optische Achse,  
„uniaxial“

$n_1 = n_2 = n_3$  : Kugel

# Propagation in beliebiger Richtung



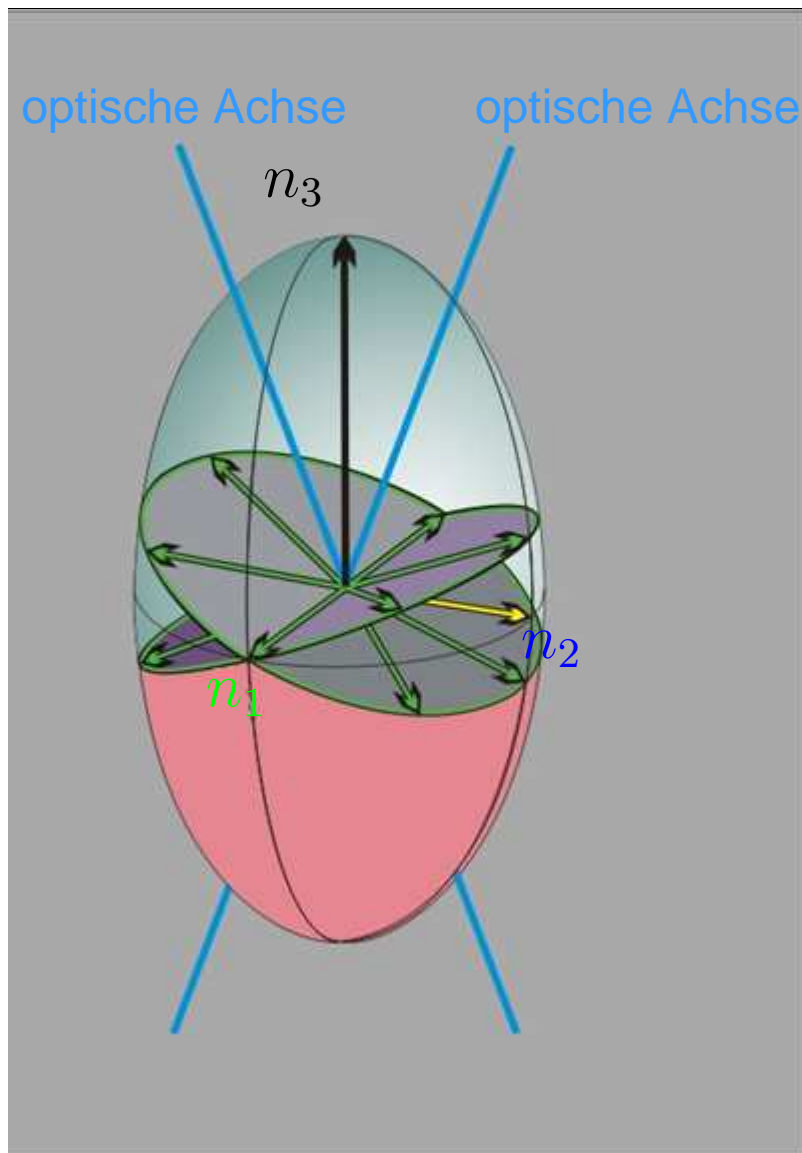
- optische Indikatrix = dreiachsiger Ellipsoid
- $\vec{k}$ -Vektor, Schnittfläche senkrecht dazu  
⇒ Schnittellipse
- Halbachsen der Schnittellipsen:  
Brechungsindizes  $n_a, n_b$  für Normalmoden
- Richtung der Halbachsen: Richtungen von  $\vec{D}_a, \vec{D}_b$   
⇒ zwei senkrecht zueinander polarisierte Normalmoden
- zwei Kreisschnitte,  
Lote darauf = „optische Achsen“  
⇒ Welle entlang optische Achse wie in isotropem Medium

$n_1 \neq n_2 \neq n_3 \neq n_1$  : zwei optische Achsen,  
„biaxial“

$n_1 = n_2 \neq n_3$  : Rotationsellipsoid  
eine optische Achse,  
„uniaxial“

$n_1 = n_2 = n_3$  : Kugel

# Propagation in beliebiger Richtung



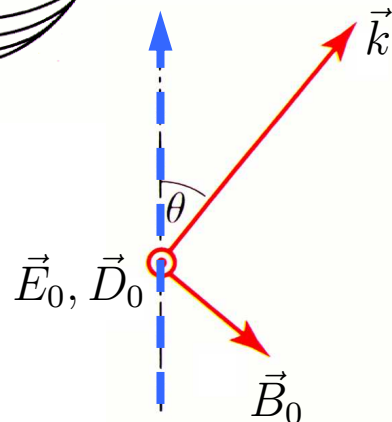
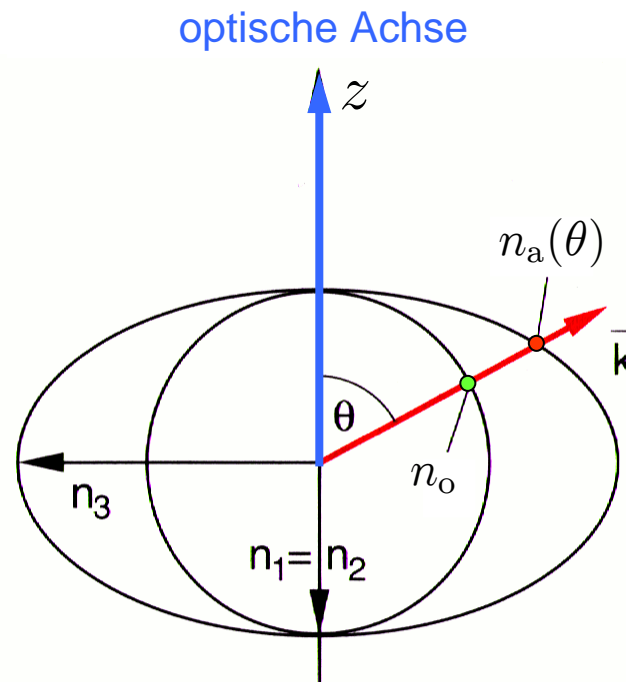
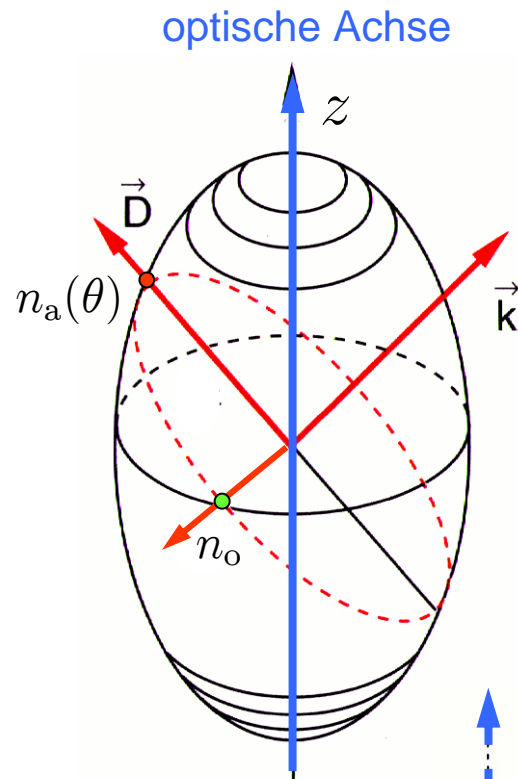
- optische Indikatrix = dreiachsiger Ellipsoid
- $\mathbf{k}$ -Vektor, Schnittfläche senkrecht dazu  
 $\Rightarrow$  Schnittellipse
- Halbachsen der Schnittellipsen:  
Brechungsindizes  $n_a, n_b$  für Normalmoden
- Richtung der Halbachsen: Richtungen von  $\vec{D}_a, \vec{D}_b$   
 $\Rightarrow$  zwei senkrecht zueinander polarisierte Normalmoden
- zwei Kreisschnitte,  
Lote darauf = „optische Achsen“  
 $\Rightarrow$  Welle entlang optische Achse wie in isotropem Medium

$n_1 \neq n_2 \neq n_3 \neq n_1$  : zwei optische Achsen,  
„biaxial“

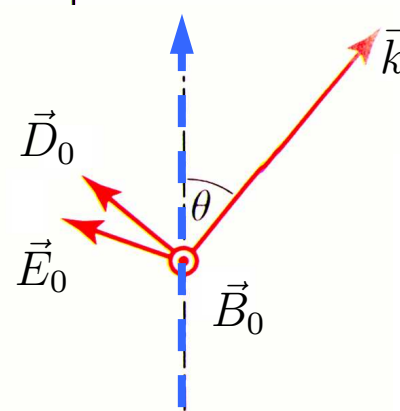
$n_1 = n_2 \neq n_3$  : Rotationsellipsoid  
eine optische Achse,  
„uniaxial“

$n_1 = n_2 = n_3$  : Kugel

# Uniaxialer Kristall



ordentlicher Strahl:  
 $\vec{D}_0 \perp$  optische Achse



außerordentlicher Strahl:  
 $\vec{D}_0$  in Ebene (optische Achse,  $\vec{k}$ )

uniaxialer Kristall:

$n_3 > n_1 = n_2$  : optisch positiv

$n_3 < n_1 = n_2$  : optisch negativ

$n_o$  : unabhängig von  $\theta$   
 „ordentlicher Brechungsindex“

$n_a(\theta)$  : abhängig von  $\theta$   
 „außerordentlicher Brechungsindex“

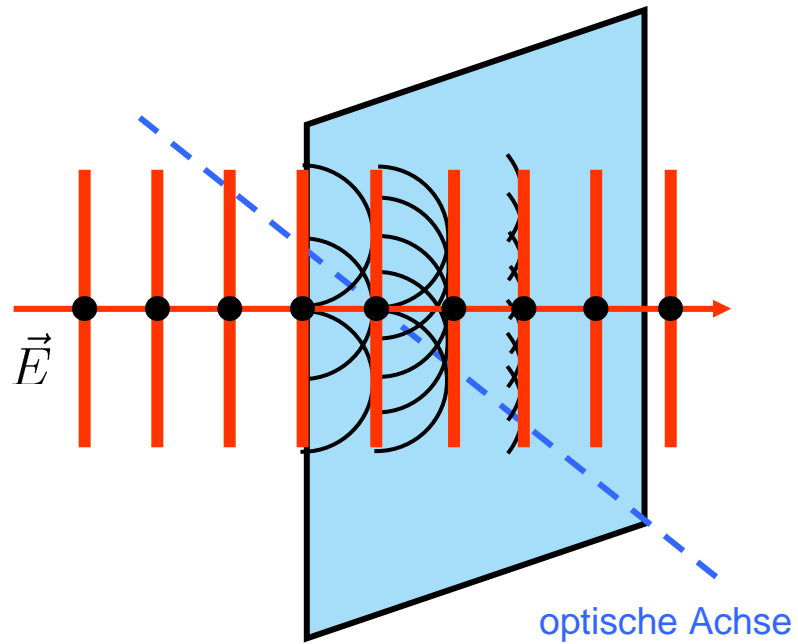
$$\frac{1}{n_a^2(\theta)} = \frac{\cos^2 \theta}{n_1^2} + \frac{\sin^2 \theta}{n_3^2}$$

	$n_o$	$n_a$
Kalkspat	1.658	1.486
Quarz	1.544	1.553

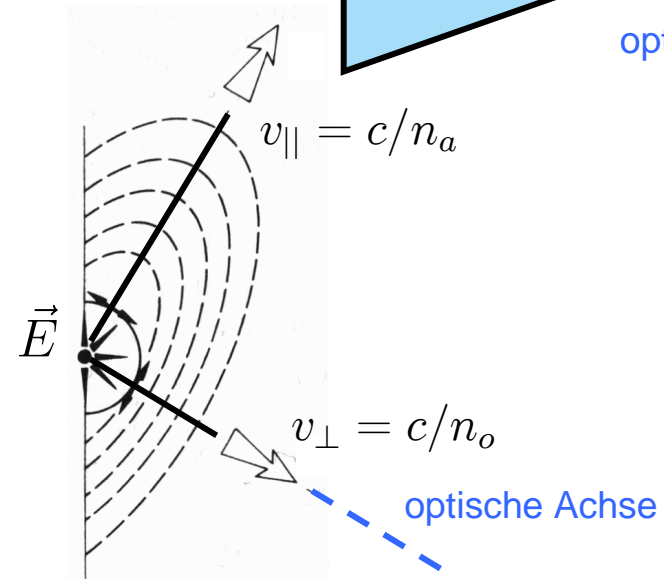
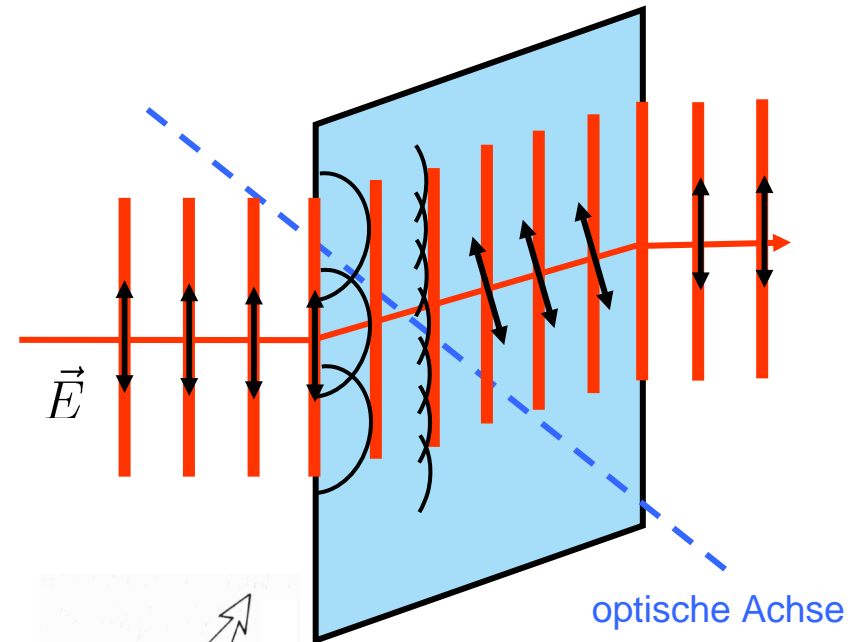


# Doppelbrechung am Kalkspat

Ordentliche Welle:

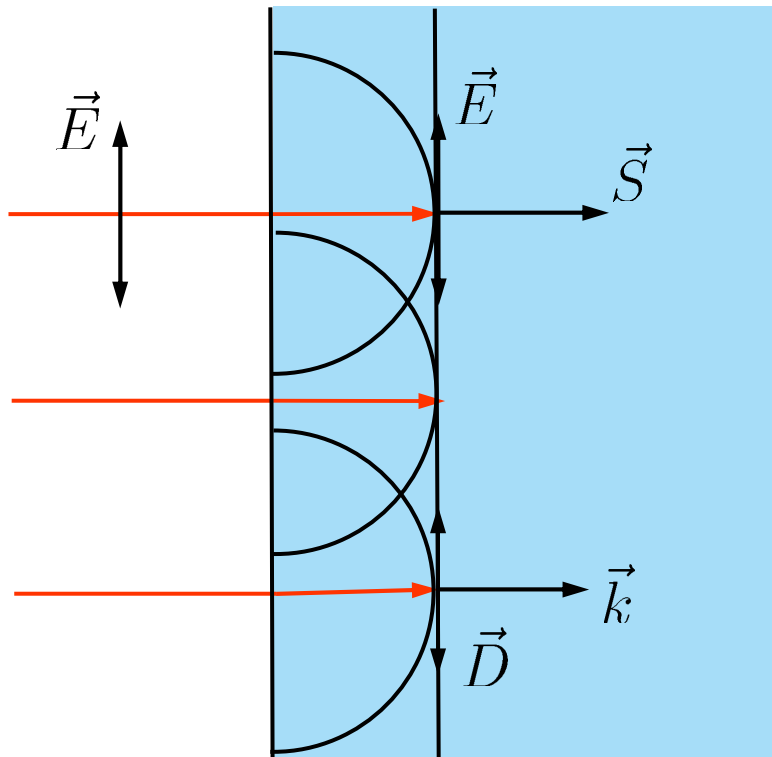


Außerordentliche Welle:



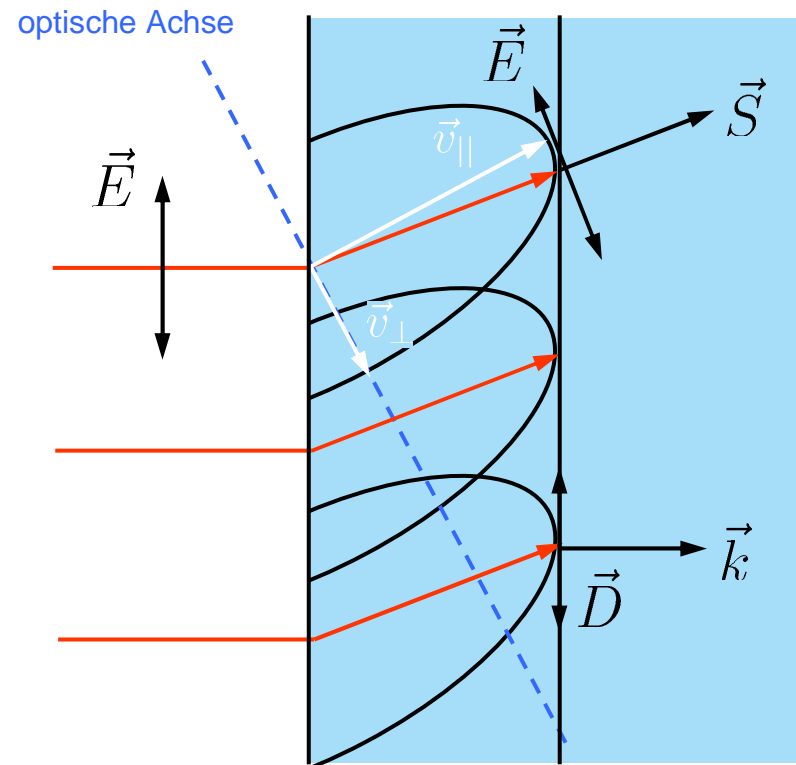
# Doppelbrechung am Kalkspat

Ordentliche Welle:



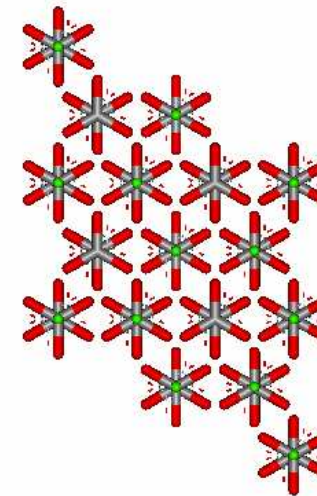
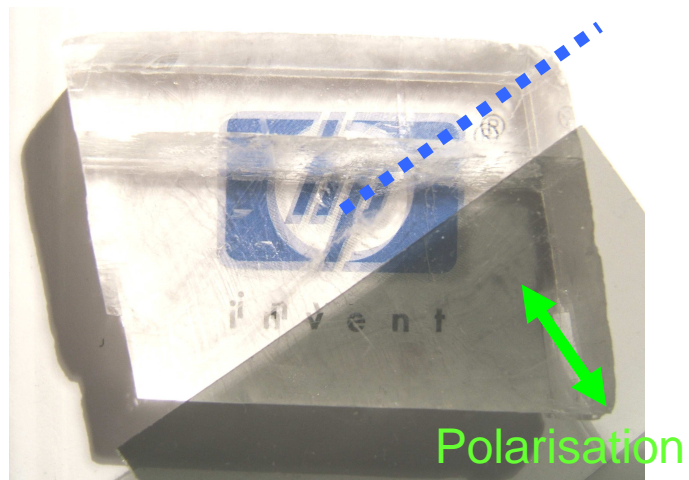
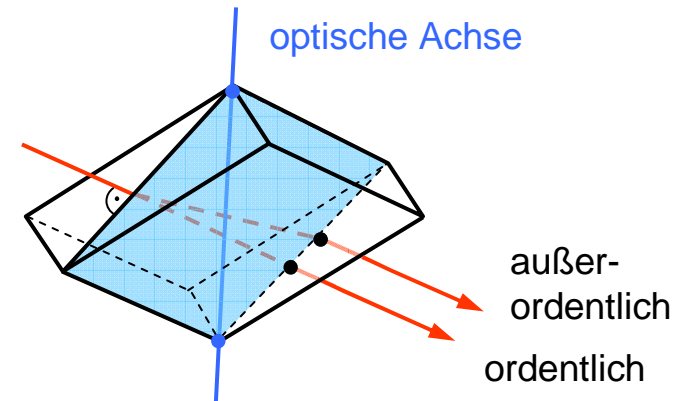
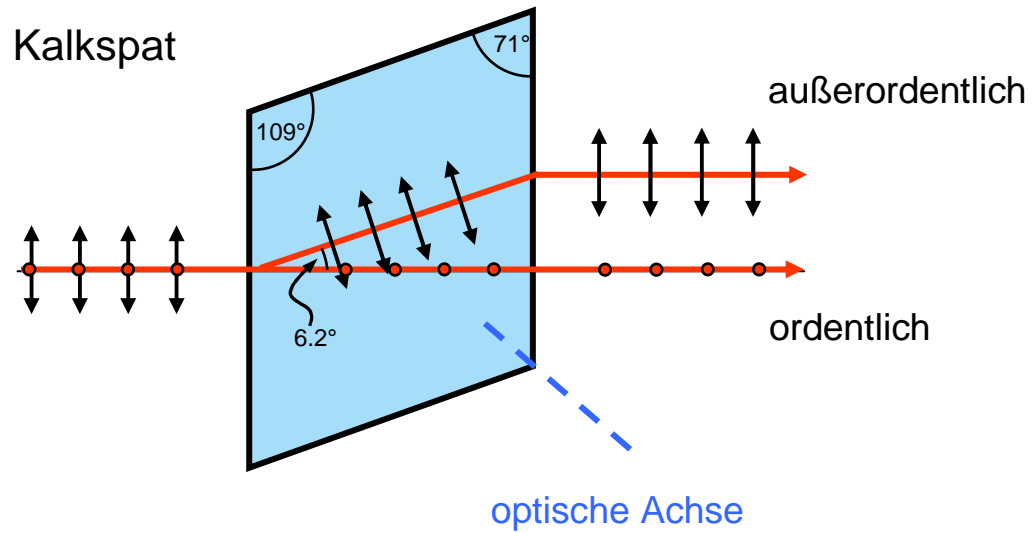
$\vec{k}$  und  $\vec{S}$  parallel

Außerordentliche Welle:

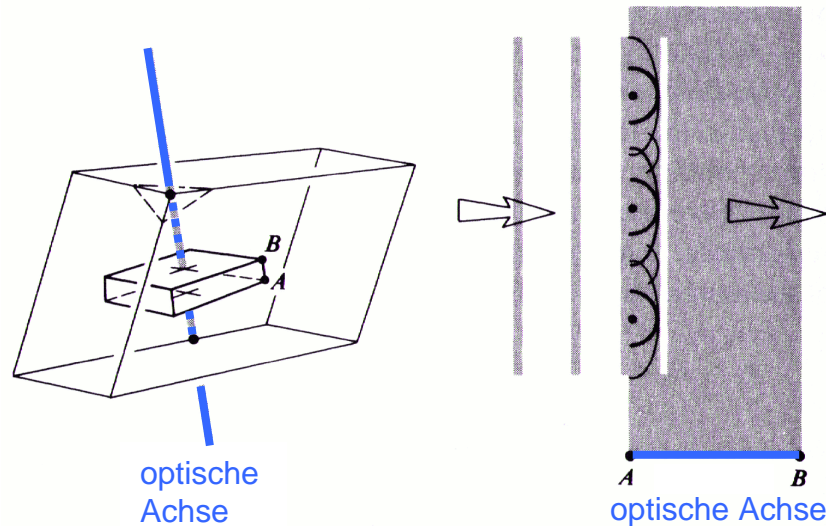


$\vec{k}$  und  $\vec{S}$  nicht parallel

# Doppelbrechung in Kalkspat ( $\text{CaCO}_3$ )

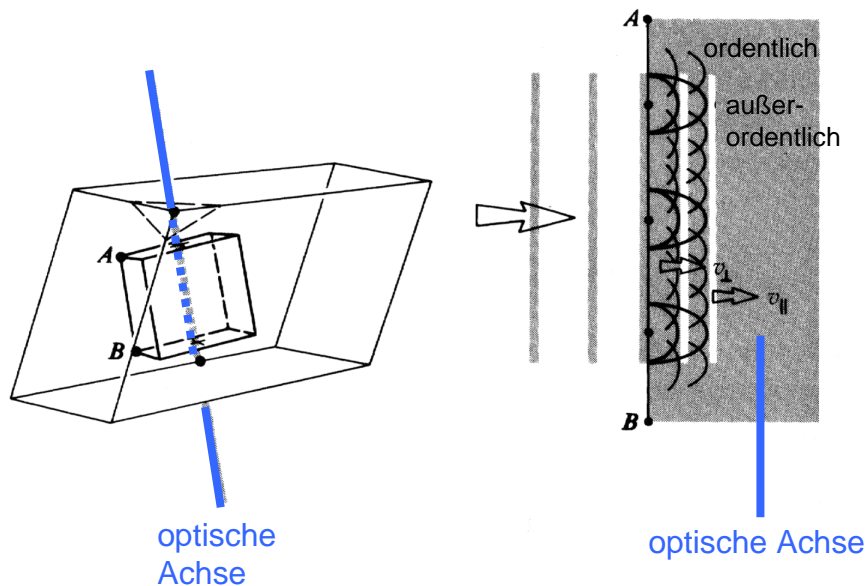


# Spezialfälle



senkrechter Einfall,  
optische Achse senkrecht zur Oberfläche:

kein Versatz,  
beide Wellen laufen gleichschnell

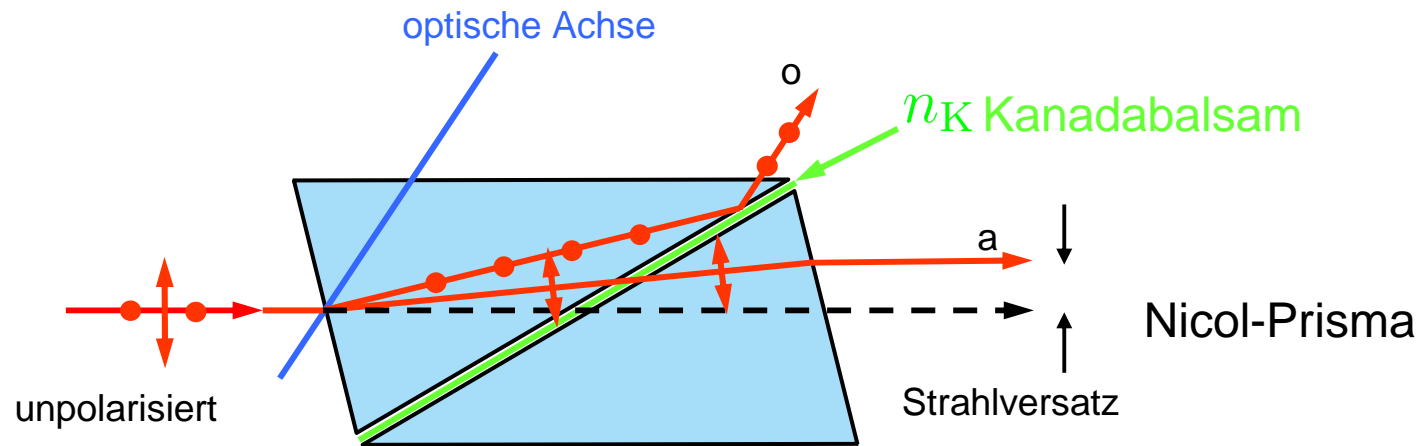


senkrechter Einfall,  
optische Achse parallel zur Oberfläche,  
Polarisation weder parallel noch senkrecht  
zur optischen Achse:

kein Versatz,  
ordentliche und außerordentliche Welle  
laufen mit unterschiedlicher  
Geschwindigkeit



# Doppelbrechende Polarisatoren

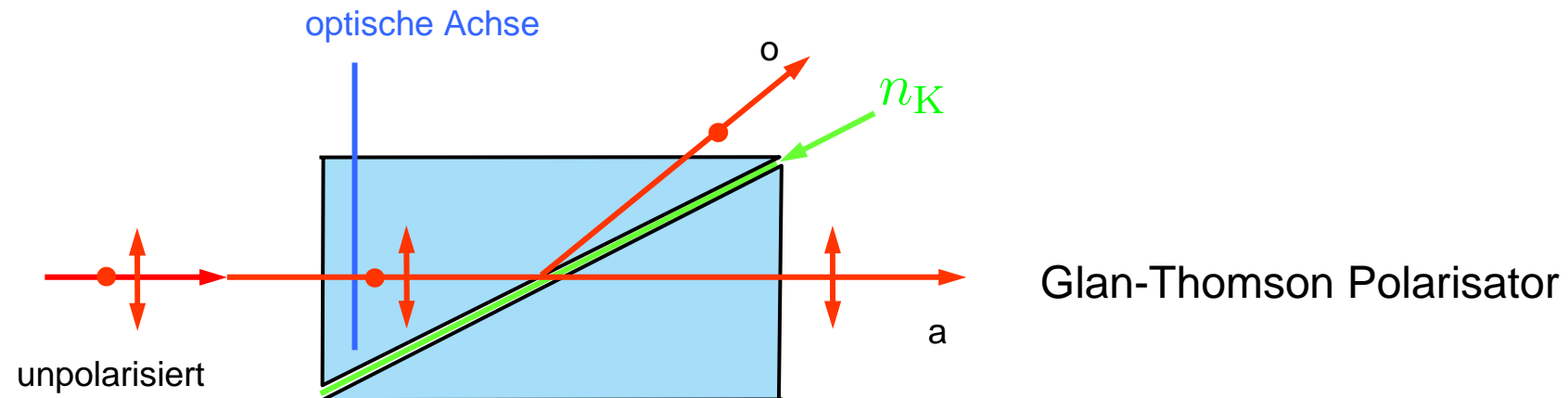


$$n_K = 1.54$$

$$n_o = 1.66$$

$$n_a = 1.49$$

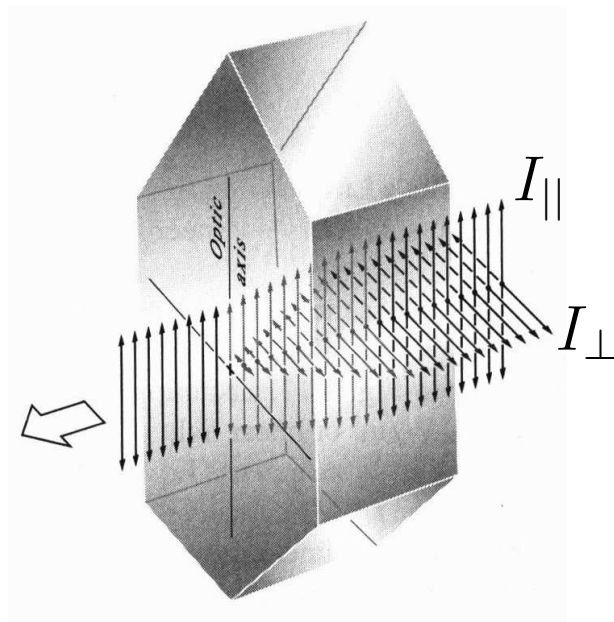
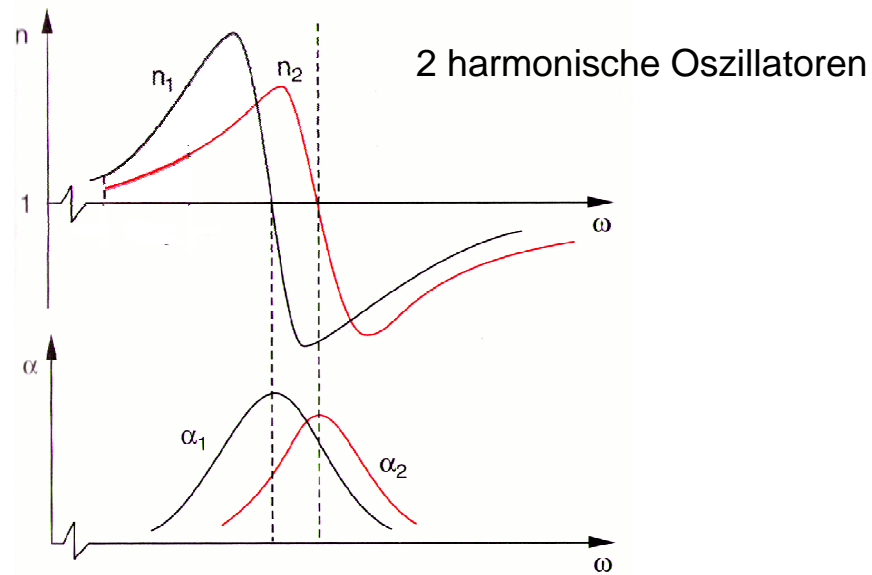
Kalkspat



ordentlicher Strahl:  $n_K > n_o$  Totalreflexion ab  $68^\circ$

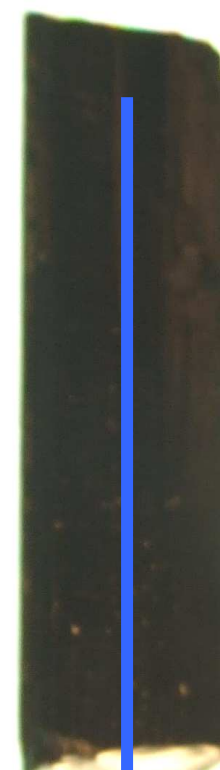
außerordentlicher Strahl:  $n_a < n_K$  Transmission

# Anisotrope Medien: Dichroismus



Turmalin  
uniaxial negativ

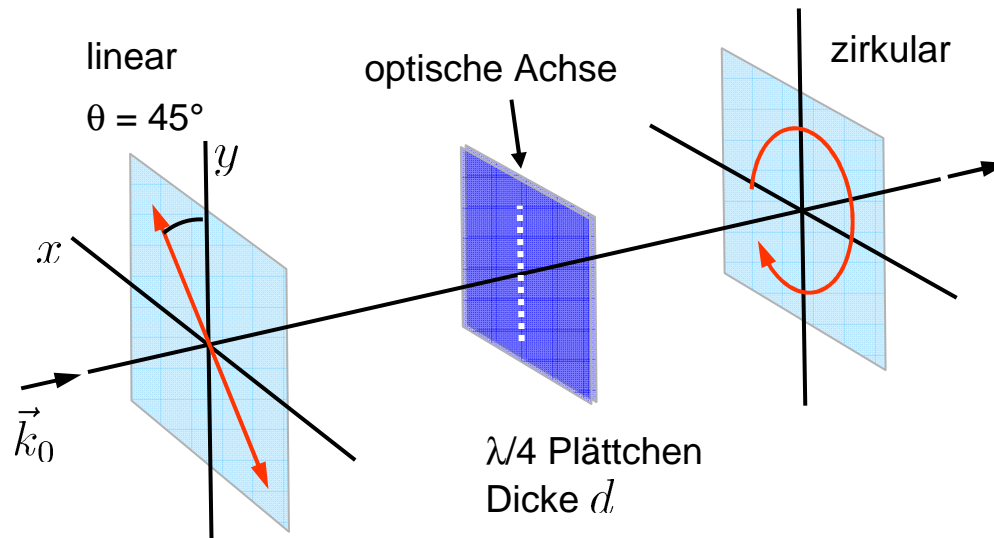
Analysator



optische  
Achse

Polarisation durch selektive Absorption

# Polarisationswandler: $\lambda/4$ Plättchen



Phasenverschiebung  
zwischen beiden Komponenten:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0} d |n_o - n_a|$$

$\lambda/4$  Plättchen: Gangunterschied

$$d |n_o - n_a| = \lambda_0/4$$

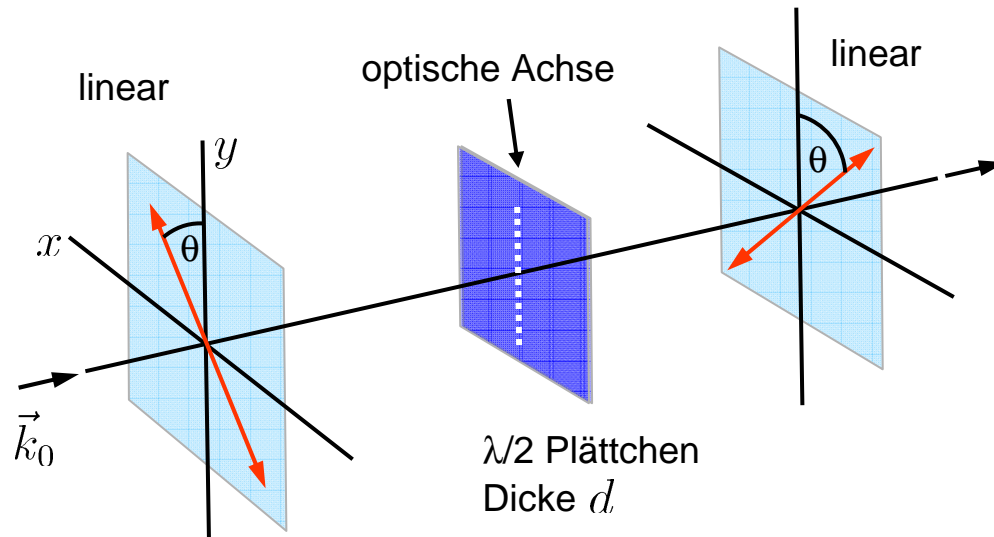
$$\rightarrow \Delta\varphi = \pi/2$$

Linear polarisiertes Licht wird i. Allg. zu elliptisch polarisiertem Licht.

$$\theta = 45^\circ : \quad \vec{P}_{\text{ein}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{P}_{\text{aus}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{\pm i\pi/2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix}$$

Aber: unter  $45^\circ$  linear polarisiertes Licht wird zu zirkular polarisiertem Licht.

# Polarisationswandler: $\lambda/2$ Plättchen



Phasenverschiebung  
zwischen beiden Komponenten:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0} d |n_o - n_a|$$

$\lambda/2$  Plättchen: Gangunterschied

$$d |n_o - n_a| = \lambda_0/2$$

$$\rightarrow \Delta\varphi = \pi$$

$$\vec{P}_{\text{ein}} = \begin{pmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad \vec{P}_{\text{aus}} = \begin{pmatrix} \sin \theta \\ e^{i\pi} \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(-\theta) \\ \cos(-\theta) \end{pmatrix}$$

Drehung um den Winkel  $2\theta$ . Speziell:  $\theta = 45^\circ$ . Drehung um  $90^\circ$ .

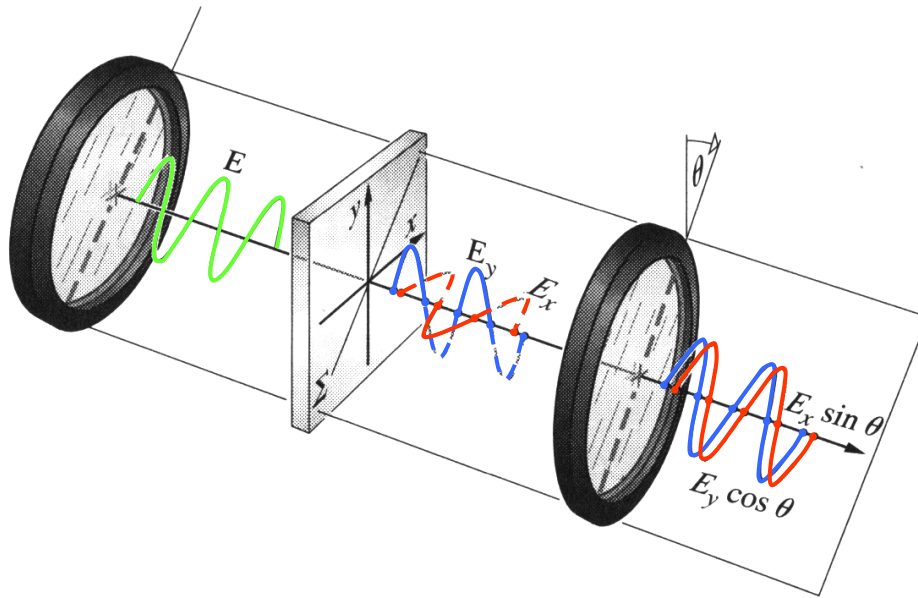
Glimmer: biaxial

$$n_1 = 1.552 \quad n_2 = 1.582 \quad n_3 = 1.588$$

$$\text{für } \lambda/2\text{-Plättchen bei } \lambda_0 = 600 \text{ nm: } d = \frac{600 \text{ nm}/2}{n_3 - n_2} = 50 \mu\text{m}$$



# Interferenzfarben



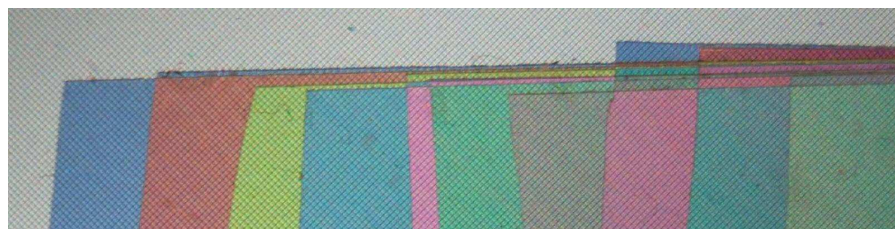
linear polarisiertes Licht,  
doppelbrechendes Medium Dicke  $d$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0} d |n_o - n_a|$$

⇒ i. Allg. elliptisch polarisiert

zweiter Polarisator: Interferenz

Tesa-Film auf Glas

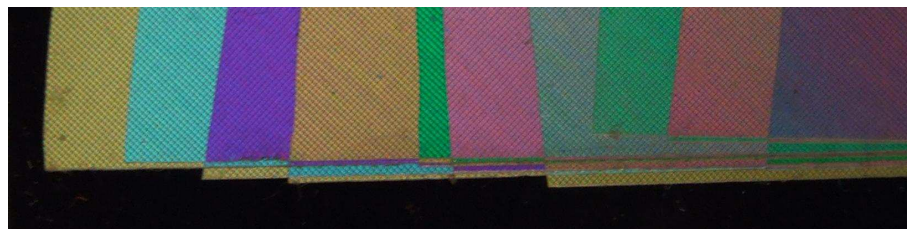


parallel

Bsp.: gekreuzte Polarisatoren,

blau:  $\Delta\varphi = 3\pi$  transmittiert

gelb:  $\Delta\varphi = 2\pi$  geblockt



gekreuzt

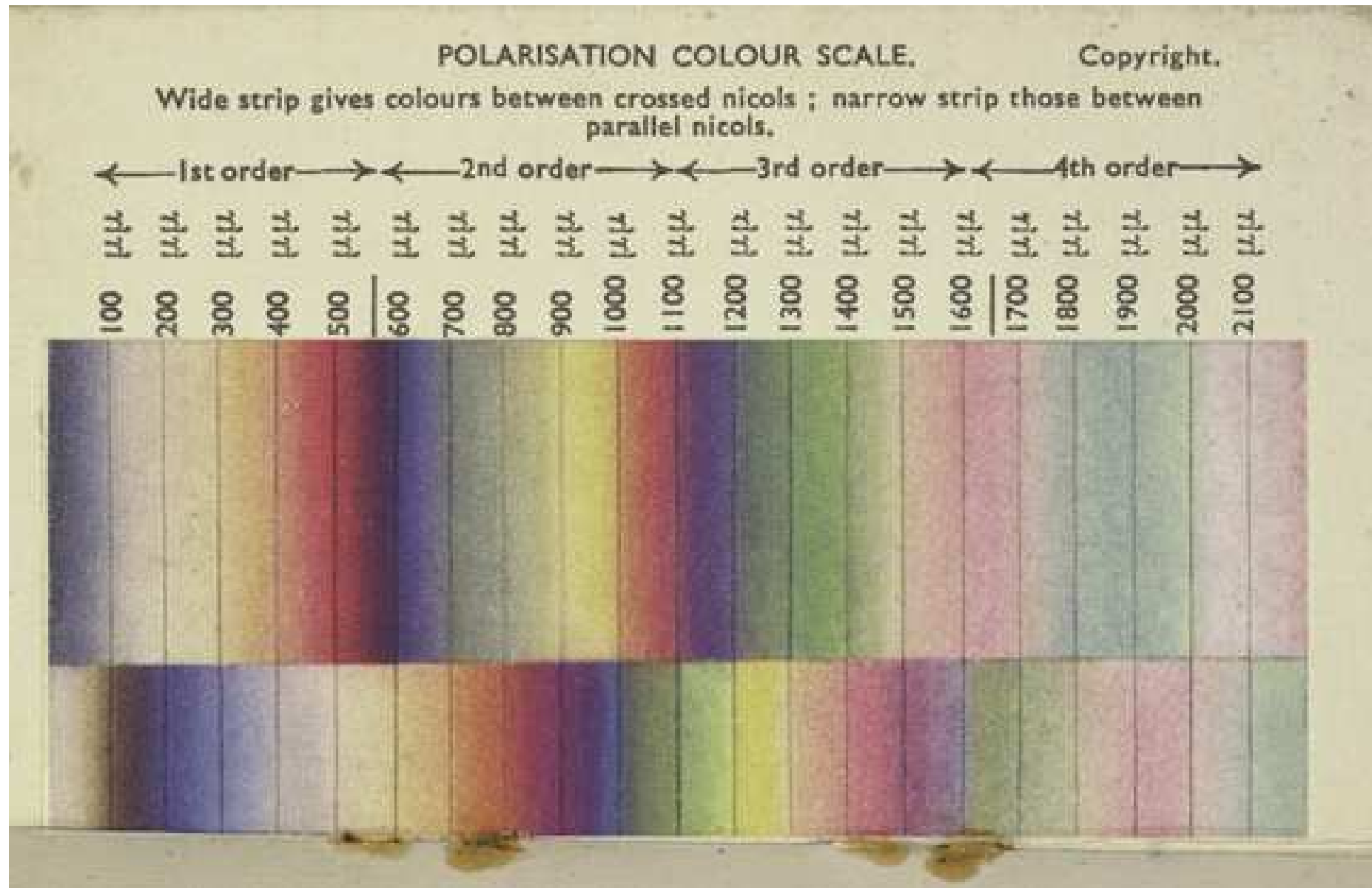
parallel Polarisatoren:

blau geblockt

gelb transmittiert

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 Lagen

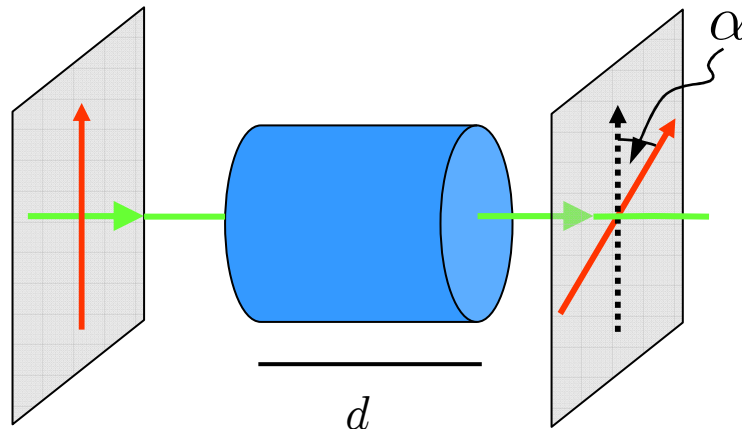
# Interferenzfarben



Verbindung Dicke – Doppelbrechung – Interferenzfarbe

# Optische Aktivität

Polarisationsrichtung von linear polarisiertem Licht wird beim Durchgang gedreht.

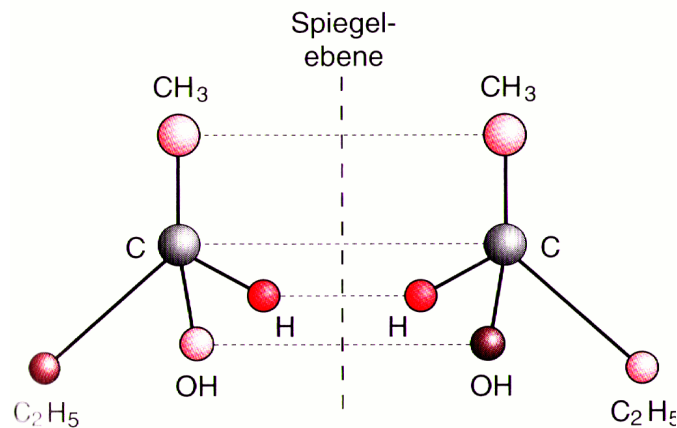


Drehwinkel unabhängig von Anfangspolarisation

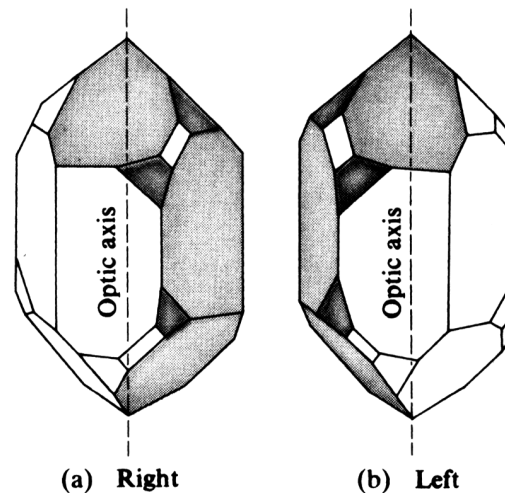
$$\alpha = \alpha_S d$$

$\alpha_S$  spezifisches optisches Drehvermögen

- Drehrichtung unabhängig von Durchlaufrichtung Licht
- oft durch Chiralität des Materials bedingt



2-Butanol



(a) Right

(b) Left

Quarz

## Quarz

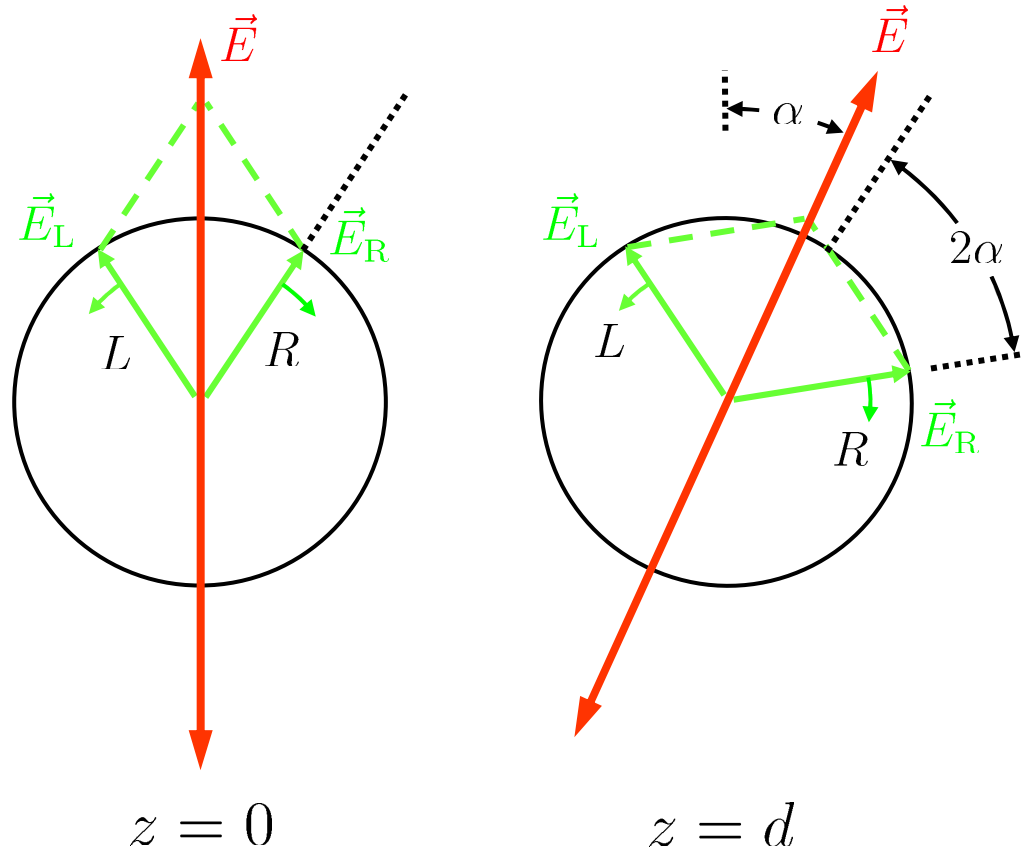
Farbe	$\alpha_S$ [°/mm]
rot	15
gelb	21
grün	27
blau	33
violett	51

# Optische Aktivität

Interpretation: unterschiedliche Brechungsindizes für links- und rechts-zirkular polarisiertes Licht,  $n_L$ ,  $n_R$

$$k_L = n_L k_0 \quad k_R = n_R k_0$$

Zerlegung in links- und rechts-zirkular polarisiertes Licht



Bei  $z = d$ : Phasendifferenz

$$2\alpha = (k_L - k_R) d$$

Drehwinkel:

$$\alpha = \frac{\pi d}{\lambda_0} (n_L - n_R)$$

Quarz:

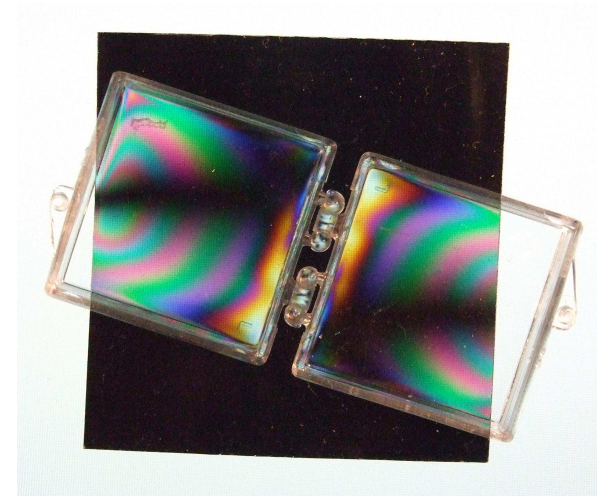
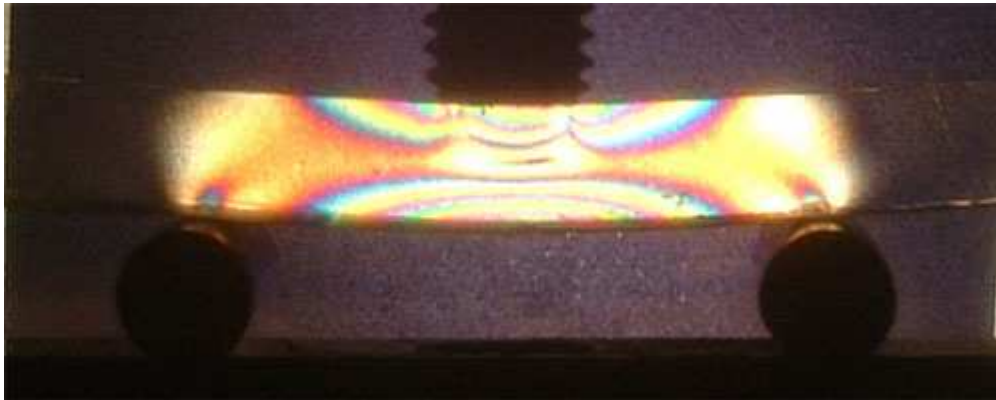
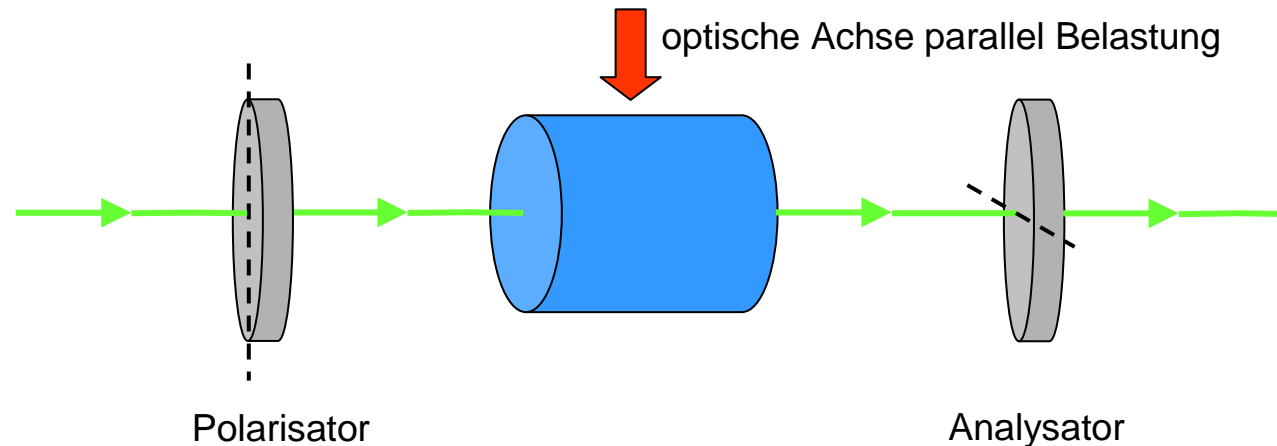
$\lambda$ [nm]	$n_R$	$n_L$	$n_R - n_L$
396	1.55810	1.55821	0.00011
589	1.54420	1.54427	0.00007
760	1.53914	1.53920	0.00006



# Spannungsdoppelbrechung

transparentes, isotropes Medium + mechanische Spannungen

⇒ doppelbrechend, proportional zur Hauptspannungsdifferenz  $\Delta n \propto \Delta \sigma$



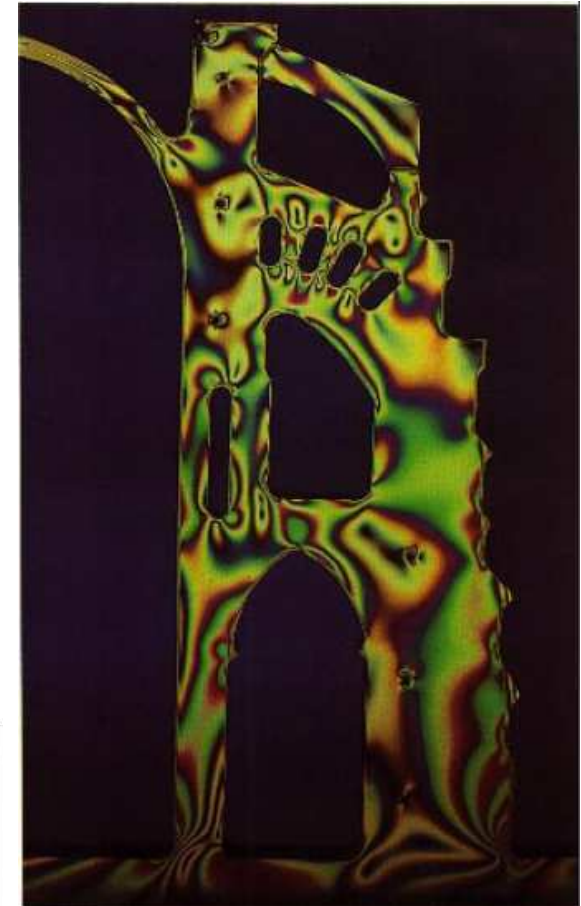
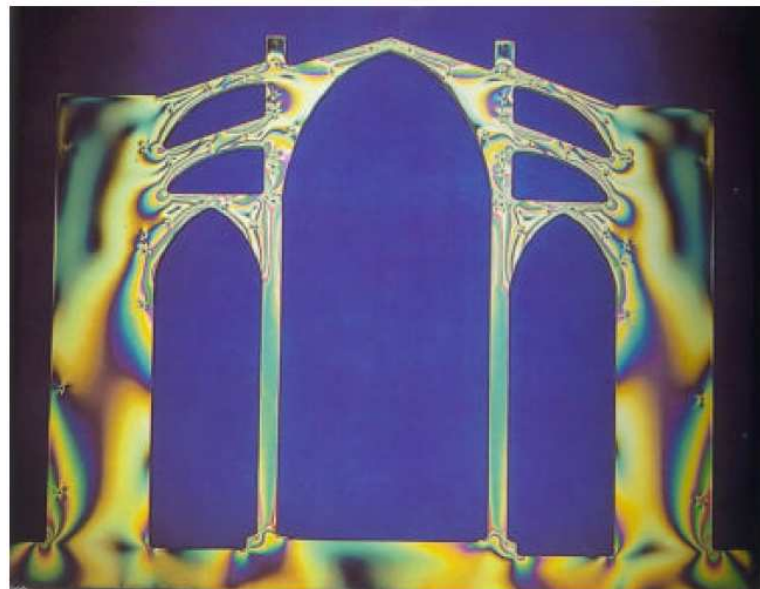
- kleine Abstände Farbwechsel ⇒ große Spannungsänderungen
- Anwendung: Materialprüfung

# Spannungsdoppelbrechung: Untersuchung Belastungsverteilung



Bourges  
Cathedral

Robert Mark, *Experiments  
in Gothic Structure*



Kathedrale Mallorca