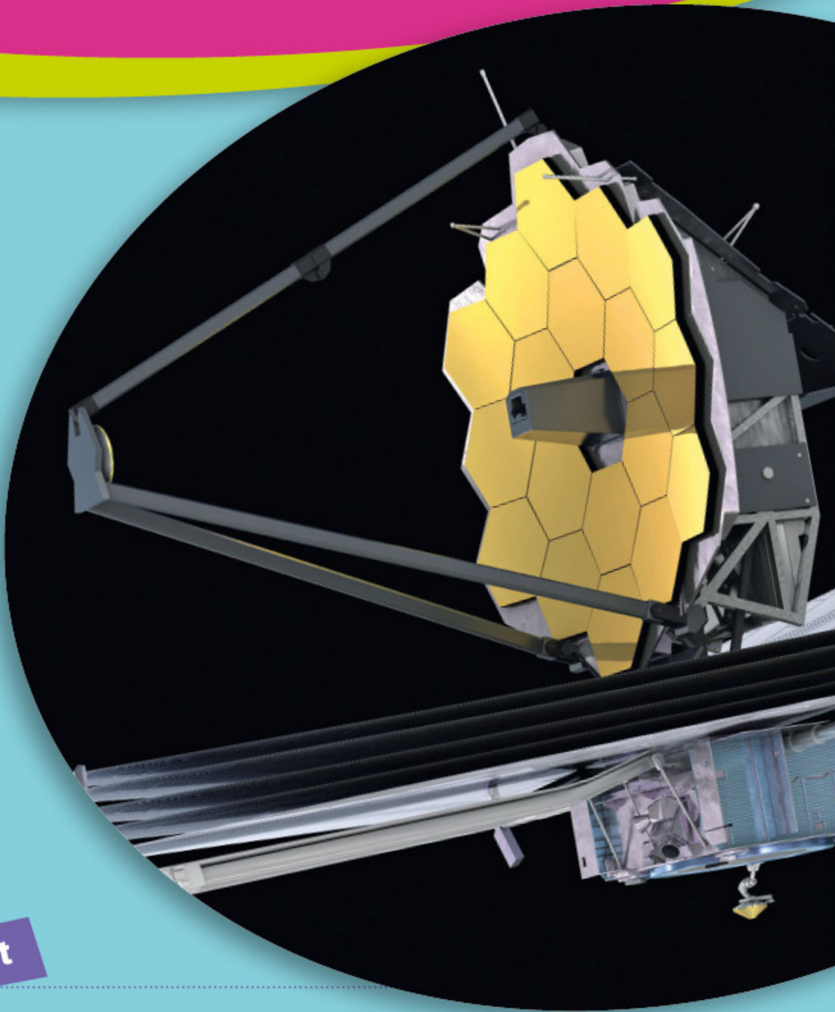
2 Utiliser le calcul littéral

Avant

▶ En 1609, le physicien Galilée a développé un modèle de lunette astronomique qui lui a permis de grossir les objets d'environ un facteur 10.

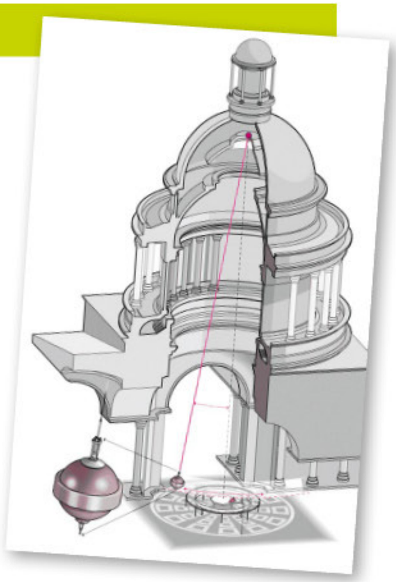


À présent

▶ Le plus puissant télescope du monde (James Webb Space Telescope) sera lancé en orbite autour de la Terre en 2021. Il permettra d'observer avec précision des astres situés à une distance de la Terre de l'ordre de 10^{23} à 10^{24} km.

Les capacités travaillées dans ce chapitre	Exercices
• Calculer avec des puissances.	1, 3, 14 à 26
• Calculer avec des racines carrées.	2, 4, 5, 27 à 40
• Effectuer des calculs sur des expressions algébriques.	7, 9, 49 à 60, 62 à 68, 70, 71
• Effectuer des calculs sur des expressions fractionnaires.	11, 13, 72 à 77
• Dans une relation, exprimer une variable en fonction des autres.	6, 8, 41 à 48
• Choisir la forme la plus adaptée d'une expression.	10, 12, 61, 69

1 Calculs avec des racines carrées



On souhaite reproduire l'expérience du physicien français Léon Foucault (1819-1868) en installant un pendule simple dans le hall d'un lycée.
Une boule est suspendue à l'aide d'un fil fixé au plafond, puis est lâchée sans vitesse initiale.
Les oscillations du pendule dans un plan fixe mettent en évidence la rotation de la Terre.
Une oscillation complète est réalisée au cours d'une période T, exprimée en seconde par :

$$\mathbf{T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}}$$

où L désigne la longueur du pendule, en mètre, et g la constante de pesanteur terrestre ($g \approx 9{,}81$ m·s^{-2}).

1 **a)** Calculer la période, en s, du pendule simple, sachant que le hall du lycée est suffisamment haut pour installer un pendule de longueur L égale à 8 m.
Arrondir au dixième.
b) Comparer avec la période du pendule de Foucault, installé au Panthéon, dont la longueur est de 67 m.

2 **a)** De façon générale, exprimer la longueur L d'un pendule en fonction de T et g.
b) En déduire la longueur, en m, d'un pendule dont une oscillation complète aurait pour période 10 s.
Arrondir à l'unité.

2 Différentes écritures d'une expression

Au cours d'un travail de restauration, un bassin circulaire de rayon r, en m, est entouré par un couloir de marche en forme de couronne circulaire.
On note x la largeur, en m, de cette couronne et $\mathscr{A}$ son aire en m^2.

1 Montrer que $\mathscr{A} = \pi(r+x)^2 - \pi r^2$.

2 **a)** Développer et réduire l'expression de $\mathscr{A}$.
Au besoin, on peut développer $(r+x)(r+x)$.
b) Justifier que l'aire du couloir de marche est supérieure à 314 m^2 si la largeur x est égale à 10 m.

3 **a)** Factoriser l'expression de $\mathscr{A}$.
b) Dans le cas où $x = r$, comparer l'aire de la couronne à celle du bassin.
c) Est-il vrai que l'aire de la couronne de marche et l'aire du bassin sont égales lorsque $x = (\sqrt{2}-1)r$?

Cours

1 Puissances entières relatives

A Cas d'un exposant entier naturel

Définition

a désigne un nombre réel et n un nombre entier naturel.

- Pour $n \geqslant 2$, $\boldsymbol{a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n\,\text{facteurs}}}$
- $\boldsymbol{a^1 = a}$
- Pour $a \neq 0$, $\boldsymbol{a^0 = 1}$

Exemples

- $10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000$
- $2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$
- $(-7)^4 = (-7) \times (-7) \times (-7) \times (-7) = 2401$

B Cas d'un exposant entier négatif

Définition

a désigne un nombre réel **non nul** et n un nombre entier naturel non nul.

On note a^{-n} l'inverse de a^n : $\boldsymbol{a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}}$.

Exemples

- $10^{-4} = \dfrac{1}{10^4} = 0{,}0001$
- $2^{-10} = \dfrac{1}{2^{10}} = \dfrac{1}{1024}$
- $\left(\sqrt{2}\right)^{-4} = \dfrac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^4} = \dfrac{1}{4}$

C Règles de calcul sur les puissances

Propriétés

a désigne un nombre réel non nul et n, m deux nombres entiers relatifs.

- $\boldsymbol{a^n \times a^m = a^{n+m}}$
- $\boldsymbol{\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}}$
- $\boldsymbol{(a^n)^m = a^{n \times m}}$

Exemples

- $5{,}2^3 \times 5{,}2^{-2} = 5{,}2^{3-2} = 5{,}2^1 = 5{,}2$
- $\dfrac{(-8)^7}{(-8)^9} = (-8)^{7-9} = (-8)^{-2} = \dfrac{1}{64}$
- $\left(\sqrt{2}^3\right)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^{3\times 2} = \sqrt{2}^6 = 8$

Remarques :

- **Attention !** Il n'existe pas de règle de calcul sur l'addition de deux puissances.
Par exemple, $10^2 + 10^3 \neq 10^5$, en effet $10^2 + 10^3 = 1100$ et $10^5 = 100000$.
- Il est important de distinguer les écritures $(a^n)^m$ et $a^{(n^m)}$.
Par exemple, $(10^5)^3 = 10^{5\times 3} = 10^{15}$ et $10^{(5^3)} = 10^{125}$.

Propriétés

a et b désignent deux nombres réels non nuls et n un nombre entier relatif.

- $\boldsymbol{a^n \times b^n = (ab)^n}$
- $\boldsymbol{\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n}$

Exemples

- $0{,}2^7 \times 10^7 = (0{,}2 \times 10)^7 = 2^7 = 128$
- $\dfrac{11{,}1^{-3}}{1{,}11^{-3}} = \left(\dfrac{11{,}1}{1{,}11}\right)^{-3} = 10^{-3} = 0{,}001$

2 Racine carrée d'un nombre réel positif

A Définition

Définition

a désigne un nombre réel positif.

La **racine carrée** de a, notée $\sqrt{a}$, est le nombre réel **positif** dont le carré est égal à a.

Ainsi, $\sqrt{\boldsymbol{a}} \geqslant \mathbf{0}$ et $\left(\sqrt{\boldsymbol{a}}\right)^2 = \boldsymbol{a}$.

Exemples

- $\sqrt{9}$ est le nombre positif dont le carré est égal à 9 donc $\sqrt{9} = 3$.
- $\sqrt{2,25} = 1,5$
- $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel, $\sqrt{2} \approx 1,414$.
- $\sqrt{0} = 0$
- $\sqrt{1} = 1$

Propriété

Pour tout nombre réel a, $\sqrt{\boldsymbol{a}^2} = |\boldsymbol{a}|$.

Démonstration

Pour tout nombre réel a :

- $\left(\sqrt{a^2}\right)^2 = a^2$
- $|a|^2 = a^2$ si $a \geqslant 0$ et $|a|^2 = (-a)^2 = a^2$ si $a \leqslant 0$.

Les deux nombres $\sqrt{a^2}$ et $|a|$ ont le même carré et ils sont tous les deux positifs donc ils sont égaux.

Pour tout nombre réel a,
$|\boldsymbol{a}|^2 = \boldsymbol{a}^2$.

Exemples

- $\sqrt{1,3^2} = |1,3| = 1,3$
- $\sqrt{(-3,6)^2} = |-3,6| = 3,6$
- $\sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \left|-\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3}$

B Règles de calcul sur les racines carrées

Propriétés

a et b désignent deux nombres réels positifs.

- $\sqrt{\boldsymbol{ab}} = \sqrt{\boldsymbol{a}} \times \sqrt{\boldsymbol{b}}$
- Si $b \neq 0$, $\sqrt{\dfrac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}} = \dfrac{\sqrt{\boldsymbol{a}}}{\sqrt{\boldsymbol{b}}}$

Démonstrations

- Pour tous nombres réels positifs, $\left(\sqrt{ab}\right)^2 = ab$ et $\left(\sqrt{a} \times \sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2 \times \left(\sqrt{b}\right)^2 = ab$.

Les deux nombres $\sqrt{ab}$ et $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ ont le même carré et ils sont tous les deux positifs, donc ils sont égaux.

- Pour le quotient, on procède de même en élevant au carré les deux membres de l'égalité.

Exemples

- $\sqrt{3600} = \sqrt{36 \times 100} = \sqrt{36} \times \sqrt{100} = 6 \times 10 = 60$
- $\dfrac{\sqrt{0,44}}{\sqrt{11}} = \sqrt{\dfrac{0,44}{11}} = \sqrt{0,04} = 0,2$

Remarque : si a et b sont deux nombres réels strictement positifs, alors $\sqrt{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}} < \sqrt{\boldsymbol{a}} + \sqrt{\boldsymbol{b}}$.

En effet, $\left(\sqrt{a+b}\right)^2 = a+b$ et $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2 + \left(\sqrt{b}\right)^2 + 2\sqrt{a} \times \sqrt{b} = a + b + 2\sqrt{ab}$.

Or $2\sqrt{ab} > 0$ donc $\left(\sqrt{a+b}\right)^2 < \left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2$.

Les deux nombres $\sqrt{a+b}$ et $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ sont positifs, ils sont donc rangés dans le même ordre que leurs carrés (voir p. 236), d'où l'inégalité souhaitée.

Cours

3 Transformations d'expressions algébriques

A Rappels

Vocabulaire

Développer, c'est transformer en somme une expression écrite sous la forme d'un produit.
Factoriser, c'est transformer en produit une expression écrite sous la forme d'une somme.

Propriétés

Pour tous nombres réels a, b, c, d, k :

- $\boldsymbol{k(a+b) = ka + kb}$
- $\boldsymbol{(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd}$

Exemples

- Factorisation de $\mathrm{A} = 4x^2 + 8x(x+1)$

$\mathrm{A} = 4x \times x + 4x \times 2(x+1) = 4x[x + 2(x+1)] = 4x[x + 2x + 2] = 4x(3x+2)$

- Développement de $\mathrm{B} = (2x-1)(-x+4)$

$\mathrm{B} = (2x-1)(-x+4) = 2x(-x) + 2x \times 4 - 1(-x) - 1 \times 4 = -2x^2 + 8x + x - 4 = -2x^2 + 9x - 4$

B Identités remarquables

Propriétés

Pour tous nombres réels a et b :

- $\boldsymbol{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$
- $\boldsymbol{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$
- $\boldsymbol{(a+b)(a-b) = a^2 - b^2}$

Démonstrations

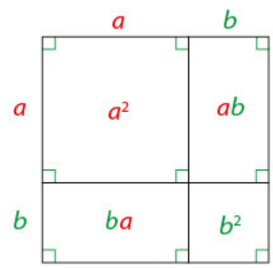
Pour tous nombres réels a et b :

- $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 + a(-b) - ba - b(-b)$

$(a-b)^2 = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$

- $(a+b)(a-b) = a^2 + a(-b) + ba + b(-b) = a^2 - ab + ba - b^2$

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$



Exemples

Pour tout nombre réel x :

- $(2x+3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$
- $(3x-2)^2 = 9x^2 - 12x + 4$
- $25x^2 - 1 = (5x+1)(5x-1)$

C Transformations d'expressions fractionnaires

Pour écrire la somme (ou la différence) de deux expressions fractionnaires sous forme d'un quotient, on les réduit au même dénominateur.

Exemples

- Pour tout nombre réel x, $\dfrac{2x-1}{3} + \dfrac{5x}{2} = \dfrac{2(2x-1)}{6} + \dfrac{3 \times 5x}{6} = \dfrac{4x - 2 + 15x}{6} = \dfrac{19x-2}{6}$
- Pour tout nombre réel $x \neq 0$, $\dfrac{10}{x} - \dfrac{x}{5} = \dfrac{5 \times 10}{5x} - \dfrac{x \times x}{5x} = \dfrac{50}{5x} - \dfrac{x^2}{5x} = \dfrac{50 - x^2}{5x}$

EXERCICES RÉSOLUS

1 Calculer avec des puissances

→ Cours 1. C

a) Écrire $A = \dfrac{9^5 \times (3^{-4})^2}{3^{-7} \times 3^6}$ sous la forme 3^n, où n désigne un nombre entier naturel.

b) Écrire $B = 16^3 \times 5^7$ sous forme scientifique $a \times 10^p$, où $1 \leqslant a < 10$ et p nombre entier relatif.

Solution

a) $A = \dfrac{(3^2)^5 \times (3^{-4})^2}{3^{-7} \times 3^6} = \dfrac{3^{10} \times 3^{-8}}{3^{-1}}$

$A = 3^{10} \times 3^{-8} \times 3^1 = 3^3$

On applique les règles de calcul sur les puissances :
$(a^n)^m = a^{nm}$, $a^n \times a^m = a^{n+m}$, $\dfrac{1}{a^m} = a^{-m}$ (avec $a \neq 0$)

b) $B = 16^3 \times 5^7 = (2^4)^3 \times 5^7$

$B = 2^{12} \times 5^7 = 2^5 \times 2^7 \times 5^7 = 2^5 \times (2 \times 5)^7 = 32 \times 10^7 = 3{,}2 \times 10^8$

On transforme l'écriture de B afin de faire apparaître une puissance de 10.

2 Calculer avec des racines carrées

→ Cours 2. B

a) Écrire $A = 3\sqrt{3^2} \times \dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{12}}$ sous la forme $\sqrt{a}$, où a désigne un nombre décimal positif.

b) Écrire $B = \sqrt{7200}$ sous la forme $a\sqrt{2}$, où a désigne un nombre entier naturel.

Solution

a) $A = \sqrt{9} \times \sqrt{9} \times \sqrt{\dfrac{10}{12}}$

$A = \sqrt{\dfrac{9 \times 9 \times 10}{12}} = \sqrt{67{,}5}$

On applique les règles de calcul sur les racines carrées :
si $a \geqslant 0$ et $b > 0$, $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$, $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

b) $B = \sqrt{2 \times 36 \times 100}$

$B = \sqrt{2} \times \sqrt{36} \times \sqrt{100} = \sqrt{2} \times 6 \times 10 = 60\sqrt{2}$

On utilise la propriété :
si $a \geqslant 0$ et $c \geqslant 0$, $\sqrt{a^2 c} = a\sqrt{c}$

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 1

3 **a)** Écrire $A = \dfrac{5^8 \times (5^{-2})^3}{5^3 \times 5^{-10}}$ sous la forme 5^n, où n désigne un nombre entier naturel.

b) Écrire $B = 10^2 \times 25^{-3} \times 20^4$ sous la forme 2^p, où p désigne un nombre entier naturel.

c) Écrire $C = (10^2 - 5^2) \times 0{,}5^{-2}$ sous la forme $a \times 10^n$, avec a et n nombres entiers naturels.

d) Écrire $D = 10^3 \times 25^{-3} \times 8^{-5}$ sous forme scientifique $a \times 10^p$, où $1 \leqslant a < 10$ et p nombre entier relatif.

Sur le modèle de l'exercice résolu 2

4 **a)** Écrire $A = 2\sqrt{10} \times \dfrac{\sqrt{14}}{\sqrt{5}}$ sous la forme $\sqrt{a}$, où a désigne un nombre décimal positif.

b) Écrire chacun des deux nombres :

$$B = \sqrt{162} \text{ et } C = \sqrt{1\,250}$$

sous la forme $a\sqrt{2}$, où a est un nombre entier naturel.

5 On considère le nombre :

$$D = \sqrt{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{4} \times \sqrt{5} \times \sqrt{6} \times \sqrt{20}$$

Montrer que D est un nombre entier.

EXERCICES RÉSOLUS

6 Exprimer une variable en fonction des autres

→ Cours 2. A

a) x et y désignent deux nombres réels tels que $3x - 2y = 24$.
Exprimer y en fonction de x, puis x en fonction de y.
b) Le volume V d'un cylindre de rayon r et de hauteur h est donné par $V = \pi r^2 h$.
Exprimer le rayon r en fonction de h et de V.

Solution

a)

$-2y = 24 - 3x$	$3x = 24 + 2y$
$y = \dfrac{24 - 3x}{-2}$	$x = \dfrac{24 + 2y}{3}$
$y = -12 + \dfrac{3}{2}x$	$x = 8 + \dfrac{2}{3}y$

On isole une variable dans le membre de gauche puis on divise les deux membres par un même nombre.

b) $r^2 = \dfrac{V}{\pi h}$ et $r = \sqrt{\dfrac{V}{\pi h}}$ car r est un nombre positif.

r est un nombre positif car r est le rayon d'un cercle.

7 Utiliser les identités remarquables

→ Cours 3. B

x désigne un nombre réel et $A = (2x - 3)^2 - (x - 2)^2$.
a) Développer A.
b) Factoriser A.

Solution

a) $A = (2x - 3)^2 - (x - 2)^2$
$A = (4x^2 - 12x + 9) - (x^2 - 4x + 4)$
$A = 4x^2 - 12x + 9 - x^2 + 4x - 4$
$A = 3x^2 - 8x + 5$

On développe avec l'identité remarquable donnant $(a - b)^2$ puis on ôte les parenthèses et on réduit.

b) $A = (2x - 3)^2 - (x - 2)^2$
$A = [(2x - 3) + (x - 2)][(2x - 3) - (x - 2)]$
$A = (2x - 3 + x - 2)(2x - 3 - x + 2)$
$A = (3x - 5)(x - 1)$

On factorise à l'aide de l'identité remarquable :
$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 6

8 **a)** x et y sont deux nombres réels tels que :
$$-4x + 6y = 1$$
Exprimer y en fonction de x, puis x en fonction de y.
b) Un parallélépipède rectangle a une base carrée de côté c et une hauteur h.
Exprimer son volume V en fonction de c et de h, puis le côté c en fonction de V et h.

Sur le modèle de l'exercice résolu 7

9 x désigne un nombre réel.
$$V = (x + 3)^2 - (2x + 1)^2$$
$$C = (-5x - 1)^2 - (2x + 1)^2$$
a) Développer V.
b) Factoriser V.
c) Développer C.
d) Factoriser C.

EXERCICES RÉSOLUS

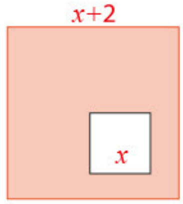
10 Employer la forme la plus adaptée

→ Cours 3. A

Un carré de côté x est entouré par un carré de côté $x+2$ (avec x nombre réel, $x > 0$).

a) Exprimer en fonction de x l'aire A de la bordure colorée sous forme d'une différence.

b) Xavier affirme : « Je peux calculer l'aire de ce domaine lorsque $x = 21$ et je n'effectue qu'une seule multiplication. » Imaginer comment Xavier a pu procéder.



Solution

a) L'aire A est égale à la différence des aires des deux carrés.
Donc $A = (x+2)^2 - x^2$.

b) On peut développer A :
$A = (x+2)^2 - x^2 = x^2 + 4x + 4 - x^2 = 4x + 4$
puis factoriser A : $A = 4(x+1)$.
Pour calculer l'aire A lorsque $x = 21$, on effectue alors le produit $A = 4 \times 22 = 88$.

L'aire d'un carré de côté c est égale à c^2.

On peut aussi écrire :
$A = (x+2+x)(x+2-x) = 2(2x+2)$
$A = 4(x+1)$

11 Transformer des écritures fractionnaires

→ Cours 3. C

a) x désigne un nombre réel non nul.

Écrire $Q = \dfrac{3x+2}{2} + \dfrac{4}{x}$ sous la forme d'un seul quotient.

b) Montrer que la différence des inverses de deux nombres entiers consécutifs non nuls est l'inverse de leur produit.

Solution

a) $Q = \dfrac{(3x+2)x}{2x} + \dfrac{4 \times 2}{x \times 2} = \dfrac{3x^2 + 2x + 8}{2x}$

b) n est un nombre entier non nul, son suivant est $n+1$.
$\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{n+1}{n(n+1)} - \dfrac{n}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n(n+1)}$
On obtient l'inverse du produit des entiers consécutifs n et $n+1$.

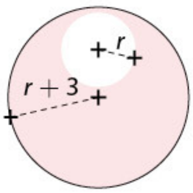
On réduit les deux écritures fractionnaires au même dénominateur, ici le produit $2x$.

Le dénominateur commun est le produit $n(n+1)$.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 10

12 Le domaine coloré est délimité par deux cercles de rayon r et $r+3$.



a) Montrer que l'aire C du domaine coloré est donnée par la formule :

$$C = \pi(r+3)^2 - \pi r^2$$

b) Sangeeta affirme : « J'ai calculé l'aire du domaine lorsque $r = 1{,}5$ en effectuant $3\pi \times 6$. »
Comment a-t-elle pu procéder ?

Sur le modèle de l'exercice résolu 11

13 **1.** x désigne un nombre réel non nul.

Écrire $R = \dfrac{5x-2}{3} - \dfrac{6}{x}$ sous la forme d'un seul quotient.

2. k désigne un nombre entier relatif.

a) $2k$ désigne un nombre pair.
Exprimer en fonction de k le nombre pair suivant.

b) Montrer que la différence des inverses de deux nombres pairs consécutifs non nuls est le double de l'inverse de leur produit.

Calcul mental → Exercez-vous sur la plateforme Hyperbole
⊕ de détails page 4

Puissances entières relatives

→ Cours 1

Questions Flash

14 Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme d'une puissance de 10.

a) $10^5 \times 10^3$ **b)** $(10^5)^3$ **c)** $\dfrac{10^5}{10^3}$ **d)** $\dfrac{10^5}{10^{-3}}$

15 Julia affirme : « $(7^{n+1})^2 \times 7^{-2n}$ a toujours la même valeur, quel que soit le nombre entier relatif n. » A-t-elle raison ?

16 Mathias : « $10^6 + 10^3$ est une puissance de 10. » A-t-il raison ?

17 Dans chaque cas, quel est l'unique nombre qui convient ?

a) Je suis une puissance de 10 supérieure à 10 000 :

(1) $10^6 - 10^3$ **(2)** $10^6 \times 10^3$ **(3)** $\dfrac{10^6}{10^3}$

b) Je suis une puissance de 4 supérieure à 10 :

(1) $\dfrac{2^2}{2^{-2}}$ **(2)** $4^6 \times 4^{-5}$ **(3)** $4^2 - 4^3$

18 On donne $A = 2x^2 - 5x + 2$.

a) Calculer A pour $x = 5$, puis pour $x = -5$.

b) Dire dans chaque cas si le résultat est une puissance de 3.

19 On donne $B = -5x^2 + 2x - 1$.

a) Calculer B pour $x = 2$ et $x = -\dfrac{8}{5}$.

b) Que remarque-t-on ?

20 Écrire $C = \dfrac{3^{-10} \times 9^2}{3^5}$ sous la forme 3^n, où n est un nombre entier relatif.

21 Écrire $D = 22^6 \times \dfrac{33^3}{8 \times 6^3}$ sous la forme 11^n, où n est un nombre entier relatif.

22 Écrire le nombre $E = 12^2 \times 9^7 \times 18^{-5}$ sous la forme $2^n \times 3^p$, avec n et p nombres entiers relatifs.

23 Écrire le nombre $F = 15^3 \times \dfrac{3^{-2}}{5^2} \times 45^{-2}$ sous la forme $3^n \times 5^p$, avec n et p nombres entiers relatifs.

24 On considère les deux nombres suivants :

$$G = 4^3 \times 9^{-2} \quad \text{et} \quad H = 6^3 \times 18^{-2}$$

a) Écrire G et H sous la forme $2^n \times 3^p$, où n et p sont des nombres entiers relatifs.

b) En déduire l'écriture sous la même forme de $\dfrac{G}{H}$.

25 La distance moyenne de la Terre à la Lune est environ de 382 milliers de kilomètres.

a) Exprimer cette distance en mètre.

b) Écrire le résultat obtenu sous forme scientifique $a \times 10^p$, avec $1 \leqslant a < 10$ et p un nombre entier relatif.

26 La lumière se déplace à la vitesse de $300\,000\ \text{km}\cdot\text{s}^{-1}$ dans le vide.

a) Donner l'écriture scientifique de la vitesse de la lumière dans le vide en $\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$.

b) Donner l'écriture scientifique d'une année-lumière, c'est-à-dire de la distance parcourue par la lumière dans le vide en une année de 365,25 jours.

c) La galaxie Proxima du Centaure est située à 4,2 années-lumière de la Terre.
Donner l'écriture scientifique de la distance qui nous sépare de cette galaxie, en kilomètre.

Racine carrée d'un réel positif

→ Cours 2

Questions Flash

27 Calculer la somme $\sqrt{4} + \sqrt{9} + \sqrt{16} + \sqrt{25}$.

28 Voici quatre nombres :

$A = 2\sqrt{2^2}$ $B = \left(\sqrt{3}\right)^2$ $C = \sqrt{(-4)^2}$ $D = \sqrt{49}$

Quel est le plus grand ? Le plus petit ?

29 Nadim affirme : « $E = \sqrt{100} - (-10)^2$ est un nombre négatif » et Charlotte : « Non, il est positif. » Que peut-on en penser ?

30 Dans chaque cas, donner la réponse exacte.

a) $\sqrt{18}$ est égal à :

(1) $3\sqrt{2}$ **(2)** $2\sqrt{3}$ **(3)** 9

b) Le carré de $3\sqrt{5}$ est :

(1) 15 **(2)** 45 **(3)** 225

31 Reconnaître les nombres entiers parmi les nombres :

- $\sqrt{8} \times \sqrt{2}$ • $\sqrt{3} \times \sqrt{27}$ • $\sqrt{6} \times \sqrt{13}$ • $\sqrt{0{,}2} \times \sqrt{500}$

32 Mathéo devait calculer :

a) le triple de $\sqrt{5}$;

b) la moitié de $\sqrt{18}$;

c) le double du produit de $\sqrt{2}$ et $\sqrt{7}$.

Voici ses réponses :

a) $\sqrt{45}$ **b)** $\sqrt{9}$ **c)** $\sqrt{56}$

Pour chacune de ses réponses, dire si elle est juste ou fausse. Justifier.

33 Écrire sous la forme $\sqrt{a}$, avec a nombre entier naturel.

a) $7\sqrt{5}$ **b)** $2\sqrt{3}$ **c)** $\dfrac{\sqrt{50}}{5}$ **d)** $\dfrac{\sqrt{2}\times\sqrt{6}}{2}$

34 **a)** Montrer que $\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$.

b) Exprimer de même $\sqrt{50}$ et $\sqrt{72}$ sous la forme $a\sqrt{2}$, avec a nombre entier naturel.

c) En déduire la valeur de $3\sqrt{32} - 12\sqrt{50} + 8\sqrt{72}$.

35 **a)** Écrire $\sqrt{300}$, $\sqrt{108}$ et $\sqrt{192}$ sous la forme $a\sqrt{3}$, avec a nombre entier naturel.

b) En déduire une écriture simplifiée de :

$$\mathrm{B} = \sqrt{300} - \sqrt{108} - \sqrt{192}$$

36 Montrer que $\sqrt{288} + \sqrt{720} = 12\left(\sqrt{2} + \sqrt{5}\right)$.

37 **a)** Recopier et compléter la ligne de calcul suivante :

$$\frac{40}{\sqrt{8}} = \frac{40\times\ldots}{\sqrt{8}\times\ldots} = \frac{40\times\ldots}{8} = 5\ldots$$

b) Écrire chaque nombre sous la forme $a\sqrt{b}$, où a et b désignent des nombres entiers naturels.

- $\dfrac{42}{\sqrt{6}}$ • $\dfrac{35}{\sqrt{7}}$ • $\dfrac{300}{\sqrt{10}}$

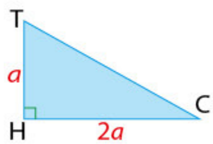
38 Développer et réduire :

- $\mathrm{A} = \left(5 + \sqrt{15}\right)\left(\sqrt{5} - \sqrt{3}\right)$ • $\mathrm{B} = \left(\sqrt{5} + \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{10} - 1\right)$

39 ABCD est un rectangle tel que $\mathrm{AB} = \sqrt{200} - \sqrt{98}$ et $\mathrm{BC} = \dfrac{\sqrt{350}}{\sqrt{7}} - \sqrt{8}$.

Démontrer que ABCD est un carré et calculer son aire.

40 a désigne un nombre réel positif. HTC est le triangle représenté ci-contre.



a) Exprimer la longueur TC en fonction de a.

b) Donner une valeur de a pour laquelle la longueur TC est un nombre entier naturel.

Expression en fonction de …

→ Cours 1 et 2

Questions flash

41 Pour chaque situation, choisir la bonne réponse.

a) Si $2x + 3y = 6$, alors …

(1) $x = 3 - 3y$ **(2)** $x = 3 - 1{,}5y$ **(3)** $x = 4 - 3y$

b) Si $2x + 3y = 6$, alors …

(1) $y = 2 - \dfrac{2}{3}x$ **(2)** $y = 2 - 2x$ **(3)** $y = 3 - 2x$

42 On considère un rectangle de périmètre 12.
On note ℓ sa largeur et L sa longueur.
Exprimer L en fonction de ℓ et ℓ en fonction de L.

43 On double le côté d'un carré d'aire A.
Quelle est alors son aire ?

44 x et y désignent deux nombres réels tels que :

$$8x + y = 10$$

Exprimer y en fonction de x puis x en fonction de y.

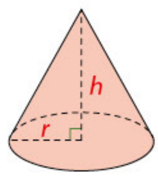
45 x et y désignent deux nombres réels tels que :

$$y = -0{,}5x + 0{,}25$$

Exprimer x en fonction de y.

46 Le volume V d'un cône de rayon r et de hauteur h est donné par :

$$\mathrm{V} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$



a) Justifier que $h = \dfrac{3\mathrm{V}}{\pi r^2}$.

b) Exprimer r en fonction de h et de V.

47 On considère un cube de côté c et de volume V.

a) Exprimer V en fonction de c.

b) On double le côté du cube, que devient alors son volume ?

48 La force d'attraction universelle entre deux corps dépend de leurs masses m_A et m_B, en kg, de leur distance d, en m, et d'une constante G.

Elle s'exprime, en newton (N), par $\mathrm{F} = \mathrm{G}\dfrac{m_\mathrm{A}m_\mathrm{B}}{d^2}$.

a) Démontrer que la quantité $\dfrac{\mathrm{F}d^2}{m_\mathrm{A}m_\mathrm{B}}$ est constante.

b) Exprimer la distance d en fonction des autres variables.

Transformations d'expressions algébriques

→ Cours 3

Questions Flash

49 Dans chaque cas, donner la réponse exacte.

a) Pour tout nombre réel x, $4(-3+2x)$ est égal à :

(1) $1+2x$ **(2)** $-12+2x$ **(3)** $-12+8x$

b) Pour tout nombre réel x, $(1+x)(1-x)$ est égal à :

(1) 2 **(2)** $1-x^2$ **(3)** $1-2x$

50 Dans chaque cas, donner la réponse exacte.

a) Pour tout nombre réel x, $9x+30$ est égal à :

(1) $39x$ **(2)** $3(3x+10)$ **(3)** $9(x+21)$

b) Pour tout nombre réel x, x^2-16 est égal à :

(1) $x(x-16)$ **(2)** $(x-4)^2$ **(3)** $(x+4)(x-4)$

51 Laura affirme : « Pour tout nombre réel x, $(2x-3)(x-1)=2x^2+3$. » A-t-elle raison ?

52 Pour tout nombre réel x :

$$A=(x+2)x-5(x+2)$$

Bastien affirme : « A est égal à $(x-5)(x+2)$. »
Ilyès n'est pas d'accord : « A est égal à $2(x-3)$. »
Lequel des deux a raison ?

53 Dans chaque cas, développer et réduire.

a) $A=8(-2x+9)$ **b)** $B=(x+2)(x-3)$

c) $C=(-3x+7)(4x-1)$ **d)** $D=(-3x+1)(-5x+2)$

54 Voici un programme de calcul.

- Choisir un nombre x.
- Multiplier par 5.
- Ajouter 2.
- Multiplier par le nombre de départ.
- Ôter le double du nombre de départ.

a) Montrer que le programme calcule $5x^2$.

b) En déduire deux nombres pour lesquels on obtient 80 avec ce programme.

55 Démontrer que pour tout nombre réel x :

a) $(2x+5)(x-2)+4(2{,}5-10x)=2x^2-39x$

b) $(-x+5)(-6x+1)-3x(2x-10)=-x+5$

56 Vérifier le développement obtenu avec un logiciel de calcul formel.

1	-2(3x-4)(-5+7x)
	Développer: $-42x^2+86x-40$

57 Repérer un facteur commun et factoriser.

a) $A=28x-21$ **b)** $B=-4x^2+18x$

c) $C=x(x-1)+2(x-1)$

d) $D=-x(x+3)+4(x+3)$

58 Démontrer que pour tout nombre réel x :

a) $-6x-9=-3(2x+3)$

b) $(2x+3)^2+(-6x-9)=2x(2x+3)$

59 Pour tout nombre réel x, on pose :

$$T(x)=(2x+5)^2+2x+5$$

a) Justifier que $T(x)=(2x+5)(2x+5)+(2x+5)\times 1$.

b) En déduire que $T(x)=2(2x+5)(x+3)$.

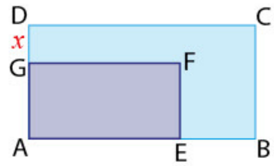
60 Pour tout nombre réel x, on pose :

$$S(x)=2(4x-1)^2-4x+1$$

a) Justifier que $S(x)=(4x-1)(8x-2)+(4x-1)\times(-1)$.

b) Factoriser $S(x)$.

61 ABCD est un rectangle tel que $AB=16$ et $BC=8$.



On découpe une bordure en forme de L pour obtenir un nouveau rectangle AEFG tel que $EB=2GD$.

On pose $GD=x$ et on note $\mathscr{A}(x)$ l'aire du rectangle AEFG.

a) Justifier que $\mathscr{A}(x)=(16-2x)(8-x)$.

b) Développer et réduire $\mathscr{A}(x)$.

c) Montrer que $\mathscr{A}(x)=2(8-x)^2$.

d) Utiliser l'écriture la plus adaptée pour calculer $\mathscr{A}(x)$ lorsque $x=4$.

62 Dans chaque cas, développer et réduire l'expression.

a) $(x+4)^2$ **b)** $(-2x+4)^2$ **c)** $(x-10)^2$

d) $(2x-10)^2$ **e)** $(-10x-2)^2$ **f)** $(10x-2)(10x+2)$

63 **a)** Développer $(x-1)^2$.

b) En déduire une méthode pour calculer mentalement 99^2.

64 **a)** Développer $(3x+1)^2$.

b) Calculer mentalement 301^2.

65 Vérifier le développement obtenu avec un logiciel de calcul formel.

1	$(3x-2)^2+(x+6)^2$
	→ $10x^2+40$

66 Dans chaque cas, factoriser.

a) $y^2 - 10y + 25$ **b)** $y^2 + 10y + 25$ **c)** $y^2 - 49$

d) $4x^2 - 36$ **e)** $36x^2 - 12x + 1$ **f)** $20 - 5x^2$

67 Voici un programme de calcul.

- Choisir un nombre x.
- Ajouter 3.
- Élever au carré.
- Soustraire 9.

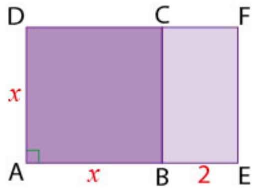
a) Montrer que le résultat du programme est $x(x+6)$.

b) Utiliser la méthode la plus adaptée pour obtenir la valeur donnée par le programme lorsque $x = 4$.

68 Vérifier la factorisation obtenue avec un logiciel de calcul formel.

1	$(3x-4)^2 - (8-2x)^2$
	Factoriser: $(x+4)(5x-12)$

69 On considère le rectangle AEFD ci-contre formé d'un carré ABCD de côté x cm (avec $x > 0$) et d'un rectangle BEFC tel que BE = 2 cm.



On note $\mathcal{A}$ l'aire du rectangle AEFD en cm^2.

a) Exprimer $\mathcal{A}$ en fonction de x sous forme développée.

b) Vérifier que $\mathcal{A} = (x+1)^2 - 1$.

c) Quelles sont les dimensions du rectangle AEFD lorsque $\mathcal{A} = 48$ cm^2 ?

70 Algo Voici un algorithme.

```
1 y ← 2 + 8x
2 y ← y²
3 y ← y − 64x²
4 y ← y − 32x
```

a) Réaliser un tel tableau afin de suivre l'évolution de la variable y lorsque $x = 3$.

Ligne	y
1	26
2	⋮
⋮	

Quelle est la valeur de y à la fin de l'algorithme ?

b) Déterminer la valeur de y à la fin de l'algorithme lorsqu'on donne à x la valeur -5.

c) Clémence affirme : « Pour toute valeur de x, la valeur de y à la fin de l'algorithme est 4. »
Cette affirmation est-elle exacte ? Justifier.

71 **a)** Calculer chacune des différences :

- $11^2 - 10^2$ • $12^2 - 11^2$ • $38^2 - 37^2$ • $100^2 - 99^2$

b) Cynthia conjecture : « La différence des carrés de deux nombres entiers naturels consécutifs est la somme de ces deux entiers. » Démontrer la conjecture de Cynthia.

c) Jérémy conjecture alors : « Il n'est pas possible que la différence des carrés de deux nombres entiers naturels consécutifs donne 2018. »
Que peut-on en penser ? Justifier.

Expressions fractionnaires

→ Cours 3. C

Questions flash

72 Donner la réponse exacte.

Pour tout nombre réel $x > 0$, $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+1}$ est égal à :

(1) $\dfrac{2}{2x+1}$ **(2)** $\dfrac{2x+1}{x(x+1)}$ **(3)** $\dfrac{3}{x+1}$

73 L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ?

« Pour tout nombre réel $x \neq 4$, $\dfrac{2}{x-4} - \dfrac{x}{2x-8}$ est égal à $-\dfrac{1}{2}$. »

74 Vincent affirme :

« Pour tout nombre réel $x \neq -1$, $\dfrac{5x+1}{x+1} = 5 + 1$. »

Judith répond : « Non ! $\dfrac{5x+1}{x+1} = 5 - \dfrac{4}{x+1}$ »

Lequel des deux a raison ?

75 Écrire chacune des expressions suivantes sous la forme d'un unique quotient.

a) $\dfrac{x}{7} + \dfrac{x}{3}$ **b)** $\dfrac{4x}{7} + \dfrac{2x+1}{3}$

c) $\dfrac{4}{x} + \dfrac{2x+1}{3}$ avec $x \neq 0$ **d)** $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$ avec $x \neq 0$

76 Écrire chacune des expressions suivantes sous la forme d'un unique quotient (x est un nombre réel non nul).

a) $\dfrac{4}{x} + \dfrac{2x+1}{3x}$ **b)** $3x - \dfrac{2x+1}{3x}$

77 ABCD est un rectangle d'aire constante égale à 1. On note x la longueur du côté $[AB]$, avec $x > 0$.

a) Justifier que $BC = \dfrac{1}{x}$.

b) Montrer que le périmètre du rectangle ABCD est donné par :

$$p(x) = \frac{2x^2 + 2}{x}$$

c) Justifier que si $x = 10^4$, alors le périmètre est environ égal à 2×10^4, avec une erreur inférieure au millième.

d) Utiliser la forme la plus adaptée de $p(x)$ pour déterminer les dimensions d'un rectangle d'aire 1 et de périmètre 200,02.

QCM interactifs

Pour se tester

78 Dans chaque cas, donner la réponse exacte sans justifier.

		A	B	C	D
1	7^{16} est égal à …	$7^8 \times 7^4$	$7^{11} + 7^5$	$(7^4)^2$	$\dfrac{7^{18}}{7^2}$
2	$\sqrt{4800}$ est égal à …	$100\sqrt{48}$	$40\sqrt{12}$	$40\sqrt{3}$	48×10
3	a, b, c réels non nuls. Si $a = \dfrac{b}{2c}$, alors …	$b = \dfrac{a}{2c}$	$b = \dfrac{ac}{2}$	$c = \dfrac{b}{2a}$	$c = \dfrac{ba}{2}$
4	Pour tout nombre réel x, $(2x+3)^2$ est égal à …	$4x^2 + 9$	$4x^2 + 12x + 9$	$2x^2 + 12x + 9$	$4x^2 + 6x + 9$
5	Pour tout nombre réel x, $(1-3x)^2$ est égal à …	$9x^2 + 6x - 1$	$1 - 9x^2$	$9x^2 - 6x + 1$	$3x^2 - 6x + 1$

79 Dans chaque cas, donner la (ou les) réponse(s) exacte(s) sans justifier.

		A	B	C	D
1	Pour tout nombre réel x, $4x^2 - 36$ est égal à …	$(4x+6)(4x-6)$	$(2x-6)^2$	$(2x+6)(2x-6)$	$4(x+3)(x-3)$
2	Pour tout nombre réel x, $(5x-3)^2 - 4$ est égal à …	$25x^2 - 30x + 5$	$5x^2 - 30x + 5$	$(5x-7)(5x+1)$	$5(x-1)(5x-1)$
3	Si les réels positifs E, m et v vérifient $\mathrm{E} = \dfrac{1}{2}mv^2$, alors …	$m = \dfrac{2\mathrm{E}}{v^2}$	$v = \sqrt{\dfrac{2\mathrm{E}}{m}}$	$v^2 = \mathrm{E} - \dfrac{1}{2}m$	$mv = 2\mathrm{E}v$
4	Pour tout nombre réel $x > 0$, $\dfrac{3}{x+1} - \dfrac{2}{x}$ est égal à …	1	$\dfrac{5}{2x+1}$	$\dfrac{x-2}{x(x+1)}$	$-\dfrac{2-x}{x(x+1)}$
5	Pour tout nombre réel x, $16x^2 - 4x + \dfrac{1}{4}$ est égal à …	$16\left(\dfrac{1}{8} - x\right)^2$	$\left(8x - \dfrac{1}{2}\right)^2$	$\left(4x - \dfrac{1}{2}\right)^2$	$\dfrac{1}{4}(8x-1)^2$

80 Dans chaque cas, dire si l'affirmation est vraie ou fausse en justifiant.

Affirmations :

1. Si on triple chacune des dimensions d'un rectangle, alors l'aire du rectangle est multipliée par 3.
2. Pour tous nombres entiers naturels a et b, $2^a + 2^b = 2^{a+b}$.
3. Pour tout nombre entier relatif n, $9^{5-n} \times 3^{2n-6}$ est égal à 81.
4. Pour tout nombre réel x, $(3x-2)^2 = (2x-3)^2$.
5. Pour tout nombre réel $x \neq 0$, $\dfrac{4x+10}{2x} = 2 + \dfrac{5}{x}$.

Vérifiez vos réponses : p. 346

Nathan live!

Soutien

Fiches de remédiation

81 Bien comprendre la relation $\sqrt{a^2} = |a|$

a) Recopier et compléter en barrant l'égalité qui ne convient pas :

a	$\sqrt{a^2}$	$-a$	L'égalité qui convient est …	
8	$\sqrt{8^2} = 8$	-8	$\sqrt{a^2} = a$	$\cancel{\sqrt{a^2} = -a}$
-6	$\sqrt{(-6)^2} = \dots$	…	$\sqrt{a^2} = a$	$\sqrt{a^2} = -a$
1,44	$\sqrt{1{,}44^2} = \dots$	…	$\sqrt{a^2} = a$	$\sqrt{a^2} = -a$
$-\frac{1}{4}$	$\sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2} = \dots$	…	$\sqrt{a^2} = a$	$\sqrt{a^2} = -a$

AIDE
Si a est négatif, alors $-a$ est positif.
Par exemple, si $a = -6$ alors $-a = 6$.

b) Indiquer les valeurs de a pour lesquelles on a chacune des deux égalités : • $\sqrt{a^2} = a$ • $\sqrt{a^2} = -a$

82 Exprimer une variable à l'aide d'une relation algébrique

a) La vitesse moyenne v est le quotient de la distance parcourue d par le temps de parcours t, soit $v = \frac{d}{t}$.

Recopier et compléter la ligne ci-dessous.

$v \times \dots = d$ Explication : $t = \frac{\dots}{\dots}$ Explication :

b) La puissance P d'un composant électrique est le produit de sa résistance R par le carré de l'intensité I du courant qui le traverse, soit $P = RI^2$.
Recopier et compléter la ligne ci-dessous.

$I^2 = \frac{\dots}{\dots}$ Explication : $I = \dots$ Explication :

AIDE
Les explications attendues sont du type :
• on multiplie (ou on divise) chaque membre de l'égalité par …
• si $y = x^2$ avec x et y positifs, alors $x = \dots$

83 Gérer les signes dans un développement

On considère l'expression $S(x) = (4x-5)^2 - (3x-4)^2$, où x désigne un nombre réel.

a) Recopier et compléter le développement :
$S(x) = (16x^2 - \dots x + 25) - (\dots x^2 - \dots x + 16)$

b) Recopier et compléter la suite du développement :
$S(x) = 16x^2 - \dots x + 25 \dots 9x^2 \dots 24x \dots 16$

c) Réduire l'expression $S(x)$.

AIDE
Si une parenthèse est précédée du signe moins, on ôte les parenthèses en changeant tous les signes des termes contenus à l'intérieur de cette parenthèse.

84 Reconnaître un facteur commun

x désigne un nombre réel.
$R(x) = (5x-2)(x+3) + x(5x-2)$ et $S(x) = (8x-1)(2x+3) + 8x - 1$.
Recopier et compléter les factorisations.

a) $R(x) = (\dots)[(x+3) + \dots] = (5x-2)(\dots x + \dots)$

b) $S(x) = (8x-1)(2x+3) + (8x-1) \times \dots = (\dots)(2x + \dots)$

AIDE
Pour factoriser $ka + k$, on écrit $ka + k \times 1$.

S'entraîner Algo

EXERCICE RÉSOLU

85 Déterminer la première puissance supérieure à une valeur

Une feuille de papier A4 a une épaisseur annoncée de 100 µm, soit 10^{-1} mm.
On plie cette feuille en deux, ce qui double son épaisseur. On recommence ensuite la même opération et on suppose que l'on peut le faire autant de fois que l'on veut.
On voudrait savoir combien de pliages sont nécessaires pour que l'épaisseur obtenue soit supérieure à la hauteur de la tour Eiffel, c'est-à-dire 324 m.

a) Justifier que l'épaisseur obtenue après quatre plis est supérieure à 1 mm.

b) Exécuter l'algorithme ci-contre pas à pas en complétant un tableau de suivi des variables et indiquer la valeur de n à la fin de l'algorithme.
Interpréter dans le contexte de l'exercice.

c) Quelle modification faut-il apporter à cet algorithme afin qu'il détermine le nombre de plis nécessaires pour que l'épaisseur soit supérieure à la hauteur de la tour Eiffel ?

d) Programmer cet algorithme en langage Python et donner alors le nombre de plis nécessaires.

$n \leftarrow 0$
$Ep \leftarrow 0{,}1$
Tant que $Ep \leqslant 10$
  $n \leftarrow n+1$
  $Ep \leftarrow Ep \times 2$
Fin Tant que

Solution

a) L'épaisseur de 0,1 mm au départ est multipliée par 2 quatre fois : $0{,}1 \text{ mm} \times 2^4 = 1{,}6$ mm.

b)

n	0	1	2	3	4	5	6	7
Ep	0,1	0,2	0,4	0,8	1,6	3,2	6,4	12,8

En fin d'exécution de l'algorithme, on obtient $n = 7$.
L'épaisseur, en mm, du pliage est supérieure pour la première fois à 10 mm après 7 plis.

c) La hauteur, en mm, de la tour Eiffel est 324×10^3.
La ligne 3 devient :

Tant que $Ep \leqslant 324 \times 10^3$

d) On trouve que 22 plis sont nécessaires pour que l'épaisseur du pliage dépasse la hauteur de la tour Eiffel.

Après n plis, l'épaisseur de la feuille, en mm, est donnée par $0{,}1 \times 2^n$.

```python
def Plis(hauteur):
    n=0
    Ep=0.1
    while Ep<=hauteur:
        n=n+1
        Ep=Ep*2
    return n
```

```
>>> Plis(324*10**3)
22
```

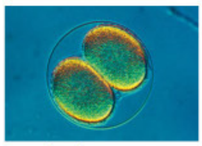
À VOTRE TOUR

86 Une feuille de papier a une épaisseur de 0,2 mm. On plie cette feuille en deux autant de fois que l'on veut.

a) Modifier l'algorithme de l'exercice **85** afin qu'il détermine le nombre de plis nécessaires pour que l'épaisseur soit supérieure à la distance Terre-Lune ($3{,}81 \times 10^5$ km).

b) Programmer cet algorithme en langage Python et indiquer alors le nombre de plis nécessaires.

87 Dans un laboratoire, un certain type de cellules est mis en culture. Chaque cellule se divise en deux à chaque minute.



a) Modifier l'algorithme de l'exercice **85** afin qu'il détermine le temps nécessaire pour dépasser un milliard de cellules à partir d'une seule cellule.

b) Programmer cet algorithme en langage Python et donner alors le temps nécessaire.

EXERCICE RÉSOLU

88 Rechercher une configuration géométrique particulière

ABCD est un carré de côté 25.
F est le point du segment [BC] tel que CF = 5,76.
E est un point mobile du segment [CD].

1. a) Réaliser cette figure à l'aide d'un logiciel de géométrie.

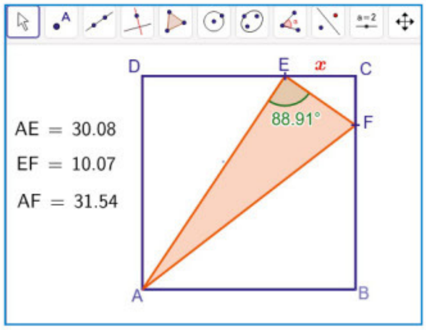
b) Conjecturer une longueur EC telle que le triangle AEF soit rectangle en E.

2. On note x la longueur EC.

a) Démontrer que $AF^2 = 995{,}1776$ et $EF^2 = x^2 + 33{,}1776$.

b) Exprimer de même EA^2 en fonction de x.

c) Démontrer alors la conjecture.



Solution

1. On conjecture que le triangle AEF est rectangle en E lorsque $x = 16$.

2. a) D'après le théorème de Pythagore dans le triangle AFB rectangle en B :
$AF^2 = BA^2 + BF^2 = 25^2 + (25 - 5{,}76)^2 = 995{,}1776$
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle EFC rectangle en E :
$EF^2 = CE^2 + CF^2 = x^2 + 33{,}1776$

b) D'après le théorème de Pythagore dans le triangle DEA rectangle en D :
$EA^2 = DE^2 + DA^2 = (25 - x)^2 + 25^2 = x^2 - 50x + 1250$

c) Si $x = 16$, alors $EF^2 = 16^2 + 33{,}1776 = 289{,}1776$ et $EA^2 = 16^2 - 50 \times 16 + 1250 = 706$.
On constate que $AF^2 = EF^2 + EA^2$, donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle AEF est rectangle en E.

On a trouvé une valeur de x pour laquelle le triangle AEF est rectangle en E.
En fait, on peut vérifier que $x = 9$ convient aussi.

À VOTRE TOUR

89 ABCD est un carré de côté 20.
F est le point du segment [BC] tel que :
$$CF = 3{,}2$$
E est un point mobile du segment [CD].

1. a) Réaliser une figure avec un logiciel de géométrie.

b) Conjecturer une longueur EC telle que le triangle AEF soit rectangle en E.

2. On note x la longueur EC.

a) Montrer que :
$$AF^2 = 682{,}24 \text{ et } EF^2 = x^2 + 10{,}24$$

b) Exprimer de même EA^2 en fonction de x.

c) Démontrer alors la conjecture.

90 ABCD est un carré de côté 1.
E est un point mobile du segment [BC] et F est un point mobile du segment [CD] tels que CE = CF.

1. a) Réaliser une figure avec un logiciel de géométrie.

b) Conjecturer une longueur EC telle que le triangle AEF soit équilatéral.

2. On note x la longueur EC.

a) Montrer que $EF^2 = 2x^2$.

b) Exprimer de même EA^2 en fonction de x.

c) En déduire que le triangle AEF est équilatéral lorsque $x = \sqrt{3} - 1$.

d) Ce résultat est-il cohérent avec la conjecture émise à la question **1.b)** ?

Démontrer et raisonner

91 Démontrer une nouvelle identité remarquable

Méthode
On sait développer le carré de la somme de deux nombres ; pour développer le carré de la somme $a+b+c$ de trois nombres, on pense à l'écrire $(a+b)+c$, somme des deux nombres $(a+b)$ et c.

Démontrer que pour tous nombres réels a, b et c :
$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$$

92 Découvrir des identités remarquables

Méthode
On sait développer le carré de $a+b$; pour développer le cube de $a+b$, on pense à l'écrire comme le produit de $(a+b)$ par le carré $(a+b)^2$.

a) Démontrer que pour tous nombres réels a et b :
$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
b) Remplacer b par $-b$ dans l'égalité précédente et démontrer que :
$$(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

93 Comparer deux nombres

Méthode
Pour démontrer que deux nombres positifs sont différents, on peut prouver que leurs carrés sont différents.

a et b désignent deux nombres réels positifs.

a) Justifier que $\left(\sqrt{a+b}\right)^2 = a+b$.

b) Justifier que $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 = a+b+2\sqrt{ab}$.

c) En déduire que $\sqrt{a}+\sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$ si a et b sont tous les deux non nuls.

94 Déterminer une condition nécessaire et suffisante

Méthode
Dire que deux nombres sont égaux équivaut à dire que leur différence est nulle.

a) Démontrer que pour tous nombres réels a et b :
$$(a+b)^2-(a-b)^2 = 4ab$$
b) En déduire que $(a+b)^2 = (a-b)^2$ si, et seulement si, $a = 0$ ou $b = 0$.

Utiliser des écritures littérales

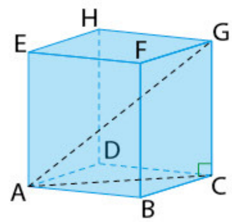
95 n désigne un nombre entier relatif.

On pose $S = \dfrac{2^2 \times 3^3 \times 4^4 \times 5^5 \times 6^6}{60^n}$.

a) Montrer que $S = 2^{16-2n} \times 3^{9-n} \times 5^{5-n}$.

b) Existe-t-il une valeur de n pour laquelle le nombre S est une puissance de 2 ?

96 ABCDEFGH est un cube de côté x (avec $x > 0$).

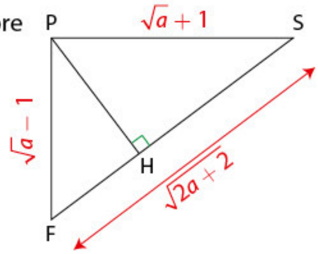


a) Démontrer qu'une diagonale du carré ABCD a pour longueur $x\sqrt{2}$.

b) Démontrer, dans le triangle ACG rectangle en C, que la grande diagonale [AG] du cube a pour longueur $x\sqrt{3}$.

c) Dans cette question, le cube ABCDEFGH a une grande diagonale de longueur 3 cm.
Calculer son volume et l'aire de sa surface extérieure.

97 a désigne un nombre réel avec $a > 1$.



a) Démontrer que le triangle FPS représenté ci-contre est rectangle en P.

b) Exprimer l'aire du triangle FPS en fonction de a.

c) En déduire que si $a = 49$, alors PH $= 4{,}8$.

98 x désigne un nombre réel et :
$$A = 3x+3+(10x+10)(x-2)$$
a) Écrire A en faisant apparaître le facteur commun $x+1$.

b) Démontrer que $A = (x+1)(10x-17)$.

99 x désigne un nombre réel et :
$$B = 8x-6-(4x-3)^2$$
Écrire B en faisant apparaître le facteur commun $(4x-3)$, puis factoriser B.

100 x désigne un nombre réel et :
$$C = (15x-6)^2+(10x-4)(3x+2)$$
a) Montrer que pour tout nombre réel x :
$$(15x-6)^2 = 9(5x-2)^2$$
b) Écrire C en faisant apparaître le facteur commun $(5x-2)$, puis factoriser C.

101 x désigne un nombre réel et :

$$E = (x-3)^2 - 16 + (x+1)(x+2)$$

Factoriser E.

102 Vérifier la factorisation obtenue avec un logiciel de calcul formel.

1 $x - 1 + (x-1)^2 + x^2 - 1$

Factoriser: $\mathbf{(x-1)\,(2\,x+1)}$

103 x désigne un nombre réel et :

$$F = (30x-5)(3x+1) + (2x-8)^2 + 6x^2 - 3x - 58$$

a) Développer et réduire F.

b) Factoriser F à partir de sa forme développée et réduite.

104 **Algo** **1.** Dans chaque cas, recopier et compléter l'algorithme ci-contre afin qu'il détermine la plus petite valeur de n telle que :

```
n ← 0
Tant que [      ]
    n ← n + 1
Fin Tant que
```

a) $5^n > 10^6$

b) $0{,}8^n < 0{,}001$

2. Programmer les deux algorithmes obtenus en langage Python et donner dans chaque cas la valeur de n obtenue.

105 On a obtenu à l'aide du tableur certaines puissances de 0,9. En s'aidant du tableau ci-contre, déterminer :

	A	B
1	n	$0{,}9^n$
2	41	0,01330279
3	42	0,01197252
4	43	0,01077526
5	44	0,00969774
6	45	0,00872796

a) la plus petite valeur de n telle que $0{,}9^{2n} \leqslant 0{,}01$;

b) la plus petite valeur de n telle que :

$$0{,}9^{5n-1} < 0{,}012 \ ;$$

c) la plus petite valeur de n telle que $0{,}9^{-n} \geqslant 100$.

106 **Algo** Voici deux algorithmes.

Algorithme 1	**Algorithme 2**
$A \leftarrow 3x - 2$	$C \leftarrow 8x$
$B \leftarrow 2 - x$	$D \leftarrow x - 1$
$y \leftarrow A^2 - B^2$	$y \leftarrow C \times D$

a) Calculer la valeur de y déterminée par chaque algorithme lorsque la valeur de la variable x est -10.

b) Issa conjecture : « Pour tout nombre x, les deux algorithmes calculent le même nombre y. »

La conjecture est-elle vraie ?

Justifier.

Employer des relations

107 La température C, exprimée en degré Celsius (°C), et la température F, exprimée en degré Fahrenheit (°F), sont liées par la relation $5F - 9C = 160$.

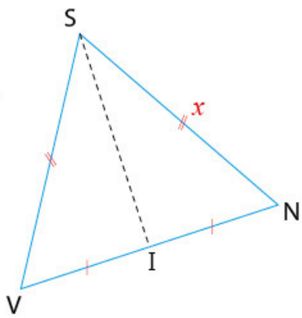
a) Exprimer F en fonction de C, et C en fonction de F.

b) À quelle température l'eau gèle-t-elle en °F ?

c) Hier à Carcassonne, la température maximum était de 9 °C et celle de Sacramento en Californie de 44 °F. Où a-t-il fait le plus froid ? Justifier.

108 SVN est un triangle équilatéral de côté x.

I est le milieu du côté $[VN]$.



a) Justifier que le triangle VIS est rectangle en I.

b) Montrer que $SI = x\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

c) En déduire que l'aire du triangle SVN est donnée par $\mathscr{A} = \dfrac{x^2\sqrt{3}}{4}$.

d) Exprimer x en fonction de l'aire $\mathscr{A}$.

109 On modélise une canette de soda par un cylindre de rayon r et de hauteur h.

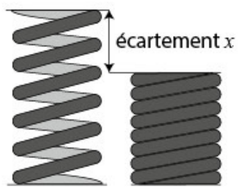
a) Exprimer le volume V de cette canette en fonction de r et h.

b) Un exploitant veut changer la forme de ses canettes. Il envisage d'augmenter le rayon de 20 %.

Par quel nombre doit-il diviser la hauteur pour conserver le même volume ?

c) En déduire le pourcentage de réduction qu'il doit appliquer à la hauteur. *Arrondir au dixième.*

110 On écarte un ressort de raideur k de sa position d'équilibre d'une longueur x. Son énergie est alors donnée par la formule $E = 0{,}5kx^2$.



Dans chaque cas, dire si l'affirmation est vraie ou fausse. Justifier.

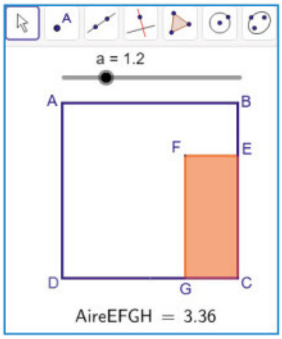
a) Si l'écartement x est triplé, alors l'énergie est triplée.

b) Si la raideur est divisée par 2 et que l'écartement est doublé, alors l'énergie reste identique.

c) À écartement fixe, l'énergie est proportionnelle à la raideur.

Modéliser avec des écritures littérales

111 Anita a réalisé la figure ci-contre avec un logiciel de géométrie.



ABCD est un carré de côté 4 cm.
E est un point du côté [BC] et G un point du côté [CD] tels que BE = CG.
F est le quatrième sommet du rectangle EFGC.
Anita déplace le point E sur [BC] et affiche l'aire du rectangle EFGC.

a) On note x la longueur des segments [BE] et [CG], avec $0 \leqslant x \leqslant 4$. Exprimer l'aire $\mathcal{A}(x)$ du rectangle EFGC en fonction de x.

b) Montrer que pour tout nombre réel x tel que $0 \leqslant x \leqslant 4$:

$$\mathcal{A}(x) - 4 = -(x-2)^2$$

c) Anita conjecture que l'aire du rectangle EFGC est toujours inférieure ou égale à 4.
La conjecture d'Anita est-elle vraie ou fausse ?
Justifier.

112 Marine a dessiné sur son cahier un triangle ABC rectangle en A. Elle donne des indications à Dorian par téléphone pour qu'il puisse reproduire la figure.
La longueur de l'hypoténuse [BC], en mm, est notée h.
Elle est plus longue de 4 mm que la longueur du côté [AC].

a) Exprimer la longueur AC en fonction de h.

b) À l'aide du théorème de Pythagore, exprimer AB^2 en fonction de h.

c) En déduire alors que $h = 0{,}125 \times AB^2 + 2$.

d) Marine ajoute : « La longueur AB est exactement égale à 2,5 cm. »
Donner les dimensions du triangle rectangle de Marine.

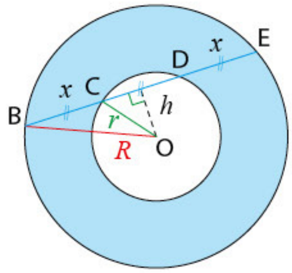
113 **Algo** Voici un algorithme.

```
Si x < 0 alors
    y ← x
sinon
    y ← (x + 1)² + 4
Fin Si
```

a) Pour quel nombre x l'algorithme donne-t-il :
- $y = 13$?
- $y = -4$?

b) Écrire un algorithme qui renvoie la valeur de x sachant la valeur de y déterminée par l'algorithme précédent.

114 $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont deux cercles de centre O et de rayons respectifs R et r.
[BE] est une corde du cercle $\mathscr{C}$ située à la distance h du centre O. Elle coupe $\mathscr{C}'$ en C et D de façon que $BC = CD = DE = x$, avec $x > 0$.



a) Montrer que :
- $r^2 = h^2 + 0{,}25\,x^2$
- $R^2 = h^2 + 2{,}25x^2$

b) En déduire que l'aire $\mathcal{A}$ de la couronne colorée est telle que $\mathcal{A} = 2\pi x^2$.

c) Exprimer x en fonction de $\mathcal{A}$ et en déduire la valeur de x si l'aire de la couronne colorée est $24{,}5\pi$.

S'entraîner à la logique → p. XXI

115 Implication réciproque

x et y désignent deux nombres réels positifs.

a) L'implication suivante est-elle vraie ?
Si $x = \sqrt{10y}$, alors $y = 0{,}1x^2$.

b) Énoncer l'implication réciproque.
Cette réciproque est-elle vraie ?

116 Équivalence

x et y désignent deux nombres réels.

a) Démontrer l'implication :
si $x = 4y - 8$, alors $y = 0{,}25x + 2$.

b) Démontrer l'implication réciproque.

c) Énoncer l'équivalence ainsi démontrée.

117 Quantificateurs

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse. Justifier.

a) Pour tout nombre réel x, $(2x-3)^2 = 4x^2 + 9$.

b) Il existe un nombre réel x tel que :

$$(2x-3)^2 = 4x^2 + 9$$

c) Pour tout nombre réel x, $\sqrt{x^4} = x^2$.

d) Il existe un couple d'entiers relatifs n et m tel que :

$$3^n - 2^m = 6^{n-m}$$

118 Imaginer une stratégie

Modéliser | Calculer

a) Effectuer avec la calculatrice chacun des produits :
(1) 19×21 **(2)** 199×201 **(3)** 1999×2001
b) Prévoir la valeur du produit 19999×20001 puis vérifier à la calculatrice.
c) Conjecturer puis démontrer une formule qui généralise les calculs précédents.

119 Conjecturer puis démontrer

Calculer | Communiquer

a) Recopier et compléter le tableau ci-dessous.

n	0	1	2	4
$n+1$				
$n+2$				
$n+3$				
$n(n+1)(n+2)(n+3)+1$				
n^2+3n+1				

b) Ambre énonce la conjecture suivante : « Le produit de quatre nombres entiers naturels consécutifs augmenté de 1 est toujours le carré d'un nombre entier. » Traduire cette conjecture par une égalité en s'aidant des résultats obtenus dans le tableau de la question **a)**.
c) Développer successivement les produits suivants :
- $n(n+1)$
- $(n+2)(n+3)$
- $(n^2+n)(n^2+5n+6)$
- $(n^2+3n+1)(n^2+3n+1)$

d) Terminer la démonstration de la conjecture.
e) Sans utiliser la calculatrice, de quel nombre $10 \times 11 \times 12 \times 13 + 1$ est-il le carré ?

120 Tice Prendre des initiatives

Modéliser | Raisonner | Calculer

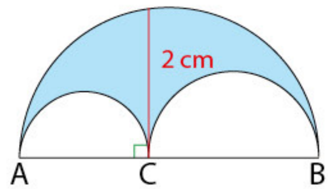
Adel plie des feuilles de papier en deux.
Quelle que soit l'épaisseur obtenue, il peut replier en deux autant de fois qu'il le souhaite.
Chaque pli en deux lui prend exactement 1 s.
Mara plie des feuilles de papier en trois.
Quelle que soit l'épaisseur obtenue, elle peut replier en trois autant de fois qu'elle le souhaite.
Chaque pli en trois lui prend exactement 2 s.
Si Adel et Mara font la course en pliant chacun une feuille A4 d'épaisseur 0,1 mm, qui aura en premier une épaisseur de feuille supérieure à 10 m ? Justifier.

121 Étudier l'arbelos

Problème ouvert

Représenter | Calculer

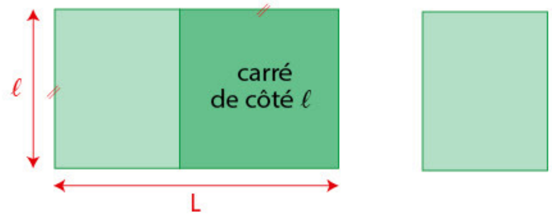
Déterminer l'aire de la zone colorée (appelée arbelos).



122 Calculer un format

Raisonner | Calculer

Un rectangle a pour largeur ℓ et longueur L, où $L > \ell$.
Le format F de ce rectangle est donné par $F = \dfrac{L}{\ell}$.
On ôte un carré de côté ℓ du rectangle précédent.



a) Exprimer les dimensions du nouveau rectangle en fonction de ℓ et de L.
b) Montrer que si $L \geqslant 2\ell$, alors le format du nouveau rectangle est $F' = F - 1$. En déduire alors que les formats des deux rectangles sont différents.
c) Montrer que si $2\ell > L > \ell$, alors le format du nouveau rectangle est $F' = \dfrac{1}{F-1}$.
d) Démontrer qu'un rectangle de largeur $\ell = 2$ et de longueur $L = 1 + \sqrt{5}$ conserve son format lorsqu'on lui ôte un carré de côté 2.

123 Simplifier une écriture littérale

Chercher | Raisonner

Établir, selon la parité du nombre entier naturel n, une écriture simplifiée de $\sqrt{a^{2n}}$ (avec a nombre réel).

124 Find an unknown number!

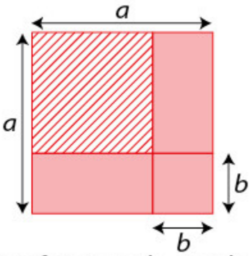
Modéliser | Calculer

Adding 29 to an integer gives a square. By subtracting 60 from this integer, we still find a square. What is this number? *It is specified that 89 is a prime number.*

125 Illustrer $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Représenter **Calculer**

Un carré de côté a est divisé en quatre morceaux comme le montre la figure ci-contre : un carré hachuré, un carré de côté b et deux rectangles identiques $(a \geqslant 0, b \geqslant 0)$.

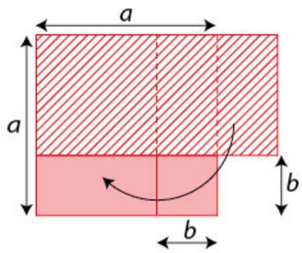


Exprimer l'aire du carré hachuré en fonction de a et de b de deux façons différentes et retrouver une identité remarquable.

126 Illustrer $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Représenter **Calculer**

Le polygone représenté ci-contre est composé de cinq morceaux : un carré hachuré, un carré de côté b et trois rectangles identiques dont deux sont hachurés $(a > 0, b > 0)$.

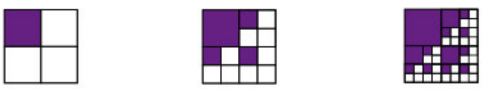


Exprimer l'aire du domaine hachuré en fonction de a et b de deux façons différentes et retrouver une identité remarquable.

127 Algo Comprendre un algorithme

Représenter **Raisonner**

On partage un carré blanc d'aire 1 en quatre carrés identiques et on colore le carré en haut à gauche.
On réitère le procédé avec les nouveaux carrés blancs.



Après 1 étape — Après 2 étapes — Après 3 étapes

a) Justifier qu'à chaque étape, 75 % de l'aire de la partie blanche reste sans couleur.

b) Construire un tableau de suivi des variables de l'algorithme ci-contre.

c) Indiquer la valeur de n à la fin de son exécution et interpréter dans le contexte de l'exercice.

d) Programmer cet algorithme en langage Python.

```
B ← 1
C ← 0
n ← 0
Tant que C < 0,5
    n ← n + 1
    B ← 0,75B
    C ← 1 − B
Fin Tant que
```

e) Modifier le programme et donner le nombre d'étapes nécessaires pour que l'aire de la partie blanche soit inférieure à 0,01.

128 Modéliser un problème concret

Narration de recherche

Modéliser **Représenter** **Communiquer**

Rédiger les différentes étapes de la recherche, sans omettre les fausses pistes et les changements de méthode.

Problème On considère que chaque année un arbre perd ses feuilles, fait pousser deux branches depuis chaque position de feuille et remet une feuille au bout de chaque nouvelle branche.

En 2019, l'arbre qui vient d'être planté possède juste un tronc, deux ramifications et deux feuilles.
En quelle année l'arbre sera-t-il couvert pour la première fois par plus d'un million de feuilles ?

Des Défis

129 Contrôler l'exposant

Pour tout nombre entier naturel $n \geqslant 3$, on pose :

$$A(n) = 10^1 \times 10^2 \times 10^3 \times \ldots \times 10^n$$

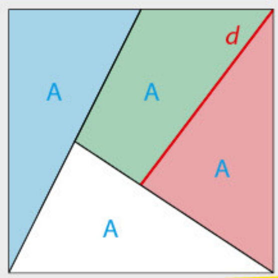
Déterminer la plus petite valeur de n telle que $A(n)$ s'écrive avec au moins 1 000 chiffres.

130 Expliquer ce qui a l'air d'être de la magie

L'auteur vous parle : « Choisissez les carrés parfaits de quatre nombre entiers consécutifs, ajoutez le plus grand et le plus petit, retranchez les deux carrés intermédiaires. Je me concentre … et je devine que vous avez trouvé 4 ! »

131 Lier une longueur et une aire

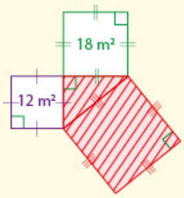
Le carré ci-contre est découpé en quatre domaines de même aire A.
Exprimer la longueur d en fonction de A.



QCM Bilan

QCM interactifs

132 **Dans chaque cas, donner la réponse exacte en justifiant.**

		A	B	C	D
1	Pour tout entier relatif n, 4^{2+6n} est égal à …	$16^{3n}\times 4$	$16\times(2^{12})^n$	$(4^8)^n$	2^{4+6n}
2	$12^{100}\times 1{,}5^{50}\times 6^{-149}$ est égal à …	6	$2^{150}\times 3$	2×3^{150}	$2^{101}\times 3$
3	La valeur de n à la fin de l'algorithme est … $n\leftarrow 0$ Tant que $0{,}8^n \geqslant 0{,}209$ | $n\leftarrow n+1$ Fin Tant que	$n=4$	$n=7$	$n=8$	$n=9$
4	$\sqrt{11-4\sqrt{7}}$ est égal à …	$\sqrt{11}-2\sqrt{7}$	$2-\sqrt{7}$	$\sqrt{7}-2$	$0{,}645\,751\,311$
5	L'aire du domaine hachuré, en m^2, est égale à … 	30	$30+3\sqrt{6}$	$30+6\sqrt{6}$	$3\left(10+\sqrt{2}\right)$
6	Un 1[er] cône a un rayon r, une hauteur h et un volume V. Un 2[e] cône a un rayon r', une hauteur h' et un volume V'. $V=V'$ si …	$r'=2r$ et $h'=0{,}75h$	$r'=2r$ et $h'=0{,}5h$	$r'=1{,}41r$ et $h'=0{,}5h$	$r'=\sqrt{2}r$ et $h'=0{,}5h$
7	Pour tout nombre réel x, $(2x+3)^2-4(x+1)^2$ est égal à …	5	$(-2x-1)(6x+7)$	$4x+5$	$-4x+5$
8	Pour tout nombre réel x, $(6x-3)(2x+1)-(10x-5)^2$ est égal à …	$-88x^2+100x+28$	$(8x-4)(11x-7)$	$-4(2x+1)(11x-7)$	$(2x-1)(-44x+28)$
9	Pour tout nombre réel x, $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{25}{9}-\dfrac{5x}{3}$ est égal à …	$\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{5}{3}\right)\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{5}{3}\right)$	$\left(\dfrac{5}{3}x-\dfrac{1}{2}\right)^2$	$\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{5}{3}\right)^2-\dfrac{25}{12}$	$\left(\dfrac{1}{2}x-\dfrac{5}{3}\right)^2$
10	Pour tout nombre réel $x>0$, $\dfrac{5}{(x+1)^2}-\dfrac{3}{x^2}$ est égal à …	$\dfrac{2}{2x+1}$	$\dfrac{2x^2-6x-3}{x^4+2x^3+x^2}$	$\dfrac{2x^2+6x-3}{x^2(x+1)^2}$	$\dfrac{2x^2+2x+1}{x^2(x+1)^2}$

Vérifiez vos réponses p. 346 pour avoir votre note (considérez 1 point par réponse juste).

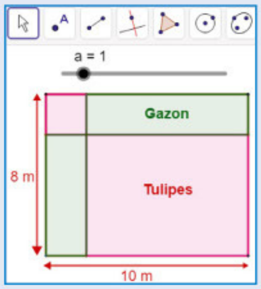
Exploiter ses compétences

133 Équilibrer des aires pour aménager un espace vert

La situation problème

Un paysagiste doit organiser une parcelle rectangulaire de 8 m sur 10 m avec des tulipes d'une part et du gazon d'autre part DOC 1.
Il a prévu d'équilibrer les aires des parcelles dédiées aux tulipes et au gazon.
Utiliser les différentes informations pour donner les dimensions de l'aménagement à réaliser et le prix total.

DOC 1 Recherche d'un aménagement



DOC 2 Factorisation

1 Factoriser$(2x^2 - 18x + 40)$
→ $\mathbf{2\,(x - 5)\,(x - 4)}$

DOC 3 Les tarifs

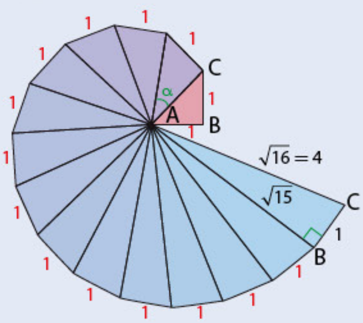
- Semis de gazon : 3 € le m^2
- Bulbes de tulipes : 10 € le m^2

134 Tice Comprendre la spirale des racines carrées

La situation problème

La figure ci-dessous est parfois nommée la spirale des racines carrées, elle est attribuée à Théodore de Cyrène (vers 450 avant J.-C.).
Utiliser les différentes informations pour indiquer si la spirale se referme exactement ou non.

DOC 1 La spirale des racines carrées



DOC 2 Protocole de construction

- ABC est un triangle rectangle isocèle de côté 1.
- Sur son hypoténuse, on construit un 2^e triangle rectangle dont l'autre côté de l'angle droit a pour longueur 1.
- On répète ce protocole de construction de triangle en triangle.

DOC 3 Mesure α de l'angle de sommet A à chaque étape

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Étape**	1	2	3	4	5	6
2	**Côté 1**	1	1,414	1,732	2,000	2,236	2,449
3	**Côté 2**	1,414	1,732	2,000	2,236	2,449	2,646
4	**cos(α)**	0,707	0,816	0,866	0,894	0,913	0,926
5	**α (en °)**	45,000	35,264	30,000	26,565	24,095	22,208

135 Tice Battre un record

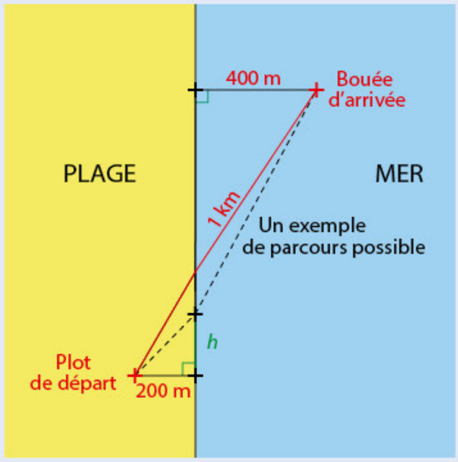
La situation problème

Une course contre le temps consiste à rejoindre le plus vite possible une bouée en mer depuis un plot de départ situé sur une plage.
À vol d'oiseau, la distance entre le départ et l'arrivée est de 1 km.
Le record de l'épreuve est de 9 min 20 s.
Utiliser les différentes informations pour déterminer si une voie est possible pour battre le record.

DOC 1 Informations de vitesse

Les meilleurs concurrents courent sur la plage à une vitesse de 18 km·h^{-1} et nagent en mer à une vitesse de 3,6 km·h^{-1}.
Il est logique de bien choisir le point d'entrée dans l'eau pour privilégier la course plutôt que la nage.

DOC 2 Plan de l'épreuve



DOC 3 Aide aux concurrents

Distance h en mètre	Temps de course en min et s*
100	45 s
200	57 s
300	1 min 12 s

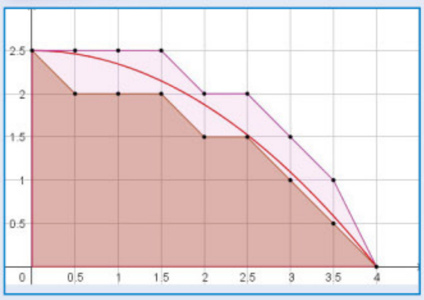
* Le temps de course en seconde est donné par la formule $0{,}2\sqrt{200^2 + h^2}$.

136 Estimer le volume d'une serre

La situation problème

La serre ci-contre a deux faces avant et arrière qui sont modélisables par une courbe représentant la fonction $f : x \mapsto 2{,}5 - 0{,}156\,25x^2$ dans un repère orthonormé (*unité* :1 m). Cette serre a une profondeur de 12 m.
Afin de calibrer un petit chauffage d'appoint dans cette serre pour les cultures hivernales, on souhaite estimer le volume d'air sous la serre.
Utiliser les différentes informations pour estimer le volume d'air dans la serre.

DOC 1 Représentation d'une moitié de face avant



DOC 2 Théorème de Pick

Si un polygone a tous ses sommets sur une grille régulière du plan, alors son aire A peut se calculer à l'aide du nombre i de nœuds intérieurs au polygone et du nombre b de nœuds du bord du polygone :

$$A = i + \frac{b}{2} - 1$$