12 Variables aléatoires

Avant

▶ En 1713, le mathématicien suisse Jacques Bernoulli publie *Ars Conjectandi*.
Cette œuvre consolide la théorie des probabilités en y apportant de nouveaux éléments, en particulier les variables aléatoires et l'espérance mathématique.

À présent

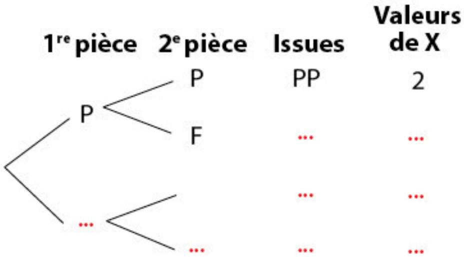
▶ De nos jours, avant de lancer un jeu où le hasard intervient, on utilise des variables aléatoires pour ajuster les montants des différents gains et les probabilités de les obtenir. Cela permet de s'assurer qu'avec un grand nombre de joueurs, l'organisateur du jeu sera bénéficiaire.

Les capacités travaillées dans ce chapitre	Exercices
• Interpréter en situation et utiliser les notations $\{X = a\}$, $\{X < a\}$, $P(X = a)$, $P(X < a)$.	13 à 18
• Comprendre une variable aléatoire et déterminer sa loi de probabilité.	1, 3, 4, 11, 12, 19 à 24
• Calculer une probabilité du type $P(X = a)$, $P(X < a)$, $P(X \geqslant a)$.	2, 5, 6, 25 à 31
• Calculer une espérance, une variance, un écart-type.	7 à 10, 32 à 49
• Utiliser la notion d'espérance dans une résolution de problème.	75 à 79

1 Définir une variable aléatoire

On s'intéresse à l'expérience aléatoire qui consiste à lancer deux pièces de monnaie équilibrées.
À chaque issue, on associe le nombre X de Pile obtenu.
On dit que l'on définit ainsi une variable aléatoire X.

1 **a)** Recopier et compléter cet arbre (P: Pile, F: Face).



b) Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire X ?

2 Pour chaque valeur possible a prise par la variable aléatoire X, on note $P(X = a)$ la probabilité d'obtenir cette valeur.
Recopier et compléter le tableau ci-contre.
Ce tableau présente la **loi de probabilité** de la variable aléatoire X.

a	0	1	2
$P(X = a)$			

2 Calculer l'espérance d'une variable aléatoire

À la fin d'un jeu télévisé, un candidat doit choisir entre cinq boîtes pour connaître son gain.
Les boîtes n° 1, 2 et 3 contiennent 1 000 €, la boite n° 4 contient 1 250 € et la boite n° 5 contient 1 500 €.
Le candidat ne connaît pas le contenu des boîtes, il en choisit une au hasard. À chaque choix d'une boîte on associe la somme d'argent qu'elle contient.
On définit ainsi la variable aléatoire G (initiale de gain).

1 **a)** Préciser les différentes valeurs a que peut prendre la variable aléatoire G.
b) Recopier et compléter le tableau ci-contre, qui présente la loi de probabilité de la variable aléatoire G.

a			
$P(G = a)$			

2 La loi de probabilité de G permet de calculer le gain moyen que peut espérer gagner le candidat en jouant un grand nombre de fois à ce jeu. Ce nombre est appelé **espérance** de la variable aléatoire G et noté **E(G)**.
a) Calculer $E(G)$.
b) Dans quelle unité l'espérance $E(G)$ est-elle exprimée ?
c) Un candidat peut-il effectivement gagner une somme égale à $E(G)$ en jouant une fois à ce jeu ?
d) Le candidat atteint la phase finale de ce jeu pendant 100 jours de suite.
Quel gain total peut-il espérer obtenir au cours de cette période ?

Cours

1 Variable aléatoire et loi de probabilité

A Variable aléatoire réelle

Définition

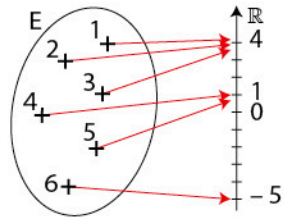
E est l'ensemble fini des issues d'une expérience aléatoire.
Définir une **variable aléatoire** sur E, c'est associer à chaque issue de E un nombre réel.

Vocabulaire et notations :

- Une variable aléatoire est généralement notée par une lettre majuscule : X, Y, Z, …
- Lorsque a désigne un nombre réel, l'événement « X prend la valeur a » est noté $\{X = a\}$.
- L'événement « X prend une valeur strictement inférieure à a » est noté $\{X < a\}$.

Exemple

On lance un dé équilibré à six faces numérotées de 1 à 6.
Lorsque la face supérieure indique :
- 1, 2 ou 3, on gagne 4 € ;
- 4 ou 5, on gagne 1 € ;
- 6, on perd 5 €.



On définit ainsi une variable aléatoire réelle G qui au numéro obtenu associe le gain, en euro, du joueur.
Cette variable aléatoire prend les valeurs -5 ; 1 ; 4.
L'événement $\{G = 1\}$ est réalisé par les issues 4 et 5.
La notation $\{G < 2\}$ désigne l'événement : « Le gain obtenu est strictement inférieur à 2 € » ; il est réalisé par les issues 4, 5 et 6.

B Loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle

Définition

E est l'ensemble fini des issues d'une expérience aléatoire.
X est une variable aléatoire réelle définie sur E qui prend les valeurs $a_1, a_2, \dots, a_n$.
Définir la **loi de probabilité** de X, c'est associer à chaque valeur a_i (avec $1 \leqslant i \leqslant n$), la probabilité de l'événement $\{X = a_i\}$, notée $P(X = a_i)$.

Remarque : on présente souvent la loi de probabilité de la variable aléatoire X à l'aide du tableau ci-dessous avec $a_1 < a_2 < \dots < a_n$.

Valeur de X	a_1	a_2	…	a_n
$P(X = a_i)$	p_1	p_2	…	p_n

On a $P(X = a_1) + P(X = a_2) + \dots + P(X = a_n) = p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$.

Exemple

On reprend l'exemple du paragraphe A.

$P(G = -5) = P(\{6\}) = \dfrac{1}{6}$ $\qquad P(G = 1) = P(\{4\,;5\}) = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$ $\qquad P(G = 4) = P(\{1\,;2\,;3\}) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

Ce tableau donne la loi de probabilité de la variable aléatoire G.

Gain a (en €)	-5	1	4
$P(G = a)$	$\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{1}{2}$

2 Paramètres d'une variable aléatoire

A Espérance, variance, écart-type

Définitions

X est une variable aléatoire réelle définie sur E dont la loi de probabilité est donnée ci-contre.

Valeur de X	a_1	a_2	$\dots$	a_n
$P(X = a_i)$	p_1	p_2	$\dots$	p_n

- L'**espérance** de la variable aléatoire X est le nombre réel, noté $E(X)$, défini par $\mathbf{E(X) = p_1a_1 + p_2a_2 + \dots + p_na_n}$.
- La **variance** de la variable aléatoire X est le nombre réel, noté $V(X)$, défini par :

$$\mathbf{V(X) = p_1(a_1 - E(X))^2 + p_2(a_2 - E(X))^2 + \dots + p_n(a_n - E(X))^2}$$

- L'**écart-type** de la variable aléatoire X est le nombre réel, noté $\sigma(X)$, défini par $\boldsymbol{\sigma}\mathbf{(X) = \sqrt{V(X)}}$.

Exemple

On reprend la variable aléatoire G introduite à la page 288.
Voici ci-contre la loi de probabilité de G.

Gain a (en €)	-5	1	4
$P(G = a)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

- $E(G) = \frac{1}{6} \times (-5) + \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{2} \times 4 = 1{,}5$

En jouant un grand nombre de fois à ce jeu, un joueur peut espérer gagner en moyenne 1,50 € par partie.

- $V(G) = \frac{1}{6}(-5 - 1{,}5)^2 + \frac{1}{3}(1 - 1{,}5)^2 + \frac{1}{2}(4 - 1{,}5)^2$, soit $V(G) = 10{,}25$.
- $\sigma(G) = \sqrt{10{,}25}$, soit $\sigma(G) \approx 3{,}20$.

Ainsi l'écart-type est d'environ 3,20 €.

B Jeu équitable

Définition

E est l'ensemble des issues d'un jeu de hasard.
X est la variable aléatoire définie sur E qui donne le gain du joueur.
Dire que ce jeu est **équitable** signifie que $\mathbf{E(X) = 0}$.

Exemple

Un ticket de jeu à gratter coûte 2 €.
On considère l'expérience aléatoire qui consiste à tirer au hasard un ticket de ce jeu parmi l'ensemble des tickets disponibles.
X est la variable aléatoire qui donne le gain, en €, du joueur, en tenant compte du prix d'achat du ticket.
Ce gain peut ainsi être négatif.
La loi de probabilité de la variable aléatoire X est donnée dans le tableau ci-dessous.

Gain a (en €)	-2	0	3	8	18	48	198
$P(X = a)$	0,6	0,217 3	0,120 5	0,048 5	0,012 4	0,001 2	0,000 1

L'espérance de la variable aléatoire est :
$E(X) = 0{,}6 \times (-2) + 0{,}2173 \times 0 + 0{,}1205 \times 3 + 0{,}0485 \times 8 + 0{,}0124 \times 18 + 0{,}0012 \times 48 + 0{,}0001 \times 198$,
c'est-à-dire $E(X) = -0{,}1499$ €.
$E(X) \neq 0$ donc ce jeu n'est pas équitable.
$E(X) < 0$ donc ce jeu est défavorable au joueur.

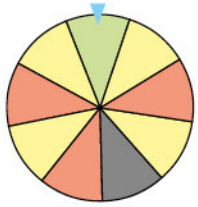
Acquérir des automatismes

EXERCICES RÉSOLUS

1 Déterminer une loi de probabilité

→ Cours 1. B

On fait tourner la roue équilibrée ci-contre, qui est découpée en neuf secteurs superposables. Le montant gagné dépend de la couleur obtenue : 100 € pour le secteur vert, 10 € pour un secteur rouge, 2 € pour un secteur jaune et 0 € pour le secteur noir.
X est la variable aléatoire qui donne le gain obtenu.
Déterminer la loi de probabilité de X.



Solution

Les neuf secteurs sont superposables donc on modélise cette expérience aléatoire par une loi équirépartie.
Les valeurs prises par X sont 100, 10, 2 et 0.
Calcul de $P(X = 10)$: on gagne 10 € si la roue s'arrête sur l'un des trois secteurs rouges.

$$P(X = 10) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

On procède de même dans les autres cas pour obtenir la loi de probabilité de X :

a	0	2	10	100
$P(X = a)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{1}{9}$

Pour déterminer $P(X = a)$, il faut revenir à l'expérience aléatoire et déterminer les issues qui réalisent l'événement $\{X = a\}$.

On vérifie que la somme des probabilités est égale à 1.

2 Calculer une probabilité du type $P(X < a)$

→ Cours 1

On reprend la situation de l'exercice 1. Calculer : **a)** $P(X < 10)$ **b)** $P(X \geqslant 2)$

Solution

On utilise la loi de probabilité de X, qui a été déterminée à l'exercice 1.

a) $P(X < 10) = P(X = 0) + P(X = 2)$

donc $P(X < 10) = \frac{1}{9} + \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$.

b) $P(X \geqslant 2) = P(X = 2) + P(X = 10) + P(X = 100)$

donc $P(X \geqslant 2) = \frac{4}{9} + \frac{3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$.

L'événement $\{X < 10\}$ est réalisé par les valeurs 0 et 2.

L'événement contraire de $\{X \geqslant 2\}$ est $\{X < 2\}$. On aurait pu dire :
$P(X \geqslant 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X = 0)$

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 1

3 Les faces d'un dé équilibré sont numérotées 10 ; 5 ; 5 ; 1 ; 1 ; 0. X est la variable aléatoire qui donne le double du nombre obtenu quand on lance ce dé.
Déterminer la loi de probabilité de X.

4 Un client tire au hasard un bon de réduction dans une urne opaque qui contient : 10 bons de 50 €, 50 bons de 10 €, 100 bons de 5 €, et 250 bons de 2 €.
X est la variable aléatoire qui donne le montant du bon obtenu.
Déterminer la loi de probabilité de X.

Sur le modèle de l'exercice résolu 2

5 On reprend la situation du dé équilibré de l'exercice 3.
Calculer chaque probabilité.
a) $P(X < 10)$ **b)** $P(X \geqslant 2)$
c) $P(X > 5)$ **d)** $P(X \leqslant 10)$

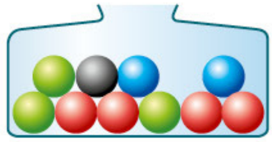
6 On reprend la situation du tirage dans l'urne de l'exercice 4.
Calculer chaque probabilité.
a) $P(X < 10)$ **b)** $P(X \leqslant 5)$
c) $P(X \leqslant 6)$ **d)** $P(X > 2)$

EXERCICES RÉSOLUS

7 Calculer et interpréter une espérance

→ Cours 2. A

On tire au hasard une boule dans l'urne dessinée ci-contre.
Si la boule tirée est verte, on gagne 8 points, si elle est bleue on gagne 1 point, sinon on perd 3 points. X est la variable aléatoire qui donne le nombre de points obtenus. Calculer et interpréter l'espérance de X.



Solution

Voici la loi de probabilité de X.

a	-3	1	8
$P(X = a)$	$\frac{5}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$

Il y a 10 boules dans l'urne, dont 3 vertes et 2 bleues.

L'espérance de X est donc :

$$E(X) = \frac{5}{10} \times (-3) + \frac{2}{10} \times 1 + \frac{3}{10} \times 8 = \frac{11}{10} = 1{,}1$$

Laisser les probabilités sur le même dénominateur simplifie le calcul de l'espérance

Cela signifie que, pour un grand nombre de tirages, on peut espérer gagner en moyenne 1,1 point par tirage.

8 Déterminer une variance, un écart-type

→ Cours 2. A

On reprend la situation de l'exercice 7.
Déterminer la variance et l'écart-type de X. *Arrondir au centième si besoin.*

Solution

À l'exercice 7, on a déterminé la loi de probabilité de X et son espérance. Pour calculer la variance de X, on complète le tableau ci-dessous.

a	-3	1	8
$a - 1{,}1$	$-4{,}1$	$-0{,}1$	$6{,}9$
$(a - 1{,}1)^2$	$16{,}81$	$0{,}01$	$47{,}61$
$P(X = a)$	$\frac{5}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$

La variance de X est donc :

$$V(X) = \frac{5}{10} \times 16{,}81 + \frac{2}{10} \times 0{,}01 + \frac{3}{10} \times 47{,}61 = 22{,}69$$

L'écart-type de X est donc $\sigma(X) = \sqrt{22{,}69}$ soit $\sigma(X) \approx 4{,}76$.

On peut vérifier ces résultats en utilisant le menu Statistiques de la calculatrice. L'écart-type est noté σx. La variance n'apparaît pas toujours, il faut calculer σx^2.

```
1 variable
x̄     =1.1
Σx    =1.1
Σx²   =23.9
σx    =4.76340214
sx    =
n     =1
```

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 7

9 On lance deux jetons équilibrés, l'un dont les faces sont marquées 1 et 2, l'autre dont les faces sont marquées 5 et 10.
X est la variable aléatoire qui donne la somme des nombres obtenus.
Calculer l'espérance de X.

Sur le modèle de l'exercice résolu 8

10 Voici la loi de probabilité d'une variable aléatoire X.

a	10	20	40	50
$P(X = a)$	0,2	0,3	0,4	0,1

a) Calculer l'espérance de X.
b) Déterminer la variance et l'écart-type de X. *Arrondir au dixième.*
c) Vérifier ces résultats avec la calculatrice.

Calcul mental → Exercez-vous sur la plateforme Hyperbole
⊕ de détails page 4

Variable aléatoire et loi de probabilité

→ Cours 1. A et B

Questions Flash

11 On lance un dé à six faces numérotées de 1 à 6. X est la variable aléatoire qui donne la moitié du nombre obtenu.
Alicia affirme : « X peut prendre trois valeurs différentes. » Que peut-on en penser ?

12 On lance deux fois de suite un jeton équilibré qui porte le numéro 1 sur une face et le numéro 2 sur l'autre.
X est la variable aléatoire qui donne la somme des numéros obtenus.
Olmo affirme : « X peut prendre les valeurs 1, 2, 3 et 4. » Que peut-on en penser ?

13 Une urne contient cinq boules numérotées de 1 à 5. On tire au hasard deux boules.
X est la variable qui donne la différence entre le plus grand et le plus petit numéros obtenus.
Parmi les propositions ci-dessous, laquelle traduit l'événement : « La différence est égale à 2 » ?
(1) $\{X=5\}$ **(2)** $\{X=2\}$ **(3)** $\{X \geqslant 2\}$ **(4)** $\{X \leqslant 2\}$

14 On tire au hasard un jour du mois de décembre. X est la variable aléatoire qui donne le chiffre des dizaines de la date de ce jour.
Alyah doit décrire l'événement $\{X=2\}$.
Alyah : « Le jour tiré est le 24 décembre. »
Que peut-on en penser ?

15 Un sac contient des billes dorées et argentées. On tire, successivement et avec remise, trois billes de ce sac. X est la variable aléatoire qui compte le nombre de billes dorées obtenues.
Écrire en notation mathématique chaque événement.
a) On obtient une seule bille dorée.
b) On obtient au moins deux billes dorées.

16 Hannah a dans son porte-monnaie trois pièces de 1 € et deux pièces de 50 centimes.
Elle pioche deux pièces au hasard.
X est la variable aléatoire qui donne la somme des valeurs de ces deux pièces.
Écrire en notation mathématique chaque événement.
a) La somme est égale à 1 €.
b) La somme est strictement inférieure à 1,50 €.

17 On dispose d'un dé à six faces numérotées de 1 à 6. On lance ce dé dix fois de suite.
X est la variable aléatoire qui donne le nombre de fois où l'on obtient le numéro 6.
Décrire chaque événement.
a) $\{X=2\}$ **b)** $\{X=5\}$ **c)** $\{X \leqslant 1\}$ **d)** $\{X > 3\}$

18 Rodrigo retire 20 € dans un distributeur de billets. Pour constituer cette somme, le distributeur utilise des billets de 5 €, 10 € et 20 €, de manière aléatoire. X est le nombre total de billets qui sortent de l'appareil.
Décrire chaque événement.
a) $\{X=1\}$ **b)** $\{X=3\}$ **c)** $\{X<3\}$ **d)** $\{X \geqslant 2\}$

19 On lance un dé tétraédrique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 4.
Si le numéro 4 sort, on gagne 10 €, sinon, on perd 2 €.
X est la variable aléatoire qui donne le gain algébrique du joueur.
Déterminer la loi de probabilité de X.

20 Une association sportive organise une loterie.
Parmi les 1 000 billets vendus :
- un billet rapporte un gain de 100 € ;
- dix billets rapportent chacun un gain de 50 € ;
- cent billets rapportent chacun un gain de 10 €.

Le prix du billet est fixé à 2 €.
La variable aléatoire G associe à chaque billet choisi au hasard le gain algébrique de l'acheteur.
a) Quelles sont les valeurs prises par G ?
b) Calculer $P(G=-2)$.
c) Déterminer la loi de probabilité de G.

21 On lance un dé équilibré deux fois de suite.
La variable aléatoire X donne le produit des deux nombres obtenus.
a) Reproduire et compléter le tableau ci-dessous dans lequel figurent tous les produits possibles.

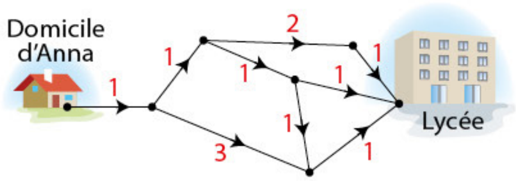
2^e lancer / 1er lancer	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3			
2	2	4	6			
3						
4						
5						
6						

b) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

22 On lance deux jetons équilibrés, un jaune et un rouge, dont les faces portent les numéros 0 et 1.
X est la variable aléatoire qui donne la différence entre le nombre du jeton jaune et celui du jeton rouge.
Déterminer la loi de probabilité de X.

23 Dans une enveloppe, on place cinq cartons indiscernables portant les numéros -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2.
On tire au hasard un carton.
La variable aléatoire X donne le carré du numéro tiré.
a) Quelles sont les valeurs prises par X ?
b) Déterminer la loi de probabilité de X.

24 Pour se rendre au lycée, Anna peut emprunter l'un des chemins schématisés ci-dessous.
Les distances en rouge sont exprimées en centaines de mètres.



Chaque matin, Anna tire au hasard le chemin qu'elle empruntera.
X est la variable aléatoire qui donne la longueur du chemin emprunté, en centaines de mètres.
a) Déterminer les quatre chemins possibles pour Anna.
b) Déterminer la loi de probabilité de X.

25 On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes et on attribue :
- 10 points si la carte est l'as de carreau ;
- 5 points si c'est un valet, une dame ou un roi ;
- 1 point pour les autres cartes.

X est la variable aléatoire qui donne le nombre de points obtenus lors d'un tirage.
a) Déterminer la loi de probabilité de X.
b) Calculer $P(X \leqslant 5)$. Interpréter cette valeur.

26 Trois jetons rouge, vert, bleu sont placés initialement comme le montre la figure.

On prend les trois jetons et on les place au hasard en mettant un jeton par case.
X est la variable aléatoire qui donne le nombre de jetons qui retrouvent leur place initiale.
a) Quelles sont les valeurs prises par X ?
b) Déterminer la loi de probabilité de X.
c) Déterminer la probabilité $P(X \geqslant 2)$.

27 X est la variable aléatoire qui donne le nombre d'appels reçus à un standard téléphonique durant une minute.
Une étude statistique a conduit aux résultats suivants.

a	0	1	2	3	4	5
$P(X = a)$	0,1	0,15	0,25	0,3	0,15	0,05

a) Calculer $P(X \leqslant 2)$ et $P(1 \leqslant X \leqslant 4)$.
Interpréter ces probabilités.
b) Calculer la probabilité que le standard ait reçu au moins 3 appels pendant une minute donnée.

28 Le tableau suivant donne la loi de probabilité d'une variable aléatoire X.

a	1	2	3
$P(X = a)$	0,3	0,5	…

a) Quelle est la valeur manquante ?
b) Déterminer la probabilité de l'événement $\{X \geqslant 2\}$.

29 On dispose d'un dé truqué à quatre faces numérotées de 1 à 4. Les probabilités respectives p_1, p_2, p_3, p_4 d'obtention des faces 1, 2, 3, 4 vérifient :

$$p_1 = p_2 = p_3 \quad \text{et} \quad p_4 = 3p_1.$$

On lance ce dé. X est la variable aléatoire qui donne le produit du numéro obtenu par 5.
a) Déterminer les probabilités p_1, p_2, p_3, p_4 et en déduire la loi de probabilité de X.
b) Calculer la probabilité $P(X \geqslant 10)$.

30 La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est présentée dans le tableau suivant.

a	1	2	3	4
$P(X = a)$	p_1	p_2	p_3	p_4

Les probabilités p_1, p_2, p_3 et p_4 sont respectivement proportionnelles aux valeurs 1, 2, 3 et 4.
a) Exprimer p_2, p_3 et p_4 en fonction de p_1.
En déduire les valeurs de p_1, p_2, p_3 et p_4.
b) Déterminer alors la loi de probabilité X.
c) Calculer la probabilité $P(X \leqslant 3)$.

31 Trois locataires laissent leurs clés au gardien en partant en vacances. Au retour, celui-ci les rend au hasard aux trois locataires.
X est la variable aléatoire qui donne le nombre de locataires qui retrouvent leurs clés.
a) Déterminer la loi de probabilité de X.
b) Calculer la probabilité $P(X \geqslant 1)$.

Paramètres d'une variable aléatoire

→ Cours 2. A et B

Questions Flash

32 On tire au hasard une lettre dans un jeu de Scrabble. X est la variable aléatoire qui donne le nombre de points indiqué sur cette lettre.
Eddy affirme : « L'espérance de X est -2. »
Que peut-on en penser ?

33 Voici la loi de probabilité d'une variable aléatoire X.
Calculer mentalement son espérance E(X).

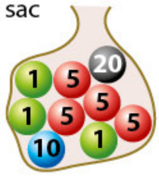
a	1	2
$P(X = a)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

34 Voici la loi de probabilité d'une variable aléatoire X.

a	0	2	3	5
$P(X = a)$	0,3	0,4	0,1	0,2

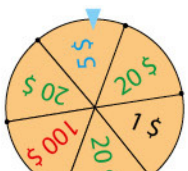
Marinella affirme : « L'espérance de X est 2,1. »
Vérifier mentalement son affirmation.

35 On tire au hasard une bille dans le sac ci-contre.
X est la variable aléatoire qui donne le numéro indiqué sur la bille.
Calculer et interpréter E(X).



36 Afin de fidéliser sa clientèle, un commerçant décide de distribuer, au hasard, 200 bons de réduction à ses clients : 50 bons de 2 €, 50 bons de 5 €, 70 bons de 10 €, 20 bons de 20 € et 10 bons de 50 €.
On tire au hasard un bon parmi les 200.
X est la variable aléatoire qui donne le montant inscrit sur le bon.
a) Déterminer la loi de probabilité de X.
b) Calculer et interpréter l'espérance de X.

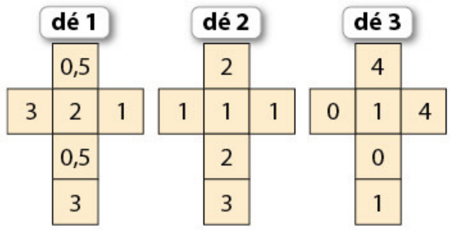
37 La roue équilibrée ci-contre est découpée en six secteurs superposables.
X est la variable aléatoire qui donne le gain obtenu lorsqu'on fait tourner la roue une fois.
Calculer et interpréter l'espérance de X.



38 Chinda se rend pour la première fois au bowling avec un groupe d'amis. On estime que, par partie, elle a 5 % de chances de réussir un strike (toutes les quilles tombent dès la 1re boule) et 15 % de chances de réussir un spare (toutes les quilles tombent après la 2e boule).

Les amis décident de lui attribuer 10 points s'il y a eu un strike, 5 points s'il y a eu un spare et 0 point si elle n'a réussi aucun des deux.
On tire au hasard une partie de Chinda.
X est la variable aléatoire qui donne le nombre de points obtenus.
a) Déterminer la loi de probabilité de X.
b) Calculer et interpréter l'espérance de X.

39 Voici les patrons de trois dés équilibrés à six faces. Un joueur choisit l'un de ces dés, le lance et gagne le montant, en euro, indiqué sur la face supérieure.



X_1, X_2 et X_3 sont les variables aléatoires qui donnent le gain obtenu respectivement avec le dé 1, le dé 2, le dé 3.
a) Déterminer les lois de probabilité de X_1, X_2 et X_3.
b) Calculer les espérances de X_1, X_2 et X_3.
c) Si un joueur décide de jouer un grand nombre de parties avec le même dé, lequel a-t-il intérêt à utiliser ?

40 Voici les lois de probabilité de variables aléatoires associées à deux jeux de hasard.
Les valeurs prises sont exprimées en euro.

Jeu 1

a	-2	-1	1	2
$P(X = a)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Jeu 2

b	-5	0	1	2
$P(Y = b)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$

Olivier affirme : « Ces deux jeux sont équitables. »
A-t-il raison ? Justifier.

41 Un opérateur de jeux de hasard envisage de mettre sur le marché un nouveau jeu.
Les gains de ce jeu ainsi que leurs probabilités sont donnés dans le tableau ci-contre.

Gain en €	Probabilité en %
0	97 %
100	1 %
200	1 %
300	0,5 %
400	0,5 %

Quelle mise par joueur l'opérateur doit-il prévoir pour que le jeu soit équitable ?

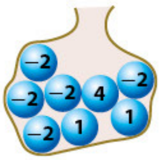
42 Dans une urne, on place les papiers ci-dessous, où m désigne un nombre entier relatif.

-3 -4 4 -4 -3 1 -2 m -3

On tire au hasard un papier dans cette urne.
X est la variable aléatoire qui donne la valeur indiquée sur ce papier.
a) Déterminer la loi de probabilité de X.
b) Exprimer $E(X)$ en fonction de m.
c) Déterminer m pour que le jeu soit équitable.

43 Une roulette contient n cases, avec $n > 4$.
Une de ces cases rapporte 10 €, trois cases rapportent 5 € et les autres 0 €.
a) Pour jouer, la mise est de 1 €.
Combien faut-il que la roulette contienne de cases pour que le jeu soit équitable ?
b) On suppose que $n = 20$. Quelle doit être la mise de départ pour que le jeu soit équitable ?

44 On dispose du sac de billes ci-contre. On peut y ajouter autant de billes que l'on souhaite portant le numéro 2.



On prélève au hasard une bille de ce sac et on note son numéro.
X est la variable aléatoire qui indique le numéro obtenu.
Combien faut-il ajouter de billes portant le numéro 2 pour que le jeu soit équitable ?

45 Lana choisit au hasard un film sur un service de streaming. X est la variable aléatoire qui donne la durée de ce film, en minute, arrondie à la dizaine. Voici la loi de probabilité de X.

a	80	90	100	120	150
$P(X = a)$	0,1	0,4	0,15	0,3	0,05

Déterminer l'espérance, la variance et l'écart-type de X avec la calculatrice. *Arrondir au dixième si besoin.*

46 Tobias veut acheter un ticket de jeu à gratter. Le prix du ticket est de 2 €. Parmi les 20 tickets en vente dans le magasin, 14 sont des tickets perdants, 3 font gagner 2 € et les 3 autres font respectivement gagner 5 €, 10 € et 50 €.
Le vendeur choisit au hasard le ticket qu'il vendra à Tobias.
On note X le gain de Tobias, c'est-à-dire la différence, éventuellement négative, entre le montant gagné et le prix du ticket.
a) Donner la loi de probabilité de X.
b) Déterminer l'espérance, la variance et l'écart-type de X avec la calculatrice. *Arrondir au centième si besoin.*

47 Ce tableau donne les masses, en g, des fromages produits dans la semaine.

Masse	480	490	500	510	520
Effectif	89	97	115	102	97

Un client achète un fromage au hasard dans cette production. X est la variable aléatoire qui donne la masse de ce fromage.
Déterminer l'espérance, la variance et l'écart-type de X avec la calculatrice. *Arrondir au centième si besoin.*

48 On lance deux dés équilibrés à 6 faces numérotées de 1 à 6.
X est la variable aléatoire qui donne la différence entre les deux numéros obtenus.
Y est la variable aléatoire qui donne le carré de cette différence.
Arrondir les résultats au centième si besoin.
a) Donner la loi de probabilité de X.
b) Déterminer l'espérance, la variance et l'écart-type de X avec la calculatrice.
c) Donner la loi de probabilité de Y.
d) Déterminer l'espérance, la variance et l'écart-type de Y avec la calculatrice.
e) Lequel de ces deux jeux un joueur préfèrera-t-il ?

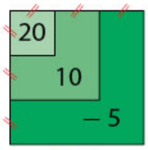
49 On dispose de deux dés équilibrés à dix faces, un dé bleu dont les faces sont numérotées de 1 à 10, et un dé vert dont les faces sont numérotées 1, 1, 3, 5, 5, 6, 6, 8, 10, 10.
X est la variable aléatoire qui donne le numéro obtenu quand on lance le dé bleu et Y est la variable aléatoire qui donne le numéro obtenu quand on lance le dé vert.
Jean-Baptiste affirme : « X et Y ont la même espérance et le même écart-type. » Commenter son affirmation.

QCM interactifs

Pour se tester

50 Dans chaque cas, donner la réponse exacte sans justifier.

On laisse tomber au hasard une bille sur la plaque ci-contre. On admet que la bille se pose distinctement sur l'un des domaines colorés. X est la variable aléatoire qui donne le nombre de points correspondant au secteur sur lequel la bille s'est posée.



		A	B	C	D
1	$P(X=10)$ est égal à …	3	$\frac{1}{3}$	$2\times P(X=-5)$	10
2	$P(X\geqslant 0)$ est égal à …	10 ou 20	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{9}$	4
3	$E(X)$ est égal à …	25	0	$\frac{25}{9}$	2,5
4	$V(X)$ est environ égal à …	83,95	$\frac{625}{81}$	625	9,16
5	$\sigma(X)$ est environ égal à …	2,78	9,16	$E(X)$	$V(X)$

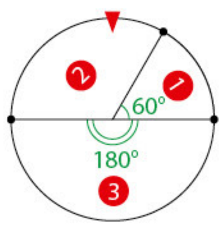
51 Dans chaque cas, donner la (ou les) réponse(s) exacte(s) sans justifier.

Un sac contient 1 jeton rouge, 3 jetons blancs et n jetons noirs (n nombre entier supérieur ou égal à 1).
Un joueur tire au hasard un jeton. Il gagne 10 € s'il tire le jeton rouge, 5 € s'il tire un jeton blanc, sinon rien.
La mise initiale est de m € (m nombre réel supérieur ou égal à 1).
X est la variable aléatoire qui donne le gain, éventuellement négatif, du joueur.

		A	B	C	D
1	On suppose que $m=1$. Alors $P(X=-1)$ est égal à …	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{n}{4+n}$	$n\times P(X=9)$
2	On suppose que $m=1$. Alors $E(X)$ est égal à …	0	-1	$\frac{21-n}{4+n}$	$21-n$
3	On suppose que $n=16$. Alors $P(X=-m)$ est égal à …	$\frac{1}{9}$	0,8	$\frac{m+1}{5-m}$	$\frac{16}{20}$
4	On suppose que $n=16$. Le jeu est équitable si …	$E(X)=0$	$m=1{,}25$	$m=0{,}25$	$m<1{,}25$

52 Dans chaque cas, dire si l'affirmation est vraie ou fausse en justifiant.

On fait tourner la roue ci-contre. X est la variable aléatoire qui donne le produit du numéro obtenu (1, 2 ou 3) par 10.



Affirmations :

1. $P(X=10)=P(X=20)=P(X=30)=\frac{1}{3}$
2. $P(X=10)+P(X=20)=P(X=30)$
3. $E(X)=20$
4. $V(X)=\frac{500}{9}$
5. $\sigma(X)=\frac{10}{3}\sqrt{5}$

Vérifiez vos réponses : p. 340

53 Comprendre les notations $\{X = a\}$ et $\{X \leqslant a\}$

On lance deux fois de suite une pièce de monnaie.
On gagne 1 € si l'on obtient deux Pile (P), on ne gagne rien si l'on obtient un seul Pile et on perd 1 € sinon.

a) Quelle issue réalise l'événement $\{X = 1\}$?
b) Quelles issues réalisent l'événement $\{X = 0\}$?
c) Quelles issues réalisent l'événement $\{X \geqslant 0\}$?

AIDE

Pour répondre, il peut être utile de traduire la situation ainsi :

1er lancer	2e lancer	Issue	Gain
P	P	PP	...
	F	...	...
F	P	...	...
	F	...	...

54 Utiliser les notations $\{X = a\}$ et $\{X \leqslant a\}$

Un portefeuille contient des billets de 5 €, 10 €, 20 € et 50 €.
On tire au hasard un de ces billets et on divise sa valeur par 5.
X est la variable aléatoire qui donne le résultat obtenu.
Dans chaque cas, écrire l'événement en notation mathématique en utilisant la variable aléatoire X.

a) La valeur du billet tiré est 20 €.
b) La valeur du billet tiré est au moins 10 €.

AIDE

Bien lire chaque question afin de savoir quel symbole d'ordre utiliser.

55 Déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire

Une urne contient trois boules numérotées 1, deux boules numérotées 2 et cinq boules numérotées 5.
On tire au hasard une boule de cette urne.
X est la variable aléatoire qui prend la valeur 10^n, où n est le numéro indiqué sur cette boule.

a) Quelles sont les valeurs prises par X ?
b) Expliquer pourquoi $P(X = 10) = 0{,}3$.
c) Recopier et compléter le tableau ci-contre.

a			
$P(X = a)$			

AIDE

b) On utilise la loi équirépartie sur l'ensemble des dix boules. Calculer $P(X = 10)$ revient à calculer la probabilité de tirer une boule numérotée 1.

56 Calculer les paramètres d'une variable aléatoire

X est la variable aléatoire qui donne le montant, en euro, gagné par un joueur à un jeu de hasard.
Voici la loi de probabilité de X.

a	0	5	20	100	1 000
$P(X = a)$	0,71	0,2	0,05	0,03	0,01

a) Calculer et interpréter l'espérance $E(X)$.
b) Avec la calculatrice, déterminer la variance et l'écart-type de X.
Arrondir au dixième.
c) Déterminer le montant de la mise m, en euro, à chaque partie pour que le jeu soit équitable.

AIDE

c) Un jeu est équitable s'il ne favorise ni le joueur, ni l'organisateur. Il faut s'aider de l'espérance de X pour déterminer m.

EXERCICE RÉSOLU

57 Utiliser des listes

Lorraine tire un jeton au hasard dans une boîte qui contient des jetons de poker. X est la variable aléatoire qui donne le numéro inscrit sur ce jeton. La loi de probabilité de X est donnée ci-contre.

a	5	10	25	50
$P(X = a)$	0,3	0,4	0,2	0,1

On considère l'algorithme ci-dessous, dans lequel A et P sont deux listes contenant le même nombre de termes.

a) Compléter ce tableau de suivi lorsqu'on prend $A = [5, 10, 25, 50]$ et $P = [0.3, 0.4, 0.2, 0.1]$. $A[i]$ *désigne le terme de rang i de la liste A.*

b) Quel est le rôle de cet algorithme ?

n					
i					
$A[i]$					
$P[i]$					
$A[i] \times P[i]$					
E					

$n \leftarrow$ longueur (A)
E $\leftarrow 0$
Pour i allant de 0 à $n-1$
  | $E \leftarrow E + A[i] \times P[i]$
Fin Pour

Solution

a) Voici le suivi des valeurs lors de l'exécution de l'algorithme.

n	4	4	4	4	4
i		0	1	2	3
$A[i]$		5	10	25	50
$P[i]$		0,3	0,4	0,2	0,1
$A[i] \times P[i]$		1,5	4	5	5
E	0	1,5	5,5	10,5	15,5

À chaque itération de la boucle "Pour", on multiplie une valeur de la liste A par la probabilité correspondante dans la liste P, puis on ajoute ce produit aux produits précédents.

La valeur E obtenue à la fin de l'algorithme est 15,5.

b) La valeur de la variable E obtenue à la fin de l'algorithme est l'espérance de la variable aléatoire X.

À VOTRE TOUR

58 On reprend la situation de l'exercice **57**.
Voici un nouvel algorithme.

$n \leftarrow$ longueur (A)
E $\leftarrow 0$
Pour k allant de 0 à $n-1$
  | $E \leftarrow E + A[k] \times P[k]$
Fin Pour
V $\leftarrow 0$
Pour k allant de 0 à $n-1$
  | $V \leftarrow V + (A[k] - E)^2 \times P[k]$
Fin Pour

a) Appliquer cet algorithme avec les listes :
$A = [5, 10, 25, 50]$ et $P = [0.3, 0.4, 0.2, 0.1]$.

b) Quel est le rôle de cet algorithme ?

c) Compléter cet algorithme pour déterminer $\sigma(X)$.

59 On reprend la situation de l'exercice **57**.
Voici une fonction écrite en langage Python qui renvoie l'espérance de X.

```
def Esperance(A,P):
    n=len(A)
    E=0
    for i in range(0,n):
        E=E+A[i]*P[i]
    return E
```

a) Saisir cette fonction et la tester avec les listes :
$A = [5, 10, 25, 50]$ et $P = [0.3, 0.4, 0.2, 0.1]$.

b) Quelle est la valeur renvoyée par cette fonction ?

c) Écrire une nouvelle fonction en langage Python qui renvoie l'écart-type d'une variable aléatoire X, cette fonction appellera la fonction Esperance.

EXERCICE RÉSOLU

60 Déterminer les paramètres d'une variable aléatoire

Julia écoute un morceau au hasard dans une playlist.
X est la variable aléatoire qui donne la durée, en min, (arrondie à l'unité) de ce morceau.
Voici la loi de probabilité de X.

a	1	2	3	4	5	8
$P(X = a)$	0,05	0,25	0,35	0,2	0,1	0,05

	A	B	C	D	E	F
1	a	P(X=a)	a*P(X=a)	a-E(X)	(a-E(X))^2	(a-E(X))^2*P(X=a)
2	1	0,05	0,05	-2,3	5,29	0,2645
3	2	0,25	0,5	-1,3	1,69	0,4225
4	3	0,35	1,05	-0,3	0,09	0,0315
5	4	0,2	0,8	0,7	0,49	0,098
6	5	0,1	0,5	1,7	2,89	0,289
7	8	0,05	0,4	4,7	22,09	1,1045
8						
9	E(X)	3,3				
10	V(X)	2,21				
11	σ(X)	1,486607				

On utilise la feuille de calcul ci-dessus pour calculer l'espérance et l'écart-type de la variable aléatoire X.

a) Quelles formules a-t-on saisies dans les cellules C2, D2, E2 et F2 ?

b) De quelles cellules a-t-on additionné les valeurs pour obtenir l'espérance ? pour obtenir la variance ?

c) Quelle formule a-t-on saisie en cellule B11 ?

Solution

a) Cellule C2 : $\boxed{=\text{A2*B2}}$.
Cellule D2 : $\boxed{=\text{A2}-\text{\$B\$9}}$.
Cellule E2 : $\boxed{=\text{D2\^{}2}}$.
Cellule F2 : $\boxed{=\text{E2*B2}}$.

b) On a additionné les valeurs de la plage C2:C7 pour obtenir l'espérance, et les valeurs de la plage F2:F7 pour obtenir la variance.

c) En cellule B11, on saisit : $\boxed{=\text{RACINE(B10)}}$.

On met en œuvre la définition de l'espérance dans la colonne C et la définition de la variance dans la colonne F.

À VOTRE TOUR

61 Le Rapido était un jeu de hasard vendu en France jusqu'en 2014. Une partie consistait à miser 1 € sur une combinaison de numéros.
Les probabilités des gains possibles sont données dans le tableau ci-dessous.

Gain (en €)	Probabilité (en %)
0	81,799 1
1	6,876 6
2	7,335 1
6	2,445 0
10	1,100 3
30	0,366 8
50	0,057 2
150	0,019 1
1 000	0,000 6
10 000	0,000 2

X est la variable aléatoire qui donne le gain pour une partie.
Adapter la feuille de calcul de l'exercice **60** pour calculer l'espérance, la variance et l'écart-type de X.

62 Une boîte contient 100 bonbons : 50 au citron et 50 à l'orange.
Camille tire au hasard un bonbon de cette boîte.
Si c'est un bonbon au citron, elle le mange et n'en reprend plus.
Si c'est un bonbon à l'orange, elle le remet dans la boîte et refait un nouveau tirage.
Quoiqu'il arrive, elle s'arrête au plus tard au cinquième tirage.
X est la variable aléatoire qui donne le nombre de tirages effectués.
Voici la loi de probabilité de X.

a	$P(X = a)$
1	0,5
2	0,25
3	0,125
4	0,0625
5	0,0625

Adapter la feuille de calcul de l'exercice **60** pour calculer l'espérance, la variance et l'écart-type de X.

Démontrer et raisonner

63 Comprendre une nouvelle notation

> **Méthode**
> Pour mieux comprendre une nouvelle notation, il est utile de commencer par l'utiliser dans des exemples simples.

En statistiques, par exemple, on utilise la notation Σ (sigma) :

$\sum_{i=1}^{4} i^2$ désigne la somme de tous les i^2 lorsque i prend les valeurs entières de 1 à 4.

Ainsi, $\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$.

1. a) Écrire la somme $\sum_{i=1}^{5} 10i$ sans symbole Σ puis la calculer.

b) k désigne un nombre réel.

Exprimer la somme $\sum_{i=1}^{5} ki$ sans symbole Σ puis la réduire.

2. Démontrer chacune des égalités suivantes où k, a_i, b_i désignent des nombres réels et n un nombre entier naturel $n \geqslant 1$.

a) $\sum_{i=1}^{n} ka_i = k\sum_{i=1}^{n} a_i$ **b)** $\sum_{i=1}^{n} k = n \times k$

c) $\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$

64 Démontrer la formule de König-Huygens

X désigne une variable aléatoire qui prend des valeurs a_1, a_2, …, a_n de façon équiprobable.

a) Expliquer pourquoi :

$$\mathrm{E(X)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \quad \text{et} \quad \mathrm{V(X)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (a_i - \mathrm{E(X)})^2.$$

b) Développer l'expression $(a_i - \mathrm{E(X)})^2$.

c) Justifier que $\mathrm{V(X)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^2 - \frac{2\mathrm{E(X)}}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i + \mathrm{E(X)}^2$.

d) En déduire que $\mathrm{V(X)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^2 - \mathrm{E(X)}^2$.

e) Comparer le nombre de soustractions à effectuer pour calculer V(X) avec la formule du cours et la formule de König-Huygens.

Cette formule était utile à l'époque où on ne disposait pas de calculatrices performantes.

Déterminer une loi de probabilité

65 Dans un pays, des personnes sont atteintes d'une maladie qui se présente sous trois formes.

Forme bénigne	Forme maligne légère	Forme maligne sévère
34 %	48 %	18 %

Le tableau ci-dessous indique les dépenses moyennes engagées par un malade et par la Sécurité sociale pour les soins.

	Forme bénigne	Forme maligne légère	Forme maligne sévère
Dépenses du malade (en €)	85	170	845
Dépenses de la Sécurité sociale (en €)	235	1 340	5 475

On imagine désigner au hasard une personne touchée par cette maladie.

X est la variable aléatoire qui compte l'ensemble des dépenses engagées pour les soins relatifs à la maladie de cette personne.

Déterminer la loi de probabilité de X.

66 Filip joue à un jeu de hasard.

Il lance deux dés équilibrés à six faces, numérotées 1 ; 1 ; 2 ; 2 ; 3 ; 3 pour le premier et de 1 à 6 pour le second.

Si le numéro obtenu sur le second dé est divisible par le premier, alors il effectue la division et note le quotient.

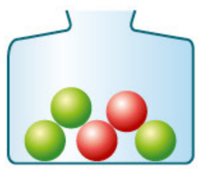
Sinon, il note simplement le deuxième numéro obtenu.

X est la variable aléatoire qui donne le nombre obtenu à l'issue de ce jeu.

a) Représenter cette situation par un tableau à double entrée en notant dans chaque case la valeur prise par X.

b) En déduire la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

67 Une urne contient cinq boules indiscernables au toucher : trois vertes et deux rouges.



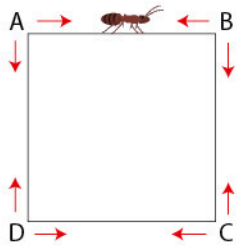
On extrait successivement, et sans remise, deux boules de l'urne.

La variable aléatoire X donne le nombre de boules rouges obtenues.

a) Calculer $P(X = 0)$.

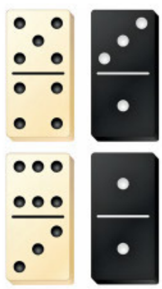
b) Déterminer la loi de probabilité de X.

68 Une fourmi parcourt les côtés d'un carré ABCD en partant du sommet A et met 1 min à parcourir un côté.
Arrivée à l'un des sommets, elle choisit au hasard l'un ou l'autre des deux côtés issus de ce sommet pour poursuivre sa marche.



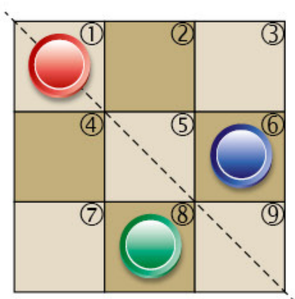
On dit que la fourmi a traversé le carré lorsqu'elle atteint pour la première fois le sommet C.
On observe la fourmi pendant 4 min au plus et la variable aléatoire X donne la durée de la traversée.
On donne à X la valeur 0 si la fourmi n'a pas atteint le point C pendant l'observation.
a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
b) Quelle est la probabilité que la fourmi ait traversé le carré pendant le temps imparti ?
Cette expérience aléatoire est simulée à l'exercice **50** *page 322.*

69 Une boîte contient 15 dominos blancs et 10 dominos noirs.
On tire au hasard successivement et avec remise quatre dominos de la boîte.



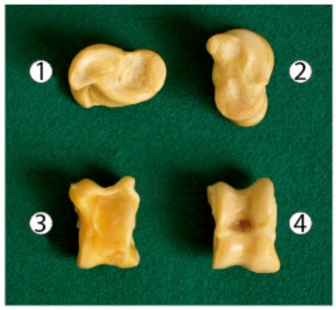
X est la variable aléatoire qui donne le rang de sortie du premier domino noir et X prend la valeur 0 si l'on n'obtient pas de domino noir.
a) Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.
b) Donner la loi de probabilité de X.
c) Déterminer E(X).

70 On dispose d'un damier de trois lignes et trois colonnes et de trois jetons de couleurs différentes (rouge – vert – bleu). On place au hasard les trois jetons sur trois cases différentes du damier.



X est la variable aléatoire qui donne le nombre de jetons se trouvant sur la diagonale tracée sur la figure.
Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

71 Un osselet possède quatre faces présentées ci-dessous et que l'on note 1, 2, 3, 4. On note p_1, p_2, p_3, p_4 les probabilités associées aux quatre faces lors d'un lancer.



Des études statistiques ont montré que :

$$p_1 = p_2\ ;\quad p_3 = p_4\ ;\quad p_1 = 4p_4$$

On lance cet osselet, la face 1 rapporte 3 points, la face 2 rapporte 4 points, la face 3 rapporte 6 points et la face 4 rapporte 1 point.
X désigne la variable aléatoire qui donne le nombre de points obtenus.
a) Déterminer les probabilités p_1, p_2, p_3, p_4.
b) Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
c) Calculer la probabilité $P(X \geqslant 4)$.

72 On lance une pièce équilibrée quatre fois de suite.
X est la variable aléatoire qui donne le rang auquel Pile apparaît pour la première fois et qui prend la valeur 0 si Pile n'apparaît pas.
a) Représenter les issues à l'aide d'un arbre.
b) Donner la loi de probabilité de X.

73 Dans un centre de don du sang, on a observé parmi les donneurs la répartition des groupes sanguins donnée dans le tableau incomplet ci-dessous.

O	A	B	AB
43 %	45 %		

1. Il y a trois fois plus de donneurs du type B que du type AB.
En déduire les pourcentages manquants.
2. Un infirmier prélève au hasard un dossier dans le fichier de l'ensemble des donneurs, note le groupe sanguin, repose le dossier, puis effectue un second tirage dans les mêmes conditions, de façon indépendante.
X est la variable aléatoire qui indique le nombre de donneurs du groupe B parmi les deux dossiers tirés au sort.
a) Déterminer la loi de probabilité de X.
b) Calculer et interpréter la probabilité $P(X \geqslant 1)$.

Déterminer les paramètres d'une variable aléatoire

74 Voici les règles d'un jeu de hasard.

Le joueur mise 3 € puis lance un dé équilibré à six faces numérotées de 1 à 6.

- S'il obtient un chiffre pair, le joueur reçoit, en euro, le double du chiffre obtenu.
- S'il obtient 1 ou 3, le joueur reçoit 1 €.
- Sinon, le joueur ne reçoit rien.

X est le gain, éventuellement négatif, du joueur en tenant compte de la mise de départ.

a) Quelles sont les valeurs prises par X ?

b) Déterminer la loi de probabilité de X.

c) Calculer puis interpréter l'espérance E(X).

75 Une personne propose un jeu d'argent avec un dé truqué, à six faces, selon les caractéristiques exposées ci-dessous.

Chiffre	1	2	3	4	5	6
Probabilité	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{48}$

Chaque partie coûte 5 €.

Le joueur gagne 50 € s'il obtient 6 ; 20 € s'il obtient 4 ou 5 ; 10 € s'il obtient 3 et il perd sinon.

Ce jeu est-il équitable ?

76 G est la variable aléatoire qui donne le gain, en euro, d'un joueur lors d'un jeu de hasard.

Sa loi de probabilité est donnée dans le tableau suivant.

a	-5	0	10	20	50
$P(G = a)$	0,5	0,2	0,2	0,05	0,05

a) Déterminer E(G).

b) Proposer une modification des gains pour que le jeu soit équitable.

77 Un sac contient trois billes numérotées 0, deux billes 1, une bille 2 et une bille 5.

Un joueur tire au hasard successivement, et avec remise, deux billes de ce sac.

On note les numéros des billes tirées. Parmi les deux jeux ci-dessous, indiquer celui qui est le plus intéressant pour le joueur. Justifier.

Jeu 1 : On gagne la somme des numéros tirés.

Jeu 2 : On gagne le produit des numéros tirés.

78 Dans un pays où ce jeu est autorisé, Monsieur X propose le jeu des gobelets et du caillou.

Il place un caillou sous l'un des trois gobelets, puis les mélange assez rapidement pour que le joueur ne puisse trouver le gobelet où se trouve le caillou que par hasard.

Il a remarqué que le joueur trouve le caillou 1 fois sur 6.

a) Monsieur X propose au joueur de miser 2 € pour faire une partie et de lui donner 10 € s'il trouve le caillou.

Cette proposition est-elle avantageuse pour lui à long terme ?

b) En général, s'il fixe la mise à k €, et le gain en cas de victoire à 10 €, estimer combien gagnera Monsieur X en moyenne par partie.

79 Voici les tarifs d'un théâtre.

Une étude statistique a montré que les spectateurs se répartissent de la façon suivante.

Catégories	Tarifs
Moins de 15 ans	4 €
Étudiant	7 €
Retraité	8 €
Groupe	7 €
Tarif normal	10 €

Moins de 15 ans	Étudiant	Retraité	Groupe	Tarif normal
3 %	22 %	14 %	5 %	56 %

On choisit au hasard un spectateur de ce théâtre et on note sa catégorie.

On assimile la probabilité de chaque issue au pourcentage correspondant dans le tableau.

X est la variable aléatoire qui donne le tarif, en euro, payé par ce spectateur.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

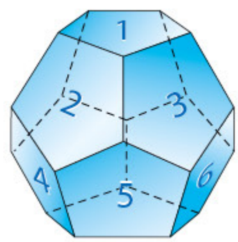
b) À l'aide de la calculatrice, déterminer l'espérance de la variable aléatoire X.

Interpréter ce résultat.

c) La municipalité qui gère ce théâtre a compté 3 000 spectateurs l'année précédente et a dépensé 20 000 € pour ce théâtre.

Peut-on estimer que, dans ces conditions, ce théâtre est rentable pour la municipalité ?

80 Les douze faces d'un dodécaèdre régulier sont numérotées de 1 à 12.



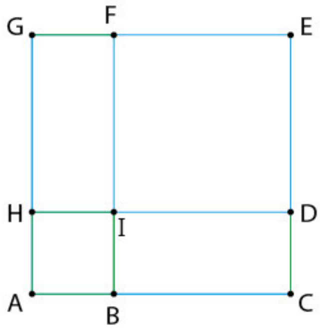
X est la variable aléatoire qui, au numéro a sorti sur la face supérieure, associe le reste de la division euclidienne de a par 3.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Déterminer E(X) et V(X).

Arrondir au centième si besoin.

81 Un point lumineux est placé en I.



Il se déplace de manière aléatoire le long des segments. Il met 1 s pour parcourir un segment court vert et 2 s pour parcourir un segment long bleu.
X est la variable aléatoire qui donne le temps de deux déplacements successifs.
Déterminer la durée moyenne de ces deux déplacements.

82 Ari possède un dé équilibré à 12 faces numérotées de 1 à 12 et Selma deux dés équilibrés à 6 faces numérotées de 1 à 6.

X est la variable aléatoire qui donne le numéro obtenu en lançant le dé d'Ari.
Y est la variable aléatoire qui donne la somme des numéros obtenus en lançant les deux dés de Selma.
a) Selma affirme : « Les valeurs prises par X et Y sont les mêmes. »
Ari ajoute : « Les lois de probabilité de X et Y sont aussi les mêmes. »
Que peut-on penser de ces affirmations ?
b) Quelle variable aléatoire a la plus grande espérance ?
c) Quelle variable aléatoire a la plus grande variance ?

83 X désigne une variable aléatoire qui prend quatre valeurs a_1, a_2, a_3 et a_4 avec les probabilités respectives p_1, p_2, p_3 et p_4.
a) En utilisant la formule du cours, démontrer que si l'on ajoute 10 à chaque valeur prise par X, alors l'espérance augmente aussi de 10.
b) De manière générale, démontrer que si l'on ajoute un nombre réel k à chaque valeur prise par X, alors l'espérance augmente aussi de k.

84 **1.** On lance un jeton truqué dont les faces sont numérotées 1 et 2. La probabilité d'obtenir 1 est 0,6 et la probabilité d'obtenir 2 est 0,4.
X est la variable aléatoire qui donne le numéro obtenu.
a) Calculer $E(X)$ et $V(X)$.
b) Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X^2, qui prend comme valeurs les carrés des valeurs prises par X.
c) Calculer l'espérance de la variable aléatoire X^2, que l'on note $E(X^2)$.
d) Calculer $E(X^2) - E(X)^2$.
Quelle valeur retrouve-t-on ainsi ?
2. On tire au hasard une carte dans un paquet qui contient :
- quatre cartes numérotées 10 ;
- trois cartes numérotées 5 ;
- deux cartes numérotées 2 ;
- une carte numérotée 1.

X est la variable aléatoire qui donne le numéro obtenu.
a) Calculer $E(X)$.
b) Déterminer $V(X)$ en utilisant la formule de la question **1. d)**.
Cette formule est établie à l'exercice 64 page 298.

S'entraîner à la logique → p. 336

85 Implications et réciproques

X est une variable aléatoire qui prend les valeurs -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3.
1. Pour chacune des implications suivantes, dire si elle est vraie ou fausse.
a) Si $\{X \leqslant 0\}$ est réalisé, alors $\{X \leqslant -1\}$ est réalisé.
b) Si $\{X > 2\}$ est réalisé, alors $\{X = 3\}$ est réalisé.
2. Rédiger la réciproque de chacune des implications ci-dessus et dire si elle est vraie ou fausse.

86 Événement contraire

1. X est une variable aléatoire.
Dans chaque cas, déterminer l'événement contraire de l'événement indiqué.
a) $\{X \geqslant 1\}$ **b)** X est au plus égal à 3
c) $\{X < 1\}$ **d)** X est au moins égal à 3
2. Rédiger la négation de chaque affirmation.
a) « Il ne pleuvra aucun jour le mois prochain. »
b) « Tous les élèves de la classe réussiront l'examen du code de la route avant d'avoir 18 ans. »

Organiser son raisonnement

87 Rechercher un extremum d'une fonction

Raisonner **Chercher**

Voici la loi de probabilité d'une variable aléatoire X.

Valeur	a_1	a_2	...	a_n
$P(X = a_i)$	p_1	p_2	...	p_n

x désigne un nombre réel.

1. a) $X - x$ est la variable aléatoire dont les valeurs sont obtenues en retranchant x à chaque valeur de X. Présenter sa loi de probabilité dans un tableau.

b) $(X - x)^2$ est la variable aléatoire dont les valeurs sont obtenues en élevant au carré chaque valeur de $X - x$. Présenter sa loi de probabilité dans un tableau.

2. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = E((X - x)^2)$.

a) En développant tous les $(a_i - x)^2$, justifier que pour tout nombre réel x :

$$f(x) = x^2 - 2xE(X) + (p_1a_1^2 + p_2a_2^2 + \ldots + p_na_n^2)$$

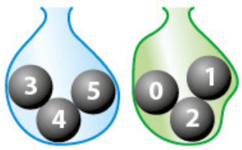
b) Déterminer la fonction dérivée de f.

c) En déduire que la fonction f admet un minimum et préciser en quel nombre.

88 A fair game?

Chercher **Modéliser** **Communiquer**

A token is randomly picked from each of the bags drawn below.



The player has to bet £1 for each game. He earns, in £, the product of the numbers on the two randomly picked tokens.

a) A is the event: "The product is equal to 0" and B is the event: "The product is more than or equal to 5". Are the events A and B equiprobable? Prove your answer.

b) Is this game fair?

89 Rendre un jeu équitable

Chercher **Modéliser** **Calculer**

n désigne un nombre entier supérieur ou égal à 4.

Dans une urne, on place n jetons : un rouge et tous les autres blancs. On tire au hasard successivement deux jetons de l'urne, avec remise, et on définit le jeu suivant : on gagne 16 points si l'on obtient deux fois le jeton rouge, on gagne 1 point si l'on obtient deux fois un jeton blanc, et on perd 5 points sinon.

Pour quelle valeur de n ce jeu est-il équitable ?

90 Étudier deux variables aléatoires

Chercher **Modéliser** **Calculer**

Un immeuble comporte un rez-de-chaussée et quatre étages. Amanda et Bénédicte prennent toutes les deux l'ascenseur au rez-de-chaussée et descendent à un étage au hasard, indépendamment l'une de l'autre.

X est la variable aléatoire qui donne le numéro de l'étage où la première d'entre elles est sortie.

Y est la variable aléatoire qui donne le numéro de l'étage où la deuxième est sortie.

1. a) Représenter cette situation par un arbre.

Indiquer au bout de chaque chemin les valeurs correspondantes de X et Y.

b) Calculer, puis interpréter :

- $P(X = 1)$
- $P(Y = 1)$
- $E(X)$
- $E(Y)$

2. Patricia habite au deuxième étage de l'immeuble. Elle appelle l'ascenseur au moment où Amanda et Bénédicte sont au rez-de-chaussée.

Quelle est la probabilité que, quand l'ascenseur s'ouvre au deuxième étage :

a) Amanda et Béatrice soient à l'intérieur ?

b) l'une d'elles seulement soit à l'intérieur ?

c) aucune d'elles ne soit à l'intérieur ?

91 Évaluer les chances de gagner

Narration de recherche

Chercher **Modéliser** **Raisonner**

Rédiger les différentes étapes de la recherche, sans omettre les fausses pistes et les changements de méthode.

Problème On lance un dé équilibré à six faces numérotées de 1 à 6.

Si le 6 sort, le lièvre gagne, sinon la tortue avance d'une case et on rejoue. La tortue gagne si elle parvient à avancer de quatre cases.

Quelle est la situation la plus enviable, celle du lièvre ou celle de la tortue ?

92 Prendre des initiatives

Chercher **Modéliser**

On lance n fois une pièce équilibrée.

X est la variable aléatoire qui compte le nombre de Pile obtenu.

Exprimer en fonction de n l'espérance de X.

93 Imaginer une stratégie

Chercher | Modéliser | Calculer

Une machine à sous comporte trois rouleaux tous constitués des dessins ci-contre.
La mise est de 5 €.
Voici les gains possibles pour les joueurs.

Les trois 7	1 000 €
Deux 7 et un BAR	250 €
Trois BAR	100 €
Un 7 et deux BAR	50 €
Deux 7	10 €
Un 7	2 €

Chaque jour, 250 parties sont jouées en moyenne sur cette machine. Le casino est ouvert 300 jours par an. Cette machine est achetée 40 000 €, dure 5 ans et nécessite 2 000 € d'entretien annuel.
Évaluer la rentabilité annuelle de cette machine pour le casino.

94 Choisir un prix

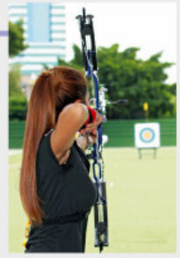
? Problème ouvert

Chercher | Modéliser

Lors de la fête d'une école, des billets de tombola sont mis en vente. 10 % des billets font gagner 50 €, 20 % des billets font gagner 10 € et 20 % font gagner 2 €.
Les autres billets sont perdants.
À quel prix faut-il vendre chaque billet pour que l'espérance du gain d'un acheteur soit comprise entre 4 et 6 € ?

Des Défis

95 Réaliser presque sûrement



Yasmine tire à l'arc et touche la cible une fois sur deux. Combien de fois Yasmine doit-elle tirer pour que sa probabilité d'atteindre la cible au moins une fois soit supérieure à 0,99 ?

96 Résoudre le problème de Galilée

Le Duc de Toscane demanda un jour à Galilée : « Pourquoi, lorsque l'on jette trois dés, obtient-on plus souvent la somme 10 que la somme 9 bien que ces deux sommes soient obtenues de six façons différentes ? »
Proposer une réponse argumentée à ce problème.

97 Trouver un code secret

Les codes de cartes bancaires sont des nombres à quatre chiffres, compris entre 0000 et 9999. Un voleur essaie des codes au hasard à un distributeur. Il ne peut effectuer que trois essais.
X est la variable aléatoire qui compte le nombre d'essais nécessaires pour trouver le bon code ; on convient que X prend la valeur 4 si le voleur n'a pas trouvé le bon code après les trois essais.
Quelle est l'espérance de X ?

OBJECTIF BAC

98 Tirages sans remise

20 min

D'après Bac 2006, Polynésie

Une urne contient 4 boules blanches et 2 boules noires indiscernables au toucher.
On effectue trois tirages successifs au hasard d'une boule selon la procédure suivante : après chaque tirage, si la boule tirée est blanche, on la remet dans l'urne et si elle est noire, on ne la remet pas dans l'urne.

1. Utiliser un arbre pondéré pour représenter cette expérience aléatoire.

2. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de boules noires obtenues à l'issue des trois tirages.

a) Quelles sont les valeurs prises par X ?

b) Calculer $P(X = 0)$.

c) Montrer que la probabilité que la seule boule noire tirée soit obtenue au second tirage est égale à $\frac{8}{45}$.

d) En remarquant que la seule boule noire peut être tirée soit au premier, soit au deuxième, soit au troisième tirage, calculer $P(X = 1)$.

e) Déterminer la loi de probabilité de X.

f) Calculer et interpréter $E(X)$.

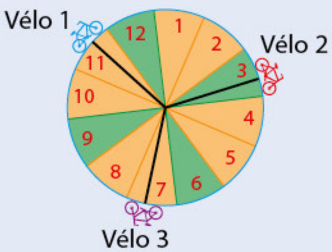
99 Choisir sa mise

La situation problème

Dans un parc de loisirs, on propose un jeu de hasard où trois vélos tournent autour d'un disque découpé en 12 secteurs. Ces trois vélos sont toujours à la même distance les uns des autres. L'ensemble s'arrête au bout d'un temps aléatoire. Le joueur peut miser sur un ou plusieurs secteurs du disque, au prix de 1,50 € par secteur. Si l'un des vélos s'arrête sur l'un de ses secteurs, il remporte le lot correspondant à ce vélo.

Utiliser les différentes informations pour déterminer la meilleure stratégie : miser sur un secteur ou sur un certain nombre de secteurs consécutifs.

DOC 1 Schéma du jeu



DOC 2 Valeurs des lots

Vélo 1	10 €
Vélo 2	5 €
Vélo 3	2 €

100 Choisir le meilleur tarif

La situation problème

Un commercial loue chaque semaine une voiture, dans la même agence de location.

Il lui arrive d'avoir des accrochages ou des accidents qui entraînent des réparations qui sont à sa charge.

Il peut choisir entre trois forfaits avec des tarifs et des franchises différents. La franchise est le montant maximum qu'il devra payer en cas de réparation.

Utiliser les différentes informations pour déterminer quel forfait est le plus intéressant pour un grand nombre de locations.

DOC 1 Frais de réparation et probabilités

Frais de réparation	Probabilité
0	0,8
200	0,1
500	0,04
1 000	0,03
2 000	0,02
5 000	0,01

DOC 2 Tarifs et franchises des forfaits

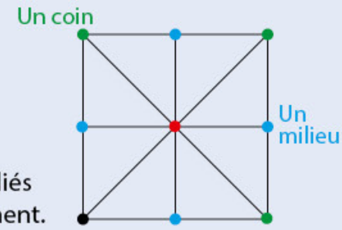
	Tarif	Franchise
Forfait 1	219	500
Forfait 2	179	1 000
Forfait 3	139	Aucune

101 Déterminer si un jeu est équitable

La situation problème

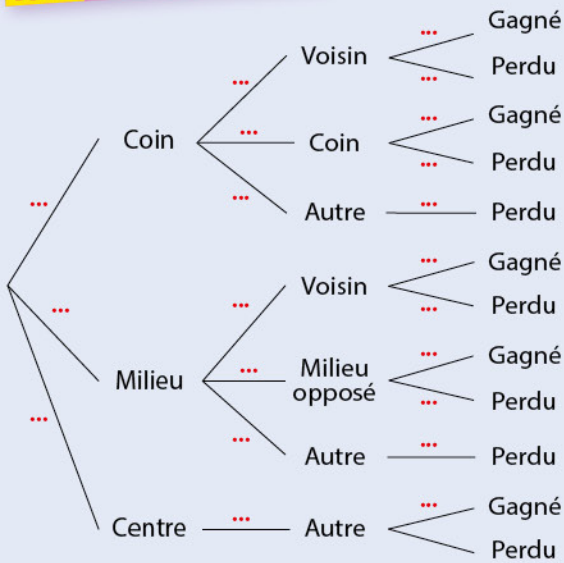
Sur le plateau du DOC 1, on imagine placer au hasard trois jetons sur les neuf points situés dans un coin, au milieu d'un côté ou au centre.
Deux jetons ne peuvent pas être placés sur un même point.
La mise pour une partie est de 1 €.
Si les trois jetons sont alignés, on reçoit 10 €, sinon on ne reçoit rien.
Utiliser les différentes informations pour déterminer si ce jeu est équitable.

DOC 1 Schéma du plateau



Deux points sont dits « voisins » s'ils sont reliés ci-contre par un segment.

DOC 2 Arbre à compléter



102 Découvrir un paradoxe

La situation problème

Une compagnie aérienne exploite un avion de 150 places. Pour optimiser ses bénéfices, elle envisage de pratiquer le surbooking, c'est-à-dire de vendre plus de places qu'il n'y en a dans l'avion. On suppose que toutes les places sont vendues.
Si le nombre de passagers qui se présentent est supérieur au nombre de places dans l'avion, chaque passager supplémentaire reçoit une compensation en euro.
Utiliser les différentes informations pour déterminer combien de places, entre 150 et 152, elle doit vendre pour espérer obtenir une recette maximum.

DOC 1 Loi de probabilité du nombre de passagers qui se présentent

Nombre de passagers	147	148	149	150	151	152
Probabilité	0,07	0,15	0,25	0,35	0,12	0,06

DOC 2 Montants

Prix d'une place	170 €
Compensation	300 €