1 Suites numériques

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

3 • $b_5 = 5\times 5 - 4 = 25 - 4 = 21$
• $b_{100} = 5\times 100 - 4 = 496$

6 **a)** $k_1 = 5k_0 - 7 = 5\times(-5) - 7$
$k_1 = -25 - 7 = -32$
b) $k_2 = 5k_1 - 7 = 5(-32) - 7 = -167$
$k_3 = 5k_2 - 7 = 5(-167) - 7 = -842$

10 **a)** $w_{100} = w_0 + 100r$
$w_{100} = 1 + 100\times(-2) = -199$
b) Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$,
$w_n = w_0 + nr = 1 + (-2)n = 1 - 2n$

12 **a)** $t_6 = t_2\times q^{6-2} = -2{,}5\times 3^4 = -202{,}5$
b) Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$,
$t_n = t_2\times q^{n-2} = -2{,}5\times 3^{n-2}$
Remarque : $3^{n-2} = \dfrac{3^n}{3^2} = \dfrac{1}{9}\times 3^n$
donc $t_n = -\dfrac{2{,}5}{9}\times 3^n = -\dfrac{25}{90}\times 3^n = -\dfrac{5}{18}\times 3^n$

16 **a)** $S_n = u_2 + (u_2 - 1{,}5) + (u_2 - 2\times 1{,}5) + \dots + (u_2 - (n-2)\times 1{,}5)$
$S_n = \underbrace{u_2 + u_2 + u_2 + \dots + u_2}_{(n-2+1)\text{ fois}} - 1{,}5\times(1+2+\dots+(n-2))$
$S_n = (n-1)u_2 - 1{,}5\times(1+2+\dots+(n-2))$
$S_n = 0{,}5(n-1) - 1{,}5\times\dfrac{(n-2)(n-1)}{2}$
$S_n = 0{,}5(n-1) - 1{,}5\times\dfrac{(n-2)(n-1)}{2}$
$S_n = 0{,}5(n-1) - 0{,}75(n-2)(n-1)$
$S_n = (n-1)[0{,}5 - 0{,}75(n-2)]$
$S_n = (n-1)(-0{,}75n + 2)$
$S_n = -0{,}75n^2 + 2{,}75n - 2$
b) Avec la calculatrice, on lit que $S_n = -77$ pour $n = 12$.

17 $S = v_1 + 2v_1 + 2^2 v_1 + \dots + 2^7 v_1$
$S = v_1(1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^7)$
$S = -1\times\dfrac{1-2^8}{1-2} = 1 - 2^8 = -255$

POUR SE TESTER

84 **1.** B **2.** C **3.** D **4.** D **5.** A **6.** C

85 **1.** B. D **2.** B. C **3.** A. C **4.** B. C. D

86 **1. Vrai.** En effet, $u_{100} = u_{200} - 100r$ et $u_{300} = u_{200} + 100r$.
Donc $u_{100} + u_{300} = 2\times u_{200}$.

2. Vrai. En effet, pour tout nombre n de $\mathbb{N}$ avec $n\geqslant 1$, $w_{n-1} = \dfrac{w_n}{q}$ (si $q\neq 0$) et $w_{n+1} = q^{w}{}_{n}$.
Donc $w_{n-1}\times w_{n+1} = w_n^2$
soit $w_n = \sqrt{w_{n-1}\times w_{n+1}}$.
Si $q = 0$, $w_n = w_0\times 0^2 = 0$ donc la proposition est encore vraie.

3. Vrai. En effet, pour tout nombre n de $\mathbb{N}$,
$h_n = h_1 q^{n-1} = -4\times(-2)^{n-1} = -4\times\dfrac{(-2)^n}{-2}$
$h_n = 2\times(-2)^n$
On tabule cette suite avec la calculatrice et on observe que $h_{17} = -262\,144$.

S'ENTRAÎNER

93 **a)**

i		1	2	3
U	2 000	2 200	2 250	2 262,5

À la fin de l'algorithme, on obtient U = 2 262,5 ; c'est le solde du compte de Pierre au 1er avril 2018.
b) $v_0 = 2\,000$ et pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $v_{n+1} = 0{,}25v_n + 1700$.

96 • **Mathématisation**
On note a_n et b_n les soldes respectifs des comptes de Gaylor avec l'option 1 et l'option 2.
Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$,
$a_n = a_0 + 1000\times\dfrac{2}{100}n = 1000 + 20n$
$b_n = b_0\left(1 + \dfrac{1{,}8}{100}\right)^n = 1000\times 1{,}018^n$
• **Résolution du problème**
On tabule les suites (a_n) et (b_n) avec la calculatrice.

n+1	an+1	bn+1
12	1022	1216.8
13	1024	1238.7
14	1026	1261
15	1028	1283.7

On constate que pour $n\leqslant 12$, $a_n\geqslant b_n$ et que pour $n = 13$, $a_{13} < b_{13}$.
À partir de $n = 13$, le solde du compte de Gaylor augmente de 20 € par an avec l'option 1, alors qu'il augmente d'au moins 22 € par an (car $1261\times 1{,}8\ \% \approx 22$) avec l'option 2.
Donc, pour tout $n\geqslant 13$, $a_n < b_n$.
• **Conclusion**
Après 13 ans de placement, l'option 2 devient plus intéressante.

100 **a)** $v_0 = 1$ $v_1 = 4$ $v_2 = 12$
$v_1 - v_0 = 4 - 1 = 3$ et $v_2 - v_1 = 12 - 4 = 8$
donc la suite (v_n) n'est pas arithmétique.
b) $\dfrac{v_1}{v_0} = \dfrac{4}{1} = 4$ et $\dfrac{v_2}{v_1} = \dfrac{12}{4} = 3$
donc la suite (v_n) n'est pas géométrique.

105 $u_0 = 0$
$u_1 = \dfrac{1}{1-u_0} = \dfrac{1}{1-0} = 1$
$u_2 = \dfrac{1}{1-u_1}$ mais $1 - u_1 = 1 - 1 = 0$
et on ne peut pas diviser par 0.
Donc les données de $u_0 = 0$ et de cette relation de récurrence ne définissent pas une suite sur $\mathbb{N}$.

111 **1. a)** On note (u_n) la suite des nombres entiers pairs ; c'est la suite arithmétique de raison 2 telle que $u_1 = 2$.
Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, avec $n\geqslant 1$, $u_n = 2n$
$S = 2 + 4 + \dots + 100$
$S = u_1 + u_2 + \dots + u_{50}$
$S = u_1 + (u_1 + 2) + \dots + (u_1 + 49\times 2)$
$S = 50u_1 + 2(1 + 2 + \dots + 49)$
$S = 50\times 2 + 2\times\dfrac{49\times 50}{2}$
$S = 100 + 49\times 50 = 2\,550$
b) On note (v_n) la suite des nombres entiers impairs ; c'est la suite arithmétique de raison 2 telle que $v_0 = 1$.
Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $v_n = 2n + 1$
$T = 1 + 3 + \dots + 99$
$T = v_0 + v_1 + \dots + v_{49}$
$T = v_0 + (v_0 + 2) + \dots + (v_0 + 49\times 2)$
$T = 50v_0 + 2(1 + 2 + \dots + 49)$
$T = 50\times 1 + 2\times\dfrac{49\times 50}{2}$
$T = 50 + 49\times 50 = 2\,500$
2. On note $\Sigma = 1 + 2 + \dots + 100$
1re méthode
$\Sigma = S + T = 2\,550 + 2\,500 = 5\,050$
2e méthode
$\Sigma = \dfrac{100\times 101}{2} = 50\times 101 = 5\,050$

119 On note a_n la quantité d'eau, en L, dans la citerne au jour n (avec $n\in\mathbb{N}$) :
$a_0 = \dfrac{2}{3}\times 1500 = 1000$ et pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $a_{n+1} = a_n\left(1 - \dfrac{5}{100}\right) = 0{,}95a_n$.
La suite (a_n) est géométrique de raison 0,95.
Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$:
$$a_n = 1000\times 0{,}95^n.$$
Ainsi, $a_{10}\approx 598{,}7$ donc après 10 jours de sécheresse, il reste environ 598,7 L d'eau dans la citerne.
Pour arroser ses arbres au 10e jour, le jardinier aura besoin de 650 L d'eau (65×10 L).
Donc le jardinier n'aura pas suffisamment d'eau dans sa citerne.

122 • **non P** : « Il existe un nombre n de $\mathbb{N}$ tel que $u_{n+1} - u_n \neq 2$. »
• **non Q** : « Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $u_n\neq 0$. »

2 Comportement d'une suite

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

3 **a)** Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1}-u_n=2n-9$. Or, $2n-9>0$ pour tout $n>\frac{9}{2}$. La suite (u_n) est croissante à partir du rang 5.

b) Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $v_n=f(n)$ où f est la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=-3x^2-3x+1$.

Pour tout nombre réel x, $f'(x)=-6x-3$.

D'où le tableau de variations de la fonction f.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	1 ↘	

La fonction f est décroissante sur $[0\,;+\infty[$, donc la suite (v_n) est décroissante.

4 **a)** Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$,

$u_n=100\times 0{,}5^n$ donc $u_n>0$.

$\frac{u_{n+1}}{u_n}=0{,}5$ donc $\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$,

c'est-à-dire $u_{n+1}<u_n$.

Donc la suite (u_n) est décroissante.

b) Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $v_n=0{,}25\times 3^n$ donc $u_n>0$.

$\frac{v_{n+1}}{v_n}=3$ donc $\frac{v_{n+1}}{v_n}>1$,

c'est-à-dire $v_{n+1}>v_n$.

Donc la suite (v_n) est croissante.

7 **a)**

n	u(n)
0	4
1	1
2	-2
3	-5
4	-8
5	-11
6	-14
7	-17
8	-20
9	-23
10	-26

b) • $v_n<-10^3$ équivaut à $n>\frac{10^3+4}{3}$ soit $n>1334$.

• $v_n<-10^6$ équivaut à $n>\frac{10^6+4}{3}$ soit $n>33\,335$.

c) Il semble que la suite (v_n) a pour limite $-\infty$.

8 **a)**

n	u(n)
1	3
2	2.5
3	2.3333
4	2.25
5	2.2
6	2.1667
7	2.1429
8	2.125
9	2.1111
10	2.1
11	2.0909

b) • $2<w_n<2{,}01$ équivaut à

$2<2+\frac{1}{n}<2{,}01$,

c'est-à-dire $0<\frac{1}{n}<0{,}01$, soit $n>100$.

• $2<w_n<2{,}0001$ équivaut à

$2<2+\frac{1}{n}<2{,}0001$,

c'est-à-dire $0<\frac{1}{n}<0{,}0001$, soit $n>10\,000$.

c) On conjecture que la suite (w_n) a pour limite 0.

POUR SE TESTER

72 **1.** C **2.** D **3.** D **4.** D

73 **1.** C **2.** A **3.** A, B, C

74 **1. Faux.** En effet, pour $n=1$, $u_1=2+\frac{1}{1}=3$ et $u_1>2$.

2. Vrai. En effet, $n\geqslant 1$ donc $n^2\geqslant 1$ et $\frac{1}{n^2}\leqslant 1$. On a donc $2+\frac{1}{n^2}\leqslant 3$.

3. Faux. En effet, $v_1=3$ et $v_2=2{,}25$; or $1<2$ mais $v_1>v_2$.

4. Vrai. En effet, $n\geqslant 1\,000$, équivaut à $n^2\geqslant 10^6$ soit $\frac{1}{n^2}\leqslant 10^{-6}$. On sait que $2+\frac{1}{n^2}>2$, on peut donc affirmer que :

$$2<2+\frac{1}{n^2}\leqslant 2+10^{-6}$$

5. Faux. En effet, comme

$2<2+\frac{1}{n^2}\leqslant 2+10^{-6}$ pour $n\geqslant 1\,000$, on peut affirmer qu'à partir du rang 1000, $u_n\in\left]2-10^{-6}\,;2+10^{-6}\right[$. Or, 1,999 9 n'appartient pas à cet intervalle.

S'ENTRAÎNER

78 **a)**

```python
def Seuil(s):
    i=0
    u=-0.8
    while u<=s:
        i=i+1
        u=-2+1.2**i
    return i
```

b)

```
>>> Seuil(500)
35
```

```
>>> Seuil(1E6)
76
```

```
>>> Seuil(1E10)
127
```

81 **a)** Pour tout n de $\mathbb{N}$, $p_n=270\times 1{,}1^n$.

b)

	A	B	C	D
1	n	P_n	Seuil	Seuil dépassé ?
2	0	270	10000	Faux
3	1	297		Faux
4	2	326,7		Faux
5	3	359,37		Faux
39	37	9181,06612		Faux
40	38	10099,1727		Vrai

Il y aura plus de 10 000 pies dans 38 ans.

84 **1.** Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{q^{n+1}}{q^n}=q$$

• Si $q>1$, la suite (u_n) est croissante.

• Si $q=1$, la suite (u_n) est constante.

• Si $q<1$, la suite (u_n) est décroissante.

2. Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$:

$$v_{n+1}-v_n=v_0u_{n+1}-v_0u_n=v_0(u_{n+1}-u_n)$$

a) Donc $v_{n+1}-v_n$ et $u_{n+1}-u_n$ ont le même signe lorsque $v_0>0$ et les suites (u_n) et (v_n) ont le même sens de variation.

b) Donc $v_{n+1}-v_n$ et $u_{n+1}-u_n$ ont des signes contraires lorsque $v_0<0$ et les suites (u_n) et (v_n) ont des sens de variation contraires.

3. a) (u_n) est croissante car $3>1$ et $2>0$.

b) (u_n) est croissante car $0{,}75<1$ et $-5<0$.

c) (u_n) est décroissante car $0{,}5<1$ et $6>0$.

d (u_n) est décroissante car $4{,}5>1$ et $-3<0$.

90 **a)** Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $n\geqslant 1$,

$$v_{n+1}-v_n=(n+1)u_{n+1}-nu_n$$
$$=nu_n+4-nu_n=4.$$

La suite (v_n) est arithmétique de raison 4 et de premier terme $v_1=0$.

b) Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $n\geqslant 1$:

$v_n=v_0+4n=4n$

$u_n=\frac{v_n}{n}=4$

c) La suite (u_n) est constante.

93 **a)** Les valeurs de u sont parfois arrondies au dix-millième.

n	0	1	2	3	4	5
u	3	2,25	2,062 5	2,015 6	2,003 9	2,000 9
$u>A$	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Faux

En fin d'exécution de l'algorithme, on obtient $n=5$ et $u\approx 2{,}000\,9$.

b)

```python
def Seuil(A):
    i=0
    u=3
    while u>A:
        i=i+1
        u=2+(1/4)**i
    return i,u
```

```
>>> Seuil(2.001)
(5, 2.0009765625)
```

```
>>> Seuil(2.000001)
(10, 2.0000009536743164)
```

c) La suite (u_n) semble tendre vers 2.

97 **a)**

n	u(n)
0	1
1	1.5
2	2.25
3	3.375
4	5.0625
5	7.5938
6	11.391
7	17.086
8	25.629
9	38.443
10	57.665

On conjecture que la suite (u_n) a pour limite $+\infty$.

b) $S_n=u_0\frac{1-1{,}5^{n+1}}{1-1{,}5}=-2(1-1{,}5^{n+1})$.

c) Comme (1.5^n) semble tendre vers $+\infty$, il semble que (S_n) tende aussi vers $+\infty$.

100 **a)** Il existe un nombre n de $\mathbb{N}$ tel que $u_n>u_{n+1}$.

b) Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $u_n\leqslant 100$.

c) Il existe un nombre réel A, tel que pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $u_n\leqslant A$.

3 Second degré

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

3 **a)** $-x^2+120=0$ équivaut à $x^2=120$ c'est-à-dire $x=\sqrt{120}$ ou $x=-\sqrt{120}$
L'ensemble des solutions est :

$$\mathcal{S}=\{\sqrt{120}\,;-\sqrt{120}\}$$

b) $\Delta=3^2-4\times\frac{1}{4}\times 9=0$

L'équation a une seule solution :

$$x=-\frac{3}{2\times\frac{1}{4}}=-6.$$

Donc $\mathcal{S}=\{-6\}$

c) $3x^2+15x=0$ équivaut à $x(3x+15)=0$ c'est-à-dire $x=0$ ou $3x+15=0$.
L'ensemble des solutions est $\mathcal{S}=\{0\,;-5\}$

d) $4x^2-4x+1=0$ équivaut à $(2x-1)^2=0$ c'est-à-dire $2x-1=0$.

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S}=\left\{\frac{1}{2}\right\}$

4 **a)** Pour tout nombre réel t,
$g(t)=-3(t^2+2t-6)$.
D'après la méthode de complétion du carré :
$t^2+2t=(t+1)^2-1^2$.
Pour tout nombre réel t :
$g(t)=-3[(t+1)^2-1-6]=-3[(t+1)^2-7]$
$g(t)=-3(t+1)^2+21$

b) Pour tout nombre réel t, $-3(t+1)^2\leqslant 0$, donc $g(t)\leqslant 21$.
La fonction g a pour maximum 21 et il est atteint en $t=-1$.

7 **a)** Ici $a=-2$, $b=11$ et $c=-12$
$\Delta=11^2-4\times(-2)\times(-12)=25$
$\Delta>0$ donc l'équation a deux solutions distinctes : $x_1=\frac{-11-\sqrt{25}}{2\times(-2)}=4$

et $x_2=\frac{-11+\sqrt{25}}{2\times(-2)}=\frac{3}{2}$.

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S}=\left\{\frac{3}{2}\,;4\right\}$.

b) $\Delta=1^2-4\times1\times1=-3$
Donc l'équation n'a pas de solution et $\mathcal{S}=\varnothing$.

c) $\Delta=(-0{,}4)^2-4\times0{,}25\times0{,}16=0$
Donc l'équation a une seule solution :

$$x=-\frac{-0{,}4}{2\times0{,}25}=0{,}8$$

Donc $\mathcal{S}=\{0{,}8\}$.

9 Une racine évidente est 1 car $2\times1^2+4\times1-6=2+4-6=0$.

L'autre solution x' vérifie $1\times x'=\frac{-6}{2}=-3$ donc $x'=-3$.
L'ensemble des solutions est donc $\mathcal{S}=\{-3\,;1\}$.

14 **a)** $\Delta=7^2-4\times(-3)\times26=361=19^2$
$\Delta>0$ donc la fonction polynôme f a deux racines :

$$x_1=\frac{-7-19}{2\times(-3)}=\frac{13}{3}$$

et $x_2=\frac{-7+19}{2\times(-3)}=-2$

Donc le tableau de signes de $f(x)$:

x	$-\infty$		-2		$\frac{13}{3}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

b) $\Delta=(-2)^2-4\times1\times9=-32$
$\Delta<0$ donc la fonction polynôme g n'a pas de racine.
D'où le tableau de signes de $g(x)$:

x	$-\infty$		$+\infty$
$g(x)$		$+$	

c) $\Delta=24^2-4\times(-9)\times(-16)=0$
$\Delta=0$ donc la fonction polynôme h a une seule racine : $x_0=\frac{-24}{2\times(-9)}=\frac{4}{3}$

Donc le tableau de signes de $h(x)$:

x	$-\infty$		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$h(x)$		$-$	0	$-$	

15 **a)** $S=\left]-2\,;\frac{13}{3}\right[$ **b)** $S=\varnothing$

c) $S=\left\{\frac{4}{3}\right\}$

POUR SE TESTER

71 **1.** A **2.** B **3.** C **4.** D **5.** B

72 **1.** B et C **2.** A et B **3.** A, B et C

73 **1. Faux.** En effet, $\Delta=2^2-4\times2\times\frac{1}{2}=0$

$f(x)=0$ pour $x=-\frac{2}{2\times2}=-\frac{1}{2}$.

2. Vrai. En effet, $\Delta=b^2-4\times(-4)$
$\Delta=b^2+16$
Un carré est toujours positif donc $\Delta>0$.

3. Faux. En effet, $\Delta=b^2+16$ et $\Delta>0$.
L'équation a deux solutions x' et x''.

$x'x''=\frac{c}{a}=-4$, donc x' et x'' sont de signes contraires.

S'ENTRAÎNER

80 **a)** $\Delta=24^2-4\times9\times16$
$\Delta=0$

L'équation a une unique solution $\frac{24}{2\times9}=\frac{4}{3}$.

```
>>>
Delta = 0.0
La seule solution est 1.3333333333333333
```

Le programme affiche une valeur approchée de la solution.

b) $\Delta=3{,}4^2-4\times0{,}5\times1$
$\Delta=9{,}56$
L'équation a deux solutions

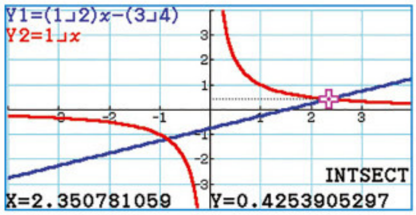
$$\frac{-3{,}4+\sqrt{9{,}56}}{2\times0{,}5}=-3{,}4+\sqrt{9{,}56}$$

$$\frac{-3{,}4-\sqrt{9{,}56}}{2\times0{,}5}=-3{,}4-\sqrt{9{,}56}$$

```
>>>
Delta = 9.559999999999999
Les solutions sont
-0.30807503325193863 et -6.491924966748061
```

Le programme affiche des valeurs approchées des deux solutions et du discriminant.

83 **a)**



b) Les abscisses des points d'intersection des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont les solutions dans $\mathbb{R}^*$ de l'équation $f(x)=g(x)$ c'est-à-dire :
$\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}=\frac{1}{x}$

Dans $\mathbb{R}^*$ cette équation équivaut à $\left(\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}\right)x=1$

c'est-à-dire $\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{4}x-1=0$.

$$\Delta=\left(-\frac{3}{4}\right)^2-4\times\frac{1}{2}\times(-1)=\frac{41}{16}$$

$\Delta > 0$ donc l'équation a deux solutions :

$$x_1 = \frac{\frac{3}{4} - \sqrt{\frac{41}{16}}}{2 \times \frac{1}{2}} = \frac{3 - \sqrt{41}}{4}$$

et $x_2 = \dfrac{\frac{3}{4} + \sqrt{\frac{41}{16}}}{2 \times \frac{1}{2}} = \dfrac{3 + \sqrt{41}}{4}$

Donc $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont deux points d'intersections d'abscisses x_1 et x_2.

On vérifie que $x_1 \approx -0{,}85$ et $x_2 \approx 2{,}35$

86 **1. a)** De $\mathrm{S} = u + v$,
on déduit $u = \mathrm{S} - v$.
En reportant cette expression de u dans $\mathrm{P} = uv$, on obtient $\mathrm{P} = (\mathrm{S} - v)v$, c'est-à-dire $\mathrm{P} = \mathrm{S}v - v^2$ soit $v^2 - \mathrm{S}v + \mathrm{P} = 0$.
Donc v est solution de l'équation $x^2 - \mathrm{S}x + \mathrm{P} = 0$.
On montre que u est aussi solution de cette équation en écrivant $v = \mathrm{S} - u$.
b) Si u et v sont solutions de l'équation $x^2 - \mathrm{S}x + \mathrm{P} = 0$, alors $u + v = -\dfrac{-\mathrm{S}}{1} = \mathrm{S}$ et $uv = \dfrac{\mathrm{P}}{1} = \mathrm{P}$.
c) s et p sont deux nombres donnés.
Il existe deux nombres réels u et v tels que $s = u + v$ et $p = uv$ si, et seulement si, u et v sont solutions de l'équation $x^2 - sx + p = 0$.
2. a) S'ils existent, ces nombres u et v sont solutions de l'équation $x^2 - 6x + 1 = 0$.
$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 32$
D'où les deux solutions :

$$x' = \frac{6 + \sqrt{32}}{2} = 3 + 2\sqrt{2}$$

et $x'' = \dfrac{6 - \sqrt{32}}{2} = 3 - 2\sqrt{2}$.

On vérifie aisément que $x' + x'' = 6$ et $x'x'' = 3^2 - (2\sqrt{2})^2 = 1$.
Donc les nombres de somme 6 et de produit 1 sont $3 + 2\sqrt{2}$ et $3 - 2\sqrt{2}$.
b) On note L et ℓ les dimensions d'un rectangle avec $0 < \ell < \mathrm{L}$.
On cherche s'il existe ℓ et L tels que $L + \ell = 12$ et $\mathrm{L}\ell = 25$.
On forme l'équation $x^2 - 12x + 25 = 0$
$\Delta = (-12)^2 - 4 \times 25 = 44$
D'où les deux solutions :

$$x' = \frac{12 + 2\sqrt{11}}{2} = 6 + \sqrt{11}$$

et $x'' = \dfrac{12 - 2\sqrt{11}}{2} = 6 - \sqrt{11}$.

On vérifie aisément que $x' + x'' = 12$ et $x'x'' = 6^2 - (\sqrt{11})^2 = 25$.
Donc les dimensions du rectangle cherché sont $\mathrm{L} = 6 + \sqrt{11}$ et $\ell = 6 - \sqrt{11}$ (car $\mathrm{L} > \ell$).

91 $\mathrm{E}(\alpha) = -0{,}2(\alpha^2 - 64\alpha) + 1800$
Avec la méthode de complétion du carré, on obtient $\alpha^2 - 64\alpha = (\alpha - 32)^2 - 32^2$.
Alors $\mathrm{E}(\alpha) = -0{,}2[(\alpha - 32)^2 - 1024] + 1800$
$\mathrm{E}(\alpha) = -0{,}2(\alpha - 32)^2 + 2\,004{,}8$.
Pour tout nombre réel α de $[0\,;90]$, $\mathrm{E}(\alpha) \leqslant 2004{,}8$.
Donc la quantité d'énergie maximum est 2 004,8 kWh et elle est obtenue avec une inclinaison du panneau de 32°.

102 M est un point de la droite d donc M a pour coordonnées $(x\,;\,2x + 4)$
De plus, on veut que $\mathrm{OM} = \sqrt{5}$ soit :
$\sqrt{x^2 + (2x + 4)^2} = \sqrt{5}$ ce qui équivaut à :
$x^2 + (2x + 4)^2 = 5$
c'est-à-dire $5x^2 + 16x + 11 = 0$
$\Delta = 16^2 - 4 \times 5 \times 11 = 36$
$\Delta > 0$ donc l'équation a deux solutions :

$$x_1 = \frac{-16 - 6}{2 \times 5} = -2{,}2$$

et $x_2 = \dfrac{-16 + 6}{2 \times 5} = -1$

Les points M ont donc pour coordonnées $(-2{,}2\,;-0{,}4)$ et $(-1\,;\,2)$.

106 **1.** Oui, par exemple pour $x = 10^4$, $x^2 - 1000x = (10^4)^2 - 10^3 \times 10^4 = 10^8 - 10^7$ soit $x^2 - 1000x = 9 \times 10^7$. Ainsi, pour $x = 10^4$, $x^2 - 1000x \geqslant 8\,000$.
2. a) Cette fonction renvoie la plus petite valeur de x telle que $x^2 - 1000x \geqslant \mathrm{M}$.
b) On obtient l'affichage :

```
>>>
x = 1008
```

1 008 est la plus petite valeur de x telle que $x^2 - 1000x \geqslant 8\,000$.

108 • P_1 est vraie.
Réciproque de P_1 : Si $\Delta < 0$, alors pour tout nombre réel x, $f(x) > 0$
La réciproque est fausse, $f(x)$ peut être strictement négatif.
Par exemple, $f(x) = -x^2 - 1$
• P_2 est vraie. En effet, si $ac < 0$, alors $-ac > 0$ et donc $b^2 - 4ac > 0$. Ainsi, $\Delta > 0$.
Réciproque de P_2 : Si $\Delta > 0$, alors $ac < 0$
La réciproque est fausse.
Par exemple, $f(x) = x^2 - 4x + 1$.

4 Dérivation

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

3 **a)** Pour tout nombre réel $h \neq 0$,

$\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \dfrac{2(2+h)^2+3-(2\times 2^2+3)}{h}$

$\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \dfrac{2(4h+h^2)}{h} = \dfrac{2h(4+h)}{h}$

$\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = 2(4+h)$.

b) $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de f, A et M sont les points de $\mathscr{C}$ d'abscisses 2 et $2+h$ avec $h \neq 0$, alors $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$ est la pente de la sécante (AM).

c) Le taux de variation $2(4+h)$ a pour limite 8 lorsque h tend vers 0 donc f est dérivable en 2 et $f'(2) = 8$.

4 **a)** La droite T passe par les points $A(-1\,;\,1)$ et $B(1\,;\,0)$ donc sa pente est $\dfrac{0-1}{1-(-1)} = -\dfrac{1}{2}$.

b) Le nombre dérivé de f en -1 est la pente de la tangente T, ainsi $f'(-1) = -\dfrac{1}{2}$.

7 g est dérivable en tout réel $x > 0$ et $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ donc $g'(4) = \dfrac{1}{4}$.

D'autre part $g(4) = 2$. Une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point A est :

$y = g'(4)(x-4) + g(4)$, $\quad y = \dfrac{1}{4}(x-4)+2$,

soit $y = \dfrac{1}{4}x + 1$.

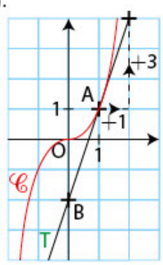
8 g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout nombre réel x, $g'(x) = 3x^2$.

$g'(1) = 3$ et $g(1) = 1$, donc on trace la droite T qui passe par $A(1\,;\,1)$ et de pente 3.

Son équation est :

$y = 3(x-1)+1$ c'est-à-dire $y = 3x-2$.

Pour la tracer on peut aussi choisir les points A et $B(0\,;-2)$.



11 **a)** g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout nombre réel x, $g'(x) = -12x^2 + 2x$.

b) Pour tout nombre réel x, $f(x) = \dfrac{1}{5}(2x^2 - x)$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout nombre réel x, $f'(x) = \dfrac{1}{5}(4x-1)$.

c) h est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout nombre réel x,

$h'(x) = 2(x^2-2x+2) + (2x-5)(2x-2)$

$h'(x) = 2x^2 - 4x + 4 + 4x^2 - 14x + 10$

$h'(x) = 6x^2 - 18x + 14$.

12 g est le quotient de deux fonctions dérivables sur $]-\infty\,;4[$ et $]4\,;+\infty[$ donc g est dérivable sur chacun de ces intervalles.

Pour tout nombre réel $x \neq 4$,

$g'(x) = \dfrac{-2(x-4)-(-2x+5)}{(x-4)^2}$

$g'(x) = \dfrac{3}{(x-4)^2}$.

POUR SE TESTER

60 **1.** B **2.** C **3.** A

61 **1.** A, C **2.** B, D **3.** A, B, D **4.** B

62 **1. Vrai.** En effet, pour tout nombre réel $x \neq 0$,

$f'(x) = -4x^{-5} = -\dfrac{4}{x^5}$.

2. Vrai. En effet, pour tout nombre réel x,

$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$.

Donc $f'(-2) = 0$ et $f'(1) = 0$.

3. Faux. En effet, pour tout nombre réel $x > \dfrac{1}{4}$:

$g'(x) : \dfrac{4}{2\sqrt{4x-1}} = \dfrac{2}{\sqrt{4x-1}}$

S'ENTRAÎNER

68 **1. a)** Pour $0 < h \leqslant 1$, la pente de la sécante (OM) est :

$c = \dfrac{g(h)-g(0)}{h} = \dfrac{h^2+2h}{h} = \dfrac{h(h+2)}{h}$

$c = h+2$.

L'algorithme s'écrit :

```
h ← 1
Tant que h > 0
  c ← h + 2
  Afficher c
  h ← h − pas
Fin Tant que
```

b) Pour pas $= 0{,}1$:

h	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1
c	3	2,9	2,8	2,7	2,6	2,5	2,4	2,3	2,2	2,1

2. a) Lorsque h tend vers 0, la droite T position limite des sécantes (OM) est la tangente à la courbe représentative $\mathscr{C}$ de g au point d'abscisse 0.

La limite de la pente c lorsque h tend vers 0 est égale à 2 donc une équation de T est $y = 2x$.

b) Ce nombre est la pente de T, soit $g'(0) = 2$.

71 **a)** On conjecture que l'aire du triangle est constante égale à 2.

b) Si $a > 0$, l'aire du triangle OAB est égale à $\dfrac{1}{2} \times 2a \times \dfrac{2}{a} = 2$.

Si $a < 0$, l'aire du triangle OAB est égale à :

$$\frac{1}{2} \times (-2a) \times \left(-\frac{2}{a}\right) = 2$$

74 **a)** Pour tout nombre réel $x > 0$,

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ donc

$$f'(1) = \frac{1}{2}.$$

b) La limite de $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$ est égale à $f'(1)$ lorsque h tend vers 0.

Donc pour h proche de 0 avec $h \neq 0$:

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} \approx \frac{1}{2}$$

c) Alors, pour h proche de 0,

$f(1+h)-f(1) \approx \dfrac{1}{2}h$, soit $\sqrt{1+h} \approx 1 + \dfrac{1}{2}h$.

d) • $\sqrt{1{,}02} \approx 1 + 0{,}1$ soit $\sqrt{1{,}02} \approx 1{,}1$

• $\sqrt{0{,}996} \approx 1 - 0{,}002$ soit $\sqrt{1{,}02} \approx 0{,}998$

84 **1.** La vitesse du coureur à l'instant t est donnée par $v(t) = d'(t) = 10 - \dfrac{1}{10}t$.

Donc $v(t)$ diminue proportionnellement au temps de course.

2. a) La vitesse du coureur s'annule à l'instant $t_1 = 100$ s.

b) La distance parcourue par le coureur est 500 m car :

$$d(100) = 10 \times 100 - \frac{100^2}{20} = 500.$$

3. a) La vitesse moyenne du coureur pendant cette course est $\dfrac{500\text{ m}}{100\text{ s}} = 5\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

b) La vitesse du coureur à l'instant $\dfrac{t_1}{2}$ est : $5\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ car $v(50) = 10 - \dfrac{50}{10} = 5$.

91 **1.** Une équation de T est :

$y = 2(x-1)+1$ soit $y = 2x-1$.

2. a) Pour $h \neq 0$,

$y_M = (1+h)^2$ et $y = 2(1+h)-1 = 1+2h$.

b) Pour h proche de 0, $y_M \approx y_P$, c'est-à-dire : $(1+h)^2 \approx 1+2h$.

3. • $(1{,}001)^2 \approx 1 + 0{,}002$ soit $(1{,}001)^2 \approx 1{,}002$

• $(0{,}995)^2 \approx 1 - 0{,}01$ soit $(0{,}995)^2 \approx 0{,}99$

93 **a) Vrai.** En effet, si pour tout nombre réel x, $f(x) = g(x)$, alors $f'(x) = g'(x)$.

b) Faux. En effet, f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x$ et $g(x) = x+1$ ont la même fonction dérivée et elles ne sont pas égales.

c) Vrai. En effet, pour tout nombre réel x, $f(x) = 1 + g(x)$ donc $f'(x) = g'(x)$.

5 Applications de la dérivation

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

3 Par lecture graphique :

- Pour tout nombre réel x de $[-2\,;-1]$ et de $[1\,;2]$, $g'(x) \geqslant 0$. Donc g est croissante sur chacun des intervalles $[-2\,;-1]$ et $[1\,;2]$.
- Pour tout nombre réel x de $[-1\,;1]$ et de $[2\,;3]$, $g'(x) \leqslant 0$. Donc g est décroissante sur chacun des intervalles $[-1\,;1]$ et $[2\,;3]$.

4 **a)** h est une fonction polynôme donc h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x,

$$h'(x) = 3x^2 + 3.$$

b) Pour tout nombre réel x, $3x^2 + 3 > 0$ donc $h'(x) > 0$. Ainsi h est croissante sur $\mathbb{R}$.

8 k est une fonction polynôme donc k est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout nombre réel x,

$k'(x) = 3x^2 - 9 = 3(x^2 - 3)$

$k'(x) = 3(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$

$k'(x)$ est du signe de $x^2 - 3$, d'où le tableau de variations ci-dessous.

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$k'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$k(x)$		$\nearrow$	$6\sqrt{3}$	$\searrow$	$-6\sqrt{3}$	$\nearrow$	

10 g est une fonction polynôme donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout nombre réel x,

$g'(x) = 3x^2 - 6x^2 - 9 = 3(x^2 - 2x - 3)$

Le polynôme $x \mapsto x^2 - 2x - 3$ a pour racine évidente -1 ; l'autre racine x' est telle que $-1 \times x' = -\dfrac{3}{1}$ soit $x' = 3$.

D'où le tableau de variations de g :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\nearrow$	10	$\searrow$	-22	$\nearrow$	

Donc, 10 est le maximum local de g (il est atteint en -1) et -22 est le minimum local de g (il est atteint en 3).

14 Les fonctions $x \mapsto 4x$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sont dérivables sur $[-5\,;-2]$, donc g est dérivable sur $[-5\,;-2]$.

Pour tout nombre réel x de $[-5\,;-2]$, $g'(x) = 4 + \dfrac{1}{x^2}$ donc $g'(x) > 0$.

D'où le tableau de variations de g.

x	-5		-2
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\dfrac{99}{5}$	$\nearrow$	$-\dfrac{15}{2}$

Donc, pour tout nombre réel x de $[-5\,;-2]$,

$$-\frac{99}{5} \leqslant g(x) \leqslant -\frac{15}{2}$$

c'est-à-dire $-19{,}8 \leqslant g(x) \leqslant -7{,}5$.

15 **a)** h est une fonction polynôme donc h est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout nombre réel t, $h'(t) = -4t + 5$.

D'où le tableau de variations de h.

t	$-\infty$		$\dfrac{5}{4}$		$+\infty$
$h'(t)$		$+$	0	$-$	
$h(t)$		$\nearrow$	$\dfrac{1}{8}$	$\searrow$	

POUR SE TESTER

57 **1.** C **2.** C **3.** B **4.** D

58 **1.** C, D **2.** B, D **3.** B, D **4.** B, C

59 **1. Faux.** En effet, il y a un minimum en $x = -2$ et un maximum en $x = 2$ donc $f'(-2) = 0$ et $f'(2) = 0$. L'équation $f'(x) = 0$ admet donc deux solutions.

2. Faux. En effet, $f'(5) < 0$ car f est décroissante sur $[2\,;5]$.

3. Vrai. En effet :

- f est croissante sur l'intervalle $[-2\,;2]$ donc pour tout x de $[-2\,;2]$, $f'(x) \geqslant 0$ donc $f'(1{,}5) \geqslant 0$.
- f est décroissante sur l'intervalle $[2\,;5]$ donc pour tout x de $[2\,;5]$, $f'(x) \leqslant 0$ donc $f'(4) \leqslant 0$.
- sur $[-5\,;5]$, $f'(x) = 0$ pour $x = 2$ et $x = -2$.

Ainsi $f'(1{,}5) > 0$ et $f'(4) < 0$.

4. Vrai. En effet la dérivée f' de f s'annule en -2 et 2 en changeant de signe.

S'ENTRAÎNER

67 **a)** $g(1016) = 4$ et $g(0) = -250$.

Ainsi, l'ordonnée des points d'abscisse supérieure à 1 016 est comprise entre 4 et 5 donc les points à coordonnées entières de $\mathscr{C}$ ont une abscisse inférieure ou égale à 1 016 dans $[0\,;+\infty[$ donc comprise entre 0 et 1 016.

b) En exécutant ce programme, voici ce que l'on obtient dans la console.

```
def f(x):
    y=(5*x-1000)/(x+4)
    return y

for n in range(0,1017):
    a=f(n)
    if int(a)==a:
        print("(",n,";",a,")")
```

```
>>>
( 0 ; -250.0 )( 1 ; -199.0 )( 2 ; -165.0 )( 6 ; -97.0 )
( 8 ; -80.0 )( 11 ; -63.0 )( 13 ; -55.0 )( 16 ; -46.0 )
( 26 ; -29.0 )( 30 ; -25.0 )( 47 ; -15.0 )( 56 ; -12.0
)( 64 ; -10.0 )( 81 ; -7.0 )( 98 ; -5.0 )( 166 ; -1.0 )
( 200 ; 0.0 )( 251 ; 1.0 )( 336 ; 2.0 )( 506 ; 3.0 )(
 1016 ; 4.0 )
```

70 **a)** On conjecture que l'aire du rectangle est maximum pour une valeur de a environ égale à 1,8.

b) On note $x = \text{OA}$ et $\text{S}(x)$ l'aire du rectangle ABCD en fonction de x $(0 \leqslant x \leqslant 3)$.

L'ordonnée de B est $g(x)$ car B appartient à la courbe $\mathscr{C}$.

$$\text{S}(x) = x\,g(x) = -\frac{4}{9}x^3 + 4x$$

La fonction S est dérivable sur $[0\,;3]$ et pour tout nombre réel x de cet intervalle,

$$\text{S}'(x) = -\frac{4}{3}x^2 + 4$$

Sur $[0\,;3]$, $-\dfrac{4}{3}x^2 + 4 = 0$ si, et seulement si, $x^2 = 3$ c'est-à-dire $x = \sqrt{3}$.

On dresse le tableau de variations de S.

x	0		$\sqrt{3}$		3
$\text{S}'(x)$		$+$	0	$-$	
$\text{S}(x)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$	$\searrow$	0

$$\text{S}\left(\sqrt{3}\right) = -\frac{4}{9}\left(\sqrt{3}\right)^3 + 4\sqrt{3} = \frac{8\sqrt{3}}{3}.$$

L'aire du rectangle est donc maximum lorsque l'abscisse du point A est $\sqrt{3}$.

74 On note x l'une des dimensions du rectangle.

On définit la fonction p sur $]0\,;+\infty[$ telle $p(x)$ représente le périmètre du rectangle.

La deuxième dimension du rectangle est $\dfrac{100}{x}$.

Ainsi $p(x) = 2\left(x + \dfrac{100}{x}\right)$

La fonction p est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et pour tout $x > 0$,

$$p'(x) = 2\left(1 - \frac{100}{x^2}\right) = \frac{2(x^2 - 100)}{x^2}$$

$$p'(x) = \frac{2(x+10)(x-10)}{x^2}$$

Pour tout $x > 0$, $x^2 > 0$ et $x + 10 > 0$ donc le signe de $p'(x)$ est celui de $x - 10$.

D'où le tableau de variations de p.

x	0		10		$+\infty$
$p'(x)$		$-$	0	$+$	
$p(x)$		$\searrow$	40	$\nearrow$	

D'après le tableau, 40 est le minimum de p sur $]0\,;+\infty[$ donc pour tout $x > 0$, $p(x) \geqslant 40$.

Ceci prouve que tous les rectangles d'aire 100 ont un périmètre supérieur ou égal à 40.

82 **a)** On complète la ligne 4 par la condition f(k)>2000

```
1  from math import *
2
3  def f(x):
4      y=x*(24-sqrt(x))
5      return y
6
7  d=0
8  for k in range(1,501):
9      if f(k)>2000:
10         d=1
11 if d==1:
12     print("Affirmation fausse")
13 else:
14     print("Affirmation vraie")
```

On obtient le résultat ci-dessous.

```
>>>
Affirmation fausse
```

Cela signifie qu'il existe un nombre réel x de l'intervalle $[1 ; 500]$ tel que $f(x) > 2\,000$. L'affirmation de Mélanie est donc fausse.

b) f est le produit de deux fonctions dérivables sur $[1 ; 500]$ donc f est dérivable sur $[1 ; 500]$ et pour tout $x \geqslant 1$,

$$f'(x) = 1(24 - \sqrt{x}) + x\left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$f'(x) = 24 - \sqrt{x} - \frac{1}{2}\sqrt{x}$$

(car $\frac{x}{\sqrt{x}} = \frac{x}{\sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}$)

$$f'(x) = 24 - \frac{3}{2}\sqrt{x}.$$

c) $f'(x) \geqslant 0$ si, et seulement si, $\sqrt{x} \leqslant 16$, c'est-à-dire $x \leqslant 256$.

On dresse le tableau de variations de la fonction f.

x	1		256		500
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	23	↗	2 048	↘	$500(24-\sqrt{500})$

D'après le tableau de variations, 2 048 est le maximum local de la fonction f sur l'intervalle $[1 ; 500]$ donc pour tout nombre réel x de $[1 ; 500]$, $f(x) \leqslant 2\,048$.

87 Pour tout x de $[0 ; 12]$:

$$f'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{(2x-2)\left(x+\frac{1}{2}\right) - (x^2 - 2x + 5) \times 1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{x^2 + x - 6}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}$$

Pour tout x de l'intervalle $[0 ; 12]$, $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de $x^2 + x - 6$.

Sur $[0 ; 12]$, $f'(x) = 0$ si, et seulement si, $x = 2$.

On dresse le tableau de variations de f.

x	0		2		12
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$	5	↘	1	↗	5

D'après le tableau de variations de f, Sandrine est passée lors de son plongeon à 1 m minimum du fond de la piscine.

90 **a)** • La réciproque de la proposition est :
« Si f est croissante sur un intervalle I, alors pour tout nombre réel x de I, $f'(x) \geqslant 0$. »
• La contraposée de la proposition est :
« Si f n'est pas croissante sur un intervalle I, alors il existe au moins un nombre réel x de I, $f'(x) < 0$. »

b) • La proposition est vraie.
• La réciproque est vraie.
• La contraposée est vraie.

6 Fonction exponentielle

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

3 La fonction f est le produit de deux fonctions $u : x \mapsto 5 + x$ et $v : x \mapsto e^x$ dérivables sur $\mathbb{R}$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout nombre réel x,
$u(x) = 5 + x$ $\quad u'(x) = 1$
$v(x) = e^x$ $\quad v'(x) = e^x$
Ainsi $f'(x) = 1 \times e^x + (5 + x) \times e^x$
$= (1 + 5 + x)e^x$
$= (6 + x)e^x$

7 **a)** La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout nombre réel x,
$f'(x) = 7 \times e^{7x} = 7e^{7x}$.
b) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout nombre réel x,
$g'(x) = 1{,}5 \times 0{,}4 \times e^{0{,}4x} = 0{,}6e^{0{,}4x}$.
c) La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout nombre réel t,
$h'(t) = -70 \times (-0{,}1)e^{-0{,}1t} = 7e^{-0{,}1t}$.

11 **a)** $A = e^{10x-8+1-2x} = e^{8x-7}$
b) $B = e^{x+1-(4x+3)} = e^{x+1-4x-3} = e^{-3x-2}$
c) $C = e^{(5x+2)\times 2} = e^{10x+4}$

14 **a)** Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$,
$u_{n+1} = e^{3(n+1)} = e^{3n+3} = e^{3n} \times e^3 = e^3 u_n$
La suite (u_n) est donc géométrique de raison $q = e^3$.
Son premier terme est $u_0 = e^{3\times 0} = e^0 = 1$.
b) $S = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5$
$S = 1 + e^3 + (e^3)^2 + (e^3)^3 + (e^3)^4 + (e^3)^5$
$$S = \frac{1 - (e^3)^{5+1}}{1 - e^3}$$
$$S = \frac{1 - e^{18}}{1 - e^3}$$

18 **a)** La fonction f est le produit de deux fonctions $u : x \mapsto 5x + 10$ et $v : x \mapsto e^x$ dérivables sur $\mathbb{R}$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout nombre réel x,
$u(x) = 5x + 10$ $\quad u'(x) = 5$
$v(x) = e^x$ $\quad v'(x) = e^x$
Ainsi, $f'(x) = 5 \times e^x + (5x + 10) \times e^x$
$f'(x) = (5 + 5x + 10)e^x$
$f'(x) = (5x + 15)e^x$
b) Pour tout nombre réel x, $e^x > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $5x + 15$.

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	$-5e^{-3}$	↗	

20 Les fonctions f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$,
$f'(t) = 2e^{2t}$ et $g'(t) = -0{,}5e^{-0{,}5t}$.
Pour tout nombre réel t, $e^{2t} > 0$ et $2 > 0$ donc $f'(t) > 0$. La fonction f est donc croissante sur $\mathbb{R}$.
Pour tout nombre réel t, $e^{-0{,}5t} > 0$ et $-0{,}5 < 0$ donc $g'(t) < 0$. La fonction g est donc décroissante sur $\mathbb{R}$.
La courbe $\mathscr{C}_1$ est donc celle de la fonction g et la courbe $\mathscr{C}_2$ celle de la fonction f.

POUR SE TESTER

69 **1.** C **2.** B **3.** A **4.** C **5.** D

70 **1.** B, C, D **2.** A, D **3.** A, B

71 **1. Vrai.** En effet,
$$g(x) = \frac{e^x \times e^{-2x+2}}{e^{-x+4}} = \frac{e^{x-2x+2}}{e^{-x+4}}$$
$g(x) = e^{-x+2-(-x+4)} = e^{-x+2+x-4} = e^{-2}$
La fonction g est donc une fonction constante.
2. Vrai. En effet, pour tout nombre n de $\mathbb{N}$,
$u_{n+1} = 5e^{0{,}1(n+1)-1} = 5e^{0{,}1n+0{,}1-1}$
$= 5e^{0{,}1n-1} \times e^{0{,}1} = e^{0{,}1}u_n$
La suite (u_n) est donc géométrique de raison $q = e^{0{,}1}$ et de premier terme
$u_0 = 5e^{0{,}1\times 0-1} = 5e^{-1} = \dfrac{5}{e^1}$.
3. Faux. En effet, $f(-2) \approx -0{,}812$,
$f(-1{,}9) \approx -0{,}838$
et donc $f(-1{,}9) < f(-2)$.
4. Faux. En effet, pour tout nombre réel x, $e^x > 0$.

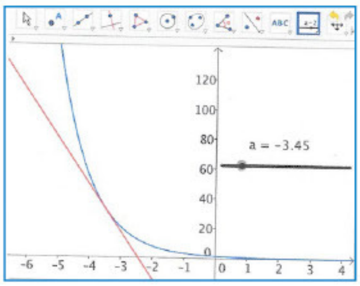
S'ENTRAÎNER

78 **a)**

$t \geqslant 50$		Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Faux
n	0	1	2	3	4	5	6	7	
t	100	89,6	80,3	71,9	64,4	57,7	51,7	46,3	

b) La valeur de n obtenue à la fin de l'algorithme est 7. Cela signifie que le ventilateur s'arrête au bout de 7 min.

81 **1.**



Il semble que, quel que soit le nombre réel a, la courbe $\mathscr{C}$ est située au dessus de la tangente T.
2. a) Une équation de la tangente T est :
$$y = f'(a)(x - a) + f(a),$$
c'est à dire $y = -e^{-a}(x - a) + e^{-a}$.
b) La fonction d est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout nombre réel x, $d'(x) = -e^{-x} + e^{-a}$.
Or $d'(x) \geqslant 0$ si, et seulement si, $-e^{-x} \geqslant -e^{-a}$, soit $e^{-x} \leqslant e^{-a}$, c'est à dire $-x \leqslant -a$ et $x \geqslant a$.

x	$-\infty$		a		$+\infty$
$d'(x)$		$-$	0	$+$	
$d(x)$		↘	0	↗	

Ainsi, pour tout nombre réel x, $d(x) \geqslant 0$.
c) Quel que soit le nombre réel a et pour tout nombre réel x, $e^{-x} \geqslant -e^{-a}(x - a) + e^{-a}$.
Ainsi, quel que soit le nombre réel a, la courbe $\mathscr{C}$ est située au dessus de la tangente T.

85 • Christophe pense que les deux courbes qu'il a affichées à l'écran de sa calculatrice sont confondues sur l'intervalle $]-\infty ; -3]$.
• Fatima pense qu'une exponentielle peut être nulle. Ce qui est impossible.
• Résolution : $5(1 + e^{4x+7}) = 5$ équivaut à $1 + e^{4x+7} = 1$, c'est-à-dire $e^{4x+7} = 0$, ce qui est impossible.
Donc $\mathscr{S} = \varnothing$.

91 La fonction f est le produit de deux fonctions $u : x \mapsto -2x^2 + 3x$ et $v : x \mapsto e^x$ dérivables sur l'intervalle $[-4 ; 1{,}5]$, donc f est dérivable sur l'intervalle $[-4 ; 1{,}5]$.
Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[-4 ; 1{,}5]$,
$u(x) = -2x^2 + 3x$ $\quad u'(x) = -4x + 3$
$v(x) = e^x$ $\quad v'(x) = e^x$
Ainsi
$f'(x) = (-4x + 3) \times e^x + (-2x^2 + 3x) \times e^x$
$f'(x) = (-2x^2 - x + 3)e^x$
Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[-4 ; 1{,}5]$, $e^x > 0$, $f'(x)$ est donc du signe de $-2x^2 - x + 3$.
$-2x^2 - x + 3 = 0$
$\Delta = 25$, il existe donc deux solutions
$x_1 = \dfrac{1 - 5}{-4} = 1$ et $x_2 = \dfrac{1 + 5}{-4} = -1{,}5$.

x	-4		$-1{,}5$		1		$1{,}5$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$f(-4)$	↘	$f(-1{,}5)$	↗	$f(1)$	↘	0

$f(-4) \approx -0{,}81$, $f(-1{,}5) \simeq -2{,}01$,
$f(1) \approx 2{,}72$.
Une fenêtre graphique adéquate est alors :
$-4 \leqslant X \leqslant 1{,}5$, pas 1 et $-2{,}1 \leqslant Y \leqslant 2{,}8$, pas 1

97 **a)** Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$,

$u_{n+1} = 5e^{-0,2(n+1)} = 5e^{-0,2n-0,2}$

$u_{n+1} = 5e^{-0,2n} \times e^{-0,2} = e^{-0,2}u_n$

La suite (u_n) est donc géométrique de raison $q = e^{-0,2}$ et de premier terme

$u_0 = 5e^{-0,2\times 0} = 5e^0 = 5.$

b) $S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_6$

$S = 5 + 5e^{-0,2} + 5(e^{-0,2})^2 + \ldots + 5(e^{-0,2})^6$

$S = 5(1 + e^{-0,2} + (e^{-0,2})^2 + \ldots + (e^{-0,2})^6)$

$S = 5 \times \dfrac{1-(e^{-0,2})^{6+1}}{1-e^{-0,2}}$

$S = 5\dfrac{1-e^{-1,4}}{1-e^{-0,2}}$

Ainsi $S \approx 20{,}781$.

L'écrivain a donc vendu 20 781 livres sur la période allant de 2012 à 2018.

100 **a)** $f(0) = \dfrac{120e^0}{e^0+3} = \dfrac{120}{4} = 30.$

Le chiot mesurait 30 cm le jour de l'adoption.

b) La fonction f est le quotient de deux fonctions $u : t \mapsto 120e^t$ et $v : t \mapsto e^t + 3$ dérivables sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ donc f est dérivable sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

Pour tout nombre réel t de l'intervalle $[0\,;+\infty[$,

$u(t) = 120e^t$ $\qquad u'(t) = 120e^t$

$v(t) = e^t + 3$ $\qquad v'(t) = e^t$

Ainsi, $f'(t) = \dfrac{120e^t \times (e^t+3) - 120e^t \times e^t}{(e^t+3)^2}$

$f'(t) = \dfrac{120e^t(e^t + 3 - e^t)}{(e^t+3)^2} = \dfrac{360e^t}{(e^t+3)^2}$

c) Pour tout nombre réel t de l'intervalle $[0\,;+\infty[$, $e^t > 0$ et $360 > 0$ et $(e^t+3)^2 > 0$, donc $f'(t) > 0$.

d)

t	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(t)$	$+$
$f(t)$	$\nearrow$

e) La fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$, $f(2) < 100$ et $f(3) > 100$.

Au bout de 3 mois, le chiot dépassera 1 m.

103 **a)** $e^{-7} \approx 0{,}000\,91$ donc $e^{-7} < 0{,}001$.

La négation de la proposition est :

Il existe un nombre réel x, tel que $e^x \leqslant 0{,}001$.

b) La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = e^{-2t}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

La négation de la proposition est :

Il existe un nombre réel a, tel que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = e^{at}$ n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$.

7 Trigonométrie

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

3 La mesure de l'angle $\widehat{MON}$ est égale à $\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{4}$, donc $\widehat{MON}=\frac{7\pi}{12}$ rad. Ainsi la longueur de l'arc $\overset{\frown}{MN}$ est égale à $\frac{7\pi}{12}\times 3$ cm, c'est-à-dire $\frac{7\pi}{4}$ cm.

4 **a)** $\widehat{IOM}=\frac{180°}{\pi}\times\frac{\pi}{6}=30°$.

b) $-\frac{16\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}-\frac{18\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}-3\times 2\pi$

donc $-\frac{16\pi}{3}$ et $\frac{2\pi}{3}$ ont le même point image sur le cercle trigonométrique.

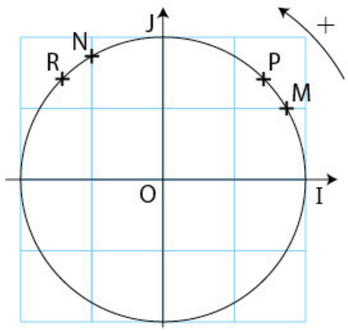
Donc $\widehat{ION}=120°$.

c) $\widehat{IOP}=\frac{180°}{\pi}\times\frac{\pi}{4}=45°$.

d) $\frac{19\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}+\frac{16\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}+2\times 2\pi$

donc $\frac{19\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{4}$ ont le même point image sur le cercle trigonométrique.

Or $\frac{3\pi}{4}=3\times\frac{\pi}{4}$ donc, pour placer R, on reporte trois fois la longueur $\frac{\pi}{4}$ dans le sens direct à partir de I.



7 Pour tout nombre réel x,

$$\cos^2(x)+\sin^2(x)=1.$$

Ainsi, $\sin^2(x)=1-\cos^2(x)=1-\left(\frac{\sqrt5}{3}\right)^2$

soit $\sin^2(x)=1-\frac{5}{9}$. D'où $\sin^2(x)=\frac{4}{9}$.

On en déduit que $\sin(x)=\frac{2}{3}$

ou $\sin(x)=-\frac{2}{3}$.

Or x appartient à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$ donc $\sin(x)\leqslant 0$. Ainsi $\sin(x)=-\frac{2}{3}$.

9 **a)** A est le point image du nombre réel $\frac{7\pi}{4}$. Comme $\frac{7\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}+2\pi$, le point A est le symétrique du point B image du nombre réel $\frac{\pi}{4}$ par rapport à l'axe des abscisses.

Ainsi, $\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt2}{2}$

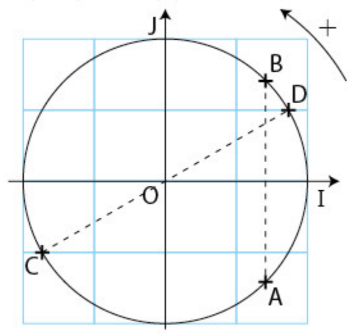
et $\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt2}{2}$.

b) C est le point image du nombre réel $-\frac{5\pi}{6}$.

Comme $-\frac{5\pi}{6}=\frac{\pi}{6}-\pi$, le point C est le symétrique du point D image du nombre réel $\frac{\pi}{6}$ par rapport à l'origine du repère.

Ainsi, $\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt3}{2}$

et $\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$.



POUR SE TESTER

73 **1.** C **2.** C **3.** B **4.** D **5.** D **6.** C

74 **1.** B, D **2.** B **3.** B, C, D

75 **1. Vrai**. En effet, $\frac{4\times 180°}{9}=80°$.

2. Vrai. En effet,

$\frac{31\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+\frac{30\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+5\times 2\pi$.

Donc $\frac{31\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{3}$ ont le même point image sur le cercle trigonométrique.

Soit $\cos\left(\frac{31\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$.

3. Faux. En effet, par exemple,

$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt2}{2}$ et $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt2}{2}$.

4. Vrai. En effet, les points images des nombres réels $\frac{\pi}{3}$ et $\pi+\frac{\pi}{3}$ sont symétriques par rapport à l'origine du repère.

5. Vrai. En effet, les points images des nombres réels $\frac{\pi}{7}$ et $\pi-\frac{\pi}{7}$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

S'ENTRAÎNER

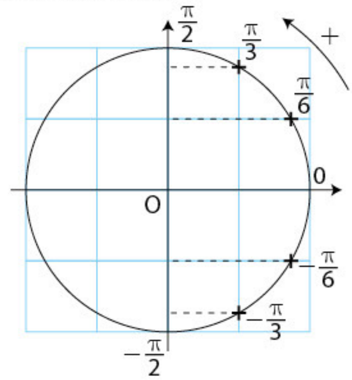
82 **a)** Voici le tableau de suivi des valeurs des variables k et S lors de l'exécution de l'algorithme.

k		-3	-2	-1
S	0	-1	$-1-\frac{\sqrt3}{2}$	$-1-\frac{\sqrt3}{2}-\frac{1}{2}$
k	0	1	2	3
S	$-1-\frac{\sqrt3}{2}-\frac{1}{2}$	$-1-\frac{\sqrt3}{2}$	-1	0

La valeur stockée dans la variable S à la fin de l'exécution de l'algorithme est 0.
Cette valeur est celle de la somme :

$$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\sin(0)$$
$$+\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

b) Sur le cercle trigonométrique ci-dessous, on remarque que les valeurs des nombres réels appartenant à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2};0\right[$ annulent celles des nombres réels appartenant à l'intervalle $\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$. De plus, $\sin(0)=0$.
Ainsi la somme est nulle.



85 **a)** Lorsqu'on déplace le curseur X, on lit dans l'affichage Algèbre que l'aire du losange semble égale à $\frac{\sqrt3}{2}$ soit environ 0,87 lorsque $X\approx 1{,}05$ rad.
b) L'aire du losange est égale à $1\times\sin(X)$ soit $\sin(X)$.

La solution de l'équation $\sin(X)=\frac{\sqrt3}{2}$ dans l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ est le nombre $\frac{\pi}{3}$ soit environ 1,05.

87 **a)** Dans le triangle OMH rectangle en H, le théorème de Pythagore donne :

$$OM^2=OH^2+MH^2,$$

c'est-à-dire $1=OH^2+MH^2$.

Or $OH=OM$ donc $1=2OH^2$ soit $OH^2=\frac{1}{2}$.

Ainsi, $\mathrm{OH} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) Le triangle OMH est isocèle rectangle en H donc les angles $\widehat{\mathrm{HOM}}$ et $\widehat{\mathrm{HMO}}$ ont pour mesure 45°.

c) La mesure de l'angle $\widehat{\mathrm{HOM}}$ est $\frac{\pi}{4}$ rad.
Donc :

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos(\widehat{\mathrm{HOM}}) = \frac{\mathrm{OH}}{\mathrm{OM}} = \frac{\mathrm{OH}}{1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

et

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin(\widehat{\mathrm{HOM}}) = \frac{\mathrm{HM}}{\mathrm{OM}} = \frac{\mathrm{HM}}{1} = \mathrm{HM} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

97 **a)** LO = LS car O et S appartiennent à un même cercle de centre L.
LO = OS car L et S appartiennent à un même cercle de centre O.
Ainsi, LO = LS = OS et le triangle SOL est équilatéral.

b) On a donc $\widehat{\mathrm{SOL}} = 60°$ soit $\widehat{\mathrm{SOL}} = \frac{\pi}{3}$ rad.

c) $\ell = 696\,000 \times \frac{2\pi}{3}$ km

soit $\ell \approx 1\,457\,699$ km.

102 **1. a)**

Valeur de x	$\frac{13\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$
$x \geqslant 0$	Vrai		
$x > \pi$	Vrai	Vrai	Faux

Lorsque x prend la valeur $\frac{13\pi}{3}$, la valeur de x à la fin de l'algorithme est $\frac{\pi}{3}$.

b)

Valeur de x	$-\frac{19\pi}{6}$	$-\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$
$x \geqslant 0$	Faux		
$x \leqslant -\pi$	Vrai	Vrai	Faux

Lorsque x prend la valeur $-\frac{19\pi}{6}$, la valeur de x à la fin de l'algorithme est $\frac{5\pi}{6}$.

2. Le rôle de cet algorithme est de stocker dans la variable x le nombre réel de l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$ qui a le même point image sur un cercle trigonométrique que le nombre réel affecté à x.

111 Dans le triangle ANB rectangle en A,

$$\tan(35°) = \frac{\mathrm{AN}}{100}$$

Dans le triangle ARB rectangle en A,

$$\tan(55°) = \frac{\mathrm{AR}}{100}$$

Donc $\mathrm{AN} \approx 70{,}02$ m et $\mathrm{AR} \approx 142{,}81$ m.
Ainsi, $\mathrm{NR} \approx 72{,}79$ m.

114 **a)** Pour $x = -\frac{\pi}{3}$, $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ce qui ne peut être égal à un nombre positif.

b) Pour $x = \frac{3\pi}{2}$, $\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$

8 Fonctions sinus et cosinus

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

3 **a)** Pour tout nombre réel x,
$g(-x) = 2\cos(-x) - \cos(-2x)$
$g(-x) = 2\cos(x) - \cos(2x)$
g est donc une fonction paire.
La fonction cosinus est paire ; il en est de même des fonctions $x \mapsto \cos(ax+b)$ (avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$).
b) g est une fonction paire donc sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées du repère. Donc la courbe de g est affichée sur l'écran ②.

4 **a)** Pour tout nombre réel x,
$h\left(x+\frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(1{,}5\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)\right)$
$h\left(x+\frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(1{,}5x + 1{,}5 \times \frac{4\pi}{3}\right)$
$h\left(x+\frac{4\pi}{3}\right) = \cos(1{,}5x + 2\pi)$
$h\left(x+\frac{4\pi}{3}\right) = \cos(1{,}5x) = h(x)$
Donc la fonction h est périodique de période $\frac{4\pi}{3}$.
b) Une graduation en abscisse représente $\frac{\pi}{3}$ donc la partie de la courbe qui se « répète » doit être tracée sur 4 graduations, ce qui est le cas de l'écran ③.

POUR SE TESTER

38 **1.** B **2.** D **3.** C **4.** A **5.** B

39 **1.** B. C **2.** A. C. D **3.** A. B. D **4.** D

40 **1. Faux.** En effet,
• pour tout nombre réel x,
$f(-x) = 2\cos(3(-x)) = 2\cos(-3x)$
$f(-x) = 2\cos(3x) = f(x)$
f est donc paire ;
• pour tout nombre réel x,
$g(-x) = 2\sin(3(-x)) = 2\sin(-3x)$
$g(-x) = -2\sin(3x) = -g(x)$
g est donc impaire.
2. Faux. En effet, $f(0) = 2\cos(0) = 2$
et $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\cos(\pi) = -2$.
$f(0) \neq f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ donc f n'est pas périodique de période $\frac{\pi}{3}$.
3. Vrai. En effet, pour tout nombre réel x, $-1 \leqslant \cos(3x) \leqslant 1$ donc $-2 \leqslant 2\cos(3x) \leqslant 2$ c'est-à-dire $-2 \leqslant f(x) \leqslant 2$.
4. Vrai. En effet, pour tout nombre réel x,
$g(x+2\pi) = 2\sin(3(x+2\pi)) = 2\sin(3x+6\pi)$
$g(x+2\pi) = 2\sin(3x) = g(x)$
(La fonction sinus est périodique de période 2π).

S'ENTRAÎNER

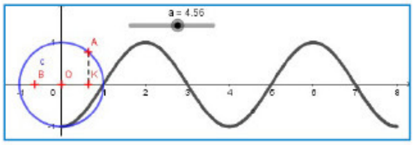
46

```python
from math import *

a=0
b=pi/2
while b-a>0.01:
    m=(a+b)/2
    if cos(m)>0.4:
        a=m
    else:
        b=m
print("La valeur de a est :",a)
print("La valeur de b est :",b)
```

```
>>>
La valeur de a est : 1.1535535524900022
La valeur de b est : 1.1596894756415448
```

49 **a)** Lorsqu'on déplace le curseur de 0 à 8, on obtient la courbe ci-dessous.



b) On conjecture que la courbe est une sinusoïde et que la fonction f est périodique de période 4.

53 **1. a)** Pour tout nombre réel x,
$f(-x) = 3\cos(2(-x)) = 3\cos(-2x)$
$f(-x) = 3\cos(2x) = f(x)$
La fonction f est donc paire.
b) D'après **a)**, la courbe représentative de la fonction f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, on peut donc restreindre l'étude de f à l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
2. a) Pour tout nombre réel x,
$f(x+\pi) = 3\cos(2(x+\pi)) = 3\cos(2x+2\pi)$
$f(x+\pi) = 3\cos(2x) = f(x)$
La fonction f est donc périodique de période π.
b) On peut restreindre l'étude de f à un intervalle de longueur π, par exemple $[0\,;\pi]$.
3. • Pour tout x de l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ on a, $0 \leqslant 2x \leqslant \pi$.
La fonction cos étant décroissante sur $[0\,;\pi]$, on déduit que la fonction $x \mapsto \cos(2x)$ est décroissante sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ et donc f également.
• Pour tout x de l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}\,;\pi\right]$ on a, $\pi \leqslant 2x \leqslant 2\pi$.
La fonction cos étant croissante sur $[\pi\,;2\pi]$, on déduit que la fonction $x \mapsto \cos(2x)$ est croissante sur $\left[\frac{\pi}{2}\,;\pi\right]$ et donc f également.

63 **1. a)** Pour tout nombre réel x,
$g(x+2\pi) = (1+\cos(x+2\pi))\sin(x+2\pi)$
$g(x+2\pi) = (1+\cos(x))\sin(x)$
car sin et cos ont pour période 2π.
$g(x+2\pi) = g(x)$.
La fonction g est donc périodique de période 2π.
b) Pour tout nombre réel x,
$g(-x) = (1+\cos(-x))\sin(-x)$
$g(-x) = (1+\cos(x)) \times (-\sin x)$
$g(-x) = -g(x)$.
La fonction g est donc impaire.
c) La parité de g permet de restreindre l'étude de la fonction g à l'intervalle $[0\,;+\infty[$ et sa périodicité à l'intervalle $[0\,;\pi]$.
2. a) Par lecture graphique, $g'(x) \geqslant 0$ sur $\left[0\,;\frac{\pi}{3}\right]$ et $g'(x) \leqslant 0$ sur $\left[\frac{\pi}{3}\,;\pi\right]$ et $g'(x) = 0$ si, et seulement si, $x = \frac{\pi}{3}$.
b)

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	0

x	-2π	$-\frac{5\pi}{3}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{3}$	π	$\frac{5\pi}{3}$	2π
$g(x)$	0	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	0	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	0	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	0	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	0

66 **a) Faux.** En effet, $f(0) = \frac{0}{2} + \cos(0) = 1$
$f(0+2\pi) = f(2\pi) = \frac{2\pi}{2} + \cos(2\pi) = \pi + 1$
$f(0) \neq f(0+2\pi)$
b) Faux. En effet, $\frac{\pi}{4} \in [0\,;1]$
et $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{8} + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{8} + \frac{\sqrt{2}}{2}$
et $\frac{\pi}{8} + \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$.

9 Produit scalaire et calcul vectoriel

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

3 **a)** $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DC}=DE\times DC\times\cos(\widehat{CDE})$

Le triangle AED est équilatéral donc $\widehat{ADE}=60°$ et $\widehat{CDE}=90-60=30°$.

$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DC}=4\times5\times\cos(30°)=20\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{3}$

b) ABCD est un rectangle donc $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DA}$.
D'où :

$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DE}=4\times4\times\cos(60°)=8$.

4 **a)** Le triangle ABC est isocèle en C, donc le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB) est I.

Les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BI}$ sont colinéaires et de même sens, d'où :

$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}=BI\times BA=2{,}5\times5=12{,}5$.

b) Le projeté orthogonal de A sur la droite (CI) est le point I, donc $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CI}=\overrightarrow{CI}\cdot\overrightarrow{CI}=CI^2$.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle ACI :

$AC^2=IA^2+IC^2$

c'est-à-dire $6^2=2{,}5^2+IC^2$

soit $IC^2=36-6{,}25=29{,}75$.

Donc $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CI}=29{,}75$.

7 **a)** H est le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB). $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires et de sens opposés, donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-AB\times AH$,

soit $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-4\times2=-8$.

b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC})$

D'où $-8=4\times5\times\cos(\widehat{BAC})$,

c'est-à-dire $\cos(\widehat{BAC})=\dfrac{-8}{20}=-\dfrac{2}{5}$.

Avec la calculatrice, on obtient $\widehat{BAC}\approx114°$.

8 $\overrightarrow{AB}(2\,;2)$ et $\overrightarrow{AC}(4\,;1)$

donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times4+2\times1=10$.
K est le projeté orthogonal de C sur (AB), et $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AK}$ sont de même sens, donc

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AK$.

Donc, $AK=\dfrac{10}{AB}=\dfrac{10}{\sqrt{8}}$ et $AK\approx3{,}5$.

11 $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{AF}=(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE})\cdot(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF})$,

$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{DF}$,

$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{AF}=-AD^2+\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AD}+AE\times DF$.

Les vecteurs $\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{DF}$ sont orthogonaux, ainsi que les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AD}$.

donc $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AD}=0$.

$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{AF}=-AD^2+AE\times DF=-4+1\times4=0$.
Donc les droites (DE) et (AF) sont perpendiculaires.

12 Dans le repère orthonormé $(A\,;\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AJ})$:

$A(0\,;0)$, $D(0,2)$, $K\left(\dfrac{4}{3}\,;0\right)$, $C(3\,;2)$

Donc $\overrightarrow{AC}(3\,;2)$ et $\overrightarrow{DK}\left(\dfrac{4}{3}\,;-2\right)$.
Ainsi,

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DK}=3\times\dfrac{4}{3}+2\times(-2)=4-4=0$ et les droites (AC) et (DK) sont perpendiculaires.

POUR SE TESTER

66 **1.** A **2.** C **3.** B **4.** B **5.** D

67 **1.** B, C, D **2.** B, C, D **3.** C, D **4.** A, B, D

68 **1. Faux.** En effet,

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=4\times4\times\cos(45°)=\dfrac{16\sqrt{2}}{2}=8\sqrt{2}$.

2. Vrai. En effet,

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB'}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{2}\times8\sqrt{2}=4\sqrt{2}$.

3. Vrai. En effet, $\widehat{ACB}=\dfrac{180°-45°}{2}=67{,}5$

$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}=CB\times CA\times\cos(\widehat{ACB})$,

$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}=CB\times4\times\cos(67{,}5°)$.

4. Vrai. En effet, $\|\overrightarrow{BC}\|^2=\overrightarrow{BC}^2=(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})^2$, donc

$BC^2=BA^2-2\times\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+AC^2$

$BC^2=32-2\times8\sqrt{2}=32-16\sqrt{2}$.

5. Vrai. En effet, ABC est isocèle en A, donc par projection orthogonale sur (BC) et comme $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CA'}$ sont colinéaires et de même sens :

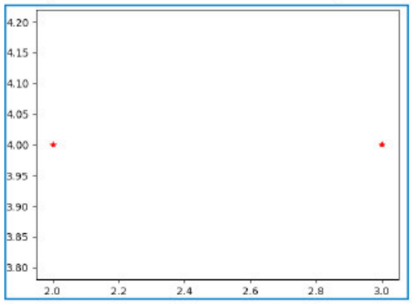
$$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}=CB\times CA'.$$

S'ENTRAÎNER

73

```
from pylab import *

for x in range(0,6):
    for y in range(0,6):
        if -x*(5-x)+y**2==10:
            plot(x,y,"r*")
show()
```



Deux points de coordonnées (2 ; 4) et (3 ; 4) apparaissent quand on exécute le programme.

76 **a)** À l'aide du logiciel, on conjecture que lorsque *a* varie, (BE) et (CF) sont perpendiculaires.

b) $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{CF}=(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE})\cdot(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DF})$,

$\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{DF}$,

Les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux, ainsi que les vecteurs $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{DF}$.

donc $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{DF}=0$.

D'où $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{CF}=-a\times\dfrac{1}{3}a+\dfrac{1}{3}a\times a=0$.

Donc les droites (BE) et (CF) sont perpendiculaires.

81 **1.** Si $\vec{u}=\vec{0}$ alors $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=0$

et $\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}=0$,

d'où $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$.

De même pour $\vec{v}=\vec{0}$ ou $\vec{w}=\vec{0}$.

2. **a)** $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$ et $\vec{v}+\vec{w}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}$,

donc $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$.

b) Le projeté orthogonal de C sur (OA) est C′ et $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OC'}$ sont colinéaires et de même sens, d'où :

$\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=OA\times OC'$.

c) Le projeté orthogonal de B sur (OA) est B' et $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB'}$ sont colinéaires et de même sens, d'où :

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA \times OB'$

$\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{B'C'}$ sont colinéaires et de même sens, d'où par projection orthogonale sur (OA) :

$\vec{u} \cdot \vec{w} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC} = OA \times B'C'$.

Finalement,

$\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} = OA \times OB' + OA \times B'C'$.

d) B' appartient au segment $[OC']$ d'où $OC' = OB' + B'C'$. Donc,

$OA \times OC' = OA \times OB' + OA \times B'C'$,

c'est-à-dire $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$.

92 **a)** ABC est un triangle rectangle en A donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

D'où $(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}) \cdot (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}) = 0$, c'est-à-dire,

$AH^2 + \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC} = 0$.

Or, les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{HC}$ sont orthogonaux, ainsi que les vecteurs $\overrightarrow{HB}$ et $\overrightarrow{AH}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{AH} = 0$ et $\overrightarrow{HB}$ et $\overrightarrow{HC}$ sont colinéaires et de sens opposés,

donc $AH^2 - HB \times HC = 0$,

soit $AH^2 = BH \times CH$.

b) B' est le milieu de $[AC]$ et C' est le milieu de $[AB]$, donc $\overrightarrow{HB'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HC})$ et $\overrightarrow{HC'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB})$.

$\overrightarrow{HB'} \cdot \overrightarrow{HC'} = \frac{1}{4}(HA^2 + \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{HB})$

Or, $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{HA} = 0$ donc :

$\overrightarrow{HB'} \cdot \overrightarrow{HC'} = \frac{1}{4}(HA^2 - HC \times HB) = 0$,

d'après **a)**.

Donc les droites (HB) et (HC') sont perpendiculaires.

98 • D'après le théorème de Pythagore,

$AC^2 = 2^2 + 2^2 = 8$, donc $AC = 2\sqrt{2}$;

$AB^2 = 3^2 + 2^2 = 13$ donc $AB = \sqrt{13}$.

• [AB] et [BC] sont des diagonales de deux rectangles de mêmes dimensions, donc $AB = BC$ et le triangle ABC est isocèle en B.

• Donc, dans le plan (ABC), $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AC}$, où I est le projeté orthogonal de B sur (AC), c'est-à-dire le milieu de [AC].

Donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AI \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \sqrt{13} \times 2\sqrt{2} \times \cos(\widehat{BAC})$

D'où $\sqrt{13} \times 2\sqrt{2} \times \cos(\widehat{BAC}) = 4$, c'est-à-dire

$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{4}{2\sqrt{13}\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{26}}{26} = \frac{\sqrt{26}}{13}$

Avec la calculatrice, on obtient $\widehat{BAC} \approx 67°$.

101 **a)** « Si P, alors Q » est vraie. En effet, si $\vec{u} = 3\vec{v}$ alors $\|\vec{u}\| = \|3\vec{v}\| = 3\|\vec{v}\|$.

« Si Q, alors P » est fausse : on considère dans un repère, le contre-exemple : $\vec{u}(0\,;3)$ et $\vec{v}(1\,;0)$.

Comme l'implication précédente est fausse, il ne peut pas y avoir équivalence entre P et Q.

b) « Si P, alors Q » est vraie. En effet, si $\vec{u} + \vec{v} = \vec{0}$ alors $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = 0$, soit $\vec{u}^2 - \vec{v}^2 = 0$.

« Si Q, alors P » est fausse. On peut considérer le contre-exemple : $\vec{v} = \vec{u}$ avec $\vec{u} \neq \vec{0}$.

Comme l'implication précédente est fausse, il ne peut pas y avoir équivalence entre P et Q.

10 Applications du produit scalaire

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

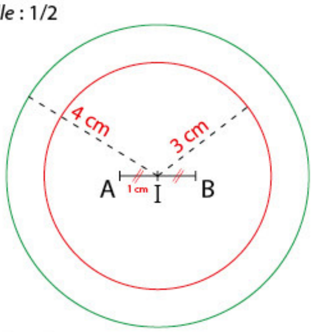
3 **a)** $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=8$

équivaut à $MI^2-\frac{1}{4}AB^2=8$

c'est-à-dire $MI^2-\frac{1}{4}\times4=8$ soit $MI^2=9$.

Ainsi, $MI=3$ et $\mathscr{C}$ est le cercle de centre I et rayon 3 cm.

Échelle : 1/2



b) $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=15$

équivaut à $MI^2-\frac{1}{4}AB^2=15$

c'est-à-dire $MI^2-\frac{1}{4}\times4=15$ soit $MI^2=16$.

Ainsi, $MI=4$ et $\mathscr{C}$ est le cercle de centre I et rayon 4 cm.

4 **a)**

$AB^2+AC^2=(\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{KB})^2+(\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{KC})^2$

$AB^2+AC^2=2\overrightarrow{AK}^2+2\overrightarrow{AK}\cdot(\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC})+\overrightarrow{KB}^2+\overrightarrow{KC}^2$

Or, $\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}=\vec{0}$ et $KB=KC=\frac{1}{2}BC$, donc :

$AB^2+AC^2=2\overrightarrow{AK}^2+2\times\left(\frac{1}{2}BC\right)^2$

$AB^2+AC^2=2AK^2+\frac{1}{2}BC^2$.

b) $2{,}5^2+4^2=2AK^2+\frac{1}{2}\times6^2$

c'est-à-dire $2AK^2=4{,}25$ soit $AK^2=2{,}125$.

Ainsi, $AK=\sqrt{2{,}125}$ soit $AK\approx1{,}5$ cm.

7 **a)** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=AB\times AD\times\cos(120°)$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=6\times5\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-15$

b) • D'après la formule d'Al-Kashi appliquée au triangle ABD :

$BD^2=AB^2+AD^2-2\times AB\times AD\times\cos(120°)$

$BD^2=36+25+30=91$

Donc $BD=\sqrt{91}$.

• $\widehat{ABC}=180°-\widehat{BAD}=180°-120°=60°$

D'après la formule d'Al-Kashi appliquée au triangle ABC :

$AC^2=BA^2+BC^2-2\times BA\times BC\times\cos(60°)$

$AC^2=36+25-2\times6\times5\times\frac{1}{2}$

$AC^2=36+25-30=31$

Donc $AC=\sqrt{31}$.

9 D'après la formule d'Al-Kashi appliquée au triangle ABC :

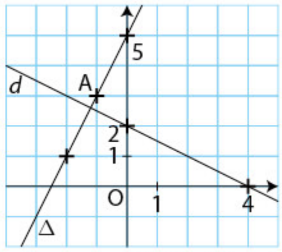
$BC^2=AB^2+AC^2-2\times AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC})$

$25=16+36-2\times4\times6\times\cos(\widehat{BAC})$

$\cos(\widehat{BAC})=\frac{16+36-25}{2\times4\times6}=\frac{27}{48}=\frac{9}{16}$.

Avec la calculatrice, on obtient $\widehat{BAC}\approx56°$.

13 **a)**



b) Un vecteur normal $\vec{n}$ à la droite Δ est un vecteur directeur de la droite *d*.

Donc, par exemple $\vec{n}(-2\,;\,1)$.

Δ a une équation cartésienne de la forme :

$$-2x+y+c=0$$

Or, A appartient à Δ

donc $-2\times(-1)+3+c=0$ soit $c=-5$.

Une équation cartésienne de Δ est :

$$-2x+y-5=0$$

14 Méthode de la complétion du carré :

• $x^2+2x=(x+1)^2-1^2=(x+1)^2-1$

• $y^2-2y=(y-1)^2-1^2=(y-1)^2-1$

Un point $M(x\,;\,y)$ appartient à $\mathscr{F}$ si, et seulement si $(x+1)^2-1+(y-1)^2-1=4$ c'est-à-dire $(x+1)^2+(y-1)^2=6$.

Donc $\mathscr{F}$ est le cercle de centre $A(-1\,;\,1)$ et de rayon $\sqrt{6}$.

POUR SE TESTER

80 **1.** C **2.** B **3.** A **4.** D

81 **1.** A, B **2.** D **3.** A, D

82 **1. Vrai.** En effet, d'après la formule d'Al-Kashi dans le triangle ABC,

$BC^2=AB^2+AC^2-2\times AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC})$

$20^2=10^2+12^2-2\times10\times12\times\cos(\widehat{BAC})$

Ainsi, $\cos(\widehat{BAC})=\frac{10^2+12^2-20^2}{2\times10\times12}=-\frac{13}{20}$

Avec la calculatrice, on obtient $\widehat{BAC}\approx131°$.

2. Faux. En effet, l'équation de $\mathscr{C}_1$ s'écrit $(x-2)^2+(y+1)^2=11$ et donc le centre de $\mathscr{C}_1$ est le point $A(2\,;\,-1)$.

3. Vrai. En effet, on note H le projeté orthogonal de O sur la droite *d*.

H a des coordonnées de la forme $(x\,;\,-x+\sqrt{2})$.

$OH^2=x^2+(-x+\sqrt{2})^2=2x^2-2\sqrt{2}x+2$

OH^2 est minimum c'est-à-dire OH est minimum lorsque $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ (c'est l'abscisse du sommet de la parabole d'équation $y=2x^2-2\sqrt{2}x+2$).

Donc H, projeté orthogonal de O sur *d*, a pour coordonnées $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,;\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

$OH^2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$ et $OH=1$, donc H appartient au cercle de centre O et de rayon 1.

Donc la droite *d* est tangente au cercle $\mathscr{C}$ en $H\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,;\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

S'ENTRAÎNER

87 Voici la partie de l'algorithme concernée par les adaptations.

```
Si p = 0 alors
  a ← (xA + xB)/2
  b ← (yA + yB)/2
  Afficher "Γ est réduit au point I(a ; b) "
  sinon
  Afficher "Γ est le cercle de centre I(a ; b)
  et de rayon √p "
Fin Si
```

90 **a)** $OM^2+R^2=(OM+R)(OM-R)$

$OM+R>0$ donc OM^2-R^2, c'est-à-dire $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$, est du signe de $OM-R$.

b) 1^er^ cas : M est à l'extérieur du disque de frontière $\mathscr{C}$: $OM>0$ et $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}>0$.

2^e^ cas : M appartient au cercle $\mathscr{C}$: $OM=R$ et $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$.

3^e^ cas : M appartient au disque de frontière $\mathscr{C}$ (exclue) : $OM<R$ et $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}<0$.

94 Le cercle $\mathscr{C}'$ a pour centre $B(2\,;-2)$ et pour rayon 3.

$$AB=\sqrt{(2-1)^2+(-2+1)^2}=\sqrt{2}$$

et $R+R'=2+3=5$.

Or, $AB < R + R'$ donc les cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ n'ont pas de point d'intersection (mais coupent tous les deux le segment $[AB]$).

101 **a)** $\overrightarrow{AM}^2 = 4$ équivaut à $AM^2 = 4$ c'est-à-dire $AM = 2$. Donc l'ensemble cherché est le cercle $\mathscr{C}$ de centre A et rayon 2 cm.

b) $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ signifie que les vecteurs $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux. Donc l'ensemble cherché est la droite d perpendiculaire à la droite (BC) en B, c'est donc la droite (AB).

c) $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CD} = 2$ équivaut à $\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{CD} = 2$ où H est le projeté orthogonal de M sur la droite (CD).

$2 > 0$ donc les vecteurs colinéaires $\overrightarrow{CH}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont de même sens et $\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{CD} = 2$ équivaut à $CH \times CD = 2$

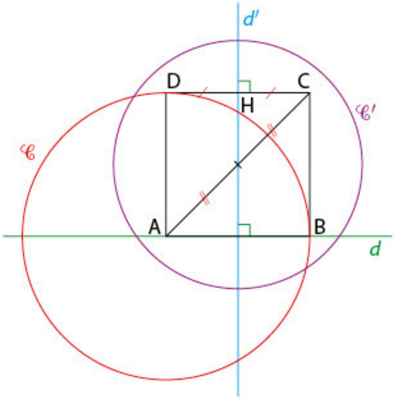
c'est-à-dire $CH = \dfrac{2}{CD} = 1$.

Donc l'ensemble cherché est la droite d' perpendiculaire à la droite (CD) en H milieu de $[CD]$.

d) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = 1$ équivaut à $MI^2 - \dfrac{1}{4}AC^2 = 1$,

où I est le milieu de $[AC]$, c'est-à-dire à $MI^2 - \dfrac{1}{4}(2\sqrt{2})^2 = 1$ soit $MI^2 = 3$.

Ainsi $MI = \sqrt{3}$ et l'ensemble cherché est le cercle $\mathscr{C}'$ de centre I et de rayon $\sqrt{3}$.



107 On note $(x\,;y)$ les coordonnées de M.

$\overrightarrow{AM}(x+1\,;y-1)$ $\quad$ $\overrightarrow{AB}(4\,;-2)$

$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ équivaut à

$$4(x+1) - 2(y-1) = 0$$

c'est-à-dire $4x - 2y + 6 = 0$

soit $2x - y + 3 = 0$.

L'ensemble cherché est donc une droite (c'est la perpendiculaire en A à la droite (AB)).

116 **a)** • $x^2 + y^2 - 8x + 6y = -15$ équivaut à $(x-4)^2 + (y+3)^2 - 16 - 9 = -15$ c'est-à-dire $(x-4)^2 + (y+3)^2 = 10$.

C'est donc le cercle de centre $A(4\,;-3)$ et de rayon $\sqrt{10}$.

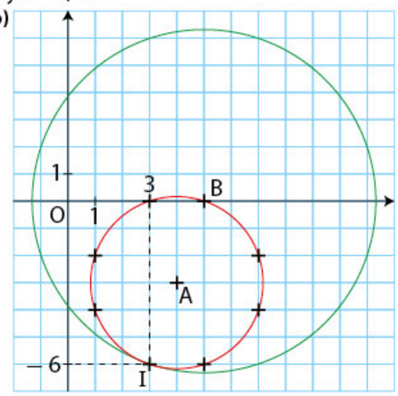
• $x^2 + y^2 - 10x = 15$ équivaut à

$$(x-5)^2 + y^2 - 25 = 15$$

c'est-à-dire $(x-5)^2 + y^2 = 40$.

C'est donc le cercle de centre $B(5\,;0)$ et de rayon $2\sqrt{10}$.

b)



Il semble que ces cercles sont tangents intérieurement en $I(3\,;-6)$.

Le centre B du cercle vert appartient au cercle rouge :

$$5^2 + 0^2 - 8 \times 5 + 6 \times 0 = -15.$$

Le rayon du cercle vert $(2\sqrt{10})$ est égal au diamètre du cercle rouge.

Donc ces deux cercles se coupent en un seul point, le point diamétralement opposé à B sur le cercle rouge, à savoir le point $I(3\,;-6)$.

Remarque : on peut aussi résoudre le système

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 8x + 6y = -15 \\ x^2 + y^2 = 10x + 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10x + 15 \\ 10x + 15 - 8x + 6y = -15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10x - 15 \\ x + 3y = -15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (-3y-15)^2 + y^2 = 10(-3y-15) - 5 \\ x = -3y - 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 + 12y + 36 = 0 \\ x = -3y - 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (y+6)^2 = 0 \\ x = -3y - 15 \end{cases}$$

Sa solution est le couple $(3\,;-6)$.

118 Un vecteur normal à d est $\vec{n}(m\,;-1)$.

Un vecteur normal à d' est $\vec{n}'(m'\,;-1)$.

d et d' sont perpendiculaires si, et seulement si, $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont orthogonaux c'est-à-dire $\vec{n} \cdot \vec{n}' = 0$.

Ainsi, d et d' perpendiculaires équivaut à $mm' + (-1) \times (-1) = 0$

c'est-à-dire $mm' = -1$.

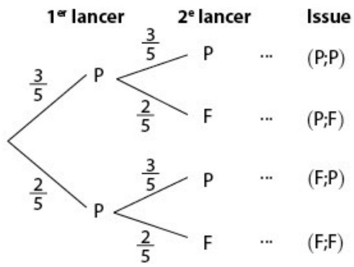
11 Probabilités conditionnelles et indépendance

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

3 « L'employé choisi est en C.D.D. et a plus de 30 ans » est l'événement $D \cap \bar{J}$.
Sa probabilité est :
$P(D \cap \bar{J}) = P(D) \times P_D(\bar{J}) = 0{,}2 \times 0{,}4 = 0{,}08.$

4 Deux boules de l'urne portent un numéro impair (3 et 5), donc $P(B) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$.
Cinq boules de l'urne portent un numéro inférieur ou égal à 5 (2, 2, 3, 4 et 5), donc $P(C) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$.
L'événement $B \cap C$ est réalisé par le tirage d'une boule portant un numéro impair et inférieur ou égal à 5 (boules 3 et 5), donc $P(B \cap C) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$.
Or, $P(B) \times P(C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{10}$.
Ainsi, $P(B \cap C) \neq P(B) \times P(C)$ donc les événements B et C ne sont pas indépendants.

7 **a)** On note P l'événement : « La pièce est tombée sur Pile » et F l'événement « La pièce est tombée sur Face ».



b) La probabilité p d'obtenir les deux côtés de la pièce est :
$$p = P(P\,;F) + P(F\,;P) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{5}$$
$$p = \frac{12}{25} = 0{,}48$$

8 Les événements L et $\bar{L}$ forment une partition de l'univers, donc, d'après la formule des probabilités totales :
$P(G) = P(L) \times P_L(G) + P(\bar{L}) \times P_{\bar{L}}(G)$
$P(G) = 0{,}4 \times 0{,}12 + 0{,}6 \times 0{,}15$
$P(G) = 0{,}138$
On en déduit que :
$$P_G(L) = \frac{P(L \cap G)}{P(G)} = \frac{P(L) \times P_L(G)}{P(G)}$$
$$P_G(L) = \frac{0{,}4 \times 0{,}12}{0{,}138} = \frac{4 \times 12}{138} = \frac{8}{23}$$

POUR SE TESTER

51 **1.** D **2.** C **3.** A **4.** D.

52 **1.** A, B, C, D **2.** A, B, C **3.** A, B, D

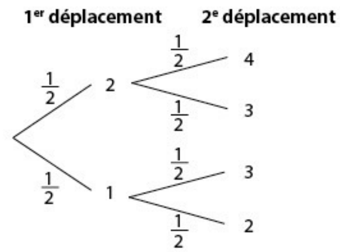
53 **1. Vrai.** En effet, $P(A) + P(B) + P(C) = 1$ donc
$P(B) = 1 - P(A) - P(C) = 1 - 0{,}3 - 0{,}4 = 0{,}3$.
2. Faux. En effet,
$P_C(D) = 1 - P_C(\bar{D}) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$.
3. Vrai. En effet, $P(B) = 0{,}3$
et $P_B(D) = 1 - P_B(\bar{D}) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$
Donc, $P(B \cap D) = 0{,}3 \times 0{,}8 = 0{,}24$
4. Vrai. En effet,
$P(D) = 0{,}3 \times 0{,}7 + 0{,}3 \times 0{,}8 + 0{,}4 \times 0{,}5 = 0{,}65.$
5. Faux. En effet,
$P(\bar{D}) = 1 - P(D) = 1 - 0{,}65 = 0{,}35$.
6. Vrai. En effet,
$$P_D(A) = \frac{P(D \cap A)}{P(D)} = \frac{0{,}3 \times 0{,}7}{0{,}65} = \frac{21}{65}.$$
7. Vrai. En effet,
$$P_{\bar{D}}(B) = \frac{P(\bar{D} \cap B)}{P(\bar{D})} = \frac{0{,}3 \times 0{,}2}{0{,}35} = \frac{6}{35}.$$
8. Faux. En effet, $P(D \cap A) = 0{,}21$
et $P(D) \times P(A) = 0{,}65 \times 0{,}3 = 0{,}195$
donc $P(D \cap A) \neq P(D) \times P(A)$.

S'ENTRAÎNER

58 **a)**

```
p ← 0
Pour i allant de 1 à 2
    a ← un nombre aléatoire de [0 ; 1[
    Si a < 0,5 alors
        p ← p + 2
    sinon
        p ← p + 1
    Fin Si
Fin Pour
```

b) L'arbre pondéré par les probabilités ci-dessous indique les numéros des cases où le lapin peut se situer après chaque déplacement. La probabilité que le lapin termine son parcours sur la case numéro 3 est donc, d'après la formule des probabilités totales : $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

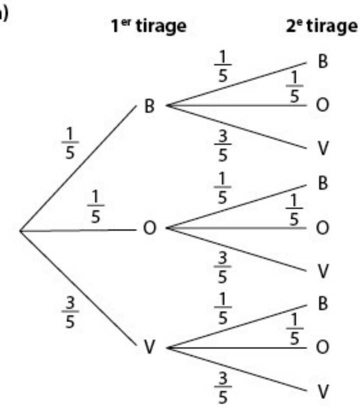


61 Dans la cellule G2, on saisit la formule = NB.SI(E2 : E1001;1) / 1000
La probabilité de gagner une partie est estimée, grâce au tableur, à environ 0,678 (on se rapproche de la probabilité obtenue par le calcul).

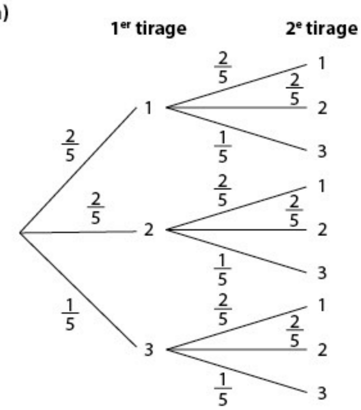
66 **a)** $P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A) = P_B(A) \times P(B)$
b) A et $\bar{A}$ forment une partition de l'univers donc d'après la formule des probabilités totales :
$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$$
c) D'après le **a)** :
$$P_B(A) = \frac{P_A(B) \times P(A)}{P(B)}$$
$$P_B(A) = \frac{P_A(B) \times P(A)}{P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)}$$
$$P_B(A) = \frac{P_A(B) \times P(A)}{P_A(B) \times P(A) + P_{\bar{A}}(B) \times P(\bar{A})}$$

73 On note A l'événement : « Le voyageur a choisi le train de 7 h 27 » et R l'événement : « Le voyageur arrive en retard ». D'après la formule des probabilités totales :
$P(R) = P(A \cap R) + P(\bar{A} \cap R)$
$P(\bar{A} \cap R) = P(R) - P(A \cap R)$
$P(\bar{A} \cap R) = 0{,}06 - 0{,}8 \times 0{,}05$
$P(\bar{A} \cap R) = 0{,}02$
$P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(R) = 0{,}02$
$P_{\bar{A}}(R) = 0{,}1$

77 **Situation 1**
a)



b) • $P(A) = P(B \cap V) + P(O \cap V) + P(V)$
$$P(A) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{5} + \frac{3}{5}$$
$P(A) = 0{,}84$
La probabilité qu'au moins l'une des boules tirées soit verte est égale à 0,84.
• $P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - P(0\,;0)$
$$P(B) = 1 - \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = 0{,}96$$
La probabilité que les deux boules tirées ne soient pas orange est égale à 0,96.
Situation 2
a)



b) • $P(C) = P(1\,;1) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = 0{,}16$
• $P(D) = 1 - P(\bar{D})$
$P(D) = 1 - (P(1\,;2) + P(2\,;1))$
$$P(D) = 1 - \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} - \frac{2}{5} \times \frac{2}{5}$$
$P(D) = 0{,}68$

79 **a) Pour tout** événement A, **on a** $P_A(A) = 1$.
b) Il existe un événement C **tel que** $P(A) + P(C) = 1$.
c) Pour tous événements A et B, **on a :**
$$P_A(B) \times P(A) = P_B(A) \times P(B)$$

12 Variables aléatoires

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

3 Le dé est équilibré donc on modélise cette expérience aléatoire par une loi équirépartie.
Les valeurs prises par X sont 0, 2, 10 et 20.
Voici la loi de probabilité de X :

a	0	2	10	20
$P(X = a)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

5 On utilise la loi de probabilité de X, qui a été déterminée à l'exercice 3.

a) $P(X < 10) = P(X = 0) + P(X = 2)$

donc $P(X < 10) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$.

b)
$P(X \geqslant 2) = P(X = 2) + P(X = 10) + P(X = 20)$

donc $P(X \geqslant 2) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

c) $P(X > 5) = P(X = 10) + P(X = 20)$

donc $P(X > 5) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.

d)
$P(X \leqslant 10) = P(X = 0) + P(X = 2) + P(X = 10)$

donc $P(X \leqslant 10) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$.

9 On peut représenter la situation par un arbre :

On peut alors établir la loi de probabilité de X :

a	6	7	11	12
$P(X = a)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

L'espérance de X est donc :

$$E(X) = \frac{1}{4} \times 6 + \frac{1}{4} \times 7 + \frac{1}{4} \times 11 + \frac{1}{4} \times 12$$

$$E(X) = \frac{36}{4} = 9.$$

10 **a)** L'espérance de X est :

$$E(X) = 0{,}2 \times 10 + 0{,}3 \times 20 + 0{,}4 \times 40 + 0{,}1 \times 50 = 29.$$

b) Pour calculer la variance de X, on complète le tableau ci-dessous.

a	10	20	40	50
$a - 29$	-19	-9	11	21
$(a - 29)^2$	361	81	121	441
$P(X = a)$	0,2	0,3	0,4	0,1

La variance de X est donc :

$$V(X) = 0{,}2 \times 361 + 0{,}3 \times 81 + 0{,}4 \times 121 + 0{,}1 \times 441 = 189.$$

L'écart-type de X est donc $\sigma(X) = \sqrt{189}$, soit $\sigma(X) \approx 13{,}7$.

c) On vérifie ces résultats à l'aide de la calculatrice.

```
1 variable
x̄     =29
Σx    =29
Σx²   =1030
σx    =13.747727
sx    =
n     =1
```

POUR SE TESTER

50 **1.** B **2.** C **3.** C **4.** A **5.** B

51 **1.** C, D **2.** C **3.** B, D **4.** A, B.

52 **1. Faux.** En effet, les secteurs ne sont pas superposables, donc les probabilités des événements $\{X = 10\}$, $\{X = 20\}$ et $\{X = 30\}$ ne sont pas égales.

2. Vrai. En effet, voici la loi de probabilité de X :

a	10	20	30
$P(X = a)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

Ainsi,

$$P(X = 10) + P(X = 20) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

$P(X = 10) + P(X = 20) = P(X = 30)$.

3. Faux. En effet,

$$E(X) = \frac{1}{6} \times 10 + \frac{1}{3} \times 20 + \frac{1}{2} \times 30 = \frac{70}{3}.$$

4. Vrai. En effet, on vérifie à la calculatrice que $V(X) = \frac{500}{9}$ soit $V(X) \approx 55{,}56$.

5. Vrai. En effet, $V(X) = \frac{500}{9}$

et donc $\sigma(X) = \sqrt{\frac{500}{9}} = \frac{\sqrt{500}}{\sqrt{9}} = \frac{10}{3}\sqrt{5}$.

S'ENTRAÎNER

58 **a)** La première partie de l'algorithme permet de calculer l'espérance : $E(X) = 15{,}5$.
Voici le suivi des valeurs lors de l'exécution de l'algorithme à partir de l'instruction $V \leftarrow 0$.
On a arrondi les valeurs décimales au centième.

n	4	4	4	4	4
i		0	1	2	3
$A[i]$		5	10	25	50
$A[i] - E$		$-10{,}5$	$-5{,}5$	9,5	34,5
$(A[i] - E)^2$		110,25	30,25	90,25	1190,25
$P[i]$		0,3	0,4	0,2	0,1
$(A[i] - E)^2 \times P[i]$		33,08	12,10	18,05	119,03
V	0	33,08	45,18	63,23	182,25

La valeur obtenue à la fin de l'algorithme est 182,25.

b) La valeur V obtenue à la fin de l'algorithme est la variance de la variable aléatoire X.

c) On ajoute à la fin de l'algorithme l'instruction $s \leftarrow \sqrt{V}$.

61 Voici la feuille de calcul adaptée :

a	P(X=a)	a*P(X=a)	a-E(X)	(a-E(X))^2	(a-E(X))^2*P(X=a)
0	0,817991	0	-0,6655	0,44287428	0,362267173653
1	0,068766	0,06877	0,33451	0,11189828	0,007694796995
2	0,073351	0,1467	1,33451	1,78092228	0,130632430024
6	0,02445	0,1467	5,33451	28,4570183	0,695774096901
10	0,011003	0,11003	9,33451	87,1331143	0,958725656402
30	0,003668	0,11004	29,3345	860,513594	3,156363863812
50	0,000572	0,0286	49,3345	2433,89407	1,392187410487
150	0,000191	0,02865	149,335	22300,7965	4,259452126587
1 000	0,000006	0,006	999,335	998669,467	5,992016801246
10 000	0,000002	0,02	9999,33	99986690,7	199,9733813657
E(X)	0,665488				
V(X)	216,9285				
σ(X)	14,728493				

64 **a)** Par définition de l'espérance et d'après les propriétés de la notation Σ démontrées à l'exercice **63**, $E(X) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} a_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i$

et

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} (a_i - E(X))^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (a_i - E(X))^2.$$

b) $(a_i - E(X))^2 = a_i^2 - 2a_i E(X) + E(X)^2$

c) $V(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (a_i^2 - 2a_i E(X) + E(X)^2)$

$$V(X) = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 - \sum_{i=1}^{n} 2a_i E(X) + \sum_{i=1}^{n} E(X)^2 \right)$$

$$V(X) = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 - 2E(X) \sum_{i=1}^{n} a_i + nE(X)^2 \right)$$

$$V(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i^2 - \frac{2E(X)}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i + E(X)^2$$

d) $\frac{2E(X)}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i = 2E(X) \times \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i$

or on sait que $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i = E(X)$

donc $\frac{2E(X)}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i = 2E(X)^2$. Par conséquent,

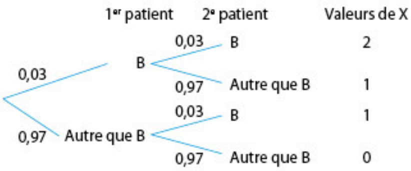
$$V(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i^2 - 2E(X)^2 + E(X)^2$$

et donc $V(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i^2 - E(X)^2$.

e) Avec la formule du cours, on doit effectuer n soustractions, alors qu'avec la formule de König-Huygens, on n'en effectue qu'une.

73 **1.** On note b le pourcentage de donneurs du groupe B et c le pourcentage de donneurs du groupe AB. Alors, d'après l'énoncé, $43 + 45 + b + c = 100$ et $b = 3c$.
Par conséquent, $88 + 4c = 100$, c'est-à-dire $4c = 12$ et donc $c = 3$. Il y a donc 3 % de donneurs du type AB et 9 % de donneurs du type B.

2. a) On peut représenter la situation par un arbre.



On calcule, par exemple
$P(X = 2) = 0{,}03 \times 0{,}03 = 0{,}000\,9$.
On obtient ainsi la loi de probabilité de X :

a	0	1	2
$P(X = a)$	0,000 9	0,058 2	0,940 9

b) $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0)$
$P(X \geqslant 1) = 1 - 0{,}000\,9 = 0{,}999\,1$
Ainsi, il y a 99,91 % de chances que l'infirmière prélève au moins un donneur du groupe B.

84 **1. a)** À la calculatrice, on obtient
$E(X) = 1{,}4$ et $V(X) = 0{,}24$.
b) Voici la loi de probabilité de X^2 :

a	1	4
$P(X^2 = a)$	0,6	0,4

c) $E(X^2) = 0{,}6 \times 1 + 0{,}4 \times 4 = 0{,}6 + 1{,}6 = 2{,}2$
d) $E(X^2) - E(X)^2 = 2{,}2 - 1{,}4^2 = 0{,}24$
On retrouve la valeur de $V(X)$.
2. a) Voici la loi de probabilité de X :

a	1	2	5	10
$P(X = a)$	0,1	0,2	0,3	0,4

L'espérance de X est :
$E(X) = 0{,}1 \times 1 + 0{,}2 \times 2 + 0{,}3 \times 5 + 0{,}4 \times 10$
$E(X) = 6$.

b) Voici la loi de probabilité de X^2 :

a	1	4	25	100
$P(X^2 = a)$	0,1	0,2	0,3	0,4

L'espérance de X^2 est :
$E(X^2) = 0{,}1 \times 1 + 0{,}2 \times 4 + 0{,}3 \times 25 + 0{,}4 \times 100$
$E(X^2) = 48{,}4$.
En utilisant la formule de la question **1. d)**, on trouve :
$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 48{,}4 - 6^2 = 12{,}4$.

86 **1. a)** $\{X < 1\}$ **b)** $\{X > 3\}$
c) $\{X \geqslant 1\}$ **d)** $\{X < 3\}$
2. a) « Il pleuvra au moins un jour le mois prochain. »
b) « Au moins un des élèves ne réussira pas l'examen du code de la route avant d'avoir 18 ans. »

13 Simulation d'échantillons

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

2 **1. a)** $P(X=1)=\frac{1}{10}$ et $P(X=-1)=\frac{9}{10}$.

b) $E(X)=1\times\frac{1}{10}+(-1)\times\frac{9}{10}=-0{,}8$.

2. a) Voici les fonctions X et Moyenne écrites dans le langage Python.

```
from random import *

def X():
    a=randint(1,10)
    if a==10:
        x=1
    else:
        x=-1
    return x

def Moyenne(n):
    somme=0
    for i in range(n):
        somme=somme+X()
    m=somme/n
    return m
```

b) On saisit et on teste ces fonctions.

3. a) Voici ce programme :

```

Nbr=int(input("Taille de l'échantillon :"))
e=-0.8
d=abs(Moyenne(Nbr)-e)
print("Distance=",d)
```

b) Lorsque la taille de l'échantillon augmente, on observe que la distance tend à se réduire.

5 **1. a)** $P(X=-6)=P(X=-3)$

$$=P(X=0)=P(X=3)=P(X=6)=\frac{1}{5}.$$

b) $E(X)=((-6)+(-3)+0+3+6)\times\frac{1}{5}=0$ et

$$V(X)=((-6)^2+(-3)^2+0^2+3^2+6^2)\times\frac{1}{5}$$

$V(X)=18$

Donc $\mu=0$ et $\sigma=3\sqrt{2}$.

Le programme devient :

```
from math import *
from random import *

def Distance(n):
    somme=0
    for k in range(n):
        a=randint(-2,2)
        x=3*a
        somme=somme+x
    m=somme/n
    d=abs(m)
    return d

def Répétition(N,n):
    s=sqrt(18)
    r=0
    for j in range(N):
        if Distance(n)<=2*s/sqrt(n):
            r=r+1
    p=r/n
    return p
```

2. La fonction Distance renvoie pour résultat l'écart entre la moyenne m de l'échantillon et l'espérance $\mu=0$ de la variable aléatoire X.

3. La fonction Répétition renvoie la proportion d'échantillons tels que l'écart entre m et μ soit inférieur ou égal à $\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$.

4. a) On saisit et on teste ces fonctions.

b) On obtient des proportions proches de 95 %.

Pour environ 95 % des échantillons, on a $|m-\mu|\leqslant\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$.

POUR SE TESTER

17 **1.** C **2.** B **3.** C

18 **1.** A, B, C, D **2.** A, D

19 **1. Faux.** En effet, dans la boucle l'affectation $s=X()$ ne convient pas.

On devrait écrire $s=s+X()$.

2. Vrai. En effet, la moyenne d'un échantillon de taille n assez grande est proche de l'espérance de X.

S'ENTRAÎNER

24 **1.**

```
from random import *

def Rang():
    a=randint(1,25)
    x=1
    while a<=15:
        a=randint(1,25)
        x=x+1
    return x

def Moyenne(n):
    somme=0
    for k in range(n):
        somme=somme+Rang()
    m=somme/n
    return m
```

2. a) On saisit et on teste ces fonctions.

b) On exécute plusieurs fois Moyenne(10000) et on propose alors 25 pour estimation de E(X).

27 **1.** $P(X=1)=0{,}7$ et $P(X=0)=0{,}3$.

$E(X)=0{,}3\times0+0{,}7\times1=0{,}7$

et

$V(X)=0{,}3\times(0-0{,}7)^2+0{,}7\times(1-0{,}7)^2$

$V(X)=0{,}21$

donc $V(X)=\sqrt{0{,}21}$ soit $\sigma(X)\approx0{,}46$.

34 **1. a)**

```
from random import *

def Y():
    a=randint(1,10)
    b=randint(1,10)
    if a<=b:
        y=a
    else:
        y=b
    return y
```

b) On saisit et on teste cette fonction.

2. a)

```
def Moyenne(n):
    somme=0
    for k in range(n):
        somme=somme+Y()
    m=somme/n
    return m
```

b) On saisit et on teste cette fonction.

37 **1. a)**

```
from random import *

def Y():
    y=randint(1,6)
    for i in range(4):
        a=randint(1,6)
        if y<a:
            y=a
    return y
```

b) On saisit et on teste cette fonction.

2. On écrit une fonction Moyenne qui simule un échantillon de taille n de Y et renvoie la moyenne des n valeurs de Y obtenues.

```
def Moyenne(n):
    somme=0
    for k in range(n):
        somme=somme+Y()
    m=somme/n
    return m
```

On exécute Moyenne(n) avec de grandes valeurs de n afin d'obtenir une estimation e de l'espérance de Y.

3. a) Par exemple, avec $e=5{,}43$.

```
def Distance(n):
    e=5.43
    d=abs(Moyenne(n)-e)
    return d
```

b) On saisit et on teste cette fonction.

38 **a)** $a=1,\ b=5,\ c=7$

$a<b$ est vrai et $b<c$ est vrai, donc le booléen $a<b$ and $b<c$ est vraie.

Alors $X(1,5,7)$ renvoie 1.

b) $a=1,\ b=6,\ c=4$

$a<b$ est vrai, $b<c$ est faux donc $a<b$ and $b<c$ est faux.

Alors $X(1,6,4)$ renvoie 0.

c) $a=8,\ b=3,\ c=5$

$a<b$ est faux, $b<c$ est vrai donc $a<b$ and $b<c$ est faux.

Alors $X(8,3,5)$ renvoie 0.

d) $a=4,\ b=6,\ c=5$

$a<b$ est vrai, $b<c$ est faux donc $a<b$ or $b<c$ est vrai.

Alors $Y(4,6,5)$ renvoie 1.

e) $a=9,\ b=3,\ c=4$

$a<b$ est faux, $b<c$ est vrai, donc $a<b$ or $b<c$ est vrai.

Alors $Y(9,3,4)$ renvoie 1.

f) $a=9,\ b=4,\ c=2$

$a<b$ est faux, $b<c$ est faux, donc $a<b$, or $b<c$ est faux.

Alors $Y(9,4,2)$ renvoie 0.