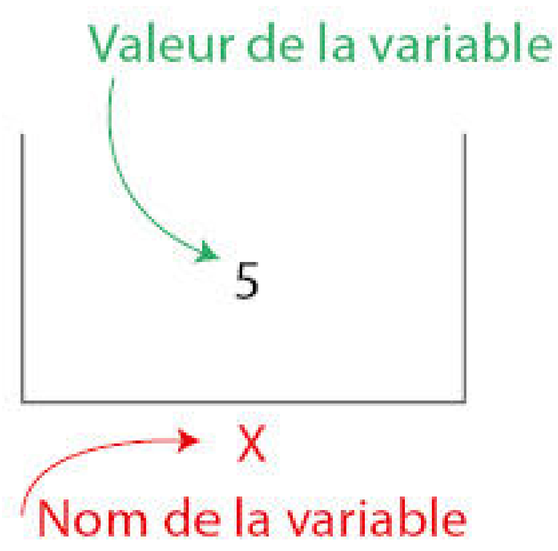
1 Les instructions d'entrée-sortie, l'affectation, les variables

A Notion de variable



Dans un programme, une variable est repérée par son nom et possède une valeur qui évolue au cours de l'exécution du programme.
On peut la schématiser par une boîte qui porte une étiquette et son contenu.

B Type d'une variable

Les langages de programmation distinguent différents types de variables.
Par exemple, une variable peut être de type :
- **nombre entier** ;
- **nombre flottant**, c'est-à-dire nombre à virgule ;
- **chaîne de caractères**, sa valeur est alors une suite ordonnée de caractères ;
- **liste**, c'est-à-dire une suite ordonnée d'objets du langage.
Par exemple : L = [1, 3, 5, 7, 9] ou M = ["a", "e", "i", "o", "u", "y"].
- **booléen**, elle n'a alors que deux valeurs possibles : True (Vrai) et False (Faux).
Par exemple $a < 5$ est un booléen qui a la valeur True si a est strictement inférieur à 5 ou False sinon.

Des opérateurs et des fonctions du langage permettent de travailler avec chaque type de variables.

C L'affectation

L'instruction d'affectation permet d'attribuer une valeur à une variable.

Algorithme	Programme Python
X ← 2	X=2

La variable X est affectée de la valeur 2.

D Les instructions d'entrée-sortie

Les instructions d'entrée-sortie permettent de saisir en entrée et d'afficher en sortie les valeurs des variables.

Algorithme	Programme Python
Saisir X	X=float(input())
Afficher X	print(X)

Ces instructions permettent aussi d'afficher un message, par exemple :
- n=int(input("Nombre d'essais:")) ;
- print("Surface=",S).

INFO
Dans le langage Python, l'instruction d'entrée précise le type de la variable : int (nombre entier), float (nombre à virgule) ou chaîne de caractères lorsque rien n'est précisé.

2 Notion de fonction

A Fonction en programmation

Les langages de programmation donnent la possibilité de définir des fonctions.
Une fonction réalise un traitement et renvoie un résultat, elle peut être appelée à plusieurs reprises par un programme.

Programme Python

```
def f(x,y):
    ...
    return z
```

paramètres : x et y

Une fonction peut admettre aucun, un ou plusieurs paramètres.

B Paramètres

Lors d'un appel à la fonction, des valeurs particulières (arguments) sont données aux paramètres de la fonction.

C Intérêt des fonctions

Programmer des fonctions facilite l'écriture des programmes, permet de les structurer et les rend plus lisibles.

Exemple 1

Écrire une fonction qui renvoie l'aire d'un triangle

- On connaît la longueur *c* d'un côté d'un triangle, la hauteur *h* relative à ce côté et on calcule son aire.
- La fonction **Triangle** a pour paramètres la longueur *c* et la hauteur *h*.
Elle renvoie pour résultat l'aire S du triangle.
- Voici le codage de cette fonction en langage Python.

Programme Python

```
1 def Triangle(c,h):
2     S=c*h/2
3     return S
```

- Par exemple, dans la console, on effectue un appel à la fonction **Triangle** lorsque *c* a pour valeur 7 et *b* a pour valeur 9.
Ainsi, un triangle dont la longueur d'un côté est 7 et la hauteur relative à ce côté est 9 a une aire égale à 31,5.

```
>>> Triangle(7,9)
31.5
```

Remarque : on peut également écrire un programme qui fait appel à cette fonction.

Programme Python

```
4
5 côté=float(input("Côté ="))
6 hauteur=float(input("Hauteur ="))
7 aire=Triangle(côté,hauteur)
8 print("Aire =",aire)
```

Sur la ligne 7, le programme fait appel à la fonction **Triangle** avec les arguments côté et hauteur.

3 Les instructions conditionnelles

A Condition

Une **condition** est un énoncé qui peut être vrai ou faux.
Par exemple, $a = b$, $x \geqslant 0$, n est pair sont des conditions vraies ou fausses suivant les valeurs des variables a, b, x et n.

B Traitements conditionnels

Dans un programme, on peut tester une condition et, selon que celle-ci est vraie ou fausse, effectuer un traitement ou un autre.
On parle alors de **traitements conditionnels**.

Algorithme	Programme Python

Si condition alors
  Traitement 1
  sinon
  Traitement 2
Fin Si
	if X==2:
	    …
	else:
	    …

Ici, la condition X==2 est vraie lorsque X est égal à 2 et fausse sinon.

C Une situation particulière

Dans un test, on peut ne pas effectuer de traitement dans le cas où la condition est fausse. Dans cette situation, on omet « sinon ».

Algorithme	Programme Python

Si condition alors
  Traitement
Fin Si
	if X==2:
	    …

Exemple 2

- n désigne un entier naturel.
- Voici un algorithme qui teste si ce nombre est divisible par 11.
- L'algorithme est codé par une fonction **Divise** écrite en langage Python.

Algorithme	Programme Python

Si n est divisible par 11 alors
  C ⟵ "Ce nombre est divisible par 11"
  sinon
  C ⟵ "Ce nombre n'est pas divisible par 11"
Fin Si
	see code below

```python
def Divise(n):
    if n%11==0:
        C="Ce nombre est divisible par 11"
    else:
        C="Ce nombre n'est pas divisible par 11"
    return C
```

- On exécute la fonction **Divise** avec $n = 86\,834$.
On obtient dans la console :

```
>>> Divise(86834)
'Ce nombre est divisible par 11'
```

INFO
La condition n%11==0 peut aussi être considérée comme une variable B de type booléen. B prend la valeur True lorsque n est divisible par 11 et la valeur False sinon.

Exemple 3

Programmer une fonction définie par intervalles

- f est la fonction qui, à tout nombre réel x, associe le nombre réel $f(x)$ défini par :

$$\begin{cases} f(x) = 1 + \sqrt{x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ f(x) = (x-1)^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- Voici un algorithme qui détermine le nombre réel y image de x par la fonction f.
- L'algorithme est codé par une fonction **F** écrite en langage Python.

Algorithme

Si $x \geqslant 0$ alors
  $y \leftarrow 1 + \sqrt{x}$
sinon
  $y \leftarrow (x-1)^2$
Fin Si

Programme Python

```
from math import *

def F(x):
    if x>=0:
        y=1+sqrt(x)
    else:
        y=(1-x)**2
    return y
```

On importe le module math car on utilise la fonction sqrt (racine carrée).

- On exécute la fonction **F**.

Avec $x = 2$, on obtient :

```
>>> F(2)
2.414213562373095
```

Ainsi $f(2) \approx 2{,}4$.

Avec $x = -3$, on obtient :

```
>>> F(-3)
16
```

Ainsi $f(-3) = 16$.

Exemple 4

Programmer des instructions conditionnelles

- Un magasin de reprographie applique le tarif suivant :

Nombre de photocopies	Tarif à l'unité
De 1 à 50	0,15 €
À partir de 51	0,10 €

- Voici un algorithme qui détermine le prix dû pour n photocopies réalisées.
- L'algorithme est codé par une fonction **Prix** écrite en langage Python.

Algorithme

Si $n \leqslant 50$ alors
  $x \leftarrow 0{,}15x$
sinon
  $n \leftarrow 7{,}5 + 0{,}1(n-50)$
Fin Si

Programme Python

```
def Prix(n):
    if n<=50:
        x=0.15*n
    else:
        x=7.5+0.1*(n-50)
    return x
```

n%11 renvoie pour résultat le reste de la division de n par 11

- On exécute la fonction Prix.

Avec $n = 45$, on obtient :

```
>>> Prix(45)
6.75
```

Ainsi le prix dû pour 45 photocopies est 6,75 €.

Avec $n = 72$, on obtient :

```
>>> Prix(72)
9.7
```

Ainsi le prix dû pour 72 photocopies est de 9,70 €.

INFO

Dans le langage Python, l'indentation, c'est-à-dire le décalage vers la droite, permet de repérer les instructions qui font partie d'un traitement conditionnel.

4 Boucle bornée

A Répéter *n* fois

Une boucle permet de répéter plusieurs fois de suite un même traitement.
Lorsque le nombre *n* d'itérations est connu à l'avance, on parle de **boucle bornée**.

B Compteur

Afin de compter le nombre d'itérations, on utilise un compteur initialisé par exemple à 1 et qui s'incrémente automatiquement de 1 à chaque itération jusqu'à la valeur n.

Algorithme	Programme Python
Pour *i* allant de 1 à *n* │Traitement Fin Pour	for i in range (1, n+1): …

Par exemple, dans la boucle
for i in range (1,6):
…
le compteur i prend successivement les valeurs 1, 2, 3, 4, 5.

Exemple 5

Étudier l'évolution d'une population

• Deux chercheurs étudient l'évolution d'une population de truites dans un lac de montagne.
Ils constatent une diminution annuelle moyenne de 20 % de cette population.
Afin de sauvegarder l'espèce, ils décident d'introduire chaque année 50 nouvelles truites.
On estime la population initiale du lac à 500 truites.

• Voici :
– un algorithme qui détermine le nombre de truites au bout de *n* années ($n \geqslant 1$). La variable X est initialisée à 500 ;
– son codage par une fonction **Population** écrite en langage Python.

Algorithme
Pour *i* allant de 1 à *n* │ $X \leftarrow 0{,}8X + 50$ Fin Pour

Programme Python

```python
def Population(n):
    X=500
    for i in range(1,n+1):
        X=0.8*X+50
    return X
```

• On exécute la fonction **Population**.

Avec $n = 12$, on obtient :

```
>>> Population(12)
267.17986918400004
```

Ainsi, après 12 années, le lac compte environ 267 truites.

Avec $n = 25$, on obtient :

```
>>> Population(25)
250.94447329657396
```

Après 25 années, le lac compte environ 251 truites.

Lorsqu'on donne à *n* des valeurs de plus en plus grandes, on remarque que le nombre de truites de ce lac tend à se stabiliser à 250.

INFO
Dans le langage Python, la fin de l'indentation marque la fin du traitement effectué dans la boucle.

Exemple 6

Calculer une somme à l'aide d'une boucle

- L'algorithme suivant calcule la somme S des carrés des nombres entiers de 1 à n, avec n nombre entier naturel, $n \geqslant 1$.

Pour tout nombre entier naturel $n \geqslant 1$, on pose $S = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$.

La variable S est initialisée à 0.

- L'algorithme est codé par une fonction **Somme** écrite en langage Python.

Algorithme

Pour i allant de 1 à n
  $S \leftarrow S + i^2$
Fin Pour

Programme Python

```python
def Somme(n):
    S=0
    for i in range(1,n+1):
        S=S+i**2
    return S
```

- On exécute le programme avec $n = 5$, voici le tableau de suivi des variables :

i		1	2	3	4	5
S	0	1	5	14	30	55

On obtient dans la console :

```
>>> Somme(5)
55
```

Ainsi $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$.

Exemple 7

Compter le nombre d'occurrences d'un caractère

- Il s'agit de compter dans une phrase le nombre de fois où l'on rencontre un caractère donné.
- Voici :

– un algorithme qui détermine le nombre d'occurrences du caractère dans la phrase. La variable ℓ a pour valeur la longueur de la phrase et la variable n est initialisée à 0 ;

– son codage par une fonction **Nbr** écrite en langage Python.

Algorithme

Pour k allant de 0 à $\ell - 1$
  Si phrase[k] = car alors
    $n \leftarrow n + 1$
  Fin Si
Fin Pour

Programme Python

```python
def Nbr(phrase,car):
    l=len(phrase)
    n=0
    for k in range(0,l):
        if phrase[k]==car:
            n=n+1
    return n
```

La variable n compte le nombre d'apparitions du caractère car dans phrase.

- On exécute la fonction avec phrase="Je programme en Python" et car="e".

Voici le tableau de suivi des variables :

k		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
phrase[k]		J	e		p	r	o	g	r	a	m	m	e		e	n		P	y	t	h	o	n
n	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3

On obtient dans la console :

```
>>> Nbr("Je programme en Python","e")
3
```

Ainsi, la lettre e est présente 3 fois dans la phrase saisie.

INFO

La variable phrase est du type chaîne de caractères.

La fonction len renvoie le nombre de caractères / de phrase.

Les caractères sont repérés par phrase[0], phrase[1], …, phrase [ℓ–1].

5 Boucle non bornée

A Répéter tant que …

Dans une boucle, le nombre d'itérations peut dépendre d'une condition.
Le traitement est alors répété tant que la condition est vraie.
Lorsque la condition est fausse, on sort de la boucle et la suite des instructions du programme s'applique.

B Nombre d'itérations

Le nombre d'itérations n'est donc en général pas prévu à l'avance et on parle de **boucle non bornée**.

Algorithme	Programme Python
Tant que condition │ Traitement Fin Tant que	while X<2: …

Ici, tant que la condition X<2 est vraie, on exécute les instructions de la boucle.

Exemple 8

Simuler une expérience aléatoire

• Au jeu des petits chevaux, pour sortir de l'écurie, on effectue des lancers successifs d'un dé équilibré jusqu'à ce que l'on obtienne 6.

• Voici :

– un algorithme qui effectue une simulation de cette expérience aléatoire et donne le nombre n de lancers effectués. La variable n est initialisée à 1 ;

– son codage par une fonction **L** écrite en langage Python.

Algorithme	Programme Python
$x \leftarrow$ nombre entier aléatoire de 1 à 6 Tant que $x \neq 6$ │ $n \leftarrow n+1$ │ $x \leftarrow$ nombre entier aléatoire de 1 à 6 Fin Tant que	(voir ci-dessous)

```python
from random import *

def L():
    n=1
    x=randint(1,6)
    while x!=6:
        n=n+1
        x=randint(1,6)
    return n
```

On importe le module random car on utilise la fonction randint

La condition « x différent de 6 » est notée : x!=6

• On exécute la fonction **L**, on obtient dans la console :

```
>>> L()
4
```

Cela signifie que pour cette expérience, on a lancé le dé 4 fois pour sortir le cheval de l'écurie.

INFO

Dans le langage Python, randint(1,6) renvoie un nombre entier aléatoire compris entre 1 et 6.
random() renvoie un nombre aléatoire de l'intervalle $[0\ ;\ 1[$.

Remarque :

Pour écrire ce programme, on peut aussi utiliser la fonction random.
En effet, pour x=random(), la probabilité de l'événement « x<1/6 » est 1/6 et celle de l'événement « x>=1/6 » est 5/6.

```python
from random import *

def L():
    n=1
    x=random()
    while x>=1/6:
        n=n+1
        x=random()
    return n
```

INFO

Dans le langage Python, la fin de l'indentation marque la fin des instructions de la boucle.

Exemple 9

Déterminer un nombre d'années

• Louis a placé une somme de 1 500 € sur son livret d'épargne à un taux de 1,5 % par an.

• L'algorithme suivant détermine le nombre d'années N au bout duquel Louis disposera d'une somme supérieure à 1 600 €. Les variables S et N sont respectivement initialisées à 1 500 et 0.

• L'algorithme est codé par une fonction **A** écrite en langage Python.

Algorithme

Tant que $S \leqslant 1600$
  $S \leftarrow 1{,}015 \times S$
  $N \leftarrow N + 1$
Fin Tant que

Programme Python

```
def A():
    S=1500
    N=0
    while S<=1600:
        S=1.015*S
        N=N+1
    return N
```

Chaque année, le montant S du livret de Louis augmente de 1,5 %, il est donc multiplié par 1,015.

• On exécute la fonction **A**, on obtient dans la console :

```
>>> A()
5
```

Ainsi, au bout de 5 ans, Louis disposera d'une somme supérieure à 1 600 €.

Exemple 10

Tracer des points aléatoires dans un repère

• Une puce effectue des sauts aléatoires. Au départ, elle se situe à l'origine d'un repère du plan.

• Voici :

– un algorithme qui construit les points de coordonnées $(x\,;y)$ qui correspondent aux positions successives de la puce. Les variable x et y sont initialisées à 0.

Les sauts ont lieu tant que $x \leqslant 10$ et $y \leqslant 10$.

– son codage en langage Python.

Algorithme

Tant que $x \leqslant 10$ et $y \leqslant 10$
  Tracer le point de coordonnées $(x\,;y)$
  $x \leftarrow x +$ nombre aléatoire de $[0\,;1[$
  $y \leftarrow y +$ nombre aléatoire de $[0\,;1[$
Fin Tant que

Programme Python

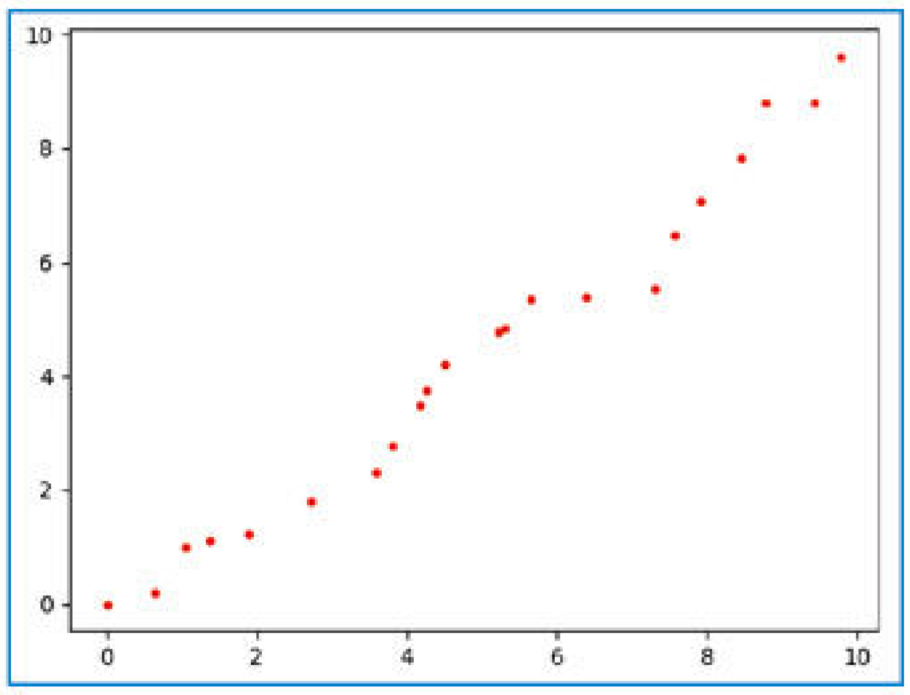
```
from pylab import *
x=0
y=0
while x<=10 and y<=10:
    plot(x,y,'r.')
    x=x+random()
    y=y+random()
show()
```

La condition x<=10 and y<=10 est vraie lorsque x<=10 et y<=10 sont vraies toutes les deux.

INFO

x<=10, y<=10 sont des variables booléennes.
Les opérateurs logiques and (et), or (ou) et not (non) s'appliquent aux variables de ce type.

• On exécute le programme, voici ci-contre un affichage des positions successives de la puce.



INFO

Dans le langage Python, on importe le module pylab pour réaliser des constructions graphiques. L'instruction plot(x,y,'r.') trace le point de coordonnées $(x\,;y)$ en rouge.
L'instruction show() affiche la figure à l'écran.

6 Le type liste

A Éléments d'une liste

La fonction len renvoie le nombre n d'éléments d'une liste L.
Les éléments de L sont notés à l'aide d'un indice : L[0], L[1], …, L[n-1].

Exemple
: L=[1,3,5,7,9] est une liste.
: L'élément d'indice 3 de L est 7. Ainsi, L[3]=7 , L[0]=1 est l'élément d'indice 0 de L.

B Ajouter un élément à une liste

- Pour ajouter un élément x à la fin d'une liste, on écrit L=L+[x] ou L.append(x).
- On peut aussi insérer un élément à un indice précisé.

```
>>> L=[1,3,7,9]
>>> L.insert(2,5)
>>> L
[1, 3, 5, 7, 9]
```

Exemple
: Ci-contre, on insère l'élément 5 à l'indice 2 dans la liste L.

C Supprimer un élément d'une liste

```
>>> L=[1,3,4,5,7,9]
>>> del L[2]
>>> L
[1, 3, 5, 7, 9]
```

Exemple
: Ci-contre, on supprime l'élément d'indice 2 de la liste L.

D Parcourir une liste

Voici deux rédactions d'une fonction **Somme**.
Cette fonction a pour paramètre une liste L de nombres et elle renvoie pour résultat la somme des nombres de L.

Programme Python

```
def Somme(L):
    l=len(L)
    S=0
    for i in range(0,l):
        S=S+L[i]
    return S
```

Programme Python

```
def Somme(L):
    S=0
    for x in L:
        S=S+x
    return S
```

Exemple

```
>>> L=[1,3,5,7,9]
>>> Somme(L)
25
```

E Liste en compréhension

La fonction **Ecarts** a pour paramètres une liste L de nombres et un nombre e. Elle renvoie la liste des écarts abs(x-e) entre les nombres x de L et le nombre e.

Programme Python

```
def Ecarts(L,e):
    E=[abs(x-e) for x in L]
    return E
```

Exemple

```
>>> L=[1,3,5,7,9]
>>> Ecarts(L,3)
[2, 0, 2, 4, 6]
```

Ici, les éléments de la liste E ne sont pas énumérés, ils sont caractérisés par des propriétés mathématiques et logiques

F Liste en compréhension avec une condition

La fonction **Proches** a pour paramètres une liste L de nombres et deux nombres e et r. Elle renvoie la liste des éléments x de L tels que abs(x-e)⩽r.

Programme Python

```
def Proches(L,e,r):
    E=[x for x in L if abs(x-e)<=r]
    return E
```

Exemple

```
>>> L=[1,3,5,7,9]
>>> Proches(L,5,3)
[3, 5, 7]
```

Exemple 11

Travailler avec des listes et leurs indices

• Une roue de loterie est divisée en dix secteurs identiques numérotés de 1 à 10. Une expérience aléatoire consiste à faire tourner la roue et à noter le numéro obtenu.

• Voici :

– un algorithme qui réalise n simulations de cette expérience aléatoire et donne pour résultat la liste des n numéros obtenus. La variable L est initialisée à la liste vide ;

– son codage par la fonction **Loterie** écrite en langage Python.

Algorithme

Pour i allant de 0 à $n-1$
  $a \leftarrow$ nombre entier aléatoire de 1 à 10
  $L \leftarrow L + [a]$
Fin Pour

Programme Python

```python
from random import *

def Loterie(n):
    L=[]
    for i in range(0,n):
        a=randint(1,10)
        L=L+[a]
    return L
```

L'instruction L=[] initialise la liste L à la liste vide.

• Par exemple dans la console, on obtient :

```
>>> Loterie(5)
[4, 8, 2, 10, 9]
```

Ainsi on a simulé 5 fois l'expérience aléatoire et obtenu les numéros 4, 8, 2, 10 et 9.

• On souhaite également obtenir le plus grand et le plus petit des n numéros obtenus.

Pour cela, on écrit une fonction **Max** et une fonction **Min** qui renvoient respectivement le plus grand et le plus petit des nombres d'une liste L de n nombres ($n \geqslant 2$).

• Voici leurs algorithmes et le codage en langage Python à la suite du précédent.

La variable n a pour valeur la longueur de la liste L.

Les variables M et m sont initialisées à L[0].

Algorithme de la fonction Max

Pour i allant de 1 à $n-1$
  Si $M < L[i]$ alors
    $M \leftarrow L[i]$
  Fin Si
Fin Pour

Algorithme de la fonction Min

Pour i allant de 1 à $n-1$
  Si $L[i] < m$ alors
    $m \leftarrow L[i]$
  Fin Si
Fin Pour

Programme Python

```python
from random import *

def Loterie(n):
    L=[]
    for i in range(0,n):
        a=randint(1,10)
        L=L+[a]
    return L

def Max(L):
    n=len(L)
    M=L[0]
    for i in range(1,n):
        if M<L[i]:
            M=L[i]
    return M

def Min(L):
    n=len(L)
    m=L[0]
    for i in range(1,n):
        if L[i]<m:
            m=L[i]
    return m
```

• Par exemple, dans la console, on obtient :

```
>>> Max(Loterie(5))
8
>>> Min(Loterie(5))
2
```

Ainsi pour une première simulation de 5 expériences, on a obtenu 8 pour plus grand nombre et pour une seconde simulation de 5 expériences, on a obtenu 2 pour plus petit nombre.

Exemple 12

Déterminer une liste d'images

• *f* est la fonction cube.

La fonction **F** écrite en langage Python a pour paramètre un nombre x et renvoie pour résultat l'image de x par la fonction *f*.

La fonction **Images** a pour paramètre une liste L de nombres. Elle renvoie pour résultat la liste des images des nombres x de L par la fonction *f*.

Programme Python

```python
def F(x):
    y=x**3
    return y

def Images(L):
    I=[F(x) for x in L]
    return I
```

• Par exemple, dans la console on obtient la liste des cubes des nombres entiers de 1 à 9.

```
>>> L=[1,2,3,4,5,6,7,8,9]
>>> Images(L)
[1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729]
```

Remarque :

Pour une autre fonction *f*, on adapte l'écriture de la fonction Python **F** et on obtient de même la liste des images par *f* des nombres d'une liste donnée.

Exemple 13

Travailler avec des listes en compréhension

• La fonction **Moyenne** écrite en langage Python a pour paramètre une liste L de nombres.

Elle renvoie la moyenne des nombres de cette liste.

Programme Python

```python
def Moyenne(L):
    n=len(L)
    S=0
    for x in L:
        S=S+x
    m=S/n
    return m
```

• Par exemple, dans la console, on obtient :

```
>>> S=[1,2,5,7,7,8,9,11,15,20]
>>> Moyenne(S)
8.5
```

• La fonction **Diff** saisie à la suite a également pour paramètre une liste L de nombres.

Elle renvoie la liste E des différences x-m où x désigne un nombre L et m est la moyenne de la liste L.

Programme Python

```python
def Diff(L):
    m=Moyenne(L)
    E=[x-m for x in L]
    return E
```

• Par exemple, dans la console, on obtient :

```
>>> S
[1, 2, 5, 7, 7, 8, 9, 11, 15, 20]
>>> Diff(S)
[-7.5, -6.5, -3.5, -1.5, -1.5, -0.5, 0.5, 2.5, 6.5, 11.5]
```

• La fonction **Inter** ci-contre a pour paramètres une liste L et un nombre a $(a > 0)$.

Elle renvoie pour résultat une nouvelle liste I formée des nombres x de la liste L tels que $m - a \leqslant x$ et $x \leqslant m + a$, c'est-à-dire qui se trouvent dans l'intervalle $[m - a\,;\, m + a]$.

Programme Python

```python
def Inter(L,a):
    m=Moyenne(L)
    I=[x for x in L if m-a<=x and x<=m+a]
    return I
```

Ici, m désigne toujours la moyenne des nombres de L.

• Par exemple, dans la console, Inter(S,7) renvoie la liste formée des nombres x de S tels que $8{,}5 - 7 \leqslant x \leqslant 8{,}5 + 7$, soit $1{,}5 \leqslant x \leqslant 15{,}5$.

```
>>> S
[1, 2, 5, 7, 7, 8, 9, 11, 15, 20]
>>> Inter(S,7)
[2, 5, 7, 7, 8, 9, 11, 15]
```

Une **proposition** mathématique est un énoncé qui est soit **vrai**, soit **faux**.

Exemples

- « 1 025 est un nombre impair » est une proposition vraie.
- « 275 est divisible par 3 » est une proposition fausse.
- « $x^2 \leqslant 16$ » est une proposition vraie pour certaines valeurs du nombre réel x et fausse pour les autres valeurs

1 Les connecteurs logiques « et », « ou »

A Conjonction

La **conjonction** de deux propositions P et Q est la proposition, notée **P et Q**, qui est vraie uniquement lorsque les propositions P et Q sont toutes les deux vraies.

Exemples

- a désigne un nombre réel.
« $a^2 \geqslant 0$ et $|a| \geqslant 0$ » est une proposition vraie.
- « $5 < 2^3$ et $2^3 < 7$ » est une proposition fausse. En effet, la proposition « $2^3 < 7$ » est fausse.

B Disjonction

La **disjonction** de deux propositions P et Q est la proposition, notée **P ou Q**, qui est :
– vraie lorsque l'**une au moins** des propositions P et Q est vraie ;
– fausse lorsque les propositions P et Q sont toutes les deux fausses.

Exemples

- « 65 est divisible par 2 ou 262 est divisible par 2 » est une proposition vraie. En effet, la proposition « 262 est divisible par 2 » est vraie.
- « 25 est premier ou 49 est premier » est une proposition fausse. En effet, chacune des propositions « 25 est premier », « 49 est premier » est fausse.

2 La négation « non »

La **négation** d'une proposition P est la proposition, notée **non P**, qui est vraie lorsque P est fausse et fausse lorsque P est vraie.

Exemples

- a désigne un nombre réel.
La négation de la proposition « $a < 5$ » est la proposition « $a \geqslant 5$ ».
- x désigne un nombre réel.
La négation de la proposition « $x \neq 13$ » est la proposition « $x = 13$ ».

3 L'implication « Si ..., alors ... »

A Implication

- Une **implication** est une proposition de la forme « **Si P, alors Q** » où P est une proposition appelée **hypothèse** et Q une proposition appelée **conclusion**.
- On suppose la proposition P vraie, alors :

– si la proposition Q est vraie, l'implication « Si P, alors Q » est vraie ;
– si la proposition Q est fausse, l'implication « Si P, alors Q » est fausse.

Exemple

x désigne un nombre réel.
« Si $x = 3$, alors $x^2 = 9$ » est une implication vraie.
« Si $x = -13$ alors $x^2 < 0$ » est une implication fausse.

B Réciproque

La **réciproque** de l'implication « Si P, alors Q » est l'implication « **Si Q, alors P** ».

Exemple

x désigne un nombre réel.
La réciproque de l'implication « Si $x = 3$, alors $x^2 = 9$ » est l'implication :
« Si $x^2 = 9$, alors $x = 3$ ».
Cette réciproque est fausse pour $x = -3$, en effet $(-3)^2 = 9$ et $-3 \neq 3$.

C Contraposée

- La **contraposée** de l'implication « Si P, alors Q » est l'implication « **Si non Q, alors non P** ».
- Une implication et sa contraposée sont soit toutes les deux vraies, soit toutes les deux fausses.

Exemple

x désigne un nombre réel.
La contraposée de « Si $x = 3$, alors $x^2 = 9$ » est l'implication « Si $x^2 \neq 9$, alors $x \neq 3$ » et cette implication est vraie.
En effet, si on suppose $x^2 \neq 9$ alors x ne peut pas être égal à 3.

4 L'équivalence « ... si, et seulement si ... »

Une **équivalence** est la conjonction de deux implications réciproques :
« Si P, alors Q » et « Si Q, alors P ».
On la note « **P si, et seulement si, Q** » ou « **P équivaut à Q** ».

Exemple

ABCD est un quadrilatère.
« ABCD est un parallélogramme si, et seulement si, ses diagonales se coupent en leur milieu » est une proposition vraie.

5 Condition nécessaire suffisante

A Lorsqu'une implication « Si P, alors Q » est vraie, on dit que :

- Q est une **condition nécessaire à P**. En effet, il faut que la proposition Q soit vraie pour que la proposition P soit vraie.
- P est une **condition suffisante à Q**. En effet, il suffit que la proposition P soit vraie pour que la proposition Q soit vraie.

Exemple

ABCD est un quadrilatère. « Si ABCD est un losange, alors ABCD est un parallélogramme » est une implication vraie.
« ABCD est un parallélogramme » est une condition nécessaire à « ABCD est un losange » et « ABCD est un losange » est une condition suffisante à « ABCD est un parallélogramme ».

B Lorsqu'une équivalence « P si, et seulement si, Q » est vraie, P est une **condition nécessaire et suffisante** à Q.

Exemple

x et y désignent deux nombres réels.
L'équivalence « Le produit xy est nul si, et seulement si, l'un des facteurs x ou y est nul » est vraie. La proposition « Le produit xy est nul » est une condition nécessaire et suffisante à la proposition « L'un des facteurs x ou y est nul ».

6 Les quantificateurs

A Le quantificateur « Pour tout », « Quel que soit »

- L'expression « Pour tout » est appelée **quantificateur universel**.
- On l'emploie pour exprimer que tous les éléments d'un ensemble vérifient une certaine propriété. On dit aussi « Quel que soit ».

Exemple

« Pour tout nombre réel x, $x^2 \geqslant 0$ » est une proposition vraie.

B Le quantificateur existentiel « Il existe »

- L'expression « Il existe » est appelée **quantificateur existentiel**.
- On l'emploie pour exprimer qu'au moins un élément d'un ensemble vérifie une certaine propriété.

Exemple

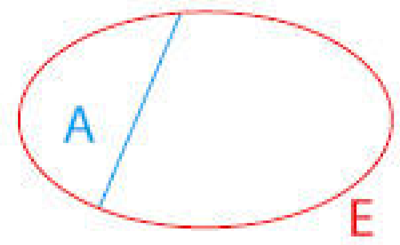
« Il existe un nombre entier naturel non nul n tel que $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}<0{,}01$ » est une proposition vraie.

En effet, pour $n=10$, $\frac{1}{10}-\frac{1}{11}=\frac{1}{110}$. Or, $\frac{1}{110}\approx 0{,}0091$ donc $\frac{1}{10}-\frac{1}{11}<0{,}01$.

7 Raisonnements

A Démonstration par disjonction des cas

Pour démontrer qu'une proposition est vraie pour tout x d'un ensemble E, on peut démontrer qu'elle est vraie pour tout x de A (partie de E) puis qu'elle est vraie pour tout x de E n'appartenant pas à A.



Énoncé : Démontrer que pour tout nombre n de $\mathbb{Z}$, $n(n+3)$ est pair.

Solution

1^er cas : n est pair, c'est-à-dire $n = 2k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
Alors $n(n+3) = 2k(2k+3) = 2\text{K}$ avec $\text{K} = k(2k+3)$. Or, $\text{K} \in \mathbb{Z}$ donc $n(n+3)$ est pair.
2^e cas : n est impair, c'est-à-dire $n = 2k+1$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
Alors $n(n+3) = (2k+1)(2k+4) = 2(2k+1)(k+2) = 2\text{K}'$
avec $\text{K}' = (2k+1)(k+2)$. Or, $\text{K}' \in \mathbb{Z}$ donc $n(n+3)$ est pair.
Finalement, pour tout nombre n de $\mathbb{Z}$, $n(n+3)$ est pair.

B Démonstration par contraposée

Une implication et sa contraposée sont soit toutes les deux vraies, soit toutes les deux fausses. Pour démontrer « Si P, alors Q », on peut démontrer « Si non Q, alors non P ». Ainsi, on suppose non Q vraie et on prouve non P vraie.

Énoncé : Démontrer que si le carré d'un nombre n de $\mathbb{Z}$ est pair, alors n est pair.

Solution

On démontre la contraposée « Si n est impair, alors n^2 est impair ».
On suppose n impair, c'est-à-dire $n = 2k+1$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
Alors $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2\text{K} + 1$
avec $\text{K} = 2k^2 + 2k$. Or, $\text{K} \in \mathbb{Z}$ donc n^2 est impair ».
La contraposée est vraie donc la proposition de l'énoncé est vraie.

C Démonstration par l'absurde

Pour démontrer qu'une proposition P est vraie, on suppose que la proposition non P est vraie et on en déduit une contradiction.

Énoncé : Démontrer que $\sqrt{2} \neq 1{,}414$.

Solution

On suppose que $\sqrt{2} = 1{,}414$. Deux nombres égaux ont le même carré donc $2 = 1{,}414^2$. Or $1{,}414^2 = 1{,}999\,396$, on obtient ainsi une contradiction.
Donc la proposition $\sqrt{2} = 1{,}414$ est fausse.

D Démonstration par contre-exemple

$\text{P}(x)$ est une proposition définie pour les éléments x d'un ensemble E.
Pour démontrer que la proposition « Pour tout x de E, $\text{P}(x)$ » est fausse, il suffit de trouver un contre-exemple, c'est-à-dire un élément x de E pour lequel $\text{P}(x)$ est fausse.

Énoncé : La proposition « Pour tout nombre réel $x > 0$, $\frac{1}{x} \leqslant x$ » est-elle vraie ou fausse ?

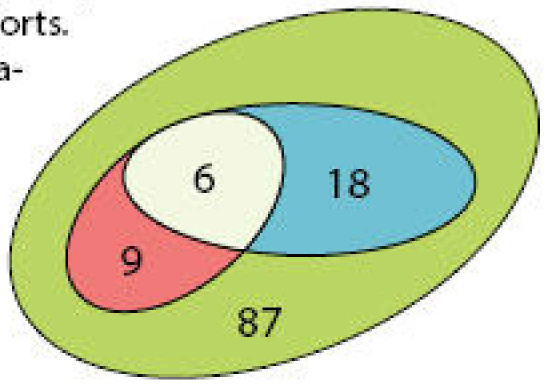
Solution

Pour $x = 0{,}5$, $\frac{1}{x} = 2$ donc $\frac{1}{x} > x$ et la proposition énoncée est fausse.

1 Dénombrement. Récurrence

SAVOIR-FAIRE

3 **a)** $24 + 15 - 6 = 33$
33 personnes du centre pratiquent au moins l'un des deux sports.
b) $120 - 33 = 87$ donc 87 personnes du centre ne pratiquent aucun des deux sports.
c) D'après le diagramme de Venn ci-contre : $18 + 9 = 27$ personnes pratiquent un seul de ces deux sports.



4 **a)** E peut-être l'ensemble constitué des 5 ordinateurs et F l'ensemble constitué des 10 sacs.
b) $5 \times 10 = 50$ ainsi, Jeanne a 50 possibilités.

7 Pour tout entier naturel n, P(n) est la propriété : « $v_n = n(n+1)$ ».
• **Initialisation** : pour $n = 0$, $v_0 = 0$ et $0(0+1) = 0$.
La propriété P(0) est donc vraie.
• **Hérédité** : on suppose que pour un entier naturel k, la propriété P(k) est vraie c'est-à-dire que $v_k = k(k+1)$ (hypothèse de récurrence).
Or, $v_{k+1} = v_k + 2k + 2 = k(k+1) + 2k + 2$
$v_{k+1} = (k+1)(k+2)$.
La propriété P($k+1$) est donc vraie.
• **Conclusion** : pour tout entier naturel n, $v_n = n(n+1)$.

9 **a)** $(0\,;3\,;3\,;7)$ est un 4-uplet de E.
b) L'ensemble E contient 10 éléments.
Ainsi, le nombre d'éléments de E^4 est 10^4 soit 10 000.
On peut écrire 10 000 numéros de 4 chiffres.

13 **Situation 1 :** le nombre d'éléments de E est 2^8 soit 256.
Situation 2 : chacun des 8 lancers pris dans l'ensemble $\{P\,;F\}$ est un 8-uplet d'éléments de $\{P\,;F\}$.
Donc Mia peut obtenir 2^8 soit 256 résultats.

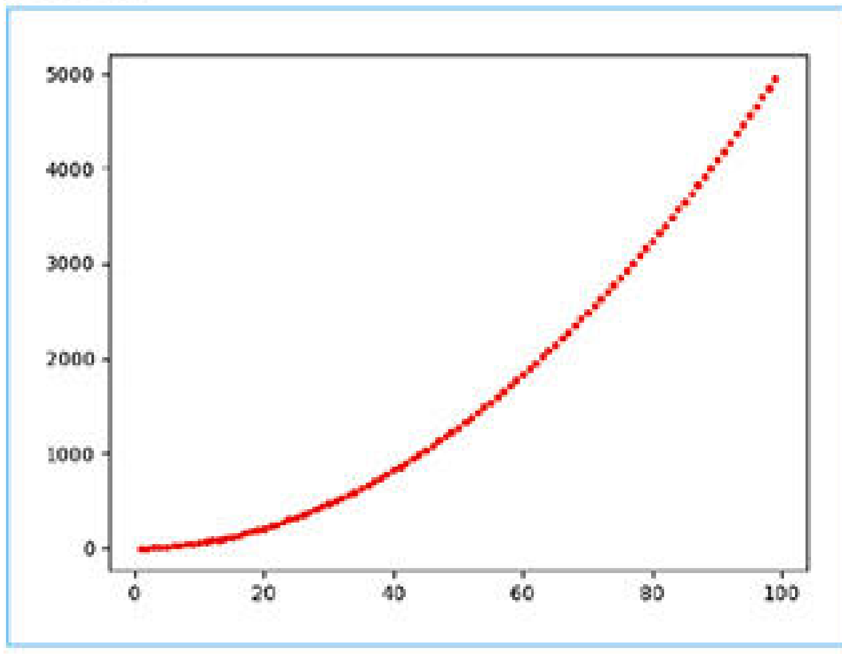
14 E est l'ensemble constitué des noms des 5 surprises. Chaque lot est une partie de E. On peut donc réaliser 2^5 soit 32 lots de surprises.

16 **a)** Les deux termes suivants sont $u_4 = 6$ et $u_5 = 10$.
b) À l'étape $n+1$, on ajoute un sommet à la base à partir duquel on peut construire les triangles formés par le sommet A et chacun des n premiers sommets, c'est-à-dire n triangles supplémentaires. On en déduit que pour tout $n \geqslant 2$, $u_{n+1} = u_n + n$.
c) Voici la fonction **U** écrite en langage Python qui a pour paramètre un nombre entier naturel n et qui affiche les n premiers points de la suite (u_n).

```
from pylab import *

def U(n):
    u=1
    plot(1,u,'r.')
    for i in range(2,n):
        u=u+i
        plot(i,u,'r.')
    show()
    return
```

On exécute **U(100)** et on obtient le graphique ci-dessous.



L'allure de la courbe permet de conjecturer que u_n est de la forme $an^2 + bn + c$.
d) Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, P(n) est la propriété : « $u_n = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$ ».
• **Initialisation** : pour $n = 2$, $u_2 = 1$ et $\frac{1}{2}2^2 - \frac{1}{2}2 = 1$.
La propriété P(2) est donc vraie.
• **Hérédité** : on suppose que pour un entier naturel $k \geqslant 2$, la propriété P(k) est vraie c'est-à-dire que $u_k = \frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{2}k$ (hypothèse de récurrence).
$u_{k+1} = u_k + k = \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{2}k$.
Or, $\frac{1}{2}(k+1)^2 - \frac{1}{2}(k+1) = \frac{1}{2}k^2 + k + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}k - \frac{1}{2}$.
$\frac{1}{2}(k+1)^2 - \frac{1}{2}(k+1) = \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{2}k$.
Ainsi $u_{k+1} = \frac{1}{2}(k+1)^2 - \frac{1}{2}(k+1)$.
La propriété P($k+1$) est donc vraie.
• **Conclusion** : pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, $u_n = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$.

POUR SE TESTER

72 **1.** B **2.** B **3.** C **4.** A **5.** D

73 **1.** B, C **2.** A, B, C **3.** C **4.** B, D **5.** B, D

74 **1. Vrai**. En effet, pour tout entier naturel n, P(n) est la propriété : « $u_n \leqslant 2$ ».
• **Initialisation** : pour $n = 0$, $u_0 = 0$, donc $u_0 \leqslant 2$.
La propriété P(0) est donc vraie.
• **Hérédité** : on suppose que pour un entier naturel k, la propriété P(k) est vraie c'est-à-dire que $u_k \leqslant 2$.
$u_{k+1} = 0{,}5u_k + 1$ donc $u_{k+1} \leqslant 0{,}5 \times 2 + 1$. On en déduit que $u_{k+1} \leqslant 2$.
La propriété P($k+1$) est donc vraie.
• **Conclusion** : pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 2$.
2. Faux. En effet, le nombre de 4-uplets d'éléments de l'ensemble $\{1\,;2\,;3\,;4\}$ est égal à $4^4 = 256$.
3. Vrai. En effet, le nombre de parties de E et le nombre d'éléments de F^n sont égaux à 2^n.

2 Combinatoire et dénombrement

SAVOIR-FAIRE

3 L'ordre est important, donc il s'agit de dénombrer les 5-uplets d'éléments distincts d'un ensemble à 10 éléments. $10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 30\,240$.
Donc il y a 30 240 rangements différents.

5 Il s'agit d'ordonner les cinq devoirs, c'est-à-dire de dénombrer les permutations d'un ensemble à 5 éléments.
Le nombre de façons de s'organiser est donc :
$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120.$$

8 **a)** On tire les boules simultanément, donc l'ordre n'intervient pas. On modélise un tirage de 6 boules par une combinaison de 6 boules parmi les 12 que contient l'urne.
Le nombre de tirages différents est donc $\binom{12}{6} = 924$.
b) Le nombre de tirages de 3 boules parmi les 4 boules rouges est $\binom{4}{3} = 4$. Pour chacun de ces tirages, on complète avec 3 boules parmi les 8 boules qui ne sont pas rouges. Le nombre de possibilités pour cela est $\binom{8}{3} = 56$.
Le nombre total de tirages de ce type est donc $\binom{4}{3} \times \binom{8}{3} = 4 \times 56 = 224$.
c) Le contraire de « au moins une boule rouge » est « aucune boule rouge ».
Le nombre de tirages ne comportant aucune boule rouge est $\binom{8}{6} = 28$.
Le nombre de tirages en comportant au moins une est donc $924 - 28 = 896$.

12 **a)** D'après la relation de Pascal,
$$\binom{11}{2} = \binom{10}{1} + \binom{10}{2} = 10 + 45 = 55.$$
b) Par symétrie des nombres de combinaisons,
$$\binom{11}{9} = \binom{11}{11-9} = \binom{11}{2} = 55.$$

13 Ces lignes utilisent la symétrie des nombres de combinaisons et réduisent ainsi le nombre d'itérations dans la boucle.

16

```
def Parties_3(L):
    n=len(L)
    for i in range(0,n):
        for j in range(i+1,n):
            for k in range(j+1,n):
                print(L[i],L[j],L[k])
    return
```

17 On peut par exemple obtenir :

```
>>> L=[1,2,3,4,5]
>>> PermutAlea(L)
[5, 3, 2, 1, 4]
```

POUR SE TESTER

55 1. C 2. C 3. A 4. B 5. A

56 1. A, C 2. A, B 3. B, D 4. A, C 5. B, C, D

57 1. **Faux**. En effet, le nombre de 7-uplets d'éléments distincts est $8 \times 7 \times \ldots \times 2$, le nombre de permutations est $8! = 8 \times 7 \times 6 \times \ldots \times 2 \times 1$ et ces deux nombres sont égaux.
2. **Faux**. En effet, le nombre d'alignements possibles est 10! qui n'est pas égal à 10.
3. **Faux**. En effet, $\binom{8}{5} = 56$, donc la propriété n'est pas vraie pour $n = 5$.
4. **Vrai**. En effet, le nombre de façons de choisir les 5 messages parmi les 20 reçus est $\binom{20}{5} = 15\,504$, qui est bien supérieur à dix-mille.

3 Vecteurs, drosites et plans de l'espace

SAVOIR-FAIRE

3 a) $\overrightarrow{HJ} = \overrightarrow{IB}$.

B est l'image de I par la translation de vecteur $\overrightarrow{HJ}$.

b) $\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{HA} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{HB}$

4 a) $\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{HE}$ et $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{HG}$.

On en déduit alors : $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{EB} = -\overrightarrow{HE} + \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{HG}$.

b) D'après la relation de Chasles :

$\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GF}$

$\overrightarrow{DF} = -\overrightarrow{HD} + \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{HE}$

c) $\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{HG}$

d) $\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{DA}$

$\overrightarrow{GA} = -\overrightarrow{HG} + \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{HE}$

7 a) • $\overrightarrow{FH} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$

• $\overrightarrow{FJ} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{FJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{FJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

b) D'après a), on remarque que $\overrightarrow{FH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{FJ}$. Les vecteurs $\overrightarrow{FH}$ et $\overrightarrow{FJ}$ sont colinéaires donc les points F, H et J sont alignés.

8 a) • $\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AH} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AI}$

Or, d'après la règle du parallélogramme :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$$

On en déduit : $\overrightarrow{MH} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AD}$

• $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AJ} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AI}$

$\overrightarrow{BJ} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$

b) D'après a), $\overrightarrow{BJ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MH}$. Les vecteurs $\overrightarrow{BJ}$ et $\overrightarrow{MH}$ sont colinéaires donc les droites (BJ) et (MH) sont parallèles.

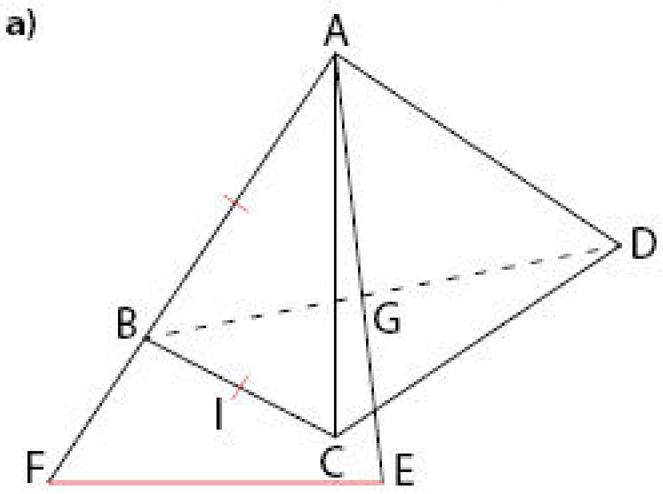
11 $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CJ}$

$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CF}$

$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{HF}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont coplanaires.

12 a)



b) $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AG} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{GB}$

$\overrightarrow{EF} = \frac{3}{2}(\overrightarrow{GD} + \overrightarrow{DB}) = \frac{3}{2}\overrightarrow{DB} + \frac{3}{2} \times \left(-\frac{2}{3}\overrightarrow{DI}\right)$

Or d'après la règle du parallélogramme :

$$\overrightarrow{DI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$$

On en déduit que :

$$\overrightarrow{EF} = -\overrightarrow{BD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

c) $(\overrightarrow{BC} ; \overrightarrow{BD})$ est un couple de vecteurs directeurs du plan (BCD). D'après **b)**, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont coplanaires donc la droite (EF) est parallèle au plan (BCD).

15 a) Le point E n'appartient pas au plan (ABD) donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont non coplanaires et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ est une base de l'espace.

b) • $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AH}$

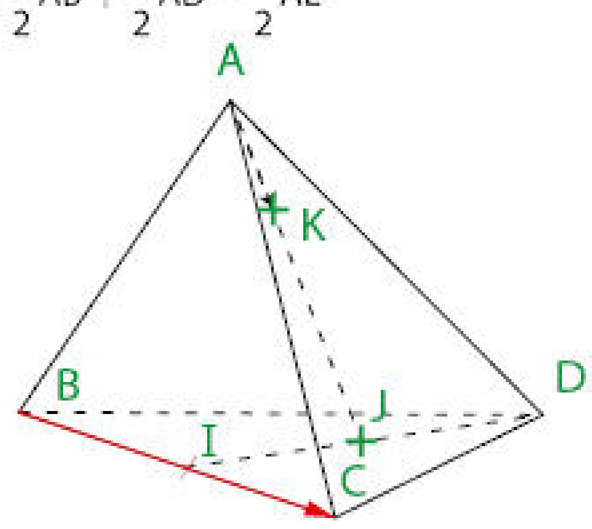
$\overrightarrow{BK} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$

• $\overrightarrow{KD} = \overrightarrow{KH} + \overrightarrow{HD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BH} - \overrightarrow{AE}$

$\overrightarrow{KD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EH}) - \overrightarrow{AE}$

$\overrightarrow{KD} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$

16 a)



b) $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ donc $I\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} ; 0\right)$.

J est le milieu de [ID] donc $J\left(\frac{1}{4} ; \frac{1}{4} ; \frac{1}{2}\right)$.

$\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AJ}$ donc $K\left(\frac{1}{12} ; \frac{1}{12} ; \frac{1}{6}\right)$.

c) $\overrightarrow{AK}\left(\frac{1}{12} ; \frac{1}{12} ; \frac{1}{6}\right)$, $\overrightarrow{BC}(-1 ; 1 ; 0)$ et $\overrightarrow{CD}(0 ; -1 ; 1)$.

On cherche s'il existe deux réels x et y tels que :

$$\overrightarrow{AK} = x\overrightarrow{BC} + y\overrightarrow{CD},$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} \frac{1}{12} = -x \\ \frac{1}{12} = x - y \\ \frac{1}{6} = y \end{cases}$$

Or $-\frac{1}{12} - \frac{1}{6} = -\frac{1}{4} \neq \frac{1}{12}$.

Il n'existe donc pas deux réels x et y tels que $\overrightarrow{AK} = x\overrightarrow{BC} + y\overrightarrow{CD}$: les vecteurs $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas coplanaires.

18 a)

```python
def Droite(x,y,z):
    r=x+1
    s=y-1
    t=z-3
    if s==0 and t==-r/2:
        bool=True
    else:
        bool=False
    return bool
```

b)

```python
def Droite(x,y,z):
    r=x-4
    s=y+3
    t=z
    if r/3==s/2 and r/3==t/5:
        bool=True
    else:
        bool=False
    return bool
```

POUR SE TESTER

81 1. C 2. B 3. D 4. A 5. C

82 1. B et C 2. A et C 3. C et D

83 1. **Faux**. En effet, $\overrightarrow{AB}(2 ; -4 ; -3)$ et $\overrightarrow{AC}(6 ; -5 ; 2)$.

Or $\frac{6}{2} \neq \frac{-5}{-4}$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

2. **Faux**. En effet, $\overrightarrow{AD}(3 ; -6 ; 5)$. On cherche s'il existe x, y tels que $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} 2x + 6y = 3 \\ -4x - 5y = -6 \\ -3x + 2y = 5 \end{cases}.$$

Or, ce système n'a pas de solution (le système formé par les deux premières équations a pour solution $\left(\frac{3}{2} ; 0\right)$, mais $-3 \times \frac{3}{2} + 2 \times 0 \neq 5$). Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas coplanaires.

3. **Vrai**. En effet, $\overrightarrow{DE}(-4 ; 1 ; -5)$

On cherche s'il existe x, y tels que :

$$\overrightarrow{DE} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC},$$

c'est-à-dire : $\begin{cases} 2x + 6y = -4 \\ -4x - 5y = 1 \\ -3x + 2y = -5 \end{cases}$.

Ce système a pour unique solution $(1 ; -1)$, donc $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

Le point E appartient au plan qui passe par D et de vecteurs directeurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

4 Orthogonalité et distances dans l'espace

SAVOIR-FAIRE

3 a) $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{BF}$

Donc $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BF}^2=1$.

b) $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CG}=(\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EH})\cdot\overrightarrow{CG}$.

Donc $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{EH}\cdot\overrightarrow{CG}$.

Or, $\overrightarrow{EH}\cdot\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{EH}\cdot\overrightarrow{DH}=0$.

Donc $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CG}=1+0=0$.

4 a) $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DI}=\overrightarrow{DA}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC})$.

Donc $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DI}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC})$.

Or $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}=\frac{1}{2}(DA^2+DB^2-AB^2)=18$

et $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}=18$.

On en déduit que $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DI}=\frac{1}{2}(18+18)=18$.

b) D'autre part, $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DI}=DA\times DI\times\cos(\widehat{ADI})$.
Dans le triangle BDI rectangle en I,
$DI^2=BD^2-BI^2=6^2-3^2=27$ et $DI=3\sqrt{3}$.

Ainsi $18=18\times3\sqrt{3}\times\cos(\widehat{ADI})$.

D'où $\cos(\widehat{ADI})=\frac{1}{3\sqrt{3}}$.

Avec la calculatrice, on obtient $\widehat{ADI}\approx78{,}9°$.

7 a) ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle donc les vecteurs $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CJ}$ et $\overrightarrow{CG}$ sont orthogonaux deux à deux. De plus, CB = CJ = CG = 1, donc le repère $(C;\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CJ},\overrightarrow{CG})$ est orthonormé.

b) $\overrightarrow{CK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CJ}+\overrightarrow{CG}$ donc $K\left(\frac{1}{2};1;1\right)$.

$\overrightarrow{CL}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CG}$ donc $L\left(\frac{1}{2};0;\frac{1}{2}\right)$.

Ainsi $\overrightarrow{KL}\left(0;-1;-\frac{1}{2}\right)$.

On en déduit que $KL=\sqrt{0^2+(-1)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}$

D'où $KL=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

8 a) B(0 ; 0 ; 0) A(1 ; 0 ; 0) C(0 ; 1 ; 0)
F(0 ; 0 ; 1) D(1 ; 1 ; 0) E(1 ; 0 ; 1)
G(0 ; 1 ; 1) H(1 ; 1 ; 1)

b) $\overrightarrow{CA}(1;-1;0)$ et $\overrightarrow{BH}(1;1;1)$.

Donc $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BH}=1\times1+(-1)\times1+0\times1$.

D'où $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BH}=0$.

Les vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{BH}$ sont donc orthogonaux.

c) $\overrightarrow{HA}(0;-1;-1)$ et $\overrightarrow{EC}(-1;1;-1)$.

Donc $\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{EC}=0\times(-1)+(-1)\times1+(-1)\times(-1)$.

D'où $\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{EC}=0$.

Les vecteurs $\overrightarrow{HA}$ et $\overrightarrow{EC}$ sont donc orthogonaux.

11 a) • $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{BG}$

$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{BC}=-BC^2$

$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BG}=-a^2$.

• $\overrightarrow{DH}\cdot\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{BG}$

$\overrightarrow{DH}\cdot\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{BG}\cdot\overrightarrow{BG}=BG^2$

$\overrightarrow{DH}\cdot\overrightarrow{BG}=a^2$.

b) $\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{BG}=(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DH})\cdot\overrightarrow{BG}$.

Donc $\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{DH}\cdot\overrightarrow{BG}$.

Or $\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BG}=0$

donc $\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{BG}=-a^2+0+a^2=0$.

12 a) Dans le triangle ABD isocèle en A, la droite (AI) est aussi médiatrice du segment [BD]. Ainsi les droites (AI) et (BD) sont orthogonales.
De même, les droites (CI) et (BD) sont orthogonales.
La droite (BD) est donc orthogonale à deux droites sécantes du plan (AIC).
La droite (BD) est donc orthogonale au plan (AIC).
b) La droite (BD) est orthogonale au plan (AIC), donc elle est orthogonale à toute droite de ce plan. En particulier, la droite (BD) est orthogonale à la droite (AC).

15 a) I est le centre de la face ABCD.
Dans le rectangle EGCA, la droite (MI) est perpendiculaire à la droite (AC).
De même, dans le rectangle HFDB, la droite (MI) est perpendiculaire à la droite (DB).
La droite (MI) est donc orthogonale à deux droites sécantes du plan (ABC).
Ainsi la droite passant par M et orthogonale au plan (ABC) est la droite (MI).
Elle coupe le plan (ABC) en I. Ainsi, le point I est le projeté orthogonal du point M sur le plan (ABC).
b) La droite (FB) est orthogonale à deux droites sécantes (EF) et (FB) du plan (EFG).
La droite (FB) est donc orthogonale au plan (EFG).
De plus, M appartient à ce plan, donc (EFG) est le plan passant par M et orthogonal à la droite (FB). Il coupe la droite (FB) en F.
Ainsi F est le projeté orthogonal du point M sur la droite (FB).

16 a) Le triangle CDI est isocèle en I. La droite (IJ) est donc une médiatrice. Les droites (IJ) et (CD) sont donc orthogonales.
b) Ainsi, le projeté orthogonal du point I sur la droite (CD) est le point J. La distance du point I à la droite (CD) est donc égale à IJ.
Or le triangle IJC est rectangle en J donc :

$$IJ^2=IC^2-JC^2$$

De plus, le triangle AIC est rectangle en I donc :

$$IC^2=AC^2-AI^2$$

D'où $IJ^2=AC^2-AI^2-JC^2$

Donc $IJ^2=1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$

On en déduit que la distance du point I à la droite (CD) est donc $\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

18

```python
def Est_rectangle(xE,yE,zE,xF,yF,zF,xG,yG,zG):
    a=xE-xF
    b=yE-yF
    c=zE-zF
    d=xE-xG
    e=yE-yG
    f=zE-zG
    g=xF-xG
    h=yF-yG
    i=zF-zG
    u=a*d+b*e+c*f
    v=a*g+b*h+c*i
    w=d*g+e*h+f*i
    if u==0:
        return("Le triangle est rectangle en E")
    elif v==0:
        return("Le triangle est rectangle en F")
    elif w==0:
        return("Le triangle est rectangle en G")
    else:
        return("Le triangle n'est pas rectangle")
```

```
>>> Est_rectangle(0,0,0,1,1,1,1,1,0)
'Le triangle est rectangle en G'
```

POUR SE TESTER

74 1. B 2. C 3. C 4. B 5. B 6. C

75 1. C, D 2. B, C 3. A B D 4. B, C

76 1. **Faux**. En effet, une droite d contenue elle aussi dans le plan $\mathcal{P}$ et orthogonale à la droite d' ne peut être orthogonale au plan $\mathcal{P}$.

2. **Faux**. En effet, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC})$.

Donc $-3=2\times3\times\cos(\widehat{BAC})$.

D'où, $\cos(\widehat{BAC})=-\frac{1}{2}$ et $\widehat{BAC}=\frac{2\pi}{3}$rad.

3. **Vrai**. En effet, $\overrightarrow{AB}(1;1;0)$,
$\overrightarrow{AC}(1;-1;0)$, $\overrightarrow{AD}(1;0;-1)$.

Ainsi $\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{2}$ donc $\left\|\frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{AB}\right\|=1$.

De même $\left\|\frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{AC}\right\|=\left\|\frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{AD}\right\|=1$.

De plus, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1\times1+1\times(-1)+0\times0=0$.

De même, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=0$.

Ainsi les vecteurs $\frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{AB}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{AC}$ et $\frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{AD}$ sont orthogonaux deux à deux.
On en déduit que le repère $\left(A;\frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{AB},\frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{AC},\frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{AD}\right)$ est orthonormé.

5 Représentations paramétriques et équations cartésiennes

SAVOIR-FAIRE

3 **a)** $\overrightarrow{IJ}(4\,;4\,;-3)$ est un vecteur directeur de la droite (IJ). I$(-1\,;0\,;2)$ est un point de la droite (IJ). Une représentation paramétrique de la droite (IJ) est $\begin{cases} x=-1+4t \\ y=4t \\ z=2-3t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$

b) • S $\in$ (IJ) équivaut à dire qu'il existe un nombre réel t tel que :

$\begin{cases} 1=-1+4t \\ 4=4t \\ 2=2-3t \end{cases}$ c'est-à-dire $\begin{cases} t=\frac{1}{2} \\ t=1 \\ t=0 \end{cases}$.

Donc le point S n'appartient pas à (IJ).

• T $\in$ (IJ) équivaut à dire qu'il existe un nombre réel t tel que :

$\begin{cases} 7=-1+4t \\ 8=4t \\ -4=2-3t \end{cases}$ c'est-à-dire $\begin{cases} t=2 \\ t=2 \\ t=2 \end{cases}$.

Donc le point T appartient à (IJ).

4 **a)** Pour $t=0$, on obtient le point A$(-2\,;0\,;3)$ de d.
Pour $t=2$, on obtient le point B$(2\,;10\,;-11)$ de d.
b) $\vec{u}(2\,;5\,;-4)$ est un vecteur directeur de d.
$\vec{v}=\frac{1}{2}\vec{u}$ de coordonnées $\left(1\,;\frac{5}{2}\,;-2\right)$ en est un autre.
Et le vecteur $\overrightarrow{AB}(4\,;10\,;-8)$ en est un troisième.

7 **a)** $\vec{n}(5\,;4\,;1)$ est un vecteur normal de $\mathcal{P}$, donc une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est de la forme $5x+4y+z+d=0$.
De plus, le point A$(-2\,;1\,;3)$ appartient au plan $\mathcal{P}$, donc $5\times(-2)+4\times1+3+d=0$ d'où $-3+d=0$ et $d=3$.
Ainsi, une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ est $5x+4y+z+3=0$.
b) $5\times2+4\times0-7+3=6$ et $6\neq0$,
donc le point B n'appartient pas au plan $\mathcal{P}$.

8 **a)** $\vec{n}(5\,;-1\,;1)$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$.
b) En remplaçant, par exemple, x par 2 et y par 1, on obtient, $5\times2-1+z+2=0$ soit $11+z=0$ et $z=-11$.
Ainsi, le point A$(2\,;1\,;-11)$ appartient au plan $\mathcal{P}$.

10 L'énoncé demande le point d'intersection de d et d', c'est donc qu'elles sont sécantes. On est conduit à résoudre le système :

$\begin{cases} 1+t=2t' \\ 3+t=1+t' \\ -4-2t=3+t' \end{cases}$ c'est-à-dire $\begin{cases} t-2t'=-1 \\ t-t'=-2 \\ -2t-t'=7 \end{cases}$.

Les deux premières équations ont pour solution $(t\,;t')=(-3\,;-1)$.
Or, $-2\times(-3)-(-1)=6+1=7$.
Donc d et d' sont sécantes en A$(-2\,;0\,;2)$ (on remplace t par -3 ou t' par -1 dans les représentations paramétriques de d et d').

14 **a)** $\vec{n}(-1\,;2\,;1)$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$, c'est donc un vecteur directeur de la droite Δ passant par A et orthogonale à $\mathcal{P}$.
Δ a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x=2-t \\ y=-3+2t \\ z=5+t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$$

b) Le projeté orthogonal H du point A sur $\mathcal{P}$ est le point d'intersection de Δ et de $\mathcal{P}$. Pour trouver ses coordonnées, on résout le système :

$$\begin{cases} x=2-t \\ y=-3+2t \\ z=5+t \\ -x+2y+z+5=0 \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} x=2-t \\ y=-3+2t \\ z=5+t \\ -(2-t)+2\times(-3+2t)+(5+t)+5=0 \end{cases}$$

On obtient : $t=-\frac{1}{3}$ et donc $x=\frac{7}{3}$, $y=-\frac{11}{3}$, $z=\frac{14}{3}$.

D'où H$\left(\frac{7}{3}\,;-\frac{11}{3}\,;\frac{14}{3}\right)$.

15 **a)** $\vec{u}(2\,;-1\,;-3)$ est un vecteur directeur de la droite d, donc c'est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$ passant par A et perpendiculaire à d.
Le plan $\mathcal{P}$ a donc une équation cartésienne de la forme $2x-y-3z+d=0$. Or B $\in\mathcal{P}$ c'est-à-dire $2\times(-1)-2-3\times4+d=0$ soit $-16+d=0$ et $d=16$.
Ainsi, $\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne $2x-y-3z+16=0$.
b) Le projeté orthogonal K du point B sur la droite d est le point d'intersection de d et $\mathcal{P}$.
On résout le système :

$\begin{cases} x=1+2t \\ y=-t \\ z=2-3t \\ 2x-y-3+16=0 \end{cases}$ c'est-à-dire

$$\begin{cases} x=1+2t \\ y=-t \\ z=2-3t \\ 2(1+2t)-(-t)-3(2-3t)+16=0 \end{cases}$$

On obtient $t=-\frac{6}{7}$ et donc $x=-\frac{5}{7}$, $y=\frac{6}{7}$, $z=-\frac{4}{7}$.

D'où H$\left(-\frac{5}{7}\,;-\frac{6}{7}\,;-\frac{4}{7}\right)$.

POUR SE TESTER

63 **1.** C **2.** D **3.** B

64 **1.** A, B, C **2.** A, C

65 **1. Vrai**. En effet, C$(1\,;1\,;0)$, F$(1\,;0\,;1)$, A$(0\,;0\,;0)$.
$\overrightarrow{FC}(0\,;1\,;-1)$ est normal au plan (ABG). Donc le plan (ABG) a une équation de la forme $y-z+d=0$.
Or, A $\in$ (ABG), donc $d=0$. Finalement, le plan (ABG) a pour équation cartésienne $y-z=0$.
2. Vrai. En effet, si on note d la droite dont la représentation paramétrique est donnée, on vérifie si C $\in d$.

$\begin{cases} 1=1-2t \\ 1=1-2t \\ 0=2t \end{cases}$ qui est équivalent à $t=0$, donc C $\in d$.

On vérifie ensuite si E $\in d$.

$\begin{cases} 0=1-2t \\ 0=1-2t \\ 1=2t \end{cases}$ qui est équivalent à $t=\frac{1}{2}$, donc E $\in d$.

Finalement, la droite d est bien la droite (CE).

3. Faux. En effet, si on note $\mathcal{P}$ le plan passant par I$\left(\frac{3}{4}\,;0\,;1\right)$ et orthogonal à la droite (CE), c'est-à-dire de vecteur normal $\overrightarrow{CE}(-1\,;-1\,;1)$, alors $\mathcal{P}$ a une équation cartésienne de la forme $-x-y+z+d=0$.
Or I $\in\mathcal{P}$, donc $-\frac{3}{4}-0+1+d=0$ d'où $d=-\frac{1}{4}$ et $\mathcal{P}$ a une équation cartésienne de la forme $-x-y+z-\frac{1}{4}=0$.
Le point H est le point d'intersection de d et de $\mathcal{P}$, on résout donc le système :

$$\begin{cases} x=1-2t \\ y=1-2t \\ z=2t \\ -x-y+z-\frac{1}{4}=0 \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} x=1-2t \\ y=1-2t \\ z=2t \\ -(1-2t)-(1-2t)+2t-\frac{1}{4}=0 \end{cases}$$

On obtient $t=\frac{3}{8}$ et donc $x=\frac{1}{4}$, $y=\frac{1}{4}$, $z=\frac{3}{4}$.

Finalement, le projeté orthogonal du point sur la droite (CE) a pour coordonnées $\left(\frac{1}{4}\,;\frac{1}{4}\,;\frac{3}{4}\right)$.

6 Limite des suites

SAVOIR-FAIRE

3 a) Pour tout entier naturel n, $4n^2 > 10^9$ équivaut à $n > \sqrt{250\,000\,000}$.
Or $\sqrt{250\,000\,000} \approx 15\,811{,}4$, donc $u_n > 10^9$ pour tout $n > 15\,812$.
b) On se donne un intervalle $]A\,;+\infty[$ avec $A \geqslant 0$; pour tout entier naturel n, $u_n \in]A\,;+\infty[$ équivaut à $n^2 > \frac{A}{4}$, c'est-à-dire $n > \sqrt{\frac{A}{4}}$.
On note N le plus petit nombre entier supérieur ou égal à $\sqrt{\frac{A}{4}}$. Ainsi l'intervalle $]A\,;+\infty[$ contient tous les termes u_n pour tout $n > N$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$..

4 a) Pour tout entier naturel n, $-10\sqrt{n} < -10^7$ équivaut à $\sqrt{n} > 10^6$, c'est-à-dire $n > 10^{12}$.
b) On se donne un intervalle $]-\infty\,;A[$ avec $A \leqslant 0$; pour tout entier naturel n, $v_n \in]-\infty\,;A[$ équivaut à $-10\sqrt{n} < A$, c'est-à-dire $n > \frac{A^2}{100}$.
On note N le plus petit nombre entier supérieur ou égal à $n > \frac{A^2}{100}$. Ainsi l'intervalle contient tous les termes pour tout $n > N$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.

7 On se donne un intervalle $]-\alpha\,;\beta[$ (avec $\alpha > 0$ et $\beta > 0$). Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_n \in]-\alpha\,;\beta[$ équivaut à $-\alpha < \frac{2}{\sqrt{n}} < \beta$, c'est-à-dire $0 < \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{1}{2}\beta$, soit $\sqrt{n} > \frac{2}{\beta}$. Cette inégalité équivaut à $n > \frac{4}{\beta^2}$.
On note N le plus petit nombre entier supérieur ou égal à $\frac{4}{\beta^2}$. Ainsi l'intervalle $]-\alpha\,;\beta[$ contient tous les termes u_n pour tout $n > N$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

8 On conjecture que la limite de la suite (v_n) est 5.

	A	B
1	n	v_n
2	0	4
3	1	4,5
4	2	4,8
5	3	4,9
6	4	4,94117647
7	5	4,96153846

	A	B
1	n	v_n
102	100	4,99990001
103	101	4,99990198
104	102	4,99990389
105	103	4,99990575
106	104	4,99990755
107	105	4,99990931

11 a) Pour tout entier naturel n, $\frac{2n+1}{3n+2} \geqslant 0$ donc $u_n \geqslant n^2$.
b) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ donc, d'après un théorème de comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

12 a) Pour tout entier naturel n, $-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin(n) \leqslant 1$.
Donc $-2 \leqslant 2\sin(n) \leqslant 2$ et $-3 \leqslant \cos(n) + 2\sin(n) \leqslant 3$.

Ainsi, pour tout entier naturel n, $\frac{-3}{n^2} \leqslant w_n \leqslant \frac{3}{n^2}$.
b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-3}{n^2} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{n^2} = 0$ (suites de référence), donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$.

14 a) $\lim\limits_{n\to+\infty} 13n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 13n - 6 + \sqrt{n} = +\infty$ (limite d'une somme)
b) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,
$$v_n = 2n - 30\sqrt{n} + 4 = n\left(2 - \frac{30}{\sqrt{n}} + \frac{4}{n}\right).$$
$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\frac{30}{\sqrt{n}}\right) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{4}{n} = 0$
donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(2 - \frac{30}{\sqrt{n}} + \frac{4}{n}\right) = 2$ (limite d'une somme).
De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ (limite d'un produit).
c) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,
$$w_n = \frac{100n}{n\left(2 + \frac{3}{n}\right)} = \frac{100}{2 + \frac{3}{n}}.$$
$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(2 + \frac{3}{n}\right) = 2$ (limite d'une somme). Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \frac{100}{2} = 50$ (limite d'un quotient).

17 a) $\lim\limits_{n\to+\infty} (0{,}0001e^n) = +\infty$ (suite de référence), donc par quotient $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{80}{0{,}0001e^n + 2{,}0966} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} e_n = 4{,}3$.
b)

```
from math import *

def D(n):
    y=4.3+80/(0.0001*exp(n)+2.0966)
    return y

def Seuil(S):
    n=0
    while D(n)>S:
        n=n+1
    return n
```

```
>>> Seuil(4.5)
16
```

On exécute **Seuil(4.5)** et on obtient 16. Cela signifie que l'entreprise rejettera moins de 4 500 tonnes de déchets après 16 ans, soit en 2036.

POUR SE TESTER

62 1. A 2. D 3. C 4. B

63 1. A, C 2. B, C, D 3. C, D

64 1. **Faux**. En effet, si pour tout entier naturel n, $u_n = 19n - 11$ et $v_n = 20 - 19n$, alors $u_n + v_n = 9$. Ainsi, la suite $(u_n + v_n)$ est convergente alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.
2. **Vrai**. En effet, on peut poser pour tout entier naturel n, $u_n = n + 1$ et $v_n = \frac{10}{n+1}$.
3. **Faux**. En effet, si pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{1}{n+1}$, alors $u_n + \frac{1}{u_n} = \frac{1}{n+1} + n + 1$.
Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1) = +\infty$ donc $\left(u_n + \frac{1}{u_n}\right)$ diverge vers $+\infty$.
4. **Vrai**. En effet, pour tout entier naturel n, $w_n^4 + n - 500 \geqslant n - 500$, donc $w_{n+1} \geqslant n - 500$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} (n - 500) = +\infty$ donc, d'après un théorème de comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} w_{n+1} = +\infty$, soit $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = +\infty$.

7 Compléments sur les suites

SAVOIR-FAIRE

3 a) Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = 2n^2$ donc $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$.
Ainsi, la suite (u_n) est croissante.
b) Pour tout entier naturel n, $v_n = f(n)$ où f est la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = e^{2-3x}$.
Pour tout réel x, $f'(x) = -3e^{2-3x}$ et $f'(x) < 0$.
D'où le tableau de variations de la fonction f.

x	0 $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	e^2 $\searrow$

La fonction f est décroissante sur $[0\,;+\infty[$, donc la suite (v_n) est décroissante.

4 • **Initialisation** : $v_0 = 2$, donc $v_0 \geqslant -3{,}75$.
• **Hérédité** : on suppose que pour un nombre entier naturel k, $v_k \geqslant -3{,}75$.
Alors $0{,}2v_k \geqslant -0{,}75$ et $0{,}2v_k - 3 \geqslant -3{,}75$.
Ainsi $v_{k+1} \geqslant -3{,}75$.
• **Conclusion** : pour tout entier naturel n, $v_n \geqslant -3{,}75$.
La suite (v_n) est minorée par $-3{,}75$.

7 a) $\frac{3}{2} > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} = +\infty$
et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(2 - \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}\right) = -\infty$.
b) Pour tout entier naturel n, $v_n = 1 \times (1 - \sqrt{2})^n$. Or, $1 - \sqrt{2} \approx -0{,}4$.
$-1 < 1 - \sqrt{2} < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (1 - \sqrt{2})^n = 0$
et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$

8 Pour tout entier naturel n,
$$u_n = \frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \ldots + \frac{7}{10^n}$$
$$u_n = 7\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \ldots + \frac{1}{10^n}\right)$$
$$u_n = 7\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \ldots + \frac{1}{10^n}\right) - 7$$
$$u_n = 7 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{10}} - 7$$
$$u_n = \frac{70}{9}\left(1 - \left(\frac{1}{10}\right)^{n+1}\right) - 7$$
Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^{n+1} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{70}{9} - 7 = \frac{7}{9}$

11 a) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,
$a_{n+1} - a_n = n^2$ donc $a_{n+1} - a_n \geqslant 0$.
Ainsi, la suite (a_n) est croissante.
b) On raisonne par l'absurde.
On suppose que la suite (a_n) est majorée.
(a_n) étant croissante, elle converge alors vers un nombre réel ℓ.
$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \ell$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{n+1} = \ell$.
Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n + n^2) = +\infty$.
La limite de la suite (a_n) étant unique, on aboutit à une contradiction, donc la suite (a_n) n'est pas majorée.
c) La suite (a_n) est une suite croissante non majorée donc elle admet pour limite $+\infty$.

12 a) • **Initialisation** : $v_0 = 100$
$v_1 = 0{,}4 \times 100 + 40 = 80$
Donc $65 \leqslant v_1 \leqslant v_0$.
• **Hérédité** : on suppose que pour un nombre entier naturel k, $65 \leqslant v_{k+1} \leqslant v_k$.
On démontre alors que $65 \leqslant v_{k+2} \leqslant v_{k+1}$.

De l'hypothèse de récurrence $65 \leqslant v_{k+1} \leqslant v_k$ on déduit $66 \leqslant 0{,}4v_{k+1}+40 \leqslant 0{,}4v_k+40$ soit
$$65 \leqslant 66 \leqslant v_{k+2} \leqslant v_{k+1}.$$
• **Conclusion** : pour tout entier naturel n,
$$65 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n$$
b) La suite (u_n) est donc décroissante et minorée par 65, donc elle converge vers un nombre réel ℓ tel que $\ell \geqslant 65$.

14 **a)** • **Initialisation** : $u_0=-1 ; 4-5\left(\frac{1}{2}\right)^0=-1$.

Donc $u_0=4-5\left(\frac{1}{2}\right)^0$.

• **Hérédité** : on suppose que pour un nombre entier naturel k, $u_k=4-5\left(\frac{1}{2}\right)^k$.

On démontre alors que $u_{k+1}=4-5\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$.

De l'hypothèse de récurrence $u_k=4-5\left(\frac{1}{2}\right)^k$, on déduit
$$u_{k+1}=\frac{1}{2}\left(4-5\left(\frac{1}{2}\right)^k\right)+2$$
$$u_{k+1}=2-5\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}+2$$
$$u_{k+1}=4-5\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$$
• **Conclusion** : pour tout entier naturel n,
$$u_n=4-5\left(\frac{1}{2}\right)^n$$
b) $-1<\frac{1}{2}<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$ et
$$\lim_{n\to+\infty}(u_n)=4$$
c) Voici une fonction **Seuil** écrite en langage Python qui traduit cet algorithme.

```
from math import *

def Seuil(p):
    n=0
    u=-1
    while 4-u>=10**(-p):
        n=n+1
        u=4-5*0.5**n
    return n,u
```

On obtient :

```
>>> Seuil(5)
(19, 3.999990463256836)
```

Donc la valeur cherchée est $n=19$.

POUR SE TESTER

62 **1.** A **2.** B **3.** D **4.** C

63 **1.** A, B, C, D **2.** B, D **3.** A **4.** A, B, C

64 **1. Faux**. En effet, par exemple, la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n=(-2)^n$ n'est pas majorée et elle n'a pas de limite.

2. Faux. En effet, par exemple, la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n=2+\cos(n)$ est bornée par 1 et 3 et elle n'est pas convergente.

3. Faux. En effet, $S_n=1+2+2^2+\ldots+2^{n-1}$
$$S_n=\frac{1-2^n}{1-2}=2^n-1.$$
Comme $2>1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}2^n=+\infty$ et
$$\lim_{n\to+\infty}2^n-1=+\infty.$$
4. Vrai. En effet, la suite (u_n) est décroissante et minorée par 1. Elle converge donc vers un nombre réel $\ell \geqslant 1$.

8 Limites des fonctions

SAVOIR-FAIRE

3 **a)** $f(x)>100$ équivaut à $\sqrt{x}+2>100$ c'est-à-dire $\sqrt{x}>98$.
La fonction carré étant strictement croissante sur $]0;+\infty[$, $\sqrt{x}>98$ équivaut à $x>98^2$ soit $x>9\,604$.
Ainsi, l'intervalle $]100;+\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour tout réel $x>9\,604$.
b) $f(x)$ appartient à l'intervalle $]A;+\infty[$ équivaut à $\sqrt{x}+2>A$ c'est-à-dire $\sqrt{x}>A-2$.
La fonction carré étant strictement croissante sur $[0;+\infty[$, $\sqrt{x}>A-2$ (avec $A>2$) équivaut à $x>(A-2)^2$.
Ainsi, l'intervalle $]A;+\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour tout réel $x>(A-2)^2$.
c) On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

4 **a)** $g(x)$ appartient à l'intervalle $]1;A[$ équivaut à $1<\frac{1}{x}+1<A$ c'est-à-dire $0<\frac{1}{x}<A-1$. La fonction inverse étant strictement décroissante sur $]0;+\infty[$, $0<\frac{1}{x}<A-1$ (avec $A>1$) équivaut à $x>\frac{1}{A-1}$.
Ainsi, l'intervalle $]1;A[$ contient toutes les valeurs $g(x)$ pour tout réel $x>\frac{1}{A-1}$.
b) On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=1$.
c) La droite d d'équation $y=1$, est une asymptote horizontale en $+\infty$ à $\mathscr{C}$.

7 D'après l'écran de calcul formel, pour tout réel $A>0$, $f(x)>A$ équivaut à $2<x<\frac{2A+1}{A}$ c'est-à-dire $2<x<2+\frac{1}{A}$.
Ainsi, l'intervalle $]A;+\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour tout réel $x>2$ et x assez proche de 2. Donc $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=+\infty$.

8 **a)** L'intervalle $J=]2{,}5;3{,}5[$ qui contient 3, ne contient pas toutes les valeurs $g(x)$ lorsque x est proche de 2.
En effet, J ne contient pas l'image 1 des nombres proches de 2 mais strictement supérieurs à 2.
b) Graphiquement, on lit que $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\x<2}}g(x)=3$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\x>2}}g(x)=1$.

11 Pour tout réel x, $\cos(x)\leqslant 1$, alors $-4\cos(x)\geqslant -4$. Donc $f(x)\geqslant 5x-4$.
Or, $\lim\limits_{x\to+\infty}(5x-4)=+\infty$, donc d'après un théorème de comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

13 **a)** Pour tout réel $x>0$, $-1\leqslant\cos(x)\leqslant 1$.
Or, pour tout réel $x>0$, $\frac{1}{x}>0$ donc $-\frac{1}{x}\leqslant g(x)\leqslant\frac{1}{x}$.
b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0$.
Donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$.

17 **a)** $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x^4)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x)=+\infty$,
donc FI du type « $\infty-\infty$ ».
b) Pour tout réel $x\neq 0$:
$$f(x)=x^4\left(-1+\frac{3}{x^3}+\frac{1}{x^4}\right).$$
Or, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{x^3}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^4}=0$ donc, d'après les règles opératoires $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-1+\frac{3}{x^3}+\frac{1}{x^4}\right)=-1$.
D'autre part $\lim\limits_{x\to+\infty}x^4=+\infty$.
Donc d'après la limite d'un produit
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty.$$

18 **a)** Pour tout réel $x>-1$,
$$f(x)=\frac{4x\left(1+\frac{5}{4x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=4\times\frac{1+\frac{5}{4x}}{1+\frac{1}{x}}.$$
D'après les règles opératoires $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{5}{4x}}{1+\frac{1}{x}}=1$.
Donc, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=4$.
b) $\lim\limits_{x\to-1}(4x+5)=1$ et $\lim\limits_{x\to-1}(x+1)=0$ avec $x+1>0$ (car $x>-1$). Donc, $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=+\infty$.

21 f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,
$$f'(x)=e^x-x-1.$$
f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,
$$f''(x)=e^x-1.$$
Or, $e^x-1>0$ équivaut à $e^x>1$, c'est-à-dire $e^x>e^0$, soit $x>0$.
Donc f' est croissante sur $[0;+\infty[$ et décroissante sur $]-\infty;0]$.
$f'(0)=0$, donc d'après le tableau de variations ci-dessous, pour tout réel x, $f'(x)\geqslant 0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$\searrow$		0		$\nearrow$

Donc, pour tout réel x, $f'(x)\geqslant 0$ et la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.
$f(0)=0$ donc f est négative sur $]-\infty;0[$ et f est positive sur $]0;+\infty[$.

22 **a)** Pour tout réel $x\neq 0$,
$$h(x)=x^2\left(\frac{e^x}{x^2}-1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right).$$
On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}=+\infty$ donc :
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x^2}-1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)=+\infty.$$
D'autre part $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$ donc d'après la limite d'un produit, $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=+\infty$.
b) $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^2+2x+3)=-\infty$
donc $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=-\infty$.

24 **1.** La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x)=-e^x$.
Pour tout réel x, $f'(x)<0$ et la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$.
2. a)

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	0	$1-e$	$1-e^2$	$1-e^3$	$1-e^4$	$1-e^5$
$f(x)\geqslant A$	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Faux

Le plus petit entier naturel n tel que $f(n)<-100$ est 5.
f est décroissante sur $\mathbb{R}$, donc pour tout réel $x\geqslant 5$, $f(x)<-100$.
b) On est certain que l'algorithme se termine.
En effet, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ donc pour tout réel $A<0$, l'intervalle $]-\infty;A[$ contient tous les nombres $f(x)$ pour x assez grand.

POUR SE TESTER

78 **1.** C **2.** B **3.** D **4.** A

79 **1.** B, C **2.** A, C, D **3.** A, C

80 **1. Vrai**. En effet, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$ donc la droite d'équation $y = 2$ est une asymptote horizontale en $-\infty$ à la courbe $\mathscr{C}$.

2. Faux. En effet, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ donc la seule asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}$ est la droite d'équation $y = 2$ (voir **1.**).

3. Vrai. En effet, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

D'après la limite d'un quotient $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

4. Faux. En effet, on utilise le schéma de décomposition ci-contre :

$$x \longmapsto \underbrace{f(x)}_{X} \longmapsto e^X$$

$\lim\limits_{x \to -\infty} X = 2$ et $\lim\limits_{X \to 2} e^X = e^2$.

Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{f(x)} = e^2$.

9 Compléments sur la dérivation

SAVOIR-FAIRE

3 • $f(1) = g(1) = 1$, les deux courbes passent donc par le point A(1 ; 1).
• Pour tout réel x, $f'(x) = -e^{x-1}$ et $g'(x) = 4x - 5$.
Ainsi $f'(1) = g'(1) = -1$.
• Les tangentes en A à chacune des deux courbes ont le même coefficient directeur ; les tangentes sont donc confondues.

4 La courbe $\mathscr{C}_2$ représente f' et la courbe $\mathscr{C}_1$ représente f.
En effet, $f'(x) \geqslant 0$ sur $[-2 ; 0]$ et $f'(x) \leqslant 0$ sur $[-3 ; -2]$ et $[0 ; 1]$. Cela est cohérent avec le fait que f est croissante sur $[-2 ; 0]$ et décroissante sur $[-3 ; -2]$ et sur $[0 ; 1]$.

7 **a)** $x \xmapsto{u} \underbrace{x^2 - 5x}_{X} \xmapsto{v} X^3$

f est donc la composée de la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^2 - 5x$ suivie de la fonction cube v définie sur $\mathbb{R}$.

b) $x \xmapsto{u} \underbrace{5x^2 + 7}_{X} \xmapsto{v} \sqrt{X}$

f est donc la composée de la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 5x^2 + 7$ suivie de la fonction racine carrée v définie sur $[0 ; +\infty[$.

9 La fonction $x \mapsto x^2 + 1$ est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$, la fonction $v : x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}$. La fonction $u : x \mapsto x - 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
f est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$u(x) = x - 1$ $\quad u'(x) = 1$

$v(x) = \sqrt{x^2+1}$ $\quad v'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

Ainsi $f'(x) = 1 \times \sqrt{x^2+1} + (x-1) \times \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$$f'(x) = \frac{(\sqrt{x^2+1})^2 + x^2 - x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{2x^2 - x + 1}{\sqrt{x^2+1}}$$

et $f'(x) = (2x^2 - x + 1) \times \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x^2+1}$.

13 **a)** La courbe $\mathscr{C}$ est au-dessous de ses tangentes sur l'intervalle $[-3 ; 1]$, f est donc concave sur cet intervalle.
La courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de ses tangentes sur l'intervalle $[1 ; 3]$, f est donc convexe sur cet intervalle.
b) La courbe $\mathscr{C}$ est au-dessous de ses tangentes sur l'intervalle $[-3 ; 0]$, f est donc concave sur cet intervalle.
La courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de ses tangentes sur l'intervalle $[0 ; 3]$, f est donc convexe sur cet intervalle.
c) La courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de ses tangentes sur les intervalles $[-3 ; 1]$ et $[1 ; 3]$, f est donc convexe sur chacun de ces intervalles.
La courbe $\mathscr{C}$ est au-dessous de ses tangentes sur l'intervalle $[-1 ; 1]$, f est donc concave sur cet intervalle.
d) La courbe $\mathscr{C}$ est au-dessous de ses tangentes sur l'intervalle $[-3 ; -1]$, f est donc concave sur cet intervalle.
La courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de ses tangentes sur l'intervalle $[-1 ; 3]$, f est donc convexe sur cet intervalle.

14 D'après le graphique, la courbe $\mathscr{C}$ traverse sa tangente au point B dont l'abscisse est sensiblement égale à $-0,5$.
Le point B est le point d'inflexion de $\mathscr{C}$.

17 La fonction f' est croissante sur les intervalles $[-6 ; -3]$ et $[2 ; 5]$, la fonction f est donc convexe sur chacun de ces intervalles.
La fonction f' est décroissante sur l'intervalle $[-3 ; 2]$, la fonction f est donc concave sur cet intervalle.
La courbe représentative de f admet donc deux points d'inflexion, d'abscisses -3 et 2.

18 **a)** Pour tout réel x,
$f'(x) = 1 \times e^x + (x - 1) \times e^x = xe^x$
$f''(x) = 1 \times e^x + x \times e^x = (x + 1)e^x$
b) Pour tout réel x, $e^x > 0$ donc $f''(x)$ est du signe de $x + 1$.
On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

c) Sur l'intervalle $]-\infty ; -1]$, $f''(x) \leqslant 0$ donc f est concave.
Sur l'intervalle $[-1 ; +\infty[$, $f''(x) \geqslant 0$ donc f est convexe.
f'' s'annule en -1 en changeant de signe, donc $\mathscr{C}$ admet le point $A(-1 ; -2e^{-1})$ pour point d'inflexion.

20 **a)** La fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $[-3 ; 3]$.
Pour tout réel x de l'intervalle $[-3 ; 3]$,

$$f'(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2 + 5x \text{ et } f''(x) = x^3 - 2x + 5.$$

b) Le programme ci-dessous, écrit en langage Python, renvoie un encadrement d'amplitude 10^{-2} de i.

```python
from math import*

def fseconde(x):
    y=x**3-2*x+5
    return y

def Inflexion():
    x=-3
    while fseconde(x)<=0:
        x=x+0.01
    x1=round(x-0.01,2)
    x2=round(x,2)
    c="i compris entre", x1, "et",x2
    return c
```

Après exécution, on obtient l'affichage :

```
>>> Inflexion()
('i compris entre', -2.1, 'et', -2.09)
```

Le point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}$ a donc une abscisse i telle que $-2,10 \leqslant i \leqslant -2,09$.

POUR SE TESTER

66 **1.** D **2.** A **3.** B **4.** B **5.** A

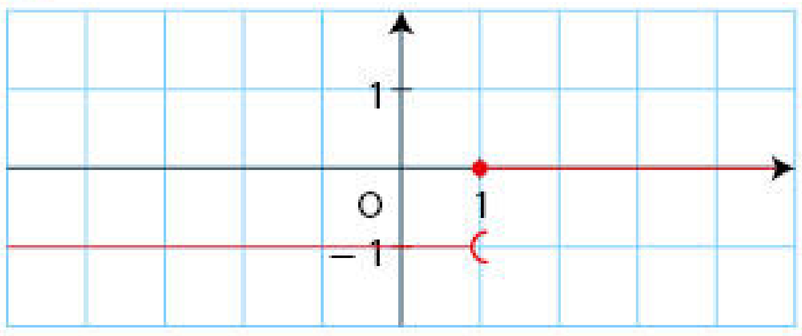
67 **1.** A, D **2.** A, D **3.** A, C, D

68 **1. Faux**. En effet, la fonction g est convexe sur l'intervalle $]-1 ; +\infty[$, donc également sur l'intervalle $[0 ; 2]$.
Ainsi, pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; 2]$, $g''(x) \geqslant 0$.
2. Vrai. En effet, la fonction h est convexe sur $\mathbb{R}$, sa courbe représentative $\mathscr{C}$ est donc située au-dessus de ses tangentes sur $\mathbb{R}$.
Ainsi, pour tout réel x, $h(x) \geqslant -7x + 4$.
En particulier, $h(-2) \geqslant -7 \times (-2) + 4$, soit $h(-2) \geqslant 18 \geqslant 10$.

10 Continuité des fonctions d'une variable réelle

SAVOIR-FAIRE

3



La fonction f est continue sur l'intervalle $]-\infty\,;1]$ et sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
La fonction f est discontinue en 1.

4 La fonction $x \mapsto -2x$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $]-\infty\,;2]$ et la fonction $x \mapsto mx-6$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $]2\,;+\infty[$.

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x) = -4 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x) = 2m-6.$$

Donc f est continue en 2 si, et seulement si, $2m-6=-4$, c'est-à-dire $m=1$.

Alors, $f(x) = \begin{cases} -2x & \text{si} \quad x<2 \\ x-6 & \text{si} \quad x \geqslant 2 \end{cases}$.

Ainsi, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ pour $m=1$

7 **a)** On note pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = \dfrac{2}{n}+1$ et f la fonction exponentielle définie sur $\mathrm{I}=[0\,;+\infty[$.

Pour $n \geqslant 1$, $\dfrac{2}{n} \geqslant 0$ donc $u_n \geqslant 1$ et $u_n \in \mathrm{I}$.

Ainsi, pour tout $n \geqslant 1$, $v_n = f(u_n)$.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ et la suite (u_n) converge vers $\ell = 1$.
La fonction f est continue sur l'intervalle I donc la suite (v_n) converge vers $f(\ell)$, c'est-à-dire vers e^1, soit e.

8 **a)** f est la fonction définie sur $\mathrm{I}=\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}(1+x^2).$$

• Pour tout réel x, $f(x) \in \mathrm{I}$.
• $u_0 = 0$ donc $u_0 \in \mathrm{I}$.
Donc pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
b) La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ donc en particulier en ℓ. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$.

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$, donc d'après l'unicité de la limite d'une suite, $\ell = f(\ell)$ c'est-à-dire, est une solution dans l'intervalle I de l'équation $f(x)=x$, c'est-à-dire $\dfrac{1}{2}(1+x^2)=x$.

Dans l'intervalle I, l'équation $\dfrac{1}{2}(1+x^2)=x$ équivaut à $x^2-2x+1=0$, c'est-à-dire $(x-1)^2=0$. Sa solution est $x=1$; or, $1 \in \mathrm{I}$, donc la suite (u_n) converge vers $\ell = 1$.

11 La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.
$f(0)=5$ et $f(1)=2+3e^{-1}$ soit $f(1) \approx 3{,}1$.
Ainsi, 4 est compris entre $f(1)$ et 5.
Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins un nombre réel c compris entre 0 et 1 tel que $f(c)=4$.

12 L'équation $x^3-x=2x^2-1$ est équivalente à l'équation :

$$x^3-2x^2-x+1=0.$$

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=x^3-2x^2-x+1.$$

f est continue sur $\mathbb{R}$.
$f(0)=1$ et $f(1)=-1$.
Or, 0 est compris entre -1 et 1, donc d'après le théorème de Bolzano, l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[0\,;1]$.
Donc l'équation $x^3-x=2x^2-1$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.

14 **a)** • f est une fonction polynôme donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x, $f'(x)=3x^3-3$, c'est-à-dire $f'(x)=3(x^2-1)$.
On utilise le signe de x^2-1 pour dresser le tableau de variations ci-dessous de f.
• De plus, pour tout $x \neq 0$,

$$f(x) = x^3\left(1-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right).$$

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right)=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$ donc

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty.$$

• On montre de même $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$			0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	1	↘	-1	↗	$+\infty$

b) $f(0)=1$ et $f(1)=-1$.
$0 \in [-1\,;1]$ donc d'après le tableau de variations, l'équation $f(x)=0$ a une unique solution dans l'intervalle $[0\,;1]$.

17

```
from math import *

def f(x):
    y=exp(x)-x-2
    return y

def Dichotomie(n):
    a=0
    b=2
    while b-a>10**(-n):
        m=(a+b)/2
        if f(a)*f(m)<0:
            b=m
        else:
            a=m
    return m
```

```
>>> Dichotomie(6)
1.146193504333496
```

POUR SE TESTER

58 1. B 2. D 3. D 4. B 5. C

59 1. A, B, D 2. C, D 3. A

60 1. **Faux**. En effet, pour $k=-1$, l'équation $f(x)=-1$ admet -7 pour unique solution.
2. **Faux**. En effet, pour $k=30$, l'équation $f(x)=30$ admet deux solutions.
3. **Vrai**. En effet, si l'on note a le nombre réel de l'intervalle $]-\infty\,;-7]$ tel que $f(a)=30$, alors f est continue et strictement décroissante sur $]-\infty\,;a]$.
Or, $k \in]30\,;+\infty[$, donc l'équation $f(x)=k$ admet une unique solution dans $]-\infty\,;a]$.

11 Fonction logarithme

SAVOIR-FAIRE

3 **a)** Pour tout nombre réel x, $e^{7x}=5$ équivaut à $7x=\ln(5)$ c'est-à-dire $x=\dfrac{1}{7}\ln(5)$.

Donc, l'ensemble des solutions est $S=\left\{\dfrac{1}{7}\ln 5\right\}$.

b) Pour tout nombre réel $x>0$, $\ln(x)=5$ équivaut à $x=e^5$.
Donc, l'ensemble des solutions est $S=\{e^5\}$.
c) On résout l'équation dans l'ensemble E des nombres réels x tels que $6x-1>0$ et $2x+17>0$,

c'est-à-dire $x>\dfrac{1}{6}$ et $x>-\dfrac{17}{2}$ soit $E=\left]\dfrac{1}{6}\,;+\infty\right[$.

Pour tout x de E, $\ln(6x-1)=\ln(2x+17)$ équivaut à $6x-1=2x+17$ soit $x=\dfrac{9}{2}$.

$\dfrac{9}{2} \in E$ donc, l'ensemble des solutions est $S=\left\{\dfrac{9}{2}\right\}$.

5 **a)** Pour tout nombre réel x, $e^{3x} \leqslant 4$ équivaut à $3x \leqslant \ln(4)$ c'est-à-dire $x \leqslant \dfrac{1}{3}\ln(4)$.

Donc, l'ensemble des solutions est

$$S=\left]-\infty\,;\frac{1}{3}\ln(4)\right].$$

b) On résout l'inéquation dans l'ensemble E des nombres réels x tels que $6x+1>0$ c'est-à-dire $x>-\dfrac{1}{6}$ donc $E=\left]-\dfrac{1}{6}\,;+\infty\right[$.

Pour tout x de E, $\ln(6x+1)>2$ équivaut à $6x+1>e^2$, c'est-à-dire $x>\dfrac{e^2-1}{6}$.

Tous ces nombres sont dans E, donc l'ensemble des solutions est $S=\left]\dfrac{e^2-1}{6}\,;+\infty\right[$.

c) On résout l'inéquation dans l'ensemble E des nombres réels x tels que $3x>0$ et $2-5x>0$, c'est-à-dire $x>0$ et $x<\dfrac{2}{5}$ soit $E=\left]0\,;\dfrac{2}{5}\right[$.

Pour tout x de E, $\ln(3x)<\ln(2-5x)$ équivaut à $3x<2-5x$, c'est-à-dire $x<\dfrac{1}{4}$.

L'ensemble des solutions est l'ensemble des réels de E inférieurs à $\dfrac{1}{4}$ donc $S=\left]0\,;\dfrac{1}{4}\right[$.

9 **a)** $\ln(5)+\ln(0{,}4)=\ln(5\times 0{,}4)=\ln(2)$

b) $\ln\left(\dfrac{1}{16}\right)=-\ln(16)=-\ln(2^4)=-4\ln(2)$

c) $\ln(52)-\ln(13)=\ln\left(\dfrac{52}{13}\right)=\ln(4)=\ln(2^2)=2\ln(2)$

d) $\ln(8)=\ln(2^3)=3\ln(2)$

e) $\ln(\sqrt{32})=\dfrac{1}{2}\ln(32)=\dfrac{1}{2}\ln(2^5)=\dfrac{5}{2}\ln(2)$

12 **a)** $x+\ln(1+3e^{-x})=\ln(e^x)+\ln(1+3e^{-x})$
$x+\ln(1+3e^{-x})=\ln(e^x\times(1+3e^{-x}))$
$x+\ln(1+3e^{-x})=\ln(e^x+3e^{x-x})$
$x+\ln(1+3e^{-x})=\ln(3+e^x)$.
b) On déduit de **a)** que résoudre l'équation $x+\ln(1+3e^{-x})=2$ revient à résoudre l'équation $\ln(3+e^x)=2$ c'est-à-dire $3+e^x=e^2$, soit

$$e^x=e^2-3.$$

$e^2-3>0$ donc $x=\ln(e^2-3)$.
Donc l'ensemble des solutions est $\mathcal{S}=\{\ln(e^2-3)\}$.

18 **a)** Une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ au point A est $y=\ln'\left(\dfrac{1}{e}\right)\left(x-\dfrac{1}{e}\right)+\ln\left(\dfrac{1}{e}\right)$.

Or $\ln\left(\dfrac{1}{e}\right)=-1$ et $\ln'\left(\dfrac{1}{e}\right)=e$ donc une équation de T est $y=ex-2$.

b) Une équation de la tangente T′ à la courbe $\mathscr{C}$ au point B est $y = \ln'(e^2)(x - e^2) + \ln(e^2)$.

Or $\ln(e^2) = 2$ et $\ln'(e^2) = \dfrac{1}{e^2}$ donc une équation de T′ est $y = \dfrac{1}{e^2}x + 1$.

19 Pour tout nombre réel $x > 0$,

$f'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \dfrac{1}{x}$

$f'(x) = \ln(x) + 1$.

La fonction ln est dérivable sur $]0\,;+\infty[$, donc la fonction f est deux fois dérivable sur $]0\,;+\infty[$.

Pour tout réel $x > 0$, $f''(x) = \dfrac{1}{x}$.

Or, pour tout réel $x > 0$, $\dfrac{1}{x} > 0$ c'est-à-dire $f''(x) > 0$.

Donc, la fonction f est convexe sur $]0\,;+\infty[$.

Ainsi, la courbe $\mathscr{C}$ de f est au-dessus de toutes ses tangentes.

22 **a)** Pour tout nombre réel $x > 0$,

$$f(x) = x\left(\frac{\ln(x)}{x} - 2 + \frac{1}{x}\right).$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$ donc

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(x)}{x} - 2 + \frac{1}{x}\right) = -2.$$

D'autre part $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$.

Donc d'après la limite d'un produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

b) Pour tout nombre réel $x > 0$,

$$g(x) = x^2\left(1 - \frac{5}{x^2} - 2\frac{\ln(x)}{x^2}\right).$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^2} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{5}{x^2}\right) = 0$ donc

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{5}{x^2} - 2\frac{\ln(x)}{x^2}\right) = 1.$$

D'autre part $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$.

Donc d'après la limite d'un produit,

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty.$$

23 **a)** • La fonction ln est définie sur $]0\,;+\infty[$.

• On étudie le signe de $x^2 + x + 1$.

$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 = -3$ et $-3 < 0$ ce qui implique que pour tout réel x, $x^2 + x + 1 > 0$.

Donc la fonction g est définie sur $\mathbb{R}$.

b) On note u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$u(x) = x^2 + x + 1$ alors $g = \ln(u)$.

La fonction u est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, $g'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)} = \dfrac{2x+1}{x+1}$.

c) $g'(x)$ est du signe de $2x + 1$ donc $g'(x) < 0$ sur $\left]-\infty\,;-\dfrac{1}{2}\right[$ et $g'(x) > 0$ sur $\left]-\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$.

g est décroissante sur $\left]-\infty\,;-\dfrac{1}{2}\right[$ et g est croissante sur $\left]-\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$.

25 **a)** Augmenter une quantité de 0,7 % revient à la multiplier par $1 + \dfrac{0{,}7}{100}$ c'est-à-dire par 1,007.

Donc pour tout entier n, $S_{n+1} = 1{,}007\ S_n$.

La suite (S_n) est géométrique de 1[er] terme $S_0 = 17\,000$ et de raison 1,007 donc pour tout entier n, $S_n = 17\,000 \times 1{,}007^n$.

b) • Voici un programme en langage Python.

```
def Seuil(k):
    n=0
    S=17000
    while (S<k):
        n=n+1
        S=1.007*S
    return n
print(Seuil(19000))
```

Le programme renvoie 16.

c) $S_n \geqslant 19\,000$ équivaut à $17\,000 \times 1{,}007^n \geqslant 19\,000$

c'est-à-dire $1{,}007^n \geqslant \dfrac{19}{17}$.

La fonction ln est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$,

ainsi $1{,}007^n \geqslant \dfrac{19}{17}$ équivaut à $\ln(1{,}007^n) \geqslant \ln\left(\dfrac{19}{17}\right)$

c'est-à-dire $n\ln(1{,}007) \geqslant \ln\left(\dfrac{19}{17}\right)$.

Or, $1 < 1{,}007$ et $\ln(1{,}007) > 0$. Ainsi, $S_n \geqslant 19\,000$ équivaut à $n \geqslant \dfrac{\ln\left(\frac{19}{17}\right)}{\ln(1{,}007)}$.

Or $\dfrac{\ln\left(\frac{19}{17}\right)}{\ln(1{,}007)} \approx 15{,}9$.

Ainsi $S_n \geqslant 19\,000$ si et seulement si $n \geqslant 16$.

POUR SE TESTER

106 **1.** C **2.** C **3.** B **4.** B **5.** A **6.** A **7.** C

107 **1.** B et D **2.** A et C **3.** B

108 **1. Faux**. On résout l'équation dans l'ensemble E des nombres réels tels que $6x - 2 > 0$, $2x - 1 > 0$ et $x > 0$ c'est-à-dire $x > \dfrac{1}{3}$, $x > \dfrac{1}{2}$ et $x > 0$. Donc $E = \left]\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$.

Pour tout réel x de E, l'équation

$\ln(6x - 2) + \ln(2x - 1) = \ln(x)$ s'écrit

$\ln((6x - 2)(2x - 1)) = \ln(x)$ soit

$\ln(12x^2 - 10x + 2) = \ln(x)$.

L'équation $\ln(12x^2 - 10x + 2) = \ln(x)$ équivaut à $12x^2 - 10x + 2 = x$ c'est-à-dire $12x^2 - 11x + 2 = 0$.

$\Delta = 11^2 - 4 \times 12 \times 2 = 25$.

$\Delta > 0$ donc l'équation $12x^2 - 11x + 2 = 0$ a deux solutions $x_1 = \dfrac{11-5}{24} = \dfrac{1}{4}$ et $x_2 = \dfrac{11+5}{24} = \dfrac{2}{3}$.

Seul $\dfrac{2}{3}$ appartient à E.

Donc $S = \left\{\dfrac{2}{3}\right\}$.

Remarque : on pouvait aussi tout simplement remarquer que 1 n'est pas solution de cette équation.

2. Vrai. On note u la fonction définie sur $]-\infty\,;-3[$ par

$u(x) = \dfrac{x-1}{x+3}$; alors $f = \ln(u)$.

La fonction u est dérivable et strictement positive sur $]-\infty\,;-3[$ donc f est dérivable sur $]-\infty\,;-3[$.

Pour tout réel x de $]-\infty\,;-3[$,

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

$$f'(x) = \frac{\dfrac{1\times(x+3)-(x-1)\times 1}{(x+3)^2}}{\dfrac{x-1}{x+3}}$$

$$f'(x) = \frac{4}{(x-1)(x+3)}$$

$f'(x)$ est du signe de $(x-1)(x+3)$ sur $]-\infty\,;-3[$,

Or pour tout nombre réel de $]-\infty\,;-3[$,

$(x-1)(x+3) > 0$.

Donc $f'(x) > 0$ sur $]-\infty\,;-3[$.

La fonction f est croissante sur $]-\infty\,;-3[$.

3. Vrai. f est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x - 1 - \ln(x)$.

f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et pour tout réel $x > 0$: $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x}$.

$f'(x)$ est du signe de $x - 1$ et on peut construire le tableau de variations de f.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	↘	0	↗	

On déduit de ce tableau de variations que pour tout réel $x > 0$, $f(x) \geqslant 0$ c'est-à-dire $x - 1 - \ln(x) \geqslant 0$.

Donc pour tout réel $x > 0$, $\ln(x) \leqslant x - 1$.

12 Fonctions sinus et cosinus

SAVOIR-FAIRE

3 **a)** La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, on pose :

$u(x) = \sin(x)$ et $v(x) = \sin(x) - 1$.

$u'(x) = \cos(x)$ et $v'(x) = \cos(x)$.

Donc, pour tout réel x,

$f'(x) = \cos(x) \times (\sin(x) - 1) + \sin(x) \times \cos(x)$.

b) On factorise : $f'(x) = \cos(x) \times (\sin(x) - 1 + \sin(x))$

Ainsi, pour tout réel x, $f'(x) = \cos(x) \times (2\sin(x) - 1)$.

5 **a)** Pour tout réel x de $[0\,;\pi]$,

$p(x) = 2(\mathrm{MP} + \mathrm{PQ}) = 2(\sin(x) + \sin(x) + 1)$

$p(x) = 2(2\sin(x) + 1)$

Ainsi, $p(x) = 4\sin(x) + 2$.

b) La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc la fonction p est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc sur $[0\,;\pi]$.

Pour tout réel x de $[0\,;\pi]$, $p'(x) = 4\cos(x)$.

c) $p'(x)$ est du signe de $\cos(x)$.

Or, pour tout réel x de $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$, $\cos(x) \geqslant 0$ et pour tout réel x de $\left[\dfrac{\pi}{2}\,;\pi\right]$, $\cos(x) \leqslant 0$.

Donc, pour tout réel x de $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$, $p'(x) \geqslant 0$ et pour tout réel de $\left[\dfrac{\pi}{2}\,;\pi\right]$, $p'(x) \leqslant 0$.

d) La fonction p est croissante sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ et décroissante sur $\left[\dfrac{\pi}{2}\,;\pi\right]$.

8 **a)** La fonction f est la somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, on pose $u(x) = x$ et $v(x) = \cos(x)$.

Alors, $u'(x) = 1$ et $v'(x) = -\sin(x)$.

Donc, pour tout réel x, $f'(x) = 1 - \sin(x)$.

b) La fonction g est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, on pose $u(x) = x$ et $v(x) = \cos(x)$.

Alors, $u'(x) = 1$ et $v'(x) = -\sin(x)$.

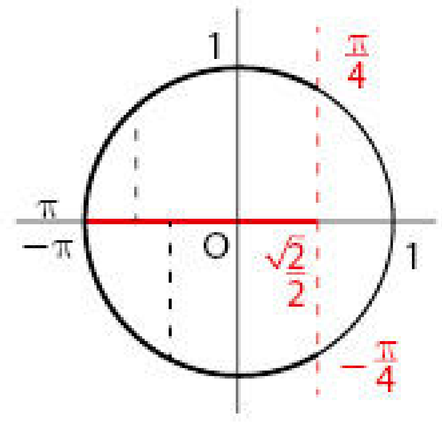
Pour tout réel x, $g'(x) = 1 \times \cos(x) + x \times (-\sin(x))$

$$g'(x) = \cos(x) - x\sin(x).$$

10 **a)** Dans l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$, $\cos(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ équivaut à $x = \dfrac{\pi}{4}$ ou $x = -\dfrac{\pi}{4}$.

L'ensemble des solutions est $\left\{-\dfrac{\pi}{4}\,;\dfrac{\pi}{4}\right\}$.

b) On peut s'aider d'un cercle trigonométrique.



Dans l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$, $\cos(x) \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ équivaut à $-\pi \leqslant x \leqslant -\dfrac{\pi}{4}$ ou $\dfrac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \pi$.

L'ensemble des solutions est

$$\mathscr{S} = \left]-\pi\,;-\frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{\pi}{4}\,;\pi\right].$$

13 **a)** On note f la fonction définie sur l'intervalle $I = \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = \cos(x) - \dfrac{x}{2}$.

f est dérivable sur I et pour tout réel x de I,

$$f'(x) = -\sin(x) - \frac{1}{2}$$

Sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$, $\sin(x) \geqslant 0$ donc $f'(x) < 0$.

La fonction f est continue et strictement décroissante sur I ; de plus $f(0)=1$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{4}$ et $f(0)\times f\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$ donc l'équation $f(0)=0$, c'est-à-dire l'équation $\cos(x)=\frac{x}{2}$, admet une seule solution α dans $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

b) Voici le programme en langage Python.

```
from math import*

def Balayage(p):
    a=0
    while cos(a)>a/2:
        a=a+p
    return a-p,a
```

Voici l'affichage obtenu.

```
>>> Balayage(0.0001)
(1.029799999999903, 1.029899999999903)
```

La solution α de l'équation $\cos(x)=\frac{x}{2}$ dans $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ est telle que $1{,}029\,7<\alpha<1{,}029\,9$.

POUR SE TESTER

64 **1.** D **2.** C **3.** B **4.** C

65 **1.** A B C **2.** B C **3.** C D **4.** B C

66 **1. Vrai**. En effet, f est la différence de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc sur $[-\pi\,;\pi]$.
Pour tout réel x de $[-\pi\,;\pi]$,
$$f'(x)=\sin'(x)-\frac{1}{2}=\cos(x)-\frac{1}{2}.$$

2. Faux. En effet, $f(0)=0$ et $f(\pi)=-\frac{\pi}{2}$. Or, $-\frac{\pi}{2}<0$ donc la fonction f ne peut pas être croissante sur $[0\,;\pi]$.

3. Vrai. En effet, dans un repère orthonormé, une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$ est
$$y=f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+f\left(\frac{\pi}{2}\right).$$
$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)-\frac{\frac{\pi}{2}}{2}=1-\frac{\pi}{4}$$
et $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$.

Ainsi, $y=-\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+1-\frac{\pi}{4}$,

soit $y=-\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{4}+1-\frac{\pi}{4}$,

c'est-à-dire $y=-\frac{1}{2}x+1$.

4. Vrai. En effet, le tableau de variations de f sur $[0\,;\pi]$ est :

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$f\left(\frac{\pi}{3}\right)$	↘	$-\frac{\pi}{2}$

• Pour tout réel $x\in\left]0\,;\frac{\pi}{3}\right]$, $f(x)>0$.

• f est continue, strictement décroissante sur $\left[\frac{\pi}{3}\,;\pi\right]$ et $f\left(\frac{\pi}{3}\right)\times f(\pi)<0$, donc l'équation $f(x)=0$ admet une seule solution dans $\left[\frac{\pi}{3}\,;\pi\right]$.

Ainsi, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution dans l'intervalle $]0\,;\pi]$.

13 Primitives, équations différentielles

SAVOIR-FAIRE

3 **a)** La fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ pour tout réel x,
$$F'(x)=-1\times\left(-1\frac{e^x}{(e^x+1)^2}\right)=\frac{e^x}{(e^x+1)^2}.$$
Donc, pour tout réel x, $F'(x)=f(x)$ et F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

b) La fonction G est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et pour tout réel x de $]0\,;+\infty[$.
$$G'(x)=1\times\ln(x)+x\times\frac{1}{x}-1=\ln(x).$$
Donc G est une solution sur $]0\,;+\infty[$ de l'équation différentielle $y'=\ln(x)$.

4 **a)** L'ensemble des primitives de la fonction g sur $]0\,;+\infty[$ est constitué des fonctions $x\mapsto G(x)+C$ où C est une constante réelle.

b) G_1 est une primitive de g sur $]0\,;+\infty[$ donc il existe une constante réelle C telle que pour tout réel x de $]0\,;+\infty[$, $G_1(x)=x\ln(x)-x+C$.
$G_1(1)=0$ signifie que $-1+C=0$, soit $C=1$.
Donc la fonction G_1 est définie sur $]0\,;+\infty[$ par $G_1(x)=x\ln(x)-x+1$.

7 **a)** Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est définie par :
$$F(x)=5\times\frac{1}{5}x^5-3\times\frac{1}{2}x^2+7x=x^5-\frac{3}{2}x^2+7x$$
b) Une primitive de g sur $\mathbb{R}$ est définie par :
$$G(x)=2(-\cos(x))+3\sin(x)=-2\cos(x)+3\sin(x).$$

9 **a)** On pose $u(x)=3x-1$, alors $u'(x)=3$.
$$\text{Ainsi, } f(x)=\frac{4}{3}\times3(3x-1)^5=\frac{4}{3}u'(x)u^5(x).$$
Donc une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est définie par :
$$F(x)=\frac{4}{3}\times\frac{1}{5+1}u^{5+1}(x)=\frac{2}{9}(3x-1)^6.$$
b) On pose $u(x)=x^2+4$, alors $u'(x)=2x$.
Ainsi, $g(x)=\frac{7}{2}\times\frac{2x}{x^2+4}=\frac{7}{2}\times\frac{u'(x)}{u(x)}$.
Donc une primitive sur $\mathbb{R}$ de g est définie par :
$$G(x)=\frac{7}{2}\times\ln(u(x))=\frac{7}{2}\ln(x^2+4).$$

13 **a)** Les solutions de l'équation différentielle **(E)** sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x\mapsto ke^{3x}$ où k est un nombre réel.

b) f est solution de **(E)** donc il existe un réel k tel que pour tout réel x, $f(x)=ke^{3x}$. Or, $f(-1)=2$, ainsi $ke^{-3}=2$ d'où $k=2e^3$.
On en déduit que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2e^3e^{3x}=2e^{3+3x}$.

14 **a)** Pour tout réel x, $f(x)=c$ avec $c\in\mathbb{R}$, donc $f'(x)=0$. f est solution de **(E)** si, et seulement si, $f'=f+1$, c'est-à-dire $0=c+1$ soit $c=-1$.

b) Les solutions sur $\mathbb{R}$ de **(E)** sont les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x)=ke^x-1$ avec k réel.

c) g est solution de **(E)** donc il existe un réel k tel que pour tout réel x, $g(x)=ke^x-1$. Or, $g(1)=2$, ainsi $ke^1-1=2$ d'où $k=3e^{-1}$.
On en déduit que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=3e^{-1}e^x-1=3e^{x-1}-1$.

POUR SE TESTER

88 **1.** C **2.** D **3.** D **4.** B

89 **1.** B,D **2.** B, C **3.** A, D **4.** A, B, D

90 **1. Faux**. f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'=2y$ donc il existe un réel k tel que $f(x)=ke^{2x}$. Or, $f(0)=1$, ainsi $ke^0=1$ soit $k=1$.
Donc la solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'=2y$ qui vérifie $f(0)=1$ est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{2x}$. On en déduit que $f(1)=e^2\neq0$.

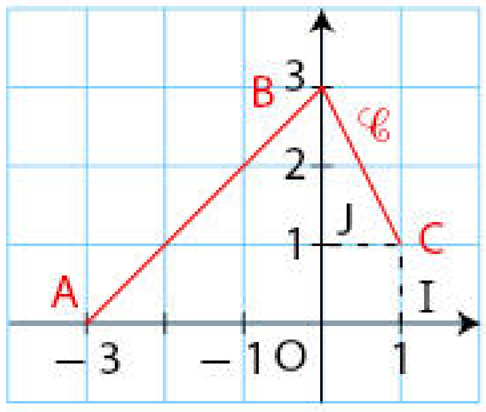
2. Vrai. En effet, la fonction f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et pour tout réel $x>0$,
$$f'(x)=\frac{1\times x-(x+1)\times1}{x^2}e^x+\frac{x+1}{x}e^x$$
Ainsi $f'(x)-f(x)=-\frac{e^x}{x^2}$.

On en déduit que f est solution sur $]0\,;+\infty[$ de **(E)**.

14 Calcul intégral

SAVOIR-FAIRE

3 **a)**



b) g est continue et positive sur $[-3\,;1]$ donc $\int_{-3}^{1} g(x)\mathrm{d}x$ est l'aire, en unité d'aire, du domaine situé sous la courbe $\mathscr{C}$, soit la somme de l'aire du triangle AOB et du trapèze rectangle OBCI. Donc

$$\int_{-3}^{1} g(x)\mathrm{d}x = \frac{3\times 3}{2} + \frac{(3+1)\times 1}{2} = \frac{9}{2} + 2 = \frac{13}{2}.$$

4 **a)** La fonction F est dérivable sur I et pour tout réel x de I,

$$F'(x) = \frac{6x(x+4) - 3x^2\times 1}{(x+4)^2} = \frac{3x^2+24x}{(x+4)^2}$$

donc $F'(x) = f(x)$. Ainsi F est une primitive de f sur I.
b) f est continue car f est une fonction rationnelle et f est positive sur I donc :

$$\int_2^4 f(x)\mathrm{d}x = F(4) - F(2).$$

Or, $F(4) = \frac{3\times 4^2}{4+4} = 6$ et $F(2) = \frac{3\times 2^2}{2+4} = 2$, donc :

$$\int_2^4 f(x)\mathrm{d}x = 6 - 2 = 4.$$

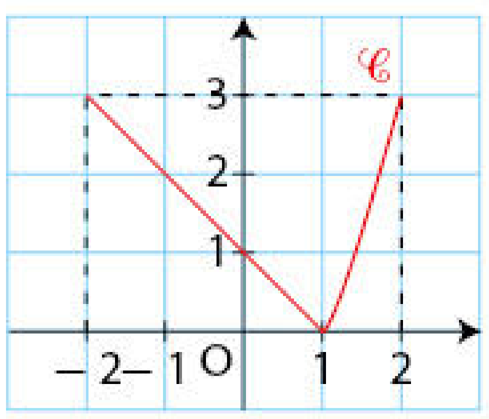
7 La fonction $F : x \mapsto 2e^x + \frac{1}{2}x^2$ est primitive de la fonction $f : x \mapsto 2e^x + x$ sur $\mathbb{R}$.
Alors :

$$\int_{-2}^{0} (2e^x + x)\mathrm{d}x = [F(x)]_{-2}^{0} = F(0) - F(-2).$$

Or $F(0) = 2e^0 = 2$ et $F(-2) = 2e^{-2} + 2$ donc

$$\int_{-2}^{0} (2e^x + x)\mathrm{d}x = 2 - 2e^{-2} - 2 = -2e^{-2}.$$

12 **a)**



b) L'aire, en u.a., du domaine D situé sous la courbe $\mathscr{C}$ est :

$$A(D) = \int_{-2}^{2} g(x)\mathrm{d}x.\ .$$

D'après la relation de Chasles :

$$\int_{-2}^{2} g(x)\mathrm{d}x = \int_{-2}^{1} (-x+1)\mathrm{d}x + \int_{1}^{2} (x^2-1)\mathrm{d}x$$

$$\int_{-2}^{1} (-x+1)\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2}x^2 + x\right]_{-2}^{1} = \frac{1}{2} - (-4) = \frac{9}{2}$$

$$\int_{1}^{2} (x^2-1)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_{1}^{2} = \frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

Donc

$$\int_{-2}^{2} g(x)\mathrm{d}x = \frac{9}{2} + \frac{4}{3} = \frac{35}{6}$$

et $A(D) = \frac{35}{6}$ *u.a.*

13 **a)** Pour tout réel x de $[0\,;\pi]$, $0 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$ et $x^2 \geqslant 0$ donc $0 \leqslant x^2\sin(x) \leqslant x^2$.
b) Les propriétés de positivité et d'intégration des inégalités permettent d'écrire :

$$0 \leqslant \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} x^2\mathrm{d}x.$$

Or, $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} x^2\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi^3}{8} - \frac{\pi^3}{64}\right) = \frac{7\pi^3}{192}.$

Donc $0 \leqslant \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{7\pi^3}{192}.$

Remarque : la calculatrice donne

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin(x)\mathrm{d}x \approx 1{,}053.$$

16 **a)** Pour tout réel x de $I = [1\,;e]$, on pose :

$u(x) = \ln(x)$ $\qquad u'(x) = \frac{1}{x}$

$v'(x) = -x + 3$ $\qquad v(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x$

Les fonctions u et v sont dérivables sur I, les fonctions u' et v' sont continues sur I.
D'après la formule d'intégration par parties :

$$\int_1^e (-x+3)\ln(x)\mathrm{d}x = \left[\left(-\frac{1}{2}x^2 + 3x\right)\ln(x)\right]_1^e - \int_1^e \left(-\frac{1}{2}x + 3\right)\mathrm{d}x$$

$$\int_1^e (-x+3)\ln(x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}e^2 + 3e - \left[-\frac{1}{4}x^2 + 3x\right]_1^e$$

$$\int_1^e (-x+3)\ln(x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}e^2 + 3e + \frac{1}{4}e^2 - 3e + \frac{11}{4}$$

$$\int_1^e (-x+3)\ln(x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}e^2 + \frac{11}{4}$$

b) Pour tout réel x de $I = [1\,;e]$, on pose :

$u(x) = \ln(x)$ $\qquad u'(x) = \frac{1}{x}$

$v'(x) = x^2$ $\qquad v(x) = \frac{1}{3}x^3$

Les fonctions u et v sont dérivables sur I, les fonctions u' et v' sont continues sur I.
D'après la formule d'intégration par parties :

$$\int_1^e x^2\ln(x)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3\ln(x)\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{3}x^2\mathrm{d}x$$

$$\int_1^e x^2\ln(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}e^3 - \left[\frac{1}{9}x^3\right]_1^e$$

$$\int_1^e x^2\ln(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{9}e^3 + \frac{1}{9}$$

$$\int_1^e x^2\ln(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{3}e^3 + \frac{1}{9}$$

17 **a)** Pour tout réel t de $I =]0\,;+\infty[$, on pose :

$u(t) = \ln(t)$ $\qquad u'(t) = \frac{1}{t}$

$v'(t) = \frac{1}{t^2}$ $\qquad v(t) = -\frac{1}{t}$

Les fonctions u et v sont dérivables sur I, les fonctions u' et v' sont continues sur I.
D'après la formule d'intégration par parties, pour tout réel x de I :

$$\int_1^x \frac{\ln(t)}{t^2}\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{t}\ln(t)\right]_1^x - \int_1^x -\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$$

$$\int_1^x \frac{\ln(t)}{t^2}\mathrm{d}t = -\frac{1}{x}\ln(x) - \left[\frac{1}{t}\right]_1^x$$

$$\int_1^x \frac{\ln(t)}{t^2}\mathrm{d}t = -\frac{1}{x}\ln(x) - \frac{1}{x} + 1$$

b) Par exemple, la fonction $x \mapsto -\frac{1}{x}\ln(x) - \frac{1}{x}$ est une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x^2}$ sur $]0\,;+\infty[$.

19 **a)** le programme devient :

```
from math import *

def f(x):
    y=1/(1+x**2)
    return y

def Rectangles(n):
    Som=0
    for k in range(1,n):
        Som=Som+f(1+k/n)
    Som1=1/n*(Som+f(2))
    Som2=1/n*(Som+f(1))
    return Som1,Som2
```

b)

```
>>> Rectangles(100)
(0.32025338773317485, 0.32325338773317486)
```

D'après cet affichage :

$$0{,}32 \leqslant \int_1^2 g(x)\mathrm{d}x \leqslant 0{,}33$$

POUR SE TESTER.

73 **1.** B **2.** C **3.** C

74 **1.** B, C **2.** A, B **3.** A, C, D

75 **1. L'affirmation est vraie.**
En effet, cet encadrement découle de la représentation graphique de la fonction h.
2. L'affirmation est fausse.
En effet,

$$\int_0^2 (f(x)+3)\mathrm{d}x = \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^2 3\mathrm{d}x = \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x + 6.$$

3. L'affirmation est vraie.
En effet, pour tout réel x de $I = [0\,;1]$, on pose :

$u(x) = 1 - 2x$ $\qquad u'(x) = -2$

$v'(x) = e^{-x}$ $\qquad v(x) = -e^{-x}$

Les fonctions u et v sont dérivables sur I, les fonctions u' et v' sont continues sur I.
D'après la formule d'intégration par parties :

$$\int_0^1 (1-2x)e^{-x}\mathrm{d}x = [-(1-2x)e^{-x}]_0^1 - \int_0^1 2e^{-x}\mathrm{d}x$$

$$\int_0^1 (1-2x)e^{-x}\mathrm{d}x = e^{-1} + 1 - 2[-e^{-x}]_0^1$$

$$\int_0^1 (1-2x)e^{-x}\mathrm{d}x = e^{-1} + 1 - 2(-e^{-1} + 1) = 3e^{-1} - 1 = \frac{3-e}{e}$$

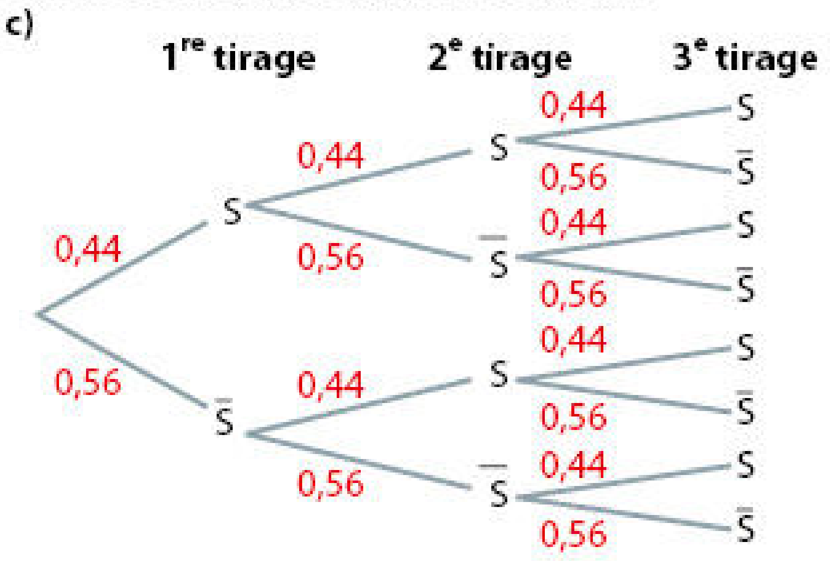
15 Succession d'épreuves indépendantes. Schéma de Bernoulli

SAVOIR-FAIRE

2 **a)** Les issues de cette expérience sont tous les couples $(k\,;a)$ d'entiers naturels tels que $k \in \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\}$ et $a \in \{1\,;2\}$. Il y a donc 12 issues.
Chacune de ces issues a la même probabilité de se réaliser : $\frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$.

b) $p = \mathrm{P}(2\,;2) + \mathrm{P}(4\,;2) + \mathrm{P}(6\,;2) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12}$
$= \frac{1}{4}$.
La probabilité d'obtenir un couple de numéros pairs est égale à $\frac{1}{4}$.

5 **a)** Les deux issues de cette expérience aléatoire sont le succès S : « La brique est jaune » et l'échec $\overline{\mathrm{S}}$: « La brique est verte ».
On sait que $\mathrm{P}(\mathrm{S}) = 0{,}44$, donc on considère chaque tirage comme une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = 0{,}44$.
b) Cette épreuve de Bernoulli est répétée trois fois, de manière indépendante. La situation peut donc être associée à un schéma de Bernoulli.
c)



8 **a) Épreuve de Bernoulli** : lancer de dé. Le succès S est : « Le numéro obtenu est le 6 » et $p = \mathrm{P}(\mathrm{S}) = \frac{1}{6}$.
Schéma de Bernoulli : on répète $n = 4$ fois cette épreuve de Bernoulli dans des conditions d'indépendance.
Loi binomiale : la variable aléatoire X qui donne le nombre de succès obtenus sur les quatre lancers, suit la loi binomiale $\mathfrak{B}\left(4\,;\frac{1}{6}\right)$.

b) $\mathrm{P}(\mathrm{X}=3) = \binom{4}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^1 = 4 \times \left(\frac{1}{6}\right)^3 \times \frac{5}{6} = \frac{5}{324}$

soit $\mathrm{P}(\mathrm{X}=3) \approx 0{,}015$.
La probabilité d'obtenir exactement trois fois le 6 en quatre lancers est environ égale à 0,015.

c) $\mathrm{P}(\mathrm{X} \leqslant 1) = \mathrm{P}(\mathrm{X}=0) + \mathrm{P}(\mathrm{X}=1) = \binom{4}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^4 + \binom{4}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^3$

soit $\mathrm{P}(\mathrm{X} \leqslant 1) \approx 0{,}868$.
La probabilité d'obtenir au plus une fois le 6 en quatre lancers est environ égale à 0,868.

POUR SE TESTER

46 **1.** C **2.** B **3.** A

47 **1.** A, C, D **2.** B, C **3.** A, D **4.** A, C

48 **1. Faux.** En effet, pour les moins de 18 ans, l'univers est $\mathrm{E}_1 = \{\mathrm{F}\,;\mathrm{H}\}$; pour les 18 à 60 ans, l'univers est $\mathrm{E}_2 = \mathrm{E}_1$; pour les 60 ans et plus, l'univers est $\mathrm{E}_3 = \mathrm{E}_1 = \mathrm{E}_2$.
Donc l'univers de cette expérience aléatoire est $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2 \times \mathrm{E}_3$ et il comporte $2 \times 2 \times 2$ soit 8 issues.

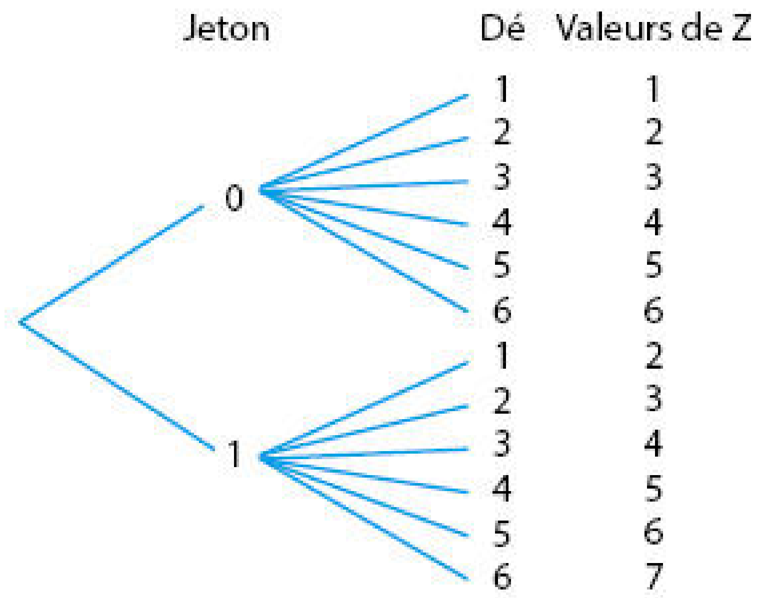
2. Vrai. En effet,
$p = \mathrm{P}(\mathrm{F}\,;\mathrm{F}\,;\mathrm{F}) + \mathrm{P}(\mathrm{H}\,;\mathrm{H}\,;\mathrm{H})$
$p = \frac{45}{100} \times \frac{30}{75} \times \frac{18}{30} + \frac{55}{100} \times \frac{45}{75} \times \frac{12}{30} = 0{,}24$.

3. Faux. En effet,
$p' = \mathrm{P}(\mathrm{F}\,;\mathrm{F}\,;\mathrm{F}) + \mathrm{P}(\mathrm{F}\,;\mathrm{F}\,;\mathrm{H}) + \mathrm{P}(\mathrm{F}\,;\mathrm{H}\,;\mathrm{F}) + \mathrm{P}(\mathrm{H}\,;\mathrm{F}\,;\mathrm{F})$
$p' = \frac{45}{100} \times \frac{30}{75} \times \frac{18}{30} + \frac{45}{100} \times \frac{30}{75} \times \frac{12}{30} + \frac{45}{100} \times \frac{45}{75} \times \frac{18}{30} + \frac{55}{100} \times \frac{30}{75} \times \frac{18}{30}$
$p' = 0{,}474$.

16 Sommes de variables aléatoires

SAVOIR-FAIRE

3 On représente la situation par un arbre des possibles.



Les valeurs prises par Z sont les nombres entiers de 1 à 7 et on peut établir la loi de probabilité de Z :

c	1	2	3	4	5	6	7
$\mathrm{P}(\mathrm{Z}=c)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$

4 **a)** $\mathrm{E}(\mathrm{X}+\mathrm{Y}) = \mathrm{E}(\mathrm{X}) + \mathrm{E}(\mathrm{Y}) = 2{,}5 + 3{,}4 = 5{,}9$
b) $\mathrm{E}(4\mathrm{X}) = 4\mathrm{E}(\mathrm{X}) = 4 \times 2{,}5 = 10$
c) $\mathrm{E}(4\mathrm{X}+\mathrm{Y}) = 4\mathrm{E}(\mathrm{X}) + \mathrm{E}(\mathrm{Y}) = 10 + 3{,}4 = 13{,}4$

7 X est la variable aléatoire qui donne le numéro obtenu avec le dé à quatre faces et Y celle qui donne le numéro obtenu avec le dé à six faces.
X et Y sont indépendantes, car les lancers des deux dés le sont.
Il y a trois cas où on obtient avec le dé à six faces le double du numéro obtenu avec le dé à quatre faces : 1 et 2 ; 2 et 4 ; 3 et 6.

$\mathrm{P}(\{\mathrm{X}=1\} \cap \{\mathrm{Y}=2\}) = \mathrm{P}(\mathrm{X}=1) \times \mathrm{P}(\mathrm{Y}=2) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{24}$

$\mathrm{P}(\{\mathrm{X}=2\} \cap \{\mathrm{Y}=4\}) = \mathrm{P}(\mathrm{X}=2) \times \mathrm{P}(\mathrm{Y}=4) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{24}$

$\mathrm{P}(\{\mathrm{X}=3\} \cap \{\mathrm{Y}=6\}) = \mathrm{P}(\mathrm{X}=3) \times \mathrm{P}(\mathrm{Y}=6) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{24}$

Donc la probabilité demandée est $\frac{3}{24} = \frac{1}{8}$.

8 X est la variable aléatoire qui donne le numéro obtenu avec le premier dé et Y celle qui donne le numéro obtenu avec le second dé.
Avec la calculatrice, on obtient $\mathrm{V}(\mathrm{X}) = 8{,}25$ et $\mathrm{V}(\mathrm{Y}) = 100$
Les variables X et Y sont indépendantes, donc $\mathrm{V}(\mathrm{X}+\mathrm{Y}) = \mathrm{V}(\mathrm{X}) + \mathrm{V}(\mathrm{Y}) = 108{,}25$.

11 X est la variable aléatoire qui donne le numéro obtenu avec un dé.
Voici la loi de probabilité de X :

a	1	2	3	4
$\mathrm{P}(x=a)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Un lancer de six dés est alors un échantillon $(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \mathrm{X}_3, \mathrm{X}_4, \mathrm{X}_5, \mathrm{X}_6)$ de taille 6 de la loi de probabilité suivie par X.

La variable aléatoire S_6 somme de cet échantillon compte alors le nombre de points obtenus.
À la main ou à l'aide de la calculatrice, on obtient $E(X) = 2{,}5$ et $\sigma(X) \approx 1{,}12$.
Par conséquent, $E(S_6) = 6 \times 2{,}5 = 15$ et $\sigma(S_6) \approx \sqrt{6} \times 1{,}12$, c'est-à-dire $\sigma(S_6) \approx 2{,}74$.

12 Les 30 tentatives quotidiennes sont indépendantes les unes des autres, donc elles constituent un échantillon $(X_1, X_2, \ldots, X_{30})$ de taille 30 de la loi de probabilité de X.
La variable aléatoire M_{30} moyenne de cet échantillon modélise alors le gain quotidien moyen.
À la main ou à l'aide de la calculatrice, on obtient $E(X) = 2{,}45$ et $\sigma(X) \approx 4{,}96$.
Par conséquent, $E(M_{30}) = 2{,}45$ et $\sigma(M_{30}) \approx \dfrac{4{,}96}{\sqrt{30}}$, c'est-à-dire $\sigma(M_{30}) \approx 0{,}91$.

14 **a)** Voici la loi de probabilité de X :

a	10	20	30	40
$P(x = a)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$

b) c) Voici le programme et un exemple d'exécution.

```
from random import *

def X(n):
    for i in range(n):
        r=random()
        d=1
        if r>=1/10 and r<3/10:
            d=2
        if r>=3/10 and r<6/10:
            d=3
        if r>=6/10:
            d=4
        print(d)
```

```
>>> X(8)
4
4
4
3
4
4
2
4
```

POUR SE TESTER

54 **1.** B **2.** C **3.** A **4.** D **5.** B

55 **1.** A, B, C **2.** B, C, D **3.** C **4.** A, D

56 **1. Faux.** En effet, si on note X le résultat du premier dé et Y le résultat du second, alors
$$P(Z = 10) = P(X = 4) \times P(Y = 6) + P(X = 5) \times P(Y = 5) + P(X = 6) \times P(Y = 4)$$
Donc $P(Z = 10) = \dfrac{1}{36} + \dfrac{1}{36} + \dfrac{1}{36} = \dfrac{1}{12}$.
2. Vrai. En effet, les variables X et Y sont indépendantes donc
$$P(\{X = 4\} \cap \{X = 6\}) = P(X = 4) \times P(Y = 6) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}.$$
3. Vrai. En effet, les paramètres de cette loi binomiale sont $n = 12$ et $p = 0{,}3$ donc
$$E(X) = 12 \times 0{,}3 = 3{,}6.$$
4. Faux. En effet, l'écart-type de la somme S_{50} est égal à $\sqrt{50}\,\sigma(X)$ et $\sqrt{50} \neq 7$.

17 Concentration. Loi des grands nombres

SAVOIR-FAIRE

2 **1. a)** La variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres 100 et 0,65.
b) $\mu = 100 \times 0{,}65 = 65$ et
$\sigma = \sqrt{100 \times 0{,}65 \times 0.35} = \sqrt{22{,}75}$ soit $\sigma \approx 4{,}77$.
c) Pour tout réel $\delta > 0$, $P(|X - \mu| \geqslant \delta) \leqslant \dfrac{\sigma^2}{\delta^2}$.
Avec $\delta = 2\sigma$, on obtient $P(|X - \mu| \geqslant 2\sigma) \leqslant 0{,}25$.
2. Voici le programme dans ce cas.

```
from random import *

def Distance():
    e=65
    x=0
    for k in range(100):
        a=random()
        if a<=0.65:
            x=x+1
    d=abs(x-e)
    return d

def Echantillon(n):
    s=4.77
    y=0
    for j in range(n):
        if Distance()>=2*s:
            y=y+1
    p=y/n
    return p
```

3. a) Par exemple, on obtient :

```
>>> Echantillon(1000)
0.046
```

b) On observe que dans moins de 5 % des cas $|x - 65| \geqslant 2\sigma$.
L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne donc un résultat qui n'est pas optimal.

5 **1.** La loi de probabilité de la variable aléatoire X_k est donnée par :

a	0	1
$P(X_k = a)$	0,4	0,6

Son espérance est : $\mu = 0{,}4 \times 0 + 0{,}6 \times 1 = 0{,}6$.
Sa variance est :
$$V = 0{,}4 \times (0 - 0{,}6)^2 + 0{,}6 \times (1 - 0{,}6)^2 = 0{,}24.$$
2. Pour tout réel $\delta > 0$,
$$P(|M_n - 0{,}6| \geqslant \delta) \leqslant \frac{0{,}24}{n\delta^2}.$$
a) Avec $\delta = 0{,}05$, on obtient :
$$P(|M_n - 0{,}6| \geqslant 0{,}05) \leqslant \frac{96}{n}.$$
Il suffit de choisir n tel que $\dfrac{96}{n} \leqslant 0{,}1$, c'est-à-dire $n \geqslant 960$.
b) Avec $\delta = 0{,}01$, on obtient :
$$P(|M_n - 0{,}6| \geqslant 0{,}01) \leqslant \frac{2\,400}{n}.$$
Il suffit de choisir n tel que $\dfrac{2\,400}{n} \leqslant 0{,}05$, c'est-à-dire $n \geqslant 48\,000$.
La ville compte 20 000 habitants, une telle enquête ne peut donc pas être réalisée.
Une précision de 0,01 et un risque de 0,05 ne peuvent donc pas être envisagés.

8 Voici différentes expérimentations.

	$p(1-p)$
`>>> P(100,0.1,1000)` `0.003`	0,09
`>>> P(100,0.8,1000)` `0.02`	0,16
`>>> P(10,0.5,1000)` `0.021`	0,25
`>>> P(100,0.5,1000)` `0.066`	0,25
`>>> P(100,0.6,1000)` `0.067`	0,24
`>>> P(100,0.6,10000)` `0.0524`	0,24

Dans tous les cas, on constate que l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev ne présente pas un caractère optimal.

POUR SE TESTER

20 **1.** D **2.** D **3.** A

21 **1.** A, C **2.** C, D **3.** C

22 **1. Vrai.** En effet, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :
$$P(|X - \mu| \geqslant 3\sigma) \leqslant \frac{1}{9} \text{ et } \frac{1}{9} \leqslant 0{,}15.$$
2. Vrai. En effet, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, pour tout réel $\delta > 0$:
$$P(|X - \mu| \geqslant \delta) \leqslant \frac{V}{\delta^2},$$
or $P(|X - \mu| < \delta) = 1 - P(|X - \mu| \geqslant \delta)$ donc :
$$P(|X - \mu| < \delta) \geqslant 1 - \frac{V}{\delta^2}$$
3. Faux. En effet, s'il existe un réel t tel que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,
$P(|M_n - \mu| \geqslant t) > 10^{-10}$, alors on ne peut pas avoir $\lim\limits_{n \to +\infty} P(|M_n - \mu| \geqslant t) = 0$
et on obtient une contradiction avec la loi des grands nombres.
4. Vrai. En effet,
$$P(|S - 100p| \geqslant 10) \leqslant \frac{100 \times p \times (1-p)}{100},$$
soit $P(|S - 100p| \geqslant 10) \leqslant p(1-p)$
donc $P(|S - 100p| < 10) \geqslant 1 - p(1-p)$
et $P(|S - 100p| < 10) \geqslant p^2 - p + 1$.

A

B

C

D

E

F

H

I

K

L

Crédits photographiques

Couverture GETTY IMAGES/Oxford Scientific/Photolibrary
26 d AKG-Images / SPL ; **26 g** Wikimédia / School of mathematics and Statistic, Unviversity of St Andrew, Scotland ; **27** PHOTO12.COM / ALAMY ; **29** GETTY IMAGES France / Matthew Ward ; **32** ADOBE STOCK PHOTO / elnur ; **35** PHOTO12.COM / ALAMY ; **37** PHOTONONSTOP / Alain Le Bot ; **40** ADOBE STOCK PHOTO ; **43** BNF ; **45** ADOBE STOCK PHOTO ; **54 g** AKG-Images ; **54** Droits Réservés ; **55** SCALA GROUP, Florence. ; **57** ADOBE STOCK PHOTO ; **65** ADOBE STOCK PHOTO ; **65 bas** GETTY IMAGES France / Istock ; **67 ht** GETTY IMAGES France / Istock ; **67 bas** GETTY IMAGES France / Istock ; **68** PHOTO12.COM / ALAMY ; **71 ht** Droits Réservés / Makeblock ; **71 bas** GETTY IMAGES France / Istock ; **72** ADOBE STOCK PHOTO ; **74** BIS / Ph. Coll. Archives Larbor ; **77** AGE-FOTOSTOCK / ImageBROKER / Günter Lenz ; **80** SHUTTERSTOCK ; **82 g** AKG-Images / SPL ; **82 d** AKG-Images / SPL ; **83** AFP / dpa Picture-Alliance / GES-Sportfoto / Helge Prang ; **112** Leemage / Selva ; **112 d** Droits réservés ; **113** SpaceX ; **115** SHUTTERSTOCK / Madam Kaye ; **133** Antoine DOROTTE ; **139** ADOBE STOCK PHOTO / Andrzej Tokarski ; **142 g** GAMMA RAPHO / Keystone France ; **142 d** GAMMA RAPHO / Keystone France ; **143** COSMOS / SPL / David Nunuk ; **145** ADOBE STOCK PHOTO ; **162** Triton Submarines / Nick Verola ; **163 ht** CHRISTOPHE L COLLECTION ; **163 bas** BSIP / Visuals Unlimited ; **170 g** BIS / Ph. Coll. Archives Larbor ; **170 d** AKG-Images / ; **171** HEMIS / Jon Arnold Images ; **173** Romain Houette ; **186** ADOBE STOCK PHOTO ; **190** ADOBE STOCK PHOTO ; **192** ADOBE STOCK PHOTO ; **194 d** SHUTTERSTOCK ; **194 g** REA / François Henry ; **200 g** Leemage ; **200 d** GETTY IMAGES France / De Agostini Picture Library ; **201** HEMIS / ImageBROKER ; **203** COSMOS / SPL / Bjorn Svensson ; **213** COSMOS / SPL ; **214** BSIP / Godong ; **217** GETTY IMAGES France / Tim Thompson ; **228 g** BRIDGEMAN IMAGES / Mary Evans Picture Library ; **228 d** BNF ; **229** MAXPPP ; **229 ht** Patrice Blot / photo-aérienne-France.fr ; **259** Droits Réservés ; **260 g** PHOTO12.COM / ALAMY ; **260 d** COSMOS / SPL / American Philosophical Society ; **261** Nasa / Chris Gunn ; **263** Biosphoto / Angélique & Guy Bescond ; **279** GETTY IMAGES France / Istock ; **281** Biosphoto / Patrice Correia ; **282** SHUTTERSTOCK ; **288 d** BIS / Ph. Coll. Archives Larbor ; **288** PHOTO12.COM / ALAMY ; **289** SHUTTERSTOCK ; **291** GETTY IMAGES France / MediaNews Group / Pasadena Star-News ; **309** ADOBE STOCK PHOTO / Alexander Rochau ; **312** ADOBE STOCK PHOTO ; **312** ADOBE STOCK PHOTO / Dusan Kostic ; **318 g** Leemage / De Agostini ; **318 d** Leemage / SSPL ; **319** Nasa / JPL-Caltech ; **331** ADOBE STOCK PHOTO ; **339** GAMMA RAPHO / Maurix ; **340 m** BNF ; **340 ht** Linderman Library, Lehigh University, Bethlehem, Pennsylvanie ; **348 g** PHOTO12.COM / ALAMY ; **348 d** ROGER-VIOLLET ; **349** Philharmonie de Paris ; **362** Droits Réservés ; **363** ADOBE STOCK PHOTO ; **364** ADOBE STOCK PHOTO ; **368** AFP / Jacques Demarthon ; **369** AKG-Images / SPL ; **370 g** CHRISTOPHE L COLLECTION / Heritage Images / Fine Art Images ; **370** Leemage ; **371** COSMOS / SPL / NOAA ; **373 ht** GETTY IMAGES France / Construction Photography / Avalon ; **373 bas** SHUTTERSTOCK ; **388** BIS / Ph. C. Roux © Archives Larbor ; **389** PHOTO12.COM / ALAMY ; **392** ADOBE STOCK PHOTO ; **396** GETTY IMAGES France / Archive Photos ; **398 g** GAMMA RAPHO / Keystone-France ; **398** PHOTO12.COM / ALAMY ; **399** GETTY IMAGES France / VCG 2019 ; **417** ADOBE STOCK PHOTO ; **420** Leemage ; **428 g** BIS / Ph. Schwitter © Archives Larbor ; **428** AKG-Images / SPL ; **429** ADOBE STOCK PHOTO ; **431** GETTY IMAGES France / Ed-Ni-Photo ; **435** SHUTTERSTOCK / Dmitry Naumov ; **438** Droits Réservés ; **440 ht** ADOBE STOCK PHOTO ; **440** ANDIA / ABC / Le Tellec ; **442** Lumisky Luminaires 2020 ; **446** SHUTTERSTOCK ; **447** Droits Réservés ; **449** REA / Pascal Sittler ; **450 bas** ADOBE STOCK PHOTO ; **456 g** SHUTTERSTOCK ; **456 d** AFP / Sputnik ; **457** GETTY IMAGES France / Yuri Arcurs ; **459** SHUTTERSTOCK ; **465** Droits Réservés ; **469 ht** PHOTONONSTOP / Philippe Turpin ; **469 bas** SHUTTERSTOCK ; **475** SHUTTERSTOCK ; **478** ADOBE STOCK PHOTO ; **484 g** PHOTO12.COM / ALAMY ; **484** BIS / Ph. DR Coll. Archives Larbor ; **485** Collège de Tournai / Droits Réservés ; **491** GETTY IMAGES France / Istock ; **499** PHOTO12.COM / ALAMY ; **501** ADOBE STOCK PHOTO ; **504** GETTY IMAGES France / Istock ; **505** GETTY IMAGES France / Istock.

Contenus éditoriaux fournis par l'ONISEP :
Coordination : Emmanuel Percq. **Édition :** Isabelle Dussouet.

Pages Grand oral : Olivier Jaoui / Directeur de Mission-Admission / Spécialiste de la préparation des étudiants à l'oral et aux entretiens.

Édition : Romain Houette
Mise en page : DESK (www.desk53.com.fr)
Conception graphique : Marc Henry
Couverture : Jean-Marc Denglos
Schémas : DESK
Iconographie : Juliette Barjon
Photogravure : DESK

FSC www.fsc.org MIXTE Papier issu de sources responsables FSC® C022030

Nathan est un éditeur qui s'engage pour la préservation de son environnement et qui utilise du papier fabriqué à partir de bois provenant de forêts gérées de manière responsable et contrôlée.

CALCULATRICE NUMWORKS

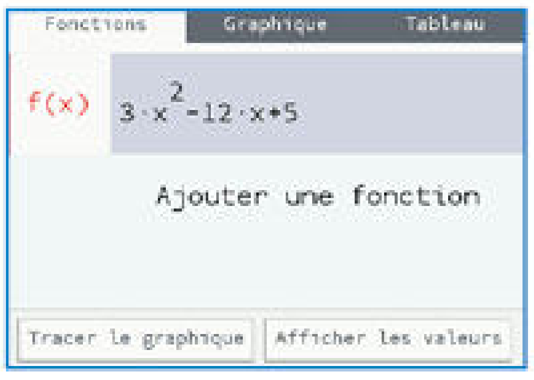
Fonctions

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 12x + 5$.

① Saisir la fonction

Fonctions OK (Ajouter une fonction) OK

Saisir l'expression de $f(x)$ en utilisant la touche x,n,t puis OK

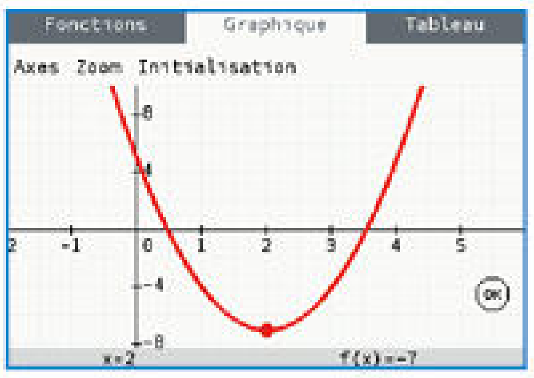


② Régler la fenêtre

Graphique OK Axes OK Saisir les valeurs

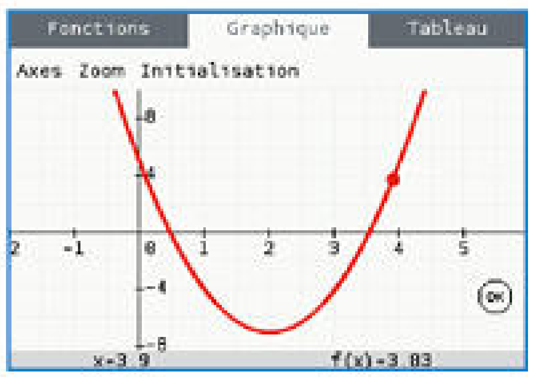
Valider OK

③ Tracer la courbe



④ Lire les coordonnées de points de la courbe

► et ◄

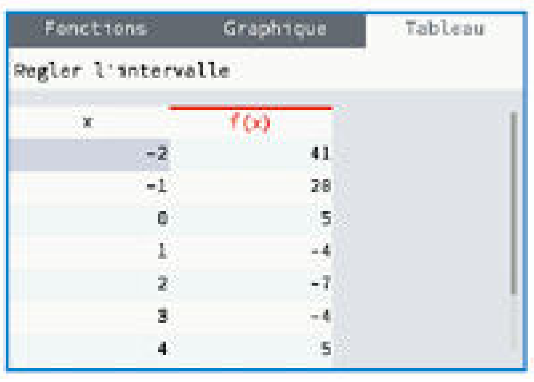


⑤ Tabuler la fonction

Tableau OK Regler l'intervalle OK

On règle le début, la fin et le pas de la table

Valider OK



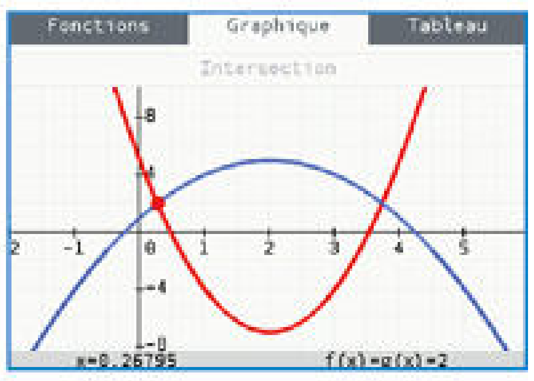
⑥ Étudier l'intersection de deux courbes

g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = -x^2 + 4x + 1$$

On trace les courbes représentatives de f et g dans un même repère.

OK Calculer OK Intersection OK



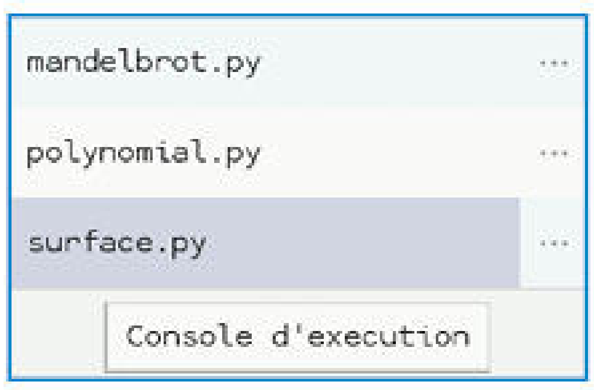
Pour passer d'un point à l'autre ► et ◄

Écrire un programme en langage Python

① Donner le nom du script

Python OK Ajouter un script OK

Saisir le nom du script OK



② Saisir le programme dans l'éditeur

surface.py OK

③ Exécuter le programme dans la console

OK surface.py ... OK

Executer le script OK

MÉMO PYTHON

EduPython

Fichier Edition Rechercher Affichage Projet Exécuter Outils Aide

Nouveau Fichier...

```
from math import *

def Aire (r):
    S= pi*r**2
    return S
```

Console Python

```
>>> Aire(2)
12.566370614359172
```

Exécuter le programme.

Le programme est saisi dans l'éditeur.

Le programme est exécuté dans la console.

input, print, affectation

```
x=float(input("x="))
n=int(input("n="))
y=x**n
print("y=",y)
```

x= 2.4 n= 7

```
>>>
y= 458.6471423999999
```

Saisie en entrée des variables x et n.

Affectation de la variable y.

Affichage en sortie de la variable y.

x est un nombre flottant, n est un nombre entier.

Fonctions

```
from random import *

def Somme(n):
    x=randint(1,n)
    y=randint(1,n)
    s=x+y
    return s
```

```
>>> Somme(6)
9
```

La fonction **Somme** a pour paramètre un entier naturel $n \geqslant 1$.

La fonction **Somme** renvoie pour résultat la valeur de la variable s.

Remarque : x et y sont des nombres entiers aléatoires compris entre 1 et n, s est la somme de ces deux nombres.

Boucle for...

```
def U(a,n):
    u=a
    for i in range(1,n+1):
        u=2*u+3
    return u
```

```
>>> U(1,10)
4093
```

La variable u est initialisée à la valeur de a.

Pour i allant de 1 à n, u prend la valeur $2u + 3$.

Remarque : (u_n) est la suite définie par $u_0 = a$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 3$.

If ... else

```
from math import *

def f(x):
    if x<=0:
        y=exp(x)
    else:
        y=x+1
    return y
```

```
>>> f(-1)
0.36787944117144233
>>> f(3)
4
```

Si la condition $x \leqslant 0$ est vraie, alors y prend la valeur e^x, sinon y prend la valeur $x + 1$.

Remarque : f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} e^x \text{ si } x \leqslant 0 \\ x + 1 \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

Boucle while...

```
from math import *

def Seuil(m):
    n=1
    v=1
    while v<m:
        n=n+1
        v=v+sqrt(n)
    return n
```

```
>>> Seuil(100)
28
```

Les variables n et v sont initialisées à 1.

Tant que la condition $v < m$ est vraie, les instructions : $n = n + 1$ et $v = v + \text{sqrt}(n)$ sont exécutées.

Remarque : Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$v_n = \sqrt{1} + \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{n}.$$

Le résultat est le plus petit entier naturel n tel que

$$v_n \geqslant m.$$

from ... import *

Permet d'importer une bibliothèque de fonctions.

Module math : sqrt, sin, cos, exp, log, … et les constantes pi, e, …

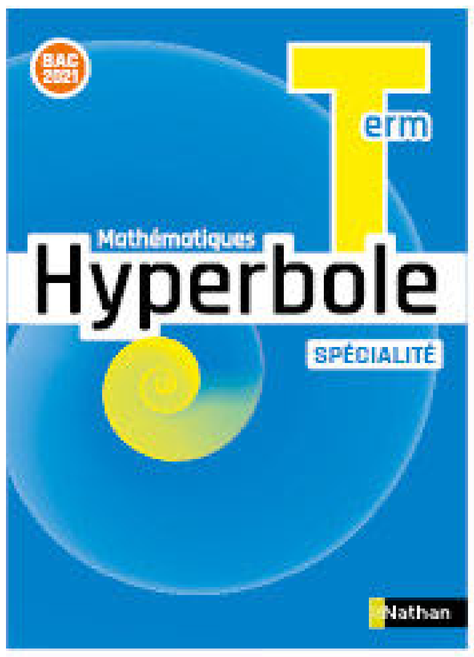
Module random : random, randint, …

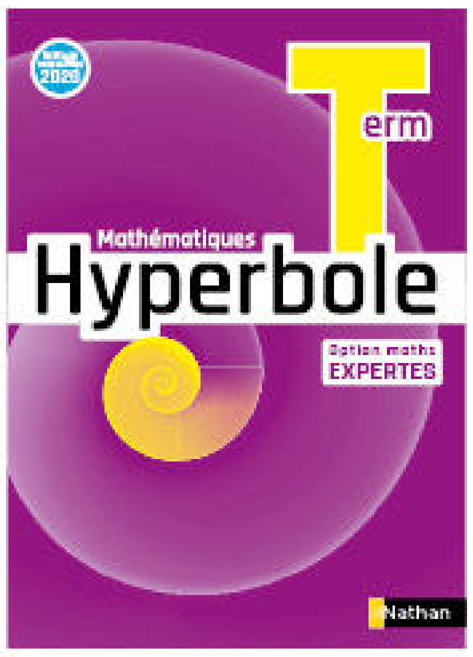
Il existe d'autres modules : **pylab**, **cmath**, …

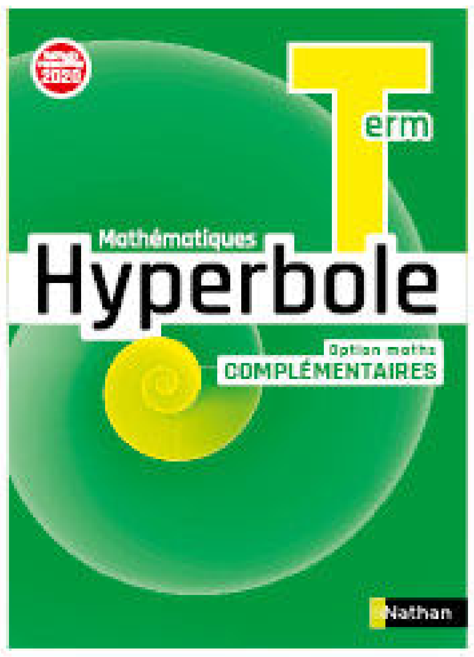
Les types des variables

- nombre entier : 3 ; − 5 ; 120 ; …
- nombre flottant : 1,56 ; − 3,57 ; …
- chaîne de caractères : "PYTHON" ; …
- liste : [1, 3, 5, 7, 9] ; …
- booléen : true, false

Mathématiques • collection Hyperbole







Je suis Adoptant papier

Je suis Adoptant numérique

Licence offerte | Licence offerte

Le manuel numérique enseignant

- \+ de 200 ressources numériques : les vidéos **jaicompris.com**, les corrigés des sujets de Bac blanc, …
- La plateforme de calcul mental : 1 800 exercices autocorrectifs
- Téléchargeable sur clé USB personnelle

Offert 5 ans en ligne | Utilisation en ligne et hors ligne

Le manuel numérique élève

- Les ressources numériques disponibles également pour l'élève
- Compatible smartphone

Nathan Live!

- Scannez les pages du manuel avec cette application mobile gratuite pour accéder directement aux ressources et liens numériques des chapitres.

Biblio EXOS

+ 200 exercices interactifs avec suivi des résultats des élèves sur l'ensemble du programme pour tester leur compréhension.

Aide à l'installation

Notre équipe de spécialistes vous accompagne personnellement pour mettre en place votre projet numérique et son suivi.

Des ressources réservées aux enseignants

Le site compagnon

Toutes les ressources pédagogiques sur : **hyperbole.nathan.fr**

Le livre du professeur

Tous les corrigés des exercices du manuel sur : **hyperbole.nathan.fr**

Découvrez nos manuels papier et numérique sur **nathan.fr/2020**

ISBN 313-3-09-118096-6

3 133091 180966

MIXTE
Papier issu de sources responsables
FSC® C022030

Nathan