7 Compléments sur les suites

HISTOIRE DES MATHS

Dès le 3e siècle avant notre ère, **Archimède** évalue des aires et des volumes par approximations successives ; des suites géométriques apparaissent dans les calculs.

Plus tard, au 1er siècle, **Héron d'Alexandrie** approche la racine carrée de n'importe quel nombre positif de façon récursive.

En 1689, le mathématicien suisse **Jacques Bernoulli** établit l'inégalité $(1 + a)^n \geqslant 1 + na$, qui est utile pour étudier la limite des suites géométriques. Cette preuve était déjà connue du savant anglais **Isaac Barrow** en 1670.

En 1751, dans l'*Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers*, **Jean Le Rond d'Alembert** accorde une large place aux suites, et à leur convergence.

Au début du 19e siècle, **Augustin Cauchy** formalise la théorie des suites avec rigueur.


Bonaventura Cavalieri


Niels Henrik Abel

▶ **Bonaventura Cavalieri** (1598-1647) est un mathématicien italien. En 1635, il présente sa *méthode des indivisibles* avec laquelle il calcule des aires et des volumes. Pour cela, il décompose les surfaces ou les solides à l'aide de lignes parallèles.

▶ **Niels Henrik Abel** (1802-1829) est un mathématicien norvégien. Avec Cauchy et Dirichlet, il s'attache à définir mathématiquement la notion intuitive de limite. Il fonde ainsi l'Analyse sur des raisonnements aussi rigoureux que l'Arithmétique.

1629 Cavalieri a écrit au moins 112 lettres à Galilée.

1745 D'Alembert conçoit la plupart des articles de l'*Encyclopédie* sous la direction de Diderot.

1821 Cauchy publie son *Cours d'analyse* où il étudie notamment la convergence de suites.

2003 Le prix Abel est créé par l'Académie norvégienne des sciences et des lettres. Il récompense chaque année un mathématicien.

1637 Le *Cid* de Corneille

1721 *Lettres persanes* de Montesquieu

1800 Volta dévoile la pile électrique

1898 Becquerel découvre la radioactivité

1989 Chute du mur de Berlin

1600 — 1700 — 1800 — 1900 — 2000

Les populations de thon sont sous surveillance.

Les écologues surveillent les fluctuations du nombre d'individus au sein des espèces. En temps discret, on peut modéliser cette évolution de population à l'aide de suites. Ces études permettent la gestion durable des populations de poissons comme le thon rouge, espèce emblématique de la Méditerranée, dont le stock s'est effondré en quelques décennies suite à la surpêche.

Les contenus et capacités travaillés dans ce chapitre

	Savoir-faire	Exercices
• Étudier le sens de variation d'une suite, y compris par récurrence.	1, 3	15 à 28
• Étudier si une suite est majorée, minorée, bornée, y compris par récurrence.	2, 4	29 à 37
• Comportement d'une suite (q^n) où q est un nombre réel.	5 à 8, 13, 14	38 à 46
• Utiliser des théorèmes sur les limites pour étudier la convergence d'une suite.	9 à 12	49 à 60
• Étudier des phénomènes d'évolution modélisables par une suite.		47, 48, 61, 69 à 73

Bien démarrer

Calcul mental

Rappels utiles

• Suites géométriques

Dire qu'une suite (u_n) est **géométrique de raison q** signifie que pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = q \times u_n.$$

Alors, pour tous entiers naturels n et p, $u_n = q^{n-p} u_p$.

• Limite d'une suite

Dire qu'une suite est **convergente** signifie qu'elle admet une **limite réelle**.

Dire qu'une suite est **divergente** signifie qu'elle admet une **limite infinie** ou bien qu'elle n'a **pas de limite**.

• Théorème de comparaison

Si (u_n) et (v_n) sont des suites telles que $u_n \geqslant v_n$ à partir d'un certain rang et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$,

alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

• Théorème des gendarmes

Si (u_n), (v_n), (w_n) sont des suites telles que :

(1) à partir d'un certain rang, $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$,

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell$ (nombre réel),

alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

• Principe du raisonnement par récurrence

P(n) est une propriété qui dépend d'un nombre entier naturel n et n_0 est un nombre entier naturel.

Si la propriété P(n) vérifie les deux conditions :

(1) P(n_0) est vraie (**Initialisation**),

(2) si P(k) est vraie pour un nombre entier naturel $k \geqslant n_0$, alors P$(k+1)$ est vraie (**Hérédité**) ;

alors, **pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$, P(n) est vraie.**

À l'oral — Questions-Tests

Pour chaque question, il y a une seule réponse exacte.

1 Laquelle de ces suites est une suite géométrique ?

(1) $u_0 = 1$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} + u_n = 4u_n$

(2) $v_0 = 1$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_{n+1} = 2v_n - 1$

(3) $w_0 = 1$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $w_{n+1} - w_n = 2$

2 (u_n) est une suite géométrique de raison -2 telle que $u_1 = 5$. Alors u_{10} est égal à :

(1) 5 120 (2) 2 560 (3) $-$ 2 560

3 (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = \frac{2}{1+e^{-n}}.$$

La suite (u_n) :

(1) diverge (2) converge vers 2 (3) converge vers 0

4 La suite $((-1)^n n)$:

(1) diverge vers $+\infty$

(2) diverge vers $-\infty$

(3) diverge

5 Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$u_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

a) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

(1) $u_n \geqslant 1 + n$ (2) $u_n \leqslant 1 - n$

(3) $1 - \dfrac{1}{n^2} \leqslant u_n \leqslant 1 + \dfrac{1}{n^2}$

b) La suite (u_n) :

(1) converge vers 1 (2) diverge vers $+\infty$

(3) diverge vers $-\infty$

6 Pour tout entier naturel n,

$$u_n = n + \cos^2(n).$$

a) Pour tout entier naturel n :

(1) $u_n \geqslant n$ (2) $u_n \leqslant n - 1$ (3) $-1 \leqslant u_n \leqslant 1$

b) La suite (u_n) :

(1) converge vers 1 (2) diverge vers $+\infty$

(3) diverge vers $-\infty$

7 $n \in \mathbb{N}$ et P(n) est la propriété : « $2^n \geqslant n^2$ ».

Laquelle de ces affirmations est **fausse** ?

(1) P(4) est vraie (2) P(n) est vraie pour $0 \leqslant n \leqslant 3$

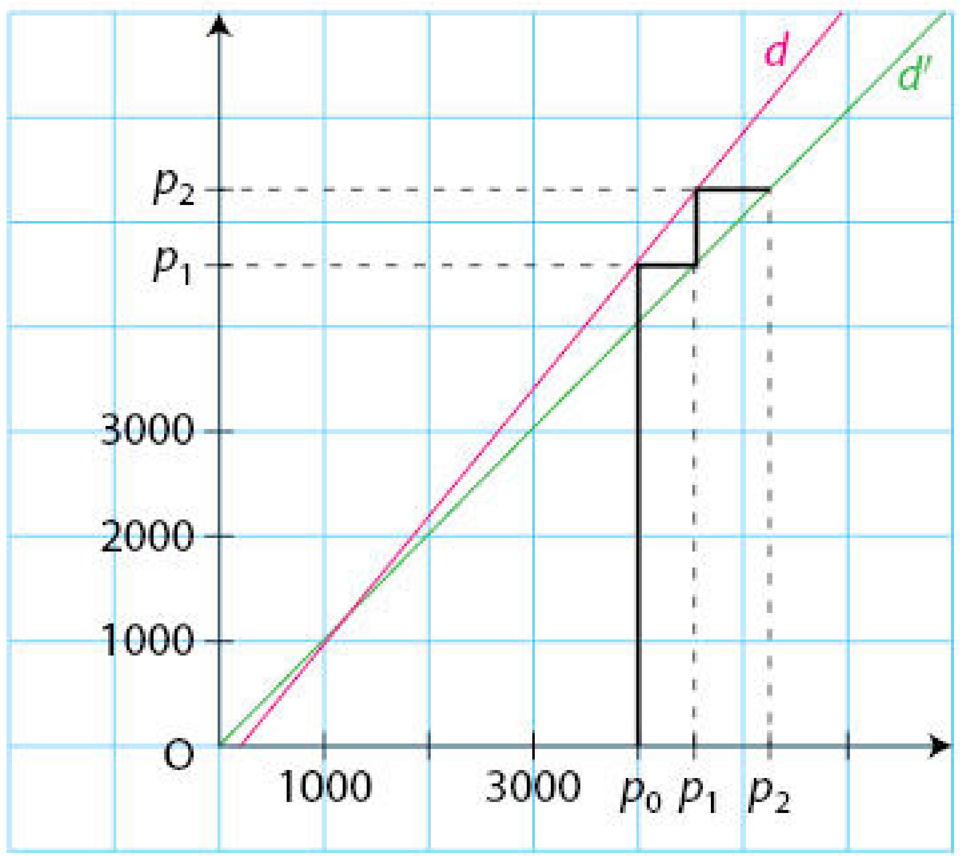
(3) Si P(k) est vraie pour $k \in \mathbb{N}$, alors P$(k+1)$ est vraie

1 Représenter graphiquement une suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$

Des chercheurs estiment que, chaque mois, la population d'une fourmilière s'accroît de 20 % et qu'en moyenne 200 fourmis ne reviennent pas à la fourmilière. Le 1er janvier 2020, la population est estimée à 4 000 fourmis.
On se propose d'étudier l'évolution de cette population.

1 On note p_n la population le 1er jour du n-ième mois après janvier 2020. Ainsi, $p_0 = 4000$.
a) Expliquer pourquoi pour tout entier naturel n,
$$p_{n+1} = 1{,}2p_n - 200.$$
b) Calculer la population au 1er mars 2020.

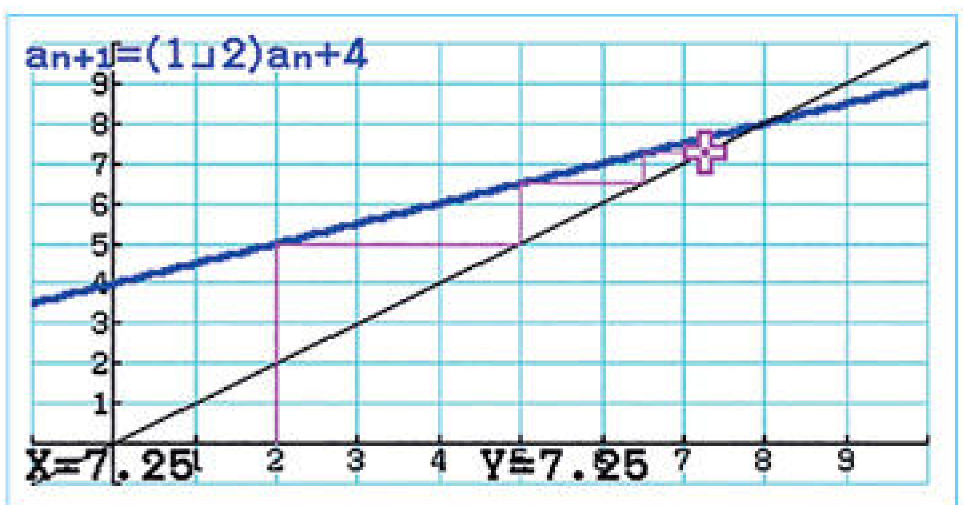
2 On représente graphiquement les premiers termes de la suite (p_n) dans le repère orthonormé ci-contre.
a) Expliciter une fonction f telle que pour tout entier naturel n, $p_{n+1} = f(p_n)$.
b) Dans le repère ci-contre, on a tracé les droites d d'équation $y = 1{,}2x - 200$ (en rouge) et d' d'équation $y = x$ (en vert).
On place p_0 sur l'axe des abscisses, puis on utilise la droite d pour placer p_1 sur l'axe des ordonnées.
On utilise la droite d' pour reporter p_1 sur l'axe des abscisses.
Réaliser ce graphique et le poursuivre pour placer, sans calculs, p_2, p_3, p_4, p_5 sur l'axe des abscisses (*unité* : 1 cm pour 1 000).
c) Conjecturer et décrire dans une phrase la monotonie et la limite de la population de cette fourmilière.



2 Une suite croissante majorée

(u_n) est la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 4$.

Katia a représenté graphiquement cette suite comme à l'activité 1, mais à l'écran de sa calculatrice.



1 Katia conjecture que la suite (u_n) est croissante et majorée par 8, c'est-à-dire que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 8$.
Démontrer ces deux conjectures à l'aide d'un raisonnement par récurrence.

2 **a)** Déterminer une suite (a_n) constante qui vérifie la relation : pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 4$.
b) Démontrer que la suite $(u_n - a_n)$ est géométrique et préciser sa raison.
c) Exprimer $u_n - a_n$, puis u_n en fonction de n. Conjecturer la limite de la suite (u_n).

Cours

Exercices
- 1 à 4 (ci-contre)
- 15 à 37

1 Vocabulaire usuel des suites

A Sens de variation d'une suite

Définitions

(u_n) est une suite définie sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des nombres entiers naturels.
- Dire que la suite (u_n) est **croissante** signifie que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \geqslant u_n$.
- Dire que la suite (u_n) est **décroissante** signifie que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \leqslant u_n$.

Remarque : lorsque la suite (u_n) est définie à partir d'un rang n_0, on compare u_n et u_{n+1} pour tout entier naturel n tel que $n \geqslant n_0$.

Méthodes pour étudier le sens de variation d'une suite (u_n)
- **Signe de la différence $u_{n+1} - u_n$** : si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ (resp. $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$), alors la suite (u_n) est croissante (resp. décroissante).
- **Suite telle que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = f(n)$** : si la fonction f est croissante (resp. décroissante) sur $[0\,;+\infty[$, alors la suite (u_n) est croissante (resp. décroissante).
- **Comparaison de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 pour les suites telles que pour tout n, $u_n > 0$** : si pour tout entier naturel n, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ (resp. $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$) alors la suite (u_n) est croissante (resp. décroissante).
- **Raisonnement par récurrence** : si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \geqslant u_n$, (resp. $u_{n+1} \leqslant u_n$), alors la suite (u_n) est croissante (resp. décroissante).

B Suites majorées, minorées, bornées

Définitions

(u_n) est une suite définie sur $\mathbb{N}$.
- Dire que la suite (u_n) est **majorée** signifie qu'il existe un réel M tel que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant \mathrm{M}$.
On dit que M est **un majorant** de la suite (u_n).
- Dire que la suite (u_n) est **minorée** signifie qu'il existe un réel m tel que pour tout entier naturel n, $m \leqslant u_n$.
On dit que m est **un minorant** de la suite (u_n).
- Dire que la suite (u_n) est **bornée** signifie que la suite (u_n) est majorée et minorée.

Exemple

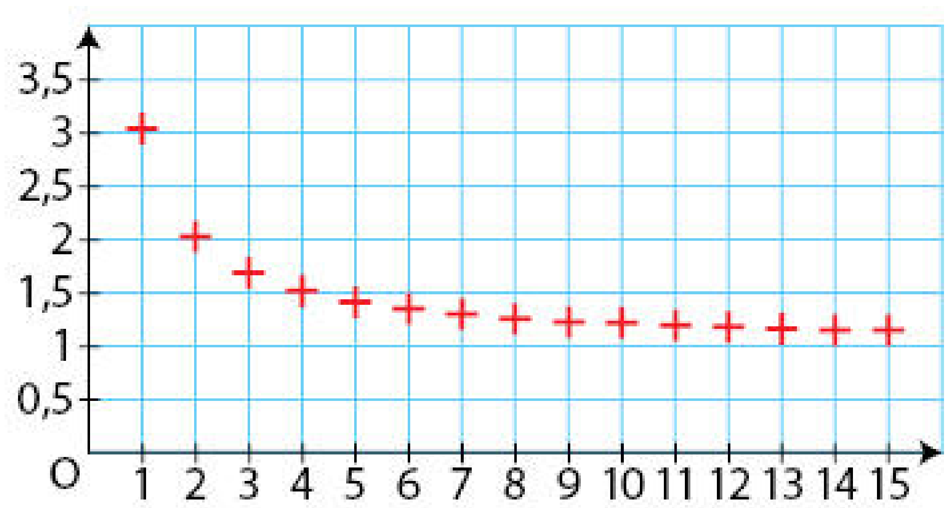
(u_n) est la suite définie, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, par :

$$u_n = 1 + \frac{2}{n}.$$

Pour $n \geqslant 1$, $\dfrac{2}{n} \leqslant 2$, donc $u_n \leqslant 3$. La suite (u_n) est majorée par 3.

Pour $n \geqslant 1$, $\dfrac{2}{n} > 0$, donc $u_n > 1$. La suite (u_n) est minorée par 1.

En conclusion, la suite (u_n) est bornée.



Remarques : • 3 est un majorant de la suite, donc 3,5 ; 4 ; $5\sqrt{2}$; … en sont aussi des majorants.
- Il existe des suites non majorées, non minorées. Par exemple, la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = (-2)^n$ n'est ni majorée ni minorée.

EXERCICES RÉSOLUS

1 Étudier le sens de variation d'une suite

Étudier le sens de variation de la suite :

a) (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $\quad u_{n+1} = u_n - n$;

b) (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = 2n^2 - 8n + 11$.

Solution

a) Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = -n$ et donc $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.
Ainsi, la suite (u_n) est décroissante.

b) Pour tout entier naturel n, $v_n = f(n)$ où f est la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = 2x^2 - 8x + 11$.
Pour tout réel x, $f'(x) = 4x - 8$.
D'où le tableau de variations de la fonction f.

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	11	↘	3	↗	

La fonction f est croissante sur l'intervalle $[2\,;+\infty[$, donc la suite (v_n) est croissante à partir du rang $n = 2$.

Au **b)**, on aurait pu aussi étudier le signe de $v_{n+1} - v_n$.

Pour étudier les variations d'une suite du type $u_n = f(n)$, il suffit de déterminer la fonction dérivée de f et d'étudier le signe de $f'(x)$. Attention, f est une fonction de la variable réelle x, et non pas de n.

Remarque : la 3e méthode (§ A p. 204) qui consiste à comparer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1, est à privilégier lorsque des puissances figurent dans u_n, par exemple $u_n = \dfrac{2^n}{n}$ (voir exercice **21**).

2 Démontrer qu'une suite est majorée

(u_n) est la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $\quad u_{n+1} = 0{,}25u_n + 2$.
Démontrer par récurrence que la suite est majorée par 3.

Solution

On démontre par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 3$.

- **Initialisation** : $u_0 = 1$ donc $u_0 \leqslant 3$.
- **Hérédité** : on suppose que pour un entier naturel k, $u_k \leqslant 3$.
On démontre qu'alors $u_{k+1} \leqslant 3$.
De l'hypothèse de récurrence, $u_k \leqslant 3$, on déduit que $0{,}25u_k \leqslant 0{,}75$ et $0{,}25u_k + 2 \leqslant 2{,}75$. Ainsi $u_{k+1} \leqslant 3$.
- **Conclusion** : pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 3$.

La suite (u_n) est donc majorée par 3.

Pour démontrer qu'une suite (u_n) est majorée ou minorée, on peut procéder de différentes façons (voir exercices **31** à **33**).

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 1

3 Étudier le sens de variation de la suite :

a) (u_n) définie par $u_0 = -2$ et pour tout n de $\mathbb{N}$,
$$u_{n+1} = 2n^2 + u_n\,;$$

b) (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = e^{2-3n}$.

Sur le modèle de l'exercice résolu 2

4 (v_n) est la suite définie par $v_0 = 6$ et pour tout entier naturel n, $\quad v_{n+1} = 0{,}2\,v_n - 3$.
Démontrer par récurrence que la suite (v_n) est minorée par $-3{,}75$.

Exercices
- 5 à 8 (ci-contre)
- 38 à 48

2 Comportement d'une suite géométrique (q^n)

A Un préambule

Inégalité de Bernoulli

a désigne un nombre réel **strictement positif**. Pour tout entier naturel n, $\mathbf{(1+a)^n \geqslant 1+na}$.

Démonstration

On utilise un raisonnement par récurrence.
Initialisation : pour $n=0$, $(1+a)^0=1$ et $1+0\times a=1$, donc $(1+a)^0 \geqslant 1+0\times a$.
Hérédité : on considère un nombre entier naturel k pour lequel $(1+a)^k \geqslant 1+ka$ et on montre qu'alors $(1+a)^{k+1} \geqslant 1+(k+1)a$.
De $(1+a)^k \geqslant 1+ka$, on déduit, en multipliant chaque membre par le nombre positif $1+a$, que $(1+a)^{k+1} \geqslant (1+ka)(1+a)$, c'est-à-dire $(1+a)^{k+1} \geqslant 1+a+ka+ka^2$,
soit $(1+a)^{k+1} \geqslant 1+(k+1)a+ka^2$. Or $ka^2 \geqslant 0$, donc $(1+a)^{k+1} \geqslant 1+(k+1)a$.
Conclusion : pour tout entier naturel n, $(1+a)^n \geqslant 1+na$.

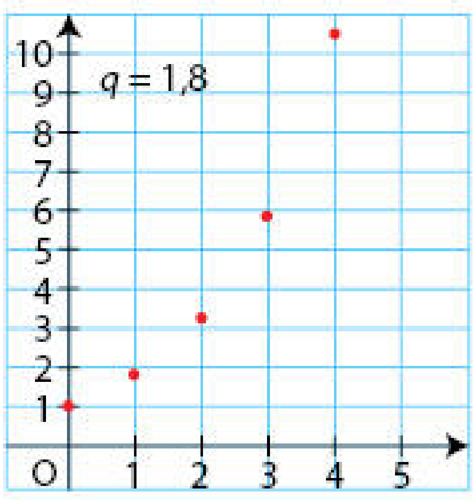
Vidéo
JAICOMPRIS.COM
Cette démonstration est présentée en vidéo

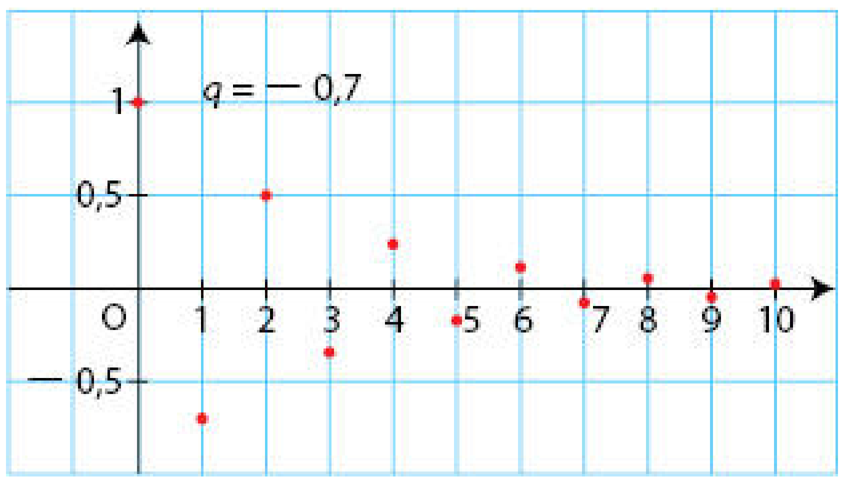
B Comportement à l'infini de la suite (q^n)

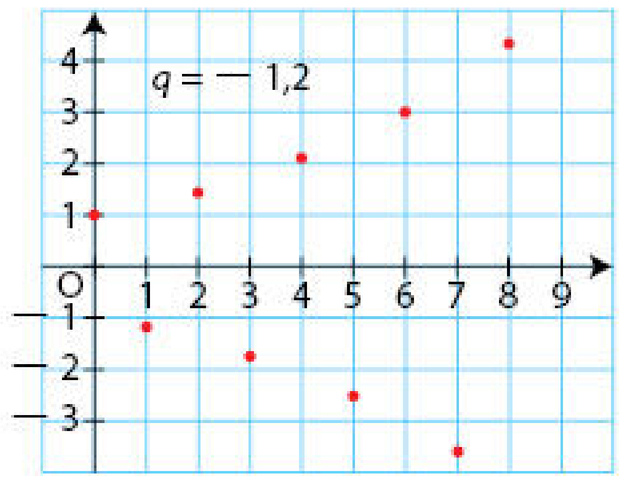
Propriété

q désigne un nombre réel.

- Si $\mathbf{q>1}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.
- Si $\mathbf{q=1}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 1$.
- Si $\mathbf{-1<q<1}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.
- Si $\mathbf{q \leqslant -1}$, alors la suite (q^n) n'a **pas de limite**.







Démonstration

Cas où $q>1$: il existe alors un réel $a>0$ tel que $q=1+a$.
Alors, $q^n=(1+a)^n$. Donc, d'après l'inégalité de Bernoulli, $q^n > 1+na$.
Comme $a>0$, et d'après un théorème de comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.

Remarque : voir l'exercice **74** p. 218 pour étudier le cas $-1<q<1$.
Le cas $q=1$ est trivial car pour tout n, $q^n=1$.

Vidéo
JAICOMPRIS.COM
Ces démonstrations sont présentées en vidéo

C Comportement d'une suite géométrique

Exemples

- (u_n) est la suite géométrique de raison 4 telle que $u_0=-7$. Pour tout entier naturel n, $u_n=-7\times 4^n$.
  Or, $4>1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 4^n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
- (v_n) est la suite géométrique de raison 0,5 telle que $v_0=5$. Pour tout entier naturel n, $v_n=5\times 0{,}5^n$.
  Or, $-1<0{,}5<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}5^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

EXERCICES RÉSOLUS

5 Utiliser la limite de la suite (q^n)

Étudier la limite de la suite : **a)** (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 5^n - 2$;

b) (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = 1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}$; **c)** (w_n) géométrique de raison $-\frac{5}{2}$ telle que $w_0 = -3$.

Solution

a) $5 > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 5^n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

b) $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}7$ et $-1 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$.

c) Pour tout entier naturel n, $w_n = -3\left(-\frac{5}{2}\right)^n$.

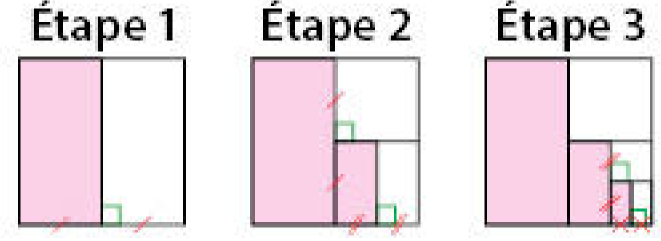
$-\frac{5}{2} < -1$ donc la suite (w_n) n'a pas de limite.

> Au **b)**, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$.
>
> Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = 0$,
>
> donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1} = 0$.

6 Modéliser une situation par une suite géométrique

À partir d'un carré de côté 1, on construit successivement les rectangles colorés ci-contre.
On note S_n l'aire, en unité d'aire, de la surface colorée à l'étape n, avec $n \geqslant 1$.
Exprimer S_n en fonction de n et étudier la limite de la suite (S_n).

Étape 1 Étape 2 Étape 3



Solution

On note a_n l'aire, en unité d'aire, du rectangle ajouté à l'étape n. Ses côtés ont pour longueur la moitié des longueurs des côtés du rectangle ajouté à l'étape $n - 1$.

Donc pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, $a_n = \frac{1}{4} a_{n-1}$.

Ainsi, la suite (a_n) est géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et $a_1 = \frac{1}{2}$.
Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = a_1\left(1 + \frac{1}{4} + \ldots + \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right)$$

$$S_n = \frac{1}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right).$$ Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \frac{2}{3}$.

> Pour tout réel $q \neq 1$,
>
> $1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 5

7 Étudier la limite de la suite :

a) (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 2 - \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}$;

b) (v_n) géométrique de raison $1 - \sqrt{2}$ telle que $v_0 = 1$.

Sur le modèle de l'exercice résolu 6

8 (u_n) est la suite définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par $u_n = 0{,}\underbrace{77\ldots7}_{n \text{ fois}}$.
Étudier la limite de la suite (u_n) en remarquant que :

$$u_n = \frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \ldots + \frac{7}{10^n}.$$

Cours

Exercices
- 9 à 12 (ci-contre)
- 49 à 61

3 Suites monotones et convergence

A Suites croissantes non majorées

Propriétés

(1) Si une suite est croissante et non majorée, alors elle diverge vers $+\infty$.
(2) Si une suite est décroissante et non minorée, alors elle diverge vers $-\infty$.

Démonstration

(1) (u_n) est une suite croissante non majorée. Dire que (u_n) est non majorée signifie, par négation, que quel que soit le réel A, il existe un entier naturel N tel que $u_N > A$.
La suite étant croissante, il en résulte que pour tout entier naturel $n \geqslant N$, $u_n > A$.
Quel que soit le réel A, l'intervalle $]A\,;+\infty[$ contient donc tous les termes de la suite (u_n) pour $n \geqslant N$, donc la suite (u_n) a pour limite $+\infty$.

Vidéo
JaiCompris.com
Cette démonstration est présentée en vidéo

B Suites croissantes majorées

Théorèmes de convergence (admis)

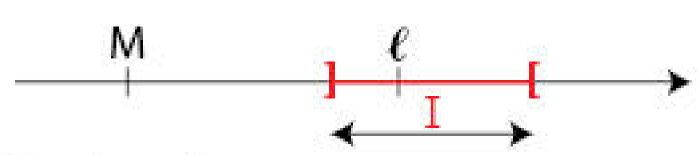
(1) Si une suite est croissante et majorée, alors cette suite converge.
(2) Si une suite est décroissante et minorée, alors cette suite converge.

Attention ! Ce théorème permet de prouver la convergence d'une telle suite mais ne fournit pas explicitement sa limite.

Propriétés

(1) Si une suite (u_n) est majorée par M et converge vers un nombre réel ℓ, alors $\ell \leqslant M$.
(2) Si une suite (u_n) est minorée par m et converge vers un nombre réel ℓ, alors $\ell \geqslant m$.

Démonstration



(1) On raisonne par l'absurde et on suppose que $\ell > M$.
On note I un intervalle ouvert contenant ℓ et qui est inclus dans l'intervalle $]M\,;+\infty[$.
(u_n) converge vers ℓ, donc I contient tous les u_n à partir d'un certain rang et ces u_n sont donc supérieurs à M, ce qui est en contradiction avec le fait que (u_n) est majorée par M. Donc $\ell \leqslant M$.

C Suites monotones convergentes

Propriétés

Si une suite est croissante (resp. décroissante) et converge vers un nombre réel ℓ, alors la suite est majorée (resp. minorée) par ℓ.

Démonstration

Cas où (u_n) est croissante et converge vers ℓ : on raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe un rang p pour lequel $u_p > \ell$. Alors $u_p = \ell + \beta$ avec $\beta > 0$. D'une part, (u_n) est croissante, donc pour tout $n \geqslant p$, $u_n \geqslant u_p$ **(1)**.
D'autre part, (u_n) converge vers ℓ, donc $]\ell - \alpha\,; u_p[$ (avec $\alpha > 0$) contient tous les u_n à partir d'un rang n_0 **(2)**.
Ainsi, si N désigne le plus grand des rangs p et n_0, alors pour tout $n \geqslant N$, on a à la fois $u_n \geqslant u_p$ (d'après **(1)**) et $u_n < u_p$ (d'après **(2)**), ce qui est impossible. Donc l'hypothèse supplémentaire « il existe un rang p pour lequel $u_p > \ell$ » est fausse et sa négation est vraie « pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant \ell$ ».

EXERCICES RÉSOLUS

9 Étudier une suite croissante non majorée

(t_n) est la suite définie par $t_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $t_{n+1} = t_n + n$.

a) Justifier que la suite (t_n) est croissante.

b) Démontrer que la suite (t_n) n'est pas majorée.

c) Déterminer la limite de la suite (t_n).

Solution

a) Pour tout entier naturel n, $t_{n+1} - t_n = n$, donc $t_{n+1} - t_n \geqslant 0$.
Ainsi, la suite (t_n) est croissante.

b) On raisonne par l'absurde. On suppose que la suite (t_n) est majorée.
(t_n) étant croissante, elle converge alors vers un nombre réel ℓ.
$\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = \ell$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} t_{n+1} = \ell$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} (t_n + n) = +\infty$.
La limite de la suite (t_n) étant unique, on aboutit à une contradiction, donc la suite (t_n) n'est pas majorée.

c) La suite (t_n) est croissante et non majorée, donc elle admet pour limite $+\infty$.

> Pour démontrer qu'une suite n'est pas majorée, on utilise un raisonnement par l'absurde.
> On montre que l'hypothèse supplémentaire « la suite est majorée » conduit à une contradiction.

10 Étudier une suite croissante majorée

(u_n) est la suite définie par $u_0 = 30$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}6u_n + 20$.

a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 50$.

b) En déduire que la suite (u_n) converge vers un nombre réel ℓ. Que peut-on dire de ℓ ?

Solution

a) • **Initialisation** : $u_0 = 30$ et $u_1 = 0{,}6 \times 30 + 20 = 38$.
Donc $u_0 \leqslant u_1 \leqslant 50$.

• **Hérédité** : on suppose que pour un entier naturel k, $u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant 50$.
On démontre qu'alors $u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant 50$.
De l'hypothèse de récurrence, $u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant 50$, on déduit que :

$$0{,}6u_k + 20 \leqslant 0{,}6u_{k+1} + 20 \leqslant 0{,}6 \times 50 + 20$$

c'est-à-dire $u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant 50$.

• **Conclusion** : pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 50$.

b) Ainsi, la suite (u_n) est croissante et majorée par 50, donc elle converge vers un nombre réel ℓ tel que $\ell \leqslant 50$.

> Pour démontrer par récurrence qu'une suite est croissante, on démontre que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1}$.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 9

11 (a_n) est la suite définie par $a_0 = 1$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $a_{n+1} = a_n + n^2$.

a) Justifier que la suite (a_n) est croissante.

b) Démontrer que la suite (a_n) n'est pas majorée.

c) Déterminer la limite de la suite (a_n).

Sur le modèle de l'exercice résolu 10

12 (v_n) est la suite définie par $v_0 = 100$ et pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 0{,}4v_n + 40$.

a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $65 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n$.

b) En déduire que la suite (v_n) converge vers un nombre réel ℓ. Que peut-on dire de ℓ ?

Savoir-faire Algo python

Vidéo
JAICOMPRIS.COM
Un autre exercice Algo/python résolu en vidéo

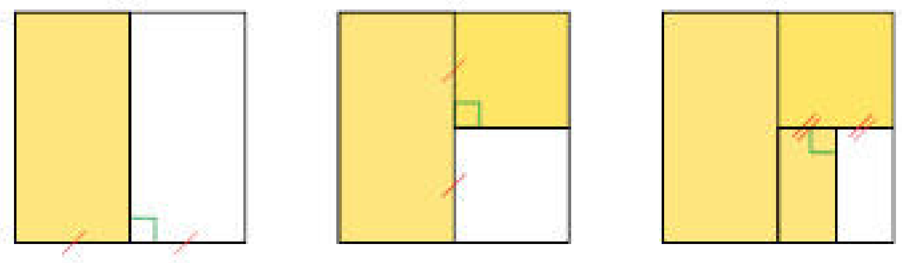
EXERCICE RÉSOLU

13 Utiliser un algorithme de seuil

Cours 2. B et C

Dans un carré de côté 1, on effectue les constructions successives ci-contre.
Le rectangle nouveau construit à chaque étape est obtenu en reliant les milieux de deux côtés opposés.
On note S_n l'aire, en unité d'aire, de la surface colorée à l'étape n, avec $n \geqslant 1$.

Étape 1 Étape 2 Étape 3



1. a) Exprimer S_n en fonction de S_{n-1} pour $n \geqslant 2$.
b) Conjecturer géométriquement la limite de la suite (S_n).
c) La fonction **Seuil** écrite en langage Python ci-contre, renvoie l'étape n et l'aire S de la surface colorée telles que S diffère de 1 de moins de 10^{-p} (avec $p \in \mathbb{N}$).
Saisir ce programme en le complétant et l'exécuter.

```
def Seuil(p):
    n=1
    S=[   ]
    [   ] 1-S>=10**(-p):
        n=n+1
        S=S+[   ]
    return n,S
```

2. Exprimer S_n en fonction de n et justifier la conjecture émise à la question **1. b)**.

Solution

1. a) À l'étape $n+1$, l'aire a_{n+1} du rectangle nouveau est la moitié de l'aire a_n du rectangle construit à l'étape n.
Donc, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n$.
La suite (a_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et $a_1 = \frac{1}{2}$, donc pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $a_n = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Ainsi, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, $S_n - S_{n-1} = a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
b) Plus n augmente, plus la surface colorée recouvre le carré. On conjecture que $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = 1$.
c) Voici le programme complété et l'affichage obtenu lorsqu'on exécute **Seuil**(6).

```
>>> Seuil(6)
(20, 0.9999990463256836)
```

```
def Seuil(p):
    n=1
    S=0.5
    while 1-S>=10**(-p):
        n=n+1
        S=S+0.5**n
    return n,S
```

2. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = a_1 \times \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$$

$$S_n = \frac{1}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Or, $-1 < \frac{1}{2} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = 1$.

EXERCICE D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 13

14 (u_n) est la suite définie par $u_0 = -1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2$.
a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n = 4 - 5\left(\frac{1}{2}\right)^n$.
b) Déterminer la limite de la suite (u_n).
c) Au début de cet algorithme, on affecte 0 à n et -1 à u.
Cet algorithme renvoie la valeur de n à partir de laquelle $4 - u_n < 10^{-5}$.
Déterminer cette valeur.

Tant que ...
    $n \leftarrow$ ...
    $u \leftarrow$ ...
Fin Tant que

Sens de variation d'une suite

Cours 1. A

Questions flash À l'oral

15 Julia affirme : « (u_n) est une suite arithmétique de raison 3, donc elle est croissante ».
A-t-elle raison ?

16 Paolo affirme : « (v_n) est la suite définie par $v_0 = -1$ et pour tout entier naturel n, $v_n = v_{n+1} - 2$. Donc cette suite est décroissante. »
A-t-il raison ?

17 (u_n) est la suite à termes strictement positifs, définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n,
$$u_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{2}u_n.$$
Déterminer mentalement le sens de variation de la suite (u_n).

18 (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$u_n = 5 - (n+2)^2.$$
a) Exprimer $u_{n+1} - u_n$ en fonction de n.
b) En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

19 (h_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par :
$$h_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$
a) Exprimer $h_{n+1} - h_n$ en fonction de n.
b) En déduire le sens de variation de la suite (h_n).

20 (v_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$v_n = 2n^2 + n - 3.$$
a) Déterminer une fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ telle que pour tout entier naturel n, $v_n = f(n)$.
b) Étudier le sens de variation de f sur $[0\,;+\infty[$.
c) En déduire le sens de variation de la suite (v_n).

21 (w_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par :
$$w_n = \frac{2^n}{n}.$$
a) Expliquer pourquoi pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $w_n > 0$.
b) Vérifier que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,
$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{2n}{n+1}.$$
c) Comparer $2n$ et $n+1$. En déduire le sens de variation de la suite (w_n).

22 (t_n) est la suite définie par $t_0 = -2$ et pour tout entier naturel n, $t_{n+1} = \frac{1}{2}t_n + \frac{5}{2}$.
a) Tabuler la suite (t_n) à l'aide de la calculatrice. Conjecturer son sens de variation.
b) Utiliser un raisonnement par récurrence pour démontrer cette conjecture.

Pour les exercices 23 à 28, utiliser la méthode de son choix pour étudier le sens de variation de la suite (u_n).

23 (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{e^{2n}}{5^{n+2}}$.

24 (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$u_n = 1 - \frac{2}{n+3}.$$

25 (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$u_n = e^n - n.$$

26 (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$.

27 (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$u_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2.$$

28 (u_n) est la suite géométrique de raison $\frac{3}{2}$ telle que $u_0 = -1$.

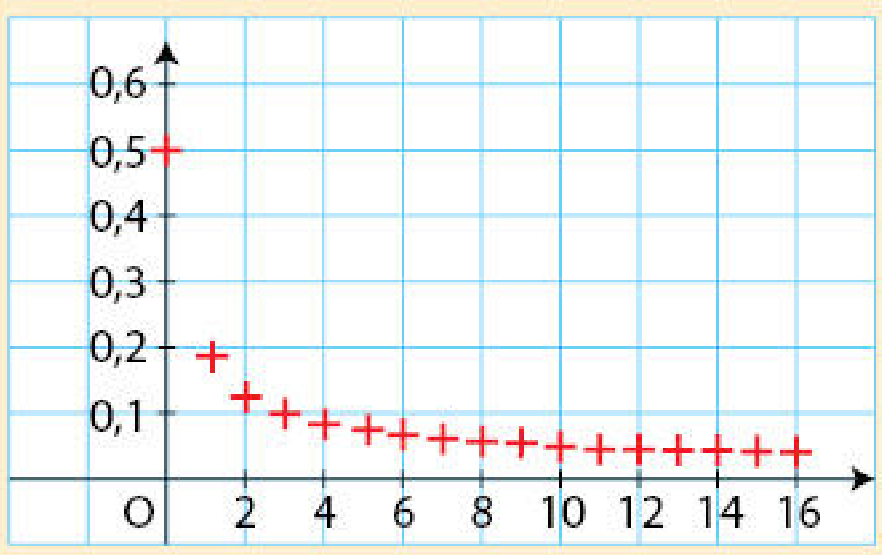
Suites majorées, minorées, bornées

Cours 1. B

Questions flash À l'oral

29 (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$u_n = 2 + (-1)^n.$$
Déterminer mentalement un majorant puis un minorant de cette suite.

30 Conjecturer, à l'aide de ce graphique, un majorant et un minorant de la suite représentée.



31 (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$u_n = \frac{2n+1}{3n-1}.$$
Démontrer que $\frac{3}{2}$ est un majorant de la suite (u_n) en étudiant le signe de la différence $u_n - \frac{3}{2}$.

32 (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$u_n = \frac{4n-2}{3n+1}.$$
a) Déterminer une fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ telle que pour tout entier naturel n, $u_n = f(n)$.
b) Étudier les variations de la fonction f sur $[0\,;+\infty[$. Dresser le tableau de variations de f.
c) En déduire un majorant et un minorant de la suite (u_n).

33 (u_n) est la suite définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 3$.
Utiliser un raisonnement par récurrence pour démontrer que la suite (u_n) est minorée par $\frac{1}{2}$ et majorée par 5.

34 (w_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$w_n = 5 - 2\cos(n).$$
a) Montrer que la suite (w_n) est bornée.
b) Donner trois majorants et trois minorants de la suite (w_n).

35 (v_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$v_n = -n^2 + 10n + 1.$$
a) Montrer que la suite (v_n) est majorée par 26.
b) Peut-on donner un minorant de la suite (v_n) ?

36 (t_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$t_n = \frac{30n}{25+n^2}.$$
a) Tabuler la suite (t_n) avec la calculatrice et conjecturer un majorant et un minorant de la suite (t_n).
b) Démontrer ces conjectures.

Vidéo
JaiCompris.com — Cet exercice est corrigé en vidéo

37 (u_n) est la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3 - 0{,}5u_n$.
a) Construire dans un repère orthonormé les droites d'équations $y = x$ et $y = 3 - 0{,}5x$. Placer u_0 sur l'axe des abscisses et construire u_1, u_2 et u_3 sur cet axe sans effectuer de calcul.
b) La suite (u_n) semble-t-elle bornée ?
c) Démontrer par récurrence cette conjecture.

Comportement de la suite (q^n)

Cours 2

Questions flash — À l'oral

38 Donner oralement la limite de chacune des suites définies sur $\mathbb{N}$ par :

a) $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ **b)** $v_n = 2^n$ **c)** $w_n = \left(\frac{7}{6}\right)^n$
d) $a_n = 0{,}99^n$ **e)** $b_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n$ **f)** $c_n = \pi^n$

39 (u_n) est la suite géométrique de raison $\frac{5}{4}$ telle que $u_0 = -1$.
Étudier mentalement la limite de la suite (u_n).

40 Pour tout entier naturel n,
$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$
Jade affirme : « La suite (S_n) converge vers 1 ».
A-t-elle raison ?

41 Déterminer, en justifiant, la limite de chacune des suites définies sur $\mathbb{N}$ par :

a) $u_n = 4 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$ **b)** $v_n = 10^{-3} \times \left(\frac{5}{3}\right)^n$ **c)** $t_n = -\left(\frac{9}{4}\right)^n$

42 Déterminer, en justifiant, la limite de chacune des suites définies sur $\mathbb{N}$ par :
a) $u_n = 40 \times (1 - 0{,}1^n)$ **b)** $v_n = \left(1 + \frac{1}{100}\right)^n$
c) $w_n = \frac{3 + 0{,}3^n}{1 + 0{,}5^n}$ **d)** $t_n = \frac{3 + 3^n}{4 + 0{,}5^n}$

43 (v_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \frac{3^{n+1}}{2^n}$.
Étudier la limite de la suite (v_n).

44 On lance n fois de suite un dé bien équilibré et on note p_n la probabilité d'obtenir au moins une fois la face 6.
a) Exprimer p_n en fonction de n.
b) Étudier la limite de la suite (p_n).

45 (s_n) et (t_n) sont les suites définies sur $\mathbb{N}$ par :
$$s_n = \frac{4^n}{5} \quad \text{et} \quad t_n = -3 \times 4^n.$$
a) Déterminer la limite de chaque suite (s_n) et (t_n).
b) Quel est le comportement à l'infini de la suite $(s_n + t_n)$? Même question pour la suite $(s_n \times t_n)$.

46 **Algo** Au début de cet algorithme, on affecte 1 à la variable n. La variable p a une valeur entière donnée ($p \geqslant 1$).

```
Tant que 0,25^n > 10^-p
   Affecter à n la valeur n + 1
Fin Tant que
```

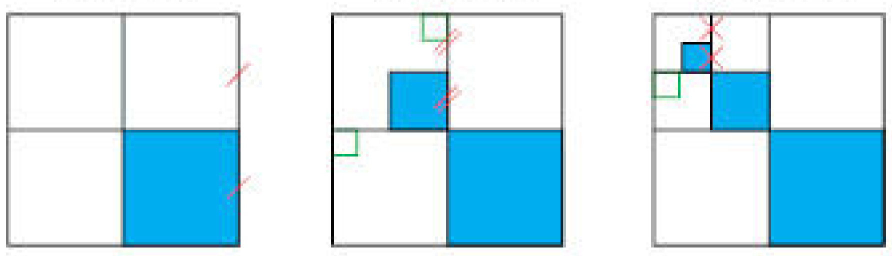
L'algorithme renvoie la valeur de n.

a) Quel est le rôle de cet algorithme ?

b) Léa affirme : « Cet algorithme se termine pour toute valeur de $p \geqslant 1$ ».
Expliquer.

47 À l'intérieur d'un carré de côté 8, on construit une suite de carrés et on les colorie comme indiqué sur la figure ci-dessous.

Étape 1 Étape 2 Étape 3



On poursuit ainsi la construction et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note S_n l'aire, en unité d'aire, de la partie colorée en bleu à l'étape n.

a) On note c_n l'aire du nouveau carré construit à l'étape n. Exprimer c_n en fonction de n.

b) Montrer que $S_n = \dfrac{64}{3}\left[1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^n\right]$.

c) Quelle est la limite de la suite (S_n) ?

48 **Algo** python

Des biologistes étudient le développement de la bactérie *Neisseira meningitidis*, responsable de certaines méningites.

In vitro, on a constaté que le nombre de bactéries augmente de 25 % chaque heure.
Au début de l'expérience, on place 10 bactéries dans une éprouvette.

a) Modéliser cette situation à l'aide d'une suite géométrique (u_n) donnant le nombre de bactéries dans l'éprouvette, n heures après le début.

b) Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

c) Écrire une fonction **Seuil**, en langage Python, qui permet de savoir à partir de quelle heure le nombre de bactéries dépasse un seuil p (avec $p \in \mathbb{N}$).

d) Saisir ce programme et l'exécuter lorsque :
- $p = 10^4$
- $p = 10^5$
- $p = 10^6$

Interpréter les résultats obtenus.

Suites monotones et convergence

Cours 3

Questions flash À l'oral

49 (u_n) est une suite telle que :
- pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \leqslant u_n$;
- pour tout réel A, il existe un rang N tel que $u_N < A$.

Que peut-on dire de la limite de la suite (u_n) ?

50 (v_n) est une suite telle que pour tout entier naturel n, $-1 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n$.

a) Expliquer oralement pourquoi la suite (v_n) est convergente.

b) Que peut-on dire de sa limite ?

51 (v_n) est une suite telle que pour tout entier naturel n, $-3 \leqslant v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant 5$.

a) Expliquer oralement pourquoi la suite (v_n) est convergente.

b) Que peut-on dire de sa limite ?

52 (v_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = n^2 + 2$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est croissante.

b) Justifier que la suite (v_n) n'est pas majorée à l'aide d'un raisonnement par l'absurde.

c) Déterminer de deux façons différentes la limite de la suite (v_n).

53 (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{30n}{25+n}$.

a) Montrer que la suite (u_n) est majorée par 30.

b) Quel est le sens de variation de (u_n) ?

c) La suite (u_n) est-elle convergente ?

54 (u_n) est la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n \times e^{-u_n}$.

a) Démontrer par récurrence que tous les termes de la suite sont strictement positifs.

b) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

55 (v_n) est la suite définie par $v_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 0{,}75v_n + 2$.

a) Démontrer par récurrence que la suite (v_n) est majorée par 8.

b) Justifier que cette suite est croissante.

c) En déduire que la suite (v_n) converge. Que peut-on dire de sa limite ?

56 (u_n) est la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 5 - 0{,}4u_n$.

1. a) Afficher à l'écran de la calculatrice, la représentation graphique de la suite (u_n) (*fenêtre* : $0 \leqslant X \leqslant 8$, pas 1 et $0 \leqslant Y \leqslant 8$, pas 1). *Voir cadre ci-dessous.*

b) Conjecturer :
- la monotonie de la suite (u_n) ;
- un majorant ou un minorant de la suite (u_n) ;
- la limite de la suite (u_n).

2. Justifier la convergence de la suite (u_n).

- **TI** : mode utiliser les flèches et mettre SUITE en surbrillance. f(x) mettre SUITE(n+1) en surbrillance puis renseigner u(n+1) et u(0) (pour écrire u(n) utiliser 2nde 7).
2nde zoom (format) mettre Toile en surbrillance puis trace et cliquer sur ▶ autant que nécessaire.
- **Casio** : menu 8 (Récurrence) F3 (TYPE) F2 (F2:an+1 = Aan + Bn + C), renseigner an + 1.
F5 (SET), renseigner 1 pour a0 EXIT.
F6 (TABLE) F4 (WEB-GPH) et cliquer sur EXE autant que nécessaire.

57 (u_n) est la suite définie par $u_0 = 0{,}4$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

1. a) Afficher à l'écran de la calculatrice la représentation graphique de la suite (u_n) (*fenêtre* : $0 \leqslant X \leqslant 0{,}5$, pas 0,1 et $0 \leqslant Y \leqslant 0{,}5$, pas 0,1).

b) Conjecturer la monotonie, un majorant ou un minorant, la limite de la suite (u_n).

2. a) Déterminer une fonction f telle que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

b) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $\left[0 ; \frac{1}{2}\right]$.

c) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2}$.

d) En déduire la convergence de la suite (u_n).

58 (v_n) est la suite définie par $v_0 = 3$ et pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 0{,}3v_n + 1$.

a) Conjecturer à l'aide de la calculatrice :
- le sens de variation de la suite (v_n) ;
- un minorant de la suite (v_n).

b) Démontrer ces conjectures par récurrence.

c) En déduire la convergence de la suite (v_n).

59 (w_n) est la suite définie par $w_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $w_{n+1} = \sqrt{2w_n + 3}$.

1. a) Afficher à l'écran de la calculatrice la représentation graphique de la suite (w_n) (*fenêtre* : $0 \leqslant X \leqslant 4$, pas 1 et $0 \leqslant Y \leqslant 4$, pas 1).

b) Conjecturer :
- la monotonie de la suite (w_n) ;
- un majorant ou un minorant de la suite (w_n) ;
- la limite de la suite (w_n).

2. a) Déterminer une fonction f telle que pour tout entier naturel n, $w_{n+1} = f(w_n)$.

b) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 3]$.

c) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant w_{n+1} \leqslant w_n \leqslant 3$.

d) En déduire la convergence de la suite (w_n).

e) À l'aide de la calculatrice, déterminer la plus petite valeur de n telle que $w_n > 2{,}999$.

60 (t_n) est la suite définie par $t_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $t_{n+1} = 5 - \dfrac{6}{t_n + 3}$.

a) Démontrer que pour tout entier naturel n,

$$1 \leqslant t_n \leqslant 2.$$

b) Justifier que pour tout entier naturel n,

$$t_{n+1} - t_n = -\frac{(t_n - 1)^2}{t_n + 3}.$$

En déduire le sens de variation de la suite (t_n).

c) Expliquer pourquoi la suite (t_n) converge.

61 Un sondage effectué dans un hypermarché montre que chaque mois, 70 % des clients du mois précédent restent fidèles et qu'environ 3 000 nouveaux clients se présentent.

On note u_n le nombre de clients à la fin du n-ième mois suivant janvier 2019.

On donne $u_0 = 15\,000$.

a) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

b) Démontrer, en utilisant un raisonnement par récurrence, que la suite (u_n) est minorée par 10 000 et décroissante.

c) En déduire la convergence de la suite (u_n).

d) On admet que sa limite est 10 000. Interpréter cette limite dans le contexte de cette situation.

62 QCM **Dans chaque cas, donner la réponse exacte sans justifier.**

		A	B	C	D
1	La suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 3 - \dfrac{1}{n^2+1}$ est …	croissante	décroissante	non monotone	décroissante à partir de 10
2	La suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = -2n^2 + 3n + 1$ est …	majorée par 0	majorée par 2	minorée par 0	minorée par -100
3	La suite (w_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = 1 + 3^{-n}$ …	n'a pas de limite	a pour limite $-\infty$	a pour limite $+\infty$	a pour limite 1
4	(t_n) est une suite telle que pour tout entier naturel n, $1 \leqslant t_{n+1} \leqslant t_n$. Alors …	$\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = 0$	$\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = 1$	la suite (t_n) converge	la suite (t_n) digerve

63 QCM **Dans chaque cas, donner la (ou les) réponse(s) exacte(s) sans justifier.**

		A	B	C	D
1	La suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{1}{n^3}$ est …	minorée par 0	majorée par 10	majorée par 1	bornée
2	Une suite (u_n) est décroissante et converge vers 0. Alors cette suite …	est majorée par 0	est minorée par 0	est majorée par 10	est minorée par -1
3	(S_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $S_n = 1 + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{3^n}$. Alors …	(S_n) a pour limite $\dfrac{3}{2}$	(S_n) a pour limite $+\infty$	(S_n) n'a pas de limite	(S_n) a pour limite 2
4	(u_n) est la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}5u_n + 1$. Alors …	la suite (u_n) est bornée	la suite (u_n) est croissante	la suite (u_n) converge vers 2	pour tout $n \geqslant 16$, $u_n = 2$

64 Vrai/Faux **Dans chaque cas, dire si l'affirmation est vraie ou fausse en justifiant.**

1. **Affirmation :** (u_n) est une suite non majorée, donc elle a pour limite $+\infty$.

2. **Affirmation :** (u_n) est une suite bornée, donc elle est convergente.

3. (u_n) est la suite géométrique de raison 2 telle que $u_1 = 1$. On pose $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$.
Affirmation : la suite (S_n) est convergente.

4. (u_n) est une suite telle que pour tout entier naturel n, $1 < u_{n+1} \leqslant u_n < 3$.
Affirmation : la suite (u_n) converge vers un nombre réel $\ell \geqslant 1$.

Vérifiez vos réponses : p. 529

65 Suivre un guide pour rédiger une démonstration

On a énoncé en cours au paragraphe **3 A** la propriété suivante :

> Si une suite (u_n) est décroissante et non minorée, alors la suite (u_n) diverge vers $-\infty$.

Rédiger la démonstration de cette propriété en suivant le guide ci-dessous.

(1) Écrire la définition d'une suite minorée :
… un réel m tel que **…** entier naturel n, u_n **…** m.
(2) Prendre la négation de la proposition ci-dessus :
la suite (u_n) est non minorée donc **…** réel m, **…** un entier naturel N tel que u_N **…** m.
(3) Utiliser la décroissance de (u_n) :
pour tout entier naturel $n \geqslant N$, u_n **…** u_N.
(4) Tirer des conséquences :
de **(2)** et **(3)**, il résulte que pour tout entier naturel $n \geqslant N$, u_n **…** m.
(5) Démontrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$:
on se donne un intervalle $I =]-\infty\,; m[$ (avec m nombre réel). D'après ce qui précède, pour tout entier naturel n **…** N, $u_n \in I$ donc I contient **….**
(6) Conclure par une phrase : **….**

Vidéo JAICOMPRIS.COM
Toutes les démonstrations au programme en vidéo

Liste des démonstrations :
- Toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.
- Inégalité de Bernoulli.
- Limite de (q^n).
- Divergence vers $+\infty$ d'une suite minorée par une suite divergeant vers $+\infty$.

Conseil
(2) La négation de :
- « pour tout x de E, P(x) » est « il existe un x de E tel que non P(x) » ;
- « il existe un x de E tel que P(x) » est « pour tout x de E, non P(x) ».

66 Connaître les suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$

1. On donne $u_0 = \dfrac{8}{3}$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n - 2}$.

a) À l'aide de la calculatrice, déterminer u_1, u_2, u_3. Que constate-t-on ?
b) Les relations précédentes définissent-elles une suite (u_n) ?
2. Voici une propriété.

> Si f est une fonction définie sur un intervalle I tel que pour tout $x \in I$, $f(x) \in I$ et si u_0 est un nombre réel de I, alors on peut définir une suite (u_n) par u_0 et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Justifier cette propriété en démontrant par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \in I$.
b) f est la fonction définie sur $[0\,; 2]$ par $f(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$.

Démontrer que l'on définit une suite (u_n) par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Conseil
La calculatrice affiche $u_3 \approx -4 \times 10^{-15}$. Bien vérifier le calcul de u_3.

67 Étudier une suite du type $u_n = f(v_n)$

(u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{0{,}2^n - 1}{0{,}2^n + 1}$.

1. a) Préciser une fonction f et une suite géométrique (v_n) telle que pour tout entier naturel n, $u_n = f(v_n)$.
b) Utiliser le schéma de décomposition ci-contre pour étudier la limite de la suite (u_n).

$$n \longmapsto \underbrace{v_n}_{x} \longmapsto f(x)$$

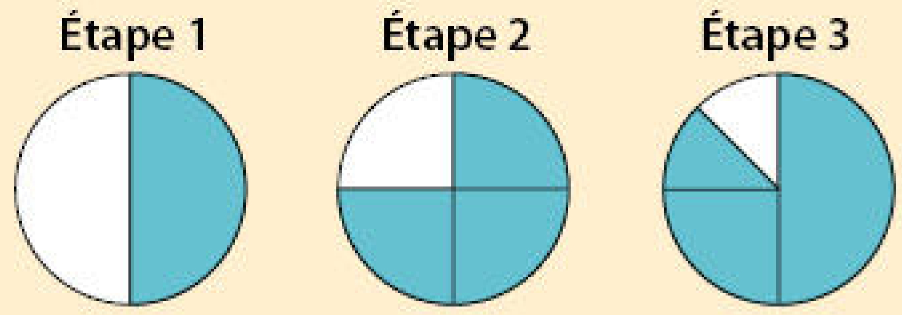
2. Retrouver cette limite en utilisant les règles opératoires.

Utiliser des suites géométriques

68 **PARCOURS DIFFÉRENCIÉS**

Parcours 1

On effectue les constructions suivantes à l'intérieur d'un disque de rayon 1.



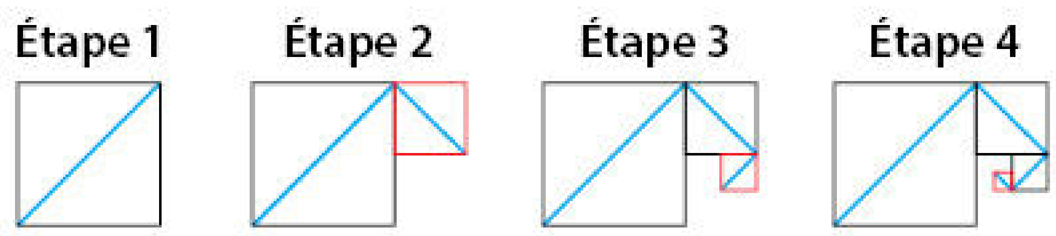
D'une étape à la suivante, on ajoute un secteur dont l'aire est la moitié de celle du secteur précédent.
On note a_n l'aire, en unité d'aire, du secteur ajouté à l'étape n, avec $n \geqslant 1$. Ainsi $a_1 = \frac{\pi}{2}$.
Étudier la limite de la suite (a_n).

Parcours 2

(b_n) est la suite définie par $b_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $\quad b_{n+1} + b_n = 0{,}5b_n$.
a) Démontrer que la suite (b_n) est géométrique. Préciser sa raison.
b) Exprimer b_n en fonction de n.
c) Étudier la limite de la suite (b_n).

69 **Algo** python

On construit une spirale en disposant bout à bout des diagonales d'une suite de carrés. À chaque étape, le côté du carré est divisé par 2 ; à l'étape 1, il est égal à 1.



On note L_n la longueur de la spirale à l'étape n, avec $n \geqslant 1$. Ainsi, $L_1 = \sqrt{2}$.

1. a) Expliquer pourquoi la suite (c_n) des côtés des carrés successifs est géométrique. Préciser sa raison.
b) Exprimer c_n en fonction de n.

2. a) Exprimer L_n en fonction de $c_1, c_2, \dots, c_n$.
b) Justifier que pour tout entier naturel n,

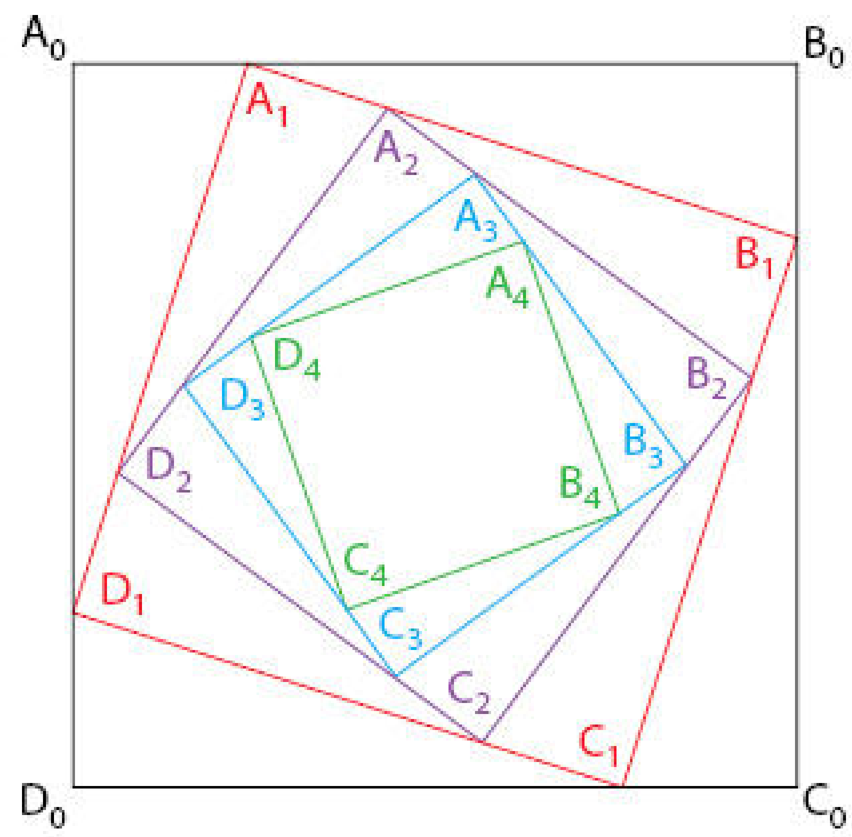
$$L_n = 2\sqrt{2}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right).$$

c) Déterminer la limite de la suite (L_n).

3. a) Écrire un algorithme afin de déterminer le rang n à partir duquel $2\sqrt{2} - L_n < 10^{-p}$ (avec $p \in \mathbb{N}$).
b) Coder cet algorithme en langage Python, le saisir et l'exécuter avec $p = 6$.

70 **Algo** python

$A_0B_0C_0D_0$ est un carré de côté ℓ_0.
On construit les points A_1, B_1, C_1, D_1 des segments $[A_0B_0]$, $[B_0C_0]$, $[C_0D_0]$, $[D_0A_0]$ situés au quart de chacun d'eux à partir de la première extrémité citée.
On recommence la construction à partir du carré $A_1B_1C_1D_1$ et ainsi de suite.
On note ℓ_n la longueur du côté du carré $A_nB_nC_nD_n$ avec n nombre entier naturel.



1. a) Exprimer ℓ_1 et ℓ_2 en fonction de ℓ_0.
b) Démontrer que la suite (ℓ_n) est géométrique. Préciser sa raison.
c) Pour tout entier n, exprimer ℓ_n en fonction de n.
d) En déduire la limite de la suite (ℓ_n).

2. On suppose que $\ell_0 = 1$.
a) Écrire une fonction en langage Python pour déterminer le rang à partir duquel $\ell_n \leqslant 10^{-p}$ avec p entier naturel.
b) Saisir et exécuter ce programme pour $p = 4$.

71 **Algo** python

En septembre 2019, un iceberg de 25 tonnes dérive au large du Groenland. La température locale aidant, il perd 10 % de sa masse chaque jour.

1. On note m_n la masse (en kilogramme) de l'iceberg au bout de n jours. Étudier la limite de la suite (m_n).

2. a) En déduire qu'un jour, il restera moins d'un kilogramme de glace.
b) Déterminer ce jour à l'aide d'une fonction en langage Python.

72 On administre à un patient un médicament par injection intraveineuse. La quantité de ce médicament dans le sang diminue avec le temps.
Une machine est programmée de telle façon que :
- à l'instant $t = 0$ (en heure), elle injecte 10 mL de médicament ; on admet que l'effet est instantané ;
- chaque heure suivante, elle injecte 1 mL de médicament.

On estime que 20 % de la quantité de médicament présente dans le sang est éliminée chaque heure.
a) Pour tout entier naturel n, on note q_n la quantité de médicament (en mL) présente dans le sang du patient au bout de n heures.
Justifier que pour tout entier naturel n :
$$q_{n+1} = 0{,}8q_n + 1.$$
b) Déterminer une suite constante (u_n) qui vérifie la relation :
pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}8u_n + 1$.
c) On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = q_n - 5$.
Démontrer que la suite (v_n) est géométrique. Préciser sa raison.
d) Exprimer v_n, puis q_n en fonction de n.
e) Quand elle sera stabilisée, quelle sera la quantité de médicament (en mL) présente dans le sang du patient ?

73 En 2020, une ville compte 10 000 habitants. Les études démographiques sur les dernières années ont montré que chaque année :
- 10 % des habitants de la ville meurent ou déménagent dans une autre ville ;
- 1 200 personnes naissent ou emménagent dans cette ville.

On note p_n la population, en millier d'habitants, de cette ville l'année $2020 + n$, avec n entier naturel.
Ainsi, $p_0 = 10$.
a) Expliquer pourquoi pour tout entier naturel n,
$$p_{n+1} = 0{,}9\,p_n + 1{,}2.$$
b) À l'aide de la calculatrice, représenter graphiquement la suite (p_n).
Conjecturer le comportement de cette population dans le temps.
c) Déterminer une suite constante (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = k$ (avec k nombre réel) qui vérifie la relation :
pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}9u_n + 1{,}2$.
d) (v_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = p_n - k$.
Démontrer que la suite (v_n) est géométrique et préciser sa raison.
e) Exprimer p_n en fonction de n et déterminer la limite de la suite (p_n).

74 On se propose de démontrer que la suite géométrique (q^n) converge vers 0 lorsque $-1 < q < 1$.
On suppose que $q \neq 0$ et on pose $p = \dfrac{1}{q}$.
a) 1^er^ cas : $0 < q < 1$.
Comparer alors p et 1.
En déduire la limite de la suite (p^n).
Quelle est la limite de la suite (q^n) ?
b) 2^e^ cas : $-1 < q < 0$.
On considère alors la suite de terme général $|q|^n$.
En déduire, par encadrement, la limite de la suite (q^n).
c) Conclure.

75 (u_n) et (v_n) sont deux suites définies par $u_0 = 20$, $v_0 = 60$ et pour tout entier naturel n,
$$u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{4} \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{4}.$$
a) Montrer que les suites $(u_n + v_n)$ et $(v_n - u_n)$ sont géométriques.
b) Exprimer $u_n + v_n$ et $v_n - u_n$ en fonction de n.
c) En déduire l'expression de u_n, puis de v_n en fonction de n.
d) Déterminer la limite de chacune des suites (u_n) et (v_n).

76 **Partie A**
(u_n) est la suite définie par son premier terme u_0 et pour tout entier naturel n :
$$u_{n+1} = au_n + b$$
où a et b sont des nombres réels non nuls, $a \neq 1$.
1. a) Déterminer une suite (c_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $c_n = k$ (avec k nombre réel) telle que pour tout entier naturel n,
$$c_{n+1} = ac_n + b.$$
b) On note (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - k$.
Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison a.
2. En déduire que si a appartient à l'intervalle $]-1\,;1[$, alors la suite (u_n) a pour limite $\dfrac{b}{1-a}$.

Partie B
En mars 2020, Max achète une plante verte mesurant 80 cm. On lui conseille de la tailler tous les ans, au mois de mars, en coupant un quart de sa hauteur. La plante poussera alors de 30 cm au cours des douze mois suivants.
Dès qu'il rentre chez lui, Max taille sa plante.
1. Quelle sera la hauteur de la plante en mars 2021 avant que Max ne la taille à nouveau ?
2. Pour tout entier naturel n, on note h_n la hauteur de la plante, en cm, avant sa taille, en mars de l'année $(2020 + n)$.
a) Justifier que, pour tout entier naturel n,
$$h_{n+1} = 0{,}75\,h_n + 30.$$
b) La suite (h_n) est-elle convergente ? Justifier.

Étudier la convergence de suites monotones

77 PARCOURS DIFFÉRENCIÉS

Parcours 1

(u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \square\, n\mathrm{e}^{-n}$.
Étudier la limite de la suite (u_n).

Parcours 2

(v_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = -\dfrac{n+1}{\mathrm{e}^n}$.

a) Tabuler la suite (v_n) avec la calculatrice.
Conjecturer la monotonie, un majorant, un minorant, la limite de la suite (v_n).

b) Étudier les variations de la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = -\dfrac{x+1}{\mathrm{e}^x}$.

c) Démontrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_n \leqslant v_{n+1} < 0$. Conclure sur la limite de la suite (v_n).

78 (u_n) est la suite définie par $u_0 = \dfrac{1}{4}$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n^2$.

a) Calculer u_1 et u_2.

b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,

$$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{4}.$$

c) Justifier que la suite (u_n) est convergente.

79 (u_n) est la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \sqrt{0{,}5u_n^2 + 8}.$$

1. a) Afficher à l'écran de la calculatrice la représentation graphique de la suite (u_n) (*fenêtre* : $0 \leqslant X \leqslant 5$, pas 1 et $0 \leqslant Y \leqslant 5$, pas 1).

b) Observer si cette suite semble monotone et bornée.

2. a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$.

b) Justifier que la suite (u_n) est convergente.

3. On se propose d'obtenir l'expression de u_n en fonction de n.

a) (v_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n^2 - 16$.
Démontrer que la suite (v_n) est géométrique. Préciser sa raison.

b) En déduire l'expression de v_n, puis de u_n en fonction de n.

c) En déduire la limite de la suite (u_n).

80 Dans chaque cas, dire si l'affirmation est vraie ou fausse en justifiant. Si elle est fausse, proposer un contre-exemple.

a) Si une suite tend vers $+\infty$, alors elle est croissante.

b) Une suite non minorée a pour limite $-\infty$.

c) Toute suite strictement croissante a pour limite $+\infty$.

d) Toute suite décroissante a pour limite $-\infty$.

81 **Algo** (a_n) et (b_n) sont les suites définies par $a_0 = 45$, $b_0 = 30$ et pour tout entier naturel n,

$$\begin{cases} b_{n+1} = \dfrac{1}{2}b_n + 10 \\[2mm] a_{n+1} = \dfrac{1}{2}b_n + \dfrac{1}{2}a_n + 7 \end{cases}.$$

1. Calculer b_1 et a_1.

2. On souhaite écrire un algorithme qui renvoie les valeurs de b_n et a_n pour une valeur entière de n saisie par l'utilisateur.

Au début de l'algorithme ci-contre, on affecte 45 à la variable A, 30 à la variable B et on saisit une valeur de n.

Pour k allant de 1 à n
  $B \leftarrow \dfrac{B}{2} + 10$
  $A \leftarrow \dfrac{B}{2} + \dfrac{A}{2} + 7$
Fin Pour

a) Quelles sont les valeurs des variables A et B pour $n = 1$? Ces résultats sont-ils cohérents avec ceux obtenus à la question **1.** ?

b) Expliquer comment corriger cet algorithme pour qu'il affiche les résultats souhaités.

3. a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $20 \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n$.

b) En déduire que la suite (b_n) converge vers un nombre réel ℓ. Que peut-on dire de ℓ ?

c) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $b_n = 20 + 10\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

d) En déduire la valeur de ℓ.

4. On admet que pour tout entier naturel n,

$$a_n = 10n\left(\frac{1}{2}\right)^n + 11\left(\frac{1}{2}\right)^n + 34.$$

a) Montrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 3$,
$$2n^2 \geqslant (n+1)^2.$$

b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geqslant 4$, $2^n \geqslant n^2$.

c) En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 4$,

$$0 \leqslant 10n\left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant \frac{10}{n}.$$

d) Étudier la convergence de la suite (a_n).

82 La médiathèque d'une petite ville a ouvert ses portes le 2 janvier 2019 et a enregistré 2 500 inscriptions cette année-là.
Ses responsables estiment que, chaque année, 80 % des anciens inscrits renouvelleront leur inscription l'année suivante, et qu'il y aura 400 nouveaux adhérents.
On modélise cette situation par une suite (a_n).
On note $a_0 = 2\,500$ le nombre d'inscrits à la médiathèque en 2019 et a_n le nombre d'inscrits à la médiathèque pendant l'année $2019 + n$, avec $n \in \mathbb{N}$.

1. a) Calculer a_1 et a_2.
b) Justifier que, pour tout entier naturel n,
$$a_{n+1} = 0{,}8a_n + 400.$$
2. a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $2\,000 \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n$.
b) En déduire que la suite (a_n) est convergente.
3. a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,
$$a_n = 500 \times 0{,}8^n + 2\,000.$$
b) En déduire la limite de la suite (a_n).
c) Si le schéma d'inscription reste le même au cours des années à venir, que peut-on en déduire au sujet du nombre d'adhérents à la médiathèque ?

Vidéo
JAICOMPRIS.COM Cet exercice est corrigé en vidéo

83 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :
$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right).$$
1. a) Déterminer la fonction dérivée de f et vérifier que pour tout réel $x \neq 0$,
$$f'(x) = \frac{(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})}{2x^2}.$$
b) Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}^*$.
2. (u_n) est la suite définie par $u_0 = \frac{3}{2}$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.
a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n,
$$\sqrt{2} < u_{n+1} < u_n \leqslant \frac{3}{2}.$$
b) En déduire que la suite (u_n) converge.
c) Démontrer que pour tout entier n,
$$u_{n+1} - \sqrt{2} < \frac{1}{2}(u_n - \sqrt{2}).$$
d) En déduire par récurrence que pour tout entier naturel n,
$$0 < u_n - \sqrt{2} \leqslant \frac{1}{2^n}(u_0 - \sqrt{2}).$$
e) En déduire la limite de la suite (u_n).

84 (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par :
$$u_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}.$$
a) Prouver que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,
$$u_{n+1} - u_n = \frac{-3n - 2}{n(2n+2)(2n+1)}.$$
b) En déduire le sens de variation de la suite (u_n).
c) Démontrer que la suite (u_n) converge.

85 (v_n) est la suite définie par $v_0 = 0{,}5$ et pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = \dfrac{2v_n}{\sqrt{{v_n}^2 + 1}}$.
a) Préciser une fonction f telle que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = f(v_n)$.
Étudier les variations de f sur $[0\,; +\infty[$.
b) Démontrer que pour tout entier naturel n,
$$0 \leqslant v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant 2.$$
c) En déduire que (v_n) converge et donner un encadrement de sa limite.
d) La suite (v_n) converge-t-elle vers 2 ? Justifier.

S'entraîner à la logique → p. 525

86 **Implications**

(u_n) est une suite dont tous les termes sont strictement positifs.
(v_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = -\dfrac{2}{u_n}$.
Dire si chacune des affirmations est vraie ou fausse et justifier la réponse.
a) Si (u_n) est convergente, alors (v_n) est convergente.
b) Si (u_n) est minorée par 2, alors (v_n) est minorée par -1.
c) Si (u_n) est décroissante, alors (v_n) est croissante.
d) Si (u_n) est divergente, alors (v_n) converge vers 0.

87 **Implications et réciproques**

(u_n) est une suite définie sur $\mathbb{N}$.
Dans chaque cas, chacune des propositions :
- Si P, alors Q
- Si Q, alors P

est-elle vraie ? Justifier.
a) P : « (u_n) est croissante et majorée ».
Q : « (u_n) est convergente ».
b) P : « (u_n) est croissante et n'est pas majorée ».
Q : « (u_n) a pour limite $+\infty$ ».
c) P : « (u_n) n'est pas majorée ».
Q : « (u_n) a pour limite $+\infty$ ».

88 MESURE DE LA VITESSE DE CONVERGENCE D'UNE SUITE

Tice

Objectif
Comprendre, sur des exemples, la notion de vitesse de convergence d'une suite convergente (u_n) vers sa limite ℓ.

1. Expérimentation

a) Vers quel réel les suites $\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, $(0{,}7^n)$ et $(0{,}3^n)$ convergent-elles ?

b) Réaliser, sur le modèle ci-dessous, une feuille de calcul qui indique pour quel nombre entier naturel $n \geqslant 1$, les termes de ces suites sont pour la première fois inférieurs à un seuil donné.

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Seuil**	0,001					
2							
3	***n***	**1/*n*²**	**Seuil atteint ?**	**0,7*ⁿ***	**Seuil atteint ?**	**0,3*ⁿ***	**Seuil atteint ?**
4	1	1	FAUX	0,7	FAUX	0,3	FAUX
5	2	0,25	FAUX	0,49	FAUX	0,09	FAUX
6	3	0,1111111	FAUX	0,343	FAUX	0,027	FAUX
7	4	0,0625	FAUX	0,2401	FAUX	0,0081	FAUX
8	5	0,04	FAUX	0,16807	FAUX	0,00243	FAUX
9	6	0,0277778	FAUX	0,117649	FAUX	0,000729	OUI
10	7	0,0204082	FAUX	0,0823543	FAUX	0,0002187	OUI

c) Donner, pour les deux premières suites, la valeur de n demandée.

d) Modifier le seuil et conjecturer celle qui converge le moins rapidement vers 0.

2. Rapidité et convergence

Définition
Si une suite (u_n) converge vers un nombre réel ℓ et si $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}-\ell}{u_n-\ell}\right| = k$, alors $0 \leqslant k \leqslant 1$ et :
- si $0 < k < 1$, on dit que k est la « vitesse de convergence » de la suite (u_n) vers ℓ ;
- si $k = 0$, on parle de « convergence rapide » ;
- si $k = 1$, on parle de « convergence lente ».

a) Vérifier que la convergence de la suite $\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ est lente.

b) Comparer les vitesses de convergence des autres suites de la question **1**.

3. Accélération de la convergence

(u_n) est la suite définie sur $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$.

a) Démontrer que la suite (u_n) est croissante et bornée par 0 et 2.
En déduire que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ.

b) Afficher à l'écran de la calculatrice la représentation graphique de la suite (u_n).
Conjecturer la valeur de ℓ. On admet que la limite de(u_n) est bien ce nombre.

c) Calculer la vitesse de convergence de la suite (u_n).

d) Étudier la convergence de la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{4u_{n+1} - u_n}{3}$.

e) À l'aide du tableur, comparer, pour un seuil donné, les valeurs de n pour lesquelles les suites $(\ell - u_n)$ et $(\ell - v_n)$ deviennent inférieures à ce seuil.
Que peut-on dire des vitesses de convergence des suites (u_n) et (v_n) ?

89 Prendre des initiatives

Raisonner **Calculer**

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

a) Montrer que si x appartient à $[-2\,;2]$, alors $f(x)$ appartient à $[0\,;2]$.

b) (u_n) est la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Étudier la convergence de la suite (u_n).

90 Modifier une écriture

Narration de recherche

Raisonner **Communiquer**

Rédiger les différentes étapes de la recherche, sans omettre les fausses pistes et les changements de méthode.

Problème

f est la fonction définie sur $[0\,;1]$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2-x}.$$

a) Dresser le tableau de variations de f sur $[0\,;1]$.

b) (u_n) est la suite définie par $u_1 = 0$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

c) Démontrer que la suite (u_n) est croissante et majorée.

d) Déterminer une expression de u_n en fonction de n.

e) En déduire la limite de la suite (u_n).

91 Imaginer une stratégie

Chercher **Raisonner**

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, u_n est le nombre obtenu en juxtaposant successivement les nombres entiers 1, 2, …, n après la virgule. Ainsi, $u_1 = 0{,}1$; $u_2 = 0{,}12$; $u_{11} = 0{,}1234567891011$.

Montrer que la suite (u_n) est convergente.

92 Bounded sequences

Raisonner **Communiquer**

f is the function defined on $[0\,;1]$ by:

$$f(x) = 1 - \frac{2}{x+2}.$$

a) Draw up the table of variations of f on $[0\,;1]$.

b) The sequence (u_n) is defined by $u_0 = 1$ and for any natural integer n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Prove by recurrence that the sequence (u_n) is:
- monotonous;
- decreasing.

c) What can we deduce for the sequence (u_n)?

93 Utiliser une suite intermédiaire

? Problème ouvert

Raisonner **Calculer**

(u_n) est la suite définie par $u_1 = -1$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = \frac{n}{2(n+1)}u_n + \frac{3(n+2)}{2(n+1)}$.

a) Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

b) En considérant la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = n(3 - u_n)$, exprimer u_n en fonction de n.

c) Déterminer alors la limite de la suite (u_n).

94 Étudier la moyenne d'une somme

Raisonner **Calculer**

(u_n) est la suite définie par $u_0 = -1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + 2$.

a) Démontrer que pour tout entier naturel n,

$$u_n = 4 - 5\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

b) On pose pour tout entier naturel n,

$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n.$$

Déterminer la limite de la suite $\left(\frac{S_n}{n}\right)$.

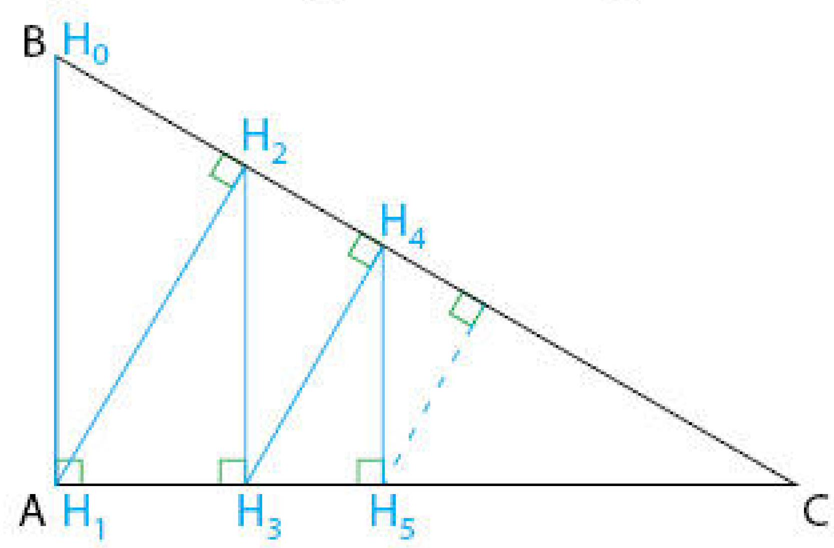
95 Étudier une construction géométrique

Modéliser **Raisonner** **Calculer**

ABC est un triangle rectangle en A tel que AB = 4 cm et BC = 8 cm.

La suite de points (H_n) est définie par $H_0 = B$ et pour tout entier naturel n, H_{n+1} est le projeté orthogonal de H_n sur (AC) si n est pair et sur (BC) si n est impair.

a) Réaliser cette figure en vraie grandeur et construire les points H_n pour $n \in \{2\,;3\,;4\,;5\,;6\}$.



b) Déterminer la mesure de chaque angle de ABC.

c) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, le triangle $H_n H_{n+1} H_{n+2}$ a des angles de mêmes mesures que le triangle ABC.

d) On note $\ell_n = H_n H_{n+1}$. En déduire que pour tout entier naturel n, $\ell_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{2}\ell_n$ (deux cas de figure).

e) Pour tout n, on note L_n la longueur de la ligne brisée $H_0 H_1 \ldots H_n H_{n+1}$. Quelle est la limite de la suite (L_n) ?

96 Étudier des ressources naturelles dans un étang

Algo python

45 min

D'après Bac, Polynésie 2019

Des spécialistes en environnement s'intéressent à l'évolution d'une population de grenouilles autour d'un étang.

Pour cela, ils étudient le taux de disponibilité des ressources nécessaires pour le développement de la population de grenouilles autour de l'étang.

Ce taux dépend notamment du nombre de grenouilles présentes sur les lieux, de la quantité de nourriture à disposition, de l'espace disponible et de la qualité de l'environnement.

Une étude, menée en 2018, a permis d'estimer le taux de disponibilité des ressources à 0,9 ; cela signifie que 90 % des ressources sont disponibles.

On modélise le taux de disponibilité des ressources par la suite (T_n) qui à tout entier naturel n, associe le taux de disponibilité des ressources n années après 2018.

On a ainsi $T_0 = 0{,}9$.

Le modèle choisi est tel que, pour tout entier naturel n, $T_{n+1} = T_n - 0{,}1T_n^2$.

1. a) Indiquer ce que cache chacun des cadres colorés dans le programme ci-dessous, écrit en langage Python. La fonction **T** renvoie pour résultat le terme T_n pour n fourni en paramètre.

```
def T(n):
    T=[ ]
    for i in range(1,[ ]):
        T=[ ]
    return T
```

b) Recopier ce tableau et le compléter en arrondissant les valeurs de T_n au millième.

Année	2018	2019	2020	2023	…	…	…
n	0	…	…	5	10	15	20
T_n	0,9	…	…	…	…	…	…

c) De quelle valeur le taux de disponibilité des ressources sera-t-il proche en 2038 ?

2. On définit la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par $f(x) = x - 0{,}1x^2$.

Ainsi, la suite vérifie pour tout entier naturel n, $T_{n+1} = f(T_n)$.

a) Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 1]$.

b) Montrer que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant T_{n+1} \leqslant T_n \leqslant 1$.

c) La suite (T_n) est-elle convergente ? Justifier la réponse.

3. Les spécialistes cherchent à prévoir selon ce modèle, quand le taux de disponibilité des ressources sera inférieur à 0,4 au cours des vingt premières années qui suivent le début de l'étude.

a) On donne l'algorithme ci-dessous.

```
Tant que T > …
  | n ← n + 1
  | T ← …
Fin Tant que
```

Au début, on affecte la valeur 0 à la variable n et la valeur 0,9 à la variable T.

Il renvoie la valeur de n à partir de laquelle $T_n \leqslant 0{,}4$.

Recopier et compléter cet algorithme.

b) Déterminer cette valeur de n avec la calculatrice.

Guide de résolution
1. b) Utiliser la calculatrice pour compléter le tableau.

Guide de résolution
2. b) Utiliser un raisonnement par récurrence.
2. c) Utiliser la propriété d'une suite décroissante minorée.

97 Étudier trois suite imbriquées

40 min

D'après Bac, Polynésie 2018

Un lapin se déplace dans un terrier composé de trois galeries, notées A, B et C, dans chacune desquelles il est confronté à un stimulus particulier.

À chaque fois qu'il est soumis à un stimulus, le lapin reste dans la galerie où il se trouve ou change de galerie. Cela constitue une étape.

Soit n un entier naturel.

On note a_n la probabilité de l'événement : « Le lapin est dans la galerie A à l'étape n ».

On note b_n la probabilité de l'événement : « Le lapin est dans la galerie B à l'étape n ».

On note c_n la probabilité de l'événement : « Le lapin est dans la galerie C à l'étape n ».

À l'étape $n = 0$, le lapin est dans la galerie A.

Une étude antérieure des réactions du lapin face aux différents stimuli permet de modéliser ses déplacements par le système ci-contre.

L'objectif de cet exercice est d'estimer dans quelle galerie le lapin a la plus grande probabilité de se trouver à long terme.

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{4}b_n \\ b_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{2}{3}c_n \\ c_{n+1} = \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{3}c_n \end{cases}$$

Partie A

À l'aide d'un tableur, on obtient le tableau de valeurs ci-dessous :

	A	B	C	D
1	n	a_n	b_n	c_n
2	0	1	0	0
3	1	0,333	0,667	0
4	2	0,278	0,556	0,167
5	3	0,231	0,574	0,194
6	4	0,221	0,571	0,208
7	5	0,216	0,572	0,212
8	6	0,215	0,571	0,214
9	7	0,215	0,571	0,214
10	8	0,214	0,571	0,214
11	9	0,214	0,571	0,214
12	10	0,214	0,571	0,214

1. Quelle formule faut-il entrer dans la cellule C3 et recopier vers le bas pour remplir la colonne C ?

2. Quelle conjecture peut-on émettre ?

Partie B

1. On définit la suite (u_n), pour tout entier naturel n, par $u_n = a_n - c_n$.

a) Démontrer que la suite (u_n) est géométrique en précisant sa raison.

b) Donner, pour tout entier naturel n, l'expression de u_n en fonction de n.

2. On définit la suite (v_n), pour tout entier naturel n, par $v_n = b_n - \frac{4}{7}$.

a) Justifier que pour tout n, $a_n + b_n + c_n = 1$ et en déduire que pour tout n, $v_{n+1} = -\frac{1}{6}v_n$.

b) En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n.

3. En déduire que pour tout entier naturel n,

$$a_n = \frac{3}{14} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{2}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n, \quad b_n = \frac{4}{7} - \frac{4}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n \text{ et } c_n = \frac{3}{14} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{2}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n.$$

4. Que peut-on en déduire sur la position du lapin après un très grand nombre d'étapes ?

Guide de résolution

1. a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, il existe un réel q tel que $u_{n+1} = q\,u_n$.

Guide de résolution

4. Utiliser la limite de la suite (q^n) selon la valeur de q.

98 Étudier la convergence d'une suite

35 min

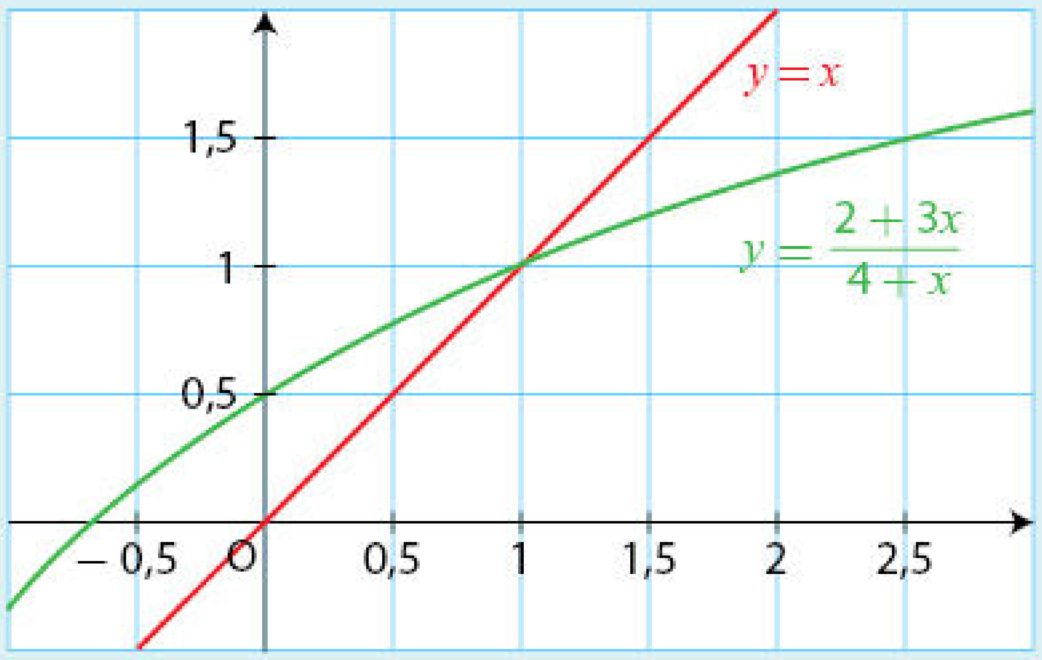
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;2]$ par :

$$f(x)=\frac{2+3x}{4+x}.$$

1. Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\,;2]$.

2. On considère la suite (v_n) définie par $v_0=0{,}1$ et pour tout entier naturel n, $v_{n+1}=f(v_n)$.

Dans un repère orthonormé, voici la courbe représentative de la fonction f et la droite d'équation $y=x$.



a) Réaliser ce graphique. Placer v_0 sur l'axe des abscisses puis, par construction géométrique, les termes v_1, v_2 et v_3 sur l'axe des abscisses.

b) Quelle conjecture peut-on formuler sur le sens de variation et le comportement de la suite (v_n) ?

3. Montrer que pour tout entier naturel n, $0\leqslant v_n\leqslant v_{n+1}\leqslant 1$.

4. Que peut-on en déduire pour la suite (v_n) ?

Guide de résolution
2. a) On place v_0, on construit $v_1=f(v_0)$ puis on reporte v_1 sur l'axe des abscisses avec la droite d'équation $y=x$ et ainsi de suite.

Guide de résolution
3. Utiliser un raisonnement par récurrence.

Se préparer À L'ORAL

99 Présenter un exposé

a) Recenser différentes méthodes pour démontrer qu'une suite est majorée ou minorée.

b) Dans un exposé oral de 10 min, présenter ces méthodes et en mettre deux en œuvre sur des exemples.

100 Algo python Travailler l'oral en groupe

Résoudre l'exercice suivant en petit groupe, puis présenter les résultats obtenus à l'oral.

(u_n) est la suite définie par $u_0=\frac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n, $u_n=\frac{2u_n}{1+u_n}$.

a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n=\frac{2^n}{1+2^n}$.

b) Proposer un algorithme qui affiche en fin d'exécution le terme de rang n saisi en entrée.

Présenter sa programmation en langage Python.

101 Traiter oralement un Vrai-Faux

▶ **SAVOIR PRÉSENTER ORALEMENT UNE DÉMARCHE**

1. Préparation de la restitution orale (5 min)
Par groupe de 3, résoudre l'exercice ci-dessous, chaque élève travaillant sur une des trois propositions.

2. Jeu de rôle (15 min)
Chaque élève présente son résultat à l'oral (3 min), pendant que les deux autres composent le jury et guident si nécessaire le candidat.

Énoncé : Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse. Justifier.

a) (p_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $p_n=n^2-42n+4$.
Affirmation : la suite (p_n) est strictement décroissante.

b) (u_n) est une suite telle que pour tout entier naturel n,
$$2\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 8.$$
Affirmation : la suite (u_n) est convergente.

c) (v_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n=4+5^n$.
Affirmation : la suite (v_n) est convergente.

102 Algo python

Propriétés et utilisation des suites adjacentes

> **Définition**
> Dire que deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes signifie que :
> - l'une est croissante, l'autre est décroissante,
> - $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$.

Partie A : propriété

On se propose de démontrer que si deux suites sont adjacentes, alors elles convergent et ont la même limite.

On suppose (u_n) croissante et (v_n) décroissante.

1. On considère la suite (w_n) définie par :

$$w_n = v_n - u_n.$$

Étudier son sens de variation.

2. Justifier que les termes de cette suite sont positifs.

3. Comparer u_n et v_n pour tout n de $\mathbb{N}$.

4. En comparant u_n et v_n à u_0 et v_0, justifier que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.

5. En déduire que les suites (u_n) et (v_n) ont la même limite.

Partie B : application

(u_n) est la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

(v_n) est la suite définie par $v_0 = 12$ et pour tout entier naturel n :

$$v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}.$$

1. (w_n) est la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$w_n = v_n - u_n.$$

Démontrer que la suite (w_n) est géométrique, convergente et que ses termes sont positifs.

2. Étudier le sens de variation de chacune des suites (u_n) et (v_n).

3. Déduire des questions précédentes que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

4. a) Écrire en langage Python une fonction **Encadrement** qui pour une valeur du paramètre $p (p \in \mathbb{N}^*)$ renvoie pour résultats les premiers termes u_n et v_n tels que :

$$v_n - u_n \leqslant 10^{-p}$$

c'est-à-dire fournit un encadrement de leur limite d'amplitude inférieure ou égale à 10^{-p}.

b) Saisir et exécuter cette fonction avec $p = 6$.

103 **Suite du type $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$**

(u_n) est la suite définie par $u_0 = 4$, $u_1 = 14$ et pour tout entier naturel n par la relation **(1)** :

$$u_{n+2} = 6u_{n+1} - 8u_n.$$

a) Calculer les termes u_2, u_3, u_4 et u_5.

b) Démontrer qu'il existe exactement deux suites géométriques du type (r^n) satisfaisant à la relation **(1)** avec $r \neq 0$.

On note r_1 et r_2 les raisons de ces suites avec $r_1 < r_2$.

c) En utilisant les valeurs r_1 et r_2 obtenues, vérifier que quels que soient les réels A et B, la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = Ar_1^n + Br_2^n$ satisfait à la relation **(1)**.

d) Déterminer les réels A et B pour que la suite (v_n) vérifie les conditions initiales $v_0 = 4$ et $v_1 = 14$.

e) On admet qu'il existe une seule suite vérifiant **(1)** et les conditions initiales données ; dans ces conditions, pour tout entier naturel n, $u_n = v_n$.

À l'aide de l'expression de u_n en fonction de n, déterminer la limite de la suite (u_n).

104 **Une autre suite du type $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$**

(u_n) est la suite définie par $u_0 = -1$, $u_1 = 1$ et pour tout entier naturel n par la relation **(1)** :

$$u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n.$$

a) Calculer les termes u_2, u_3, u_4 et u_5 de cette suite.

b) Démontrer qu'il existe une unique suite géométrique du type (r^n) satisfaisant à la relation **(1)** avec $r \neq 0$.

On note r_1 la valeur de r trouvée.

c) Vérifier que quels que soient les réels A et B, la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = (An + B)r_1^n$ satisfait à la relation **(1)**.

d) Déterminer les nombres A et B pour que la suite (v_n) vérifie les conditions initiales $v_0 = -1$ et $v_1 = 1$.

e) On admet qu'il existe une seule suite vérifiant **(1)** et les conditions initiales données ; dans ces conditions, pour tout entier naturel n, $u_n = v_n$.

À l'aide de l'expression de u_n en fonction de n, déterminer la limite de la suite (u_n).

> Pour une suite (u_n) qui vérifie une relation de récurrence d'ordre 2 à coefficients réels constants du type :
> $$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n,$$
> on dit que $r^2 - ar - b = 0$ est son **équation caractéristique**.
> Aux deux exercices ci-dessus, on a envisagé les cas où son discriminant Δ est tel que $\Delta > 0$ ou $\Delta = 0$.
> Il est possible aussi que $\Delta < 0$.

105 Algo python **Approximation de $\sqrt{2}$**

Partie A : étude d'une suite

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 > 0$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) \text{ (avec } a \text{ réel, } a > 0\text{).}$$

1. Montrer que pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1}^2 - a = \frac{(u_n^2 - a)^2}{4u_n^2}.$$

2. Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_n \geqslant \sqrt{a}$ et que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 1.

3. Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?

Partie B : étude de la méthode de Héron

Voici la fonction **Heron** écrite en langage Python. Elle a pour paramètres a le nombre dont on veut approcher la racine carrée, u un nombre entier supérieur à $\sqrt{a}$ et e la précision attendue pour la valeur approchée de $\sqrt{a}$ renvoyée par la fonction.

```python
from math import *

def Heron(a,u,e):
    k=1
    while(u-sqrt(a)>e):
        k=k+1
        u=0.5*(u+a/u)
    return k,u
```

1. Pourquoi choisir un entier naturel $u > \sqrt{a}$? Quelle valeur de u est-il habile de choisir ?

2. Saisir ce programme et l'exécuter afin d'obtenir une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-6} près.

3. Recopier et compléter le tableau suivant :

Nombre de décimales exactes	Nombre d'étapes
1	...
2	...
3	...
5	...
10	...
15	...

Que peut-on dire de la rapidité de convergence de la suite décrite en **partie A** ?

HISTOIRE DES MATHS

Au 1er siècle, Héron d'Alexandrie expose dans le tome 1 de son ouvrage *Les métriques* ce procédé algorithmique d'obtention d'approximations d'une racine carrée. Cet ouvrage ne fut découvert qu'en 1896.

106 **Vrai-Faux**

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse. Justifier la réponse.

(u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $q > 0$.

On note $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

a) S'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > 2000$, alors $q > 1$.

b) Si $q < 1$, alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $0 < u_n < \frac{1}{2}$.

c) Si $q > 1$, alors $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$.

d) Si $\lim_{n\to\infty} S_n = 2$, alors $q = \frac{1}{2}$.

107 **Variations d'une suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$**

1. f est une fonction définie sur un intervalle I tel que pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f(x) \in \mathrm{I}$.

(u_n) est la suite définie par $u_0 \in \mathrm{I}$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Étudier le sens de variation de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants :

a) f est croissante sur I et $u_1 \geqslant u_0$;

b) f est croissante sur I et $u_1 \leqslant u_0$;

c) f est décroissante sur I et $u_1 \geqslant u_0$;

d) f est décroissante sur I et $u_1 \leqslant u_0$.

2. Application

(u_n) est la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$.

Étudier le sens de variation de la suite (u_n).

Des Défis

108 **Approcher e**

(u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}.$$

Démontrer que la suite (u_n) converge.

On admet que sa limite est le nombre e.

Conseil : majorer chaque terme de u_n par une puissance de $\frac{1}{2}$.

109 **Valeur du premier terme**

Discuter la convergence d'une suite (u_n) telle que $u_0 > 0$ et pour tout entier naturel n,

$$0 < u_{n+1} \leqslant 2 - \frac{1}{u_n}.$$