

13

Simulation d'échantillons



Avant

► L'histoire de l'échantillonnage a été marquée par d'importantes controverses. Plusieurs approches étaient alors envisagées : choix raisonné, randomisation ... C'est A.L. Bowley (1869-1957), un statisticien anglais qui le premier fournit une justification théorique de cette méthode.



À présent

► La biostatistique est un domaine où les méthodes d'échantillonnage et d'estimation sont appliquées pour résoudre des questions liées à la médecine et à la biologie.

Les capacités travaillées dans ce chapitre

- Simuler une variable aléatoire avec le langage Python.
- Simuler un échantillon d'une variable aléatoire.
- Comprendre, écrire une fonction en langage Python qui renvoie la moyenne d'un échantillon d'une variable aléatoire.
- Calculer et évaluer la distance entre la moyenne d'un échantillon et l'espérance.
- Simuler N échantillons de taille n d'une variable aléatoire d'espérance μ et d'écart-type σ .

Calculer la proportion des cas où $|m - \mu| \leq \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$ (avec m moyenne d'un échantillon)

Exercices

1 à 3, 7, 8

1 à 3, 9, 10

1 à 3, 11 à 14

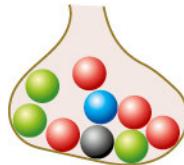
1 à 6, 15

4, 16, 35

1

Algo Simuler une variable aléatoire

On tire au hasard une boule dans le sac représenté ci-contre et on note sa couleur. X est la variable aléatoire qui donne la valeur 1 si la boule est verte, la valeur 5 si elle est rouge, la valeur 10 si elle est bleue et enfin la valeur 20 si la boule est noire.



- 1 Déterminer la loi de probabilité de X.
- 2 Voici une fonction écrite en langage Python qui simule l'expérience aléatoire et renvoie pour résultat la valeur de X.
 - a) Expliquer ce que représente dans la situation chacune des variables a et x . Comment la variable x est-elle affectée ?
 - b) Saisir et tester cette fonction.

```

1 from random import *
2
3 def X():
4     a=randint(1,9)
5     if a<=3:
6         x=1
7     if a>=4 and a<=7:
8         x=5
9     if a==8:
10        x=10
11    if a==9:
12        x=20
13    return x

```

2

Algo Simuler un échantillon d'une variable aléatoire

On lance une pièce équilibrée deux fois de suite. X est la variable aléatoire qui donne le nombre de Pile obtenu.



- 1 À l'aide d'un arbre, déterminer la loi de probabilité de X.
- 2 La fonction Nb_Pile écrite ci-contre en langage Python réalise une simulation de la variable aléatoire X.


```

1 from random import *
2
3 def Nb_Pile():
4     a=randint(0,1)
5     b=randint(0,1)
6     x=a+b
7     return x

```

 - a) Que représentent dans cette situation les variables a , b et x ?
 - b) Saisir et tester cette fonction.
- 3 Louis écrit un programme afin de simuler un échantillon de taille n de la variable aléatoire X et d'afficher les n valeurs successives prises par X.

```

9 n=int(input("Nombre de simulations :"))
10 for i in range(n):
11     print(□)

```

- a) Compléter la ligne 11 du programme de Louis.
- b) Saisir et tester le programme ainsi complété.

Des fonctions pour simuler des échantillons d'une variable aléatoire

A Simuler une variable aléatoire

Les fonctions `randint` et `random` du langage Python permettent d'écrire des programmes de simulation des variables aléatoires.

Exemple

- Une urne contient quatre boules blanches et une boule noire.
- On tire au hasard une boule de l'urne et on note sa couleur.
- La variable aléatoire X donne la valeur 1 si la boule est blanche et la valeur 0 sinon.
- Les deux programmes de la fonction X écrits ci-dessous permettent de simuler la variable aléatoire X.

```
def X():
    a=randint(1,5)
    if a<=4:
        x=1
    else:
        x=0
    return x
```

```
def X():
    a=random()
    if a<=0.8:
        x=1
    else:
        x=0
    return x
```

- `randint(1,5)` renvoie un nombre entier aléatoire compris entre 1 et 5.
- `random()` renvoie un nombre aléatoire de l'intervalle [0 ; 1].

B Renvoyer la moyenne d'un échantillon

- La fonction `Moyenne` ci-dessous a pour paramètre la taille n d'un échantillon de la variable aléatoire X.

```
def Moyenne(n):
    somme=0
    for i in range(n):
        somme=somme+X()
    m=somme/n
    return m
```

Elle calcule et renvoie pour résultat la moyenne :

$$m = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

des n valeurs x_1, x_2, \dots, x_n simulées de X.

- Pour de grandes valeurs de la taille n de l'échantillon, on observe que cette moyenne est proche de l'espérance μ de la variable aléatoire X.
- Dans le cas où l'espérance μ n'est pas connue, la moyenne peut alors être considérée comme une estimation de l'espérance.

C Simuler N échantillons de taille n

Lorsqu'on réalise une simulation de N échantillons de taille n de la variable aléatoire X, on obtient les N moyennes m_1, m_2, \dots, m_N des échantillons.

Si σ est l'écart-type de la variable aléatoire X, on observe que l'intervalle :

$$\left[\mu - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} ; \mu + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

contient environ 95 % de ces N moyennes.

EXERCICES RÉSOLUS

1 Algo Obtenir la distance entre la moyenne d'un échantillon et l'espérance

Une roulette est formée de 10 cases, 1 case rouge et 9 cases noires. Lorsque la case rouge sort, on gagne 100 €, sinon on perd 12 €.

X est la variable aléatoire qui donne le gain algébrique du joueur.

1. a) Déterminer la loi de probabilité de X .

b) Déterminer l'espérance de X .

2. a) Écrire en langage Python :

- une fonction `Gain` qui simule la variable aléatoire X ;
- une fonction `Moyenne` qui calcule et renvoie pour résultat la moyenne d'un échantillon de taille n de X .

b) Saisir et tester ces fonctions.

3. a) Écrire un programme qui saisit la taille Nbr d'un échantillon de X puis calcule et affiche la distance entre la moyenne de cet échantillon et l'espérance de X .

b) Saisir ce programme.

L'exécuter avec des valeurs de plus en plus grandes de Nbr. Commenter les résultats obtenus.

Solution

1. a) $P(X = 100) = \frac{1}{10}$ et $P(X = -12) = \frac{9}{10}$.

b) $E(X) = \frac{1}{10} \times 100 + \frac{9}{10} \times (-12) = -0,8$

2. a) Voici, ci-contre, les fonctions `Gain` et `Moyenne` écrites en langage Python.

b) On obtient par exemple :

`>>> Gain()`
-12

`>>> Moyenne(20)`
10.4

3. a) Voici ce programme.

```
18 Nbr=int(input("Taille de l'échantillon :"))
19 e=-0.8
20 d=abs(Moyenne(Nbr)-e)
21 print("Distance=",d)
```

```
1 from random import *
2
3 def Gain():
4     a=randint(1,10)
5     if a==1:
6         x=100
7     else:
8         x=-12
9     return x
10
11 def Moyenne(n):
12     somme=0
13     for i in range(n):
14         somme=somme+Gain()
15     m=somme/n
16     return m
```

b) Lorsque la taille de l'échantillon augmente, on observe que la distance tend à se réduire.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

2 Algo Une urne contient dix boules numérotées de 1 à 10.

On tire au hasard une boule et on note son numéro.

La variable aléatoire X donne pour valeur 1 si ce numéro est 10 et la valeur -1 sinon.

Reprendre dans cette situation le travail de l'exercice 1.

3 Algo On lance un dé équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

La variable aléatoire X donne le gain d'un joueur : on gagne 10 € s'il sort un numéro supérieur ou égal à 5, on perd 5 € sinon.

Reprendre dans cette situation le travail de l'exercice 1.

EXERCICES RÉSOLUS

4

Algo Déterminer une proportion d'échantillons

Dans une enveloppe, on place cinq cartons indiscernables portant les numéros $-2 ; -1 ; 0,1 ; 2$.

On tire au hasard un carton et on relève son numéro.

La variable aléatoire X donne pour valeur le carré du numéro obtenu.

1. a) Déterminer la loi de probabilité de X .

b) Déterminer l'espérance μ et l'écart-type σ de la variable aléatoire X .

2. On réalise une simulation d'un échantillon de taille n de la variable aléatoire X .

Quel résultat la fonction `Distance` programmée ci-contre renvoie-t-elle ?

3. La fonction `Répétition` (où s prend pour valeur l'écart-type de X) permet de simuler N échantillons de taille n de X .

Quel résultat renvoie-t-elle ?

4. a) Saisir et tester ces fonctions.

b) Exécuter `Répétition(100,10000)` plusieurs fois.

Que dire de la proportion d'échantillons obtenu ? Interpréter ce résultat.

```

1 from math import *
2 from random import *
3
4 def Distance(n):
5     somme=0
6     for k in range(n):
7         a=randint(-2,2)
8         x=a**2
9         somme=somme+x
10    m=somme/n
11    d=abs(m-2)
12    return d
13
14 def Répétition(N,n):
15     s=sqrt(2.8)
16     r=0
17     for j in range(N):
18         if Distance(n)<=2*s/sqrt(n):
19             r=r+1
20     p=r/N
21     return p

```

Solution

1. a) $P(X = 0) = \frac{1}{5}$, $P(X = 1) = \frac{2}{5}$ et $P(X = 4) = \frac{2}{5}$.

b) $E(X) = \frac{1}{5} \times 0 + \frac{2}{5} \times 1 + \frac{2}{5} \times 4 = 2$ et $V(X) = \frac{1}{5} \times (0 - 2)^2 + \frac{2}{5} \times (1 - 2)^2 + \frac{2}{5} \times (4 - 2)^2 = \frac{14}{5} = 2,8$.

Donc $\mu = 2$ et $\sigma = \sqrt{2,8}$.

2. La fonction `Distance` renvoie pour résultat l'écart entre la moyenne m de l'échantillon de taille n et l'espérance μ de la variable aléatoire X .

3. La fonction `Répétition` renvoie la proportion d'échantillons tels que l'écart entre m et μ soit inférieur ou égal à $\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$.

4. b) `>>> Répétition(100,10000)`

0.96

`>>> Répétition(100,10000)`

0.98

`>>> Répétition(100,10000)`

0.95

On obtient des proportions proches de 95 %. Pour environ 95 % des échantillons, on a $|m - \mu| \leq \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

5

Algo Reprendre le travail de l'exercice 4 dans le cas où la variable aléatoire X donne le triple du nombre obtenu.

6

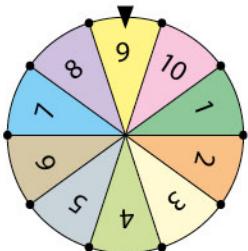
Algo Reprendre le travail de l'exercice 4 dans le cas où l'enveloppe contient sept cartons portant les numéros $-3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3$.

La variable aléatoire X donne toujours pour valeur le carré du nombre obtenu.

Simulation d'une variable aléatoire

→ Cours A

- 7 Algo** La roue équilibrée ci-dessous est partagée en dix secteurs identiques numérotés de 1 à 10.



On fait tourner la roue :

- si le numéro qui sort est impair, on gagne 3 € ;
- si le numéro qui sort est un multiple de 4, on gagne 5 € ;
- dans les autres cas, on perd 2 €.

X est la variable aléatoire qui donne le gain algébrique de la partie.

- Déterminer la loi de probabilité de X.
- Écrire une fonction en langage Python qui réalise une simulation de la variable aléatoire X.
- Saisir et tester cette fonction.

- 8 Algo** On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes, on note s'il s'agit d'un As puis on le remet dans le jeu et on effectue un second tirage.

X est la variable aléatoire qui donne le nombre d'As obtenus.

Voici une fonction écrite en langage Python qui simule cette variable aléatoire.

```
1 from random import *
2
3 def Nombre():
4     x=0
5     a=randint(1,32)
6     b=randint(1,32)
7     if a<=4:
8         x=1
9     if b<=4:
10        x=x+1
11 return x
```

- Que représentent dans cette situation les variables a et b ?

- Expliquer les lignes 7 et 9 du programme.

- Saisir le programme.

Exécuter plusieurs fois la fonction.

- La valeur 2 est obtenue très rarement.

Donner une explication à l'aide d'un arbre.

Simulation d'un échantillon d'une variable aléatoire

→ Cours C

- 9 Algo** 1. La fonction Aléa dont l'algorithme est donné ci-dessous renvoie pour résultat la valeur x d'une variable aléatoire X.

```
nbr ← nombre entier aléatoire
compris entre 1 et 100
Si nbr est multiple de 7 alors
    x ← 1
sinon
    x ← 0
Fin Si
```

Déterminer la loi de probabilité de X.

2. Un programme simule un échantillon de taille n de cette variable aléatoire et affiche les n valeurs prises par X. Voici son algorithme, le compléter.

```
Saisir n
Pour k allant de ... à ...
    | Afficher ...
Fin Pour
```

3. a) Coder ces algorithmes en langage Python.

Dans ce langage, nbr%7 renvoie le reste de la division euclidienne du nombre entier nbr par 7.

- b) Saisir et tester ces programmes.

- 10 Algo** Au basket, lorsqu'elle tente un lancer franc, Alice marque le panier dans 80 % des cas. X est la variable aléatoire qui donne 1 si le lancer est réussi et 0 sinon.

- Écrire en langage Python une fonction Lancer qui simule la variable aléatoire X.



- Une fonction Réussis simule un échantillon de taille n de X et renvoie pour résultat le nombre de paniers réussis par Alice lors des n tentatives.

Écrire en langage Python le programme de la fonction Réussis.

- Saisir et tester ces deux fonctions.

- Appliquer plusieurs fois la fonction Réussis avec des valeurs de n assez grandes.

Observer et commenter les résultats obtenus.

Renvoyer la moyenne d'un échantillon d'une variable aléatoire

→ Cours B

11 Algo On lance un dé équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

Si le numéro obtenu est égal à 6, on gagne 10 €, s'il est égal à 4 ou 5, on gagne 5 € et on perd 2 € dans les autres cas.

X est la variable aléatoire qui donne le gain algébrique du joueur.

a) Écrire en langage Python une fonction `Gain` qui simule cette variable aléatoire.

b) Une fonction `Moyenne` simule un échantillon de taille n de X et renvoie pour résultat la moyenne des valeurs prises par X.

Voici le programme incomplet de cette fonction.

```
13 def Moyenne(n):
14     somme=0
15     for k in range(n):
16         somme=somme+Gain()
17     m=[ ]
18     return m
```

Compléter la ligne 17 de ce programme.

c) Saisir et tester les fonctions obtenues.

12 Algo Un chapeau contient cinq cartes, deux de couleur rouge, trois de couleur noire.

Une partie consiste à tirer au hasard une carte du chapeau.

La variable aléatoire X donne 1 si la carte tirée est rouge et 0 si elle est noire.



1. a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Déterminer l'espérance de X.

2. Écrire en langage Python une fonction X qui simule la variable aléatoire X.

3. Écrire également une fonction `Moyenne` qui simule un échantillon de taille n de X et renvoie pour résultat la moyenne des n valeurs de X.

4. a) Saisir et tester ces deux fonctions.

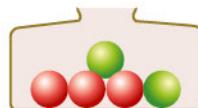
b) Exécuter plusieurs fois la fonction `Moyenne` avec de grandes valeurs de n .

Observer et commenter les valeurs obtenues.

13 Algo Une urne contient 3 boules rouges et 2 boules vertes.

On tire au hasard, successivement et avec remise, deux boules de l'urne.

X est la variable aléatoire qui donne le nombre de boules rouges tirées.



1. a) À l'aide d'un arbre, déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

b) Déterminer l'espérance de X.

2. Une fonction X simule cette variable aléatoire.

Voici son programme écrit en langage Python.

```
1 from random import *
2
3 def X():
4     x=0
5     a=random()
6     b=random()
7     if a<=0.6:
8         x=x+1
9     if b<=0.6:
10        x=x+1
11    return x
```

Expliquer les conditions $a \leq 0,6$ et $b \leq 0,6$ des lignes 7 et 9 du programme.

3. Écrire en langage Python une fonction `Moyenne` qui simule un échantillon de taille n de X et donne pour résultat la moyenne des n valeurs de X.

4. a) Saisir et tester ces deux fonctions.

b) Exécuter la fonction `Moyenne` avec de grandes valeurs de n et comparer les résultats renvoyés à l'espérance de la variable aléatoire X.

14 Algo Une urne contient 15 boules rouges et 5 boules blanches.

On tire au hasard, successivement et avec remise, deux boules de l'urne.

X est la variable aléatoire qui donne le nombre de boules rouges tirées.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Déterminer l'espérance de X.

c) Simuler cette variable aléatoire à l'aide d'une fonction X écrite en langage Python.

d) Compléter ce programme par une fonction `Moyenne` qui donne pour résultat la moyenne d'un échantillon simulé de taille n .

e) Saisir et tester ces fonctions.

Calcul et évaluation de la distance entre la moyenne d'un échantillon et l'espérance

→ Cours B et C

15 Algo Un service de livraison constate que 5 % des colis livrés sont abîmés.

Pour une livraison donnée, on note X la variable

aléatoire qui prend la valeur 1 si le colis est abîmé et 0 sinon.

1. a) Déterminer la loi de probabilité de X .

b) Déterminer l'espérance de X .

2. Voici une fonction X écrite en langage Python qui simule la variable aléatoire X .



```
1 from random import *
2
3 def X():
4     a=random()
5     if a<=0.05:
6         x=1
7     else:
8         x=0
9     return x
```

Expliquer la condition $a \leq 0,05$ de la ligne 5 de ce programme.

3. On simule un échantillon de taille n de la variable aléatoire X .

Voici une fonction Somme écrite en langage Python.

```
11 def Somme(n):
12     som=0
13     for k in range(n):
14         som=som+X()
15     return som
```

Dans le contexte de la situation, interpréter le résultat renvoyé par cette fonction.

4. Enfin, voici une fonction Distance également rédigée en langage Python.

```
17 def Distance(n):
18     e=0.05
19     m=Somme(n)/n
20     d=abs(m-e)
21     return d
```

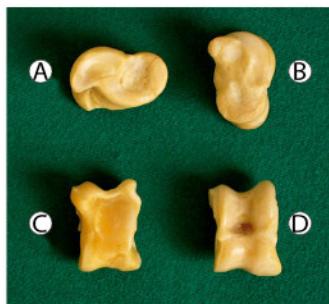
Expliquer le rôle de cette fonction.

5. a) Saisir et tester ces fonctions.

b) Exécuter la fonction Distance avec des valeurs de n de plus en plus grandes.

Commenter les résultats obtenus.

16 Algo Un osselet est constitué des quatre faces indiquées ci-dessous et notées A, B, C et D.



On lance cet osselet, la face A rapporte 3 points, la face B rapporte 4 points, la face C rapporte 6 points et la face D rapporte 1 point.

X est la variable aléatoire qui donne le nombre de points obtenus.

Une étude statistique a montré que sa loi de probabilité est donnée par :

a	1	3	4	6
$P(X=a)$	0,1	0,4	0,4	0,1

1. a) Déterminer l'espérance μ de X .

b) Déterminer l'écart-type σ de X .

2. a) Écrire une fonction X qui simule la variable aléatoire X .

b) Écrire une fonction Moyenne qui simule un échantillon de taille n de X et renvoie la moyenne des valeurs prises par X .

c) Écrire une fonction Distance qui renvoie pour résultat la distance entre la moyenne d'un échantillon de taille n et l'espérance de la variable aléatoire X .

3. On simule maintenant N échantillons de taille n de la variable aléatoire X . Voici le programme d'une fonction Répétition où s prend pour valeur l'écart-type de la variable aléatoire X .

```
29 def Répétition(N,n):
30     s=sqrt(1.45)
31     r=0
32     for j in range (N):
33         d=Distance(n)
34         if d<2*s/sqrt(n):
35             r=r+1
36     p=r/N
37     return p
```

a) Expliquer le rôle de cette fonction et interpréter le résultat qu'elle renvoie.

b) Saisir ces programmes.

Exécuter $\text{Répétition}(100,1000)$ et constater que la proportion obtenue est proche de 95 %.

17 Dans chaque cas, donner la réponse exacte sans justifier.

Un sac contient trois jetons rouges et deux jetons verts.

On tire au hasard un jeton du sac.

La variable aléatoire X donne 1 pour valeur si le jeton est rouge et -1 sinon.

La fonction X ci-contre, écrite en langage Python, réalise une simulation de la variable aléatoire X.

```
3 def X():
4     a=
5     if a<=3:
6         x=1
7     else:
8         x=
9     return x
```

	A	B	C	D
1	Pour compléter la ligne 4 du programme, on écrit ...	randint(1,2)	randint(1,3)	randint(1,5)
2	La ligne 8 du programme s'écrit ...	x=0	x=-1	x="rouge"
3	Dans la console, on peut lire ...	>>> X() 0	>>> X() 2	>>> X() -1

18 Dans chaque cas, donner la (ou les) réponse(s) exacte(s) sans justifier.

On lance un dé équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

La variable aléatoire Y donne 1 si le numéro sorti est un multiple de 3 et 0 sinon.

On met au point une fonction Y, écrite en langage Python, qui simule la variable aléatoire Y.

```
3 def Y():
4     a=randint(1,6)
5     if a%3==0:
6         y=1
7     else:
8         y=0
9     return y
```

	A	B	C	D	
1	Le test de ce programme peut s'écrire ...	if a==3 or a==6: y=1 else: y=0	if a<=2: y=1 else: y=0	if a>=3: y=0 else: y=1	if a<=4: y=0 else: y=1
2	Pour afficher les n valeurs d'un échantillon de Y, on écrit ...	for i in range(n): print(Y())	print(Y())	for i in range(1,n): print(Y())	for i in range(1,n+1): print(Y())

19 Dans chaque cas, dire si l'affirmation est vraie ou fausse en justifiant.

1 Voici le programme d'une fonction M, écrite en langage Python, dont le paramètre n est la taille d'un échantillon d'une variable aléatoire simulée par la fonction X.

Affirmation : la fonction M renvoie pour résultat la moyenne de l'échantillon.

```
def M(n):
    s=0
    for i in range(n):
        s=X()
    m=s/n
    return m
```

2 m est la moyenne d'un échantillon de taille n d'une variable aléatoire X.

Affirmation : lorsque n est grand, la valeur de m est proche de celle de l'espérance de X.

Vérifiez vos réponses : p. 340

20 Algo Simuler une variable aléatoire

Le tableau ci-contre donne la loi de probabilité d'une variable aléatoire X. Jules a commencé à programmer en langage Python une fonction qui simule la variable aléatoire X.

- Compléter ce programme.
- Saisir et tester la fonction obtenue.

x	1	2	3
$P(X = x)$	0,3	0,5	0,2

AIDE

- a) Le nombre aléatoire a prend ses valeurs dans $\{1, 2, \dots, 10\}$.
 $P(X = 1) = \frac{3}{10}$, donc on convient que pour a égal à 1, 2 ou 3, X donne la valeur 1.

```

3 def X():
4     a=randint(1,10)
5     if a<=3:
6         x=1
7     if [redacted]:
8         x=2
9     if [redacted]:
10        x=3
11    return x

```

21 Algo Retrouver l'expérience aléatoire

Une roue de loterie est divisée en 20 secteurs identiques, certains sont rouges, d'autres bleus et d'autres encore verts.

La variable aléatoire Y donne la valeur 10 si le secteur obtenu est rouge, la valeur 5 s'il est bleu et la valeur 1 s'il est vert.

La fonction Y ci-contre, écrite en langage Python, simule cette variable aléatoire.

- Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire Y.
- Combien la roue compte-t-elle de secteurs de chaque couleur ?

```

3 def Y():
4     a=randint(1,10)
5     if a<=2:
6         y=10
7     if 3<=a and a<=5:
8         y=5
9     if 6<=a:
10        y=1
11    return y

```

AIDE

- a) Le nombre aléatoire a prend une valeur aléatoire entière de 1 à 10.

D'après le programme, si $a = 1$ ou 2, alors $y = 10$ donc :

$$P(Y = 10) = \frac{2}{10} = 0,2$$

- b) L'événement $\{Y = 10\}$ est : « Le secteur obtenu est rouge » et sa probabilité est égale à 0,2. La roue est partagée en 20 secteurs.

22 Algo Comprendre un programme

La fonction D programmée ci-contre en langage Python a pour paramètre la taille n d'un échantillon d'une variable aléatoire X d'espérance μ .

- Que représentent les variables s et m ?
- Compléter la ligne 18 afin que cette fonction renvoie pour résultat la distance entre m et μ .

```

13 def D(n):
14     s=0
15     for j in range(n):
16         s=s+X()
17     m=s/n
18     d=[redacted]
19     return d

```

AIDE

- b) La distance entre deux nombres réels a et b est $|a - b|$.

EXERCICE RÉSOLU

23 Estimer l'espérance d'une variable aléatoire

On lance un dé équilibré plusieurs fois de suite jusqu'à ce que l'on obtienne la face numérotée 6.

X est la variable aléatoire qui donne le rang de la première apparition de cette face.

1. a) Écrire en langage Python le programme d'une fonction `Rang` qui réalise une simulation de la variable aléatoire X .

b) Saisir et tester cette fonction.

2. a) Écrire en langage Python une fonction `Moyenne` qui détermine et renvoie la moyenne d'un échantillon de taille n de la variable aléatoire X .

b) Saisir et tester cette fonction.

3. Exécuter `Moyenne(n)` avec de grandes valeurs de n et proposer une estimation de l'espérance de la variable aléatoire X .

Solution

1. a) Voici ci-contre le programme de la fonction `Rang`.

b) On obtient par exemple, dans la console :

```
>>> Rang()
8
```

2. a) Voici ci-contre le programme de la fonction `Moyenne`.

b) On obtient par exemple dans la console :

```
>>> Moyenne(100)
6.51
```

3. On exécute plusieurs fois `Moyenne(10000)` et on propose 6 pour estimation de $E(X)$.

```
>>> Moyenne(10000)
6.0583
```

```
>>> Moyenne(10000)
6.0331
```

```
1 from random import *
2
3 def Rang():
4     a=randint(1,6)
5     x=1
6     while a!=6:
7         a=randint(1,6)
8         x=x+1
9     return x
10
11 def Moyenne(n):
12     somme=0
13     for k in range(n):
14         somme=somme+Rang()
15     m=somme/n
16     return m
```

```
>>> Moyenne(10000)
6.0906
```

À VOTRE TOUR

24 Une boîte contient 15 dominos blancs et 10 dominos noirs. On tire au hasard, successivement et avec remise, un domino de la boîte jusqu'à ce que l'on obtienne un domino noir.

La variable aléatoire X donne le rang de sortie de ce premier domino noir.

1. Écrire en langage Python :

- une fonction `Rang` qui simule X ;
- une fonction `Moyenne` qui renvoie la moyenne d'un échantillon de taille n de X .

2. a) Saisir et tester ces fonctions.

b) Proposer alors une estimation de l'espérance de la variable aléatoire X .

25 Une roulette est divisée en 18 secteurs identiques numérotés de 0 à 17.

Le croupier fait tourner cette roulette tant que 0 ne sort pas.

X est la variable aléatoire qui donne le rang de la première sortie de 0.

1. Écrire en langage Python :

- une fonction `Rang` qui simule X ;
- une fonction `Moyenne` qui renvoie la moyenne d'un échantillon de taille n de X .

2. a) Saisir et tester ces fonctions.

b) Proposer alors une estimation de l'espérance de la variable aléatoire X .

EXERCICE RÉSOLU

26 Simuler des échantillons

On lance une pièce de monnaie truquée.

La probabilité d'obtenir Pile est 0,4.

La variable aléatoire X donne la valeur 1 lorsque Pile sort et la valeur 0 lorsque Face sort.

1. Déterminer l'espérance $E(X)$ et l'écart-type $\sigma(X)$ de la variable aléatoire X.

2. On simule avec le tableau un premier échantillon de taille $n = 100$ de X.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	CR	CS	CT	CU	CV	CW	CX	CY	CZ	DA
1	Echantillon	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	95	96	97	98	99	100		Moyenne	Distance	Test
2	n° 1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0,41	0,01	1

Réaliser cette feuille de calcul avec les indications suivantes.

a) Dans la cellule B2, saisir la formule $=SI(ALEA()<=0,4;1;0)$

Recopier cette cellule jusqu'à la colonne CW pour réaliser les $n = 100$ simulations de X.

b) Dans la cellule CY2, saisir la formule $=MOYENNE(B2:CW2)$ et dans la cellule CZ2, saisir la formule $=ABS(CY2-0,4)$.

Vérifier que $\frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \approx 0,098$ et saisir dans la cellule DA2 la formule $=SI(CZ2<=0,098;1;0)$.

Expliquer la signification de la valeur affichée dans cette cellule.

3. On simule maintenant $N = 100$ échantillons de taille $n = 100$ de X.

99	n° 98	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0,51	0,11	0
100	n° 99	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0,44	0,04	1
101	n° 100	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0,38	0,02	1
102																						
103																				Proportion	0,94	

a) Recopier la plage B2:DA2 vers le bas jusqu'à la ligne 101.

b) Dans la cellule DA103, saisir la formule $=NB.SI(DA2:DA101;1)/100$

Expliquer ce que représente la valeur affichée dans cette cellule.

4. Recalculer plusieurs fois la feuille de calcul et observer la proportion obtenue.

Solution

1. $E(X) = 0,6 \times 0 + 0,4 \times 1 = 0,4$ et $V(X) = 0,6 \times (-0,4)^2 + 0,4 \times 0,6^2 = 0,24$.

Donc $\sigma(X) = \sqrt{0,24}$, soit $\sigma(X) \approx 0,49$.

2. b) Cette cellule affiche :

• 1 lorsque la distance d entre la moyenne de l'échantillon et l'espérance $E(X)$ est inférieure ou égale à $\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$;
• 0 sinon.

3. b) Cette cellule affiche la proportion des échantillons tels que $d \leq \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$.

4. Les proportions obtenues sont assez proches de 0,95.

À VOTRE TOUR

27 On reprend l'expérience aléatoire de l'exercice 26 mais on suppose maintenant que la probabilité d'obtenir Pile est 0,7. Modifier la feuille de calcul.

28 On reprend les données de l'exercice 26. Simuler maintenant $N = 100$ échantillons de taille $n = 500$ de X. Observer la proportion obtenue.

SIMULER DES ÉCHANTILLONS D'UNE VARIATION ALÉATOIRE

29 Algo On tire au hasard une boule de cette urne et on note sa couleur.



Si la boule tirée est bleue, on gagne 10 points, si elle est verte 2 points et on perd 1 point si la boule est rouge. X est la variable aléatoire qui donne le nombre de points obtenus.

1. a) Déterminer la loi de probabilité de X .
- b) Déterminer l'espérance de X .
2. a) Écrire en langage Python une fonction `X` qui réalise une simulation de la variable aléatoire X .
- b) Saisir et tester cette fonction.
3. a) Écrire une fonction `Moyenne` qui simule un échantillon de taille n de la variable aléatoire X et renvoie pour résultat la moyenne des n valeurs de X .
- b) Saisir, tester cette fonction et observer les moyennes obtenues.

30 Algo On lance un dé équilibré deux fois de suite.

X est la variable aléatoire qui donne la somme des deux numéros obtenus.

1. À l'aide d'un arbre, déterminer la loi de probabilité de X .
2. a) Écrire en langage Python une fonction `Somme` qui réalise une simulation de la variable aléatoire X .
- b) Saisir et tester cette fonction.
3. a) Écrire un programme qui simule un échantillon de taille n de X et affiche les n valeurs simulées.
- b) Saisir et tester ce programme.

31 Algo On lance une pièce équilibrée trois fois de suite.

Y est la variable aléatoire qui donne le nombre de fois où l'on obtient Face.

1. a) Écrire en langage Python une fonction `Y` qui réalise une simulation de la variable aléatoire Y .
- b) Saisir et tester cette fonction.
2. a) Écrire un programme qui simule un échantillon de taille n de la variable aléatoire Y et affiche les n valeurs simulées.
- b) Saisir et tester ce programme.

32 Algo Dans une société de démarchage par téléphone, 40 % des personnes appelées répondent effectivement.

Pour un appel, la variable aléatoire X donne 1 pour valeur si la personne appelée répond et 0 sinon.

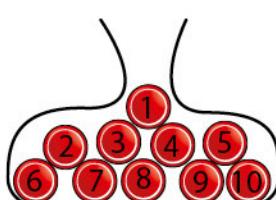
1. Déterminer la loi de probabilité de X .
2. a) Écrire en langage Python une fonction `Appel` qui simule la variable aléatoire X .
- b) Saisir et tester cette fonction.
3. Un opérateur appelle n personnes par jour.
- a) Écrire une fonction `Total` qui donne pour résultat le nombre de personnes qui auront répondu à l'opérateur dans la journée.
- b) Saisir et tester cette fonction.

33 Algo Une étude statistique, menée hors des entraînements de football de la saison, montre que sur une série de 5 tirs au but, Lucas marque 5 buts avec une probabilité égale à 0,2, marque 4 buts avec une probabilité égale à 0,5 et 3 buts avec une probabilité égale à 0,3.

Pour une série de 5 tirs, la variable aléatoire X donne le nombre de buts marqués.

1. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X .
2. a) Écrire en langage Python une fonction `Buts` qui simule la variable aléatoire X .
- b) Saisir et tester cette fonction.
3. a) Écrire une fonction `Moyenne` qui réalise une simulation d'un échantillon de taille n de la variable aléatoire X et renvoie pour résultat le nombre moyen de buts marqués par Lucas.
- b) Saisir et tester cette fonction.

34 Algo Un sac contient dix jetons numérotés de 1 à 10. On tire au hasard, successivement et avec remise, deux jetons du sac.



Y est la variable aléatoire qui donne le plus petit des deux nombres obtenus.

1. a) Écrire en langage Python une fonction `Y` qui réalise une simulation de la variable aléatoire Y .
- b) Saisir et tester cette fonction.
2. a) Écrire une fonction `Moyenne` qui simule un échantillon de taille n de la variable aléatoire Y et renvoie la moyenne des n valeurs de Y obtenues.
- b) Saisir et tester cette fonction.

COMPARER LA MOYENNE D'UN ÉCHANTILLON À L'ESPÉRANCE

35 Algo Pour un archer, la probabilité d'atteindre la cible est 0,8.

Lors d'un tir, X est la variable aléatoire qui donne 1 si la cible est atteinte et 0 sinon.

1. a) Écrire en langage Python une fonction X qui simule la variable aléatoire X .

b) Écrire une fonction $Réussis$ qui simule un échantillon de taille n de X et renvoie le nombre de tirs réussis.

Saisir et tester ces fonctions.

2. a) Écrire une fonction $Moyenne$ qui donne pour résultat la moyenne des valeurs prises par X dans un échantillon de taille n .

b) Écrire une fonction $Distance$ qui renvoie la distance entre la moyenne des valeurs de X dans un échantillon de taille n et l'espérance de la variable aléatoire X .

c) Saisir et tester ces fonctions.

3. On réalise maintenant une simulation de N échantillons de taille n .

Voici le programme d'une fonction $Proportion$ dont le paramètre alpha est un nombre.

```

25 def Proportion(N,n,alpha):
26     tot=0
27     for k in range(N):
28         if Distance(n)<=alpha:
29             tot=tot+1
30     p=tot/N
31     return p

```

a) Expliquer le rôle de cette fonction. Interpréter le résultat qu'elle renvoie.

b) Saisir et tester cette fonction.

4. a) Exécuter plusieurs fois :

$\text{Proportion}(100,1000,0.025)$

Commenter les résultats obtenus.

b) Proposer d'autres valeurs du paramètre alpha et observer les résultats obtenus.

c) Les proportions obtenues sont-elles sensibles aux variations de la valeur du paramètre alpha ?



36 Algo On lance deux dés équilibrés et on note les deux numéros a et b sortis.

La variable aléatoire X donne pour valeur $|a - b|$.

1. a) Écrire en langage Python une fonction X qui simule la variable aléatoire X .

b) Saisir et tester cette fonction.

2. a) Écrire une fonction $Moyenne$ qui donne pour résultat la moyenne des valeurs prises par X dans un échantillon de taille n .

b) Saisir et tester cette fonction.

3. Exécuter $Moyenne$ avec de grandes valeurs de n et proposer une estimation e de l'espérance de la variable aléatoire X .

4. a) Écrire une fonction $Distance$ qui donne pour résultat la distance entre la moyenne d'un échantillon de taille n de X et l'estimation e obtenue à la question 3.

b) Saisir, tester cette fonction et observer les résultats donnés.

37 Algo On lance un dé équilibré cinq fois de suite et on note Y la variable aléatoire qui donne le plus grand des cinq nombres obtenus.

1. a) Écrire en langage Python une fonction Y qui simule la variable aléatoire Y .

b) Saisir et tester cette fonction.

2. Déterminer une estimation e de l'espérance de la variable aléatoire Y .

3. a) Écrire une fonction $Distance$ qui donne pour résultat la distance entre la moyenne d'un échantillon de taille n de Y et l'estimation e de l'espérance de Y .

b) Saisir et tester cette fonction.

S'ENTRAÎNER À LA LOGIQUE → p. 336

38 Les opérateurs logiques and, or

Voici deux fonctions écrites en langage Python.

```

def X(a,b,c):
    if a<b and b<c:
        x=1
    else:
        x=0
    return x

```

```

def Y(a,b,c):
    if a<b or b<c:
        y=1
    else:
        y=0
    return y

```

Pour chacun des appels suivants, donner le résultat renvoyé par la fonction.

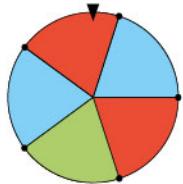
- a) $X(1, 5, 7)$ b) $X(1, 6, 4)$ c) $X(8, 3, 5)$
- d) $Y(4, 6, 5)$ e) $Y(9, 3, 4)$ f) $Y(9, 4, 2)$

Organiser son raisonnement

39 Tice Prendre des initiatives

Modéliser Représenter

La roue équilibrée ci-dessous est divisée en cinq secteurs identiques, deux secteurs sont rouges, deux sont bleus et un est vert.



On fait tourner la roue. La variable aléatoire X donne la valeur 1 si le secteur sorti est rouge, 5 s'il est bleu et 10 s'il est vert.

1. a) Déterminer la loi de probabilité de X .
- b) Déterminer l'espérance μ et l'écart-type σ de X .
2. a) Dans une feuille de calcul du tableur, simuler un échantillon de taille $n = 100$ de la variable aléatoire X .
- b) Afficher dans la feuille la moyenne de l'échantillon et la distance entre cette moyenne et l'espérance μ de X .
3. a) Compléter la feuille de calcul afin de réaliser une simulation de $N = 100$ échantillons de taille $n = 100$ de X .
- b) Vérifier que $\frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \approx 0,664$ et afficher dans la feuille la proportion des cas où la distance entre la moyenne et μ est inférieure ou égale à cette valeur.

40 Algo Simuler n games



Chercher Modéliser Communiquer

Penny and Leonard play table football of ten.
Penny wins eighty times out of a hundred.
They decide to play n consecutive games.
Let X be the random variable that counts the number of games Leonard wins.
Write, in the Python language, a function that simulates the random variable X .

41 Algo Simuler un rang de tirage

Modéliser Raisonner

Une urne contient 99 boules blanches et 1 boule rouge. On tire au hasard, successivement et sans remise, les boules de l'urne jusqu'à ce que l'on obtienne la boule rouge.

X est la variable aléatoire qui donne le rang du tirage de cette boule rouge.

- a) Écrire en langage Python une fonction qui réalise une simulation de la variable aléatoire X .
- b) Saisir et tester plusieurs fois de suite cette fonction.

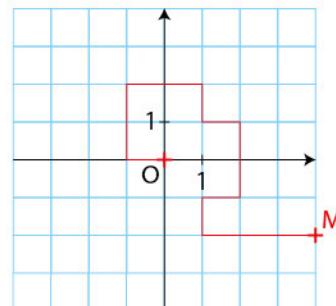
42 Algo Imaginer une stratégie

Chercher Modéliser

Dans le plan muni d'un repère orthonormé d'origine O , un point M se déplace sur le quadrillage ci-dessous. Au départ, il se trouve en O , puis il se déplace d'un pas (c'est-à-dire d'une unité) dans l'une des quatre directions (droite, gauche, haut, bas).

Les déplacements sont aléatoires.

Le point M s'arrête lorsqu'il atteint le bord du quadrillage et la variable aléatoire K donne le nombre de pas effectués.



Écrire en langage Python une fonction *Moyenne* qui simule un échantillon de taille n de la variable aléatoire K et donne pour résultat la moyenne de cet échantillon.

43 Algo Chercher une estimation

Problème ouvert

Chercher Modéliser

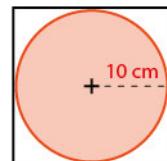
Les faces d'un dé équilibré sont numérotées de 1 à 6. On lance ce dé plusieurs fois de suite jusqu'à ce que l'on obtienne deux numéros successifs identiques. La variable aléatoire X donne le nombre de lancers effectués.

- a) Écrire en langage Python une fonction qui réalise une simulation de la variable aléatoire X .
- b) Proposer une méthode afin d'obtenir une estimation de l'espérance de la variable aléatoire X .

44 Algo Comparer des surfaces

Modéliser Raisonner

Un tireur tire sans viser sur la cible ci-contre formée d'un carré de côté 20 cm et d'un disque de rayon 10 cm. X est la variable aléatoire qui donne 1 si le tireur atteint le disque et 0 sinon.



- a) Écrire en langage Python une fonction qui réalise une simulation de la variable aléatoire X .
- b) Saisir et tester cette fonction.

45 **Algo** Simuler le plus grand des nombres tirés au hasard



Modéliser | Raisonner | Communiquer

Rédiger les différentes étapes de la recherche, sans omettre les fausses pistes et les changements de méthode.

Problème Une expérience aléatoire consiste à tirer au hasard n nombres entiers compris entre 1 et 100. Ces nombres ne sont pas nécessairement distincts les uns des autres.

La variable aléatoire X donne le plus grand des n nombres tirés.

Écrire en langage Python une fonction **Max** qui admet pour paramètre le nombre n et qui simule la variable aléatoire X.

OBJECTIF
BAC

48 **Algo** Simuler une enquête ⌚ 25 min

D'après Bac 2018, La Réunion

Un laboratoire pharmaceutique souhaite mener une enquête sur la vaccination contre la grippe dans une ville. Après la période hivernale, il envisage d'interroger au hasard 180 habitants de cette ville.

On suppose que la probabilité qu'une personne choisie au hasard soit vaccinée contre la grippe est égale à 0,4.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de personnes vaccinées parmi les 180 interrogées.

1. Voici une fonction X écrite en langage Python qui réalise une simulation de la variable aléatoire X.

```

1 from random import *
2
3 def X():
4     N=0
5     for i in range(180):
6         a=random()
7         if a<=0.4:
8             N=N+1
9     return N

```



46 **Algo** Estimer une espérance

On tire au hasard et avec remise plusieurs fois de suite une carte d'un jeu de 32 cartes jusqu'à ce que l'on obtienne la couleur « Cœur ».

La variable aléatoire X donne le rang de la première apparition de cette couleur. Proposer une méthode afin d'estimer l'espérance de cette variable aléatoire.

47 **Algo** Simuler une répétition

X est la variable aléatoire qui donne le nombre de lancers d'un dé équilibré qu'il faut effectuer pour obtenir six fois le nombre 6.

Écrire en langage Python une fonction qui simule X.

a) Que représente dans le contexte de la situation la variable N ?

b) Expliquer le test réalisé aux lignes 7 et 8 du programme.

2. La fonction **Moyenne** réalise une simulation de taille n de la variable aléatoire X et donne pour résultat la moyenne des n valeurs prises par X.

```

11 def Moyenne(n):
12     som=0
13     for i in range(n):
14         som=som+ 
15     m= 
16     return m

```

Compléter les lignes 14 et 15 de ce programme.

3. On estime que l'espérance de la variable aléatoire X est égale à 72.

Écrire en langage Python une fonction **Distance** qui renvoie pour résultat la distance entre la moyenne d'un échantillon de taille n et l'espérance de la variable aléatoire X.

Exploiter ses compétences

49 Simuler des réponses à un QCM

La situation problème

Un jury de concours désire mettre au point le barème d'une épreuve donnée sous forme de QCM. Pour cela, il souhaite connaître le nombre de réponses justes qu'obtiendrait un candidat qui répond au hasard.

Utiliser les différentes informations pour répondre à ce souhait du jury.



DOC 1 Définition du QCM

- Le QCM comprend n questions.
- Pour chaque question, quatre réponses sont proposées, une seule de ces réponses est exacte.

DOC 2 Le cahier des charges

Le jury veut disposer d'une fonction qui simule les réponses au hasard du candidat et renvoie le nombre de réponses justes qu'il obtient.

50 Algo Simuler des déplacements aléatoires

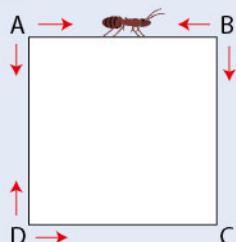
La situation problème

- Une fourmi parcourt les côtés d'un carré ABCD en partant du sommet A et met 1 min à parcourir un côté.
- On dit que la fourmi a traversé le carré lorsqu'elle atteint pour la première fois le sommet C.
- La variable aléatoire X donne la durée de la traversée.

Utiliser les différentes informations pour écrire en langage Python une fonction qui réalise une simulation de X.



DOC 1 Le Carré



DOC 2 Les règles du déplacement

Lorsqu'elle arrive à l'un des sommets (excepté le sommet C), la fourmi choisit au hasard l'un ou l'autre des deux côtés issus de ce sommet pour poursuivre sa marche (elle peut donc éventuellement rebrousser chemin).

51 Algo Évaluer un nombre de véhicules avec défaut

La situation problème

Dans une usine automobile, on contrôle les défauts de peinture des carrosseries.

X est la variable aléatoire qui donne le nombre de véhicules avec un défaut de peinture comptés pendant une journée de production.

Utiliser les différentes informations pour écrire en langage Python une fonction qui réalise une simulation de la variable aléatoire X .



DOC 1 Le taux de défaut

Dans une production normale, on constate que 15 % des véhicules ont un défaut de peinture.

DOC 2 La production journalière

L'usine automobile produit 350 véhicules par jour.

52 Algo Simuler 100 échantillons de taille 100

La situation problème

À la sortie d'une salle de cinéma, on demande aux spectateurs s'ils ont aimé le film. Une variable aléatoire X simulée par une fonction écrite en langage Python donne la réponse d'un spectateur.

Utiliser les différentes informations pour écrire une fonction qui simule 100 échantillons de taille 100 de la variable aléatoire X et qui donne pour résultat la proportion des cas où la distance entre la moyenne de l'échantillon et l'espérance μ de X est inférieure à $\frac{\sigma}{5}$, où σ est l'écart-type de X .



DOC 1 La fonction X

```
def X():
    if random()<=2/3:
        rep=1
    else:
        rep=0
    return rep
```

DOC 2 La variable aléatoire X

X donne la valeur 1 si le spectateur a aimé le film et la valeur 0 sinon.

DOC 3 Les paramètres de X

L'espérance μ de X est égale à $\frac{2}{3}$ et son écart-type σ , arrondi au centième, est 0,47.