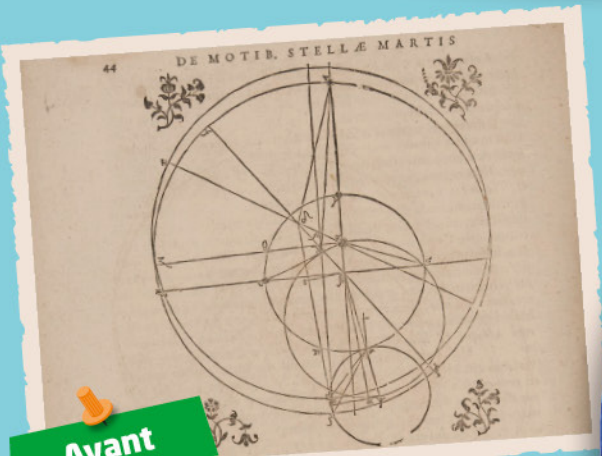
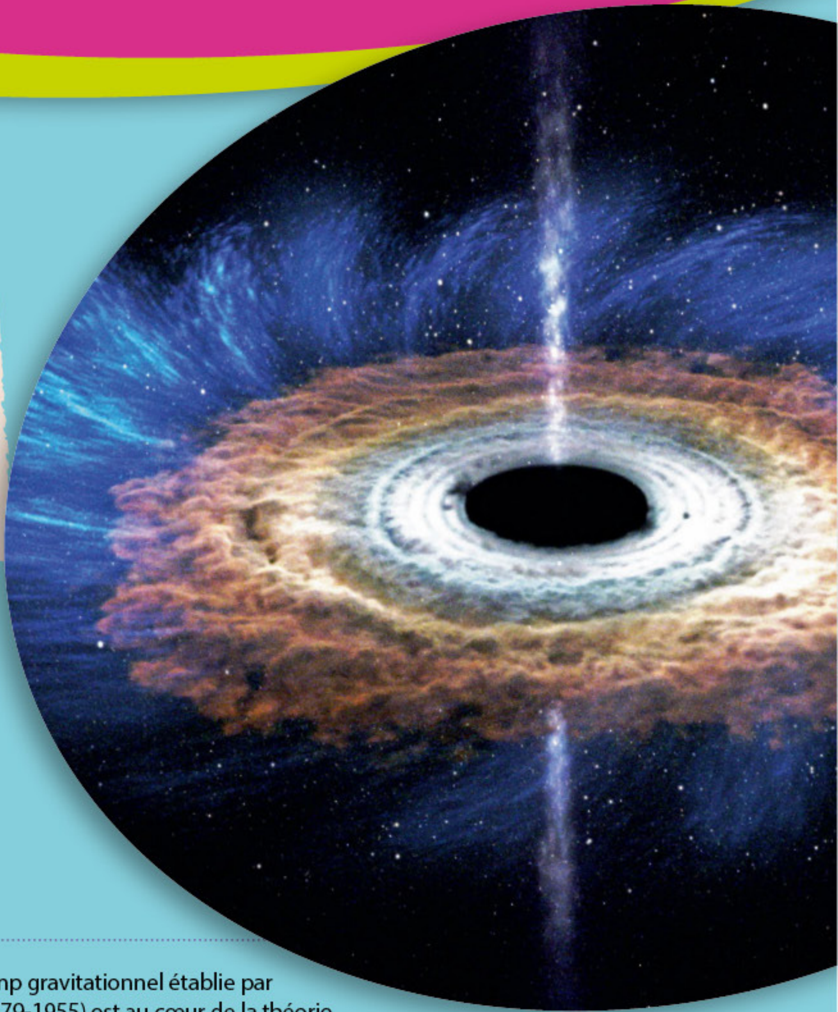
4 Équations et inéquations



Avant

▶ Johannes Kepler (1571-1630), célèbre astronome, a établi une équation relative à la trajectoire des planètes. Résoudre l'équation de Kepler permet de déterminer la date correspondant à une position donnée d'une planète (par exemple, la date des équinoxes).



À présent

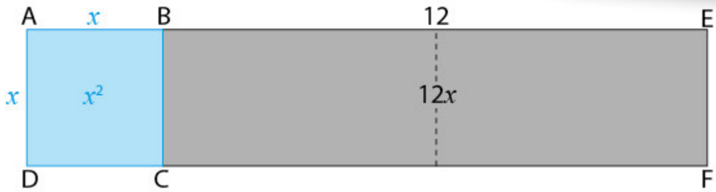
▶ L'équation du champ gravitationnel établie par Albert Einstein (1879-1955) est au cœur de la théorie de la relativité générale ; elle met en relation la matière, l'énergie, l'espace et le temps. L'étude de quelques solutions exactes de cette équation a mené à la prédiction de l'existence de trous noirs et aux divers modèles d'évolution de l'Univers.

Les capacités travaillées dans ce chapitre

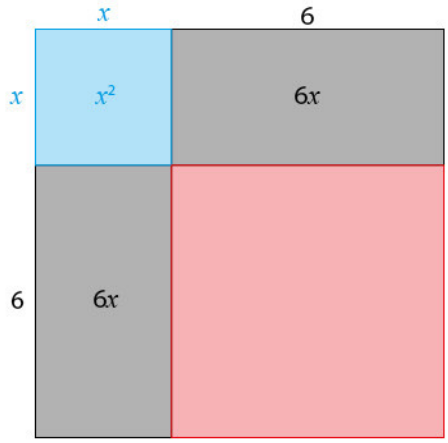
	Exercices
• Résoudre une équation du 1er degré, une équation produit ou quotient nul.	18 à 26
• Résoudre une équation se ramenant à une équation de type connu.	1 à 7, 27 à 36, 93
• Comparer deux quantités et utiliser des inégalités.	8, 10, 39 à 48
• Résoudre une inéquation du premier degré.	49 à 51
• Résoudre une inéquation produit ou quotient avec un tableau de signes.	9, 11, 12, 52 à 59
• Résoudre une inéquation se ramenant à une inéquation de type connu.	13, 15, 16, 60 à 65
• Choisir l'expression la plus adaptée pour résoudre une équation ou une inéquation.	37, 38, 90, 97
• Modéliser et résoudre un problème.	14, 17, 66 à 73

1 Solution d'une équation

Le mathématicien arabe Al-Khwârizmî (vers 780-850) a imaginé que déterminer une solution de l'équation $x^2 + 12x = 45$ revenait à trouver la longueur x (avec $x \geqslant 0$) telle que l'aire du rectangle AEFD ci-dessous soit égale à 45.



Pour cela, il a découpé le rectangle BEFC en deux rectangles de mêmes dimensions (6 et x), et a formé le grand carré ci-contre.



1 **a)** Par des considérations d'aires, expliquer pourquoi :

$$x^2 + 12x = (x+6)^2 - 36$$

b) En déduire que résoudre l'équation $x^2 + 12x = 45$ revient à résoudre l'équation $(x+6)^2 = 81$.

c) Déterminer x.

2 En utilisant la méthode d'Al-Khwârizmî, déterminer une solution de l'équation $x^2 + 10x = 75$.

2 Inéquations

Les responsables d'une salle de sport proposent deux formules à l'année :

Abonnement	Plateau de musculation	Cours de fitness
Pack A	312 €	3 €/séance
Pack B	216 €	5 €/séance

1 Lamia souhaite s'inscrire et envisage d'effectuer 2 séances de fitness par mois. Combien paiera-t-elle au total si elle choisit : **a)** le pack A ? **b)** le pack B ?

2 Maxence souhaite aussi s'inscrire. On se propose de conseiller Maxence sur le choix du pack le plus économique. On note x le nombre de cours de fitness qu'il envisage de suivre.

a) Exprimer, en fonction de x, le montant total $A(x)$ que Maxence règlera s'il choisit le pack A.

b) Exprimer, en fonction de x, le montant total $B(x)$ que Maxence réglera s'il choisit le pack B.

c) Déterminer trois valeurs de x vérifiant l'inégalité $312 + 3x < 216 + 5x$ et en donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.

d) Tabuler à l'aide de la calculatrice les fonctions $x \mapsto 312 + 3x$ et $x \mapsto 216 + 5x$, avec des nombres entiers positifs, et conjecturer toutes les valeurs de x vérifiant l'inégalité $312 + 3x < 216 + 5x$.

Lorsqu'on détermine tous les nombres réels qui vérifient $312 + 3x < 216 + 5x$, on dit que l'on résout **une inéquation.**

1 Résolution d'une équation

A Vocabulaire et ensemble des solutions

Définitions (rappels)

- **Résoudre dans $\mathbb{R}$ une équation** à une inconnue consiste à trouver, si elles existent, **toutes** les valeurs réelles de l'inconnue vérifiant l'égalité proposée. Ces nombres constituent l'**ensemble des solutions** de l'équation.
- Deux équations qui ont le même ensemble de solutions sont dites **équivalentes**.

B Équations du premier degré à une inconnue : $ax+b=cx+d$ (avec $a \neq c$)

Exemple

Résolution de l'équation $5x-1=x-9$

$5x-1=x-9$

On soustrait x à chaque membre : $5x-1-x=x-9-x$

$4x-1=-9$

On ajoute 1 à chaque membre : $4x-1+1=-9+1$

$4x=-8$

On divise par 4 chaque membre : $\dfrac{4x}{4}=\dfrac{-8}{4}$

$x=-2$

Ces quatre équations sont équivalentes.

-2 est la seule solution de l'équation $5x-1=x-9$. L'ensemble des solutions est $\mathcal{S}=\{-2\}$.

C Équations produit nul, quotient nul ou $x^2=a$

Propriétés

(1) $A \times B = 0$ **équivaut** à $A=0$ **ou** $B=0$. **(2)** $\dfrac{A}{B}=0$ **équivaut** à $A=0$ **et** $B \neq 0$.

Exemples

Résolution de $(2x-7)(-x-3)=0$

$(2x-7)(-x-3)=0$ équivaut à

$2x-7=0$ ou $-x-3=0$,

c'est-à-dire $x=\dfrac{7}{2}$ ou $x=-3$.

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S}=\left\{-3\,;\dfrac{7}{2}\right\}$.

Résolution de $\dfrac{2x+1}{x-5}=0$

$\dfrac{2x+1}{x-5}=0$ équivaut à $2x+1=0$ et $x-5\neq 0$,

c'est-à-dire $x=-\dfrac{1}{2}$ et $x\neq 5$. Or, $-\dfrac{1}{2}\neq 5$.

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S}=\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$.

Propriétés

a désigne un nombre réel.

- Si $a>0$, alors l'équation $x^2=a$ admet exactement **deux** solutions : $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.
- Si $a=0$, alors l'équation $x^2=a$ admet **une seule** solution : 0.
- Si $a<0$, alors l'équation $x^2=a$ n'admet **aucune** solution.

Démonstration

- **Cas où $a>0$** : $a=\left(\sqrt{a}\right)^2$ donc l'équation $x^2=a$ équivaut à $x^2-\left(\sqrt{a}\right)^2=0$, c'est-à-dire $\left(x+\sqrt{a}\right)\left(x-\sqrt{a}\right)=0$ soit $x=-\sqrt{a}$ ou $x=\sqrt{a}$.
- **Cas où $a=0$** : 0 est le seul nombre de carré 0, donc l'équation $x^2=0$ équivaut à $x=0$.
- **Cas où $a<0$** : pour tout nombre réel x, $x^2 \geqslant 0$, donc l'équation $x^2=a$ n'a pas de solution.

Exemple

L'ensemble des solutions de l'équation $x^2=2$ est $\mathcal{S}=\{-\sqrt{2}\,;\sqrt{2}\}$.

2 Inégalités

A Addition et inégalités

Propriétés

(1) On peut ajouter ou retrancher un même nombre aux deux membres d'une inégalité, en conservant son sens. Autrement dit, pour tous nombres réels a, b, c :

- si $a \leqslant b$, alors $a + c \leqslant b + c$;
- si $a \leqslant b$, alors $a - c \leqslant b - c$.

(2) On peut ajouter membre à membre des inégalités de même sens.
Autrement dit, pour tous nombres réels a, b, c, d, si $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$, alors $a + c \leqslant b + d$.

Démonstrations

(1) $(a + c) - (b + c) = a + c - b - c = a - b$
Or, $a \leqslant b$ donc $a - b \leqslant 0$ et $(a + c) - (b + c) \leqslant 0$, c'est-à-dire $a + c \leqslant b + c$.
(2) Si $a \leqslant b$, alors $a + c \leqslant b + c$ d'après **(1)**. De même si $c \leqslant d$, alors $c + b \leqslant d + b$. Donc $a + c \leqslant b + d$.

B Multiplication et inégalités

Propriétés

On peut multiplier ou diviser les deux membres d'une inégalité :

(3) par un même nombre **strictement positif**, **en conservant** le sens de l'inégalité.
Autrement dit, pour tous nombres réels a, b, c :
si $a \leqslant b$ et $c > 0$ alors $a \times c \leqslant b \times c$ et $\dfrac{a}{c} \leqslant \dfrac{b}{c}$.

(4) par un même nombre **strictement négatif**, **en changeant** le sens de l'inégalité.
Autrement dit, pour tous nombres réels a, b, c :
si $a \leqslant b$ et $c < 0$, alors $a \times c \geqslant b \times c$ et $\dfrac{a}{c} \geqslant \dfrac{b}{c}$.

Démonstrations

c désigne un nombre réel non nul et f la fonction affine définie par $f(x) = cx$. On suppose $a \leqslant b$.

Si $c > 0$, alors f est croissante sur $\mathbb{R}$ (voir p. 234).
- D'où $f(a) \leqslant f(b)$, soit $a \times c \leqslant b \times c$.
- En multipliant chaque nombre par $\dfrac{1}{c^2}$ (positif),

on obtient $\dfrac{a \times c}{c^2} \leqslant \dfrac{b \times c}{c^2}$ soit $\dfrac{a}{c} \leqslant \dfrac{b}{c}$.

Si $c < 0$, alors f est décroissante sur $\mathbb{R}$ (voir p. 234).
- D'où $f(a) \geqslant f(b)$, soit $a \times c \geqslant b \times c$.
- En multipliant chaque nombre par $\dfrac{1}{c^2}$ (positif),

on obtient $\dfrac{a \times c}{c^2} \geqslant \dfrac{b \times c}{c^2}$ soit $\dfrac{a}{c} \geqslant \dfrac{b}{c}$.

Propriété

Règle de comparaison à l'aide d'un quotient
Pour comparer deux nombres réels strictement positifs, on peut comparer leur quotient à 1.
Pour tous nombres réels a et b **strictement positifs**, si $\dfrac{a}{b} \leqslant 1$, alors $a \leqslant b$ et si $\dfrac{a}{b} \geqslant 1$, alors $a \geqslant b$.

En effet, il suffit de multiplier chaque membre de l'inégalité $\dfrac{a}{b} \leqslant 1$ (ou $\dfrac{a}{b} \geqslant 1$) par b avec $b > 0$.

C Signe d'un produit, signe d'un quotient

Propriété (rappel)

Le produit ou le quotient de deux nombres réels non nuls de **même signe** est **positif**.
Le produit ou le quotient de deux nombres réels non nuls de **signes contraires** est **négatif**.

3 Inéquations

A Vocabulaire

Définitions

- Une **inéquation** est une inégalité dans laquelle figurent une ou plusieurs inconnues désignées par des lettres.
- Une **solution** d'une inéquation est une valeur de l'inconnue pour laquelle l'inégalité est vraie.
- **Résoudre dans $\mathbb{R}$** une inéquation, c'est trouver **toutes ses solutions réelles**.

Exemple

$2x - 4 \leqslant 3$ est une inéquation d'inconnue x.
-6 est une solution de cette inéquation. En effet, $2 \times (-6) - 4 = -16$ et $-16 \leqslant 3$.
5 n'est pas solution de cette inéquation. En effet, $2 \times 5 - 4 = 6$ et $6 > 3$.

B Résolution d'une inéquation du premier degré à une inconnue

Pour résoudre une inéquation du type $ax + b < cx + d$, ou $ax + b \geqslant cx + d$ (avec $a \neq c$), on utilise les propriétés **(1)**, **(3)** et **(4)** énoncées p. 91.

Exemple

Résolution de l'inéquation du 1er degré $3x + 1 > x - 7$

$3x + 1 \geqslant x - 7$
On soustrait x à chaque membre : $3x + 1 - x \geqslant x - 7 - x$
$2x + 1 \geqslant -7$
On soustrait 1 à chaque membre : $2x + 1 - 1 \geqslant -7 - 1$
$2x \geqslant -8$
On divise chaque membre par 2 qui est positif, donc on conserve le sens de l'inégalité : $\dfrac{2x}{2} \geqslant \dfrac{-8}{2}$
$x \geqslant -4$

L'ensemble des solutions est l'intervalle $\mathcal{S} = [-4\,;+\infty[$.

Ces quatre inéquations sont dites **équivalentes**.

C Résolution d'une inéquation produit ou quotient

Pour résoudre une inéquation du type $(ax + b)(cx + d) \leqslant 0$ ou du type $\dfrac{ax + b}{cx + d} \leqslant 0$, on peut utiliser **un tableau de signes**.

Exemple

Résolution de l'inéquation produit $(x + 1)(-2x + 6) < 0$

❶ On prépare un tableau comme ci-contre.
On résout chaque équation $x + 1 = 0$ et $-2x + 6 = 0$, puis on porte les solutions obtenues par ordre croissant sur la ligne « x ».
$x + 1 = 0$ équivaut à $x = -1$.
$-2x + 6 = 0$ équivaut à $x = 3$.

❶	x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
❷	$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
	$-2x+6$		$+$		$+$	0	$-$	
❸	$(x+1)(-2x+6)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

❷ On applique la règle du signe de $ax + b$ (p. 234) pour compléter le signe de $x + 1$ et de $-2x + 6$.
❸ On applique la règle du signe d'un produit pour compléter le signe de $(x + 1)(-2x + 6)$.
❹ Conclusion : on lit sur la dernière et la première lignes que $(x + 1)(-2x + 6)$ est négatif ou nul pour $x \leqslant -1$ ou $x \geqslant 3$. L'ensemble des solutions de l'inéquation est $\mathcal{S} =]-\infty\,;-1] \cup [3\,;+\infty[$.

EXERCICES RÉSOLUS

1 Se ramener à une équation produit nul

→ Cours 1. C

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $4(x-3)(x+2)-(x^2-9)=0$.

Solution

$4(x-3)(x+2)-(x^2-9)=0$ équivaut successivement à :
$4(x-3)(x+2)-(x+3)(x-3)=0$
$(x-3)[4(x+2)-(x+3)]=0$
$(x-3)(3x+5)=0$
$x-3=0$ ou $3x+5=0$
$x=3$ ou $x=-\frac{5}{3}$
L'ensemble des solutions est $\mathcal{S}=\left\{-\frac{5}{3}\,;\,3\right\}$.

Pour résoudre cette équation, on peut penser à développer mais on obtiendra une équation que l'on ne sait pas a priori résoudre : $3x^2-4x-15=0$.
En revanche, factoriser x^2-9 permet de faire apparaître un facteur commun et de se ramener à une équation produit nul.

2 Résoudre une équation avec inconnue au dénominateur

→ Cours 1. C

Résoudre l'équation $\frac{4x-1}{2x+1}=3$.

Solution

$2x+1=0$ équivaut à $x=-\frac{1}{2}$.
On résout donc l'équation dans $\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2}\right\}$.
Pour $x\neq-\frac{1}{2}$, $\frac{4x-1}{2x+1}=3$ équivaut, en multipliant chaque nombre par $2x+1$, à $4x-1=3(2x+1)$,
c'est-à-dire $4x-1=6x+3$.
Ainsi, $-2x=4$, c'est-à-dire $x=-2$.
L'ensemble des solutions est $\mathcal{S}=\{-2\}$.

Dans une équation, dès que l'inconnue apparaît au dénominateur, on détermine les « valeurs interdites », c'est-à-dire celles qui annulent ce dénominateur.
Ensuite on résout l'équation dans $\mathbb{R}$ privé de ces « valeurs interdites ».

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 1

3 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :
$$5(x-2)(2x+4)-(x^2-4)=0$$

4 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :
$$(3x-1)^2-4(3x-1)=0$$

5 On se propose de résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (**E**) :
$$(2x-1)(x+5)-3x(2x-1)=4x^2-1$$
a) Expliquer pourquoi cette équation est équivalente à $(2x-1)(-2x+5)-(4x^2-1)=0$.
b) Terminer la résolution de l'équation (**E**).

Sur le modèle de l'exercice résolu 2

6 Résoudre l'équation $\frac{2x-1}{x+2}=5$.

7 (**E**) est l'équation $\frac{2x^2+1}{x-1}-2x=0$.
Abdel : « Pour résoudre cette équation, je prends $x-1$ pour dénominateur commun. »
Célia : « Moi, j'écris $\frac{2x^2+1}{x-1}=2x$ et j'écris l'égalité des produits en croix. »
Utiliser chaque méthode pour résoudre l'équation (**E**).

EXERCICES RÉSOLUS

8 Comparer deux quantités

→ Cours 2. B

Pour tout nombre réel x et pour tout nombre entier naturel n, comparer :

a) $A = x^2 + \frac{1}{2}$ et $B = 2x - \frac{1}{2}$ **b)** $C = \frac{2^{n+1}}{7^{n+2}}$ et $D = \frac{2^n}{7^{n+1}}$

Solution

a) $A - B = \left(x^2 + \frac{1}{2}\right) - \left(2x - \frac{1}{2}\right) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$

Or, pour tout nombre réel x, $(x-1)^2 \geqslant 0$, donc $A - B \geqslant 0$, soit $A \geqslant B$.

b) Les puissances de 2 et de 7 sont strictement positives, donc pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $C > 0$ et $D > 0$.

$$\frac{C}{D} = \frac{\frac{2^{n+1}}{7^{n+2}}}{\frac{2^n}{7^{n+1}}} = \frac{2^{n+1}}{7^{n+2}} \times \frac{7^{n+1}}{2^n} = 2 \times \frac{1}{7} = \frac{2}{7}$$

Or $\frac{2}{7} \leqslant 1$, donc $\frac{C}{D} \leqslant 1$, soit $C \leqslant D$.

Pour comparer A et B, on peut étudier le signe de la différence $A - B$:
- si $A - B \geqslant 0$, alors $A \geqslant B$;
- si $A - B \leqslant 0$, alors $A \leqslant B$.

Pour comparer C et D, avec $C > 0$ et $D > 0$, on peut comparer le quotient $\frac{C}{D}$ à 1.

9 Résoudre une inéquation du type $\frac{ax+b}{cx+d} \leqslant 0$

→ Cours 2. C et 3. C

Résoudre l'inéquation $\frac{x+1}{-2x-1} \leqslant 0$.

Solution

$-2x - 1 = 0$ équivaut à $x = -\frac{1}{2}$, donc on résout l'inéquation dans $\mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

De plus, $x + 1 = 0$ équivaut à $x = -1$. D'où le tableau de signes :

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$-2x-1$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$\frac{x+1}{-2x-1}$		$-$	0	$+$	||	$-$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation est $\mathscr{S} =]-\infty\,;-1] \cup \left]-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$.

La « valeur interdite » $-\frac{1}{2}$ est représentée dans le tableau par une double barre sur la ligne « $\frac{x+1}{-2x-1}$ ».

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 8

10 Pour tout nombre réel x et pour tout nombre entier naturel n, comparer :

a) $A = x^2 - 3$ et $B = 2x - 4$

b) $C = \frac{5^{n+1}}{3^{n+2}}$ et $D = \frac{5^n}{3^{n+1}}$

Sur le modèle de l'exercice résolu 9

11 Résoudre l'inéquation $\frac{3x+1}{-x-2} \leqslant 0$ en utilisant un tableau de signes

12 Résoudre l'inéquation $\frac{-4x+1}{-x-5} \leqslant 0$.

EXERCICES RÉSOLUS

13 Se ramener à l'étude du signe d'un quotient

→ Cours 2. C et 3. C

Résoudre l'inéquation $x \geqslant \frac{1}{x}$.

Solution

$\frac{1}{x}$ n'existe que si $x \neq 0$. On résout donc l'inéquation dans $\mathbb{R}^*$.

Pour $x \neq 0$, l'inéquation est équivalente à $x - \frac{1}{x} \geqslant 0$, soit $\frac{x^2}{x} - \frac{1}{x} \geqslant 0$.

Cette inéquation équivaut à $\frac{x^2-1}{x} \geqslant 0$, c'est-à-dire $\frac{(x-1)(x+1)}{x} \geqslant 0$.

On dresse le tableau de signes de ce quotient.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{(x-1)(x+1)}{x}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

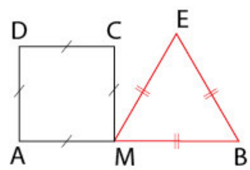
L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = [-1\,;0[\ \cup\ [1\,;+\infty[$.

Attention, **on ne peut pas** multiplier par x chaque membre de l'inéquation $x \geqslant \frac{1}{x}$ car le signe de x n'est pas constant.

14 Modéliser un problème à l'aide d'une inéquation

→ Cours 3. B

M est un point d'un segment [AB] de longueur 20. On construit un carré AMCD et un triangle équilatéral MBE comme indiqué ci-contre.
Pour quelles positions du point M sur le segment [AB] le périmètre $\mathcal{P}$ du carré est-il inférieur ou égal à celui $\mathcal{P}'$ du triangle ?



Solution

- **Choix de l'inconnue et mise en inéquation**

On note x la longueur du segment [AM] avec $0 \leqslant x \leqslant 20$.
$\mathcal{P} = 4x$ et $\mathcal{P}' = 3(20-x)$ donc $\mathcal{P} \leqslant \mathcal{P}'$ équivaut à $4x \leqslant 3(20-x)$.

- **Résolution de l'inéquation et conclusion**

Cette inéquation est équivalente à $4x + 3x < 60$, c'est à dire $7x \leqslant 60$, soit $x \leqslant \frac{60}{7}$.
$x \in [0\,;20]$ donc $\mathcal{P} \leqslant \mathcal{P}'$ si, et seulement si, M est un point du segment [AB] tel que $\text{AM} \leqslant \frac{60}{7}$.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 13

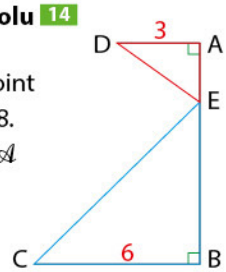
15 Résoudre l'inéquation $x \leqslant \frac{4}{x}$.

16 Résoudre chaque inéquation :

a) $\frac{(x+1)^2}{x} < x$ **b)** $\frac{2}{x-5} - 3 \geqslant 0$

Sur le modèle de l'exercice résolu 14

17 Sur cette figure, E est un point d'un segment [AB] de longueur 8.
Pour quelles positions de E l'aire $\mathcal{A}$ du triangle AED est-elle inférieure ou égale à l'aire $\mathcal{A}'$ du triangle BCE ?



Résolution d'une équation

→ Cours 1

Questions Flash

18 Associer chaque équation à son modèle.

A $2x+3=10$ **B** $x^2-9=0$

C $\dfrac{3x+1}{x-3}=0$ **D** $(x-1)(x+4)=0$

Modèles d'équations :

1 1er degré **2** Produit nul

3 Quotient nul **4** $x^2=a$

19 Kan affirme : « $-\dfrac{2}{3}$ est solution de chacune des équations : $-6x=4$, $\dfrac{3}{2}x=1$, $x^2=\dfrac{4}{9}$. »
Que peut-on en penser ?

20 Imaginer une équation admettant $-\sqrt{7}$, 1 et $\sqrt{7}$ comme solutions.

21 Résoudre dans $\mathbb{R}$ chaque équation.

a) $4x=\dfrac{1}{3}$ **b)** $\dfrac{2}{5}x=3$ **c)** $\dfrac{3}{7}x=\dfrac{2}{9}$

22 Dans chaque cas, indiquer si les équations données sont équivalentes.

a) $8x-3=-5x-4$ et $13x=-1$

b) $\dfrac{x-3}{2x-1}=0$ et $2x-1=0$

c) $x^2-16=0$ et $x=4$

23 Résoudre dans $\mathbb{R}$ chaque équation.

a) $(7x+14)(-x-3)=0$ **b)** $x^2-16=0$

c) $4x^2=9$ **d)** $x(x+1)(1-2x)=0$

24 Justifier algébriquement les résultats affichés par ce logiciel de calcul formel.

1 Résoudre$\left(\dfrac{2x-1}{3}=\dfrac{3x+5}{4}\right)$
→ $\{x=-19\}$

25 Résoudre dans $\mathbb{R}$ chaque équation.

a) $\dfrac{2x+1}{x-2}=0$ **b)** $\dfrac{(4x-5)^2}{x-2}=0$

c) $\dfrac{(x-5)(x+6)}{x-2}=0$ **d)** $\dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2}=0$

26 **a)** Les nombres 1 et -1 sont-ils des solutions de l'équation $x^3-x=0$?
b) Peut-on en déduire que l'ensemble des solutions de l'équation $x^3-x=0$ est $\mathcal{S}=\{1\,;-1\}$? Justifier.

Se ramener à une équation du 1er degré

→ Cours 1. C

Questions Flash

27 Victor affirme : « L'équation $x^2-5x=0$ admet 0 comme seule solution. »
Hanna affirme : « L'équation $x^2-5x=0$ est équivalente à $x(x-5)=0$. »
Que peut-on penser de ces affirmations ?

28 Dans chaque cas, donner la bonne réponse.

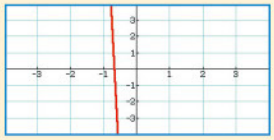
a) L'équation $\dfrac{2}{x}-3=0$ est équivalente à :

(1) $\dfrac{2-3x}{x}=0$ **(2)** $\dfrac{-1}{x}=0$ **(3)** $x=2$

b) L'équation $\dfrac{5x}{x-3}=1$ est équivalente à :

(1) $5x=1$ ou $x-3=1$;
(2) $5x=1$ et $x-3\neq 0$;
(3) $4x+3=0$ et $x-3\neq 0$.

29 Alban a affiché la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto (x-12)(3x+2)$ à l'écran de sa calculatrice.



Il affirme : « L'équation $f(x)=0$ admet une seule solution $-0{,}6$. » Cette affirmation est-elle exacte ?

30 Pour tout nombre réel x, on donne l'expression :

$$\mathrm{E}(x)=(3x-7)+(3x-7)(2x-4)$$

a) Factoriser $\mathrm{E}(x)$.
b) En déduire la résolution de l'équation $\mathrm{E}(x)=0$.

31 Résoudre chaque équation dans $\mathbb{R}$ en se ramenant à une équation du 1er degré ou « produit nul ».

a) $(2x-1)(x+3)-(2x-1)(3x-1)=0$

b) $(x-2)(x+3)=(x-5)(x+1)$

c) $5x^2=3x$ **d)** $(x-1)^2-(x-2)^2=0$

32 Justifier algébriquement les résultats affichés par ce logiciel de calcul formel.

1 Simplifier$\left(\dfrac{4x-7}{2x-1}-9\right)$
→ $-\dfrac{(14x-2)}{2x-1}$

2 Résoudre$\left(\dfrac{4x-7}{2x-1}=9\right)$
→ $\left\{x=\dfrac{1}{7}\right\}$

33 Résoudre chaque équation.

a) $\dfrac{-3x+1}{x-5}=1$ **b)** $\dfrac{3-x}{x+7}=2$

34 (E) est l'équation $\dfrac{x-3}{x-1}=\dfrac{x-5}{x-2}$.

Yann : « Je résous $\dfrac{x-3}{x-1}-\dfrac{x-5}{x-2}=0$ en réduisant au même dénominateur. »

Gaëlle : « Moi, j'écris l'égalité des produits en croix. »

Résoudre l'équation (E) avec chacune de ces méthodes.

35 On se propose de résoudre de deux façons l'équation (E) : $(x-2)^2=9$.

1. Méthode de Raphaël

a) Justifier que l'équation (E) est équivalente à :

$$x-2=3 \text{ ou } x-2=-3$$

b) En déduire la résolution de l'équation (E).

2. Méthode de Carla

a) Factoriser $(x-2)^2-9$.

b) En déduire la résolution de l'équation (E).

36 Algo Chloé a écrit la fonction ci-contre en langage Python.

```python
def f(x):
    y=(x-3)**2-49
    return y
```

Pour quelles valeurs du paramètre x la fonction renvoie-t-elle 0 ?

37 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=(x-5)^2-36 \quad \textbf{(1)}$$

1. Prouver que pour tout nombre réel x :

a) $f(x)=x^2-10x-11$ **(2)**

b) $f(x)=(x-11)(x+1)$ **(3)**

2. Résoudre chaque équation en utilisant celle des formes **(1)**, **(2)** ou **(3)** qui est la plus adaptée.

a) $f(x)=0$ **b)** $f(x)=-36$

c) $f(x)=-11$ **d)** $f(x)=-10x$

38 Parmi toutes les expressions de $A(x)$ (qu'on ne demande pas de justifier) obtenues à l'aide d'un logiciel de calcul formel, choisir celle qui est la mieux adaptée pour résoudre chaque équation.

(1) $A(x)=0$ **(2)** $A(x)=-12$ **(3)** $A(x)=4x^2$

1	A(x):=4(x-1)²-16 → **A(x) := 4 x² − 8 x − 12**
2	Factoriser(A(x)) → **4 (x − 3) (x + 1)**
3	Développer(A(x)+12) → **4 x² − 8 x**
4	Factoriser(A(x)+12) → **4 x (x − 2)**

Inégalités et comparaisons

→ Cours 2

Questions flash

39 x et y désignent deux nombres réels tels que $x \leqslant y$. Lire et compléter oralement avec $\leqslant$ ou $\geqslant$.

a) $-3x \ldots -3y$ **b)** $x+3 \ldots y+3$ **c)** $\dfrac{x}{3} \ldots \dfrac{y}{3}$

40 Quel est le signe du produit P tel que :
$P=(-2)\times 3\times(-4)\times 5\times(-6)\times\ldots\times(-2020)$?

41 Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse. Justifier.

Pour tous nombres réels a et b :

(1) $(a^2+2)\times(b^2+7)$ est strictement positif ;

(2) si $a<b$, alors $\dfrac{a-b}{a^2+4}$ est positif ;

(3) $(a-2)^2(b^2-8)$ est positif ;

(4) $\dfrac{(a-b)^2}{a^2+b^2+2}$ est positif.

42 a et b désignent deux nombres réels tels que $a \leqslant b$. Dans chaque cas, comparer les nombres :

a) $6a-12$ et $6b-12$ **b)** $-a$ et $-b$

c) $\dfrac{-3a+1}{5}$ et $\dfrac{-3b+1}{5}$

43 x et y désignent deux nombres réels tels que :

$$-2 \leqslant x \leqslant 6 \text{ et } 1 \leqslant y \leqslant 4$$

Justifier que :

a) $-1 \leqslant x+y \leqslant 10$ **b)** $-1 \leqslant 2x+3y \leqslant 24$

c) $-4 \leqslant -y \leqslant -1$ **d)** $-6 \leqslant x-y \leqslant 5$

44 f et g sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=x^2-3x+1 \text{ et } g(x)=x^2+x+3$$

a) Montrer que si $2 \leqslant x \leqslant 5$, alors $-10 \leqslant f(x) \leqslant 20$.

b) Montrer que si $-3 \leqslant x \leqslant -1$, alors $1 \leqslant g(x) \leqslant 11$.

45 x désigne un nombre réel tel que $0 \leqslant x \leqslant 1$.
Justifier que $x^2 \leqslant x$. En déduire que $x^3 \leqslant x$.

46 x désigne un nombre réel tel que $0 \leqslant x < 1$.

a) Justifier que $1+x-\dfrac{1}{1-x}=\dfrac{x^2}{x-1}$.

b) Peut-on conclure que $1+x \leqslant \dfrac{1}{1-x}$?

47 a désigne un nombre réel strictement positif.
Comparer les deux nombres $\sqrt{a}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{a}}$ en étudiant leur quotient dans chaque cas : **a)** $a \leqslant 1$ **b)** $a > 1$.

48 n désigne un nombre entier naturel non nul.

On pose $A = \dfrac{0{,}9^n}{n}$ et $B = \dfrac{0{,}9^{n+1}}{n+1}$.

a) Montrer que $\dfrac{B}{A} = 0{,}9\dfrac{n}{n+1}$.

b) Justifier que $\dfrac{n}{n+1} \leqslant 1$.

c) Pour tout nombre $n \geqslant 1$, comparer alors A et B.

Résolution d'une inéquation

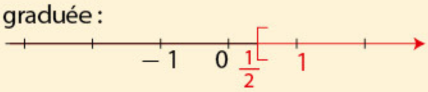
→ Cours 3

Questions flash

49 En calculant mentalement, indiquer si -1 est une solution de chaque inéquation.

a) $\dfrac{x-1}{2x+1} \geqslant 0$ **b)** $x^2 \geqslant 4$

50 Romane a représenté l'ensemble des solutions de l'inéquation $-2x+1 \geqslant 0$ à l'aide d'une droite graduée :



Que penser de cette représentation ?

51 Résoudre dans $\mathbb{R}$ chaque inéquation et représenter l'ensemble des solutions sur une droite graduée.

a) $2x - 8 \leqslant -3x - 10$ **b)** $-6x + 1 > 4x + 9$

52 Voici le tableau de signes d'une expression $f(x)$.

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse. Justifier.

a) $f(-8{,}5) < 0$ **b)** $f(2) > 0$ **c)** $f(0) < f(5)$

d) L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) < 0$ est $]-\infty\,;-4[\ \cup\ ]1\,;+\infty[$.

53 **a)** Recopier et compléter le tableau de signes suivant, sans omettre les zéros.

x	$-\infty$		1		…		$+\infty$
$2x-5$		…		…	0	…	
$-x+1$		…	0	…		…	
$(2x-5)(-x+1)$		…		…		…	

b) Écrire une inéquation qui peut être résolue grâce à ce tableau et donner son ensemble des solutions.

54 **a)** Recopier et compléter le tableau de signes suivant, sans omettre les zéros.

x	$-\infty$		-3		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
$x+\ldots$		…	0	…		…	
$\ldots x+1$		…		…	0	…	
$(x+\ldots)(\ldots x+1)$		…		…		…	

b) Écrire une inéquation qui peut être résolue grâce à ce tableau et donner son ensemble des solutions.

55 Utiliser un tableau de signes pour résoudre l'inéquation $(4+x)(x+2) < 0$.

56 Résoudre dans $\mathbb{R}$ chaque inéquation.

a) $(2x-6)(-x+1) \leqslant 0$ **b)** $(-3x-4)(-x-5) > 0$

57 **a)** Recopier et compléter ce tableau de signes.

x	$-\infty$		…		…		$+\infty$
$5x+2$		…	0	…		…	
$1-3x$		…		…	0	…	
$\dfrac{5x+2}{1-3x}$		…	0	…	‖	…	

b) Résoudre l'inéquation $\dfrac{5x+2}{1-3x} \leqslant 0$.

58 Utiliser un tableau de signes pour résoudre l'inéquation $\dfrac{-2x-5}{x+2} < 0$.

59 Résoudre chaque inéquation.

a) $\dfrac{-4x-1}{-x+1} \geqslant 0$ **b)** $\dfrac{x-1}{-6x+1} \geqslant 0$

Se ramener à une inéquation d'un type connu

→ Cours 3. C

Questions flash

60 Noah affirme : « Je peux simplifier par x chaque membre de l'inéquation $x(x+1) \geqslant 3x$, j'obtiens $x+1 \geqslant 3$. » Que peut-on en penser ?

61 Trouver au moins une erreur dans ce tableau de signes.

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$\dfrac{x+2}{x-2}$		$-$	0	$+$	‖	$-$	

62 **1.** Factoriser chaque expression.

a) $2x^2+3x$ **b)** $3(x-1)+(x-1)(x+2)$

2. En déduire la résolution de chaque inéquation.

a) $2x^2+3x<0$ **b)** $3(x-1)+(x-1)(x+2)>0$

63 Justifier algébriquement le résultat affiché par un logiciel de calcul formel.

1 Résoudre$(x^2>49)$
→ $\{x<-7, x>7\}$

64 **a)** Montrer que pour tout nombre réel x, différent de -1, $\dfrac{2x-1}{x+1}+2=\dfrac{4x+1}{x+1}$.

b) En déduire la résolution de l'inéquation :

$$\frac{2x-1}{x+1}+2\geqslant 0$$

65 Justifier algébriquement le résultat affiché par un logiciel de calcul formel.

1 Résoudre$\left(\dfrac{x^2-25}{x+1}\geq 0\right)$
→ $\{-5\leq x<-1, x\geq 5\}$

Modéliser et résoudre un problème

→ Cours 1 et 3

Questions Flash

66 $[AB]$ est un segment de longueur 8.
M est un point mobile du segment $[AB]$.
On note x la longueur AM.

a) Quelles sont les valeurs possibles de x ?

b) Exprimer BM en fonction de x.

67 Une mère a 30 ans de plus que son fils. Dans cinq ans, elle aura le double de l'âge de son fils.
Voici la production de Karen :

x est l'âge du fils, et on a : $x+30=2(x+5)$.

Cette équation traduit-elle la situation ?

68 On souhaite trouver trois nombres entiers consécutifs dont la somme est égale à 2 019.

a) Traduire le problème posé à l'aide d'une équation.

b) Résoudre l'équation et conclure.

69 Si on augmente de 2 m la longueur du côté d'un carré, l'aire augmente de 20 m^2.
Quelle est l'aire, en m^2, de ce carré ?

70 Un père de 41 ans a trois enfants âgés de 6 ans, 9 ans et 12 ans.
Dans combien d'années l'âge du père sera-t-il égal à la somme des âges de ses enfants ?

71 Ce trimestre, Laure a obtenu les notes suivantes en SVT.

Note	14	17	18	16
Coefficient	3	2	1	2

Elle souhaite calculer la note qu'elle doit obtenir au dernier contrôle, coefficient 2, pour avoir une moyenne trimestrielle de 16 en SVT.
On note x la note cherchée (avec $0\leqslant x\leqslant 20$).

a) Justifier que le problème se traduit par l'équation :

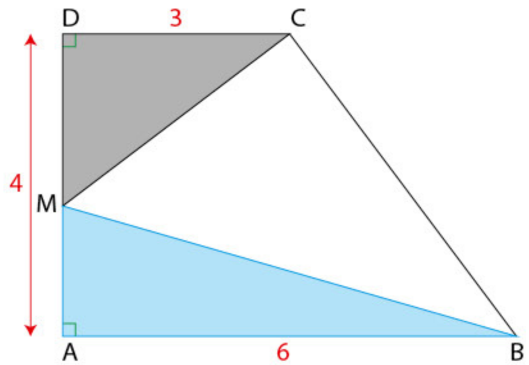
$$\frac{126+2x}{10}=16$$

b) Résoudre cette équation et conclure.

72 ABCD est un trapèze rectangle tel que :

$$AB=6,\quad AD=4\quad \text{et}\quad CD=3$$

M est un point mobile du segment $[AD]$.



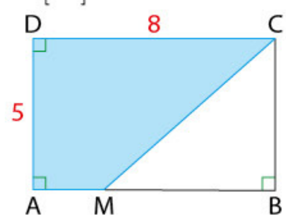
On se propose de déterminer la position du point M tel que les aires des triangles ABM et MCD sont égales.
On note x la distance AM (avec $0\leqslant x\leqslant 4$).

a) Justifier que le problème peut se traduire par :

$$\frac{6x}{2}=\frac{3(4-x)}{2}$$

b) Résoudre l'équation et conclure.

73 ABCD est un rectangle tel que $AB=8$ et $AD=5$.
M est un point mobile du côté $[AB]$.
Pour quelle position du point M l'aire du trapèze AMCD est-elle supérieure ou égale au triple de l'aire du triangle BCM ?



QCM interactifs

Pour se tester

74 Dans chaque cas, donner la réponse exacte sans justifier.

		A	B	C	D
1	L'équation : $(x-4)(x+3)=0$ admet pour ensemble des solutions …	$\{3\ ;\ 4\}$	$\{-3\ ;-4\}$	$\{-3\ ;\ 4\}$	$\{3\ ;-4\}$
2	L'équation $\dfrac{2x+2}{x-5}=0$ admet pour ensemble des solutions …	$\{-1\ ;\ 5\}$	$\{5\}$	$\left\{-\dfrac{2}{5}\right\}$	$\{-1\}$
3	L'équation $x^2-81=0$ …	admet une seule solution : 9	admet exactement deux solutions	n'admet pas de solution	est équivalente à $(x-9)^2=0$
4	L'ensemble des solutions de l'inéquation $-3x-2<2x-1$ est …	$\left]-\infty\ ;\dfrac{1}{5}\right[$	$\left]\dfrac{1}{5}\ ;+\infty\right[$	$\left]-\infty\ ;-\dfrac{1}{5}\right[$	$\left]-\dfrac{1}{5}\ ;+\infty\right[$

75 Dans chaque cas, donner la (ou les) réponse(s) exacte(s) sans justifier.

		A	B	C	D
1	L'équation $x^2=x$ …	est équivalente à $x=1$	est équivalente à $x(x-1)=0$	admet au moins une solution	admet exactement deux solutions
2	a et b désignent deux nombres réels tels que $a \leqslant b$. Alors …	$-2a \geqslant -2b$	$a^2 \leqslant b^2$	$\dfrac{a}{4} \leqslant \dfrac{b}{4}$	$\dfrac{a-b}{a^2+b^2+1} \leqslant 0$
3	L'inéquation $x^2 \leqslant 4$ …	est équivalente à $(x-2)(x+2) \geqslant 0$	est équivalente à $x \leqslant 2$	admet comme ensemble des solutions $[-2\ ;\ 2]$	est équivalente à $x \leqslant -2$
4	D'après ce tableau de signes … x : $-\infty$ -4 2 $+\infty$ $B(x)$: $-$ 0 $+$ 0 $-$	$B(-5)<B(1)$	$B(-2)\times B(1)$ est positif	$\dfrac{B(-8)}{B(4)}$ est négatif	$B(-1)<B(3)$

76 Dans chaque cas, dire si l'affirmation est vraie ou fausse en justifiant.

Avec un logiciel de calcul formel, on a obtenu l'affichage ci-contre.

1	E(x):=(x-1)²-4 → $E(x) := x^2 - 2x - 3$
2	Factoriser(E(x)) → $(x-3)\ (x+1)$

Affirmations :

1 L'expression la plus adaptée pour résoudre algébriquement l'équation $E(x)=0$ est la forme développée.

2 L'équation $E(x)=0$ admet exactement deux solutions.

3 L'équation $E(x)=-4$ admet une seule solution.

4 L'équation $E(x)=-3$ admet une seule solution.

Vérifiez vos réponses : p. 346

Nathan live!

77 Analyser une production et résoudre une équation

Yanis a rédigé la résolution de l'équation $(x+1)(x+3)=3$.

$(x+1)(x+3)=3$ équivaut à $x+1=3$ ou $x+3=3$,
$x=3-1=2$ ou $x=3-3=0$.

a) Quelle erreur a-t-il commise ?

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(x+1)(x+3)=3$.

AIDE

b) L'équation est équivalente à $(x+1)(x+3)-3=0$.
Est-il préférable de factoriser ou de développer ?

78 Résoudre une inéquation du 1^er^ degré

a) Voici la production de Susana qui devait résoudre l'inéquation $-2x+3 \leqslant 4x+1$.

$-2x+3 \leq 4x+1$ soit $-2x-4x \leq 1-3$
$-6x \leq -2$ c'est-à-dire $x \leq \dfrac{-2}{6}$.

Corriger les erreurs entourées en rouge et conclure.

b) Résoudre l'inéquation $-6x+3 \geqslant -3x+1$.

AIDE

On divise chaque membre d'une inégalité par un nombre non nul : s'il est positif, on ne change pas le sens de l'inégalité, s'il est négatif, on change le sens.

79 Compléter un tableau de signes

Voici un tableau de signes incomplet.

x	$-\infty$		...		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		...	0	...		...	
$(x-1)(x+2)$		...	0	...	0	...	

a) Justifier les signes sur la ligne du facteur $x-1$.

b) Reproduire le tableau et le compléter.

c) Imaginer une inéquation que ce tableau permet de résoudre.

AIDE

Pour déterminer le signe de $ax+b$ $(a \neq 0)$:
- on résout l'équation $ax+b=0$,
- puis on observe le signe de a :

– si a est positif on écrit « $-$ puis 0 puis $+$ » ;
– si a est négatif on écrit « $+$ puis 0 puis $-$ ».

80 Résoudre une inéquation quotient

Mattéo a commencé le tableau de signes ci-dessous.

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$2-x$		...		...	0	...	
$\dfrac{x+3}{2-x}$		...	0	$+$	‖	...	

a) Reproduire le tableau et compléter les signes manquants.

b) Que signifie la double barre ?

c) En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation $\dfrac{x+3}{2-x} \leqslant 0$.

AIDE

a) Le signe d'un quotient $\dfrac{a}{b}$ (avec $b \neq 0$) est le même que celui du produit $a \times b$.

S'entraîner Algo

EXERCICE RÉSOLU

81 Comparer des tarifs

Une société de diffusion cinématographique par Internet propose à ses clients deux formules d'abonnement annuel pour regarder une grande variété de films en streaming.

Formule A : abonnement 30 € et 1,40 € par film visionné.

Formule B : abonnement 20 € et 1,50 € par film visionné.

a) Dans l'algorithme ci-contre, x est le nombre de films visionnés.

Que représentent les variables a et b pour cette situation ?

```
a ← 30 + 1,4x
b ← [          ]
Si [          ] alors
  | Afficher "Les deux formules sont au même prix"
  sinon
  Si [          ] alors
    | Afficher "La formule A est plus avantageuse"
    sinon
    | Afficher "[                              ]"
  Fin Si
Fin Si
```

b) Compléter les cases de l'algorithme afin qu'il affiche la formule la moins chère selon le nombre de films visionnés.

c) Déterminer algébriquement le nombre minimum de films qui rend la formule A la plus avantageuse.

Solution

a) a représente le coût de x visionnages avec la formule A.

b représente le coût de x visionnages avec la formule B.

b) **Case rouge** : $20 + 1{,}5x$ **Case bleue** : $a = b$

Case verte : $a < b$ **Case noire** : La formule B est plus avantageuse

c) Dire que la formule A est plus avantageuse que la formule B signifie que $a < b$.

Répondre à cette question revient donc à résoudre l'inéquation $30 + 1{,}4x < 20 + 1{,}5x$.

Elle équivaut à $-0{,}1x < -10$, soit $x > \dfrac{-10}{-0{,}1}$. Or, $\dfrac{-10}{-0{,}1} = 100$, donc la formule A est plus avantageuse à partir de 101 films visionnés.

À VOTRE TOUR

82 Le montant à payer pour une facture annuelle de gaz se calcule en ajoutant l'abonnement au prix du nombre de kilowattheure (kWh) consommés.

Deux fournisseurs de gaz proposent les tarifs suivants :

	Abonnement	Prix du kWh
Fournisseur A	268,36	0,059
Fournisseur B	212,44	0,061

Dans l'algorithme ci-contre, x représente le nombre de kWh consommés.

```
a ← 268,36 + 0,059x
b ← [          ]
Si [          ] alors
  | Afficher "Les deux fournisseurs sont au même prix"
  sinon
  Si [          ] alors
    | Afficher "Le fournisseur A est plus avantageux"
    sinon
    | Afficher "[                              ]"
  Fin Si
Fin Si
```

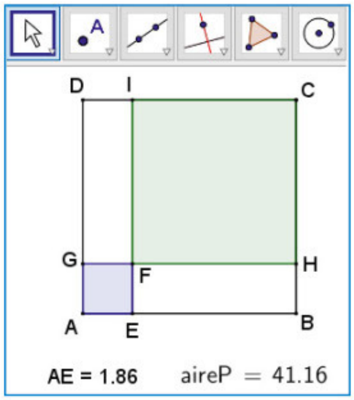
a) Recopier et compléter cet algorithme afin qu'il affiche le nom du fournisseur le moins cher selon la consommation de gaz.

b) Déterminer algébriquement la consommation minimum pour laquelle le tarif du fournisseur A est le plus avantageux.

EXERCICE RÉSOLU

83 Résoudre une inéquation pour démontrer

ABCD est un carré de côté 8.
E est un point mobile du côté [AB].
F, G, H, I sont des points tels que AEFG et FHCI sont deux carrés intérieurs à ABCD comme indiqué ci-contre.
On note $\mathcal{P}$ le polygone formé par les deux carrés intérieurs.
1. a) Réaliser la figure avec un logiciel de géométrie en affichant la distance AE et l'aire de $\mathcal{P}$.
b) Déplacer le point E puis formuler une conjecture sur la valeur minimum de l'aire de $\mathcal{P}$.
2. Prouver cette conjecture.



Solution

1. a) b) On conjecture que la valeur minimum de l'aire de $\mathcal{P}$ est égale à 32, avec E situé au milieu du côté [AB].
2. On note x la longueur AE avec $0 \leqslant x \leqslant 8$.
L'aire du carré AEFG est égale à x^2.
$EB = 8 - x$ donc l'aire du carré FHCI est égale à $(8-x)^2$.
On note $\mathcal{A}(x)$ l'aire du polygone $\mathcal{P}$, ainsi :

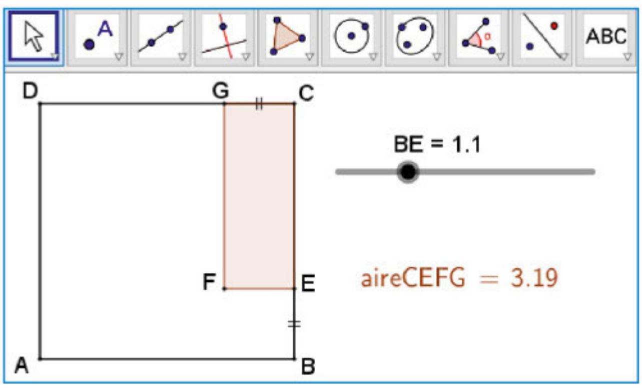
$$\mathcal{A}(x) = x^2 + (8-x)^2$$

La conjecture se traduit par $\mathcal{A}(x) \geqslant 32$.
$x^2 + (8-x)^2 \geqslant 32$ équivaut à $x^2 + 64 - 16x + x^2 \geqslant 32$,
soit $2x^2 - 16x + 32 \geqslant 0$, c'est-à-dire $x^2 - 8x + 16 \geqslant 0$.
Ainsi, $\mathcal{A}(x) \geqslant 32$ équivaut à $(x-4)^2 \geqslant 0$.
Or, l'inégalité $(x-4)^2 \geqslant 0$ est vraie pour tout nombre réel x de $[0\,;\,8]$,
donc la conjecture est démontrée :
pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;8]$, $\mathcal{A}(x) \geqslant 32$ et 32 est la valeur minimum de l'aire du polygone $\mathcal{P}$ lorsque E décrit le côté [AB].

> La variable aireP donne l'aire du polygone $\mathcal{P}$; elle est définie par $AE^2 + FH^2$.

À VOTRE TOUR

84 ABCD est un carré de côté 4.
E est un point mobile du côté [BC] et G est un point du côté [CD] tels que $BE = CG$.
F est le quatrième sommet du rectangle CEFG.
1. a) Avec un logiciel de géométrie, créer un curseur représentant la longueur BE, allant de 0 à 4 avec un incrément de 0,1.
Réaliser cette figure et afficher l'aire du rectangle CEFG.
b) Déplacer le point E puis formuler une conjecture sur la valeur maximum de l'aire du rectangle CEFG.
2. Prouver cette conjecture.



Démontrer et raisonner

85 Choisir l'inconnue

Méthode
Le choix de l'inconnue dans la résolution d'un problème doit conduire à une résolution simple de l'équation traduisant la situation. Il ne faut pas hésiter à revenir sur le choix de l'inconnue si l'équation est complexe à résoudre.

On souhaite trouver deux nombres connaissant leur somme 60 et leur produit 836.

1. On note x et y les deux nombres cherchés.

a) Justifier que $x+y=60$ et $xy=836$.

b) En déduire que x vérifie l'équation :

$$-z^2+60z-836=0$$

Malheureusement, on ne sait pas encore résoudre algébriquement ce type d'équation.

2. Comme la somme des deux nombres cherchés est 60, on les note $30-a$ et $30+a$ (avec a nombre réel).

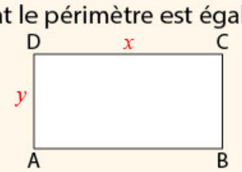
a) Traduire l'énoncé du problème par une équation dont a est solution.

b) Répondre au problème posé.

86 Démontrer une inégalité

Méthode
Pour démontrer une inégalité valable pour tout nombre réel x d'un intervalle I, on peut montrer que l'ensemble des solutions d'une inéquation est l'intervalle I.

ABCD est un rectangle de côtés x et y (avec $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$) dont le périmètre est égal à 2.



On souhaite démontrer que l'aire $\mathcal{A}$ du rectangle ABCD est inférieure ou égale à $\frac{1}{4}$.

1. a) Justifier que x et y sont inférieurs ou égaux à 1.

b) Expliquer pourquoi $\mathcal{A}=x(1-x)$.

2. a) Résoudre l'inéquation $x(1-x)-\frac{1}{4} \leqslant 0$ en remarquant que $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=x^2-x+\frac{1}{4}$.

b) Conclure.

87 Tice Rechercher un minimum

Méthode
Pour déterminer des nombres x et y de produit xy constant et dont la somme $x+y$ est minimum, on peut utiliser l'identité :

$$(x+y)^2-(x-y)^2=4xy$$

On souhaite étudier l'existence de rectangles d'aire 36 cm^2 dont le périmètre est minimum.

a) Avec un logiciel de géométrie, créer un curseur a qui représente la longueur d'un segment $[AB]$, puis créer un rectangle ABCD d'aire 36 et afficher son périmètre.

b) Émettre une conjecture sur la caractéristique des rectangles d'aire 36 dont le périmètre est minimum.

c) Démontrer cette conjecture.

Résoudre algébriquement une équation

88 Transformer chaque équation en une équation produit nul puis la résoudre.

a) $(6x+1)x=(3x+2)(6x+1)$

b) $(2x-1)^2=(x+2)^2$

c) $3x(x^2+1)=x^2(x^2+1)$

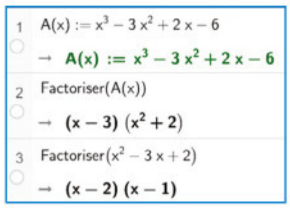
89 Résoudre chaque équation.

a) $(x+3)(x+2)+x^2+4x+4=0$

b) $x^2+6x+9=x(x-4)$

c) $(2x-1)(x+5)=4x^2-1$

90 Parmi les expressions suivantes, obtenues avec un logiciel de calcul formel, choisir les plus adaptées pour résoudre les équations $A(x)=0$ et $A(x)=-6$.

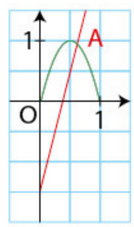

1 A(x) := x³ − 3 x² + 2 x − 6
→ **A(x) := x³ − 3 x² + 2 x − 6**
2 Factoriser(A(x))
→ **(x − 3) (x² + 2)**
3 Factoriser(x² − 3 x + 2)
→ **(x − 2) (x − 1)**

91 f et g sont les fonctions définies sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ par :

$f(x)=1-(2x-1)^2$ et $g(x)=4x-\frac{3}{2}$

Dans ce repère, voici les courbes représentatives des fonctions f et g.

Déterminer les coordonnées du point d'intersection A des deux courbes.



92 **a)** Montrer que pour tout nombre réel x, avec $x \neq -2$, $x - 2 - \dfrac{5}{x+2} = \dfrac{x^2-9}{x+2}$.

b) En déduire la résolution de l'équation :

$$x - 2 = \frac{5}{x+2}$$

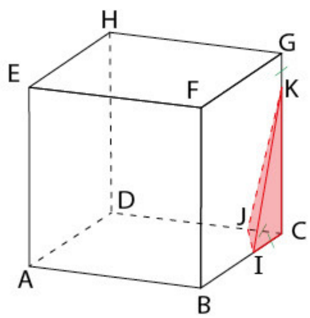
93 **a)** Vérifier que pour tout nombre réel x :

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x-2)(x^2-1)$$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$$

94 ABCDEFGH est un cube d'arête 8 cm.
I, J, K sont des points situés respectivement sur les côtés [BC], [CD] et [CG], tels que $CI = CJ = GK$.
On note x la longueur CI, en cm, (avec $0 \leqslant x \leqslant 8$).



a) Justifier que le volume $V(x)$, en cm^3, du tétraèdre CIJK s'exprime par $V(x) = \dfrac{x^2}{6}(8-x)$.

b) Justifier algébriquement les résultats affichés par ce logiciel de calcul formel.

1	Développer$\left((x-1)^2 - 13\right)$
	$\rightarrow\ x^2 - 2x - 12$
2	Factoriser$\left(\dfrac{x^2}{6}(8-x) - 12\right)$
	$\rightarrow\ -(x-6)\ \dfrac{x^2-2x-12}{6}$

c) Déterminer les valeurs de x pour lesquelles le volume du tétraèdre CIJK est égal à 12 cm^3.

95 On considère l'équation (**E**) : $\dfrac{2x+1}{2x-1} = \dfrac{x+3}{x+1}$.

a) Justifier que $\dfrac{1}{2}$ et -1 ne peuvent pas être des solutions de (**E**).

b) Montrer que pour $x \neq -1$ et $x \neq \dfrac{1}{2}$, l'équation (**E**) est équivalente à $(2x+1)\times(x+1) = (x+3)\times(2x-1)$

c) En déduire la résolution de l'équation (**E**).

Résoudre algébriquement une inéquation

96 Transformer chaque inéquation en une inéquation produit équivalente puis la résoudre.

a) $x^2 \leqslant 3x$ **b)** $(3x+1)x \leqslant (3x+1)(6x+1)$

c) $(x-1)(2x+4) \leqslant x^2 - 1$

97 Pour tout nombre réel x, on considère l'expression $A(x) = (1+x)^2 - (3x+2)(x+1)$.

a) Développer, réduire et ordonner $A(x)$.

b) Factoriser $A(x)$.

c) Choisir la forme de $A(x)$ la plus adaptée pour résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations suivantes :

- $A(x) \leqslant 0$
- $A(x) \geqslant -1$

98 Justifier algébriquement les résultats ci-contre proposés par ce logiciel de calcul formel.

1	Simplifier$\left(\dfrac{x-3}{x+4} - 3\right)$
	$\rightarrow\ -\dfrac{2x+15}{x+4}$
2	Résoudre$\left(\dfrac{x-3}{x+4} < 3\right)$
	$\rightarrow\ \left\{-\dfrac{15}{2} > x, x > -4\right\}$

99 **a)** Montrer que pour tout nombre réel x différent de 0 et 1, $\dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{x-1} = \dfrac{4x-1}{x(x-1)}$.

b) En déduire la résolution de $\dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{x-1} \geqslant 0$.

100 Algo Voici un programme, écrit en langage Python, destiné à afficher l'ensemble des solutions d'une inéquation du type $ax + b > 0$ (avec $a \neq 0$).

```
a=float(input("a ="))
b=float(input("b ="))
c=-b/a
if [    ]:
    print("Les solutions sont les réels x >",c)
else:
    print([                              ])
```

Compléter les cadres rouge et vert du programme.

101 Voici deux tableaux de signes.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$(x-1)(x-3)$		+	0	−	0	+	

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$(x-2)(x-4)$		+	0	−	0	+	

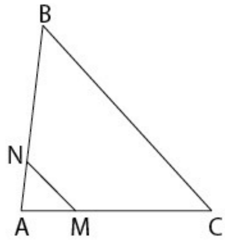
a) En déduire le tableau de signes de $\dfrac{(x-1)(x-3)}{(x-2)(x-4)}$.

b) Résoudre l'inéquation $\dfrac{(x-1)(x-3)}{(x-2)(x-4)} \leqslant 0$.

Résoudre un problème

102 Trouver deux nombres entiers tels que leur différence est égale à 90 et leur quotient est égal à $\frac{5}{2}$.

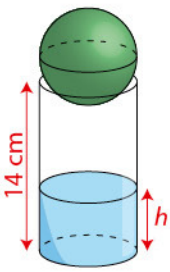
103 M est un point du segment [AC] tel que AM = 4 cm et MC = 10 cm.
[AB] est un segment de longueur variable.
N est le point du segment [AB] tel que les droites (MN) et (BC) sont parallèles.
De plus, NB = 9 cm.
On note AN = x (avec $x > 0$).



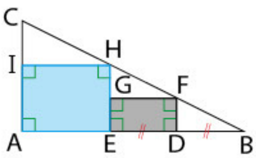
a) Expliquer pourquoi $\frac{x}{x+9} = \frac{2}{7}$.
b) En déduire la longueur AN.

104 Quel même nombre entier x faut-il ajouter au numérateur et dénominateur de la fraction $\frac{3}{7}$ pour obtenir $\frac{7}{3}$?

105 Un cylindre a pour rayon 5 cm et pour hauteur 14 cm.
Une boule a pour rayon 5 cm.
Quelle hauteur d'eau maximum h, en cm, le cylindre doit-il contenir pour que, en plongeant la boule dans ce récipient, l'eau ne déborde pas ?

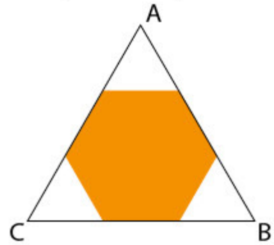


106 ABC est un triangle rectangle en A tel que AB = 10 et AC = 5.
D et E sont des points du segment [AB], distincts de B et A, tels que BD = DE.



H et F sont deux points du côté [BC] et I est un point du côté [AC] tels que EDFG et AEHI sont deux rectangles comme indiqués sur la figure.
On se propose de déterminer les positions du point D pour lesquelles l'aire $\mathcal{A}_1$ du rectangle EDFG est strictement supérieure à l'aire $\mathcal{A}_2$ du rectangle AEHI.
On note x la distance BD.
1. a) Justifier que $0 < x < 5$.
b) Exprimer DF puis EH en fonction de x.
c) Exprimer $\mathcal{A}_1$ puis $\mathcal{A}_2$ en fonction de x.
2. Résoudre le problème posé.

107 Trois triangles équilatéraux identiques sont découpés dans les coins d'un triangle ABC équilatéral de côté 6 cm.
Loan prétend que « la somme des périmètres des trois petits triangles équilatéraux est égale au périmètre de l'hexagone orange ».



Cette affirmation est-elle exacte ? Justifier.

108 **1.** On considère le nombre a défini par :
$a = 1{,}232\,323\ldots$ tel que la période 23 se reproduit sans cesse.
a) Justifier que a est solution de l'équation :
$$100x = 122 + x$$
b) En déduire une écriture fractionnaire de a.
2. Donner une écriture fractionnaire de :
$$b = 12{,}345\,345\,345\ldots$$

109 Déterminer cinq nombres entiers naturels consécutifs dont la somme des carrés des trois plus petits est égale à la somme des carrés des deux plus grands.

S'entraîner à la logique → p. XXI

110 **Propositions vraies ou fausses**

Dans chaque cas, dire si l'affirmation est vraie ou fausse. Justifier.
Pour tous nombres réels a, b, c, et d :
a) si $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$, alors $a - c \leqslant b - d$;
b) si $2a - 2 \leqslant 2$ et $11 - 3b \leqslant 2$, alors $a \leqslant b$.

111 **Exemples et contre-exemples**

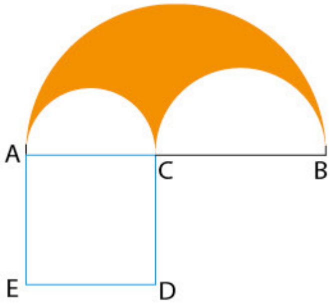
Dire si chaque affirmation est vraie ou fausse et justifier à l'aide d'un exemple ou d'un contre-exemple.
a) Pour tout nombre réel x, $(x - 5)(-2x + 10) < 0$.
b) Il existe un nombre réel x tel que $\frac{x-1}{x-1{,}5} < 0$.
c) Pour tout nombre réel x, $x^2 - 6x + 9 \geqslant 1$.

112 **Implication et réciproque**

Pour chaque implication, dire si elle est vraie puis énoncer sa réciproque et dire si elle est vraie.
a) Si $x = 0$ ou $x = 3$, alors $x^3 - 9x = 0$.
b) Si $x^2 \geqslant 1$, alors $x \geqslant 1$.
c) Si $x \in [0\ ;\ 8]$, alors $\frac{x-1}{-x+6} > 0$.

113 Imaginer une stratégie

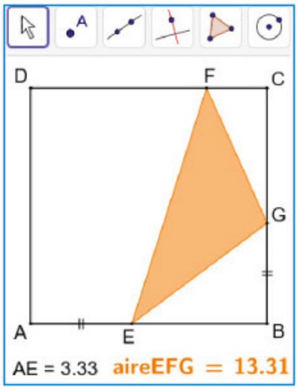
Chercher **Raisonner**



$[AB]$ est un segment mesurant 6 cm.
C est un point mobile du segment $[AB]$ distinct de A et de B.
Trois demi-cercles de diamètres respectifs $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$ sont construits « au-dessus » du segment $[AB]$.
AEDC est un carré tracé « au-dessous » du segment $[AB]$.
Est-il possible de placer le point C de façon que l'aire du domaine coloré soit égale à l'aire du carré AEDC ?

114 Tice Conjecturer puis démontrer

Chercher **Représenter** **Calculer**



ABCD est un carré de côté 8. E est un point mobile du côté $[AB]$, F est un point du côté $[CD]$ tel que $FC = 2$ et G est le point du côté $[BC]$ tel que $BG = AE$.

1. a) Réaliser la figure avec un logiciel de géométrie en affichant la distance AE ainsi que l'aire du triangle EFG.

b) Conjecturer les positions du point E pour lesquelles l'aire du triangle EFG est supérieure ou égale à 8.

2. On pose $x = AE$ (avec $0 \leqslant x \leqslant 8$) et on note $\mathcal{A}(x)$ l'aire du triangle EFG.

a) Montrer que pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0 ; 8]$, $\mathcal{A}(x) = \frac{1}{2}x^2 - 7x + 32$.

b) Vérifier que $\mathcal{A}(x) - 8 = \frac{1}{2}(x-8)(x-6)$.

c) Démontrer alors la conjecture.

115 Find the right square

Chercher **Communiquer**

Peter asserts that he is able to build a square such that when its sides are each increased by 4 cm, its area increases by 40 cm^2.
Is Peter right?
If so, how many such squares can be built?

116 Algo Rechercher des solutions et résoudre

Chercher **Calculer** **Communiquer**

Clémentine est persuadée qu'il existe des solutions à l'équation $(\mathbf{E})$: $8x^3 + 14x^2 - 2x - 3{,}5 = 0$ dans l'intervalle $[-1{,}5 ; 1{,}5]$.
Pour les rechercher, elle commence l'écriture d'un programme écrit en langage Python qui teste tous les nombres de $-1{,}5$ à $1{,}5$ avec un pas de $0{,}25$.

```
from math import *
x=-1.5
while          :
    if 8*x**3+14*x**2-2*x-3.5==0:
        print(x)
    x=
```

a) Compléter les cadres rouge et vert de ce programme.

b) A-t-on résolu l'équation $(\mathbf{E})$ avec ce programme ?

c) Déterminer le nombre réel c tel que pour tout nombre réel x :

$$8(x^2 - 0{,}25)(x + c) = 8x^3 + 14x^2 - 2x - 3{,}5$$

d) En déduire la résolution de l'équation $(\mathbf{E})$.

117 Algo Relier inéquation et programmation

Raisonner **Calculer**

```
def S(x):
    s=1.3*x
    return s

def A(x):
    a=29+x
    return a
```

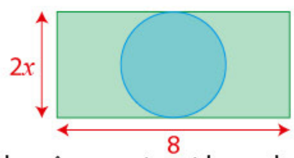
Un ticket de tramway coûte 1,30 € sans abonnement.
Avec un abonnement annuel de 29 €, le même trajet ne coûte que 1 €.

a) Deux fonctions **S** et **A** écrites en langage Python figurent ci-dessus.
Écrire un programme en langage Python, reprenant ces deux fonctions, qui calcule et affiche le nombre minimum de trajets à partir duquel l'abonnement est intéressant. Saisir et exécuter ce programme.

b) Retrouver ce résultat en résolvant une inéquation.

118 Rechercher des aires égales

Modéliser **Calculer**

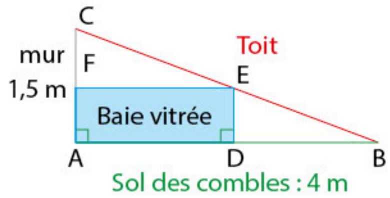


Sur la figure ci-contre, x désigne un nombre strictement positif.
Le disque et le rectangle ont le même centre et le cercle est tangent à deux côtés opposés du rectangle.
Déterminer la valeur exacte de x pour laquelle le disque et la partie verte ont la même aire.

119 Déterminer un maximum

Modéliser | Raisonner | Calculer

Cyrielle projette d'aménager les combles de sa maison en créant une ouverture rectangulaire, accolée à un mur vertical de hauteur 1,5 m et posée sur le sol des combles, comme indiqué sur le schéma ci-dessous.



On note x la distance BD (avec $0 \leqslant x \leqslant 4$).

1. a) Exprimer ED en fonction de x.

b) En déduire une expression de l'aire $\mathscr{A}(x)$, en m^2, du rectangle ADEF, en fonction de x.

2. a) Avec un logiciel de géométrie, Cyrielle conjecture que $\mathscr{A}(x)$ est maximum pour $x = 2$.

Montrer que $\mathscr{A}(x) - \mathscr{A}(2) = -\dfrac{3(x-2)^2}{8}$.

b) En déduire les dimensions de la baie vitrée apportant le maximum de lumière.

120 Comprendre une situation

Narration de recherche

Raisonner | Calculer

Rédiger les différentes étapes de la recherche, sans omettre les fausses pistes et les changements de méthode.

Problème Un cycliste se rend d'une ville A à une ville B. Il effectue la moitié du trajet à la vitesse moyenne de 20 km·h^{-1} et l'autre moitié à la vitesse de x km·h^{-1} (avec $x > 0$).

a) Justifier que sa vitesse moyenne $v(x)$ en km·h^{-1} sur l'ensemble du trajet vérifie : $v(x) = \dfrac{40x}{x+20}$.

b) Montrer que la vitesse moyenne $v(x)$ ne peut pas dépasser 40 km·h^{-1}.

121 Déformer un rectangle

Problème ouvert

Chercher | Raisonner

On note L et ℓ respectivement la longueur et la largeur d'un rectangle (avec $L \geqslant \ell$).

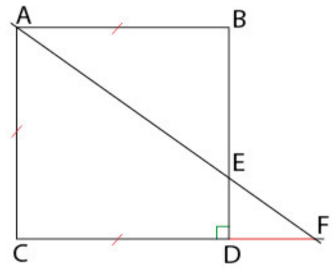
Si on diminue d'une unité la longueur du rectangle et si on augmente d'une unité sa largeur, son aire augmente-t-elle ?

122 Prendre des initiatives

Chercher | Raisonner

ABCD est un carré de côté 8. E est un point mobile du côté [BD]. La droite (AE) coupe la droite (CD) en F.

Déterminer les positions de E pour lesquelles $DF \leqslant 4$.



123 Établir l'inégalité arithmético-géométrique

Raisonner | Calculer

1. a et b désignent deux nombres réels positifs.

a) Développer $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2$.

b) Justifier que $a - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b \geqslant 0$.

c) En déduire l'inégalité arithmético-géométrique :

pour tous nombres réels a et b positifs, $\dfrac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$.

2. x, y et z désignent des nombres réels positifs.

Démontrer que $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant xy + xz + yz$.

Des défis

124 Rechercher une équation

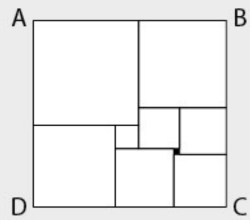
Trouver une équation d'inconnue x de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec a, b et c nombres entiers naturels, dont $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ est solution.

125 Retrouver des dimensions

Le rectangle ABCD ci-contre est exactement constitué de 9 carrés.

Le carré noir a pour côté 1.

Quelles sont les dimensions du rectangle ABCD ?



(d'après Olympiades de mathématiques)

126 Trouver une solution

Trouver une solution de l'équation :

$$x^2 + x = 1\,111\,111\,122\,222\,222$$

(d'après le site culturemath.ens.fr)

QCM Bilan

QCM interactifs

127 Dans chaque cas, donner la réponse exacte en justifiant.

		A	B	C	D
1	L'équation $x(x-3)=x(4x-1)\dots$	n'admet aucune solution	admet une seule solution	admet exactement deux solutions	admet deux solutions de même signe
2	L'inéquation : $(x-4)^2 \leqslant (2x+1)^2$ admet pour ensemble des solutions …	$[-5\,;\,1]$	$]-\infty\,;-5] \cup [1\,;+\infty[$	$[-5\,;+\infty[$	$]-5\,;1[$
3	L'équation $x+\dfrac{3x-8}{x-3}=0\dots$	n'admet pas de solution	admet une seule solution	admet deux solutions de signes différents	admet deux solutions de même signe
4	L'équation $x^2-6x+5=0\dots$	est équivalente à $(x-3)^2=4$	est équivalente à $(x-1)(x+5)=0$	admet 5 pour seule solution	admet pour ensemble des solutions $\{-1\,;5\}$
5	L'inéquation $\dfrac{1}{x-2}<\dfrac{1}{2x-1}$ a le même ensemble des solutions que …	$x-2<2x-1$	$\dfrac{x+1}{(2x-1)(x-2)}<0$	$2x-1<x-2$	$\dfrac{x-3}{(2x-1)(x-2)}<0$
6	L'équation $(x-3)(x+5)+x^2-6x+9=0$ …	admet pour ensemble des solutions $\{-1\}$	admet pour ensemble des solutions $\{-1\,;3\}$	est équivalente à $(2x+6)(x+1)=0$	est équivalente à $(x-3)(2x-2)=0$
7	L'inéquation $(x-7)^2>0$ admet pour ensemble des solutions …	$\mathbb{R}-\{7\}$	$\mathbb{R}-\{0\}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}-\{-7\}$
8	k désigne un nombre réel. L'équation $(x+1)^2-8=k$ admet …	une seule solution pour $k=0$	exactement deux solutions pour $k=-8$	exactement deux solutions pour $k=-10$	exactement deux solutions pour $k>-8$
9	Si $x\in[3\,;8]$ et $y\in[1\,;5]$, alors …	$2\leqslant x-y\leqslant 3$	$7\leqslant 2x+y\leqslant 20$	$-2\leqslant x-y\leqslant 7$	$-10\leqslant x-y\leqslant 5$
10	Voici le tableau de signes de l'expression $\mathrm{A}(x)$. Alors … (voir tableau ci-dessous)	$\mathrm{A}(x)$ peut être égal à $\dfrac{x^2-4}{x+1}$	$\mathrm{A}(x)$ peut être égal à $\dfrac{x+1}{(x+2)(x-2)}$	$\mathrm{A}(x)$ peut être égal à $\dfrac{x^2-4}{-3x-3}$	$\mathrm{A}(x)$ peut être égal à $\dfrac{4-x^2}{x-1}$

x	$-\infty$		-2		-1		2		$+\infty$
$\mathrm{A}(x)$		+	0	−	‖	+	0	−	

Vérifiez vos réponses p. 346 pour avoir votre note (considérez 1 point par réponse juste).

Exploiter ses compétences

128 Calculer une distance de freinage

La situation problème

À la suite d'un accident sur une autoroute par temps sec, une enquête de gendarmerie conclut qu'un des conducteurs impliqué dans l'accident a freiné sur 148,5 m.

Utiliser les différentes informations pour déterminer si le conducteur était en infraction par rapport au code de la route au moment où il a commencé à freiner.

DOC 1 Distance de freinage

Sur autoroute sèche, la distance de freinage d (en m) d'une voiture qui roule à une vitesse v, en $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$, est estimée à l'aide de la formule $d = \frac{v}{5} + \frac{v^2}{150}$.

DOC 2 Transformation d'une expression

Un logiciel de calcul formel affiche le résultat suivant :

1	Factoriser$\left(\frac{x^2}{150} + \frac{x}{5} - 148.5\right)$
	$\to$ **$(x - 135) \cdot \frac{x + 165}{150}$**

DOC 3 Code de la route

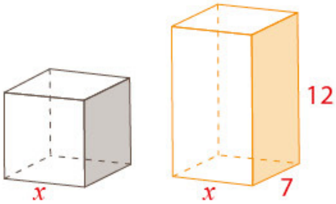
Sur autoroute, par temps sec, la vitesse maximum autorisée est de $130\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$. En cas de précipitations, la vitesse maximum autorisée est de $110\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$.

129 Réduire les emballages

La situation problème

Une entreprise projette de fabriquer des emballages en carton, destinés à la livraison de petits objets commandés sur Internet. Les responsables hésitent entre deux modèles : un cube et un parallélépipède rectangle représentés ci-contre (les dimensions étant exprimées en cm).

Utiliser les différentes informations pour déterminer les valeurs de x qui conviennent le mieux à cette entreprise.



DOC 1 Surfaces d'un parallélépipède et d'un cube

La surface totale d'un parallélépipède rectangle ou d'un cube est égale à la somme des aires de ses six faces.

DOC 2 Logiciel de calcul formel

Un logiciel de calcul formel affiche le résultat suivant :

1	Factoriser(6x²-38x-168)
	$\to$ **2 (x + 3) (3 x − 28)**

DOC 3 Qualité du service

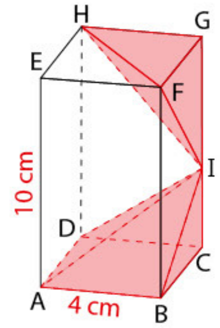
Pour améliorer la qualité du service et diminuer les coûts, les responsables de l'entreprise se demandent comment choisir x pour que le cube ait un volume supérieur au parallélépipède et nécessite moins de carton dans sa fabrication que le parallélépipède.

130 Construire une clepsydre

La situation problème

Lors de la visite du musée Noria à Saint-Jean-du-Bruel, Typhaine a admiré la clepsydre moderne ci-contre. Elle souhaite en réaliser une avec un tétraèdre et une pyramide inscrits dans un parallélépipède rectangle comme ci-contre.

Utiliser les différentes informations pour déterminer la position du point I sur l'arête [CG] afin d'aider Typhaine.



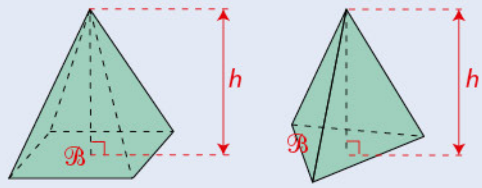
DOC 1 Une clepsydre

Une clepsydre est une sorte de sablier ; elle était utilisée pour mesurer la durée d'un discours en Grèce ou les durées de garde dans la légion romaine.

DOC 2 Le souhait de Typhaine

Dans la clepsydre ABCDIFGH , le volume de la pyramide ABCDI et du tétraèdre IFGH doivent être égaux.

DOC 3 Volume d'une pyramide ou d'un tétraèdre



Volume : $V = \dfrac{1}{3}\mathcal{B} \times h$ où $\mathcal{B}$ est l'aire de la base du solide.

131 Choisir un modèle de voiture

La situation problème

La consommation en carburant est un élément important dans la prise de décision d'achat d'une voiture. Conscient de cet aspect, un concessionnaire automobile souhaite apporter à un client des informations comparatives précises sur la consommation en carburant de deux modèles « sport » : la FuturA et l'AvenirA.

Utiliser les différentes informations pour aider le concessionnaire à rédiger une note comparative sur la consommation de ces deux voitures, tenant compte des voies de circulation empruntées.

DOC 1 Consommation des véhicules

Pour une vitesse x comprise entre 30 et 140 $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$, la consommation en carburant en L/100 km des modèles FuturA et AvenirA, respectivement notées $f(x)$ et $a(x)$, s'exprime de la façon suivante :

$$f(x) = 0{,}05x + \frac{136}{x} \quad \text{et} \quad a(x) = 0{,}04x + \frac{200}{x}$$

DOC 2 Comparaison de deux quantités

Pour comparer les expressions $f(x)$ et $a(x)$, on peut étudier le signe de leur différence à l'aide d'un tableau de signes.

DOC 3 Limitations de vitesse sur les voies de circulation

Les règles générales des vitesses maximums autorisées par le code de la route sont résumées dans le tableau suivant.

Agglomération	$50\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}$
Route à double sens sans séparateur central	$80\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}$
Route à deux chaussées séparées par un terre-plein central	$110\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}$
Autoroute	$130\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}$