13 Probabilités

Avant

▶ Dès le 16^{e} siècle, de nombreux jeux de société étaient pratiqués à la cour d'Italie, et parmi eux les jeux de dés. À la demande du duc de Toscane, Galilée (1554-1642) rédigea un mémoire sur le « calcul des hasards ». Ce travail a marqué le début des probabilités.

À présent

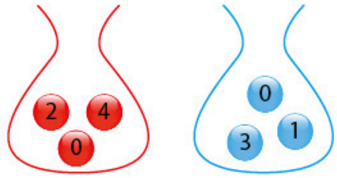
▶ De nos jours, les jeux de hasard sont omniprésents sur tablettes ou smartphones. Lorsqu'une partie démarre, l'application répartit de manière aléatoire certaines données (cartes, bonbons, cachettes, bonus...). Cela rend la partie plus ludique et évite la lassitude du joueur mais cela favorise aussi l'addiction.

Les capacités travaillées dans ce chapitre

	Exercices
• Comprendre le langage des événements.	13 à 20
• Utiliser des modèles théoriques de référence, déterminer une loi de probabilité.	1, 3, 21 à 28
• Construire un modèle à partir des fréquences observées.	2, 4, 5, 7, 31, 32
• Déterminer la probabilité d'un événement.	6, 8, 9, 11, 33, 34, 36 à 38
• Dénombrer à l'aide de tableaux et d'arbres.	29, 30, 35
• Utiliser les égalités $P(A)+P(\overline{A})=1$ et $P(A\cup B)+P(A\cap B)=P(A)+P(B)$.	10, 12, 39
• Étudier des expériences aléatoires à deux ou trois épreuves.	40 à 42

1 Distribution des fréquences et modèle probabiliste

Les sacs opaques rouges et bleus ci-contre contiennent chacun trois boules, indiscernables au toucher, numérotées respectivement 0, 2, 4 et 0, 1, 3.



1 **Expérience aléatoire 1** : on tire, **au hasard**, une boule du sac rouge.
Déterminer la probabilité d'obtenir chacune des boules du sac.
On parle de modèle **d'équiprobabilité**.

2 **Expérience aléatoire 2** : on tire **au hasard** une boule de chacun des sacs et on effectue la somme des numéros obtenus.
a) Lister toutes les sommes possibles.
L'ensemble E formé par toutes ces sommes est appelé **univers** de l'expérience aléatoire.
b) On répète 10 000 fois cette expérience.
Voici la distribution des fréquences obtenues.

Somme	0	1	2	3	4	5	7
Fréquence	0,1105	0,1115	0,111	0,2221	0,1113	0,2227	0,1109

Lequel des trois modèles probabilistes ci-dessous semble convenir pour cette expérience aléatoire ?

Modèle 1
Modèle d'équiprobabilité sur $E = \{0;1;2;3;4\}$

Modèle 2
Modèle d'équiprobabilité sur $E = \{0;1;2;3;4;5;7\}$

Modèle 3

Somme	0	1	2	3	4	5	7
Probabilité	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

2 Le langage des événements

Dans une classe de Seconde qui compte 32 élèves, on constate que 18 élèves possèdent un compte Facebook, 20 élèves possèdent un compte Instagram et 10 élèves possèdent les deux.
On note E l'ensemble formé par les 32 élèves de la classe.
On tire au hasard la fiche d'un élève de cette classe.
Ainsi, tous les tirages sont équiprobables.
On considère les événements suivants :
F : « Cet élève a un compte Facebook » et $\overline{F}$: « Cet élève n'a pas de compte Facebook » ;
I : « Cet élève a un compte Instagram » et $\overline{I}$: « Cet élève n'a pas de compte Instagram ».

1 **a)** Recopier et compléter le tableau croisé ci-contre par les effectifs qui conviennent.
b) Déterminer la probabilité de l'événement $\overline{F}$.
On dit que $\overline{F}$ est l'**événement contraire** de F.

	F	$\overline{F}$	**Total**
I	...	...	...
$\overline{I}$	...	...	...
Total	18	...	32

2 Déterminer la probabilité de l'événement « Cet élève possède un compte Facebook **et** un compte Instagram ».
Cet événement, noté **$F \cap I$** (lire « F inter I »), est l'**intersection** des événements F et I.

3 Déterminer la probabilité de l'événement « Cet élève possède un compte Facebook **ou** un compte Instagram » (au moins l'un des deux comptes).
Cet événement, noté **$F \cup I$** (lire « F union I »), est la **réunion** des événements F et I.

Cours

1 Le langage des événements

A Univers d'une expérience aléatoire

Définitions

- Une expérience est dite **aléatoire** lorsqu'elle a plusieurs **issues** (ou résultats) possibles et que l'on ne peut ni prévoir, ni calculer laquelle de ces issues sera réalisée.
- L'ensemble $E = \{x_1 ; x_2 ; \ldots ; x_n\}$ des issues possibles est appelé l'**univers** de cette expérience aléatoire.

B Événement d'un univers

Définitions

- Un **événement** A est un sous-ensemble (ou une partie) de l'univers E d'une expérience aléatoire. On note $\mathbf{A \subset E}$ (lire « A inclus dans E »).
- Dire qu'une issue x_i de E **réalise** l'événement A signifie que x_i est un élément de A. On note $x_i \in A$ (lire « x_i appartient à A »).

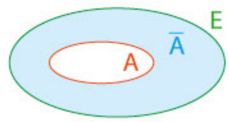
Événements particuliers

- Une partie $\{x_i\}$ qui ne contient qu'une issue est appelée **événement élémentaire**.
- L'ensemble vide, noté $\varnothing$, est appelé **événement impossible** : aucune issue n'appartient à cet ensemble.
- L'univers E est l'événement qui contient toutes les issues. Il est appelé **événement certain**.

C Événement contraire

Définition

A est un événement d'un univers E.
L'**événement contraire** de l'événement A est formé des issues qui ne réalisent pas A.
On le note $\overline{A}$.

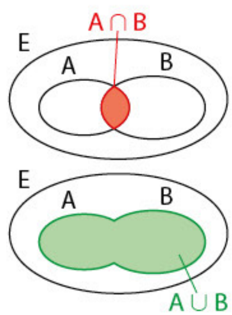


Remarque : en langage ensembliste, on dit que l'ensemble $\overline{A}$ est le complémentaire de l'ensemble A.

D Intersection et réunion d'événements

Définitions

- L'**intersection** de A et B est l'événement formé des issues qui réalisent à la fois l'événement A **et** l'événement B.
On le note $A \cap B$ et on lit « A **inter** B ».
- La **réunion** de A et B est l'événement formé des issues qui réalisent l'événement A **ou** l'événement B, c'est-à-dire **au moins l'un** des deux événements.
On le note $A \cup B$ et on lit « A **union** B ».



2 Probabilité sur un ensemble fini

A Loi de probabilité sur un ensemble fini

Définition

$E = \{x_1 ; x_2 ; \dots ; x_n\}$ désigne l'univers d'une expérience aléatoire.
Définir une **loi de probabilité** sur E, c'est associer à chaque issue x_i un nombre p_i appelé **probabilité** de x_i tel que :
- pour tout nombre i de $\mathbb{N}$ avec $1 \leqslant i \leqslant n$, $\quad \mathbf{0 \leqslant p_i \leqslant 1}$;
- $\mathbf{p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1}$.

Exemple

On lance un dé cubique dont les faces sont numérotées 1, 2, 3, 4, 5, 6 et on lit le numéro porté par la face supérieure.
On suppose que ce dé est **équilibré** ; des considérations physiques du cube conduisent à choisir la loi de probabilité ci-contre.
On dit que cette loi de probabilité est une **loi d'équiprobabilité**.

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Définition - Propriété

Lorsque, dans une expérience aléatoire, toutes les issues ont la même probabilité p de se réaliser, on dit qu'il y a **équiprobabilité**. Si cette expérience aléatoire possède n issues, alors $\mathbf{p = \frac{1}{n}}$.

Démonstration

D'après la définition ci-dessus, $\underbrace{p + p + \dots + p}_{n \text{ fois}} = 1$ donc $n \times p = 1$ et $p = \frac{1}{n}$.

B Modélisation d'une expérience aléatoire

Modéliser une expérience aléatoire d'univers E, c'est **choisir** une loi de probabilité sur E qui représente au mieux les chances de réalisation de chaque issue.
Le choix du modèle peut résulter :
- d'hypothèses implicites d'équiprobabilité : lancer d'une pièce ou d'un dé **équilibré** (voir exemple du A), tirer une boule **au hasard** dans une urne, … ;
- de la réalisation d'une expérience aléatoire un grand nombre de fois. On observe alors que la fréquence de chaque issue se stabilise vers un nombre et ce sont ces nombres que l'on choisit pour probabilités des issues.

Exemple

Une expérience aléatoire d'univers $E = \{A ; B ; C ; D\}$ est réalisée 5 000 fois.
Voici la distribution des fréquences obtenues :

Issue	A	B	C	D	**Total**
Fréquence	0,247 2	0,1997	0,301 8	0,251 3	1

La loi de probabilité sur E ci-dessous semble convenir pour modéliser cette expérience aléatoire.

Issue	A	B	C	D	**Total**
Probabilité	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{4}$	1

Cours

3 Calculs de probabilités

A Probabilité d'un événement

Définition

La **probabilité d'un événement** A, notée $P(A)$, est la somme des probabilités des issues qui réalisent A.

Conséquences : • $\mathbf{P(\varnothing) = 0}$ • $\mathbf{P(E) = 1}$ • Pour tout événement A, $\mathbf{0 \leqslant P(A) \leqslant 1}$.

Exemple

Un dé cubique est truqué de façon que chaque issue ait la probabilité indiquée ci-contre.

Issue	1	2	3	4	5	6
Probabilité	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

L'événement A : « Obtenir un numéro pair » est tel que $A = \{2\,;4\,;6\}$.

Donc $P(A) = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{7}{12}$.

Propriété

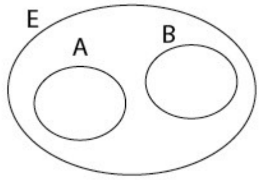
Dans une situation d'équiprobabilité, la probabilité d'un événement A est donnée par :

$$\mathbf{P(A) = \frac{\text{nombre d'issues de A}}{\text{nombre d'issues de E}}}$$

Démonstration

La probabilité de chaque issue est $\frac{1}{n}$ où n est le nombre d'issues de E.

Si m issues réalisent l'événement A, alors $P(A) = \underbrace{\frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}}_{m \text{ fois}} = \frac{m}{n}$.



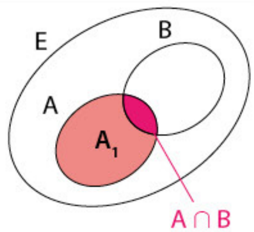
B Des formules

Cas particulier : lorsque deux événements A et B sont **incompatibles**, c'est-à-dire lorsque $A \cap B = \varnothing$, on a $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Propriété

Pour tous événements A et B, $\mathbf{P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)}$.

Démonstration



On note A_1 l'événement formé des issues de A qui ne sont pas dans B.

A_1 et $A \cap B$ sont incompatibles et de réunion A, donc $P(A) = P(A_1) + P(A \cap B)$.

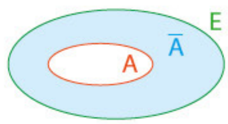
A_1 et B sont incompatibles et de réunion $A \cup B$, donc $P(A \cup B) = P(A_1) + P(B)$.

Ainsi, $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A_1) + P(B) + P(A) - P(A_1) = P(A) + P(B)$.

Propriété

Pour tout événement A, $\mathbf{P(A) + P(\overline{A}) = 1}$.

Démonstration



A et $\overline{A}$ sont des événements incompatibles et $A \cup \overline{A} = E$.

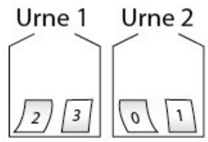
Donc, d'après le cas particulier ci-dessus, $P(A) + P(\overline{A}) = P(A \cup \overline{A}) = P(E) = 1$.

EXERCICES RÉSOLUS

1 Déterminer une loi de probabilité

→ Cours 2. A

On tire au hasard un papier de l'urne opaque 1, puis un papier de l'urne opaque 2.
On note alors le produit des numéros lus sur les papiers.
Déterminer l'univers E de cette expérience aléatoire et la loi de probabilité sur E.



Solution

$2\times 0=0$; $2\times 1=2$; $3\times 0=0$; $3\times 1=3$

L'univers de cette expérience aléatoire est $E=\{0\,;2\,;3\}$.
Ce tableau donne la loi de probabilité sur E :

Issue	0	2	3
Probabilité	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Il ne s'agit pas ici d'une loi d'équiprobabilité puisqu'il y a deux fois plus de chances d'obtenir 0 que d'obtenir 2 ou 3.

2 Choisir un bon modèle

→ Cours 2. B

On lance un dé équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6, on lit le numéro sur la face supérieure et on le multiplie par 2. Voici la distribution des fréquences obtenues après 2 000 lancers de ce dé.

x_i	2	4	6	8	10	12	Total
Fréquence	0,1657	0,1687	0,1609	0,1668	0,1703	0,1676	1

Voici plusieurs modèles proposés pour cette expérience aléatoire.
Modèle 1 : loi d'équiprobabilité sur $E=\{1;2;3;4;5;6\}$
Modèle 2 : loi d'équiprobabilité sur $E=\{2;4;6;8;10;12\}$

Modèle 3 :

x_i	2	4	6	8	10	12
p_i	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$

Lequel de ces trois modèles semble convenir ?

Solution

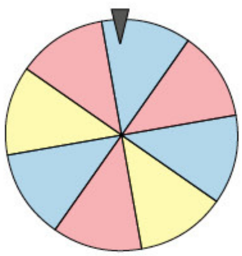
On constate que les fréquences d'apparition de chaque face sont toutes proches de 0,16.
Or $\frac{1}{6}\approx 0{,}16$, d'où le choix du modèle 2 d'équiprobabilité sur $E=\{2;4;6;8;10;12\}$.

Le modèle 1 ne convient pas car les issues ne sont pas 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6. Le modèle 3 ne convient pas car $\frac{1}{12}\approx 0{,}08$ et $\frac{1}{3}\approx 0{,}33$.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 1

3 Une roue est découpée en huit secteurs identiques.
On lance cette roue et on lit la couleur obtenue.
Déterminer l'univers E de cette expérience aléatoire et la loi de probabilité sur E.



Sur le modèle de l'exercice résolu 2

4 Le tableau ci-dessous indique la distribution des fréquences obtenues lors de 10 000 simulations d'une expérience aléatoire d'univers $E=\{2;5;7;10\}$.

Issue	2	5	7	10
Fréquence	0,2995	0,1049	0,4052	0,1904

Lequel de ces modèles semble convenir ?
Modèle 1 : loi d'équiprobabilité sur $E=\{2;5;7;10\}$
Modèle 2 :

Issue	2	5	7	10
Probabilité	0,3	0,1	0,4	0,2

EXERCICES RÉSOLUS

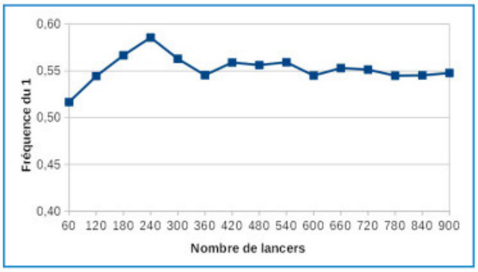
5 Choisir expérimentalement une loi de probabilité

→ Cours 2. B

Lorsqu'on lance une punaise au sol, elle peut se positionner de deux façons : sur le côté (position 1) ou sur la tête (position 2).

Position 1

Position 2



On a effectué 900 lancers d'une punaise au sol et on a relevé, sur le graphique ci-dessus, les fréquences d'apparition de la position 1 lors de 60 lancers, 120 lancers, …, jusqu'à 900 lancers.
Par quelle loi de probabilité semble-t-on pouvoir modéliser cette expérience aléatoire ?

Solution

Sur le graphique ci-dessus, on observe que la fréquence d'apparition de la position 1 se stabilise vers 0,55 lorsqu'on lance la punaise un grand nombre de fois.
On choisit alors de modéliser cette expérience aléatoire par la loi de probabilité ci-contre.

Issue	Position 1	Position 2
Probabilité	0,55	0,45

6 Déterminer la probabilité d'un événement

→ Cours 3. A

Une expérience aléatoire est modélisée par la loi de probabilité ci-dessous.
On considère les événements A : « Le numéro est pair » et B : « Le numéro est supérieur ou égal à 3 ».
Déterminer : **a)** la probabilité de A ; **b)** la probabilité de B.

Issue	1	2	3	4	5
Probabilité	0,1	0,3	0,1	0,2	0,3

Solution

a) $A = \{2\,;4\}$

$P(A) = P(\{2\}) + P(\{4\}) = 0{,}3 + 0{,}2 = 0{,}5$

b) $B = \{3\,;4\,;5\}$

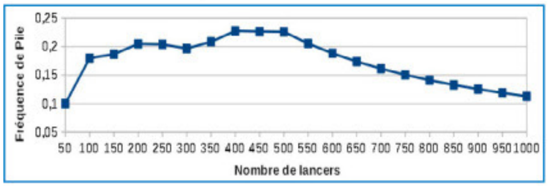
$P(B) = P(\{3\}) + P(\{4\}) + P(\{5\}) = 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}3 = 0{,}6$

Pour déterminer la probabilité d'un événement :
– on liste les issues qui le réalisent ;
– on additionne les probabilités de ces issues.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 5

7 Voici l'évolution de la fréquence de la sortie de Pile lors de 1 000 lancers d'une pièce truquée.
Choisir un modèle qui semble convenir.



Sur le modèle de l'exercice résolu 6

8 Une expérience aléatoire est modélisée par la loi de probabilité ci-dessous.

Issue	A	B	C	D	E	F
Probabilité	0,1	0,1	0,05	0,2	0,15	0,4

V est l'événement « La lettre est une voyelle ».
W est l'événement « La lettre est placée avant E dans l'ordre alphabétique ».
Déterminer la probabilité de V puis de W.

EXERCICES RÉSOLUS

9 Calculer des probabilités en situation d'équiprobabilité

→ Cours 3. A

Au bout de quelques tours, le sac opaque d'un jeu de Scrabble ne contient plus que les jetons suivants :

N T M C O H X U I F Z L

On tire au hasard un jeton de ce sac et on note la lettre qu'il porte.
Déterminer la probabilité de l'événement :

a) A : « Le jeton porte la lettre M » ; **b)** B : « Le jeton est une voyelle ».

Solution

L'univers E de cette expérience est l'ensemble des 12 lettres (toutes différentes) portées par les jetons.
Un jeton est tiré au hasard, donc on choisit la loi d'équiprobabilité sur E.

a) $A = \{M\}$ donc $P(A) = \frac{1}{12}$.

b) $B = \{I\,;O\,;U\}$ donc $P(B) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$.

> Avec la loi d'équiprobabilité, on utilise :
> $P(B) = \frac{\text{nombre d'issues de B}}{\text{nombre d'issues de E}}$

10 Utiliser les formules du cours

→ Cours 3. B

Parmi les 120 élèves de Seconde d'un lycée, 40 suivent l'option Sport, 24 l'option Latin et 12 les deux options.
On tire au hasard la fiche d'un élève et on observe les options qu'il suit.
Déterminer la probabilité de l'événement :

a) A : « L'élève suit au moins l'une de ces options » ; **b)** B : « L'élève ne suit aucune de ces options ».

Solution

On considère les événements S : « Suivre l'option Sport » et L : « Suivre l'option Latin ».

a) $A = S \cup L$ et $P(A) = P(S) + P(L) - P(S \cap L)$.

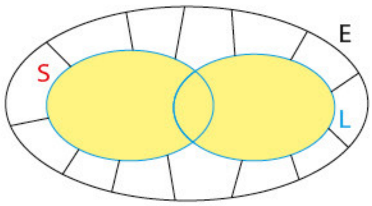
Or $P(S) = \frac{40}{120}$, $P(L) = \frac{24}{120}$ et $P(S \cap L) = \frac{12}{120}$.

Donc $P(A) = \frac{40}{120} + \frac{24}{120} - \frac{12}{120} = \frac{52}{120} = \frac{13}{30}$.

b) B est l'événement contraire de A.

$B = \overline{S \cup L}$ et $P(B) = 1 - P(S \cup L)$.

Donc $P(B) = 1 - \frac{13}{30} = \frac{17}{30}$.



> Sur le diagramme ci-dessus :
> – « au moins une option » correspond à la partie jaune ;
> – « aucune option » correspond à la partie hachurée.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 9

11 On tire au hasard un jeton dans un sac qui contient les jetons suivants :

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Déterminer la probabilité de tirer un jeton qui porte un diviseur de 6.

Sur le modèle de l'exercice résolu 10

12 Les adhérents d'un club de sport sont à 70 % des jeunes, à 50 % des femmes et à 25 % des jeunes femmes.
On tire au hasard la fiche d'un adhérent de ce club.
Déterminer la probabilité qu'il soit une femme ou une personne jeune.

Calcul mental → Exercez-vous sur la plateforme Hyperbole
⊕ de détails page 4

Le langage des événements

→ Cours 1

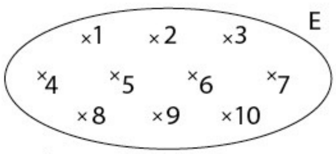
Questions Flash

13 Un sac opaque contient les cinq jetons suivants, indiscernables au toucher : ⓐ ⓑ ⓒ ⓓ ⓔ
On tire au hasard un jeton du sac et on note la lettre obtenue.
Citer les issues qui réalisent les événements :
I : « La lettre choisie est une voyelle » ;
J : « La lettre choisie est avant c dans l'ordre alphabétique ».

14 $E = \{1;2;3;4;5;6\}$ est l'univers d'une expérience aléatoire. On considère les événements :
$A = \{1;3;5\}$; $B = \{2;6\}$.
Alan affirme : « $A \cap B = \varnothing$ et $\overline{A} \cap \overline{B} = \varnothing$. »
Que peut-on en penser ?

15 A et B sont deux événements d'un univers E.
Répondre par Vrai ou Faux à chaque affirmation.
a) $P(A) = P(\overline{A}) - 1$
b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
c) $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$

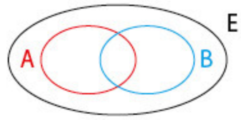
16 Ce diagramme représente l'univers d'une expérience aléatoire.



On considère les événements :
A : « L'issue obtenue est un numéro pair » ;
B : « L'issue obtenue est supérieure ou égale à 8 » ;
C : « L'issue obtenue est strictement inférieure à 3 ».
a) Lister les issues réalisant chaque événement.
b) Reproduire le diagramme ci-dessus et représenter en rouge l'événement A, en vert l'événement B et en noir l'événement C.
c) Lister les issues réalisant chacun des événements :
- $\overline{A}$
- $\overline{B}$
- $A \cap B$
- $A \cap C$
- $A \cup B$
- $A \cup C$

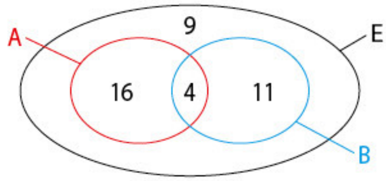
17 $E = \{x_1;x_2;x_3;x_4;x_5\}$ est l'univers d'une expérience aléatoire.
A et B sont deux événements de E tels que $A = \{x_2;x_5\}$ et $B = \{x_3;x_4;x_5\}$.
Lister les issues qui réalisent chacun des événements :
- $\overline{A}$
- $A \cap B$
- $A \cup B$
- $A \cup \overline{B}$
- $\overline{A \cap B}$
- $\overline{A \cup B}$

18 A et B sont deux événements d'une expérience aléatoire d'univers E.



Réaliser cette figure pour chaque question et colorier la partie représentant l'événement :
a) $A \cap B$ **b)** $A \cup B$ **c)** $\overline{A} \cap B$ **d)** $A \cap \overline{B}$
e) $\overline{A \cup B}$ **f)** $\overline{A} \cap \overline{B}$ **g)** $\overline{A \cap B}$ **h)** $\overline{A} \cup \overline{B}$

19 Le diagramme ci-dessous présente le nombre de voitures d'un garage selon le type de moteur.



A (resp. B) est l'ensemble des voitures pouvant fonctionner à l'électricité (resp. l'essence).
a) Recopier et compléter ce tableau croisé par les effectifs qui conviennent.

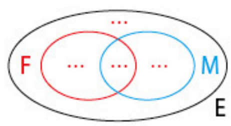
	A	$\overline{A}$
B	...	...
$\overline{B}$	...	...

b) On choisit au hasard la fiche d'une voiture de ce garage et on considère les événements :
H : « La voiture est hybride (électricité et essence) » ;
I : « La voiture est électrique ».
Déterminer le nombre d'issues réalisant chacun des événements :
- H
- I
- $A \cup B$
- $\overline{H}$
- $\overline{I}$
- $A \cap \overline{B}$

20 Ce tableau donne la répartition des membres d'une association humanitaire.

	Femme F	Homme $\overline{F}$	**Total**
Médecin M	5	4	9
Autre $\overline{M}$	16	19	35
Total	21	23	44

a) Recopier et compléter ce diagramme par les effectifs qui conviennent.



b) On choisit au hasard la fiche de l'un des membres.
Déterminer le nombre d'issues de chacun des événements suivants :
- F : « La personne choisie est une femme »
- M : « La personne choisie est médecin »
- $\overline{F}$
- $F \cap M$
- $F \cup M$

Probabilité sur un ensemble fini

→ Cours 2

Questions Flash

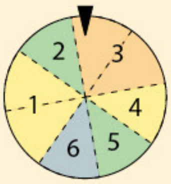
21 Commenter chacune des phrases ci-dessous.

a) « La probabilité que je sois en retard demain est de $\frac{3}{2}$. »

b) « J'ai perdu à ce tirage du Loto, demain je rejoue car j'aurai plus de chances de gagner. »

c) « J'ai lancé dix fois un dé équilibré et je n'ai obtenu que des 6. Au onzième lancer, j'ai de grandes chances d'obtenir 6. »

22 On fait tourner la roue ci-contre. Laquelle de ces lois de probabilité est correcte ?



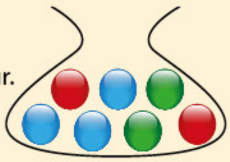
(1)

x_i	Jaune	Vert	Orange	Bleu
p_i	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

(2)

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

23 On choisit au hasard une boule du sac opaque ci-contre et on note sa couleur. Déterminer mentalement la probabilité de chacune des issues.



24 Cette loi de probabilité modélise une expérience aléatoire.

Issue	A	B	C	D
Probabilité	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	p	$\frac{1}{7}$

Déterminer mentalement la valeur de p.

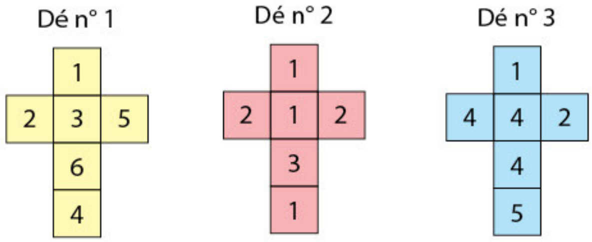
25 Pour chaque expérience aléatoire, déterminer son univers E, puis choisir une loi de probabilité sur E qui modélise cette expérience aléatoire.

a) On lance une pièce équilibrée et on observe la face obtenue (Pile ou Face).

b) On lance un dé cubique équilibré, dont les faces sont numérotées de 1 à 6, et on observe le numéro obtenu.

c) On tire une bille d'une urne opaque contenant 10 billes identiques numérotées de 1 à 10 et on note le numéro obtenu.

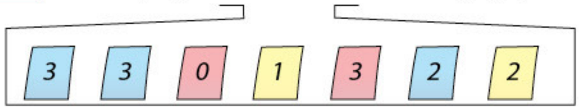
26 Voici les patrons de trois dés équilibrés.



On lance un dé et on note le numéro obtenu sur la face supérieure.

Modéliser l'expérience aléatoire pour chacun de ces dés.

27 L'urne opaque ci-dessous contient sept papiers.



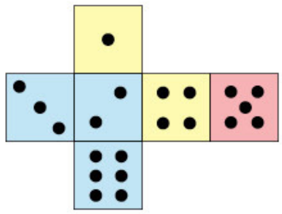
a) On tire au hasard un papier de cette urne et on note le numéro indiqué.

Modéliser cette expérience aléatoire.

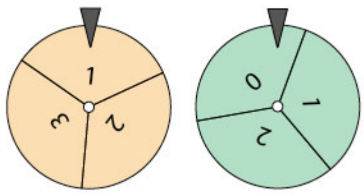
b) On tire au hasard un papier de cette urne et on note sa couleur.

Modéliser cette expérience aléatoire.

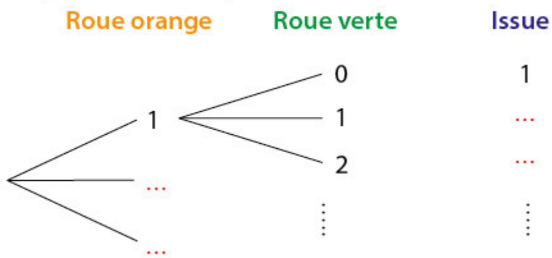
28 Voici un patron d'un dé cubique et équilibré. Décrire et modéliser au moins deux expériences aléatoires qui peuvent être effectuées avec ce dé.



29 On fait tourner chacune des roues ci-dessous découpées en trois secteurs identiques et on note la somme des résultats obtenus.



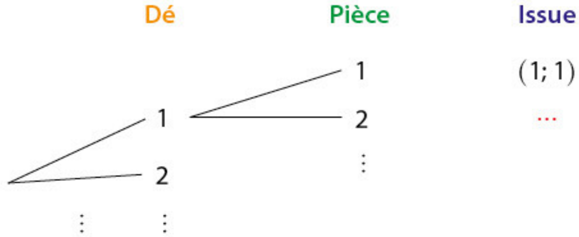
a) Reproduire et compléter l'arbre ci-dessous.



b) Modéliser cette expérience aléatoire.

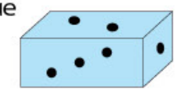
30 On lance un dé équilibré à six faces numérotées de 1 à 6, puis une pièce équilibrée dont les faces sont numérotées 1 et 2. On note les numéros obtenus.

a) Reproduire et compléter l'arbre ci-dessous.



b) Modéliser cette expérience aléatoire.

31 Les faces du dé parallélépipédique ci-contre sont numérotées de 1 à 6.



On lance ce dé et on note le numéro obtenu sur la face du dessus.

Après avoir répété 10 000 fois cette expérience aléatoire, on a obtenu cette distribution des fréquences.

Numéro	1	2	3	4	5	6	Total
Fréquence	0,099	0,207	0,198	0,201	0,194	0,101	1

Parmi les modèles ci-dessous, lequel semble convenir pour modéliser cette expérience aléatoire ?

Modèle 1 : loi d'équiprobabilité sur $E = \{1;2;3\}$

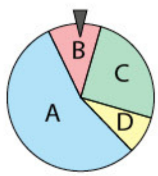
Modèle 2 : loi d'équiprobabilité sur

$$E = \{1;2;3;4;5;6\}$$

Modèle 3 :

Issue	1	2	3	4	5	6
Probabilité	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$

32 On fait tourner la roue ci-contre et on note la lettre obtenue.



On répète 2 000 fois cette expérience aléatoire.

Voici la distribution des fréquences obtenues.

Lettre	A	B	C	D	Total
Fréquence	0,56	0,112	0,245	0,083	1

a) Parmi les modèles ci-dessous, lequel semble convenir pour modéliser cette expérience aléatoire ?

Modèle 1 : loi d'équiprobabilité sur $E = \{A;B;C;D\}$

Modèle 2 :

Issue	A	B	C	D
Probabilité	$\frac{23}{50}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{17}{50}$	$\frac{1}{10}$

Modèle 3 :

Issue	A	B	C	D
Probabilité	$\frac{11}{20}$	$\frac{7}{60}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$

b) Quelle hypothèse peut-on émettre sur la mesure de l'angle de chaque secteur ?

Calculs de probabilités

→ Cours 3

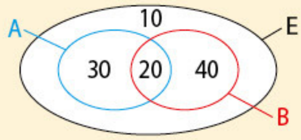
Questions flash

33 On choisit au hasard une lettre du mot :

FACILE

Déterminer mentalement la probabilité de l'événement V : « La lettre choisie est une voyelle ».

34 Ce diagramme présente la répartition des 100 éléments d'un ensemble E.



On tire au hasard un élément de E.

Choisir la bonne réponse parmi **(1)**, **(2)** ou **(3)**.

a) $P(\overline{A})$ est égal à : **(1)** $\frac{70}{100}$ **(2)** $\frac{50}{100}$ **(3)** $\frac{40}{100}$

b) $P(A \cup B)$ est égal à : **(1)** $\frac{90}{100}$ **(2)** $\frac{70}{100}$ **(3)** $\frac{10}{100}$

c) $P(\overline{A} \cap B)$ est égal à : **(1)** $\frac{50}{100}$ **(2)** $\frac{40}{100}$ **(3)** $\frac{60}{100}$

35 Ce tableau donne la répartition des langues vivantes 2 choisies par les élèves d'un lycée.

	Seconde	Première	Terminale	Total
Espagnol	84	80	87	
Allemand	36	35	43	
Total				

1. Recopier et compléter ce tableau.

2. On choisit au hasard la fiche d'un élève de ce lycée.

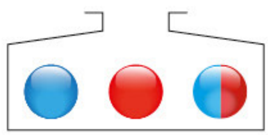
Déterminer la probabilité de chaque événement.

a) A : « L'élève choisi est en Terminale ».

b) B : « L'élève choisi est en Seconde et fait Allemand en LV2 ».

c) C : « L'élève choisi ne fait pas Espagnol en LV2 ».

36 L'urne opaque ci-contre contient trois boules indiscernables au toucher.



On tire au hasard une boule de cette urne.

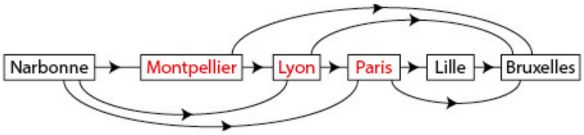
Déterminer la probabilité de l'événement :

a) A : « La boule choisie est bleue » ;

b) B : « La boule choisie contient du bleu » ;

c) C : « La boule choisie n'est pas rouge ».

37 Voici le schéma des trajets possibles en TGV pour se rendre de Narbonne à Bruxelles. Les villes en rouge indiquent les lieux où les voyageurs sont susceptibles de changer de train.



1. Lister tous les trajets possibles en TGV de Narbonne à Bruxelles.

2. On choisit au hasard un trajet de cette liste.
On considère les événements :
L : « Le trajet passe par Lyon » ;
M : « Le trajet passe par Montpellier ».
Déterminer la probabilité de chacun des événements :

a) L **b)** M **c)** $\overline{L}$
d) $L \cap M$ **e)** $L \cup M$ **f)** $\overline{L \cap M}$

38 Un sac de bonbons contient :

- 17 bonbons goût fraise ;
- 15 bonbons goût orange ;
- 12 bonbons goût citron ;
- 14 bonbons goût pomme.

Lydia plonge sa main dans le sac et choisit au hasard un bonbon.
Déterminer la probabilité de chaque événement.
a) A : « C'est un bonbon goût orange ».
b) B : « Ce n'est pas un bonbon goût pomme ».
c) C : « C'est un bonbon goût orange ou citron ».
d) D : « Ce n'est ni un bonbon goût fraise ni un bonbon goût citron ».

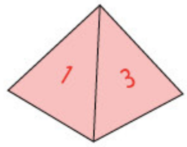
39 Un sac opaque contient 20 billes numérotées de 1 à 20.
On tire une bille de ce sac et on note son numéro.
On considère les événements :
A : « La bille tirée porte un numéro pair » ;
B : « La bille tirée porte un numéro strictement supérieur à 13 » ;
C : « La bille tirée porte un numéro multiple de 5 ».

1. Déterminer chaque probabilité.
a) P(A) **b)** P(B) **c)** P(C)

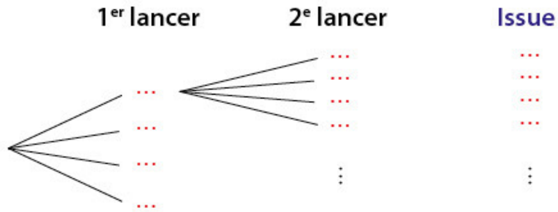
2. Décrire chaque événement et déterminer sa probabilité.
a) $A \cup B$ **b)** $B \cup C$ **c)** $A \cap C$

3. Déterminer de deux façons différentes :
a) $P(A \cap B)$ **b)** $P(B \cap C)$ **c)** $P(A \cup C)$

40 On lance deux fois de suite un dé tétraédrique équilibré, dont les faces sont numérotées de 1 à 4.



Après chaque lancer, on note le numéro obtenu sur la face du dessous.
a) Reproduire et compléter l'arbre ci-dessous.



b) Expliquer pourquoi on peut modéliser cette expérience aléatoire par une loi d'équiprobabilité.
c) Déterminer la probabilité de chaque événement.
A : « L'issue contient deux fois le même numéro ».
B : « L'issue contient le numéro 1 ».
C : « L'issue ne contient pas le numéro 2 ».
d) Décrire chaque événement et déterminer sa probabilité :
- $A \cap B$ • $A \cap C$ • $B \cap C$

41 Les deux dés ci-contre sont équilibrés.

On lance le dé rouge puis le dé vert et on note les numéros obtenus sur les faces supérieures. Une issue de cette expérience est un couple, par exemple (5 ; 2).
a) Utiliser un tableau croisé pour lister les issues.
b) On considère les événements :
M : « Les numéros obtenus sont identiques » ;
S : « La somme des numéros obtenus est égale à 8 ».
Déterminer la probabilité de chacun des événements :
- M • $\overline{S}$ • $M \cap S$ • $M \cup S$

42 Un sac opaque contient une étiquette avec la lettre A et une autre avec le chiffre 5.
On prélève, au hasard et avec remise, trois fois de suite, une étiquette et on note ce qui est inscrit.
Une issue de cette expérience est un triplet, par exemple (A ; 5 ; A).
a) Déterminer toutes les issues de cette expérience aléatoire à l'aide d'un arbre.
b) Lister les issues qui réalisent l'événement :
- L : « L'issue contient au moins une lettre » ;
- D : « L'issue contient au moins deux 5 ».

c) Décrire chaque événement et déterminer sa probabilité :
- $\overline{L}$ • $L \cup D$ • $L \cap D$

QCM interactifs

Pour se tester

43 Dans chaque cas, donner la réponse exacte sans justifier.

On fait tourner une roue équilibrée comportant huit secteurs superposables numérotés 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.
On lit le numéro du secteur qui s'arrête en face du repère.
A est l'événement « Le numéro lu est strictement supérieur à 4 ».
B est l'événement « Le numéro lu est pair ».

		A	B	C	D
1	A est égal à …	$\{0;1;2;3\}$	$\{4;5;6;7\}$	$\{5;6;7\}$	$\{0;1;2;3;4\}$
2	B est égal à …	$\{0;2;4;6\}$	$\{2;4;6\}$	$\{0;1;3;5;7\}$	$\{1;3;5;7\}$
3	Les probabilités respectives de A et B sont …	$\frac{3}{8}$ et $\frac{1}{2}$	$\frac{3}{7}$ et $\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$ et $\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{8}$
4	$P(A \cup B)$ est égal à …	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{8}$
5	$P(A \cap B)$ est égal à …	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{8}$

44 Dans chaque cas, donner la (ou les) réponse(s) exacte(s) sans justifier.

A et B sont deux événements d'une expérience aléatoire.

		A	B	C	D
1	Si A et B sont incompatibles, avec $P(A) = 0{,}43$ et $P(B) = 0{,}15$, alors $P(A \cup B)$ est égal à …	0,064 5	0,58	0,28	1
2	$P(A) = 0{,}6$, $P(\overline{B}) = 0{,}7$ et $P(A \cup B) = 0{,}8$. Alors …	$P(A \cap B) = 0{,}1$	$P(A \cap B) = 0{,}5$	$P(\overline{A} \cap B) = 0{,}2$	cela est impossible
3	Si $P(A) = 0{,}5$, $P(B) = 0{,}3$ et $P(A \cap B) = 0{,}2$. Alors …	$P(A \cap \overline{B}) = 0{,}8$	$P(A \cup B) = 0{,}6$	$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}4$	$P(\overline{A} \cap B) = 0{,}2$

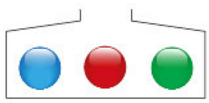
45 Dans chaque cas, dire si l'affirmation est vraie ou fausse en justifiant.

1 **Affirmation :** cette loi de probabilité modélise une expérience aléatoire sur $E = \{V;W;X;Y;Z\}$.

Issue	V	W	X	Y	Z
Probabilité	0,15	0,22	0,14	0,37	0,33

2 On lance un dé équilibré à six faces dont deux faces sont rouges, une face est bleue et les autres faces sont vertes. On note la couleur obtenue.
Affirmation : on peut modéliser cette expérience aléatoire par une loi d'équiprobabilité.

3 On tire au hasard, successivement et avec remise, deux boules de l'urne ci-contre et on note les couleurs des boules obtenues.
Affirmation : la probabilité de tirer deux boules de la même couleur est $\frac{1}{3}$.



4 On reprend l'expérience aléatoire de la question 3 .
Affirmation : la probabilité de tirer au moins une boule rouge est $\frac{4}{9}$.

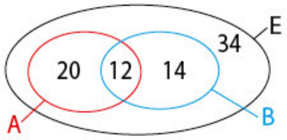
Vérifiez vos réponses : p. 346

Nathan live!

Fiches de remédiation

46 Passer d'un diagramme à un tableau croisé et inversement

a) Reproduire et compléter le tableau croisé ci-dessous, associé au diagramme.



	A	$\overline{A}$	**Total**
B			
$\overline{B}$			
Total			

b) Réaliser un diagramme qui illustre le tableau croisé ci-contre.

	Femme	Homme
Moins de 20 ans	7	11
20 ans et plus	10	12

AIDE
a) Le nombre d'éléments dans A n'est ni 12, ni 20.
b) Penser à prendre en compte les totaux.

47 Calculer des probabilités dans une situation d'équiprobabilité

Un sac opaque contient 25 jetons indiscernables au toucher numérotés de 1 à 25.
On tire au hasard un jeton de ce sac et on note le numéro obtenu.
On considère les événements :
A : « Le numéro noté est un nombre pair » ;
B : « Le numéro noté est divisible par 5 ».
a) Lister toutes les issues qui réalisent A, puis celles qui réalisent B.
b) Déterminer $P(A)$ et $P(B)$.

AIDE
En situation d'équiprobabilité, on utilise la formule :
$$P(A) = \frac{\text{nombre d'issues de A}}{\text{nombre d'issues de E}}$$

48 Utiliser les formules du cours

A, B, C sont trois événements d'une expérience aléatoire et $P(A) = 0{,}3$.
a) Calculer $P(\overline{A})$.
b) De plus, $P(B) = 0{,}55$ et $P(A \cap B) = 0{,}2$. Calculer $P(A \cup B)$.
c) De plus, $P(C) = 0{,}45$ et $P(A \cup C) = 0{,}5$. Calculer $P(A \cap C)$.

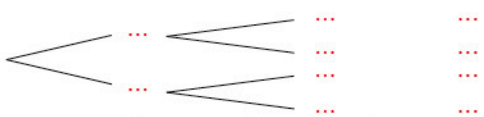
AIDE
- $P(A) + P(\overline{A}) = 1$
- $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$

49 Répéter une expérience aléatoire

Les faces d'une pièce de monnaie équilibrée sont notées 1 et 2. On lance cette pièce deux fois de suite.
Dans chaque situation, reproduire et compléter l'arbre, puis la loi de probabilité qui modélise l'expérience aléatoire.

a) Situation 1 : on note les numéros obtenus lors des deux lancers.

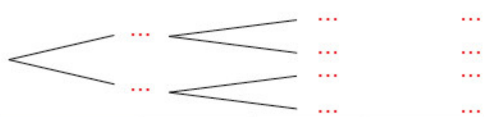
1er lancer 2^{e} lancer Issue



Issue				
Probabilité				

b) Situation 2 : on fait la somme des numéros obtenus lors des deux lancers.

1er lancer 2^{e} lancer Issue



Issue			
Probabilité			

AIDE
Il faut lire attentivement l'énoncé pour comprendre ce que sont les issues. Au **a)**, les issues sont des couples, comme par exemple $(1\,;2)$. Au **b)**, les issues sont des sommes de numéros, comme par exemple 4.

EXERCICE RÉSOLU

50 Comprendre un algorithme

Voici un algorithme où n désigne un nombre entier aléatoire compris entre 1 et 15.

```
n ← nombre entier aléatoire compris entre 1 et 15
Si n ⩽ 8 alors
 |A ← 1
 |sinon
 |A ← 0
Fin Si
```

a) Quelle valeur de A l'algorithme donne-t-il lorsque la valeur affectée à n est :
- 2 ?
- 8 ?
- 3 ?
- 10 ?
- 15 ?

b) On considère l'expérience aléatoire qui consiste à lire le nombre A déterminé par l'algorithme.
Donner les issues possibles et déterminer leurs probabilités.

c) Coder cet algorithme en langage Python, le saisir et l'exécuter 20 fois.
Calculer les fréquences d'apparition des issues 0 et 1.
Commenter les résultats.

Solution

a) • Lorsque $n = 2$, on a $n \leqslant 8$, donc l'algorithme donne $A = 1$.
• En procédant de même, on obtient les valeurs de A ci-contre.

Nombre entier aléatoire n	2	8	3	10	15
Valeur A	1	1	1	0	0

b) Les issues de cette expérience aléatoire sont 1 et 0.
L'algorithme donne 1 lorsque n appartient à $\{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8\}$, donc $P(\{1\}) = \dfrac{8}{15}$.

Par conséquent $P(\{0\}) = 1 - \dfrac{8}{15} = \dfrac{7}{15}$.

On modélise ici le tirage au hasard d'un nombre entier entre 1 et 15 par la loi d'équiprobabilité sur $E = \{1 ; 2 ; 3 ; \dots ; 14 ; 15\}$.

c) On obtient, par exemple : 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0.

La fréquence de sortie du 0 est $\dfrac{8}{20}$ soit 0,40, et celle de sortie du 1 est 0,60.

Il faudrait exécuter cette fonction un grand nombre de fois pour obtenir des fréquences plus proches des probabilités théoriques obtenues à la question **b)**.

```python
from random import *

def Alea():
    n=randint(1,15)
    if n<=8:
        A=1
    else:
        A=0
    return A
```

À VOTRE TOUR

51

Voici une fonction écrite en langage Python.

```python
from random import *

def Alea():
    n=randint(1,34)
    if n<=18:
        A=1
    else:
        A=0
    return A
```

1. a) Quelle valeur cette fonction renvoie-t-elle lorsque la valeur affectée à n est :
- 7 ?
- 18 ?
- 21 ?
- 17 ?

b) On considère l'expérience aléatoire qui consiste à lire le nombre renvoyé par cette fonction. Déterminer la probabilité de chacune des issues de cette expérience.

2. Saisir cette fonction et l'exécuter 20 fois.
Calculer les fréquences d'apparition des issues 0 et 1.

52

L'alphabet grec compte 24 lettres dont 5 voyelles. On choisit au hasard une lettre de cet alphabet et on note s'il s'agit d'une voyelle ou d'une consonne.

```python
from random import *

def Alea():
    n=randint(1,24)
    if n<=5:
        A=1
    else:
        A=0
    return A
```

1. a) Quel est le rôle de la fonction ci-contre écrite en langage Python ?

b) On considère l'expérience aléatoire qui consiste à lire le nombre renvoyé par cette fonction. Déterminer la probabilité de chacune des issues de cette expérience.

2. Saisir cette fonction et l'exécuter 20 fois.
Calculer les fréquences d'apparition des issues 0 et 1.

EXERCICE RÉSOLU

53 Modéliser avec le tableur

Un sac opaque contient 12 billes bleues et 8 billes rouges indiscernables au toucher.
On prélève au hasard, successivement et avec remise, deux billes de ce sac et on compte le nombre de billes bleues.

1. Déterminer l'univers E de cette expérience aléatoire.

2. a) Réaliser la feuille de calcul ci-dessous en saisissant :

- dans les cellules B2 et C2 : =SI(ALEA.ENTRE.BORNES(1;20)<=12;1;0)
- dans la cellule D2 : =SOMME(B2:C2)

	A	B	C	D	E	F	G
1	Nombre d'épreuves	1^re^ tirage	2^e^ tirage	Total		Nombre de billes bleues	Fréquence
2	1	0	1	1		0	
3	2	1	0	1		1	
4	3	1	0	1		2	
5	4	0	0	0		Total	

b) Recopier vers le bas afin de simuler 5 000 épreuves.

c) Dans la cellule G2, saisir : =NB.SI(D$2:D$5001;F2)/5000 .
Recopier cette formule dans les cellules G3 et G4. Compléter la cellule G5.

d) Quel modèle de cette expérience aléatoire semble convenir ?

Solution

1. $E = \{0\,;1\,;2\}$

2. a) La formule saisie en B2 et en C2 renvoie 1 (on assimile à bille bleue) si le nombre entier aléatoire entre 1 et 20 est inférieur ou égal à 12, et 0 sinon.

c) On calcule les fréquences d'apparition de 0, 1 ou 2 billes bleues dans la plage D2:D5001.
On obtient les résultats ci-contre.

d) On modélise cette expérience aléatoire en assimilant la fréquence d'apparition de 0, 1 ou 2 à la probabilité théorique de 0, 1 ou 2.

Dans les tirages possibles, 00, 01, 10, 11, il y a 0, 1 ou 2 billes bleues.

F	G
Nombre de billes bleues	Fréquence
0	0,16
1	0,49
2	0,35
Total	1

À VOTRE TOUR

54 Une urne opaque contient 5 jetons rouges et 10 jetons blancs.
On prélève au hasard, successivement et avec remise, deux jetons de cette urne et on compte le nombre de jetons rouges.

a) Adapter la feuille de calcul de l'exercice 53 à cette expérience aléatoire et répéter 3 000 épreuves.

b) Quel modèle de cette expérience aléatoire semble convenir ?

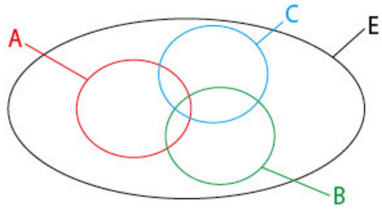
55 Un dé équilibré à six faces possède quatre faces numérotées 1 et deux faces numérotées 2.
On lance ce dé deux fois de suite et on note le nombre de 1 obtenus.

a) Adapter la feuille de calcul de l'exercice 53 à cette expérience aléatoire.
Répéter 10 000 épreuves.

b) Quel modèle de cette expérience aléatoire semble convenir ?

Utiliser le langage des événements

56 **a)** Reproduire le diagramme ci-dessous où A, B, C sont trois événements d'une expérience aléatoire d'univers E.



b) • Colorer en jaune l'événement $A \cap (B \cup C)$.

• Hachurer l'événement $(A \cap B) \cup (A \cap C)$.

• Que peut-on en conclure ?

c) Reproduire à nouveau le diagramme de la question **a)** afin de comparer les événements :

$$A \cup (B \cap C) \quad \text{et} \quad (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Les deux égalités rencontrées ci-dessus sont appelées lois de De Morgan du nom du mathématicien anglais du 19e siècle, Auguste De Morgan.

57 **a)** Dessiner un diagramme où A et B sont deux événements, tels que $A \cap B \neq \varnothing$, d'une expérience aléatoire d'univers E.

b) On note $A \setminus B$ l'événement qui est réalisé lorsque A est réalisé mais pas B.

(En langage ensembliste, on dit que $A \setminus B$ est la différence de A et B.)

• Colorer en rouge l'événement $A \setminus B$.

• Colorer en vert l'événement $B \setminus A$.

c) On note $A \,\Delta\, B$ (lire « A delta B ») l'événement $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

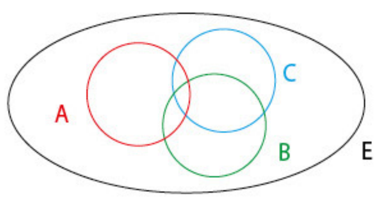
(En langage ensembliste, on dit que $A \,\Delta\, B$ est la différence symétrique de A et de B.)

Reproduire à nouveau le diagramme de la question **a)** afin de colorer en bleu l'événement $A \,\Delta\, B$.

Comparer les événements :

$$A \,\Delta\, B \quad \text{et} \quad (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

d) Reproduire le schéma ci-dessous et comparer les événements $(A \,\Delta\, B) \cap C$ et $(A \cap C) \,\Delta\, (B \cap C)$.



Calculer des probabilités

58 On dispose de trois dés à six faces numérotées de 1 à 6.

Dé 1 : dé équilibré.

Dé 2 : dé truqué selon les modalités suivantes :

Issue	1	2	3	4	5	6
Probabilité	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

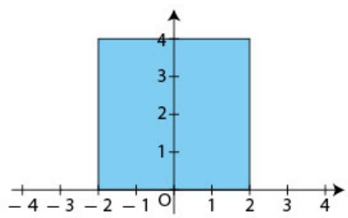
Dé 3 : dé truqué selon les modalités suivantes :

Issue	1	2	3	4	5	6
Probabilité	0,15	0,05	0,2	0,05	0,25	0,3

Quel dé faut-il choisir pour que la probabilité d'obtenir un chiffre impair soit la plus élevée ?

59 Le plan est muni du repère ci-dessous.

On choisit au hasard un point dont les coordonnées $(x\,;y)$ sont telles que : $x \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{N}$, $-2 \leqslant x \leqslant 2$ et $0 \leqslant y \leqslant 4$.



On considère les événements :

A : « Le point est situé sur la droite représentant la fonction affine $x \mapsto \frac{1}{2}x + 3$ » ;

B : « Le point appartient à la courbe représentant la fonction racine carrée » ;

C : « Le point appartient à la courbe représentant la fonction carré ».

a) Déterminer la probabilité de chacun des événements :

• A • B • C

b) Parmi ces trois événements, quels sont ceux qui sont incompatibles ?

60 Un sac opaque contient 50 jetons numérotés de 0 à 49.

On prélève au hasard un jeton de ce sac et on note le numéro du jeton obtenu.

On considère les événements :

A : « Le numéro obtenu est divisible par 9 » ;

B : « Le numéro obtenu est un multiple de 8 » ;

C : « Le numéro obtenu est un nombre premier ».

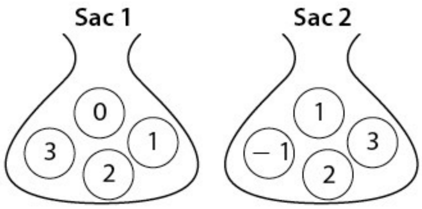
Déterminer la probabilité de chacun des événements.

a) $\overline{A}$ **b)** $A \cap B$ **c)** $A \cup B$

d) C **e)** $B \cup C$ **f)** $A \cup C$

61 Sur une liste de 200 espèces animales, 120 espèces ne sont pas menacées par le changement climatique, 70 espèces ne sont pas menacées par la déforestation et 25 espèces ne sont menacées ni par la déforestation, ni par le changement climatique.
On choisit au hasard l'une de ces espèces animales.
1. Décrire cet énoncé à l'aide d'un tableau croisé ou d'un diagramme.
2. Déterminer la probabilité qu'il s'agisse :
a) d'une espèce menacée par le changement climatique ou par la déforestation ;
b) d'une espèce menacée par la déforestation ;
c) d'une espèce menacée par le changement climatique mais pas par la déforestation.

62 On prélève un jeton de chacun des sacs opaques ci-dessous. On note a le numéro du jeton prélevé dans le sac 1 et b le numéro du jeton prélevé dans le sac 2, puis $(a\,;b)$ le couple obtenu.



1. Lister toutes les issues de cette expérience aléatoire.
2. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - 3$.
On considère les événements :
A : « L'image de a par f est b » ;
B : « Un antécédent de a par f est b ».
Déterminer chaque probabilité :
a) P(A) **b)** P(B) **c)** P(A ∩ B) **d)** P(A ∪ B)

63 On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. On considère les événements :
A : « La carte tirée est de couleur noire » ;
B : « La carte tirée est un trèfle » ;
C : « La carte tirée est un roi ».
Déterminer la probabilité de chacun des événements :
a) A **b)** B **c)** C **d)** A ∩ C **e)** B ∩ C **f)** A ∪ B

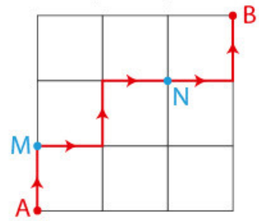
64 Une urne contient 100 boules numérotées 00, 01, 02, …, 99.
On tire une boule au hasard et on lit le numéro obtenu.
On considère les événements :
A : « Le chiffre 0 figure dans le numéro » ;
B : « Le chiffre 9 figure dans le numéro ».
Déterminer la probabilité de chacun des événements :
a) A **b)** B **c)** A ∩ B **d)** A ∪ B

65 Dans un camping, la répartition des touristes selon les âges et les sexes est présentée dans le tableau ci-dessous.

	Moins de 20 ans	De 20 à 60 ans	Plus de 60 ans
Femme	11,79 %	25,23 %	13,84 %
Homme	12,37 %	25,57 %	11,2 %

On choisit au hasard la fiche d'un touriste de ce camping.
On assimile les probabilités aux fréquences observées.
Déterminer la probabilité de chacun des événements :
a) H : « La personne choisie est un homme » ;
b) A : « La personne choisie a 60 ans ou moins » ;
c) B : « La personne choisie a au moins 20 ans ».

66 On dispose du quadrillage présenté ci-dessous. Un chemin de A vers B est une suite de six déplacements d'une case : trois déplacements vers le haut (H) et trois déplacements vers la droite (D) dans n'importe quel ordre.



Un exemple de chemin (H ; D ; H ; D ; D ; H)

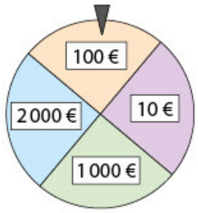
1. Déterminer, à l'aide d'un arbre, le nombre de chemins de A vers B.
2. On choisit au hasard l'un des chemins de A vers B.
a) Quelle est la probabilité pour qu'il passe par le point M ? le point N ?
b) Quelle est la probabilité pour qu'il passe par les deux points M et N ?
c) En déduire la probabilité pour que ce chemin passe par l'un au moins des deux points.

Étudier des expériences à plusieurs épreuves

67 On lance trois fois de suite une pièce de monnaie équilibrée. On note la face obtenue à chaque lancer.
a) Représenter la situation par un arbre.
b) Déterminer la probabilité d'obtenir exactement deux Pile.

68 On lance deux fois de suite un dé équilibré à six faces numérotées de 1 à 6. On note la somme des numéros obtenus lors des lancers.
a) Représenter la situation par un tableau croisé.
b) On considère les événements :
A : « Le résultat obtenu est 5 » ;
B : « Le résultat obtenu est 8 ».
Déterminer les probabilités P(A) et P(B).

69 Deux candidats d'un jeu télévisé doivent, l'un après l'autre, tourner la roue ci-contre.



La roue est bien équilibrée, et tous les secteurs sont superposables.

a) Représenter la situation par un arbre.

b) Déterminer la probabilité que le premier candidat ait moins gagné que le second.

70 Un sac contient cinq boules, indiscernables au toucher, numérotées 1, 2, 3, 4, 5. On tire une boule du sac ; on lit le nombre inscrit sur cette boule et on la remet dans le sac. On répète cette opération une seconde fois.

a) Déterminer le nombre de tirages possibles.

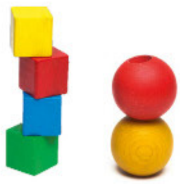
b) Déterminer la probabilité de chacun des événements :

A : « La somme des deux nombres lus est égale à 10 » ;

B : « La somme des deux nombres lus est égale à 1 » ;

C : « La même boule est tirée deux fois de suite ».

71 Dans une boîte, un jeune enfant dispose de quatre cubes : un jaune, un rouge, un vert, un bleu, et de deux boules, une rouge et une jaune.



Il prend au hasard un objet puis, sans remettre le premier tiré, il en prend un second. Il obtient ainsi un couple d'objets.

a) Déterminer le nombre de tirages possibles.

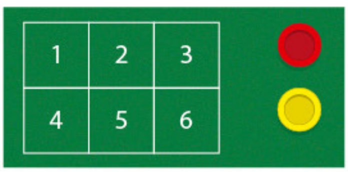
b) Déterminer la probabilité de chaque événement :

A : « Il a obtenu deux cubes » ;

B : « Il a obtenu deux objets de la même couleur » ;

C : « Il a obtenu deux objets de couleurs différentes ».

72 On dispose du tapis de jeu ci-contre et de deux jetons, l'un rouge et l'autre jaune.



On pose au hasard le jeton rouge sur une case du tapis, puis le jeton jaune sur l'une des cases vides restantes.

a) Combien y a-t-il de dispositions possibles des deux jetons sur le tapis ?

b) Déterminer la probabilité de chaque événement :

A : « Les deux jetons occupent des cases portant des numéros de parité différente » ;

B : « Les deux jetons occupent des cases portant des numéros pairs » ;

C : « Les deux jetons occupent des cases dont la somme des numéros est supérieure ou égale à 8 ».

S'entraîner à la logique → p. XXI

73 Événement contraire

Les données de ce tableau concernent la population des élèves d'un lycée.

	Seconde	Autre classe
Garçon	31 %	18 %
Fille	34 %	17 %

On choisit au hasard un élève de ce lycée.

Décrire par une phrase affirmative l'événement contraire de chaque événement.

a) A : « L'élève choisi est un garçon de Seconde » ;

b) B : « L'élève choisi n'est pas en Seconde » ;

c) C : « L'élève choisi est une fille qui n'est pas en Seconde ».

74 « Ou » : langage courant, mathématique

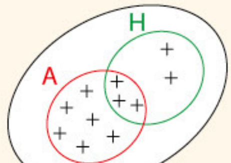
1. En fin de match, l'entraîneur décide de procéder à un dernier changement.

Il interpelle Grégoire : « Ce sera Samy ou toi, allez vous échauffer ».

Les deux remplaçants pourront-ils rentrer en jeu ?

2. Parmi les 30 élèves de Seconde 10, certains suivent l'option arts plastiques (A) ou histoire des arts (H). Ils bénéficient alors d'une réduction à l'entrée du musée.

a) Ce diagramme représente les élèves de Seconde 10 qui suivent les options A et H.



On désigne un élève de Seconde 10 au hasard.

Déterminer la probabilité de chacun des événements :

D : « L'élève suit les options A et H » ;

E : « L'élève suit l'option A ou l'option H ».

b) Le professeur principal de Seconde 10 annonce : « Participent à la visite de mercredi, tous les élèves qui suivent l'option histoire des arts et tous les élèves qui suivent l'option arts plastiques. »

Quel sera l'effectif de ce groupe d'élèves ?

75 Inclusion et probabilité

$E = \{x_1 ; x_2 ; \dots ; x_n\}$ est l'univers d'une expérience aléatoire. A et B sont deux événements.

a) Démontrer que la proposition suivante est vraie :

$$\text{si } A \subset B, \text{ alors } P(A) \leqslant P(B).$$

b) La proposition réciproque est-elle vraie ?

76 Changer de modèle

Modéliser **Calculer** **Communiquer**

Diffusée entre avril 2011 et avril 2019, la série télévisée *Game of Thrones* a connu un grand succès. Chacune des saisons 1 à 6 a 10 épisodes, la saison 7 a 7 épisodes et la saison 8 a 6 épisodes.

Lisa veut faire découvrir cette série à une amie et elle choisit au hasard un épisode.

a) Lisa a choisi un épisode de la saison 5. Quelle est la probabilité que cela ne soit pas l'épisode 10 ?

b) Lisa a choisi un épisode au hasard dans l'une des huit saisons. Quelle est la probabilité que cela ne soit pas un épisode 6 ?

77 Investigate a NBA club

Calculer **Communiquer**

The employees of a local NBA club are distributed as follows.

	Player	Technical agent	Other
Man	47	18	37
Woman	25	11	12

One of the employees is selected at random.

Let A be the event "The selected employee is a woman", let B be the event "The selected employee is not a player". Find and interpret the following probabilities:

a) $P(A)$ **b)** $P(A \cap \overline{B})$ **c)** $P(A \cup B)$

78 Algo Utiliser un algorithme

Raisonner **Calculer**

Un sac opaque contient trois boules numérotées 0,1 et 2. On prélève trois fois de suite, et avec remise, une boule de ce sac et on note alors le produit des numéros obtenus.

Voici un algorithme pour simuler cette expérience aléatoire.

$M \leftarrow 1$
Pour i allant de 1 à 3
  $n \leftarrow$ nombre entier aléatoire compris entre 0 et 2
  $M \leftarrow M \times n$
Fin Pour

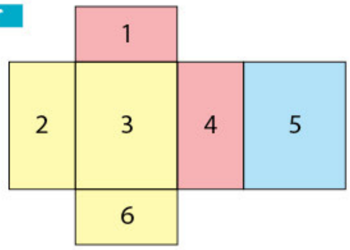
a) Que représentent n et M dans cet algorithme ?

b) Combien d'issues a cette expérience aléatoire ?

c) Déterminer la probabilité que M soit égal à 2.

79 Imaginer une stratégie

Chercher **Modéliser**



Voici le patron d'un dé ayant la forme d'un parallélépidède rectangle.

On a remarqué qu'une grande face (numérotée 3 ou 5) a huit fois plus de chances d'être obtenue qu'une autre face. On lance ce dé.

Quelle est la probabilité d'obtenir une face jaune ou une face dont le numéro est pair ?

80 Gagner à un jeu

Narration de recherche

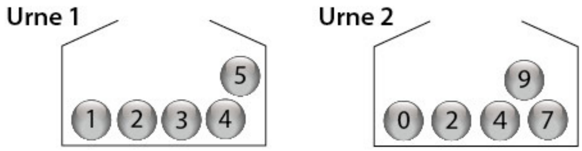
Chercher **Modéliser** **Communiquer**

Rédiger les différentes étapes de la recherche, sans omettre les fausses pistes et les changements de méthode.

Problème On lance une pièce de monnaie équilibrée.

Si la pièce tombe sur Pile, alors on choisit au hasard une boule dans l'urne 1 et on note son numéro.

Si la pièce tombe sur Face, alors on choisit au hasard une boule dans l'urne 2 et on note son numéro.



Pour gagner, un joueur doit obtenir un numéro impair ou zéro.

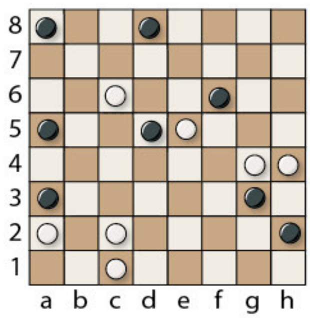
Déterminer la probabilité que le joueur gagne.

81 Étudier un échiquier

Problème ouvert

Chercher **Raisonner** **Calculer**

Sur cet échiquier sont placés des pions blancs et des pions noirs.



On choisit au hasard une rangée (ligne ou colonne) de cet échiquier et on s'intéresse aux événements :

- A : « La rangée compte au moins deux pions » ;
- B : « Il y a au moins un pion noir sur la rangée ».

Déterminer la probabilité de l'événement $A \cup B$.

82 Histoire des maths Étudier le jeu des partis

Modéliser **Raisonner** **Chercher**

Harry et Anna jouent à un jeu dans lequel ils ont autant de chances de gagner que de perdre une partie. Ils ont chacun misé 32 €.

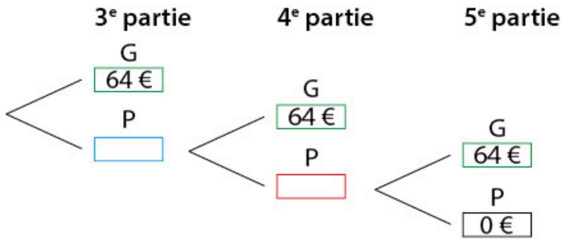
Un joueur a gagné le jeu dès qu'il a remporté trois parties. Il empoche alors les 64 €.

1. En combien de parties ce jeu peut-il se dérouler ?

2. On s'intéresse à Anna et on note G lorsqu'elle gagne la partie et P lorsqu'elle la perd.

On suppose ici qu'Anna a gagné les deux premières parties. Si Anna gagne l'une des 3e, 4e ou 5e partie, alors elle remporte les 64 € (cases vertes).

a) Reproduire l'arbre des possibles ci-dessous.



b) On considère la case rouge : Anna a perdu la 4e partie. À ce moment-là, Anna a 50 % de chances de gagner la 5e partie et de remporter 64 €, et 50 % de chances de la perdre et de ne rien gagner.

Si la 5e partie ne pouvait pas avoir lieu, quel gain « moyen » pourrait-on attribuer à Anna dans la case rouge ?

c) On considère la case bleue : Anna a perdu la 3e partie. Si la 4e partie ne pouvait pas avoir lieu, quel gain « moyen » pourrait-on attribuer à Anna dans la case bleue ?

3. On suppose maintenant qu'Anna a gagné la 1re partie.

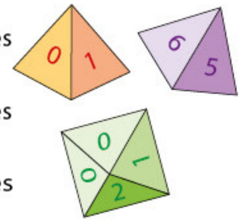
a) Sur le modèle précédent, réaliser l'arbre des possibles pour Anna (il contiendra en particulier l'arbre de la question **2. a)**.

b) Compléter les gains d'Anna de la droite vers la gauche, et déterminer son gain « moyen » au cas où la 2e partie ne pouvait pas avoir lieu.

Antoine Gombaud, dit « le chevalier de Méré », est un écrivain français du 17e siècle. Il était familier avec les jeux de hasard. En particulier, il a posé le problème ci-dessus, appelé « problème des partis », à Blaise Pascal. Ce dernier, dans une lettre adressée à Pierre de Fermat en 1654, a résolu ce problème des partis.

83 Prendre des initiatives

Modéliser **Raisonner** **Communiquer**



Un joueur a à sa disposition :

- un dé tétraédrique portant les numéros 0 ; 1 ; 2 ; 3 ;
- un dé tétraédrique portant les numéros 6 ; 5 ; 4 ; 3 ;
- un dé octaédrique portant les numéros 0 ; 0 ; 0 ; 1 ; 1 ; 2 ; 2 ; 2.

Le joueur peut au choix :

- lancer les deux dés tétraédriques et effectuer la somme des deux numéros cachés ;
- lancer le dé octaédrique et effectuer la somme des sept numéros visibles.

Pour gagner, le joueur doit obtenir une somme égale à 6. Quel choix lui conseiller ?

Des Défis

84 Les anneaux olympiques

Une puce se trouve dans l'anneau olympique bleu qui symbolise l'Europe.

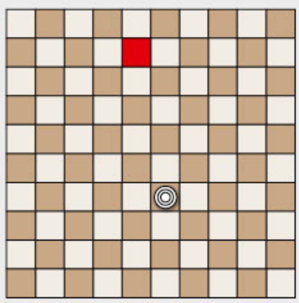
À chaque seconde, elle effectue, au hasard, un saut dans un anneau en contact avec l'anneau dans lequel elle se trouvait.

Quelle est la probabilité qu'au bout de 5 s, elle se trouve dans l'anneau vert symbolisant l'Océanie ?

85 Se déplacer en diagonale

Au jeu de dames, les pions ne peuvent se déplacer qu'en avançant en diagonale.

Quelle est la probabilité que le pion blanc ci-contre atteigne la case rouge après 5 déplacements ?



QCM Bilan

QCM interactifs

86 Dans chaque cas, donner la réponse exacte en justifiant.

Pour les questions **1** à **3**, A et B sont deux événements d'une expérience aléatoire d'univers E tels que :

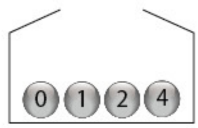
$$P(A) = 0{,}35\ ; \quad P(B) = 0{,}42\ ; \quad P(\overline{A} \cap B) = 0{,}15$$

		A	B	C	D
1	La probabilité $P(\overline{A} \cup B)$ est égale à …	0,92	0,82	$P(\overline{A}) + P(A \cap \overline{B})$	$1 - P(\overline{A} \cap B)$
2	La probabilité $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ est égale à …	0,77	0,5	$1 - P(A \cap B)$	$P(A \cap B)$
3	La probabilité $P(A \cup \overline{B})$ est égale à …	0,93	$1 - P(\overline{A} \cup B)$	$1 - P(A \cap B)$	0,85

Pour les questions **4** à **6**, on tire au hasard, successivement et avec remise, deux cartes dans un jeu de 32 cartes. Chacune des 1 024 issues de cette expérience est un couple de cartes, par exemple (As de cœur ; Roi de pique).

		A	B	C	D
4	A est l'événement : « Avoir un Roi et un As ». Alors …	A est réalisé par 16 issues	A est réalisé par 32 issues	$P(A) = \dfrac{1}{64}$	$P(A) = \dfrac{1}{16}$
5	B est l'événement : « Avoir au moins une fois la Dame de carreau ». Alors …	B est réalisé par 63 issues	B est réalisé par 62 issues	$P(B) = \dfrac{31}{512}$	$P(B) = \dfrac{3}{32}$
6	A et B sont les événements des questions **4** et **5**. Alors …	A et B sont incompatibles	$A \cap B \neq \varnothing$	$P(A \cup B) = \dfrac{91}{1\,024}$	$P(A \cap B) = \dfrac{79}{1\,024}$

Pour les questions **7** à **10**, on tire au hasard, successivement et avec remise, deux boules de l'urne ci-contre.
On effectue alors le produit des numéros obtenus.



		A	B	C	D
7	Un exemple d'issue de cette expérience aléatoire est …	(1 ; 4)	(0 ; 1)	3	4
8	L'univers E de cette expérience aléatoire comporte …	16 issues	6 issues	7 issues	2 issues
9	A est l'événement « L'issue est 0 » et B est l'événement « L'issue est 2 ». Alors …	$P(A) = \dfrac{1}{6}$	$P(A) = \dfrac{7}{16}$	$P(\overline{B}) = \dfrac{5}{6}$	$P(B) = \dfrac{7}{8}$
10	A et B sont les événements de la question **9**. Alors …	$P(A \cap B) \neq 0$	$P(A \cap \overline{B}) < P(\overline{A} \cap B)$	$P(A \cup B) = \dfrac{9}{16}$	$P(\overline{A} \cup B) > P(A \cup \overline{B})$

Vérifiez vos réponses p. 346 pour avoir votre note (considérez 1 point par réponse juste).

87 Histoire des maths Le paradoxe du Duc de Toscane

La situation problème

Au 17e siècle, à la cour de Florence, en Italie, de nombreux jeux de société étaient pratiqués, en particulier des jeux de dés.
Grand joueur, le Duc de Toscane a mis en évidence ce qu'il pensait être un paradoxe.
Les explications lui ont été fournies par Galilée, alors nommé Premier Mathématicien à l'Université de Pise.
Utiliser les différentes informations pour retrouver le raisonnement utilisé par Galilée pour expliquer ce paradoxe et donner les probabilités cherchées.

DOC 1 Le jeu

Le jeu consiste à lancer trois fois de suite un dé équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et à faire la somme des numéros obtenus.

DOC 2 Les observations du Duc de Toscane

$$9 = \begin{cases} 1+2+6 \\ 1+3+5 \\ 1+4+4 \\ 2+2+5 \\ 2+3+4 \\ 3+3+3 \end{cases} \qquad 10 = \begin{cases} 1+3+6 \\ 1+4+5 \\ 2+2+6 \\ 2+3+5 \\ 2+4+4 \\ 3+3+4 \end{cases}$$

DOC 3 Le paradoxe du Duc de Toscane

Le Duc de Toscane a remarqué que, bien qu'il y ait autant de façons d'écrire 9 et 10 comme la somme de trois nombres compris entre 1 et 6, on obtient plus souvent un total de 10.

88 Les couleurs des drapeaux

La situation problème

Un enfant prélève, au hasard et l'un après l'autre, trois crayons de couleur de sa trousse afin de colorier un drapeau.
Utiliser les différentes informations pour déterminer, pour chacun des drapeaux, la probabilité que l'enfant puisse le colorier.

DOC 1 Les drapeaux

Sénégal

Finlande

Brésil

Autriche

Afrique du Sud

Italie

DOC 2 Le matériel

- Au départ, la feuille est blanche.
- La trousse contient :
  - un crayon rouge ;
  - un crayon bleu ;
  - un crayon jaune ;
  - un crayon vert.
- La trousse est opaque et les crayons sont indiscernables au toucher.

89 Une rencontre à New York

La situation problème

En vacances à Manhattan, Alex doit retrouver son amie Sara. Sur le parcours, deux tournages de films ont lieu. Alex ignore les lieux de ces tournages.
Utiliser les différentes informations pour déterminer si, en rejoignant Sara, Alex a plus de chances de voir le tournage du film 1, celui du film 2 ou aucun des deux.

DOC 1 Le parcours d'Alex

- Le parcours d'Alex vers Sara est une suite de six déplacements : trois déplacements vers le nord (N) et trois vers l'est (E), dans n'importe quel ordre, par exemple : (N ; E ; E ; N ; E ; N).
- Alex choisit son parcours au hasard parmi tous les parcours possibles.

DOC 2 Le plan du parcours

DOC 3 Les lieux de tournage

Le tournage du film 1 a lieu au niveau du théâtre et celui du film 2 au niveau du restaurant.

90 Une soirée entre amis

La situation problème

Durant leur conversation, quatre amis échangent sur leurs dates d'anniversaire.
Julien affirme : « Il y a une chance sur deux pour qu'au moins deux d'entre nous soyons nés le même mois. »
Utiliser les différentes informations pour savoir si Julien a raison.

DOC 1 Précisions sur l'expérience aléatoire

On suppose que, pour chaque personne, les mois d'anniversaire sont équiprobables.
En numérotant les mois de l'année de 1 à 12, une issue de cette expérience est un quadruplet, par exemple (2 ; 1 ; 12 ; 1).

DOC 2 Extraits de la conversation

Lisa : « Comment veux-tu que l'on sache si tu as raison ? »
Julien : « Tu peux faire un arbre. »
André : « Au moins deux, ça signifie 2, 3 ou 4. »
Amélie : « C'est le contraire de 0 ou 1. »