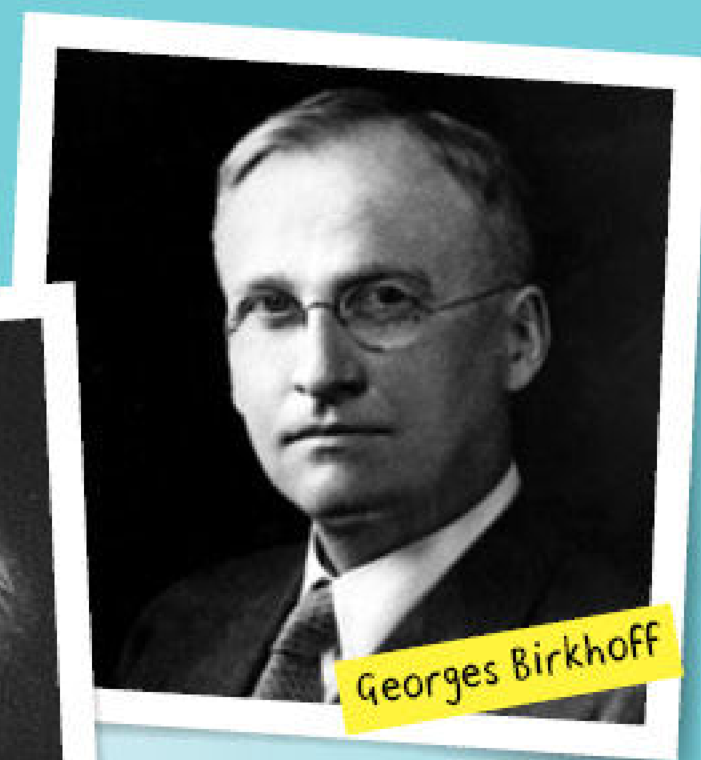
13 Primitives. Équations différentielles

HISTOIRE DES MATHS

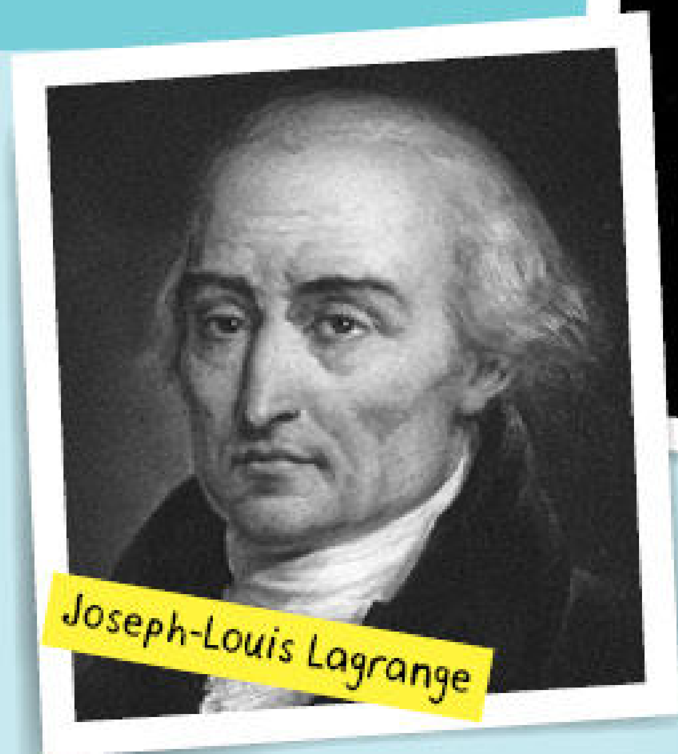
Vers 1680, le mathématicien anglais **Isaac Newton** définit la dérivation de manière intuitive. Il conçoit la recherche de primitives d'une fonction comme « une dérivation à l'envers ».

Avec les travaux de Newton et ceux du mathématicien allemand **Gottfried Leibniz** qui, en 1684, expose la résolution de certaines équations différentielles, l'analyse mathématique devient un outil pour la physique moderne. En particulier, elle sert à décrire la loi de gravitation universelle et le mouvement des planètes du système solaire.

À la fin du 19e siècle, des mathématiciens tels que **Henri Poincaré** et **Lazarus Fuchs** réalisent des progrès considérables en résolvant des équations différentielles plus variées. Ils montrent l'importance des conditions initiales dans la stabilité des solutions.



Georges Birkhoff



Joseph-Louis Lagrange

▶ **Joseph-Louis Lagrange** (1736-1813) est sarde, naturalisé français. Il est considéré comme l'un des plus grands mathématiciens du 18e siècle ; il introduit de nouvelles méthodes pour le calcul des variations et l'étude des équations différentielles.

▶ **Georges Birkhoff** (1884-1944) est un mathématicien américain. Il fait progresser l'étude des équations différentielles, et développe la théorie des systèmes dynamiques différentiels.

Vers 1680 Newton et Leibniz développent le calcul différentiel.

1711 Newton et Leibniz se disputent l'antériorité de leurs travaux.

1739 Euler résout des équations différentielles du type $y' = ay$.

1746 D'Alembert résout des équations différentielles à plusieurs variables.

1680 Papin invente l'autocuiseur

1696 Signature du traité de Turin

1718 Les colons français fondent la Nouvelle-Orléans

1724 *Passion selon St-Jean* de Bach

1741 *La vie de Marianne* de Marivaux

1680 1700 1720 1740 1760

L'ouragan Katrina au-dessus de la Louisiane, en 2005.

L'équation différentielle de Navier-Stokes permet de modéliser l'atmosphère, et donc de faire des prévisions météorologiques.

Seule une résolution approchée par des méthodes numériques est possible.

De nos jours, l'équation n'a toujours pas été résolue ; elle fait partie des « sept problèmes du millénaire » posés par l'Institut de mathématiques Clay en 2000.

Les contenus et capacités travaillés dans ce chapitre

	Savoir-faire	Exercices
• Équation différentielle $y' = f$ et notion de primitive d'une fonction continue.	1 à 4	16 à 36
• Calculer une primitive à l'aide de primitives de fonctions de référence.	5, 7, 8	37, 39 à 43
• Calculer une primitive à l'aide de primitives de fonctions de la forme $(v' \circ u) \times u'$.	6, 9, 10	38, 44 à 56
• Résoudre une équation différentielle du type $y' = ay$ ou $y' = ay + b$ avec $a \neq 0$.	11 à 14	57 à 84
• Résoudre une équation différentielle du type $y' = ay + f$ à partir de la donnée d'une solution particulière.		85 à 87
• Résoudre par la méthode d'Euler $y' = f$, $y' = ay + b$.	15	113, 123

Bien démarrer

Calcul mental

Rappels utiles

• Tableau des dérivées usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	Ensemble
$k \in \mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$
x^n $n \in \mathbb{Z} - \{0;1\}$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$ si $n \geqslant 2$ $\mathbb{R}^*$ si $n \leqslant -1$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
$\ln(x)$	$\dfrac{1}{x}$	$]0;+\infty[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$

• Règles de dérivation

u et v sont deux fonctions dérivables sur I et $k \in \mathbb{R}$.

$(u+v)' = u' + v'$ $\quad (ku)' = ku'$ $\quad (u \times v)' = u'v + uv'$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ (si $v(x) \neq 0$ pour tout x de I)

• Dérivée de $v \circ u$

u est une fonction dérivable sur un intervalle I à valeurs dans un intervalle J et v une fonction dérivable sur l'intervalle J.

$$(\boldsymbol{v} \circ \boldsymbol{u})' = \boldsymbol{u}' \times (\boldsymbol{v}' \circ \boldsymbol{u})$$

Conséquences

Fonction	Dérivée	Condition
u^n $n \in \mathbb{Z} - \{0;1\}$	$nu^{n-1}u'$	$u(x) \neq 0$ pour tout x de I si $n \leqslant -1$
$\dfrac{1}{u}$	$-\dfrac{u'}{u^2}$	$u(x) \neq 0$ pour tout x de I
$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$u(x) > 0$ pour tout x de I
$\ln(u)$	$\dfrac{u'}{u}$	$u(x) > 0$ pour tout x de I
e^u	$u'e^u$	
$\cos(u)$	$-u'\sin(u)$	
$\sin(u)$	$u'\sin(u)$	

À l'oral Questions-Tests

Pour chaque question, il y a une seule réponse exacte.

1 **a)** Pour tout réel x, $g(x) = 3 - 2e^x$.
Pour tout réel x, $g'(x)$ est égal à :
(1) $3 - 2e^x$ **(2)** $-2e^x$ **(3)** $2e^x$

b) Pour tout réel x, $h(x) = \cos(x) + \sin(x)$.
Pour tout réel x, $h'(x)$ est égal à :
(1) $\cos(x) + \sin(x)$ **(2)** $\cos(x) - \sin(x)$ **(3)** $-\sin(x) + \cos(x)$

2 **a)** Pour tout réel $x > 0$, $f(x) = x\sqrt{x}$.
Pour tout réel $x > 0$, $f'(x)$ est égal à :
(1) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ **(2)** 1 **(3)** $\dfrac{3\sqrt{x}}{2}$

b) Pour tout réel x, $g(x) = (3x-1)e^x$.
Pour tout réel x, $g'(x)$ est égal à :
(1) $3e^x$ **(2)** $(3x+2)e^x$ **(3)** $3e$

c) Pour tout réel $x > 0$, $h(x) = \dfrac{3x-4}{2x+1}$.
Pour tout réel $x > 0$, $h'(x)$ est égal à :
(1) $\dfrac{11}{(2x+1)^2}$ **(2)** $\dfrac{12x-5}{(2x+1)^2}$ **(3)** $\dfrac{3}{2}$

3 **a)** Pour tout réel x, $f(x) = (7x+1)^3$.
Pour tout réel x, $f'(x)$ est égal à :
(1) $21(7x+1)^2$ **(2)** $3(7x+1)^2$ **(3)** 7^3

b) Pour tout réel x, $h(x) = \cos(3x-4)$.
Pour tout réel x, $h'(x)$ est égal à :
(1) $3\sin(3x-4)$ **(2)** $3\cos(3x-4)$ **(3)** $-3\sin(3x-4)$

4 **a)** Pour tout réel x, $f(x) = \sqrt{x^2+3}$.
Pour tout réel x, $f'(x)$ est égal à :
(1) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}$ **(2)** $\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+3}}$ **(3)** $\sqrt{2x}$

b) Pour tout réel x, $g(x) = 5e^{2x}$.
Pour tout réel x, $g'(x)$ est égal à :
(1) $5e^{2x}$ **(2)** $7e^{2x}$ **(3)** $10e^{2x}$

c) Pour tout réel $x > 1$, $h(x) = \ln(5x-4)$.
Pour tout réel $x > 1$, $h'(x)$ est égal à :
(1) $\dfrac{1}{5x-4}$ **(2)** $5\ln(5x-4)$ **(3)** $\dfrac{5}{5x-4}$

1 Déterminer une primitive d'une fonction

Un train roulant en ligne droite passe dans un tunnel à une vitesse de 50 m.s^{-1} et commence à freiner à la sortie.
On note :
- $d(t)$ la distance, en m, parcourue par le train, t secondes après sa sortie du tunnel. Ainsi $d(0) = 0$;
- $v(t)$ la vitesse du train, en m.s^{-1}, à l'instant t. Ainsi $v(0) = 50$.

1 On admet que pour tout réel t de $[0\,;+\infty[$, $v(t) = k\dfrac{t^2}{2} + \mathrm{C}$ où k et C sont deux constantes réelles.

a) Déterminer la valeur de C en utilisant $v(0) = 50$.
b) Sachant que le train s'arrête en 20 secondes, déterminer la valeur de k. Exprimer alors $v(t)$ en fonction de t.

2 On sait que $v = d'$, on dit que d est **une primitive** de la fonction v sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

a) Recopier et compléter : la fonction $f : t \mapsto -0{,}125\dfrac{t^{\cdots}}{\cdots} + 50\ldots$ est une primitive de la fonction v sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

b) On admet que toutes les primitives de v sur $[0\,;+\infty[$ sont les fonctions $t \mapsto f(t) + \mathrm{K}$ avec $\mathrm{K} \in \mathbb{R}$.
Parmi toutes ces primitives, déterminer celle, d, telle que $d(0) = 0$.
c) Calculer la distance d'arrêt, en m, du train. *Arrondir au centième.*

2 Résolution d'une équation différentielle

En 1950, un pays comptait 30,5 millions d'habitants.
$\mathrm{P}(t)$ est la population de ce pays, en million d'habitants, à l'instant $1950 + t$, en année, avec $t \geqslant 0$. Ainsi $\mathrm{P}(0) = 30{,}5$.
On suppose que la fonction P est dérivable sur $[0\,;+\infty[$.
Une étude a montré que la fonction P vérifie, pour tout réel $t \geqslant 0$, l'équation $\mathrm{P}'(t) = 0{,}005\mathrm{P}(t)$.
On dit que la fonction P est solution de l'**équation différentielle (E)** : $y' = 0{,}005y$.

a) Démontrer qu'il existe un réel a pour lequel la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{at}$ est solution de l'équation différentielle **(E)**.
b) On sait que la fonction P est une solution sur $[0\,;+\infty[$ de **(E)**.
On note f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(t) = \dfrac{\mathrm{P}(t)}{\mathrm{e}^{0{,}005t}}$.
Démontrer que pour tout réel $t \geqslant 0$, $f'(t) = 0$. Que peut-on en déduire pour la fonction f ?
c) Expliquer pourquoi pour tout réel $t \geqslant 0$, $\mathrm{P}(t) = k\mathrm{e}^{0{,}005t}$ avec $k \in \mathbb{R}$.
d) Sachant que $\mathrm{P}(0) = 30{,}5$, déterminer k et exprimer $\mathrm{P}(t)$ en fonction de t.
e) Estimer la population, en million d'habitants, de ce pays en 2050 si l'évolution se poursuit ainsi. *Arrondir au millier.*

Cours

Exercices
- 1 à 4 (ci-contre)
- 16 à 36

1 Primitives et équations différentielles $y' = f$

A Lien entre équation différentielle $y' = f$ et primitive de f

Vocabulaire

- Une **équation différentielle** est une équation où l'inconnue est une fonction et où interviennent des dérivées de cette fonction.
- **Résoudre** une équation différentielle, c'est trouver toutes les fonctions solutions de l'équation.

Définition

f est une fonction définie sur un intervalle I.
Dire que F est **une primitive** de f sur I signifie que F est dérivable sur I et $\mathbf{F' = f}$.

Autrement dit, une primitive de la fonction f sur I est une solution sur I de l'équation différentielle $y' = f$.

Exemple

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x + 2$.
La fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{F}(x) = \mathrm{e}^x + 2x$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
En effet, F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $\mathrm{F}'(x) = \mathrm{e}^x + 2 = f(x)$.
Ainsi, la fonction F est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = \mathrm{e}^x + 2$.

Propriété (admise)

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

B Primitives d'une même fonction

Propriétés

F est une primitive sur un intervalle I d'une fonction f continue sur I.
(1) Pour tout réel C, la fonction G : $x \mapsto \mathrm{F}(x) + \mathrm{C}$ est aussi une primitive de f sur I.
(2) Toute primitive de la fonction f sur I est de ce type.

On dit aussi que « deux primitives d'une même fonction sur un intervalle diffèrent d'une constante ».

Démonstrations

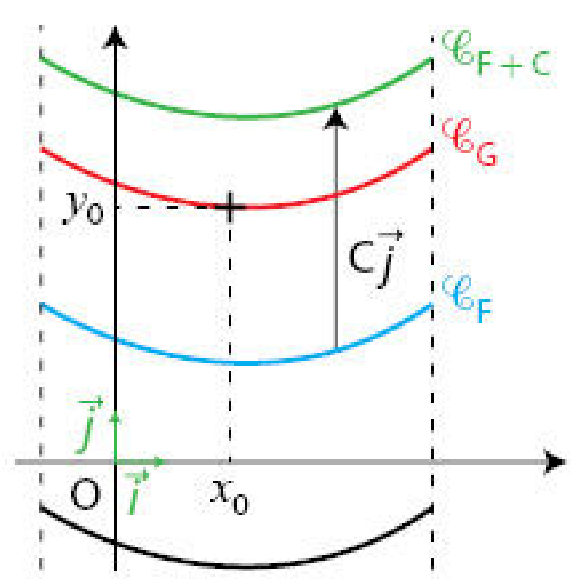
(1) G est dérivable sur I et pour tout réel x de I, $\mathrm{G}'(x) = \mathrm{F}'(x) = f(x)$ donc G est aussi une primitive de f sur I.
(2) On suppose que H est une primitive de f sur I, alors H est dérivable sur I et $\mathrm{H}' = f$.
Or, $\mathrm{F}' = f$ donc $(\mathrm{H} - \mathrm{F})' = 0$ sur I. Ainsi, la fonction $\mathrm{H} - \mathrm{F}$ est constante sur I.
Donc il existe un réel C tel que pour tout réel x de I, $\mathrm{H}(x) - \mathrm{F}(x) = \mathrm{C}$ soit $\mathrm{H}(x) = \mathrm{F}(x) + \mathrm{C}$.

Vidéo
JaiCompris.com
Cette démonstration est présentée en vidéo

Conséquence : l'équation différentielle $y' = f$ **a pour solutions toutes les primitives de f sur** I.

Propriété

f est une fonction continue sur un intervalle I.
Il existe une **unique primitive** G de f sur l'intervalle I telle que $\mathbf{G(x_0) = y_0}$ où x_0 est un nombre réel donné de I et y_0 un nombre réel donné.



Démonstration

Avec les notations précédentes, $\mathrm{G}(x_0) = y_0$ s'écrit $\mathrm{F}(x_0) + \mathrm{C} = y_0$ soit $\mathrm{C} = y_0 - \mathrm{F}(x_0)$.
Donc $\mathrm{G}(x) = \mathrm{F}(x) + y_0 - \mathrm{F}(x_0)$ et G est définie de façon unique.

EXERCICES RÉSOLUS

1 Utiliser des langages différents

a) f est la fonction définie sur $\mathrm{I} = [0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{3x^2+6x+4}{(x+1)^2}$.

Vérifier que la fonction F définie sur l'intervalle I par $\mathrm{F}(x) = \dfrac{3x^2+4x}{x+1}$ est une primitive de f sur I.

b) Vérifier que la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{G}(x) = (x-1)\mathrm{e}^x$ est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = x\mathrm{e}^x$.

Solution

a) La fonction F est dérivable sur I et, pour tout réel x de I :

$$\mathrm{F}'(x) = \frac{(6x+4)(x+1)-(3x^2+4x)\times 1}{(x+1)^2} = \frac{3x^2+6x+4}{(x+1)^2}.$$

Donc F est une primitive de f sur I.

b) La fonction G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x :

$$\mathrm{G}'(x) = 1\times\mathrm{e}^x + (x-1)\mathrm{e}^x = x\mathrm{e}^x.$$

Donc G est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = x\mathrm{e}^x$.

> Pour démontrer que F est une primitive de f sur I, on calcule $\mathrm{F}'(x)$ et on vérifie que pour tout x de I, $\mathrm{F}'(x) = f(x)$.

> Autrement dit, G est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto x\mathrm{e}^x$.

2 Utiliser une condition initiale

D'après l'exercice 1, la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{G}(x) = (x-1)\mathrm{e}^x$ est une primitive de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x\mathrm{e}^x$.

a) Déterminer l'ensemble des primitives de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

b) Déterminer la primitive G_0 de g sur $\mathbb{R}$ qui prend la valeur -2 en 0.

Solution

a) L'ensemble des primitives de la fonction g sur $\mathbb{R}$ est constitué des fonctions $x \mapsto (x-1)\mathrm{e}^x + \mathrm{C}$ avec $\mathrm{C}\in\mathbb{R}$, définies sur $\mathbb{R}$.

b) G_0 est une primitive de g sur $\mathbb{R}$ donc il existe un réel C tel que pour tout réel x, $\mathrm{G}_0(x) = (x-1)\mathrm{e}^x + \mathrm{C}$.

$\mathrm{G}_0(0) = -2$ signifie donc que $-1\mathrm{e}^0 + \mathrm{C} = -2$ soit $\mathrm{C} = -1$.

Donc la primitive G_0 de g sur $\mathbb{R}$ qui prend la valeur -2 en 0 est définie par $\mathrm{G}_0(x) = (x-1)\mathrm{e}^x - 1$.

> Pour déterminer la primitive G de g vérifiant une condition initiale :
> - on détermine toutes les primitives de g ;
> - on détermine la constante pour laquelle la condition est vérifiée.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 1

3 **a)** f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}.$$

Vérifier que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\mathrm{F}(x) = \frac{-1}{\mathrm{e}^x+1}$$

est une primitive de f.

b) Vérifier que la fonction G définie sur $]0\,;+\infty[$ par $\mathrm{G}(x) = x\ln(x) - x$ est une solution sur $]0\,;+\infty[$ de l'équation différentielle $y' = \ln(x)$.

Sur le modèle de l'exercice résolu 2

4 D'après l'exercice 3, la fonction G définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$\mathrm{G}(x) = x\ln(x) - x$$

est une primitive de la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = \ln(x)$.

a) Déterminer l'ensemble des primitives de la fonction g sur $]0\,;+\infty[$.

b) Déterminer la primitive G_1 de g sur $]0\,;+\infty[$ qui s'annule en 1.

Exercices
- 5 à 10 (ci-contre)
- 37 à 56

2 Formulaire de primitives

A Primitives de $f+g$, de αf avec $\alpha \in \mathbb{R}$

Ces propriétés se déduisent de la définition d'une primitive et des opérations sur les fonctions dérivables.

Propriétés

f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I et admettant respectivement les primitives F et G sur cet intervalle. Alors : **(1)** F + G est une primitive de $f+g$; **(2)** αF est une primitive de αf (avec $\alpha \in \mathbb{R}$).

B Primitives de fonctions de référence (lecture inverse des formules de dérivées)

f est une fonction définie sur un intervalle I, F est une primitive de f sur I et $C \in \mathbb{R}$.

Pour tout x de I, $f(x) = \dots$	Pour tout x de I, $F(x) = \dots$	L'intervalle I est égal à …
k (avec $k \in \mathbb{R}$)	$kx + C$	$\mathbb{R}$
x	$\frac{1}{2}x^2 + C$	$\mathbb{R}$
x^n (avec $n \in \mathbb{Z} - \{-1\,;0\}$)	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$	$\mathbb{R}$ si $n \geqslant 1$ $]-\infty\,;0[$ ou $]0\,;+\infty[$ si $n \leqslant -2$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x) + C$	$]0\,;+\infty[$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + C$	$]-\infty\,;0[$ ou $]0\,;+\infty[$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + C$	$]0\,;+\infty[$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$	$\mathbb{R}$
e^x	$e^x + C$	$\mathbb{R}$

C Primitives et composition

Propriété

u est une fonction dérivable sur un intervalle I à valeurs dans un intervalle J et v une fonction dérivable sur l'intervalle J. **Une primitive** sur I de la fonction $\boldsymbol{u' \times (v' \circ u)}$ est la fonction $\boldsymbol{v \circ u}$.

u est une fonction dérivable sur un intervalle I. Par lecture inverse des formules de dérivées, on obtient :

Fonction f	Primitives de f sur I	Condition sur u
$u'u^n$ (avec $n \in \mathbb{Z} - \{-1\,;0\}$)	$\frac{1}{n+1}u^{n+1} + C$	$u(x) \neq 0$ pour tout x de I si $n \leqslant -2$
$\frac{u'}{u}$	$\ln(u) + C$	$u(x) > 0$ pour tout x de I
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u} + C$	$u(x) \neq 0$ pour tout x de I
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + C$	$u(x) > 0$ pour tout x de I
$u'\sin(u)$	$-\cos(u) + C$	
$u'\cos(u)$	$\sin(u) + C$	
$u'e^u$	$e^u + C$	

EXERCICES RÉSOLUS

5 Utiliser les primitives de fonctions usuelles

Dans chaque cas, déterminer une primitive sur I de la fonction définie sur I.

a) $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$, $\quad \mathrm{I} = \mathbb{R}$ **b)** $g(x) = \dfrac{2}{x} + 4\cos(x)$, $\quad \mathrm{I} =]0\,;+\infty[$

Solution

a) Une primitive de $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto \dfrac{1}{3}x^3$,
une primitive de $x \mapsto x$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto \dfrac{1}{2}x^2$,
une primitive de $x \mapsto 1$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto x$.
Donc, une primitive de $x \mapsto 2x^2 - 4x + 1$ sur $\mathbb{R}$ est définie par $\mathrm{F}(x) = 2 \times \dfrac{1}{3}x^3 - 4 \times \dfrac{1}{2}x^2 + x = \dfrac{2}{3}x^3 - 2x^2 + x$.

b) Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur I est $x \mapsto \ln(x)$,
une primitive de $x \mapsto \cos(x)$ sur I est $x \mapsto \sin(x)$.
Donc, une primitive de $x \mapsto \dfrac{2}{x} + 4\cos(x)$ sur I est définie par :

$$\mathrm{G}(x) = 2 \times \ln(x) + 4 \times \sin(x) = 2\ln(x) + 4\sin(x).$$

> On utilise le formulaire des primitives des fonctions usuelles du § **B**.

> Pour déterminer une primitive d'une fonction $\alpha f + \beta g$ (avec α, β nombres réels) sur un intervalle I, il suffit de déterminer une primitive F de f et G de g sur I.
> Alors, une primitive de $\alpha f + \beta g$ sur I est :
> $\alpha \mathrm{F} + \beta \mathrm{G}$

6 Déterminer une primitive

Dans chaque cas, déterminer une primitive sur I de la fonction définie sur I.

a) $f(x) = \dfrac{-3}{(5-3x)^4}$, $\quad \mathrm{I} = [2\,;+\infty[$ **b)** $g(x) = \mathrm{e}^{4x+7}$, $\quad \mathrm{I} = \mathbb{R}$

Solution

a) Pour tout réel $x \geqslant 2$, $f(x) = -3(5-3x)^{-4}$.
On pose $u(x) = 5 - 3x$, alors $u'(x) = -3$.
Ainsi, $f(x) = u'(x)u^{-4}(x)$.
Donc une primitive F de f sur I est définie par :

$$\mathrm{F}(x) = \frac{1}{-4+1}u^{-4+1}(x) = -\frac{1}{3}(5-3x)^{-3} = -\frac{1}{3(5-3x)^3}.$$

b) Pour tout réel x, on pose $u(x) = 4x + 7$; alors $u'(x) = 4$.
Ainsi, $g(x) = \dfrac{1}{4} \times 4\mathrm{e}^{4x+7} = \dfrac{1}{4} \times u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$.
Donc une primitive G de g sur I est définie par :

$$\mathrm{G}(x) = \frac{1}{4} \times \mathrm{e}^{u(x)} = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{4x+7}.$$

> Compte tenu de l'expression de f, on pense à vérifier si f est de la forme $u'u^n$. C'est bien le cas, donc une primitive est $\dfrac{1}{n+1}u^{n+1}$.

> Compte tenu de l'expression de g, on pense à vérifier si g est de la forme $u'\mathrm{e}^u$.
> C'est le cas mais à une constante multiplicative près : $g = \dfrac{1}{4}u'\mathrm{e}^u$.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 5
Pour les exercices 7 et 8, déterminer une primitive sur I de la fonction définie sur I.

7 **a)** $f(x) = 5x^4 - 3x + 7$, $\quad \mathrm{I} = \mathbb{R}$
b) $g(x) = 2\sin(x) + 3\cos(x)$, $\quad \mathrm{I} = \mathbb{R}$

8 **a)** $h(x) = 5\mathrm{e}^x + 5$, $\quad \mathrm{I} = \mathbb{R}$
b) $k(x) = 2x^3 - 1$, $\quad \mathrm{I} = \mathbb{R}$

Sur le modèle de l'exercice résolu 6
Pour les exercices 9 et 10, déterminer une primitive sur I de la fonction définie sur I.

9 **a)** $f(x) = 4(3x-1)^5$, $\quad \mathrm{I} = \mathbb{R}$
b) $g(x) = \dfrac{7x}{x^2+4}$, $\quad \mathrm{I} = \mathbb{R}$

10 $h(x) = (1-2x)^3$, $\quad \mathrm{I} = \mathbb{R}$

Cours

Exercices
- 11 à 14 (ci-contre)
- 57 à 87

3 Équations différentielles

A Équations différentielles $y' = ay$

Propriété

Les fonctions solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ (avec a nombre réel non nul) sont les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par $\boldsymbol{f_k(x) = k\mathrm{e}^{ax}}$ où k est un nombre réel.

Démonstration

- La fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = k\mathrm{e}^{ax}$, avec k nombre réel, est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f_k'(x) = ka\mathrm{e}^{ax}$, donc $f_k'(x) = af_k(x)$ et f_k est solution de l'équation différentielle $y' = ay$.
- Réciproquement, on considère une solution g sur $\mathbb{R}$ de $y' = ay$.

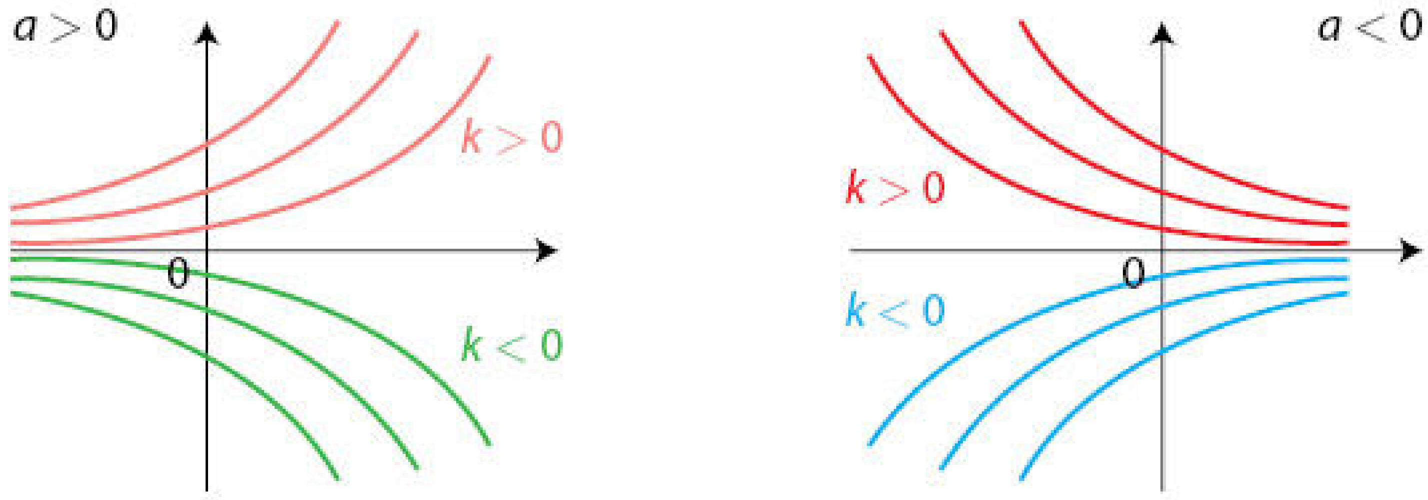
On note ϕ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\phi(x) = g(x)\mathrm{e}^{-ax}$. La fonction ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $\phi'(x) = g'(x)\mathrm{e}^{-ax} - ag(x)\mathrm{e}^{-ax} = (g'(x) - ag(x))\mathrm{e}^{-ax}$.

Or, pour tout réel x, $g'(x) = ag(x)$ donc $\phi'(x) = 0$.

Ainsi ϕ est une fonction constante sur $\mathbb{R}$ et il existe un réel k tel que pour tout réel x, $\phi(x) = k$, soit $g(x)\mathrm{e}^{-ax} = k$. On en déduit que pour tout réel x, $g(x) = k\mathrm{e}^{ax}$.

Vidéo
JAICOMPRIS.COM
Cette démonstration est présentée en vidéo

Allure des courbes des fonctions solutions selon les signes de a et de k



B Équations différentielles $y' = ay + b$

Propriété

Les fonctions solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ (avec a et b nombres réels non nuls) sont les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par $\boldsymbol{f_k(x) = k\mathrm{e}^{ax} - \dfrac{b}{a}}$ où k est un nombre réel.

Démonstration

- On détermine d'abord une fonction constante $f : x \mapsto k$ solution particulière de $y' = ay + b$.

Pour tout réel x, $f'(x) = 0$. Ainsi, f est solution de $y' = ay + b$ si, et seulement si, $0 = ak + b$, soit $k = -\dfrac{b}{a}$.

Donc pour tout réel x, $f(x) = -\dfrac{b}{a}$.

- g est solution de $y' = ay + b$ si, et seulement si, $g' = ag + b$. Or, on sait que $f' = af + b$.

Ainsi, g est solution de $y' = ay + b$ si, et seulement si, $g' - f' = a(g - f)$, c'est-à-dire $(g - f)' = a(g - f)$.

Autrement dit, g est solution de $y' = ay + b$ si, et seulement si, $g - f$ est solution de $y' = ay$, c'est-à-dire pour tout réel x, $g(x) - f(x) = k\mathrm{e}^{ax}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

En conclusion, les solutions sur $\mathbb{R}$ de $y' = ay + b$ sont les fonctions $x \mapsto k\mathrm{e}^{ax} - \dfrac{b}{a}$.

Remarque : on généralise la méthode de résolution vue dans la démonstration précédente aux équations différentielles du type $\boldsymbol{y' = ay + f}$ avec a nombre réel non nul et f fonction donnée.

Une solution particulière constante n'existant pas nécessairement, une autre solution particulière sera soit donnée, soit à déterminer à l'aide d'indications (voir exercice 85 p. 384).

EXERCICES RÉSOLUS

11 Résoudre une équation différentielle $y' = ay$

(**E**) est l'équation différentielle $y' - 7y = 0$.

a) Résoudre l'équation différentielle (**E**).

b) Déterminer la solution f de (**E**) vérifiant la condition $f(0) = 2$.

Solution

L'équation (**E**) s'écrit aussi $y' = 7y$.

a) Les solutions de l'équation différentielle (**E**) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto k\mathrm{e}^{7x}$ où k est un nombre réel.

b) f est solution de (**E**), donc il existe un nombre réel k tel que $f(x) = k\mathrm{e}^{7x}$. Or, $f(0) = 2$, ainsi $k\mathrm{e}^0 = 2$ d'où $k = 2$.

On en déduit que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2\mathrm{e}^{7x}$.

Afin de déterminer la solution vérifiant la condition donnée, on détermine la valeur de k pour qu'il en soit ainsi en résolvant une équation.

12 Résoudre une équation différentielle $y' = ay + b$

(**E**) est l'équation différentielle $y' = 5y + 2$.

a) Déterminer la fonction constante f solution particulière de (**E**).

b) Démontrer qu'une fonction g est solution de (**E**) si, et seulement si, $g - f$ est solution de $y' = 5y$.

c) En déduire l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de (**E**).

d) Déterminer la solution h de (**E**) dont la courbe représentative $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormé admet une tangente au point d'abscisse 0 de coefficient directeur 2.

Solution

a) Pour tout réel x, $f(x) = c$ avec $c \in \mathbb{R}$, donc $f'(x) = 0$.

f est solution de (**E**) si, et seulement si $f' = 5f + 2$, c'est-à-dire $0 = 5c + 2$ soit $c = -\dfrac{2}{5}$.

b) g est solution de (**E**) si, et seulement si, $g' = 5g + 2$.

Or, $f' = 5f + 2$. Ainsi, g est solution de (**E**) si, et seulement si, $g' - f' = 5(g - f)$ c'est-à-dire $(g - f)' = 5(g - f)$.

Autrement dit, g est solution de (**E**) si, et seulement si, $g - f$ est solution de l'équation différentielle $y' = 5y$.

c) g est solution de (**E**) si, et seulement si, pour tout réel x, $g(x) - f(x) = k\mathrm{e}^{5x}$ avec $k \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire $g(x) = k\mathrm{e}^{5x} - \dfrac{2}{5}$.

d) h est une solution de (**E**) donc il existe un réel k tel que pour tout réel x, $h(x) = k\mathrm{e}^{5x} - \dfrac{2}{5}$.

Pour tout réel x, $h'(x) = 5k\mathrm{e}^{5x}$. Or, $h'(0) = 2$ soit $5k = 2$ et $k = \dfrac{2}{5}$.

Donc pour tout réel x, $h(x) = \dfrac{2}{5}\mathrm{e}^{5x} - \dfrac{2}{5}$.

Pour résoudre $y' = ay + b$:
- on détermine la fonction constante f solution de $y' = ay + b$: soit $f(x) = -\dfrac{b}{a}$;
- on résout $y' = ay$: soit $y_k(x) = k\mathrm{e}^{ax}$ avec $k \in \mathbb{R}$;
- on conclut : les solutions de $y' = ay + b$ sont les fonctions $y_k + f$.

La pente de la tangente à $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 0 est $h'(0)$.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 11

13 (**E**) est l'équation différentielle $y' = 3y$.

a) Résoudre l'équation différentielle (**E**).

b) Déterminer la solution f de (**E**) vérifiant la condition $f(-1) = 2$.

Sur le modèle de l'exercice résolu 12

14 (**E**) est l'équation différentielle $y' = y + 1$.

a) Déterminer la fonction constante f solution de (**E**).

b) Déterminer l'ensemble des solutions de (**E**).

c) Déterminer la solution g de (**E**) telle que $g(1) = 2$.

Savoir-faire Algo python

Vidéo JAICOMPRIS.COM
Un autre exercice Algo/python résolu en vidéo

EXERCICE RÉSOLU

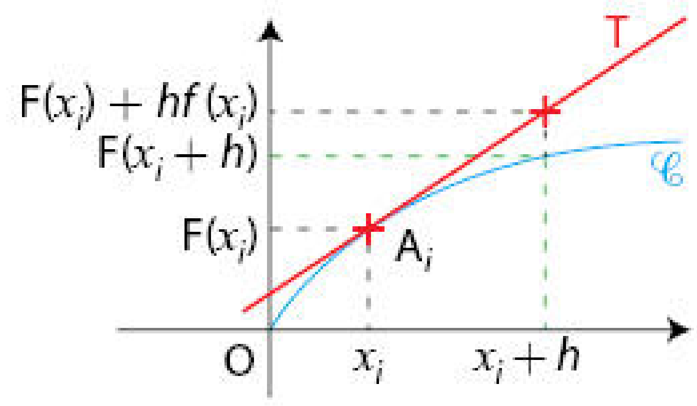
15 Résoudre par la méthode d'Euler une équation du type $y' = f$

f est la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$.

On se propose de déterminer la solution F de l'équation différentielle $y' = f$ telle que $F(0) = 0$.

Mais on ne connaît pas de primitive de f sur $[0\,;+\infty[$, aussi utilise-t-on une méthode d'approximation, nommée **méthode d'Euler**, qui consiste à construire une courbe proche de la courbe de la solution F cherchée.

Principe de la méthode



A_i est le point d'abscisse $x_i \geqslant 0$ de la courbe $\mathscr{C}$ représentative de F dans un repère. Alors, la tangente T à $\mathscr{C}$ en A_i est proche de $\mathscr{C}$ au voisinage de A_i.

Or, la tangente T à $\mathscr{C}$ en A_i a pour équation $y = F(x_i) + (x - x_i)F'(x_i)$.

Autrement dit, pour tout réel $h > 0$ assez petit :

$$F(x_i + h) \approx F(x_i) + hF'(x_i) \text{ soit } \mathbf{F(x_i + h) \approx F(x_i) + hf(x_i)}.$$

1. Premiers calculs

On choisit $h = 0{,}1$. (x_n) est la suite définie par $x_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $x_{n+1} = x_n + 0{,}1$.

On sait que $F(0) = 0$, on pose $y_0 = 0$.

a) Avec l'approximation ci-dessus, vérifier que $F(x_1) \approx 0{,}1$ c'est-à-dire $F(0{,}1) \approx 0{,}1$. On pose $y_1 = 0{,}1$.

b) Vérifier de même que $F(x_2) \approx 0{,}199$ c'est-à-dire $F(0{,}2) \approx 0{,}199$. On pose $y_2 = 0{,}199$.

c) Vérifier que $F(0{,}3) \approx 0{,}295$. On pose $y_3 = 0{,}295$.

d) Déterminer de même y_4.

Et ainsi de suite, on place les points $A_k(x_k\,;y_k)$ et on trace la ligne polygonale $A_0\,A_1\,A_2\,A_3\ldots$

2. Automatisation des calculs

On se propose de placer la suite de points A_n à l'aide d'un programme.

a) Compléter la fonction **Solution** ci-contre écrite en langage Python qui a pour paramètres le nombre N de points à placer et le pas h, et qui affiche les N premiers points obtenus avec la méthode d'Euler.

b) Saisir le programme et l'exécuter avec $N = 100$ et $h = 0{,}1$.

```
from pylab import *

def f(x):
    y=1/(1+x**2)
    return y

def Solution(N,h):
    x=0
    y=0
    plot(x,y,'r.')
    for i in range(1,N):
        y=[      ]
        x=[  ]
        plot(x,y,'r.')
    show()
    return
```

Solution

1. a) $F(x_1) = F(x_0 + h)$ donc $F(x_1) \approx F(x_0) + hf(x_0)$.

Ainsi, $F(0{,}1) \approx 0 + 0{,}1 \times f(0)$, soit $F(0{,}1) \approx 0{,}1$.

b) $F(x_2) = F(x_1 + h)$ donc $F(x_2) \approx F(x_1) + hf(x_1)$.

Ainsi, $F(0{,}2) \approx 0{,}1 + 0{,}1 \times f(0{,}1)$, soit $F(0{,}2) \approx 0{,}199$.

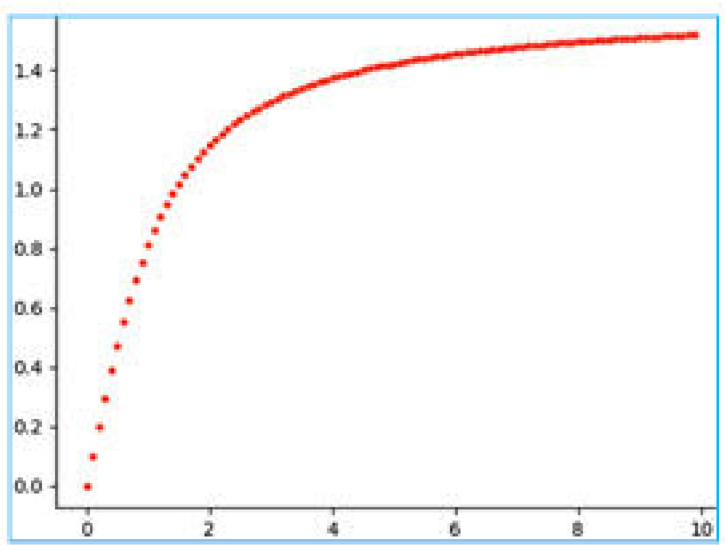
c) De même, $F(0{,}3) \approx 0{,}199 + 0{,}1 \times f(0{,}2)$ soit $F(0{,}3) \approx 0{,}295$.

d) $F(0{,}4) \approx 0{,}295 + 0{,}1 \times f(0{,}3)$, soit $F(0{,}4) \approx 0{,}387$. Ainsi, $y_4 = 0{,}387$.

2. a) Dans le cadre rouge, on saisit $\boldsymbol{y + h * f(x)}$.

Dans le cadre vert, on saisit $\boldsymbol{x + h}$.

b) On exécute **Solution(100,0.1)**. Voici la courbe obtenue ; cette courbe approche la courbe de la primitive de la fonction f sur $[0\,;10]$.



HISTOIRE DES MATHS

Leonhard Euler a présenté cette méthode d'approximation en 1768. 250 ans plus tard, elle est encore utilisée, en particulier lorsqu'on ne connaît f que par des données mesurées. Des avancées plus récentes ont été présentées en 2018 par Christian Lubich lors du Congrès International des Mathématiciens à Rio.

Équations différentielles $y' = f$ et primitives d'une fonction

Cours 1

Questions flash À l'oral

16 Lily affirme : « La fonction $x \mapsto 2x$ admet pour primitive sur $\mathbb{R}$ la fonction $x \mapsto 2$ ».
A-t-elle raison ?

17 Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = x^2$ sont les fonctions du type (avec $k \in \mathbb{R}$) :
(1) $x \mapsto \frac{1}{2}x^2 + k$ **(2)** $x \mapsto \frac{1}{3}x^3 + k$ **(3)** $x \mapsto 2x + k$

Pour les exercices 18 à 20, vérifier que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle I.

18 $f(x) = 3x^2 - 3x + 2$, $F(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x$, $I = \mathbb{R}$

19 $f(x) = 7\cos(x) + 2$, $F(x) = 7\sin(x) + 2x$, $I = \mathbb{R}$

20 $f(x) = (x^2 + 2x + 2)e^x$, $F(x) = (x^2 + 2)e^x$, $I = \mathbb{R}$

21 À chacune des fonctions ci-dessous, associer une primitive sur $\mathbb{R}$.

Fonction f	Primitive F
$f_1(x) = 3x^2 - 2x + 2$	$F_1(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 1$
$f_2(x) = 3(x+2)(x-4)$	$F_2(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$
$f_3(x) = 3(x-1)^2 - 1$	$F_3(x) = x^3 - x^2 + 2x + 1$

22 **a)** Vérifier l'information donnée par l'écran de calcul formel ci-dessous.

1	Dérivée$\left(\frac{x-1}{x^2+1}\right)$
	Factoriser: $\frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}$

b) En déduire une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{-x^2 + 2x + 1}{(x^2+1)^2}$.

Pour les exercices 23 à 25, vérifier que la fonction f définie sur l'intervalle I est une solution de l'équation différentielle.

23 $y' = \dfrac{10x^2 + 1}{x}$, $f(x) = \ln(x) + 5x^2 + 2$, $I =]0 ; +\infty[$

24 $y' = (2x+1)e^{2x-3}$, $f(x) = xe^{2x-3}$, $I = \mathbb{R}$

25 $y' = \sin(3x - 1)$, $f(x) = -\frac{1}{3}\cos(3x - 1)$, $I = \mathbb{R}$

26 f est la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par :
$$f(x) = x(1 + 2\ln(x)).$$
a) Montrer que la fonction F définie sur $]0 ; +\infty[$ par $F(x) = x^2\ln(x)$ est une primitive de f sur $]0 ; +\infty[$.
b) En déduire l'ensemble des primitives de la fonction f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
c) Déterminer l'unique primitive G de la fonction f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ qui vérifie $G(e) = 1$.

Pour les exercices 27 et 28,
a) Vérifier que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle I.
b) Déterminer la primitive de f sur I qui s'annule en x_0.

27 $F(x) = 3x^4 - \frac{2}{5}x^2 + x$, $I = \mathbb{R}$
$f(x) = 12x^3 - \frac{4}{5}x + 1$, $x_0 = 1$

28 $F(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, $I = \mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $x_0 = -1$

29 f est la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par :
$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x}.$$
a) Démontrer que les primitives de la fonction f sur $]0 ; +\infty[$ sont les fonctions F_k définies sur $]0 ; +\infty[$ par $F_k(x) = \frac{1}{2}(\ln(x))^2 + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.
b) $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère du plan.
Par quelle transformation obtient-on la courbe $\mathscr{C}_k$ représentant F_k à partir de la courbe $\mathscr{C}_0$ représentant F_0 ?

30 **a)** Démontrer que les fonctions :
- $x \mapsto \ln(5x)$
- $x \mapsto 1 + \ln x$
- $x \mapsto 3 - \ln\left(\frac{e}{x}\right)$

sont des primitives sur $]0 ; +\infty[$ d'une même fonction f à préciser.
b) Déterminer la primitive F de f sur $]0 ; +\infty[$ qui s'annule en e.

31 F et G sont deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :
$$F(x) = \frac{8 - e^x}{e^x + 2} \text{ et } G(x) = \frac{-5e^x}{e^x + 2} + 3.$$
a) Déterminer $F(x) - G(x)$ pour tout réel x.
b) Dans une phrase utilisant le mot « primitive », tirer une conséquence de **a)** pour F et G.

32 F et G sont les fonctions définies sur $]2 ; +\infty[$ par :
$$F(x) = \frac{x^2 + 3x - 1}{x - 2} \quad \text{et} \quad G(x) = \frac{x^2 + 7x}{x - 2}.$$
Les fonctions F et G sont-elles des primitives d'une même fonction sur $]2 ; +\infty[$?

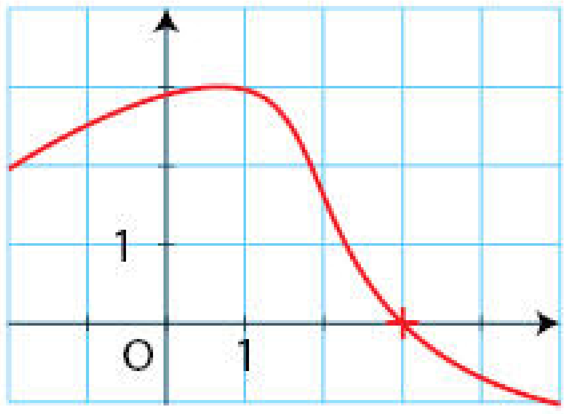
33 Voici un écran de calcul formel.

1	Dérivée$\left(\frac{x^3}{3}\left(-\frac{1}{3}+\ln(x)\right)\right)$
	Développer: $x^2 \ln(x)$

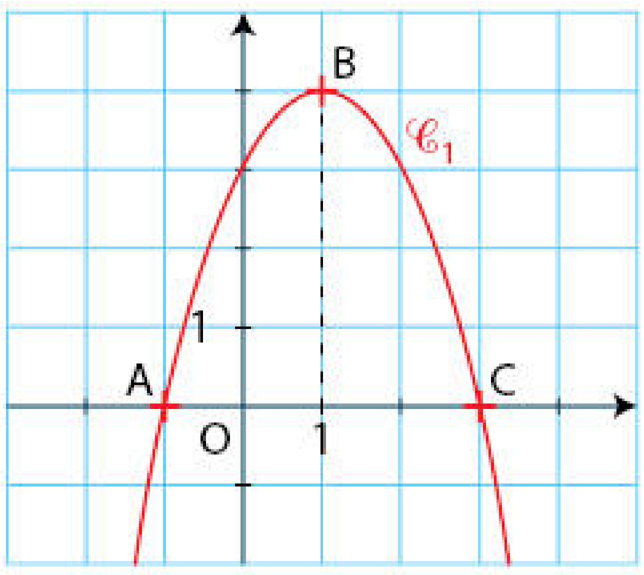
a) En déduire une primitive sur $]0\,;+\infty[$ de $f : x \mapsto 5x^2\ln(x)+3x$.

b) Déterminer la primitive sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ de f valant 2 en 1.

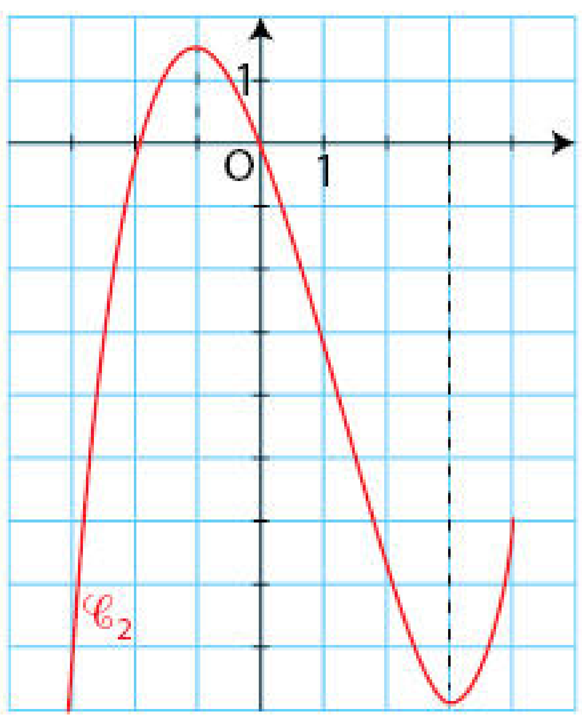
34 f est la fonction définie sur $[-2\,;5]$ par la courbe tracée dans ce repère. Déterminer le sens de variation d'une primitive de f sur l'intervalle $[-2\,;5]$.

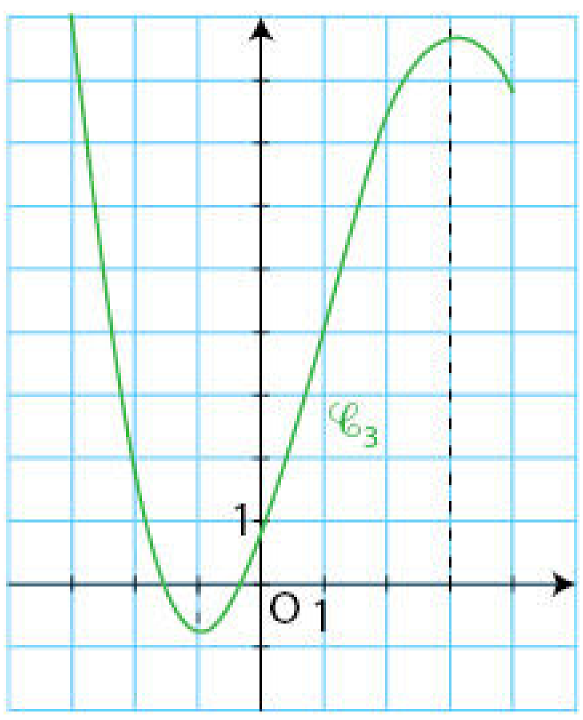


35 f est une fonction définie sur l'intervalle $[-3\,;4]$. Les points $A(-1\,;0)$, $B(1\,;4)$ et $C(3\,;0)$ appartiennent à la courbe représentative de f donnée ci-contre.



Parmi les deux courbes suivantes, laquelle est la représentation graphique d'une primitive de la fonction f ?

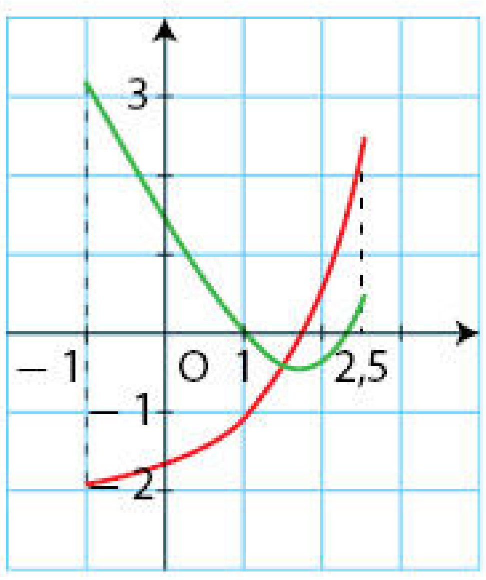


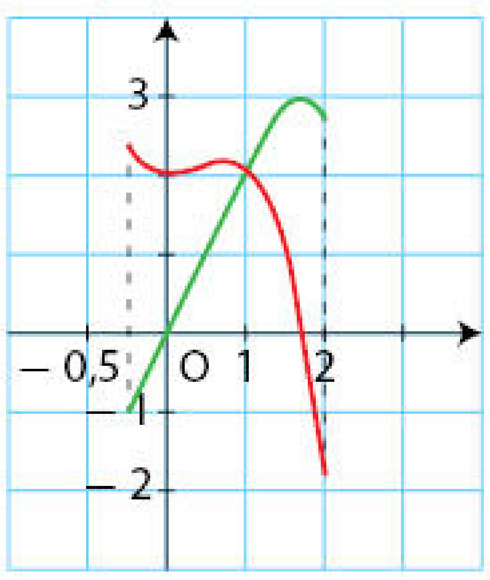


36 Dans les repères ci-dessous, une fonction f et une primitive F de f sont représentées graphiquement. Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse.

a) La courbe rouge représente la fonction f.

b) La courbe verte représente la fonction F.





Détermination d'une primitive

Cours 2

Questions flash — À l'oral

37 Dans chaque cas, déterminer oralement toutes les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction.

a) $x \mapsto 2$ **b)** $x \mapsto x$ **c)** $x \mapsto x^2$ **d)** $x \mapsto e^x$

38 Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto 2x(x^2+1)$ est :

(1) $x \mapsto x^2\left(\frac{1}{3}x^3+x\right)$ **(2)** $x \mapsto 4x$ **(3)** $x \mapsto \frac{1}{2}(x^2+1)^2$

Pour les exercices 39 à 41, déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

39 **a)** $f(x) = x+1$ **b)** $f(x) = x^2+3x+2$

40 **a)** $f(x) = \cos(x)+\sin(x)$ **b)** $f(x) = 5\cos(x)$

41 **a)** $f(x) = 5e^x+4$ **b)** $f(x) = -2(3x-e^x)$

42 Dans chaque cas, déterminer une primitive sur $]0\,;+\infty[$ de la fonction f définie par :

a) $f(x) = \frac{3}{x}$ **b)** $f(x) = \frac{2}{x^2}+4$

43 Déterminer la primitive sur $]0\,;+\infty[$ qui s'annule en 1 de la fonction f définie par :

a) $f(x) = \frac{5}{\sqrt{x}}+9e^x$ **b)** $f(x) = 3x^3-2x^2+5x-\frac{4}{x}$

44 Reconnaître la forme $u'u^n$ et déterminer une primitive sur l'intervalle I de la fonction définie par :

a) $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ $\mathrm{I} =]0\,;+\infty[$

b) $h(x) = (2x-1)(x^2-x+4)^5$ $\mathrm{I} = \mathbb{R}$

45 Dans chaque cas, déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction définie par :

a) $f(x) = (x-1)(x^2-2x+4)^3$ **b)** $g(x) = e^{3x}(e^{3x}+1)^4$

46 Reconnaître la forme $\frac{u'}{u}$ et déterminer une primitive sur l'intervalle I de la fonction définie par :

a) $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$; $\mathrm{I} = \mathbb{R}$

b) $h(x) = \frac{1}{x\ln(x)}$; $\mathrm{I} =]1\,;+\infty[$

47 Dans chaque cas, déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction définie par :

a) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x+3}$ **b)** $g(x) = \frac{e^{5x}}{e^{5x}+1}$

48 Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction.
a) $f(x)=\mathrm{e}^{-8x}$ **b)** $g(x)=3\mathrm{e}^{5x}$ **c)** $h(x)=(4x+4)\mathrm{e}^{x^2+2x}$

49 Reconnaître la forme $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ et déterminer une primitive sur l'intervalle I de la fonction définie par :
a) $f(x)=\dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$; $\quad \mathrm{I}=\mathbb{R}$
b) $g(x)=\dfrac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}}$; $\quad \mathrm{I}=]0\,;\pi[$

50 Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction.
a) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ **b)** $g(x)=\dfrac{9\mathrm{e}^{3x}}{\sqrt{\mathrm{e}^{3x}+4}}$

51 Reconnaître la forme $u'\cos(u)$ ou $u'\sin(u)$ et déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction définie par :
a) $f(x)=7\cos\left(7x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ **b)** $g(x)=9\sin(9x)$

52 Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction.
a) $f(x)=\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$ **b)** $g(x)=-2\sin(3x)$

53 f est la fonction définie sur $]1\,;+\infty[$ par :
$$f(x)=x+2-\frac{2}{x-1}.$$
Déterminer la primitive F sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$ qui s'annule en 2 de la fonction f.

54 g est la fonction définie sur $\left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ par :
$$g(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$
Déterminer toutes les primitives sur l'intervalle $\left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ de la fonction g.

55 h est la fonction définie sur $]-1\,;+\infty[$ par :
$$h(x)=\frac{2x+5}{x+1}.$$
a) Vérifier que pour tout réel $x>-1$,
$$h(x)=2+\frac{3}{x+1}.$$
b) Déterminer la primitive H sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$ qui s'annule en 1 de la fonction h.

56 k est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$k(x)=\frac{3\mathrm{e}^x+8}{\mathrm{e}^x+4}.$$
a) Vérifier que pour tout réel x,
$$k(x)=2+\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+4}.$$
b) Déterminer la primitive K sur $\mathbb{R}$ telle que $\mathrm{K}(0)=0$ de la fonction k.

Équations différentielles

Cours 3

Questions flash À l'oral

57 Alix affirme : « La fonction $x\mapsto \mathrm{e}^{3x}$ est solution de l'équation différentielle $y'=-3y$ ». A-t-il raison ?

58 Laquelle de ces fonctions est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'=7y$?
(1) $x\mapsto 7x$ **(2)** $x\mapsto 7\mathrm{e}^x$ **(3)** $x\mapsto 3\mathrm{e}^{7x}$

59 Déterminer mentalement la solution particulière constante de l'équation différentielle $y'=2y+4$.

Pour les exercices 60 à 62, résoudre sur $\mathbb{R}$ chaque équation différentielle.

60 **a)** $y'=5y$ **b)** $y'=\dfrac{3}{4}y$ **c)** $y'=-8{,}2y$

61 **a)** $2y'=-5y$ **b)** $\theta'=-\dfrac{1}{2}\theta$ **c)** $4u'=3u$

62 **a)** $5g-7g'=0$ **b)** $y'=y$ **c)** $-y'+2y=0$

Pour les exercices 63 à 65, déterminer la solution f sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle qui vérifie la condition initiale donnée.

63 $y'=7y$ et $f(0)=1$.

64 $y'+\dfrac{1}{4}y=0$ et $f(3)=-1$.

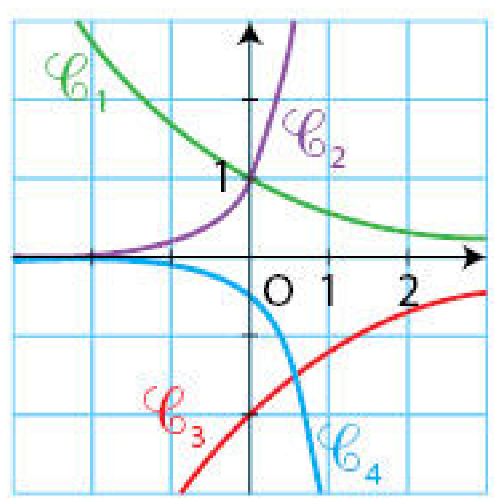
65 $3y'=-7y$ et $f(2)=-5$.

66 f est la solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'=3y$ telle que $f'(1)=2$.
Justifier que $f(1)=\dfrac{2}{3}$, puis déterminer la fonction f.

67 Déterminer la solution g sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $2y'+5y=0$ telle que $g'(2)=0$.

68 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=5\mathrm{e}^{-4x}$. Déterminer l'équation différentielle de la forme $y'=ay$ dont f est une solution sur $\mathbb{R}$.

69 Dans ce repère, les courbes représentent des solutions d'équations différentielles du type $y'=ay$. Associer chacune de ces courbes à l'équation différentielle $(\mathrm{E_1})$: $y'=2y$ ou $(\mathrm{E_2})$: $y'+0{,}5y=0$.



70 Vérifier le résultat obtenu sur l'écran de calcul formel ci-dessous.

1	RésolEquaDiff($y' = 3\,y + 7$)
	$\rightarrow\ y = c_1\,e^{3x} - \frac{7}{3}$

Pour les exercices 71 à 73, vérifier que la fonction *f* est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle.

71 $f(x) = 7e^{3x} - \frac{2}{3}$; $y' = 3y + 2$

72 $f(x) = 2e^{-7x} - 2$; $y' + 7y + 14 = 0$

73 $f(x) = 5e^{-3x} + 3$; $3y + y' = 9$

74 (**E**) est l'équation différentielle $y' = 2y + 1$.

a) Déterminer une solution particulière constante *g* de (**E**).

b) Démontrer qu'une fonction *f* est solution de (**E**) si, et seulement si, la fonction $f - g$ est solution de l'équation différentielle $y' = 2y$.

c) En déduire l'ensemble des solutions de (**E**).

75 (**E**) est l'équation différentielle $y' = -3y + 4$.

a) Déterminer une solution particulière constante *g* de (**E**).

b) Démontrer qu'une fonction *f* est solution de (**E**) si, et seulement si, la fonction $f - g$ est solution de l'équation différentielle $y' = -3y$.

c) En déduire l'ensemble des solutions de (**E**).

d) Déterminer la solution *f* de (**E**) vérifiant $f(-1) = 0$.

76 (**E**) est l'équation différentielle $y' = \frac{1}{4}y + 6$.

a) Déterminer une solution particulière constante *g* de (**E**).

b) Démontrer qu'une fonction *f* est solution de (**E**) si, et seulement si, la fonction $f - g$ est solution de l'équation différentielle $y' = \frac{1}{4}y$.

c) En déduire l'ensemble des solutions de (**E**).

d) Déterminer la solution *f* de (**E**) s'annulant en 4.

77 Dans chaque cas, résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle.

a) $y' = 2y - 3$ **b)** $y' + 3y = -4$ **c)** $y' - 2 = y$

Pour les exercices 78 et 79, déterminer la solution *f* sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle qui vérifie la condition initiale donnée.

78 $y' = 7y - 5$ et $f(-2) = -3$

79 $y' = 0{,}2y - 100$ et $f(0) = -2$

Pour les exercices 80 à 82, déterminer la solution *f* sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle qui vérifie la condition donnée.

80 $y' = 4y - 3$ et $f'(0) = 3$

81 $-2y' + 11y = 4$ et $f'(-1) = 1$

82 $4y' - 5y = 2$ et $f'(0) = 0$

83 Vérifier le résultat affiché.

1	RésolEquaDiff($5\,y' + y = 2$, $(0, 4)$)
	$\rightarrow\ y = 2\,e^{-\frac{x}{5}} + 2$

84 **Algo** python

(**E**) est l'équation différentielle $y' = ay + b$ avec *a* et *b* deux nombres réels et $a \neq 0$.

a) *c* est un nombre réel. Déterminer, en fonction de *a*, *b* et *c*, la solution *f* sur $\mathbb{R}$ de (**E**) s'annulant en *c*.

b) Écrire une fonction **Image**, en langage Python, de paramètres quatre nombres réels *a*, *b*, *c* et x ($a \neq 0$) et qui retourne l'image de x par la fonction *f* où *f* est la solution de $y' = ay + b$ telle que $f(c) = 0$.

85 (**E**) est l'équation différentielle $4y' - y = x$.

a) Démontrer que la fonction *g* définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -x - 4$ est une solution particulière de (**E**).

b) Démontrer qu'une fonction *f* est solution de (**E**) si, et seulement si, la fonction $f - g$ est solution de l'équation différentielle $4y' - y = 0$.

c) En déduire l'ensemble des solutions de (**E**).

Vidéo

JAICOMPRIS.COM — Cet exercice est corrigé en vidéo

86 (**E**) est l'équation différentielle $y' + 2y = e^{3x}$.

a) Démontrer que la fonction *g* définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{1}{5}e^{3x}$ est une solution particulière de (**E**).

b) Démontrer qu'une fonction *f* est solution de (**E**) si, et seulement si, la fonction $f - g$ est solution de l'équation différentielle $y' + 2y = 0$.

c) En déduire l'ensemble des solutions de (**E**).

87 (**E**) est l'équation différentielle $y' + y = 2\cos(x)$.

a) Démontrer que la fonction *g* définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \cos(x) + \sin(x)$ est une solution particulière de (**E**).

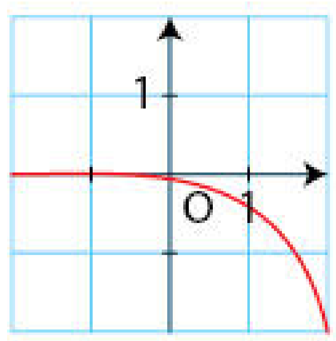
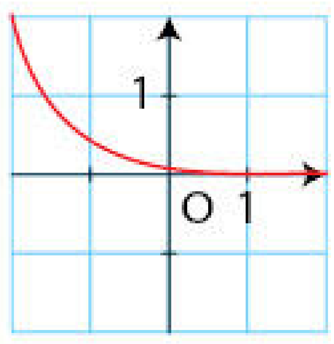
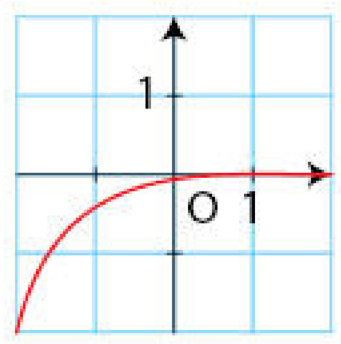
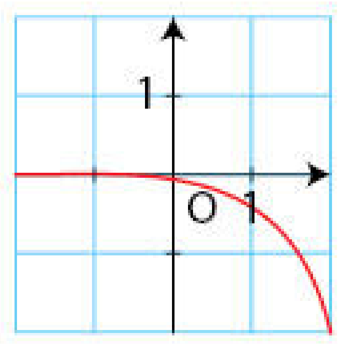
b) Démontrer qu'une fonction *f* est solution de (**E**) si, et seulement si, la fonction $f - g$ est solution de l'équation différentielle $y' + y = 0$.

c) En déduire l'ensemble des solutions de (**E**).

88 QCM Dans chaque cas, donner la réponse exacte sans justifier.

		A	B	C	D
1	Pour tout réel x, $f(x) = xe^{2x}$. Une primitive sur $\mathbb{R}$ de f est …	$x \mapsto \frac{x^2}{2}e^{2x}$	$x \mapsto (2x+1)e^{2x}$	$x \mapsto \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)e^{2x}$	$x \mapsto \frac{x}{2}e^{2x}$
2	F est une primitive sur $\mathbb{R}$ de f. D'après ce tableau de variations, … x : $-\infty$ … 1 … $+\infty$ F(x) : ↘ 0 ↗	f est positive sur $\mathbb{R}$	f est positive sur $]-\infty\,;1]$	f est négative sur $\mathbb{R}$	f est positive sur $[1\,;+\infty[$
3	La primitive sur $]0\,;+\infty[$ s'annulant en 1 de la fonction : $x \mapsto \frac{3x^2+2}{x}$ est …	$x \mapsto \frac{x^3+2x}{\frac{1}{2}x^2} - 6$	$x \mapsto 2 - \frac{2}{x^2}$	$x \mapsto 6x - 6$	$x \mapsto \frac{3}{2}x^2 + 2\ln(x) - \frac{3}{2}$
4	Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto 4\cos(2x)$ est la fonction …	$x \mapsto -8\sin(x)$	$x \mapsto 2\sin(2x)$	$x \mapsto -2\cos(x)$	$x \mapsto -2\sin(2x)$

89 QCM Dans chaque cas, donner la (ou les) réponse(s) exacte(s) sans justifier.

		A	B	C	D
1	Une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = 3y$ est la fonction …	$x \mapsto 2e^{-3x}$	$x \mapsto 7e^{3x}$	$x \mapsto e^{3x} + 1$	$x \mapsto -10e^{3x}$
2	L'allure de la courbe représentative d'une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = -1{,}5y$ est …				
3	Une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = -2y + 4$ est la fonction …	$x \mapsto 2e^{-2x} + 2$	$x \mapsto e^{2x} + 2$	$x \mapsto 5e^{-2x} - 2$	$x \mapsto -e^{-2x} + 2$
4	Une solution particulière sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = 3y + 6x$ est la fonction …	$x \mapsto e^{3x} - 2x - \frac{2}{3}$	$x \mapsto 7e^{3x} - 2x - \frac{2}{3}$	$x \mapsto 5e^{3x}$	$x \mapsto -2x - \frac{2}{3}$

90 Vrai/Faux Dans chaque cas, dire si l'affirmation est vraie ou fausse en justifiant.

1 (**E**) est l'équation différentielle $y' = 2y$.
Affirmation : la solution f sur $\mathbb{R}$ de (**E**) telle que $f(0) = 1$ vérifie $f(1) = 0$.

2 (**E**) est l'équation différentielle $y' - y = -\frac{e^x}{x^2}$ sur $]0\,;+\infty[$.
Affirmation : la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \frac{x+1}{x}e^x$ est une solution de (**E**).

Vérifiez vos réponses : p. 529

91 Étudier une relation fonctionnelle

On se propose de démontrer la propriété suivante :

> f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ distincte de la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.
> Si pour tous réels x et y, $f(x+y) = f(x) \times f(y)$, alors il existe un nombre réel a tel que pour tout réel x, $f(x) = \mathrm{e}^{ax}$.

Rédiger la démonstration de cette propriété en suivant et complétant le guide.

(1) Bien visualiser les hypothèses : f est une fonction ... et non ... sur $\mathbb{R}$.
Pour tous réels x et y, $f(x+y) = \ldots$

(2) Envisager le cas $y = 0$: pour tout réel x, $f(x) = \ldots$

(3) Déterminer $f(0)$: f n'est pas la fonction nulle donc il existe un réel c tel que $f(c) \ldots 0$.
En appliquant **(2)** pour $x = c$, il vient $f(0) = \ldots$.

(4) Dériver la fonction $g : y \mapsto f(x+y)$ de deux façons différentes :
- $g(y) = f(x+y)$ donc $g'(y) = \ldots$
- $g(y) = f(x) \times f(y)$ donc $g'(y) = \ldots$

(5) Tirer une conséquence : d'après **(4)**, pour tous réels x et y, $f'(x+y) = f(x) \times \ldots$
donc, en particulier, pour $y = 0$, $f'(x) = \ldots$

(6) Résoudre une équation différentielle : d'après **(5)**, f est solution de l'équation différentielle $y' = ay$ avec $a = \ldots$.

(7) Conclure : donner l'expression de $f(x)$ et conclure par une phrase.

92 Comprendre l'importance de tous les mots

On a énoncé p. 374 la définition suivante :

> f est une fonction définie sur un intervalle I.
> Dire que F est une primitive de f sur I signifie que F est dérivable sur I et $F' = f$.

F et G sont les fonctions définies sur $]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$ par :

- $F(x) = \dfrac{1}{x^2}$
- $G(x) = \dfrac{1}{x^2} + 2$ si $x < 0$ et $G(x) = \dfrac{1}{x^2} - 3$ si $x > 0$

a) Démontrer que F et G sont deux primitives d'une même fonction f sur $]0\,;+\infty[$, puis sur $]-\infty\,;0[$.

b) Loïc affirme : « Donc F et G sont des primitives de f sur $]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$ ».
- Existe-t-il une constante réelle C telle que, pour tout réel $x \neq 0$, $G(x) = F(x) + C$?
- Expliquer alors en quoi l'affirmation de Loïc est erronée.

Cet exemple montre l'importance de l'hypothèse « **I est un intervalle** » dans la définition rappelée ci-dessus.

93 Utiliser la parité d'une fonction

f est une fonction continue sur un intervalle $I =]-a\,;a[$ avec $a \in \mathbb{R}^*$.
Démontrer que si f est impaire sur I, alors toute primitive F sur I de la fonction f est une fonction paire.

94 Modéliser une situation par une équation différentielle

$(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ est un repère orthonormé du plan. Déterminer une équation de la courbe $\mathscr{C}$ passant par le point A(1 ; 1) et telle qu'en chacun de ses points M, la tangente ait une pente égale au double de l'ordonnée du point M.

Vidéo JAICOMPRIS.COM

Toutes les démonstrations au programme en vidéo

Liste des démonstrations :
- Deux primitives d'une même fonction continue sur un intervalle diffèrent d'une constante.
- Résolution de l'équation différentielle $y' = ay$ où a est un nombre réel.

Conseil
Pour dériver la fonction $y \mapsto f(x+y)$, il faut considérer que x est une constante réelle et utiliser la formule de dérivée de $v \circ u$.

Conseil
On pourra étudier la fonction $x \mapsto F(-x) - F(x)$.

Déterminer une primitive

95 **PARCOURS DIFFÉRENCIÉS**

Parcours 1

f est la fonction définie sur $]1\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{1}{x\ln(x)}.$$

Déterminer la primitive F de f telle que $\mathrm{F}(\mathrm{e})=0$.

Parcours 2

g est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$g(x)=\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^2}.$$

a) Expliquer pourquoi $g=-u'\mathrm{e}^u$ avec pour tout réel $x>0,\ u(x)=\dfrac{1}{x}$.

b) En déduire toutes les primitives sur $]0\,;+\infty[$ de g.

c) Déterminer la primitive G de g telle que $\mathrm{G}(1)=0$.

96 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}.$$

a) Justifier que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

b) Déterminer toutes les primitives sur $\mathbb{R}$ de f.

c) En déduire la primitive F de f telle que $\mathrm{F}(0)=-3$.

97 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\frac{1}{(\mathrm{e}^x+1)^2}.$$

a) Démontrer que pour tout réel x,

$$f(x)=1-\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}-\frac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}.$$

b) En déduire la primitive F sur $\mathbb{R}$ telle que $\mathrm{F}(0)=1$ de la fonction f.

98 g est la fonction définie sur $\mathrm{I}=]-1\,;0[$ par :

$$g(x)=\frac{1}{x(1+x)^2}.$$

a) Recopier et compléter : pour tout réel x de I,

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{1+x}+\frac{c}{(1+x)^2}=\frac{\dots}{x(1+x)^2}.$$

b) Déterminer des nombres réels a, b et c tels que pour tout x de I, $g(x)=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{1+x}+\dfrac{c}{(1+x)^2}$.

c) En déduire toutes les primitives sur l'intervalle $]-1\,;0[$ de la fonction g.

JaiCompris.com — Vidéo — Cet exercice est corrigé en vidéo

99 f est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{x^2-5x+4}{x^2}.$$

a) Déterminer des nombres réels a, b et c tels que pour tout réel $x>0,\ f(x)=a+\dfrac{b}{x}+\dfrac{c}{x^2}$.

b) En déduire toutes les primitives sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ de la fonction f.

100 f et F sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=4x^2\mathrm{e}^{2x}\text{ et }\mathrm{F}(x)=(ax^2+bx+c)\mathrm{e}^{2x}.$$

a) Déterminer $\mathrm{F}'(x)$ pour tout réel x.

b) Déterminer des nombres réels a, b et c tels que pour tout réel x, $\mathrm{F}'(x)=f(x)$.

c) En déduire une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f.

101 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\mathrm{e}^{2x}\sin(x)$.

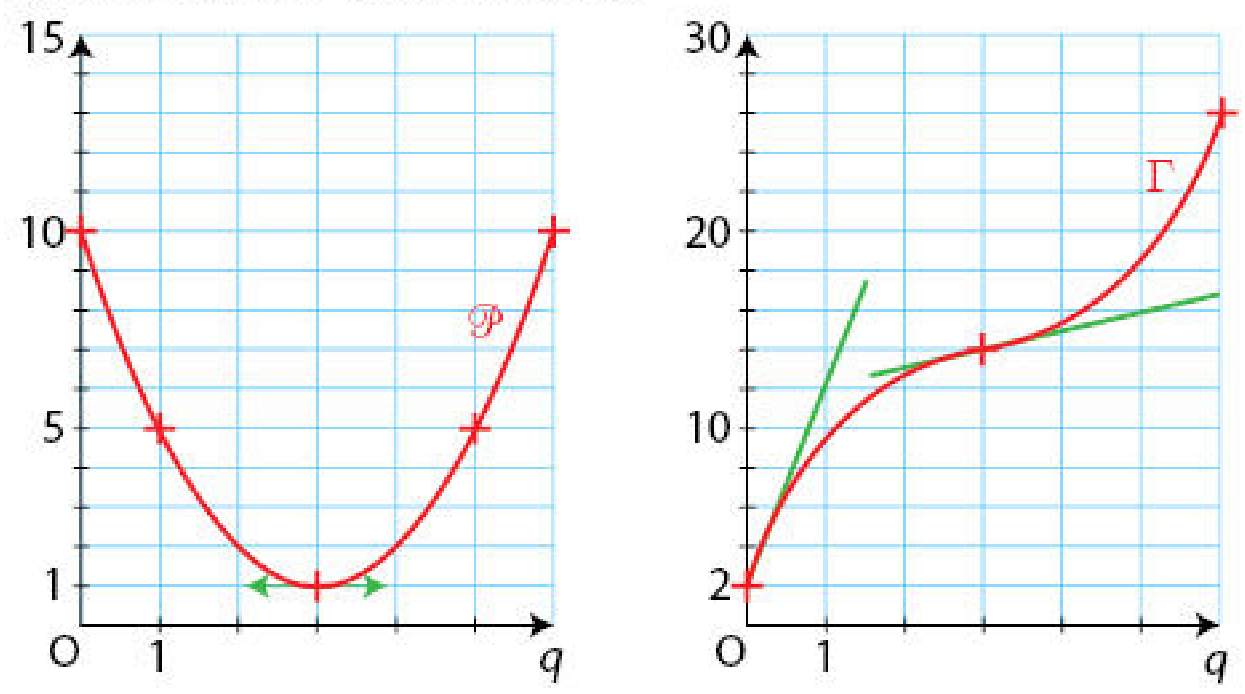
a) Pour tout réel x, déterminer $f'(x)$ et $f''(x)$ où f'' est la fonction dérivée de f'.

b) Déterminer des nombres réels a et b tels que pour tout réel x, $f(x)=af'(x)+bf''(x)$.

c) En déduire toutes les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction f.

102 En Économie, la fonction coût marginal C_m est la fonction dérivée de la fonction coût total C.

Dans le repère ci-dessous, la parabole $\mathscr{P}$ représente la fonction coût marginal C_m d'une production sur l'intervalle $[0\,;6]$. Les tangentes aux points d'abscisses 0 et 3 de la courbe Γ sont tracées.



a) Expliquer pourquoi la courbe Γ peut représenter la fonction coût total C.

b) Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout réel q de l'intervalle $[0\,;6]$:

$$\mathrm{C}_m(q)=aq^2+bq+c.$$

c) En déduire l'expression de $\mathrm{C}(q)$ pour tout réel q de l'intervalle $[0\,;6]$.

Résoudre une équation différentielle

103 **PARCOURS DIFFÉRENCIÉS**

Parcours 1

(**E**) est l'équation différentielle $2y' - 4y = 1$.
Déterminer la solution f de (**E**) telle que $f'(2) = 1$.

Parcours 2

(**E′**) est l'équation différentielle $5y' + 3y = 2$.

a) Présenter l'équation (**E′**) sous la forme $y' = ay + b$.

b) Déterminer la fonction constante f solution de (**E′**).

c) Démontrer que g est solution de (**E′**) si, et seulement si, $g - f$ est solution de $y' = -\frac{3}{5}y$.

d) En déduire les solutions sur $\mathbb{R}$ de (**E′**).

e) Déterminer la solution g de (**E′**) telle que $g'(0) = 1$.

104 Pour déterminer l'âge de résidus organiques, on utilise la méthode basée sur la désintégration radioactive. Les êtres vivants absorbent et assimilent du carbone de l'atmosphère. On considère que leur organisme comporte une proportion constante de carbone 14. Après leur mort, cette proportion de carbone 14 diminue lentement.

m est la fonction qui donne la masse résiduelle $m(t)$, en g, de carbone 14 dans un échantillon à la date t, en siècle. La vitesse de désintégration $m'(t)$ du carbone 14 à la date t est proportionnelle à la masse à cet instant. Ainsi, il existe un réel C tel que $m'(t) = \mathrm{C} \times m(t)$.

Un corps organique contenait une masse m_0 de carbone 14 à l'instant $t = 0$ de sa mort.

a) Exprimer $m(t)$ en fonction de C et m_0.

b) On sait que la masse de carbone 14 dans un échantillon diminue de 1,24 % par siècle.
En déduire la valeur de C.

c) Aujourd'hui, ce corps organique ne contient plus que 14 % de sa masse m_0 de carbone 14.
Déterminer l'âge de ce corps. *Arrondir au centième.*

105 En 1980, 10 000 ménages vivant en France étaient équipés d'un ordinateur. On note $f(t)$ le nombre de ces ménages, en million, t années après 1980 ($t \geqslant 0$).
Le modèle de Verhulst estime que sur la période 1980-2020, f est solution sur $[0\,;40]$ de l'équation différentielle $(\mathbf{E_1}) : y' = 0{,}022y(20 - y)$.

1. a) On pose $u = \frac{1}{f}$. Démontrer que f est solution de $(\mathbf{E_1})$ si, et seulement si, u est solution sur $[0\,;40]$ de l'équation différentielle $(\mathbf{E_2}) : y' = -0{,}44y + 0{,}022$.

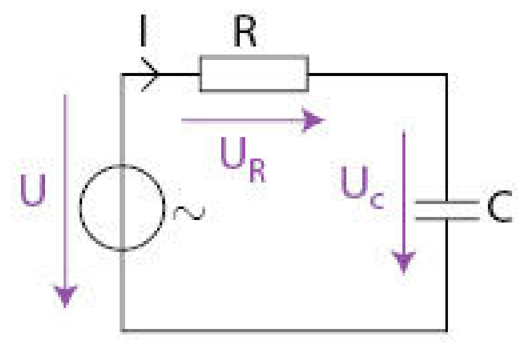
b) Déterminer l'ensemble des solutions de $(\mathbf{E_2})$.

c) En déduire l'ensemble des solutions de $(\mathbf{E_1})$.

d) Démontrer alors que la fonction f est définie sur l'intervalle $[0\,;40]$ par $f(t) = \dfrac{20}{1 + 1999\mathrm{e}^{-0{,}44t}}$.

2. D'après l'Insee, en 2014, la France comptait 28 765,9 milliers de ménages dont 78,8 % étaient équipés d'un ordinateur. Expliquer pourquoi l'estimation faite par ce modèle est incorrecte.

106 Un circuit électrique comprend un générateur de force électromotrice E, un condensateur de capacité C et un conducteur ohmique de résistance R.



$q(t)$ est la charge du condensateur, en farad, t secondes après avoir établi le courant dans le circuit. On sait alors que la fonction q vérifie :

$$q' + \frac{1}{\mathrm{RC}}q = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{R}}.$$

1. a) Déterminer alors l'ensemble des solutions sur $[0\,;+\infty[$ de l'équation différentielle $y' + \frac{1}{\mathrm{RC}}y = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{R}}$.

b) On suppose que la charge initiale du condensateur est nulle, ainsi $q(0) = 0$.
Pour tout réel $t \geqslant 0$, exprimer $q(t)$ en fonction de t.

2. a) Déterminer la charge maximum Q du condensateur sachant que celle-ci est la limite de la fonction q en $+\infty$.

b) On note $\tau = \mathrm{RC}$. À quel pourcentage de sa charge maximum Q le condensateur est-il chargé après une durée de charge égale à τ ? égale à 5τ ? *Arrondir à l'unité.*

3. a) $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction q dans un repère d'origine O.
Vérifier que le point de coordonnées $(\tau\,;\mathrm{Q})$ appartient à la tangente à $\mathscr{C}$ en O.

b) À l'aide de la calculatrice, visualiser ce résultat lorsque $\mathrm{C} = 1$ F, $\mathrm{R} = 100\ \Omega$ et $\mathrm{E} = 5$ V.

107 Un chariot de masse 200 kg se déplace à partir d'une origine O sur une voie rectiligne et horizontale. $x(t)$ est la distance, en mètre, qui le sépare de l'origine en fonction du temps t, en seconde ($t \geqslant 0$).

D'après les lois de Newton, la fonction x vérifie $200x'' + 25x' = 50$ où x'' est la dérivée de la fonction dérivée x' par rapport au temps t.

1. Déterminer $x(0)$.

2. $v(t)$ est la vitesse du chariot à l'instant t et vérifie $v(t) = x'(t)$.

a) Démontrer que x vérifie $200x'' + 25x' = 50$ si, et seulement si, la fonction v vérifie $v' = -0{,}125v + 0{,}25$.

b) Résoudre sur $[0\,;+\infty[$ l'équation différentielle :

$$y' = -0{,}125y + 0{,}25.$$

c) La vitesse initiale du chariot est supposée nulle, ainsi $v(0) = 0$.

Déterminer alors la vitesse $v(t)$ pour tout réel t.

d) Étudier la limite de v en $+\infty$ et interpréter le résultat.

3. a) Démontrer alors que la fonction x est définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :

$$x(t) = 2t - 16 + 16\mathrm{e}^{-0{,}125t}.$$

b) Quelle est la distance, en m, parcourue par le chariot au bout de 30 secondes ? *Arrondir au dixième.*

108 On laisse tomber un corps de masse $m = 4$ kg dans le champ de la pesanteur. La vitesse v, en m.s^{-1}, du centre d'inertie de ce corps est fonction du temps t de chute, en s, et vérifie $mv' + kv = mg$ où $g = 9{,}8$ N.kg^{-1} est l'accélération de la pesanteur et $k = 24$ est le coefficient de freinage.

1. a) Justifier que la fonction v est solution sur $[0\,;+\infty[$ de l'équation différentielle **(E)** : $y' = -6y + 9{,}8$.

b) Résoudre sur $[0\,;+\infty[$ l'équation **(E)**.

2. a) On suppose que la vitesse initiale du corps est nulle. Pour tout réel $t \geqslant 0$, exprimer $v(t)$ en fonction de t.

b) Déterminer la vitesse du corps après 20 s.

Arrondir au dixième.

109 **(E)** est l'équation différentielle $y' + 4y = x\mathrm{e}^{-x}$.

a) Déterminer des nombres réels a et b tels que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (ax + b)\mathrm{e}^{-x}$ soit une solution sur $\mathbb{R}$ de **(E)**.

b) Démontrer qu'une fonction f est solution de **(E)** si, et seulement si, la fonction $f - g$ est solution de l'équation différentielle $(\mathbf{E_0})$: $y' + 4y = 0$.

c) Déterminer l'ensemble des solutions de $(\mathbf{E_0})$.

d) En déduire l'ensemble des solutions de **(E)**.

e) Déterminer la solution f de **(E)** telle que $f(1) = 0$.

110 **(E)** est l'équation différentielle :

$$y' - y = \cos(x) - 3\sin(x).$$

a) Déterminer des nombres réels a et b tels que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = a\cos(x) + b\sin(x)$ soit une solution de **(E)**.

b) Démontrer qu'une fonction f est solution de **(E)** si, et seulement si, la fonction $f - g$ est solution de l'équation différentielle $(\mathbf{E_0})$: $y' - y = 0$.

c) Déterminer l'ensemble des solutions de $(\mathbf{E_0})$.

d) En déduire l'ensemble des solutions de **(E)**.

e) Déterminer la solution f de **(E)** telle que $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 0$.

S'entraîner à la logique

→ p. 525

111 Implication et réciproque

Dans chaque cas, l'implication énoncée est vraie. La démontrer, puis rédiger sa réciproque et dire si celle-ci est vraie ou fausse.

f est une fonction continue sur l'intervalle $[-5\,;5]$ et F est la primitive de la fonction f sur cet intervalle telle que $\mathrm{F}(1) = 2$.

a) Si F est croissante sur l'intervalle $[-5\,;5]$, alors $f(0) \geqslant 0$.

b) Si G est une primitive de f sur l'intervalle $[-5\,;5]$ telle que $\mathrm{G}(1) = 3$, alors, pour tout réel x de l'intervalle $[-5\,;5]$, $\mathrm{G}(x) = \mathrm{F}(x) + 1$.

112 Avec un contre-exemple

Dans chaque cas, l'affirmation est fausse. Expliquer pourquoi.

a) Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $2f' + 3f = 1$.

b) Si les fonctions f et g sont solutions de l'équation différentielle $y' = 2y + 1$, alors $f + g$ l'est également.

113 MÉTHODE D'EULER ET ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DU TYPE $y' = ay + b$

Algo python

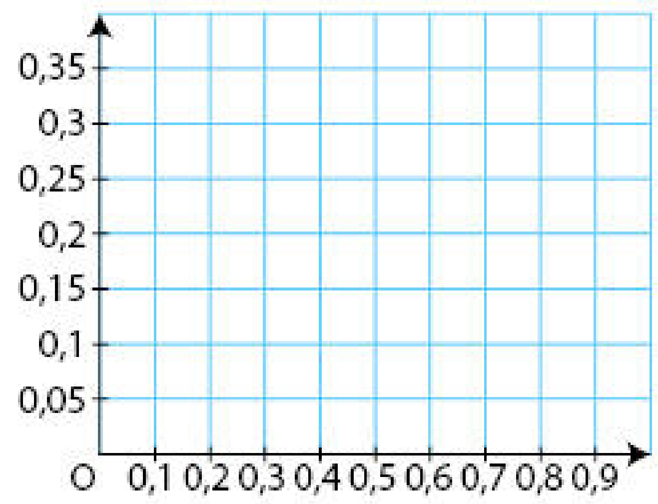
De l'eau salée se déverse dans un réservoir contenant de l'eau pure. Le mélange obtenu s'écoule du réservoir à la même vitesse, ainsi le niveau de liquide reste constant.
$f(t)$ est la masse de sel, en kg, contenu dans le réservoir au bout de t minutes. Ainsi $f(0) = 0$.
On suppose que f est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et est solution de l'équation différentielle :

$$y' = -0{,}2y + 0{,}6.$$

1. Approche de la solution à l'aide de la méthode d'Euler

On a vu p. 380 que si g est une fonction dérivable sur un intervalle I et a est un nombre de I, alors pour tout réel $h > 0$ assez petit, $\boldsymbol{g(a+h) \approx h \times g'(a) + g(a)}$.

a) On considère la suite (x_n) définie par $x_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $x_{n+1} = x_n + h$.
Démontrer que pour tout entier naturel i, $f(x_{i+1}) \approx (1 - 0{,}2h)f(x_i) + 0{,}6h$.



b) On choisit $h = 0{,}1$. On sait que $f(x_0) = 0$, on pose $y_0 = 0$.
Justifier que $f(x_1) \approx 0{,}98\,f(x_0) + 0{,}06$ puis que $f(0{,}1) \approx 0{,}06$.
On pose $y_1 = 0{,}06$.
Placer dans un repère tel que celui ci-contre, les points $A_0(x_0\,;y_0)$ et $A_1(x_1\,;y_1)$.

c) Justifier que $f(x_2) \approx 0{,}98\,f(x_1) + 0{,}06$ puis que $f(0{,}2) \approx 0{,}119$.
On pose $y_2 = 0{,}119$. Placer dans le repère le point $A_2(x_2\,;y_2)$.

d) Justifier que $f(0{,}3) \approx 0{,}177$. On pose $y_3 = 0{,}177$.
Placer dans le repère le point $A_3(x_3\,;y_3)$.

e) Ainsi de suite, on construit la suite (y_n) définie par $y_0 = 0$ et pour tout entier naturel n,

$$y_{n+1} = 0{,}98\,y_n + 0{,}06.$$

Puis, on place dans le repère les points $A_n(x_n\,;y_n)$, et on trace la ligne polygonale $A_0A_1A_2A_3A_4\dots$
Plus on diminue la valeur de h, plus cette ligne polygonale est proche de la courbe de la solution f cherchée.
Recopier et compléter le tableau suivant puis placer les points A_4, A_5, A_6 et A_7.

n	0	1	2	3	4	5	6	7
x_n	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
y_n	0	0,06	0,119	0,177				

2. Automatisation des calculs

Voici une fonction **Solution** écrite en langage Python de paramètres le nombre N de points à placer et le pas h. Elle affiche les N premiers points obtenus avec la méthode d'Euler.

```
from pylab import *

def Solution(N,h):
    x=0
    y=0
    plot(x,y,'r.')
    for i in range(1,N):
        x=
        y=
        plot(x,y,'r.')
    show()
    return
```

a) Indiquer le contenu manquant dans chacune des cases colorées.

b) Saisir le programme et exécuter **Solution(150,0.1)**.

c) Quelle conjecture peut-on émettre quant à la masse de sel dans le réservoir à long terme ?

3. Vérification

a) Dans la console Python, saisir les commandes suivantes :

```
>>> from sympy import *
>>> var('x')
>>> y=Function('y')
>>> dsolve(diff(y(x),x,1)+0.2*y(x)-0.6,y(x))
```

La commande écrite ci-contre à la dernière ligne, permet d'afficher l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + 0{,}2y - 0{,}6 = 0$.

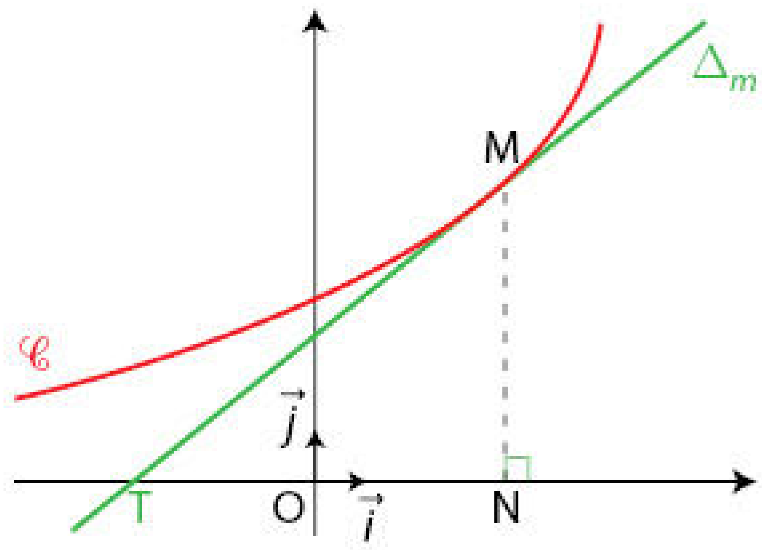
b) Démontrer le résultat affiché.

c) Exprimer alors $f(t)$ en fonction de t. Démontrer la conjecture émise à la question **2. c)**.

114 UN PROBLÈME DE LEIBNIZ

Tice

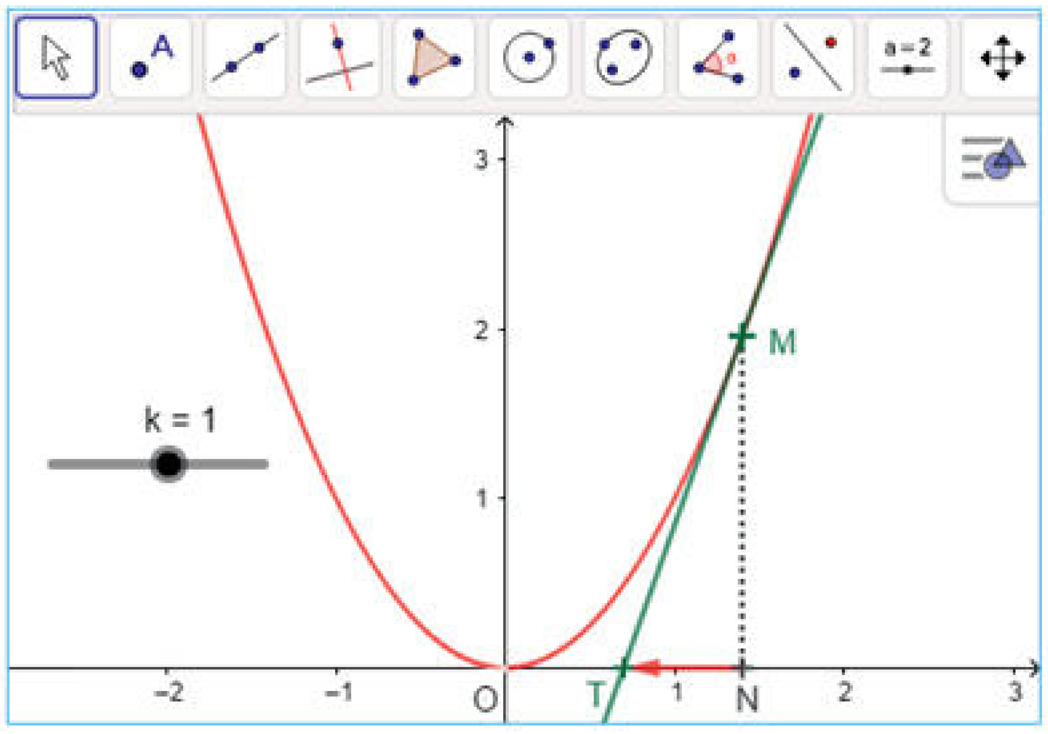
f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que sa fonction dérivée ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
$\mathscr{C}$ est sa courbe représentative dans un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.
Pour tout réel m, Δ_m est la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point M d'abscisse m.
Δ_m coupe l'axe des abscisses en un point T, N est le projeté orthogonal du point M sur l'axe des abscisses.



Le vecteur $\overrightarrow{NT}$ est appelé **vecteur sous-tangent** à $\mathscr{C}$ au point M.
On se propose de déterminer les fonctions pour lesquelles le vecteur sous-tangent est constant.

Partie A : conjecturer

1. a) À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, créer un curseur k allant de -10 à 10 avec un incrément de 0,1.
b) Créer la courbe représentative de la fonction $x \mapsto kx^2$.
c) Créer un point M sur la courbe, puis créer les points N et T.
d) Créer le vecteur sous-tangent $\overrightarrow{NT}$.
2. Déplacer le point M sur la courbe. Émettre une conjecture sur l'existence de valeurs de k ($k \neq 0$) pour lesquelles le vecteur sous-tangent est constant.
3. Recommencer en remplaçant f par chacune des fonctions suivantes :



a) $x \mapsto \dfrac{k}{x}$ **b)** $x \mapsto k\sqrt{x}$ **c)** $x \mapsto e^{kx}$

Partie B : démontrer

On envisage le cas général et on reprend les notations introduites au début du problème.
1. a) Écrire une équation de la tangente Δ_m.
b) Exprimer les coordonnées des points N et T en fonction de m, $f(m)$ et $f'(m)$.
c) En déduire que $\overrightarrow{NT} = \dfrac{f(m)}{f'(m)}\vec{i}$.
2. a) a est un nombre réel non nul.
Montrer que les fonctions dont la courbe représentative admet un vecteur sous-tangent constant égal à $a\vec{i}$ (avec a nombre réel non nul) sont les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$$y' = -\frac{1}{a}y.$$

b) En déduire l'ensemble des fonctions dont la courbe représentative admet un vecteur sous-tangent constant égal à $a\vec{i}$.

Partie C : appliquer

a) Démontrer qu'il existe une unique fonction dont la courbe a un vecteur sous-tangent constant égal à $2\vec{i}$ et passe par le point $A(0\,;1)$.
b) Tracer cette courbe à l'aide du logiciel de géométrie dynamique et vérifier graphiquement la propriété.

HISTOIRE DES MATHS

Leibniz a énoncé ce problème pour montrer l'insuffisance de l'algèbre : pour résoudre ce problème, il faut utiliser le calcul différentiel. Ce problème n'est pas spéculatif ; par exemple, en mécanique, l'étude de certaines situations amène à ce genre de questions.

115 Utiliser des lectures graphiques

Problème ouvert

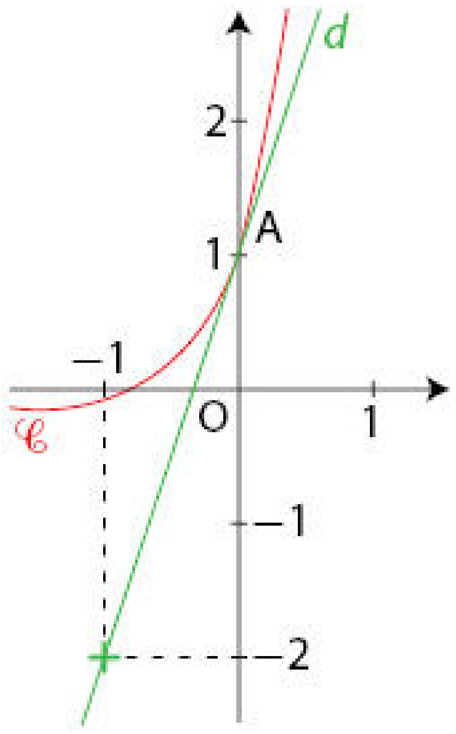
Raisonner **Représenter**

On considère les équations différentielles :

$(\mathbf{E_1}) : y' = 2y$ et $(\mathbf{E_2}) : y' = y$.

Dans le repère ci-contre, la courbe $\mathscr{C}$ représente une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f = f_1 + f_2$, où f_1 est une solution $(\mathbf{E_1})$ et f_2 une solution $(\mathbf{E_2})$.

La droite d est la tangente à $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 0.



À partir des données lues sur le graphique, déterminer la fonction f.

116 Find a primitive function

Représenter **Calculer** **Communiquer**

The f function is defined on $\mathbb{R}$ by $f(x) = xe^{2x}$.

a) Find the real numbers a and b such that $f''(x) + af'(x) + bf(x) = 0$ for each real number x.

b) Deduce a primitive function of the function f on $\mathbb{R}$.

117 Prendre des initiatives

Modéliser **Raisonner** **Calculer**

Au début de la croissance, l'accroissement du poids d'une certaine espèce végétale sur un petit intervalle de temps est proportionnel à lui-même.

Ainsi, le poids P, en g, varie en fonction du temps t, en jour, selon l'équation $P'(t) = 0{,}3P(t)$.

Déterminer le poids, en kg, de la plante après 30 jours sachant qu'elle pesait 2 g le premier jour.

Arrondir à l'unité.

118 Trouver une ressemblance

Narration de recherche

Raisonner **Communiquer**

Rédiger les différentes étapes de la recherche, sans omettre les fausses pistes et les changements de méthode.

Problème

Déterminer une primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 + 2x + 2)e^{-x}$.

Conseil : chercher cette primitive parmi les fonctions du même type.

119 Imaginer une stratégie

Chercher **Représenter**

f et g sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{-x^2} \quad \text{et} \quad g(x) = x^2e^{-x^2}.$$

F et G sont les primitives respectives des fonctions f et g s'annulant en 0.

Démontrer que pour tout réel x, $G(x) = \frac{1}{2}(F(x) - xe^{-x^2})$.

120 Déterminer une vitesse maximum

Modéliser **Raisonner** **Calculer**

Un parachutiste chutait à une vitesse de 66 m.s^{-1} avant d'ouvrir son parachute.

$v(t)$ est sa vitesse de chute, en m.s^{-1}, t secondes après l'ouverture de celui-ci. Les frottements de l'air croissent rapidement avec la vitesse, et pour tout réel $t \geqslant 0$,

$$v'(t) + \frac{g}{36}v^2(t) = g$$

où $g \approx 9{,}81$ est la constante gravitationnelle.

1. f est la fonction définie $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(t) = \frac{1}{v(t) - 6}.$$

a) Exprimer $v(t)$ en fonction de $f(t)$.

b) Exprimer $v^2(t)$ en fonction de $f(t)$.

c) Exprimer $v'(t)$ en fonction de $f(t)$ et $f'(t)$.

d) En déduire que la fonction f est solution sur $[0\,;+\infty[$ de l'équation différentielle $(\mathbf{E})$:

$$y' = \frac{g}{3}y + \frac{g}{36}.$$

2. a) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $(\mathbf{E})$.

b) Déterminer $f(0)$ puis, l'expression de la fonction f.

c) En déduire l'expression de la fonction v.

3. Étudier la limite de v en $+\infty$. Interpréter le résultat.

121 Résoudre à l'aide d'une primitive

Raisonner **Calculer**

$(\mathbf{E})$ est l'équation différentielle :

$$y' - 2y = \frac{-2}{1 + e^{-2x}}.$$

a) g est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{2x}g(x).$$

Démontrer que f est solution de $(\mathbf{E})$ si, et seulement si, pour tout réel x, $g'(x) = \dfrac{-2e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$.

b) Déterminer l'ensemble des solutions de $(\mathbf{E})$.

122 Résoudre une équation différentielle

40 min

D'après Bac, Métropole 2012

f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

Son tableau de variations est donné ci-dessous, où a et b désignent deux réels.

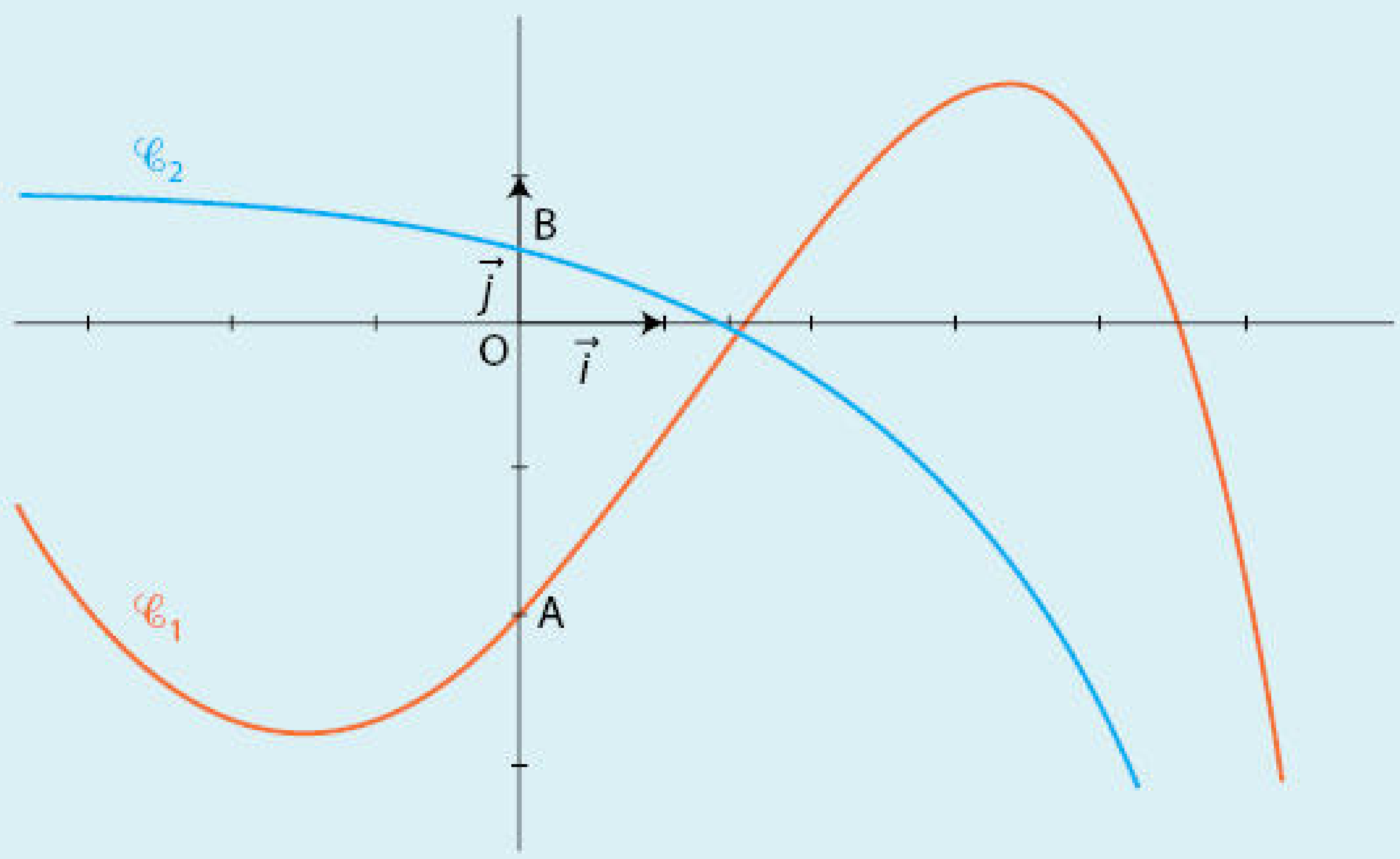
x	$-\infty$		a		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	b	↘	$-\infty$

1. Déterminer le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.

2. Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j})$, on a tracé deux courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.

Elles coupent l'axe des ordonnées aux points A et B d'ordonnées -2 et $\frac{1}{2}$ respectivement.

L'une de ces courbes est la courbe représentative de la fonction dérivée f' de f et l'autre la courbe représentative d'une primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}$.



a) Indiquer laquelle de ces deux courbes est la courbe représentative de la fonction f. Justifier la réponse.

b) À l'aide des courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$, prouver que $1 < a < 2$ et $b > 0$.

3. Dans cette question, on admet que la fonction f est telle que pour tout réel x,

$$f(x) - 2f'(x) = x.$$

a) Déterminer une fonction affine g telle que pour tout réel x,

$$g(x) - 2g'(x) = x.$$

b) Démontrer que la fonction $f - g$ est une solution de l'équation différentielle $y' = \frac{1}{2}y$.

c) Résoudre cette équation différentielle et en déduire l'existence d'un réel k tel que pour tout réel x, $f(x) = k\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} + x + 2$.

d) En utilisant les coordonnées des points A et B, déterminer les fonctions f et F ainsi que les réels a et b.

> **Guide de résolution**
> **1.** Utiliser le lien entre le signe de f' et le sens de variation de f.

> **Guide de résolution**
> **2. a)** Utiliser la question **1.**

> **Guide de résolution**
> **3. a)** Une fonction affine g a une expression de la forme : $g(x) = \alpha x + \beta$.

123 Utiliser la méthode itérative d'Euler

45 min

D'après Bac, Amérique du Nord 2006

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i},\vec{j})$.
On s'intéresse aux fonctions f dérivables sur $[0\,;+\infty[$ solutions sur $[0\,;+\infty[$ de l'équation différentielle (**E**) : $y' = 4 - y^2$.
On admet qu'il existe une unique fonction f solution de cette équation différentielle vérifiant $f(0) = 0$.

Partie A : étude d'une suite

Afin d'obtenir une approximation de la courbe représentative de la fonction f, on utilise la méthode itérative d'Euler avec un pas égal à 0,2.
On pose alors $x_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $x_{n+1} = x_n + 0{,}2$.
1. a) On suppose que pour tout réel a de l'intervalle $[0\,;+\infty[$, $f(a + 0{,}2)$ est très proche de $0{,}2f'(a) + f(a)$.
Montrer que $f(x_{n+1})$ est très proche de $-0{,}2f(x_n)^2 + f(x_n) + 0{,}8$.

On obtient ainsi une suite de points notés (M_n), d'abscisse x_n et d'ordonnée y_n où $y_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $y_{n+1} = -0{,}2y_n^2 + y_n + 0{,}8$.
b) Les coordonnées des premiers points sont consignées dans le tableau ci-dessous.
Recopier et compléter ce tableau. *Arrondir au dix-millième.*

n	0	1	2	3	4	5	6	7
x_n	0	0,2	0,4					
y_n	0	0,800 0	1,472 0					

c) Placer dans un repère orthonormé d'unité 5 cm les points M_n pour n entier naturel inférieur ou égal à 7.
d) D'après ce graphique, que peut-on conjecturer sur le sens de variation de la suite (y_n) et sur sa convergence ?
2. a) Pour tout réel x, on pose $p(x) = -0{,}2x^2 + x + 0{,}8$.
Montrer que si $x \in [0\,;2]$, alors $p(x) \in [0\,;2]$.
b) Montrer que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant y_n \leqslant 2$.
c) Étudier le sens de variation de la suite (y_n).
d) La suite (y_n) est-elle convergente ?

Partie B : étude d'une fonction

g est la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$g(x) = 2\left(\frac{e^{4x} - 1}{e^{4x} + 1}\right)$$

$\mathscr{C}_g$ est la courbe représentative de g.
1. Montrer que la fonction g est solution de l'équation différentielle (**E**) et vérifie $g(0) = 0$.
2. a) Montrer que $\mathscr{C}_g$ admet une asymptote Δ dont on donnera une équation.
b) Étudier les variations de la fonction g sur $[0\,;+\infty[$.
3. Déterminer l'abscisse α du point d'intersection de Δ et de la tangente à $\mathscr{C}_g$ à l'origine du repère.

Guide de résolution
1. a) Utiliser le fait que la fonction f est solution de l'équation différentielle (**E**).

Guide de résolution
1. Calculer $g'(x)$, puis $4 - g^2(x)$ afin de les comparer.

124 Étudier l'évolution d'une population

20 min

D'après Bac, Métropole 2005

Dans un secteur observé d'une région donnée, un prédateur empêche la trop forte croissance d'une population de petits de rongeurs.

$u(t)$ est le nombre de rongeurs, en centaine, vivants au temps t, en année, dans cette région. On admet que la fonction u vérifie, pour tout réel $t \geqslant 0$,

$$(\mathbf{E_1}) : \begin{cases} u'(t) = \dfrac{u(t)}{4} - \dfrac{[u(t)]^2}{12} \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

a) On suppose que pour tout réel positif t, on a $u(t) > 0$.

h est la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $h = \dfrac{1}{u}$.

Démontrer que la fonction u vérifie $(\mathbf{E_1})$ si, et seulement si, la fonction h vérifie pour tout nombre réel t positif ou nul, $(\mathbf{E_2}) : \begin{cases} h'(t) = -\dfrac{1}{4}h(t) + \dfrac{1}{12}. \\ h(0) = 1 \end{cases}$

b) Donner les solutions de l'équation différentielle $y' = -\dfrac{1}{4}y + \dfrac{1}{12}$ et en déduire l'expression de la fonction h, puis celle de la fonction u.

c) Dans ce modèle, comment se comporte la taille de la population étudiée lorsque t tend vers $+\infty$?

Guide de résolution
a) Déterminer la dérivée de la fonction h et utiliser la relation vérifiée par la fonction u.

Se préparer À L'ORAL

125 Présenter un exposé

a) Faire le point sur la méthode de résolution d'une équation différentielle du type $y' = ay + b$ avec a et b réels, $a \neq 0$.

b) Dans un exposé oral de 10 min, présenter un exemple de situation concrète où intervient une telle équation et la résoudre.

126 Travailler l'oral en groupe

Résoudre cet exercice en petit groupe, puis en présenter les résultats à l'oral.

On admet que l'équation différentielle $(\mathbf{E})$ $y' = y^2$ admet une unique solution f sur $]0\,;+\infty[$ vérifiant $f(1) = 1$.

On suppose que pour tout réel $x > 0$, $f(x) \neq 0$.

a) On pose $g = \dfrac{1}{f}$.

Démontrer que la fonction f est solution de $(\mathbf{E})$ si, et seulement si, pour tout réel x, $g'(x) = -1$.

b) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $(\mathbf{E})$ et en déduire l'expression de la fonction f.

127 Travailler les compétences orales

▶ **ANTICIPER LES QUESTIONS DU JURY**

1. Préparation de la restitution orale (5 min)
Par groupe de 4, résoudre l'exercice ci-dessous, chaque élève travaillant sur une des quatre propositions.

2. Jeu de rôle (30 min)
Chaque élève présente son résultat à l'oral (2 min), pendant que les trois autres composent le jury. Chaque juré pose une question au candidat (5 min).

Énoncé : $(\mathbf{E})$ est l'équation différentielle $y' = 2y - 3$.
Répondre par Vrai ou Faux en justifiant.

a) Les solutions sur $\mathbb{R}$ de $(\mathbf{E})$ sont les fonctions $x \mapsto ke^{2x}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

b) La solution f de $(\mathbf{E})$ telle que $f'(0) = 0$ vérifie également $f(0) = 1{,}5$.

c) Toute solution f de $(\mathbf{E})$ admet la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{2}(f(x) + 3x)$ pour primitive sur $\mathbb{R}$.

d) La fonction $g : x \mapsto \dfrac{3}{2}e^x(1 + e^x)$ est une solution sur $\mathbb{R}$ de $(\mathbf{E})$.

128 L'équation logistique de Verhulst

Le modèle de Verhulst décrit l'évolution d'une population (animale ou humaine).

On note $p(t)$ la population, en millier d'individus, au temps t, en année. Comme les ressources (place, nourriture, etc.) sont limitées, on suppose que cette population admet une valeur maximum m et que l'accroissement de la population pendant un petit intervalle de temps est « proportionnel » à la fois à :

- l'intervalle de temps,
- à la population $p(t)$ (plus il y a d'individus, plus il y a de naissances),
- à l'écart entre population théorique maximum et population actuelle $m - p(t)$ (quand on approche du maximum de la population, la nourriture disponible devient rare et la mortalité augmente).

On suppose donc que la fonction p est solution de l'équation différentielle, dite logistique :

$$(\mathrm{E_1}) : \quad y' = ay(m - y)$$

où a est une constante réelle positive.

On suppose que pour tout réel t, $p(t)$ et $m - p(t)$ sont des nombres réels strictement positifs.

1. On pose $g = \dfrac{1}{p}$. Démontrer que p est solution de l'équation différentielle $(\mathrm{E_1})$ si, et seulement si g est solution d'une équation différentielle $(\mathrm{E_2})$ de la forme $y' = \alpha y + \beta$ où α et β sont deux réels que l'on précisera.

2. Résoudre l'équation $(\mathrm{E_2})$ et en déduire que l'expression de la fonction p est de la forme :

$$p(t) = \frac{m}{1 + \mathrm{C}e^{-amt}} \quad \text{avec } \mathrm{C} \in \mathbb{R}.$$

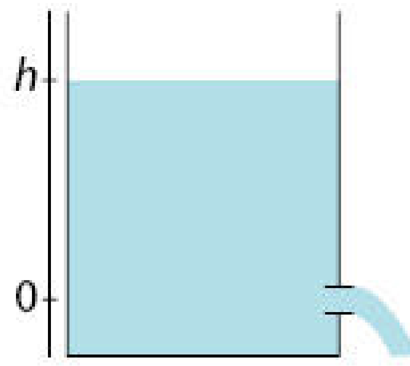
3. La population des États-Unis de 1790 à 1910 a été étudiée par Pearl et Reed en 1920. Avec l'origine des temps en 1790, les valeurs des paramètres sont alors données par $m = 197\,273$, $\mathrm{C} = 49{,}2$ et $a = 158 \times 10^{-9}$.

a) Étudier les variations de la fonction p.

b) Déterminer la limite de p en $+\infty$ et donner l'allure de la courbe représentative de la fonction p.

c) Selon ce modèle, quand la population maximum sera-t-elle atteinte à un million près ?

129 Écoulement d'un fluide



À l'instant $t = 0$, un réservoir cylindrique de rayon 1 m contient 4 m d'eau au-dessus d'un orifice. $h(t)$ est la hauteur de liquide contenu dans le réservoir au-dessus de cet orifice à l'instant t, en seconde.

La loi de Torricelli donne la relation : $\mathrm{A}h' = -k\sqrt{h}$ où A est l'aire, en m^2, de la base du cylindre et $k = 0{,}025$ est une constante positive dépendant de certains facteurs, comme la viscosité du liquide et l'aire de la section du trou d'écoulement.

On suppose que pour tout réel $t \geqslant 0$, $h(t) \neq 0$.

a) Préciser la valeur de A.

b) Démontrer que pour tout réel $t \geqslant 0$,

$$\frac{h'(t)}{\sqrt{h(t)}} = -\frac{0{,}025}{\pi}.$$

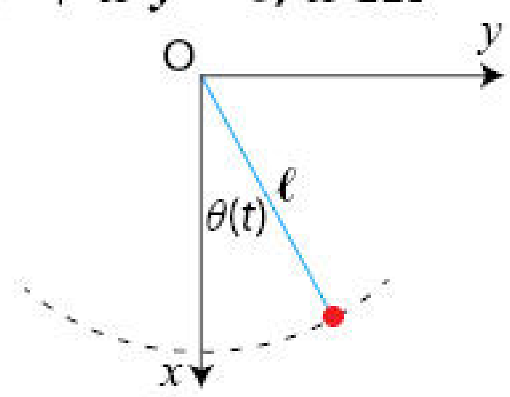
c) En déduire qu'il existe une constante réelle C telle que pour tout réel $t \geqslant 0$,

$$\sqrt{h(t)} = -\frac{0{,}025}{2\pi}t + \mathrm{C}.$$

d) En déduire l'expression de la fonction h.

e) Déterminer la valeur de C, puis l'instant, en s, à partir duquel le réservoir arrête de se vider. *Arrondir à l'unité.*

130 Les équations du type $y'' + \omega^2 y = 0$, $\omega \in \mathbb{R}$



Un pendule simple est constitué d'un objet de masse m suspendu à un fil inextensible de longueur ℓ, en mètre. On le lâche dans le plan $(x\mathrm{O}y)$ d'un angle θ_0, en radian, avec l'axe $(\mathrm{O}x)$ (θ_0 assez petit).

$\theta(t)$ est l'angle, en radian, formé par l'axe $(\mathrm{O}x)$ et le fil après t secondes (avec $t \geqslant 0$).

Le principe fondamental de la dynamique permet d'écrire l'équation différentielle suivante :

$$\theta''(t) + \frac{g}{\ell}\theta(t) = 0 \quad \text{où} \quad g \approx 9{,}81.$$

1. Vérifier que les fonctions de la forme $t \mapsto \mathrm{A}\cos(\omega t) + \mathrm{B}\sin(\omega t)$, avec A et B réels, sont solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$.

On admet que toute solution de cette équation différentielle est de cette forme.

2. a) On donne $\ell = 0{,}2$ m et $\theta_0 = \dfrac{\pi}{36}$ rad. La vitesse initiale est supposée nulle, c'est-à-dire $\theta'(0) = 0$.

Déterminer l'expression de la fonction θ.

b) Représenter la fonction θ à l'aide de la calculatrice afin d'interpréter concrètement l'évolution de l'angle en fonction du temps t.

131 Équations différentielles du second ordre

(**E**) est l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$ où a et b sont deux nombres réels.

1. Démontrer que si f_1 et f_2 sont deux solutions de l'équation différentielle (**E**), alors pour toutes constantes réelles C_1 et C_2, la fonction $C_1f_1 + C_2f_2$ est aussi solution de (**E**).

On admet que toutes les solutions de (**E**) sont de la forme $C_1f_1 + C_2f_2$ où f_1 et f_2 sont deux solutions de (**E**) indépendantes, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de constante réelle k telle que $f_1 = kf_2$.

2. r est un nombre réel.

On cherche les solutions de (**E**) de la forme $x \mapsto e^{rx}$.

Démontrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{rx}$ est solution de (**E**) si, et seulement si, $r^2 + ar + b = 0$.

Cette équation est l'**équation caractéristique** associée à (**E**).

3. On suppose que l'équation caractéristique admet deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2.

f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x)e^{-r_1x}$.

a) Démontrer que la fonction f est solution sur $\mathbb{R}$ de (**E**) si, et seulement si, la fonction g est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + (2r_1 + a)y' = 0$.

b) Résoudre l'équation différentielle :

$$y' + (2r_1 + a)y = 0.$$

c) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + (2r_1 + a)y' = 0$.

d) Justifier que $r_1 + r_2 = -a$.

e) Déterminer alors l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (**E**).

132 Existence d'une primitive

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On suppose que F est la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

1. Représenter la fonction f dans un repère.

2. a) Déterminer une expression de F sur $]-\infty\,;0[$.

b) Déterminer une expression de F sur $]0\,;+\infty[$.

3. a) Étudier alors la limite en 0 de la fonction $h \mapsto \dfrac{F(h)}{h}$.

b) En déduire que $F'(0) = 1$.

4. Démontrer que cela contredit l'hypothèse faite sur F et conclure quant à l'existence d'une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

133 Équations différentielles et suites

Partie A

n est un entier naturel non nul et ($\mathbf{E}_n$) est l'équation différentielle :

$$y' + y = \frac{x^n}{n!}e^{-x}.$$

g et h sont deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout réel x, $g(x) = h(x)e^{-x}$.

a) Démontrer que la fonction g est solution sur $\mathbb{R}$ de ($\mathbf{E}_n$) si, et seulement si, pour tout réel x, $h'(x) = \dfrac{x^n}{n!}$.

b) En déduire l'ensemble des solutions de ($\mathbf{E}_n$).

c) Déterminer la solution f de ($\mathbf{E}_n$) vérifiant $f(0) = 0$.

Partie B

f_0 et f_1 sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_0(x) = e^{-x} \text{ et } f_1(x) = xe^{-x}.$$

a) Vérifier que f_1 est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' + y = f_0$.

b) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, f_n est la solution de l'équation différentielle $y' + y = f_{n-1}$ vérifiant $f_n(0) = 0$.

En utilisant la **partie A**, démontrer par récurrence que pour tout réel x et tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n!}e^{-x}.$$

Des défis

134 Résoudre un système particulier

Déterminer les fonctions x, y et z dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout réel t,

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) + z(t) - 2x(t) \\ y'(t) = z(t) + x(t) - 2y(t) \\ z'(t) = x(t) + y(t) - 2z(t) \end{cases}$$

et $x(0) = 0$, $y(0) = -1$ et $z(0) = 4$.

135 Modéliser une situation

Un réservoir contient 20 L d'air.

Chaque seconde, il reçoit 0,1 L d'azote et perd 0,1 L de mélange supposé homogène.

Sachant que l'air contient 80 % d'azote, déterminer le temps au bout duquel le réservoir contiendra 95 % d'azote.