3 Vecteurs, droites et plans de l'espace

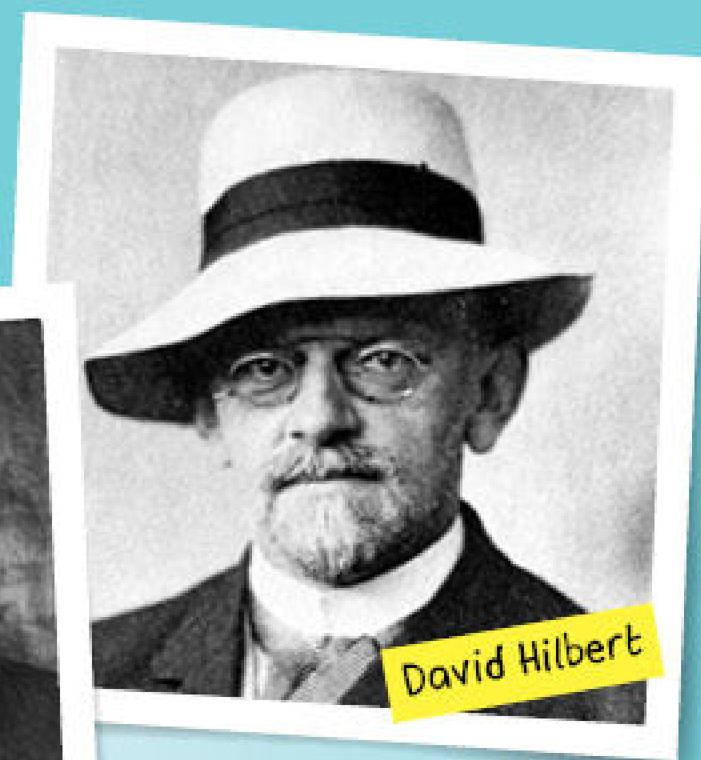
HISTOIRE DES MATHS

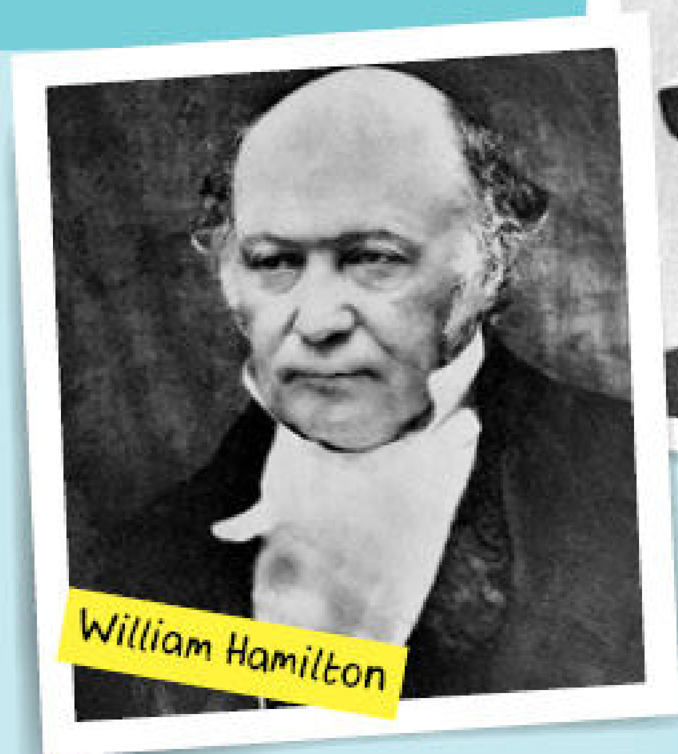
Les premières notions de géométrie remontent à l'Égypte ancienne, à la civilisation hindoue et aux Babyloniens mais ce sont les Grecs qui formalisent les bases de cette discipline.

Euclide, 300 ans avant notre ère, dans *Les Éléments* expose les principaux travaux connus dans ce domaine à son époque. Il est l'inventeur de la méthode axiomatique et les idées qu'il développe sont à la base du raisonnement mathématique.

Au 17e siècle, **René Descartes** définit la notion de repère. L'espace est alors un ensemble de points représentés à l'aide de trois nombres et on peut traduire des problèmes géométriques en calculs algébriques.

En 1844, **Hermann Grassmann** établit les fondements de la théorie des espaces vectoriels et de l'algèbre linéaire. L'objectif des mathématiciens de l'époque est de formaliser la géométrie de l'espace. Ces travaux sont repris en 1888 par **Giuseppe Peano**.


David Hilbert


William Hamilton

▶ **William Rowan Hamilton** (1805-1865) est un mathématicien irlandais. En 1843, il invente de nouveaux objets mathématiques : les quaternions. Il les décrit comme une suite ordonnée de quatre nombres réels, appelle le premier la partie scalaire et les trois autres la partie vecteur.

▶ **David Hilbert** (1862-1943) est un mathématicien allemand. Il définit une nouvelle axiomatique de la géométrie euclidienne qui unifie la géométrie plane et la géométrie dans l'espace.

1836 Bellavitis désigne par « lignes équivalentes » nos vecteurs actuels.

1837 Descartes pose les bases de la géométrie analytique.

1852 Chasles expose la relation qui porte son nom.

1899 Hilbert formalise la géométrie euclidienne.

1802 Naissance de Victor Hugo

1830 Instauration de la Monarchie de Juillet en France

1848 Abolition de l'esclavage

1890 Début de l'aviation avec Ader

1904 Invention du bridge

1800 — 1825 — 1850 — 1875 — 1900

Soufflerie pour étudier l'aérodynamisme d'un coureur cycliste.

De nombreux modèles dynamiques de la physique utilisent **les vecteurs.** Par exemple, ils représentent les forces en mécanique, la vitesse et l'accélération d'un solide en cinématique. En mécanique des fluides, ils interviennent également dans la modélisation du comportement des fluides sous l'effet de différentes forces.

Les contenus et capacités travaillés dans ce chapitre

	Savoir-faire	Exercices
• Vecteurs de l'espace. Combinaisons linéaires de vecteurs.	1 à 4	20 à 36
• Droites de l'espace. Vecteurs directeurs d'une droite. Vecteurs colinéaires.	5 à 8	37, 39 à 43
• Plans de l'espace. Direction d'un plan.		47 à 49, 51 à 54
• Vecteurs coplanaires.	9, 11	50, 55 à 57
• Positions relatives de deux droites, d'une droite et d'un plan, de deux plans.	10, 12, 17 à 19	38, 44 à 46, 58, 59, 80
• Bases et repères de l'espace. Décomposition d'un vecteur dans une base.	13 à16	60 à 79
• Étudier géométriquement des configurations de l'espace.		85, 86 à 92

Calcul mental

Rappels utiles

• **Égalité de deux vecteurs du plan**

A, B, C et D sont des points du plan.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si, et seulement si, ABDC est un parallélogramme.

• **Relation de Chasles**

Pour tous points A, B et C du plan :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

• **Règle du parallélogramme**

A, B et C sont des points du plan.

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ si, et seulement si, ABDC est un parallélogramme.

• **Coordonnées d'un vecteur**

$(\vec{i}, \vec{j})$ est une base orthonormée du plan.

$\vec{u}$ a pour coordonnées $(x\,;y)$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ si, et seulement si, $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

• **Coordonnées de $\vec{u} + \vec{v}$ et de $\lambda\vec{u}$**

$(\vec{i}, \vec{j})$ est une base orthonormée du plan.

On donne $\vec{u}(x\,;y)$, $\vec{v}(x'\,;y')$ et λ un nombre réel.

Alors $\vec{u} + \vec{v}(x + x'\,;y + y')$ et $\lambda\vec{u}(\lambda x\,;\lambda y)$.

• **Vecteurs colinéaires**

Dire que deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires signifie qu'il existe un réel λ tel que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$.

• **Parallélisme**

Deux droites (AB) et (EF) sont parallèles si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires.

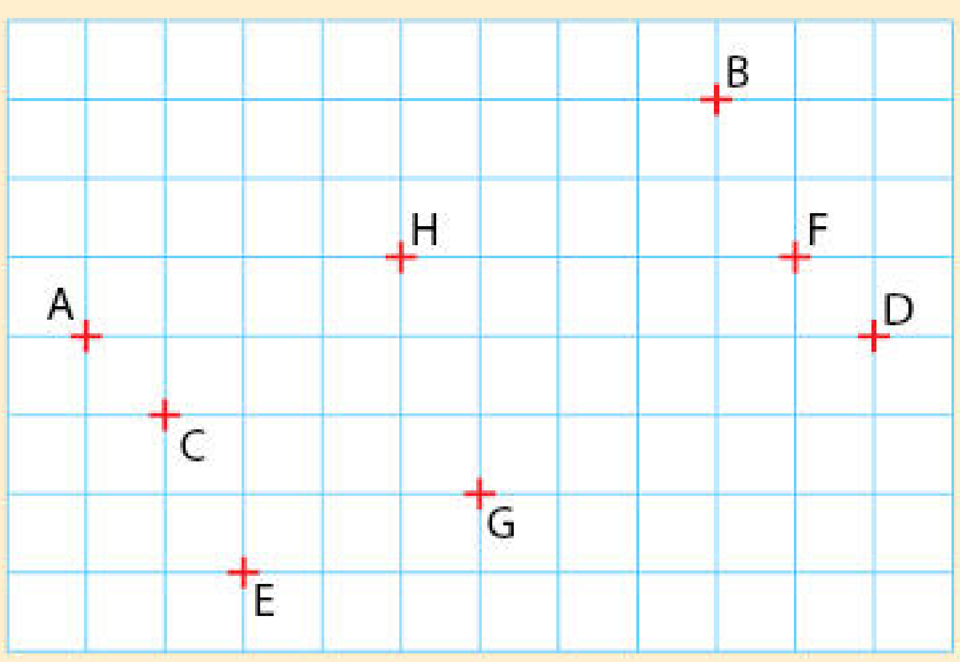
• **Alignement**

Trois points A, B, C sont alignés si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

À l'oral — Questions-Tests

Pour chaque question, il y a une seule réponse exacte.

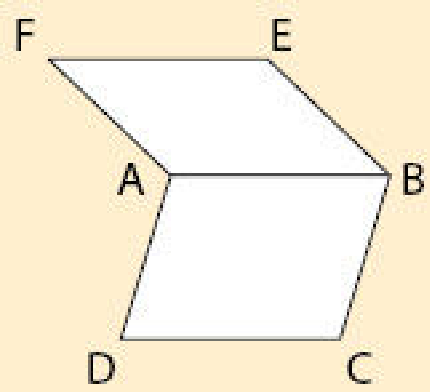
1



D'après la figure ci-dessus :

(1) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CF}$ (2) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{ED}$ (3) $\overrightarrow{FH} = \overrightarrow{DG}$

2 ABCD et ABEF sont des parallélogrammes. Alors :



(1) $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AC}$

(2) $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{EC}$

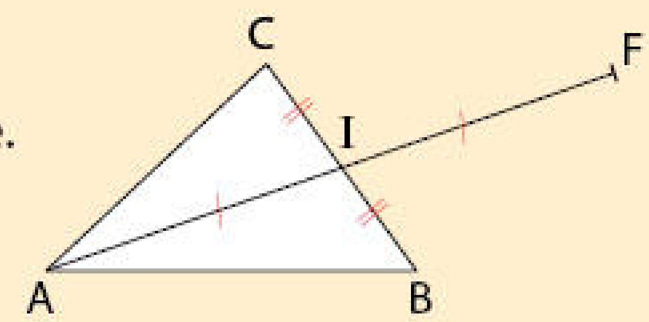
(3) CDFE est un parallélogramme

3 B, C, D, I sont quatre points.

On donne $\vec{u} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{BI}$. Alors :

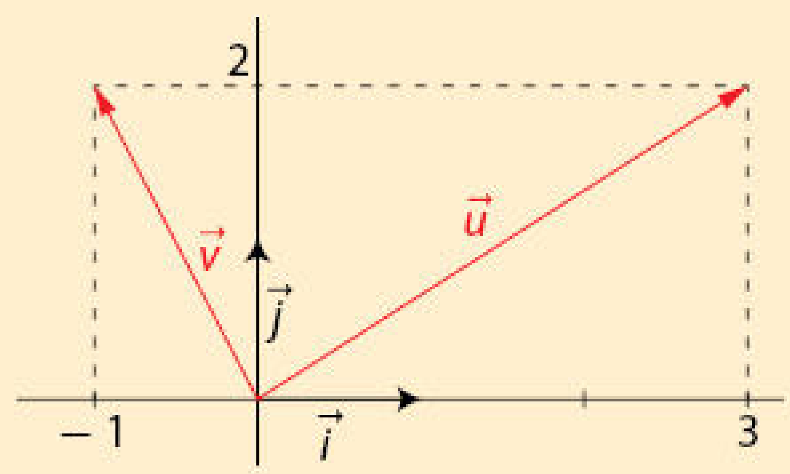
(1) $\vec{u} = \overrightarrow{CI}$ (2) $\vec{u} = \overrightarrow{CB}$ (3) $\vec{u} = \overrightarrow{BD}$

4 ABC est un triangle. I est le milieu du côté [BC] et $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IF}$. Alors :



(1) $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AI}$ (2) $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AI}$ (3) $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

5 Dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$, on a représenté les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ci-contre.



a) Alors :

(1) $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ (2) $\vec{u} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ (3) $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j}$

b) Alors :

(1) $-\vec{u}(-2\,;-3)$ (2) $2\vec{v}(-2\,;4)$ (3) $\vec{u} + \vec{v}(4\,;2)$

c) Un vecteur colinéaire au vecteur $\vec{v}$ est :

(1) $\vec{v}\,'(3\,;6)$ (2) $\vec{v}\,'(-6\,;3)$ (3) $\vec{v}\,'(3\,;-6)$

6 Dans un repère orthonormé, on donne les points :

A(– 2 ; – 1), B(3 ; 1), C(– 1 ; – 2) et D(4 ; 0)

(1) A, B, C sont alignés. (2) A, B, D sont alignés.

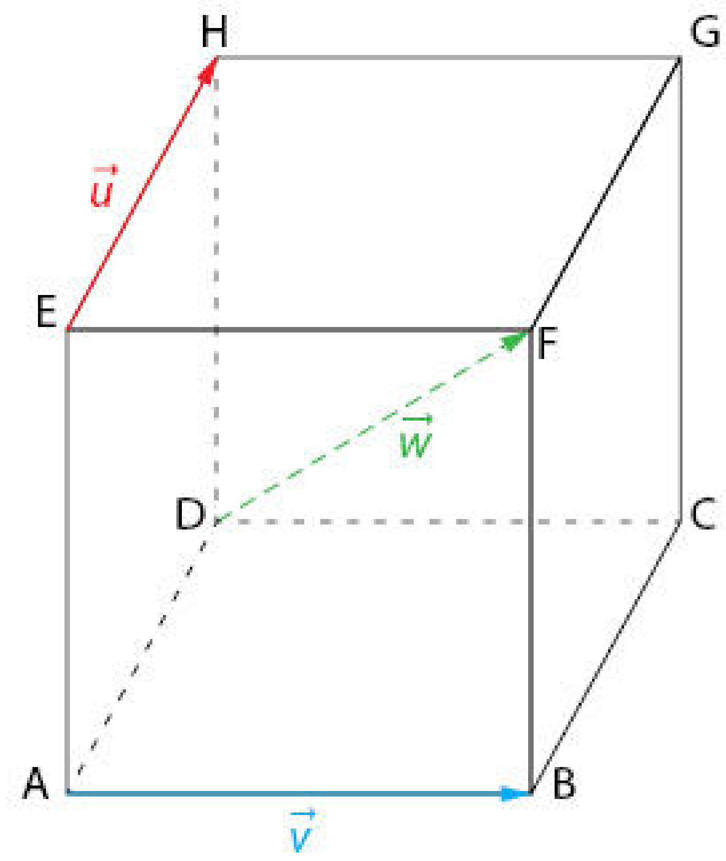
(3) (AB) et (CD) sont parallèles.

1 Des vecteurs dans l'espace

La notion de vecteur vue en géométrie plane s'étend à l'espace.
Les opérations sur les vecteurs du plan et leurs propriétés se prolongent aux vecteurs de l'espace.

ABCDEFGH est le cube représenté ci-contre.
On donne les vecteurs de l'espace :

$$\vec{u} = \overrightarrow{EH}, \quad \vec{v} = \overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \vec{w} = \overrightarrow{DF}.$$



1 **a)** Justifier que $\vec{v} = \overrightarrow{EF}$ et en déduire un représentant du vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.
b) Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est-il un représentant du vecteur $\vec{u} + \vec{v}$?
Justifier la réponse.

2 Donner un représentant, à l'aide des points de la figure, de chacun des vecteurs.
a) $\vec{w} + \vec{u}$ **b)** $\vec{w} - \vec{v}$ **c)** $\vec{u} + \vec{w} - \vec{v}$

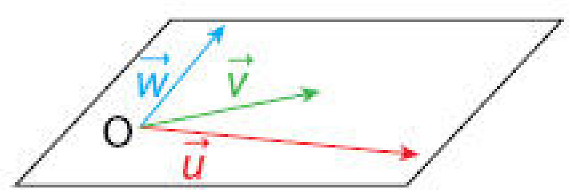
3 **a)** Réaliser ce cube et placer les points O et M définis par :

$$\overrightarrow{DO} = \frac{1}{2}\vec{w} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{EM} = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}.$$

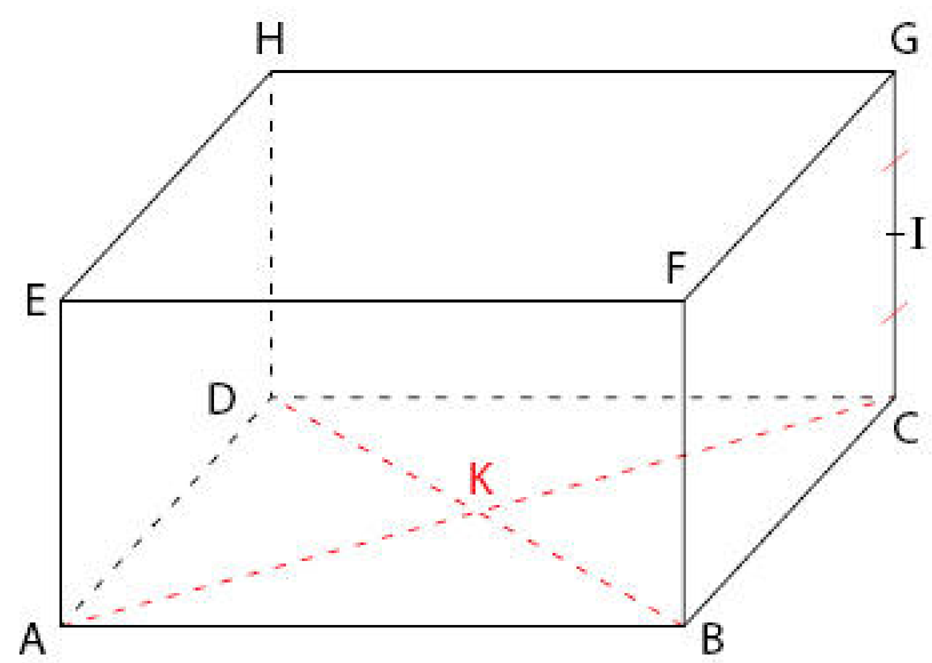
b) Dans le plan de la feuille, représenter le triangle BFH.
Placer les points O et M, puis justifier que $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BF}$.

2 Décomposition de vecteurs

Des vecteurs coplanaires de l'espace sont des vecteurs qui admettent des représentants situés dans le même plan.



ABCDEFGH est le parallélépipède rectangle représenté ci-dessous.
I est le milieu de l'arête [CG] et K est le centre de la face ABCD.



1 **a)** Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AK}$ sont-ils coplanaires ?
b) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AK}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

2 **a)** Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AI}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{AG}$.
b) Les vecteurs $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont-ils coplanaires ?

3 **a)** Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$ sont-ils coplanaires ?
On dit que ces vecteurs forment une base de l'espace.
b) Dans chaque cas, décomposer le vecteur dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ c'est-à-dire sous la forme $a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AD} + c\overrightarrow{AE}$ avec a, b, c nombres réels.
- $\overrightarrow{AK}$
- $\overrightarrow{AI}$
- $\overrightarrow{DI}$

Cours

Exercices
- **1** à **4** (ci-contre)
- **20** à **36**

1 Vecteurs de l'espace

On étend à l'espace la notion de vecteur vue en géométrie plane.

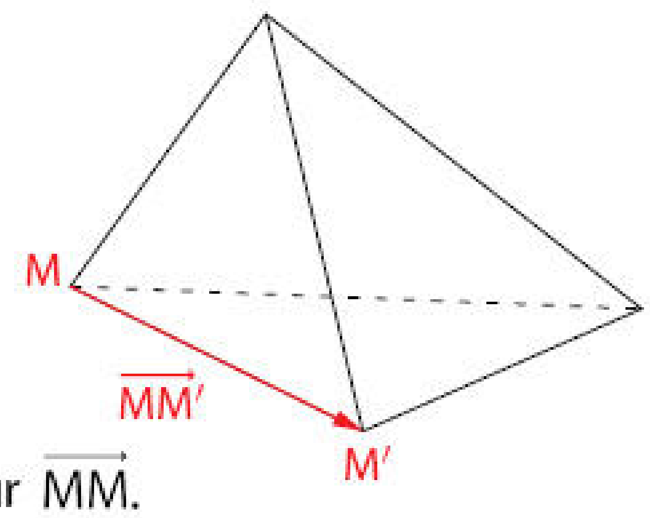
A Translations et vecteurs

Définitions

M et M′ sont deux points distincts de l'espace.

La translation qui transforme M en M′ est appelée translation de vecteur $\overrightarrow{MM'}$.

Le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a pour **direction** celle de la droite (MM′), pour **sens** celui de M vers M′ et pour **norme** la longueur MM′.



La translation qui transforme le point M en lui-même est la translation de vecteur $\overrightarrow{MM}$.
Le vecteur $\overrightarrow{MM}$ est appelé **vecteur nul** ; on le note $\vec{0}$, ainsi $\overrightarrow{MM} = \vec{0}$.

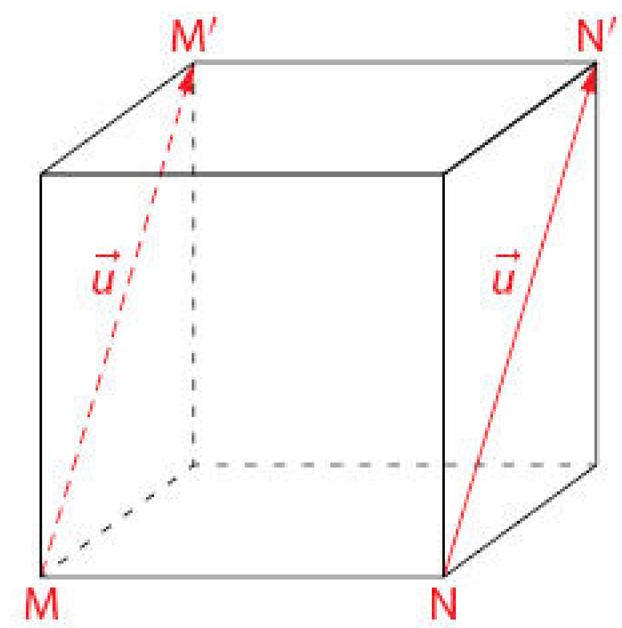
Égalité de deux vecteurs

- Lorsque la translation qui transforme M en M′ transforme également N en N′, on dit que les vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{NN'}$ sont égaux.

Dans ce cas $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{NN'}$ sont les représentants d'un même vecteur $\vec{u}$ et on note :

$$\vec{u} = \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'}.$$

- $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'}$ si, et seulement si, le quadrilatère MM′N′N est un parallélogramme (éventuellement aplati).

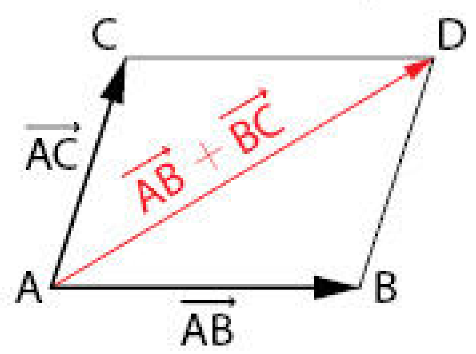


B Opérations sur les vecteurs, combinaisons linéaires

- **Somme de deux vecteurs :** A, B et C sont des points de l'espace.

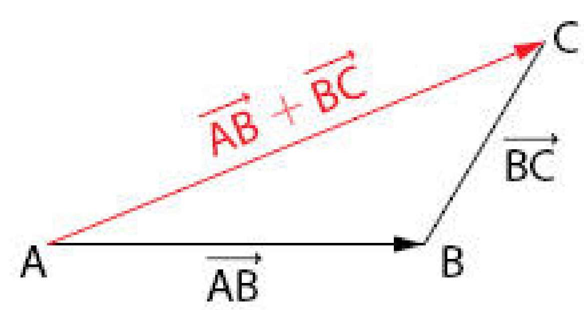
Règle du parallélogramme

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ où D est le point tel que ABDC est un parallélogramme.



Relation de Chasles

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

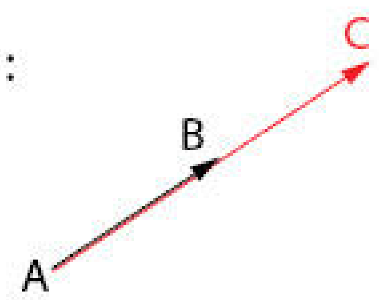


- **Produit d'un vecteur par un nombre réel :** A, B sont des points distincts de l'espace et λ un nombre réel.

Le vecteur $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}$ est défini par :

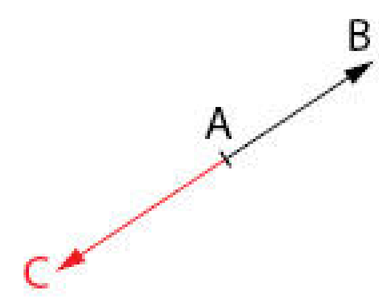
- si $\lambda \geqslant 0$

C $\in$ [AB] et AC $= \lambda$AB



- si $\lambda < 0$

C $\in$ (AB), C $\notin$ [AB] et AC $= \lambda$AB



Propriétés (admises)

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ désignent des vecteurs de l'espace, λ et λ' désignent des nombres réels.

- $\lambda\vec{u} = \vec{0}$ si, et seulement si, $\lambda = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$.
- $(-1)\vec{u} = -\vec{u}$ et le vecteur $\vec{u} + (-\vec{v})$ est noté $\vec{u} - \vec{v}$
- $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$ $\quad (\lambda + \lambda')\vec{u} = \lambda\vec{u} + \lambda'\vec{u}$ $\quad \lambda(\lambda'\vec{u}) = (\lambda\lambda')\vec{u}$

Définition

Dire qu'un vecteur $\vec{u}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{t}$ signifie qu'il existe des réels x, y et z tels que $\boldsymbol{\vec{u} = x\vec{v} + y\vec{w} + z\vec{t}}$.

EXERCICES RÉSOLUS

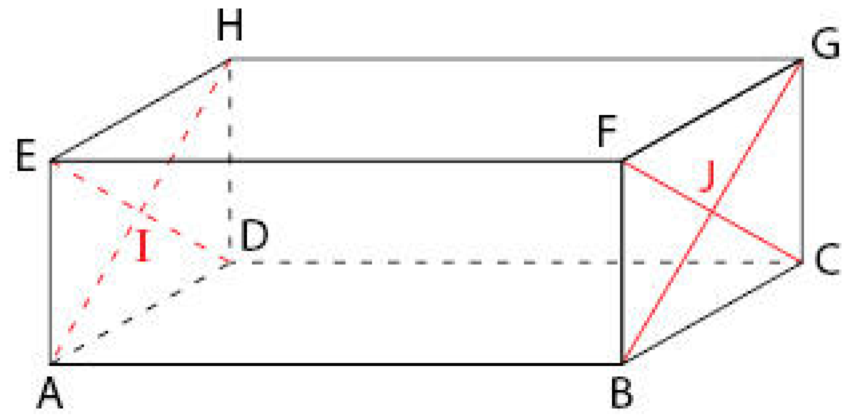
1 Prouver des égalités de vecteurs

ABCDEFGH est le parallélépipède rectangle représenté ci-contre.
I et J sont les centres respectifs des faces ADHE et BCGF.

a) Déterminer trois vecteurs de la figure égaux au vecteur $\overrightarrow{FG}$.

b) Quelle est l'image du point I par la translation de vecteur $\overrightarrow{FJ}$?

c) Compléter l'égalité suivante $\overrightarrow{FC} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{E\ldots}$.



Solution

a) Les faces du parallélépipède rectangle sont des rectangles, donc $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{EH}$ et $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{BC}$.
On a aussi $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ donc $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AD}$.
$\overrightarrow{EH}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont trois vecteurs égaux à $\overrightarrow{FG}$.

b) $\overrightarrow{ID} = \frac{1}{2}\overrightarrow{ED}$, or $\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{FC}$ donc $\overrightarrow{ID} = \frac{1}{2}\overrightarrow{FC}$, soit $\overrightarrow{ID} = \overrightarrow{FJ}$.
Ainsi, D est l'image de I par la translation de vecteur $\overrightarrow{FJ}$.

c) $\overrightarrow{FC} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{ED} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC}$
D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EC}$ donc $\overrightarrow{FC} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{EC}$.

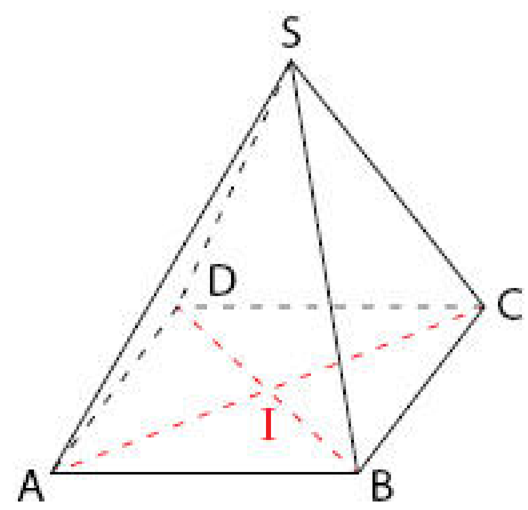
> **b)** Pour trouver l'image de I, on cherche le point qui vérifie $\overrightarrow{I\ldots} = \overrightarrow{FJ}$.

2 Décomposer un vecteur

SABCD est une pyramide de sommet S dont la base est le parallélogramme ABCD de centre I.

a) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{SI}$.

b) En déduire une expression du vecteur $\overrightarrow{SI}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BS}$.



Solution

a) D'après la relation de Chasles :
$\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SI} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{SI} + \overrightarrow{ID} = 2\overrightarrow{SI} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{ID}$
I étant le milieu de [BD], les vecteurs $\overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{ID}$ sont opposés, donc $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$. Ainsi $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = 2\overrightarrow{SI}$.

b) D'après **a)** : $\overrightarrow{SI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{SD}$. Or, $\overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{BD}$ donc $\overrightarrow{SI} = \overrightarrow{SB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$.

ABCD est un parallélogramme donc $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$. Ainsi, $\overrightarrow{SI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BS}$.

> La relation de Chasles et la règle du parallélogramme permettent de faire apparaître les vecteurs utiles pour décomposer.

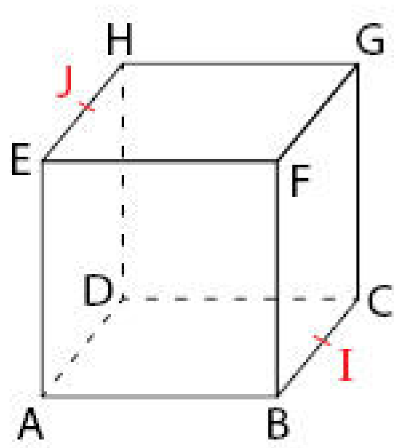
EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 1

3 ABCDEFGH est le cube représenté ci-contre.
I et J sont les milieux respectifs des segments [BC] et [EH].

a) Quelle est l'image du point I par la translation de vecteur $\overrightarrow{HJ}$?

b) Compléter l'égalité : $\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{H\ldots}$

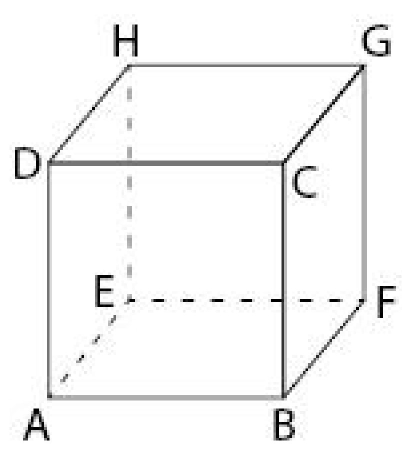


Sur le modèle de l'exercice résolu 2

4 ABCDEFGH est le cube représenté ci-contre.
Exprimer chacun des vecteurs comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{HD}$, $\overrightarrow{HE}$ et $\overrightarrow{HG}$.

a) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{EB}$ **b)** $\overrightarrow{DF}$

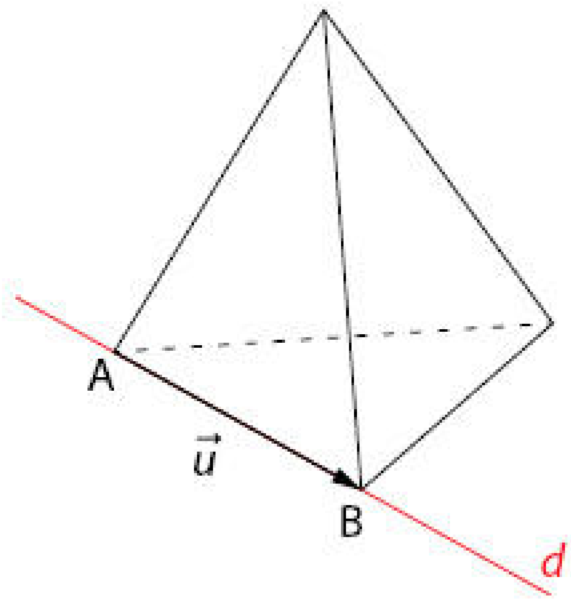
c) $\overrightarrow{HB}$ **d)** $\overrightarrow{GA}$



Exercices
- 5 à 8 (ci-contre)
- 37 à 46

2 Droites de l'espace

A Vecteurs directeurs d'une droite, vecteurs colinéaires



Définition

Dire qu'un vecteur non nul $\vec{u}$ est un **vecteur directeur** d'une droite d signifie qu'il existe deux points distincts A et B de la droite d tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

Remarque : si $\vec{u}$ est un vecteur directeur d'une droite d, alors tout vecteur $k\vec{u}$ avec $k \in \mathbb{R}^*$ est aussi un vecteur directeur de la droite d.

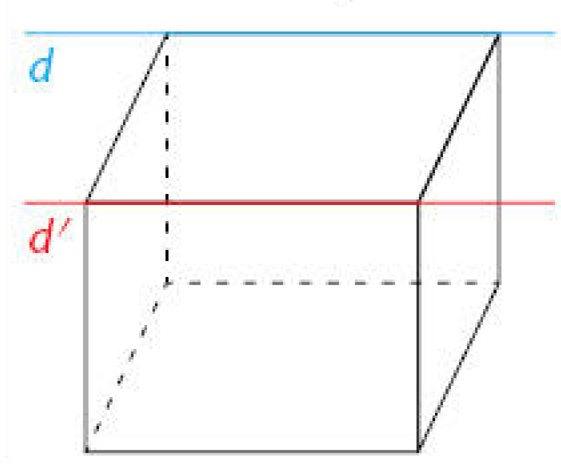
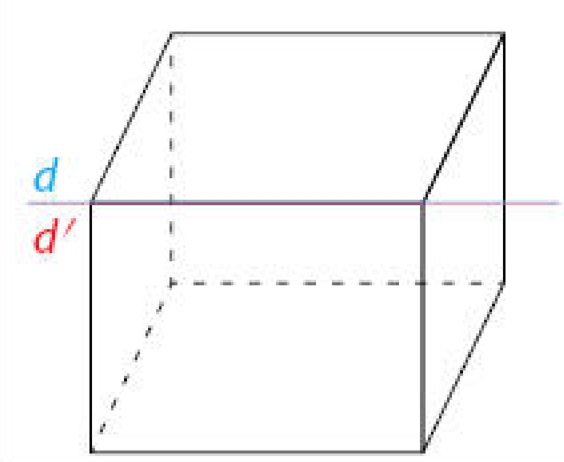
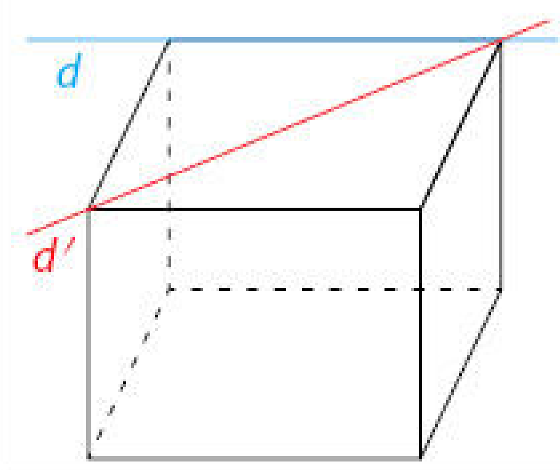
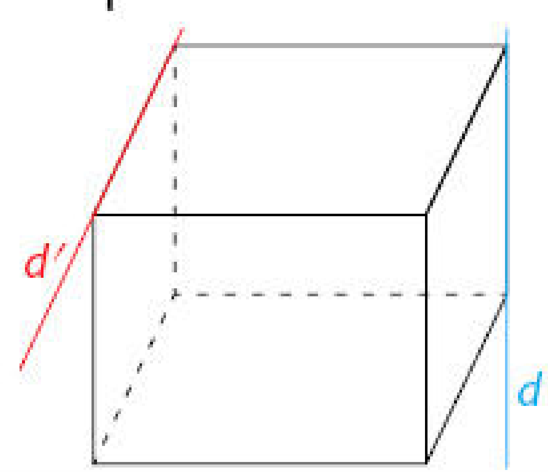
Définitions

- Dire que deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ **et** $\vec{v}$ **sont colinéaires** signifie qu'il existe un réel λ tel que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$.
- Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.

Vidéo
JaiCompris.com
Cette notion est présentée en vidéo

B Positions relatives de deux droites de l'espace

d et d' sont deux droites de l'espace de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$.

$\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont colinéaires.		$\vec{u}$ et $\vec{u}'$ ne sont pas colinéaires.	
d et d' sont coplanaires et strictement parallèles.	d et d' sont coplanaires et confondues.	d et d' sont coplanaires et sécantes.	d et d' sont non coplanaires, aucun plan ne contient d et d'.
			

C Caractérisation d'une droite par un point et un vecteur directeur

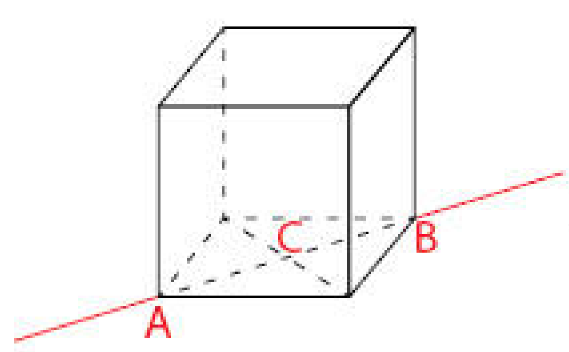
Propriété

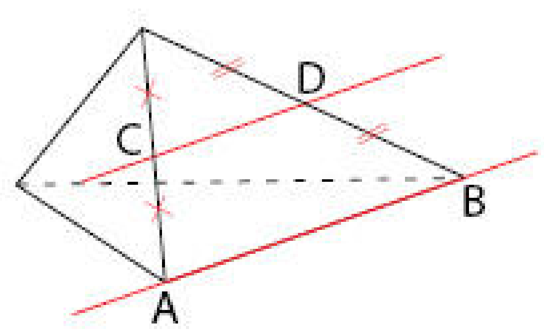
d est la droite passant par un point A et de vecteur directeur $\vec{u}$.
Un point **M appartient à la droite d** si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, c'est-à-dire s'il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u}$.

D Alignement et parallélisme

Propriétés

- Trois points **A, B et C** de l'espace sont **alignés** si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ **et** $\overrightarrow{AC}$ **sont colinéaires.**
- Les droites **(AB) et (CD) sont parallèles** si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ **et** $\overrightarrow{CD}$ **sont colinéaires.**

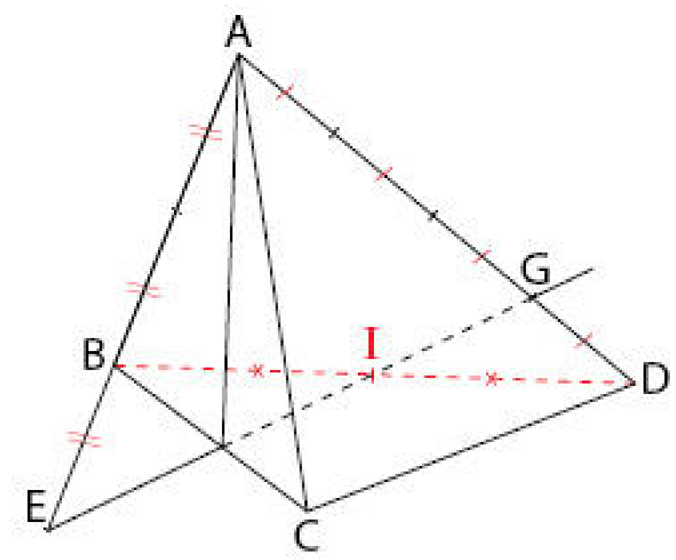




EXERCICES RÉSOLUS

5 Démontrer l'alignement de trois points

ABCD est un tétraèdre de l'espace. I est le milieu de l'arête [BD], G est le point tel que $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$ et E est le point tel que $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$.



a) Exprimer chacun des vecteurs $\overrightarrow{GE}$ et $\overrightarrow{GI}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

b) En déduire que les points I, G et E sont alignés.

Solution

a) Avec la relation de Chasles :

$\overrightarrow{GE} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AE} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{GI} = \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{DI}$; or, $\overrightarrow{GD} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AD} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{DI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB})$,

donc $\overrightarrow{GI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}) = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

b) D'après **a)**, $\overrightarrow{GE} = 3\overrightarrow{GI}$. Les vecteurs $\overrightarrow{GE}$ et $\overrightarrow{GI}$ sont colinéaires donc les points I, G et E sont alignés.

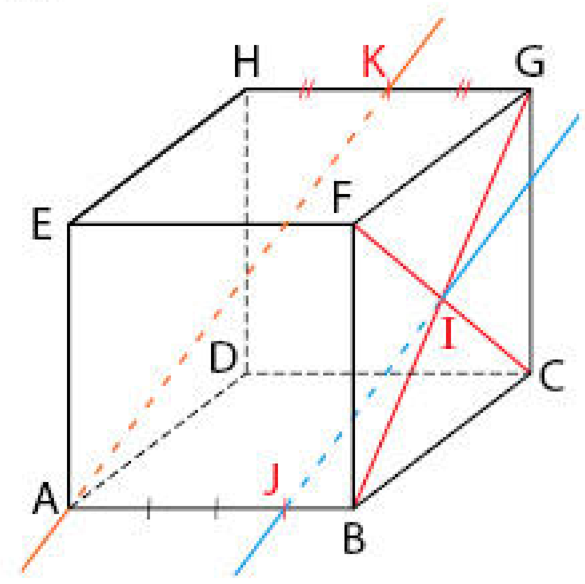
> On obtient la relation de colinéarité à partir des décompositions des vecteurs $\overrightarrow{GE}$ et $\overrightarrow{GI}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

6 Démontrer le parallélisme de deux droites

ABCDEFGH est le cube représenté ci-contre.
I est le centre de la face BCGF, K est le milieu de [HG] et J le point tel que $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$.

a) Exprimer chacun des vecteurs $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{IJ}$ comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.

b) En déduire que les droites (AK) et (IJ) sont parallèles.



Solution

a) Avec la relation de Chasles :

$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HK} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{HG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$

$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BJ}$; or, $\overrightarrow{IB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{GF} + \overrightarrow{GC}) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$, donc

$\overrightarrow{IJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BA} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$.

b) D'après **a)**, $\overrightarrow{IJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AK}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont colinéaires donc les droites (AK) et (IJ) sont parallèles.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 5

7 ABCD est un tétraèdre.
J est le milieu de [BC], H et F sont les points tels que :

$$\overrightarrow{AH} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AF} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

a) Exprimer chacun des vecteurs $\overrightarrow{FH}$ et $\overrightarrow{FJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

b) En déduire que les points F, H et J sont alignés.

Vidéo

JaiCompris.com — Cet exercice est corrigé en vidéo

Sur le modèle de l'exercice résolu 6

8 ABCD est un tétraèdre. I est le milieu de [CD], J celui de [AI]. M et H sont les points tels que :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AI}.$$

a) Exprimer chacun des vecteurs $\overrightarrow{MH}$ et $\overrightarrow{BJ}$ comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.

b) En déduire que les droites (MH) et (BJ) sont parallèles.

Cours

Exercices
- 9 à 12 (ci-contre)
- 47 à 59

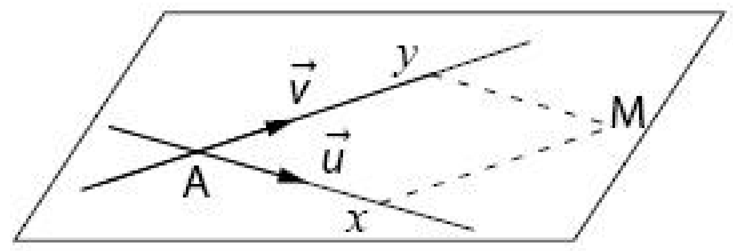
3 Plans de l'espace

A Caractérisation d'un plan de l'espace par un point et une direction

Notation et vocabulaire

Un plan de l'espace peut être défini par la donnée de deux droites **sécantes**, c'est-à-dire d'un point A et de deux vecteurs **non colinéaires** $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

On note ce plan $(\mathbf{A}\,;\vec{\boldsymbol{u}},\vec{\boldsymbol{v}})$, on dit que $(\vec{\boldsymbol{u}},\vec{\boldsymbol{v}})$ est un **couple de vecteurs directeurs** du plan et qu'il définit sa **direction**.



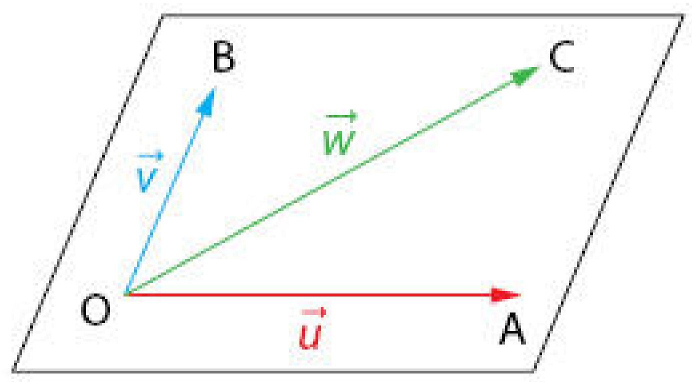
Propriété (admise)

$\mathscr{P}$ est le plan $(\mathrm{A}\,;\vec{u},\vec{v})$.
Un point M appartient au plan $\mathscr{P}$ si, et seulement si, il existe des réels x et y tels que $\overrightarrow{\mathbf{AM}} = x\vec{\boldsymbol{u}} + y\vec{\boldsymbol{v}}$.

B Vecteurs coplanaires

Définition

Dire que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont **coplanaires** signifie que pour un point O quelconque de l'espace, les points O, A, B et C où $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{u}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{v}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{w}$ appartiennent à un même plan.

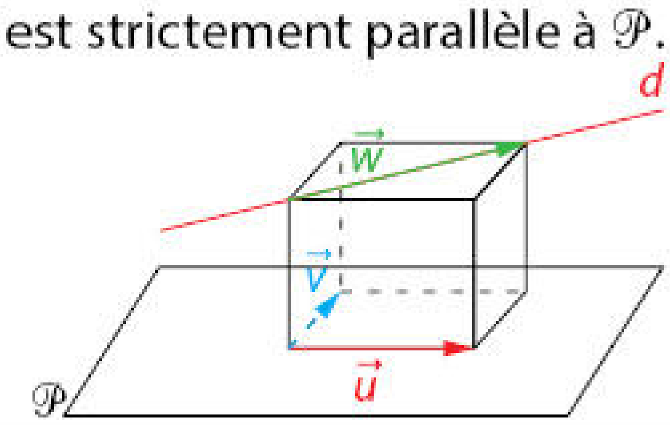
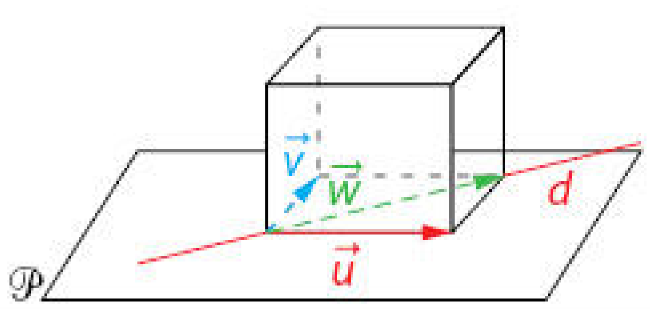
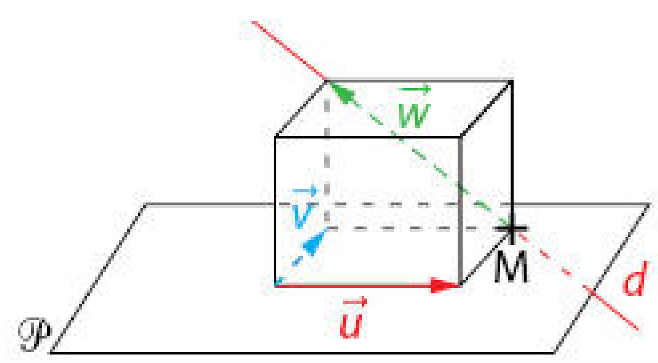


Propriété

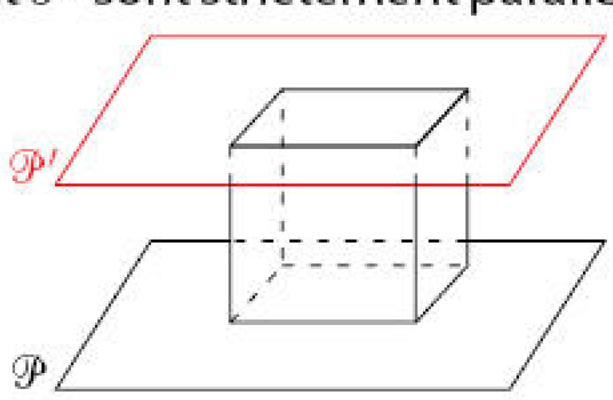
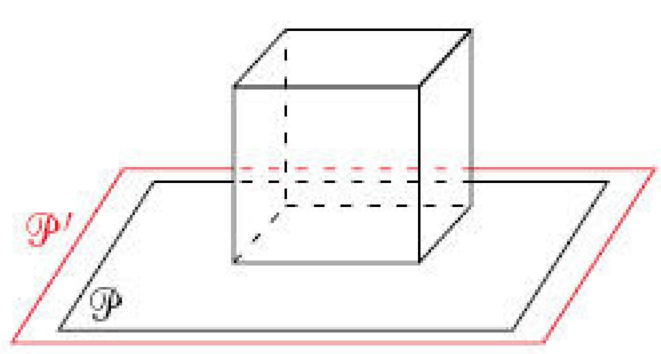
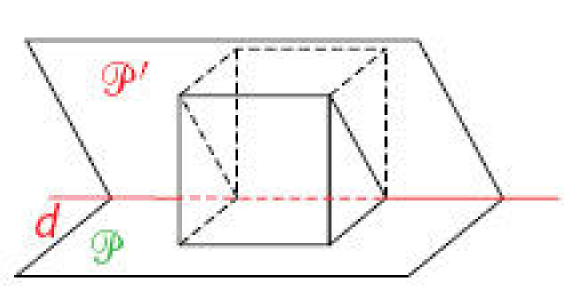
$\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont des vecteurs de l'espace tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
$\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont **coplanaires** si, et seulement si, il existe des réels x et y tels que $\vec{\boldsymbol{w}} = x\vec{\boldsymbol{u}} + y\vec{\boldsymbol{v}}$.

C Positions relatives de droites et plans de l'espace

- $\mathscr{P}$ est un plan de direction $(\vec{u},\vec{v})$ et d est une droite de vecteur directeur $\vec{w}$.

$\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires : d et $\mathscr{P}$ sont parallèles.		$\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires.
d est strictement parallèle à $\mathscr{P}$.	d est contenue dans $\mathscr{P}$.	d et $\mathscr{P}$ sont sécants en M.
		

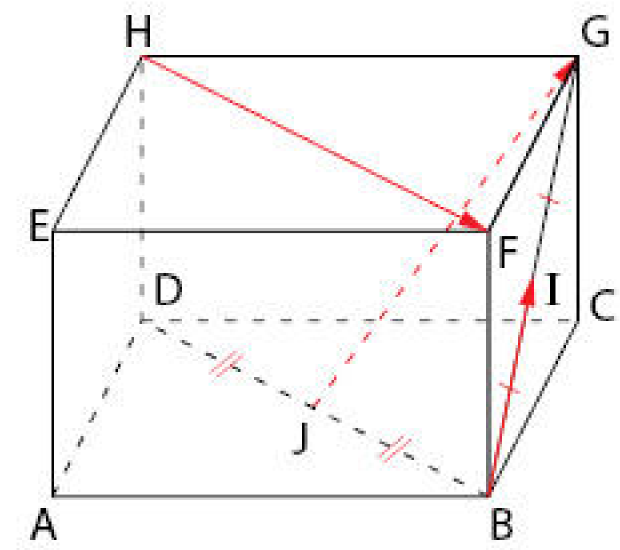
- $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont deux plans

$\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ ont même direction : $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont parallèles.		$\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ n'ont pas la même direction.
$\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont strictement parallèles.	$\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont confondus.	$\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont sécants suivant une droite d.
		

EXERCICES RÉSOLUS

9 Démontrer que des vecteurs sont coplanaires

ABCDEFGH est le parallélépipède rectangle représenté ci-contre.
I est le milieu du segment [BG] et J est le milieu du segment [DB].
Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{BI}$, $\overrightarrow{JG}$ et $\overrightarrow{HF}$ sont coplanaires.



Solution

D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{JG} = \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{BG}$.

BDHF est un rectangle et J est le milieu de [DB] donc $\overrightarrow{JB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HF}$.

I est le milieu de [BG] donc $\overrightarrow{BG} = 2\overrightarrow{BI}$.

Alors $\overrightarrow{JG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HF} + 2\overrightarrow{BI}$ et les vecteurs $\overrightarrow{BI}$, $\overrightarrow{JG}$ et $\overrightarrow{HF}$ sont coplanaires (les vecteurs $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{HF}$ sont non colinéaires).

Pour démontrer que trois vecteurs sont coplanaires, on exprime l'un des vecteurs comme combinaison linéaire des deux autres.

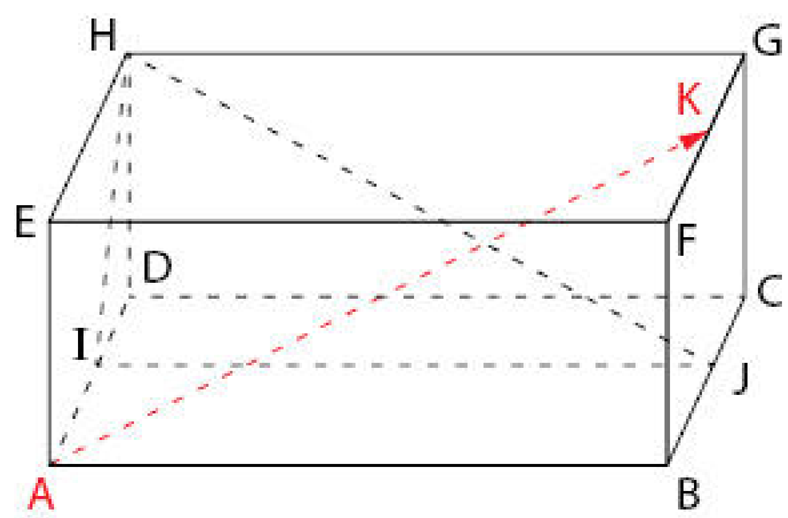
10 Démontrer qu'une droite et un plan sont parallèles

ABCDEFGH est le parallélépipède rectangle représenté ci-contre.
I, J et K sont les milieux respectifs des arêtes [AD], [BC] et [FG].

a) Démontrer que $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{IG}$.

b) En déduire l'écriture de $\overrightarrow{AK}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IH}$.

c) En déduire que la droite (AK) est parallèle au plan (IJH).



Solution

a) D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IK}$.

Or $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{KG}$, donc $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{IK} + \overrightarrow{KG} = \overrightarrow{IG}$.

b) $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{IG} = \overrightarrow{IH} + \overrightarrow{HG}$; or, $\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{IJ}$ donc $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{IH} + \overrightarrow{IJ}$

c) $(\overrightarrow{IH}, \overrightarrow{IJ})$ est un couple de vecteurs directeurs du plan (IJH).

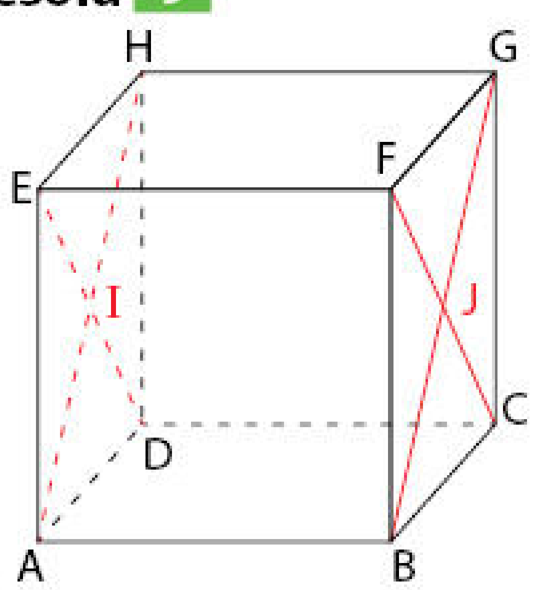
D'après **b)**, $\overrightarrow{IH}$, $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{AK}$ sont coplanaires donc la droite (AK) est parallèle au plan (IJH).

Pour démontrer que la droite (AK) est parallèle au plan (IJH), on montre que $\overrightarrow{AK}$ est une combinaison linéaire des vecteurs non colinéaires de (IJH).

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 9

11 ABCDEFGH est le cube représenté ci-contre.
I et J sont les centres respectifs des faces ADHE et BCGF.



Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{HF}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont coplanaires.

Sur le modèle de l'exercice résolu 10

12 ABCD est un tétraèdre. G est le point tel que $\overrightarrow{DG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DI}$ où I est le milieu de [BC].

E et F sont tels que $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AG}$.

a) Réaliser une figure.

b) Décomposer $\overrightarrow{EF}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$.

c) En déduire que la droite (EF) est parallèle au plan (BCD).

Exercices
- 13 à 16 (ci-contre)
- 60 à 80

4 Bases et repères de l'espace

Vidéo
JaiCompris.com
Cette notion est présentée en vidéo

Bases de l'espace

Définition

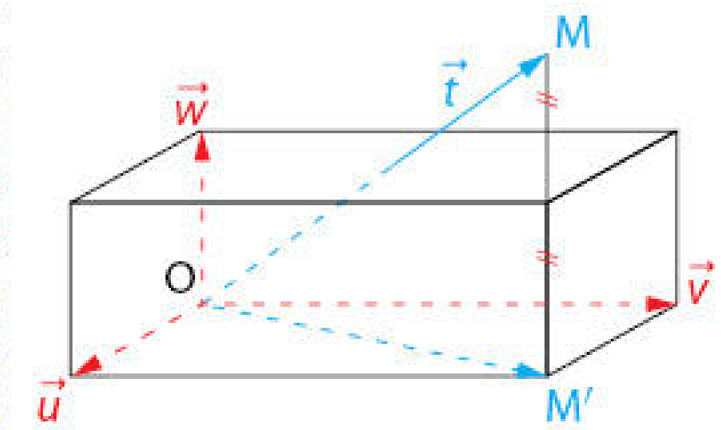
Une **base** de l'espace est un triplet $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ formé de vecteurs **non coplanaires**.

Propriété – Définition

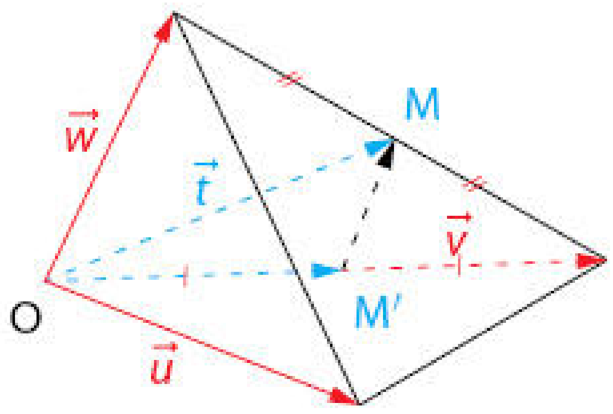
$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de l'espace.
Pour tout vecteur $\vec{t}$, il existe **un unique** triplet $(a\,;b\,;c)$ de nombres réels tels que $\vec{t} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$.
$(a\,;b\,;c)$ est le triplet des **coordonnées** du vecteur $\vec{t}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Remarque : cette propriété est démontrée à l'exercice 84 p. 101.

Exemples



$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{M'M}$
$\overrightarrow{OM} = \vec{u} + \vec{v} + 2\vec{w}$
$\vec{t}$ a pour coordonnées $(1\,;1\,;2)$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.



$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{M'M}$
$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w}$
$\vec{t}\left(0\,;\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

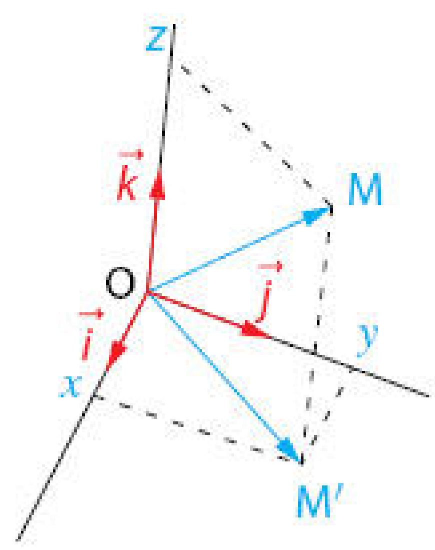
A Repères de l'espace

Définition

Un **repère** de l'espace, noté $(O\,;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, est formé d'un point O et d'une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de vecteurs de l'espace.

Propriété

$(O\,;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère de l'espace. Pour tout point M, il existe un unique triplet $(x\,;y\,;z)$ de réels tels que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.
$(x\,;y\,;z)$ est le triplet de **coordonnées** du point M dans le repère $(O\,;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, x est l'**abscisse** de M, y est son **ordonnée** et z est sa **cote**.



Remarque : cette propriété découle directement de la propriété du § A.

B Calculs sur les coordonnées

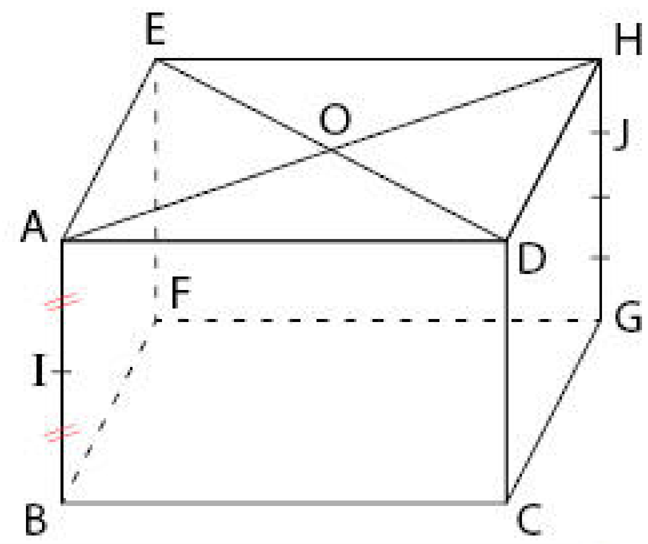
Propriétés

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives $(x\,;y\,;z)$ et $(x'\,;y'\,;z')$ dans une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ alors :
  – le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $(x + x'\,;y + y'\,;z + z')$;
  – pour tout réel λ, le vecteur $\lambda\vec{u}$ a pour coordonnées $(\lambda x\,;\lambda y\,;\lambda z)$.
- Si A et B ont pour coordonnées $(x_A\,;y_A\,;z_A)$ et $(x_B\,;y_B\,;z_B)$ dans un repère $(O\,;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, alors :
  – le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A\,;y_B - y_A\,;z_B - z_A)$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$;
  – le milieu I du segment [AB] a pour coordonnées $\left(\frac{x_A + x_B}{2}\,;\frac{y_A + y_B}{2}\,;\frac{z_A + z_B}{2}\right)$.

EXERCICES RÉSOLUS

13 Décomposer un vecteur dans une base

ABCDEFGH est le parallélépipède rectangle représenté ci-contre.
On note I le milieu de [AB], O le centre de la face ADHE et J le point défini par $\overrightarrow{HJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{HG}$.



a) Justifier que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ est une base de l'espace.

b) Décomposer les vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{BJ}$ dans cette base.

Solution

a) Le point E n'appartient pas au plan (ABD) donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$ sont non coplanaires et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ est une base de l'espace.

Les décompositions peuvent être lues sur la figure.

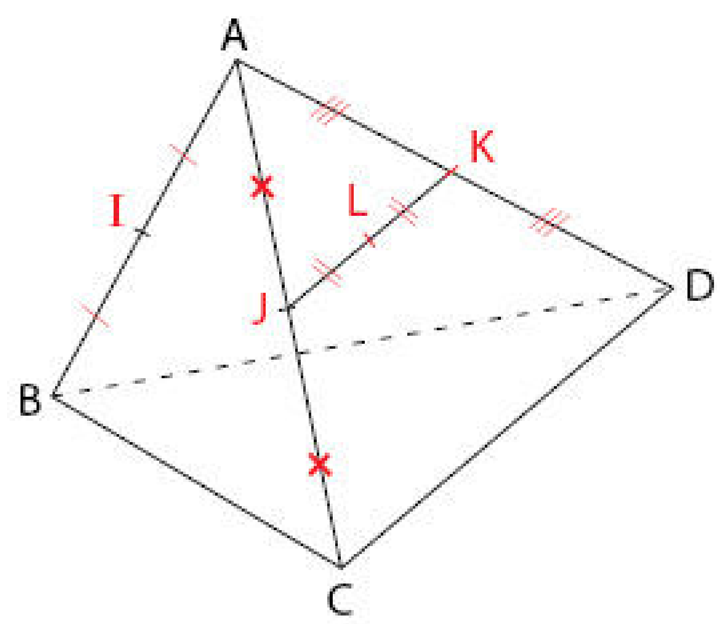
b) $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AI} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AH} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$; or, $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$ donc $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$.

$\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GJ}$; or, $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{GJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{GH} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$

donc $\overrightarrow{BJ} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$.

14 Calculer des coordonnées

ABCD est un tétraèdre. I, J et K sont les milieux respectifs des arêtes [AB], [AC] et [AD]. L est le milieu du segment [JK].



a) Déterminer les coordonnées des points I, J, K et L dans le repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$.

b) Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{IL}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont coplanaires.

Solution

a) • $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ donc $I\left(\frac{1}{2} ; 0 ; 0\right)$; • $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ donc $J\left(0 ; \frac{1}{2} ; 0\right)$;

• $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ donc $K\left(0 ; 0 ; \frac{1}{2}\right)$;

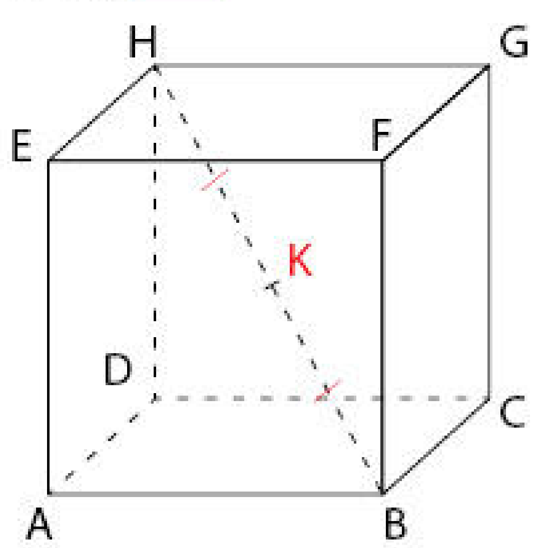
• L est le milieu de [JK] donc $L\left(0 ; \frac{1}{4} ; \frac{1}{4}\right)$.

b) On obtient $\overrightarrow{IL}\left(-\frac{1}{2} ; \frac{1}{4} ; \frac{1}{4}\right)$, $\overrightarrow{BC}(-1 ; 1 ; 0)$ et $\overrightarrow{CD}(0 ; -1 ; 1)$ donc $\overrightarrow{IL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{CD}$ et les vecteurs $\overrightarrow{IL}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont coplanaires.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 13

15 ABCDEFGH est le cube représenté ci-contre.
K est le milieu de [HB].



a) Justifier que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ est une base de l'espace.

b) Décomposer les vecteurs $\overrightarrow{BK}$ et $\overrightarrow{KD}$ dans cette base.

Sur le modèle de l'exercice résolu 14

16 ABCD est un tétraèdre. I est le milieu de [BC], J celui de [ID]. K est le point défini par $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AJ}$.

a) Réaliser une figure.

b) Déterminer les coordonnées des points I, J et K dans le repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$.

c) Les vecteurs $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont-ils coplanaires ?

EXERCICE RÉSOLU

17 Établir l'appartenance d'un point à une droite

Cours 4

$(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère de l'espace.
On donne le point $A(2 ; 0 ; -1)$ et le vecteur $\vec{u}(1 ; 2 ; 4)$.
d est la droite passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

1. Voici une fonction **Droite** écrite en langage Python. Ses paramètres x, y et z représentent les coordonnées d'un point.

a) Dans chaque cas, indiquer la constante booléenne renvoyée par cette fonction.

• $E(3 ; 2 ; 3)$ • $F(0 ; -4 ; -1)$ • $G(-5 ; -14 ; -29)$

b) Expliquer le rôle de la fonction **Droite**.
Justifier la réponse et interpréter le booléen qu'elle renvoie.

2. Saisir et tester cette fonction avec d'autres points.

```python
def Droite(x,y,z):
    r=x-2
    s=y
    t=z+1
    if r==s/2 and r==t/4:
        bool=True
    else:
        bool=False
    return bool
```

Solution

1. a) Voici pour chacun des points, les valeurs des variables du programme.

Nom du point	E	F	G
$(x ; y ; z)$	$(3 ; 2 ; 3)$	$(0 ; -4 ; -1)$	$(-5 ; -14 ; -29)$
$(r ; s ; t)$	$(1 ; 2 ; 4)$	$(-2 ; -4 ; 0)$	$(-7 ; -14 ; -28)$
$r = \frac{s}{2}$ et $r = \frac{t}{4}$	Vrai	Faux	Vrai
bool	True	False	True

b) $M(x ; y ; z)$ est un point. Alors $\overrightarrow{AM}(r ; s ; t)$ et M appartient à la droite d si, et seulement si, il existe un réel λ tel que $r = \lambda$, $s = 2\lambda$ et $t = 4\lambda$, c'est-à-dire $r = \frac{s}{2}$ et $r = \frac{t}{4}$.

Donc la fonction **Droite** renvoie True si le point M appartient à la droite d et False sinon.

2. Par exemple :

```python
>>> Droite(13,22,43)
True
>>> Droite(9,-18,35)
False
```

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 17

18 Reprendre l'exercice **17** en modifiant la fonction **Droite** dans chaque situation.

a) d' est la droite passant par le point $B(-1 ; 1 ; 3)$ et de vecteur directeur $\vec{v}(-2 ; 0 ; 1)$.

b) d'' est la droite passant par le point $C(4 ; -3 ; 0)$ et de vecteur directeur $\vec{w}(3 ; 2 ; 5)$.

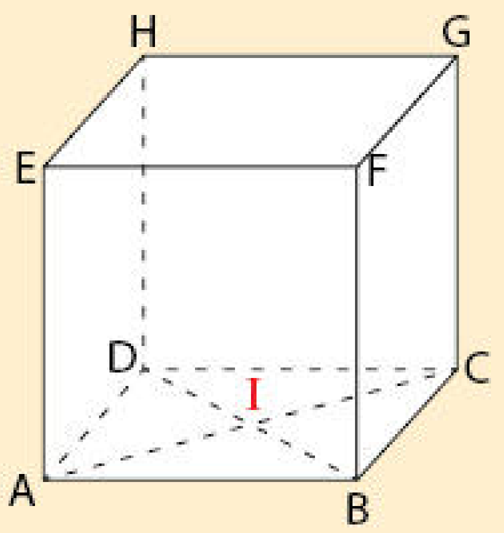
19 Dans un repère de l'espace, on donne les vecteurs $\vec{u}(-1 ; 7 ; 5)$ et $\vec{v}(x ; y ; z)$ (avec $\vec{v} \neq \vec{0}$).
d et d' sont deux droites de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Écrire une fonction en langage Python qui renvoie True si d et d' sont parallèles et False sinon.
Saisir et tester cette fonction.

Vecteurs de l'espace

Cours 1

Questions flash À l'oral

Pour les exercices 20 à 24, ABCDEFGH est le cube représenté ci-dessous.
I est le centre de la face ABCD.



20 Donner trois représentants du vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AE}$.

21 Déterminer mentalement l'image du point D par la translation de vecteur $\overrightarrow{EF}$.

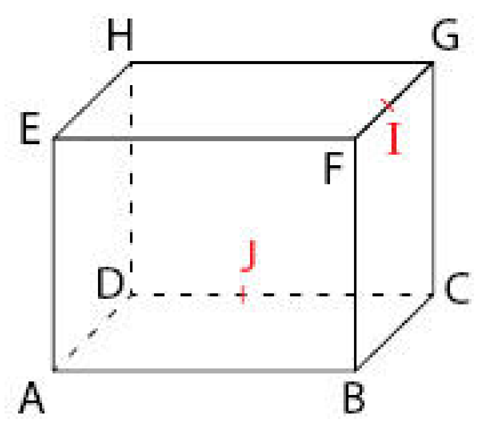
22 Déterminer mentalement deux représentants du vecteur $\vec{v} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EH}$.

23 Indiquer oralement le sommet manquant du cube tel que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{A\bullet}$.

24 Compléter oralement chaque égalité :

$\overrightarrow{F\bullet} = 2\overrightarrow{ID}$ $\qquad$ $\overrightarrow{I\bullet} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{EG}$

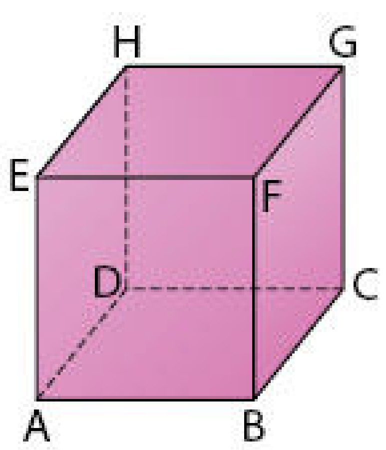
25 ABCDEFGH est le parallélépipède rectangle représenté ci-contre.
I est le milieu de l'arête [FG] et J le milieu de l'arête [CD].
Dire si chacune des égalités vectorielles suivantes est vraie ou fausse. Justifier.



a) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FH}$ $\qquad$ **b)** $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DG} + \overrightarrow{ED}$

c) $\overrightarrow{FI} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ $\qquad$ **d)** $\overrightarrow{FE} = -2\overrightarrow{JC}$

26 ABCDEFGH est le cube représenté ci-contre.
Réaliser la figure et construire les points P, Q, R et S tels que :



a) $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CG}$

b) $\overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{HD}$

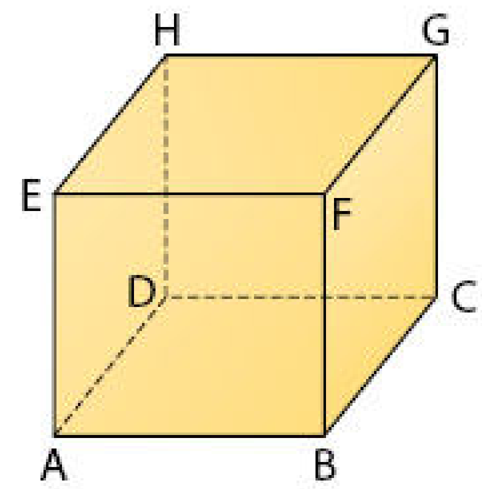
c) $\overrightarrow{BR} = \overrightarrow{CD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

d) $\overrightarrow{HS} = \overrightarrow{DB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$

27 ABCD est un tétraèdre.
a) Réaliser une figure.
b) Placer les points E, F, G et H définis par :

- $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$
- $\overrightarrow{BF} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{CD}$
- $\overrightarrow{GA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BD}$
- $\overrightarrow{CH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$

28 ABCDEFGH est le cube représenté ci-contre.
Démontrer chaque égalité.



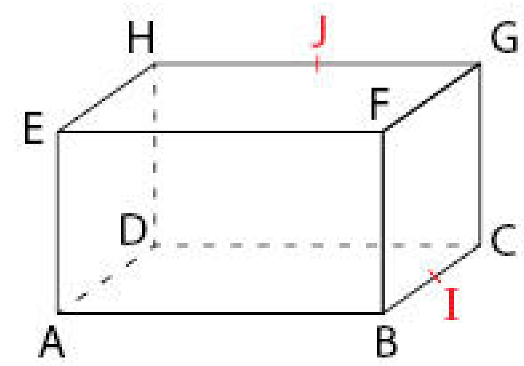
a) $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{CH} = \vec{0}$

b) $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{FC} = \vec{0}$

c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AG}$

d) $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{EF}$

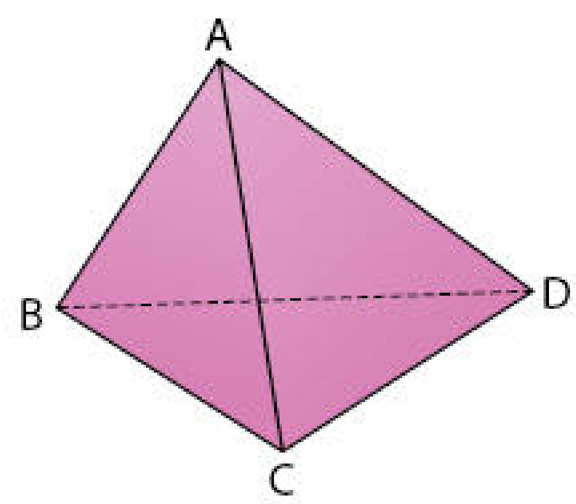
29 ABCDEFGH est le parallélépipède rectangle représenté ci-contre.
I et J sont les milieux respectifs des arêtes [BC] et [HG].
Recopier et compléter chaque égalité avec le point de la figure qui convient.



a) $\overrightarrow{F\bullet} = 2\overrightarrow{IC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{HG}$ $\qquad$ **b)** $\overrightarrow{A\bullet} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{EF}$

c) $\overrightarrow{G\bullet} = -\overrightarrow{AE} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ $\qquad$ **d)** $\overrightarrow{\bullet J} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{GA}$

Pour les exercices 30 à 32, ABCD est un tétraèdre.
Si besoin, réaliser une figure telle que celle ci-contre.



30 **a)** Recopier et compléter l'égalité :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \ldots + \overrightarrow{CD}$$

b) En déduire que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$.

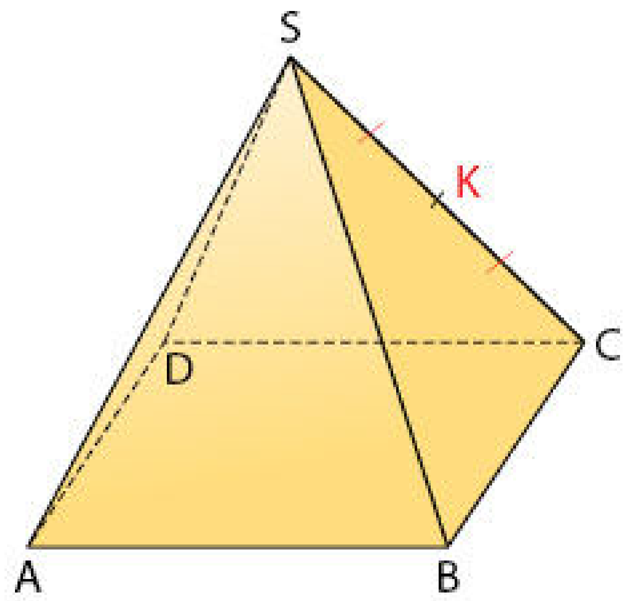
31 I, J, K et L sont les milieux respectifs des arêtes [AB], [CD], [AD] et [BC].
a) Justifier que $2\overrightarrow{IL} = \overrightarrow{AC}$ et $2\overrightarrow{KJ} = \overrightarrow{AC}$.
b) En déduire la nature du quadrilatère ILJK.

32 I est le milieu de l'arête [AB], J le milieu de l'arête [CD] et O le milieu du segment [IJ].
a) Démontrer que :

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OI} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OJ}.$$

b) En déduire que $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

33 SABCD est une pyramide de base le parallélogramme ABCD. K est le milieu de l'arête [SC].
Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AK}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{SC}$.



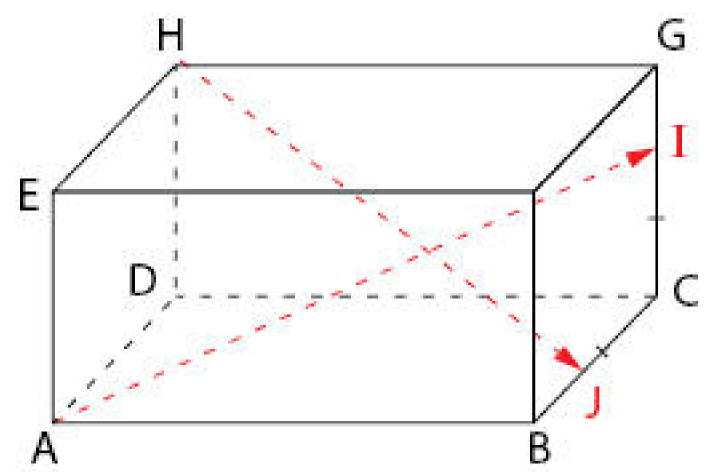
34 ABCD est un tétraèdre.
I est le milieu de l'arête [AD] et les points E et F sont définis par :

$$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{IF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AD}.$$

a) Réaliser une figure.

b) Exprimer chacun des vecteurs $\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{FC}$, $\overrightarrow{EF}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.

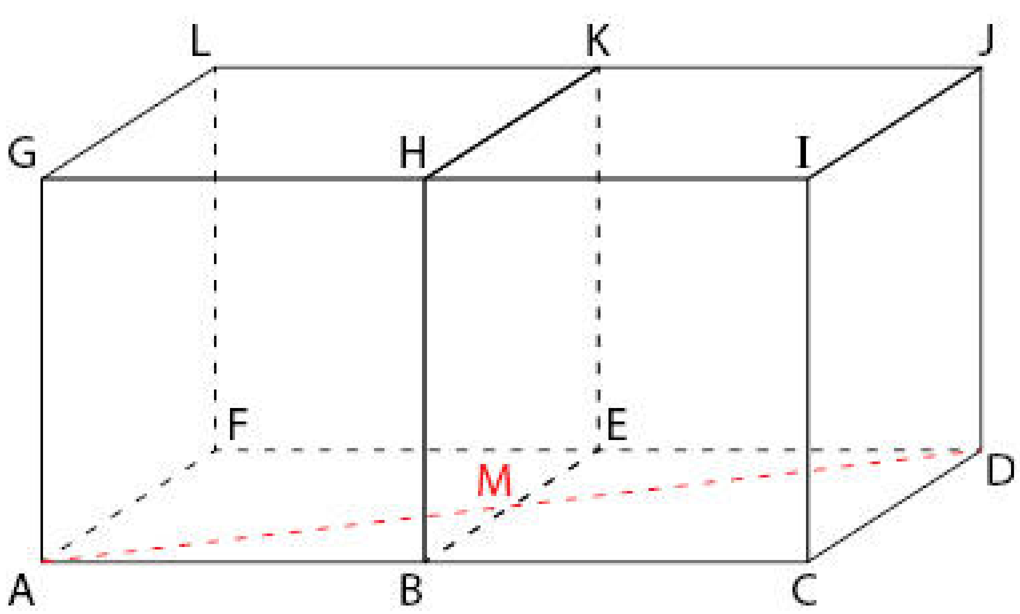
35 ABCDEFGH est le parallélépipède rectangle représenté ci-contre.
I et J sont les points définis par :



$$\overrightarrow{GI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EA} \text{ et } \overrightarrow{CJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{HE}.$$

Exprimer chacun des vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{HJ}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{DH}$.

36 La figure ci-dessous est constituée de deux cubes identiques accolés par une face.



M est le point d'intersection des segments [AD] et [BE].
Dans chaque cas, exprimer le vecteur comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AG}$.

a) $\overrightarrow{AM}$ **b)** $\overrightarrow{KM}$ **c)** $\overrightarrow{MF}$

d) $\overrightarrow{LM}$ **e)** $\overrightarrow{MJ}$ **f)** $\overrightarrow{IM}$

Conseil : commencer par préciser et justifier la position du point M sur [BE].

Droites de l'espace

Cours 2

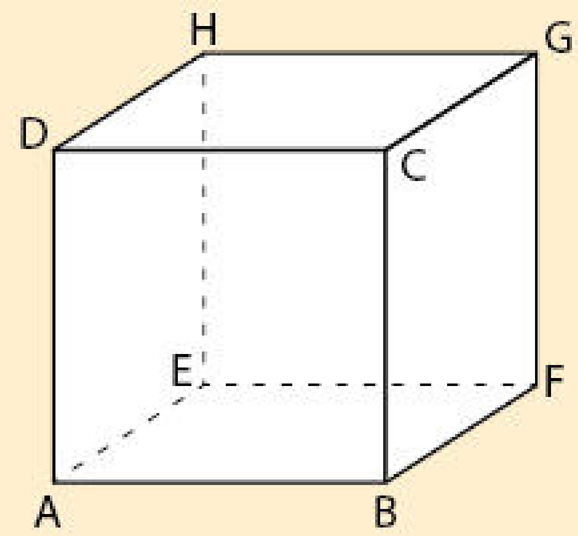
Questions flash À l'oral

37 À partir de chacune des égalités suivantes, donner oralement une relation de la forme $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}$.

a) $\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{AC}$ **b)** $2\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{AC} = \vec{0}$

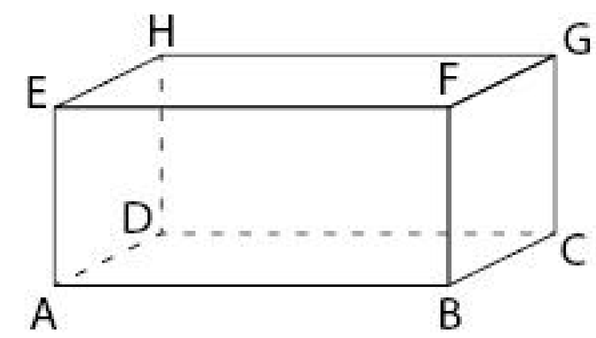
c) $\overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{AB}$ **d)** $2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$

38 ABCDEFGH est le cube représenté ci-contre.
Chacune des affirmations suivantes est-elle vraie ou fausse ?



(1) Les droites (DE) et (FC) sont parallèles.
(2) Les droites (AB) et (HC) sont sécantes.
(3) Les droites (AF) et (DG) sont coplanaires.
(4) Les droites (EH) et (BF) sont coplanaires.

39 ABCDEFGH est le parallélépipède rectangle représenté ci-contre.

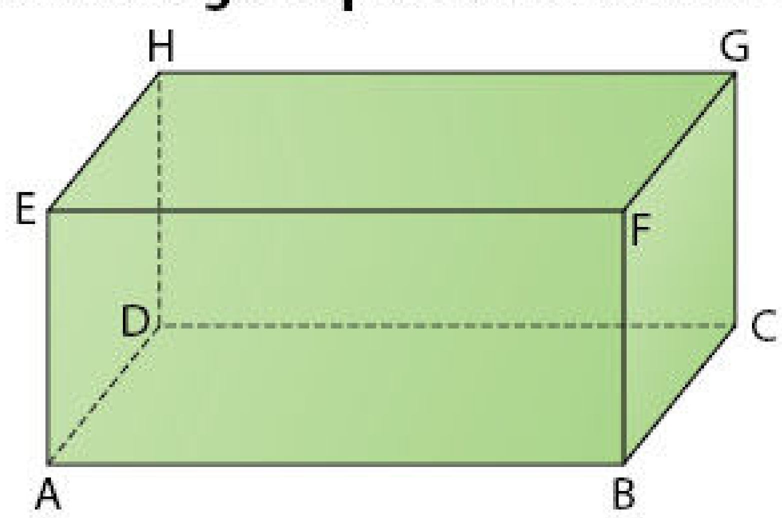


a) Réaliser cette figure et placer les points I et J définis par $\overrightarrow{DI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

b) Dans chaque cas, déterminer si le vecteur est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{IJ}$?

• $\overrightarrow{HC}$ • $\overrightarrow{AF}$ • $\overrightarrow{BG}$ • $\overrightarrow{BE}$

Pour les exercices 40 à 42, ABCDEFGH est le parallélépipède rectangle représenté ci-dessous.



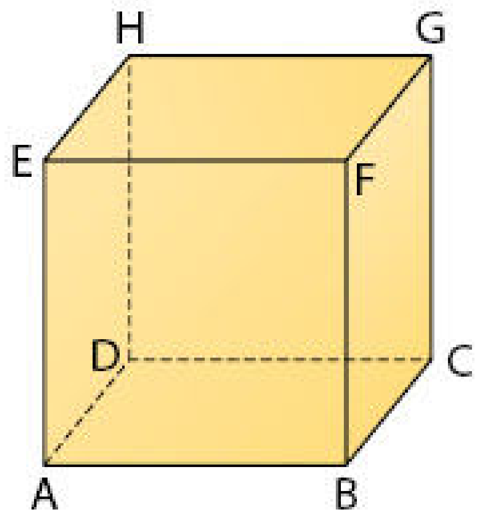
40 Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{FB}$ et $\overrightarrow{DG}$ sont colinéaires.

41 Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FG}$ et $\overrightarrow{HF} + \overrightarrow{DB}$ sont colinéaires.

42 P est le point tel que $\overrightarrow{BP} = 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{FG}$.
Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{HF}$ sont colinéaires.

43 ABCD est un tétraèdre.
I est le milieu de [BC], les points E, F et G sont définis par :
$$\overrightarrow{AE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AI},\ \overrightarrow{BF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\text{ et }\overrightarrow{CG}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}.$$
a) Réaliser une figure.
b) Démontrer que $\overrightarrow{FG}=2\overrightarrow{FE}$.
c) Le point E appartient-il à la droite (FG) ? Justifier la réponse.

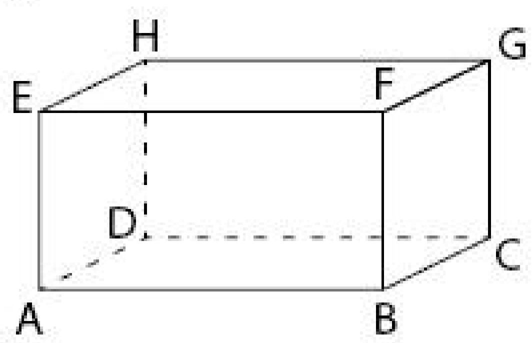
44 ABCDEFGH est le cube représenté ci-contre.
I, J et K sont les points définis par :



- $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$,
- $\overrightarrow{AJ}=\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$,
- $\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$.

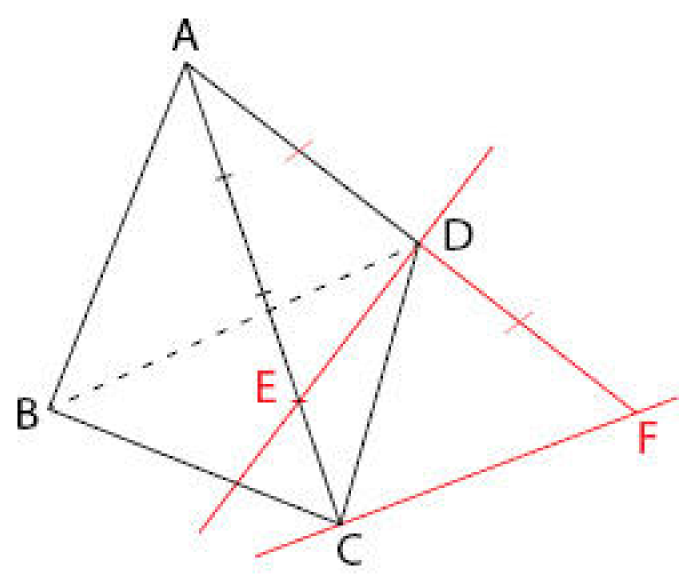
a) Réaliser la figure et construire les points I, J et K.
b) Démontrer que $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BE}$.
Que peut-on en déduire pour les droites (IJ) et (BE) ?
c) Les droites (JK) et (BC) sont-elles parallèles ? Justifier.

45 ABCDEFGH est le parallélépipède rectangle représenté ci-dessous.



Les points I et J sont définis par :
$$\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\text{ et }\overrightarrow{BJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BF}.$$
a) Réaliser une figure.
b) Décomposer chacun des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{AG}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.
c) Les droites (IJ) et (AG) sont-elles :
- parallèles ?
- coplanaires ?

46 ABCD est un tétraèdre.
Les points E et F sont définis par : $\overrightarrow{AE}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{AD}$.



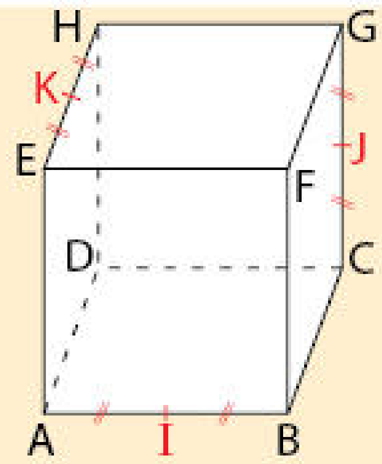
a) Justifier que les droites (DE) et (CF) sont coplanaires.
b) Démontrer que ces deux droites sont sécantes.

Plans de l'espace

Cours 3

Questions flash — À l'oral

Pour les exercices 47 à 51, ABCDEFGH est le cube représenté ci-dessous.
I, J et K sont les milieux respectifs des arêtes [AB], [GC] et [EH].



47 Citer oralement trois points du plan $(A\,;\overrightarrow{EF},\overrightarrow{EH})$.

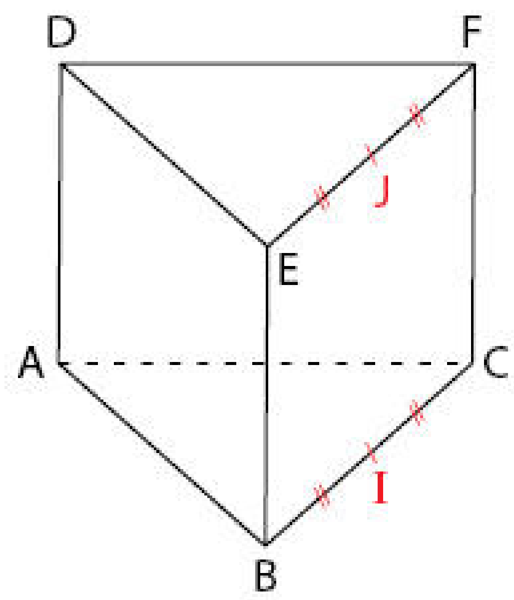
48 Donner les nombres réels a et b tels que :
$$\overrightarrow{AK}=a\overrightarrow{AD}+b\overrightarrow{AE}$$

49 Existe-t-il des nombres réels x et y tels que :
$$\overrightarrow{GJ}=x\overrightarrow{GK}+y\overrightarrow{GE}\ ?$$

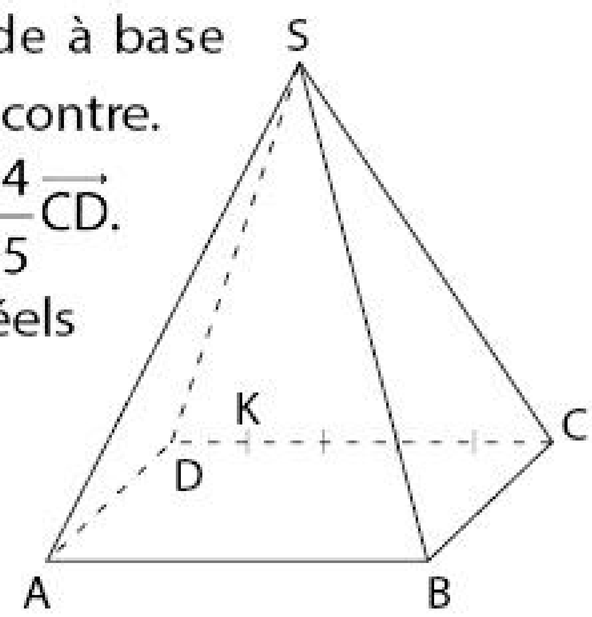
50 Les vecteurs $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DH}$ et $\overrightarrow{BJ}$ sont-ils coplanaires ?

51 Les plans $(J\,;\overrightarrow{ID},\overrightarrow{IC})$ et $(K\,;\overrightarrow{EF},\overrightarrow{EG})$ sont-ils parallèles ?

52 ABCDEF est le prisme droit représenté ci-contre.
I et J sont les milieux des arêtes [BC] et [EF].
M est le point tel que $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{JC}$.
Démontrer que le point M appartient au plan $(A\,;\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AI})$.

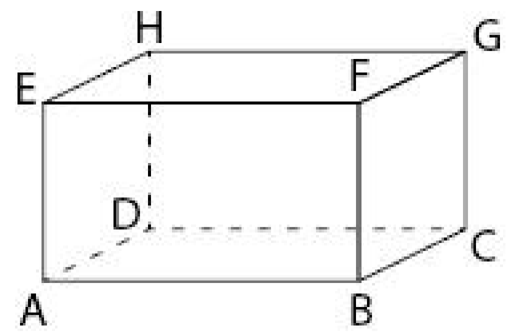


53 SABCD est la pyramide à base rectangulaire représentée ci-contre.
K est le point défini par $\overrightarrow{CK}=\frac{4}{5}\overrightarrow{CD}$.
a) Justifier qu'il existe deux réels x et y tels que :
$$\overrightarrow{AK}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{BC}.$$
b) Déterminer ces deux nombres réels.



54 ABCD est un tétraèdre et M est le point défini par :
$$\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}.$$
a) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{BM}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$.
b) À quel plan contenant une face du tétraèdre le point M appartient-il ?

55 ABCDEFGH est le parallélépipède rectangle représenté ci-contre.



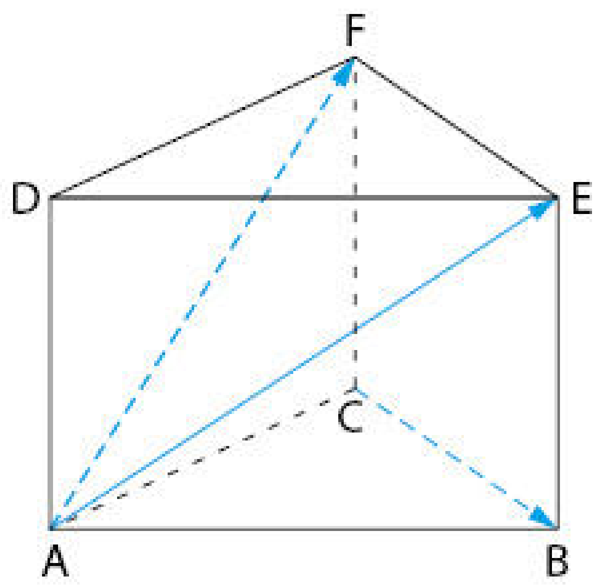
K est le point défini par :

$$\overrightarrow{BK} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AH} - \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}.$$

a) Écrire le vecteur $\overrightarrow{HK}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{HA}$ et $\overrightarrow{HG}$.

b) En déduire un plan qui contient le point K.

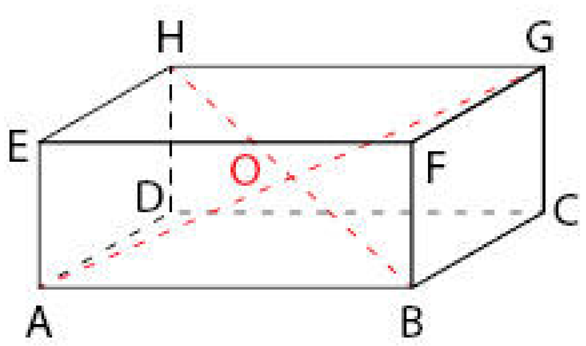
56 ABCDEF est le prisme droit ci-contre.



a) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{CB}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AF}$.

b) En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont coplanaires.

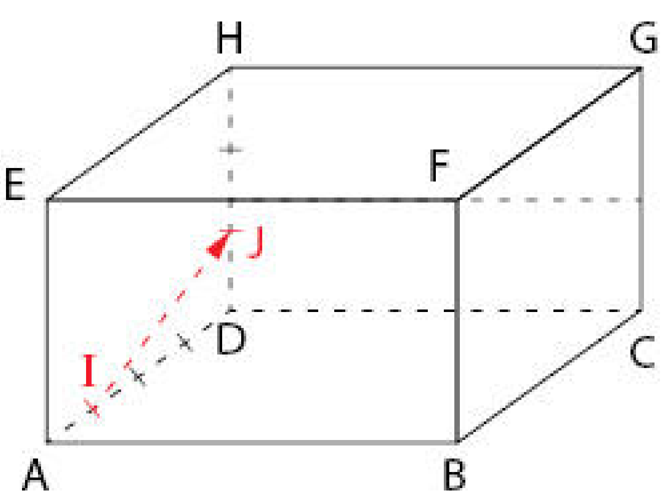
57 ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle de centre le point O.



a) Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{GE}$ et $\overrightarrow{DH}$ sont coplanaires.

b) Les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{GE}$ et $\overrightarrow{DA}$ sont-ils coplanaires ? Justifier la réponse.

58 ABCDEFGH est le parallélépipède rectangle représenté ci-contre.

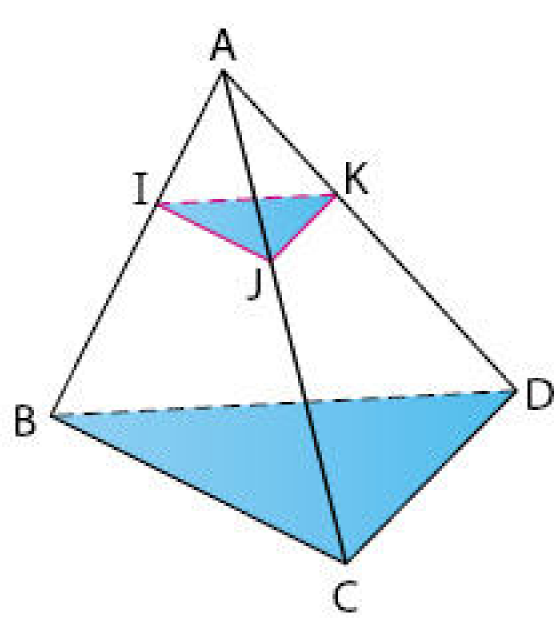


I et J sont les points définies par $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{DJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DH}$.

a) Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BF}$ sont coplanaires.

b) En déduire la position relative de la droite (IJ) et du plan (BCG).

59 ABCD est un tétraèdre.



I, J et K sont les points définies par :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB},\quad \overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC},$$

et $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.

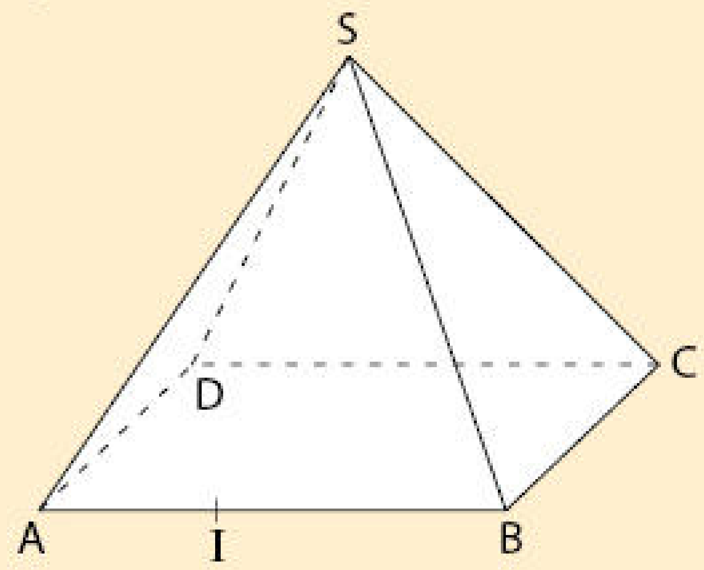
Démontrer que les plans (IJK) et (BCD) sont parallèles.

Bases et repères de l'espace

Cours 4

Questions flash À l'oral

60 SABCD est la pyramide à base carrée représentée ci-contre.



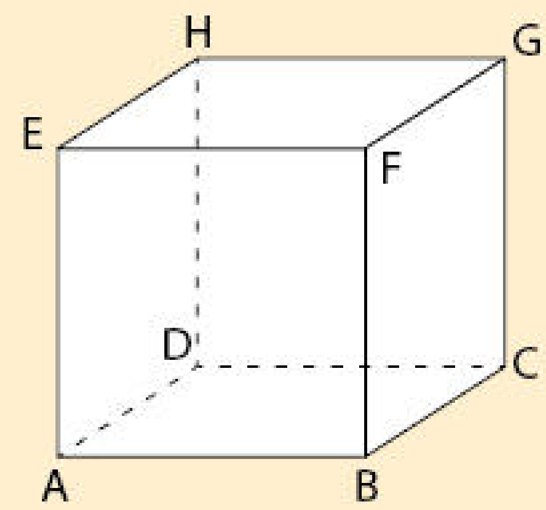
I est un point de [AB] distinct des points A et B.

Dire dans chaque cas si le triplet de vecteurs est une base de l'espace.

a) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AS})$ **b)** $(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SI})$

c) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ **d)** $(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SC}, \overrightarrow{SD})$

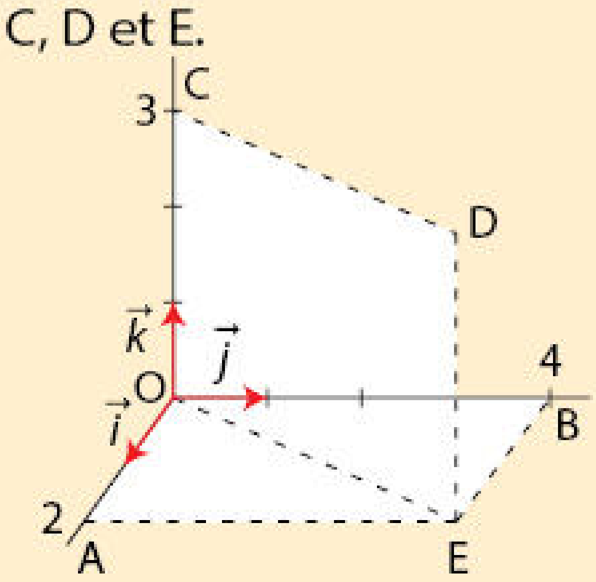
61 ABCDEFGH est le cube représenté ci-contre.



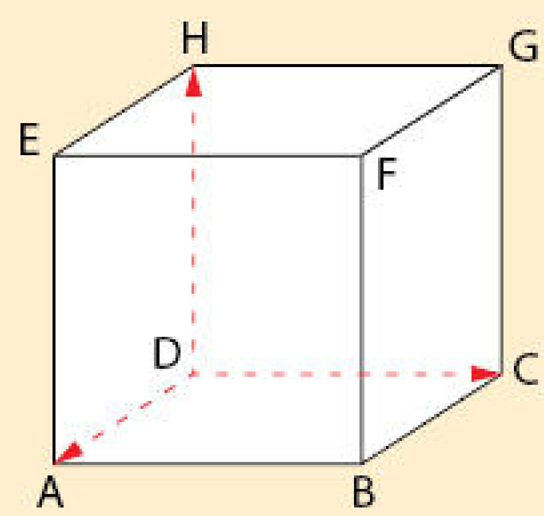
Dans chaque cas, donner la décomposition du vecteur dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

a) $\overrightarrow{AC}$ **b)** $\overrightarrow{AG}$ **c)** $\overrightarrow{GB}$ **d)** $\overrightarrow{DF}$

62 Dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ représenté ci-dessous, lire les coordonnées de chacun des points A, B, C, D et E.



63 ABCDEFGH est le cube représenté ci-contre.



Donner les coordonnées de chacun des sommets du cube dans le repère $(D;\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DH})$.

64 Dans un repère de l'espace, on donne les points $A(-3;5;7)$ et $B(2;-3;5)$.

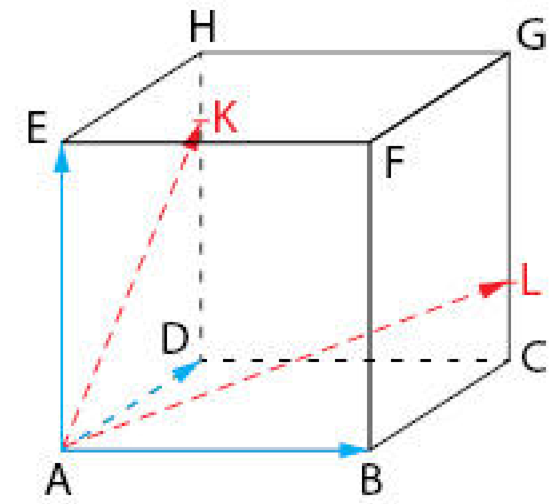
a) Donner les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

b) Donner les coordonnées du milieu I de [AB].

65 ABCDEFGH est le cube représenté ci-contre, K et L sont les points tels que :

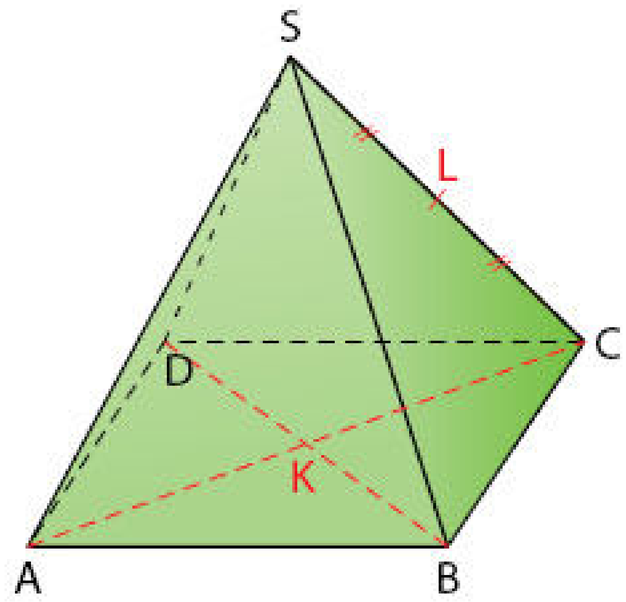
$\overrightarrow{DK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DH}$ et $\overrightarrow{GL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{GC}$.

Décomposer les vecteurs $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{AL}$ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.



66 SABCD est une pyramide de base un parallélogramme ABCD.
K est le centre de ABCD et L le milieu de [SC].

a) Justifier que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AS})$ est une base de l'espace.

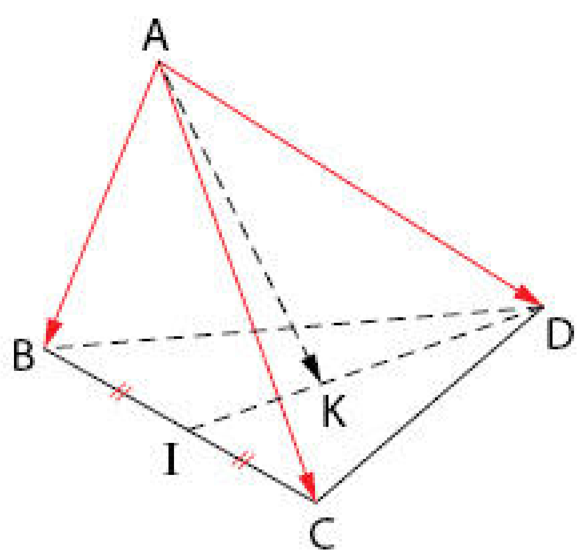


b) Décomposer chacun des vecteurs $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{AL}$ et $\overrightarrow{KL}$ dans cette base.

67 ABCD est un tétraèdre. I est le milieu de l'arête [BC] et K est le milieu du segment [ID].

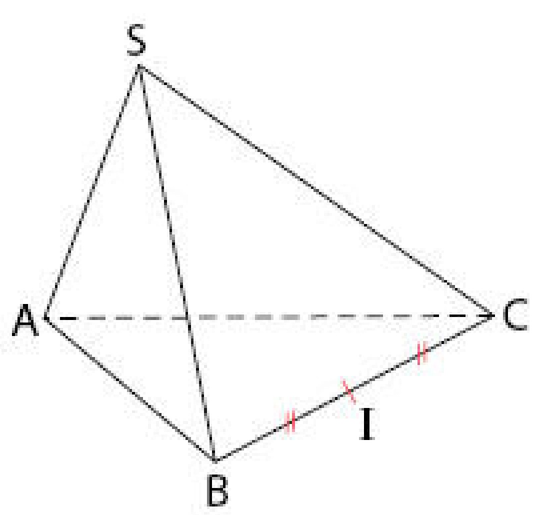
a) Démontrer que :

$\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.



b) Quelles sont les coordonnées du point K dans le repère $(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$?

68 SABC est un tétraèdre. I est le milieu de l'arête [BC].
On se place dans le repère $(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AS})$.
Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{IB}$, $\overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{IS}$.



Pour les exercices 69 à 71, un repère de l'espace est donné et on considère les points suivants :
A(1 ; 5 ; 2) ; B(− 2 ; 3 ; 4) ; C(− 2 ; -2 ; 0) et D(7 ; − 3 ; 1).

69 Calculer les coordonnées :

a) des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.

b) des milieux des segments [AB] et [CD].

70 Déterminer les coordonnées du point K tel que ABCK soit un parallélogramme.

71 Calculer les coordonnées de chacun des vecteurs :

a) $\vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{CD}$ **b)** $\vec{v} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AD} - 2\overrightarrow{BC}$

72 Dans un repère de l'espace, on donne les points : A(3 ; 2 ; − 1), B(− 3 ; 0 ; 5), C(1 ; 1 ; − 2) et D(− 11 ; − 3 ; 10).
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont-ils colinéaires ?

73 Dans un repère de l'espace, on donne les points :
A(2 ; − 1 ; 4), B(3 ; 2 ; − 5) et C(− 11 ; − 40 ; 121).
Ces points sont-ils alignés ?

74 Dans un repère de l'espace, on donne les points : A(− 4 ; − 3 ; 1), B(0 ; 3 ; − 5), C(2 ; 1 ; 1) et D(3 ; 5 ; − 5).
Les droites (AC) et (BD) sont-elles parallèles ?

75 $(O\,;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère de l'espace.
On donne les points :
A(− 2 ; 1 ; 0), B(1 ; 3 ; 5) et C(15 ; 20 ; 25).

a) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

b) Le point C appartient-il à la droite (AB) ?

76 Dans une base de l'espace, trouver des nombres réels x et y tels que les vecteurs $\vec{u}(1\,;x\,;5)$ et $\vec{v}(2\,;-3\,;y)$ soient colinéaires.

77 $(O\,;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère de l'espace.
On donne les points :
A(1 ; 0 ; 3), B(3 ; − 1 ; 2) et M(x ; y ; − 2)
avec x et y nombres réels.
Existe-t-il des valeurs de x et y telles que les points A, B et M soient alignés ?

78 Dans une base de l'espace, on donne les vecteurs
$\vec{u}(1\,;-2\,;0)$, $\vec{v}(3\,;1\,;3)$ et $\vec{w}(-1\,;-5\,;-3)$.

a) Calculer les coordonnées du vecteur $2\vec{u} - \vec{v} - \vec{w}$.

b) En déduire que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

79 Dans un repère de l'espace, on donne le point A(− 1 ; 2 ; 3), les vecteurs $\vec{u}(1\,;0\,;3)$ et $\vec{v}(0\,;1\,;3)$.
$\mathcal{P}$ est le plan $(A\,;\vec{u}, \vec{v})$.

a) Démontrer que le point B(1 ; − 1 ; 0) appartient au plan $\mathcal{P}$.

b) Le point C(− 2 ; 7 ; 10) appartient-il au plan $\mathcal{P}$?

80 Dans un repère de l'espace, on donne les points A(1 ; − 1 ; 2), B(0 ; 3 ; − 4) et les vecteurs $\vec{u}(1\,;0\,;1)$, $\vec{v}(0\,;3\,;5)$, $\vec{w}(1\,;3\,;6)$, $\vec{t}(2\,;-3\,;-3)$.
On note $\mathcal{P}$ le plan $(A\,;\vec{u}, \vec{v})$, $\mathcal{Q}$ le plan $(B\,;\vec{w}, \vec{t})$ et d une droite de vecteur directeur $\vec{w}$.

a) Démontrer que la droite d est parallèle au plan $\mathcal{P}$.

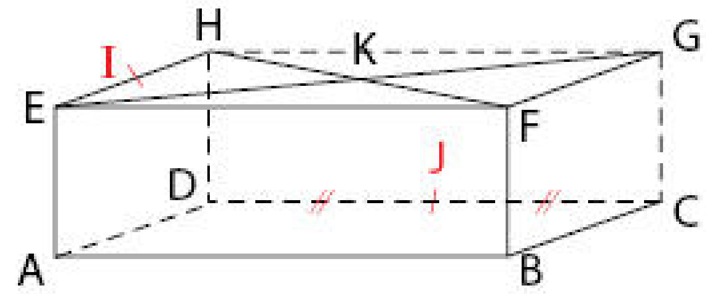
b) Déterminer la position relative des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$.

EXO Exercices interactifs

Pour se tester

81 QCM **Dans chaque cas, donner la réponse exacte sans justifier.**

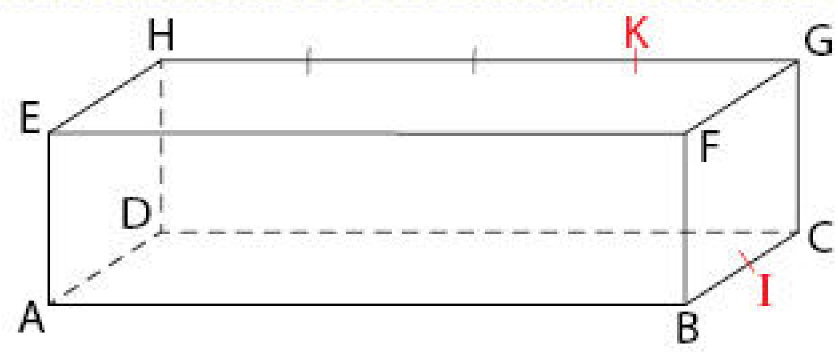
ABCDEFGH est le parallélépipède rectangle représenté ci-contre.
I est le milieu de [EH], J celui de [DC] et K est le centre de la face EFGH.



		A	B	C	D
1	La somme $\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AE}$ est égale au vecteur …	$\overrightarrow{BE}$	$\overrightarrow{AD}$	$\overrightarrow{BH}$	$\overrightarrow{FD}$
2	Le vecteur $-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DH}+\frac{1}{2}\overrightarrow{GF}$ est égal à …	$\frac{1}{2}\overrightarrow{AF}$	$\overrightarrow{JI}$	$\overrightarrow{DK}$	$\overrightarrow{AI}$
3	Le vecteur $\overrightarrow{AJ}$ est coplanaire avec les vecteurs …	$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BF}$	$\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AH}$	$\overrightarrow{JH}$ et $\overrightarrow{JC}$	$\overrightarrow{FG}$ et $\overrightarrow{FI}$
4	La décomposition du vecteur $\overrightarrow{IK}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{GI}$ et $\overrightarrow{GF}$ s'écrit …	$-\frac{1}{2}\overrightarrow{GI}+\frac{1}{4}\overrightarrow{GF}$	$\frac{1}{2}\overrightarrow{GI}+\frac{1}{2}\overrightarrow{GF}$	$\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{GF}$	$\frac{1}{2}\overrightarrow{GI}-\frac{1}{2}\overrightarrow{GF}$
5	$(\overrightarrow{IK},\overrightarrow{FG})$ définit la direction du plan …	(BFG)	(IKJ)	(ABC)	(CGK)

82 QCM **Dans chaque cas, donner la (ou les) réponse(s) exacte(s) sans justifier.**

ABCDEFGH est le parallélépipède rectangle représenté ci-contre.
I est le milieu de [BC] et K est le point tel que $\overrightarrow{HK}=\frac{3}{4}\overrightarrow{HG}$.



		A	B	C	D
1	Un repère de l'espace est …	$(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$	$(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$	$(C\,;\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CG},\overrightarrow{CB})$	$(D\,;\overrightarrow{DH},\overrightarrow{DG},\overrightarrow{DC})$
2	On se place dans $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$. Le vecteur $\overrightarrow{IK}$ …	a pour coordonnées $\begin{pmatrix}-\frac{1}{4};\frac{1}{2};1\end{pmatrix}$	a pour coordonnées $\begin{pmatrix}\frac{1}{4};-\frac{1}{2};-1\end{pmatrix}$	n'est pas coplanaire avec les vecteurs $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CH}$	est coplanaire avec les vecteurs $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CH}$
3	La droite (KI) est …	parallèle au plan (ADE)	coplanaire avec la droite (FG)	sécante avec le plan (ADC)	non coplanaire avec la droite (AD)

83 Vrai/Faux **Dans chaque cas, dire si l'affirmation est vraie ou fausse en justifiant.**

Voici des points dans un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$:

$$A(-2\,;3\,;1)\,;B(0\,;-1\,;-2)\,;C(4\,;-2\,;3)\text{ et }D(1\,;-3\,;6).$$

1 **Affirmation 1** : les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

2 **Affirmation 2** : les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.

3 **Affirmation 3** : le point $E(-3\,;-2\,;1)$ est un point du plan qui passe par D et dont la direction est définie par le couple de vecteurs $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$.

Vérifiez vos réponses : p. 529

84 Suivre un guide pour rédiger une démonstration

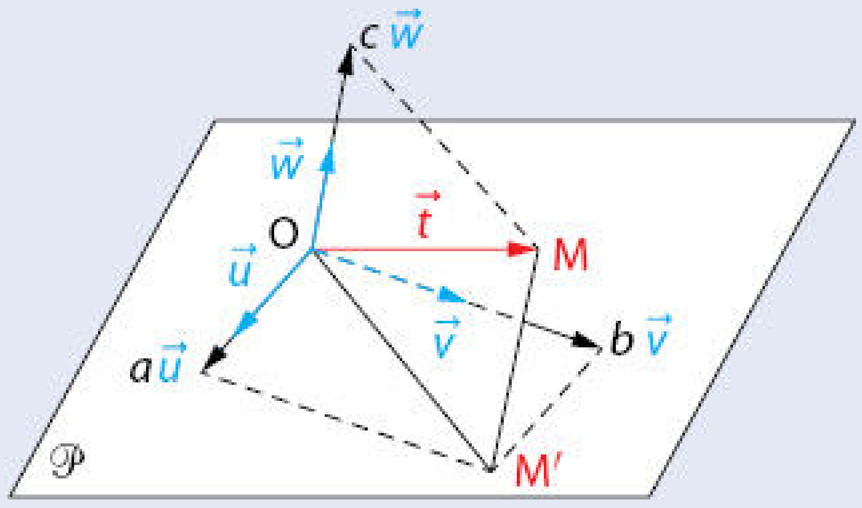
Voici une propriété énoncée en cours au paragraphe 4 A.

$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de l'espace.
Pour tout vecteur $\vec{t}$, il existe un unique triplet $(a\,;b\,;c)$ de nombres réels tels que $\vec{t} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$.

Recopier et compléter la démonstration.

1. Existence

O est un point de l'espace, $\mathcal{P}$ est le plan $(\mathrm{O}\,;\vec{u}, \vec{v})$ et on pose $\vec{t} = \overrightarrow{\mathrm{OM}}$.
La droite d passant par M de vecteur directeur $\vec{w}$ et le plan $\mathcal{P}$ ne sont pas parallèles car …
On note M′ leur point d'intersection.
M′ appartient à … donc il existe des réels a et b tels que $\overrightarrow{\mathrm{OM'}} = a\vec{u} + b\vec{v}$.
D'autre part, $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \overrightarrow{\mathrm{OM'}} + \ldots$, $\overrightarrow{\mathrm{M'M}}$ et $\vec{w}$ sont … donc il existe un réel c tel que $\overrightarrow{\mathrm{M'M}} = c\vec{w}$.
Finalement, $\vec{t} = \ldots$



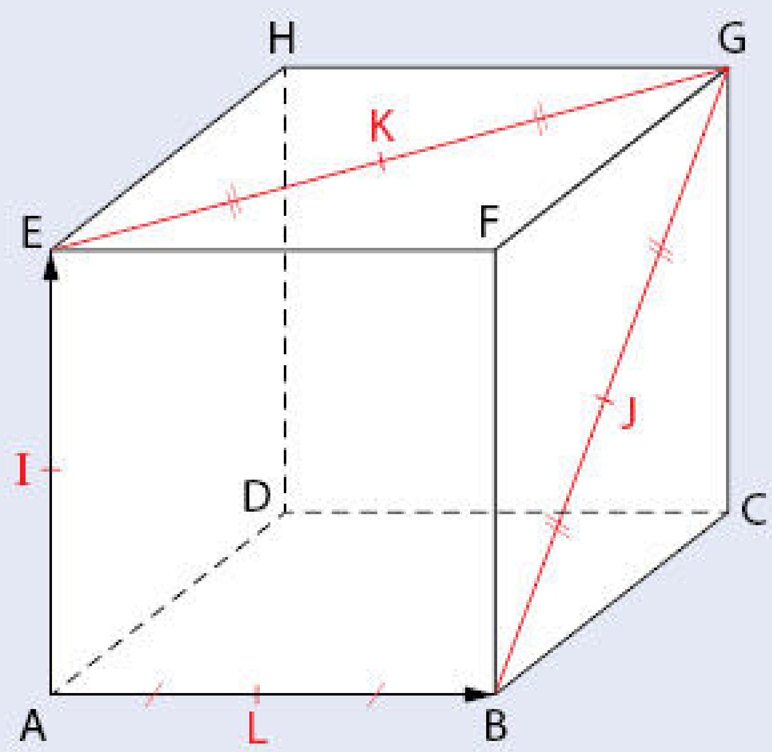
2. Unicité

On suppose qu'il existe deux triplets $(a\,;b\,;c)$ et $(a'\,;b'\,;c')$ de nombres réels tels que $\vec{t} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = a'\vec{u} + b'\vec{v} + c'\vec{w}$.
Si $c \neq c'$, alors $\vec{w} = \ldots\vec{u} + \ldots\vec{v}$, or ceci n'est pas possible car …, donc $c = c'$.
On obtient alors $a\vec{u} + b\vec{v} = a'\vec{u} + b'\vec{v}$, donc $a = a'$ et $b = b'$ car ….

Conseil
On démontre d'abord l'existence du triplet $(a\,;b\,;c)$, puis ensuite son unicité.

85 Démontrer la coplanarité de vecteurs

ABCDEFGH est le cube représenté ci-contre.
I, J, K, L sont les milieux respectifs des segments [AE], [BG], [EG] et [AB].
Voici la démonstration du fait que les points I, J, K et L sont coplanaires.



On décompose les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{IK}}$, $\overrightarrow{\mathrm{IL}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}$ dans la base $(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}, \overrightarrow{\mathrm{AE}})$.

(1) $\overrightarrow{\mathrm{IK}} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{AE}})$ et $\overrightarrow{\mathrm{IL}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AE}}$

$\overrightarrow{\mathrm{IJ}} = \overrightarrow{\mathrm{IA}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BJ}} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AE}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{AE}}) = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$

(2) On remarque que $\overrightarrow{\mathrm{IJ}} = \overrightarrow{\mathrm{IK}} + \overrightarrow{\mathrm{IL}}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}$, $\overrightarrow{\mathrm{IK}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{IL}}$ sont coplanaires.

(3) Donc les points I, J, K et L sont coplanaires.

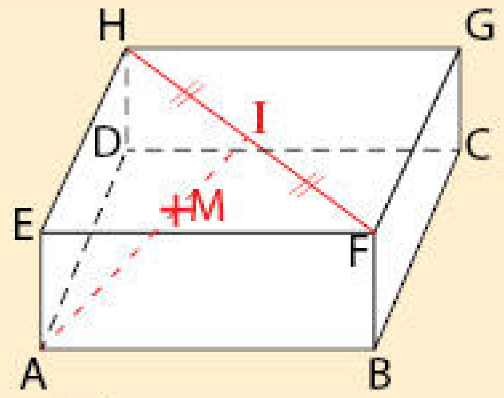
Lire la démonstration et expliquer les passages écrits en vert.

Conseil
Pour démontrer que $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}$, $\overrightarrow{\mathrm{IK}}$, $\overrightarrow{\mathrm{IL}}$ sont coplanaires, on exprime $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}$ comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{\mathrm{IK}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{IL}}$.

Utiliser des droites et plans de l'espace

86 **PARCOURS DIFFÉRENCIÉS**

Parcours 1



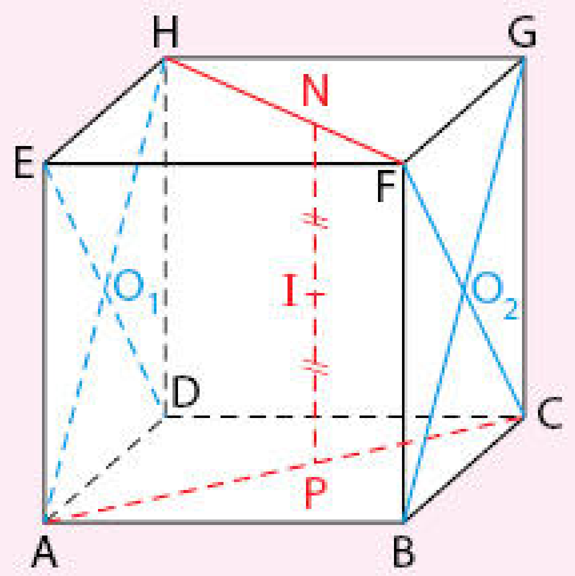
ABCDEFGH est le parallélépipède rectangle représenté ci-contre.

I est le milieu de [HF] et M est le point défini par $3\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AI}$.

Démontrer que les points E, C, M sont alignés.

Parcours 2

ABCDEFGH est un cube. On note O_1 et O_2 les centres respectifs des faces ADHE et BCGF.



N est le point du segment [HF] et P le point du segment [AC] définis par $\overrightarrow{HN} = k\overrightarrow{HF}$ et $\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{AC}$ où k est un nombre réel de l'intervalle [0 ; 1].

I est le milieu du segment [NP].

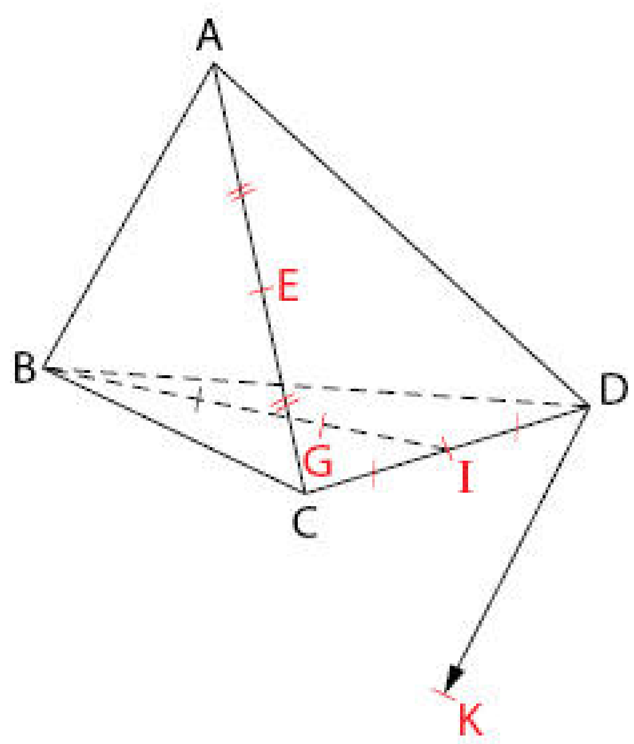
a) Démontrer que :

- $\overrightarrow{O_1I} = \dfrac{k}{2}(\overrightarrow{HF} + \overrightarrow{AC})$.
- $\overrightarrow{O_2I} = \dfrac{k-1}{2}(\overrightarrow{HF} + \overrightarrow{AC})$.

b) En déduire que les points I, O_1, O_2 sont alignés.

87 ABCD est un tétraèdre. E est le milieu de [AC] et I celui de [CD]. K est le point tel que $\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{AB}$ et G est le point tel que $\overrightarrow{BG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{BI}$.

Démontrer que les points E, G et K sont alignés.



88 ABCD est un tétraèdre.

M, N, P et Q sont les points définis par :

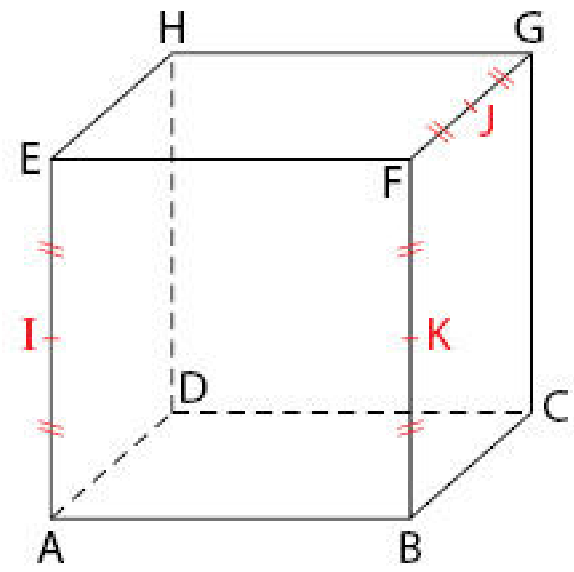
$\overrightarrow{AM} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CP} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AQ} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

a) Réaliser une figure et placer les points M, N, P et Q.

b) Décomposer les vecteurs $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{MP}$, $\overrightarrow{MQ}$ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$.

c) Démontrer que les points M, N, P et Q sont coplanaires.

89 ABCDEFGH est le cube représenté ci-contre.



I, J et K sont les milieux respectifs des arêtes [AE], [FG] et [BF].

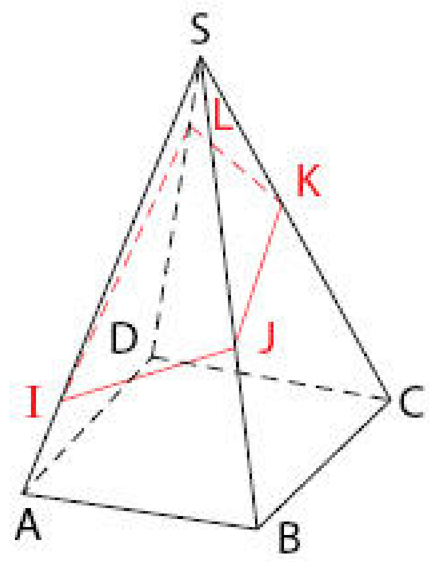
a) Démontrer que $\overrightarrow{IJ}$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{AD}$.

b) En déduire la position relative de la droite (IJ) par rapport au plan (AKD).

90 SABCD est une pyramide à base carrée. Les points I, J, K et L sont définis par : $\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{5}\overrightarrow{AS}$,

$\overrightarrow{BJ} = \dfrac{2}{5}\overrightarrow{BS}$, $\overrightarrow{CK} = \dfrac{3}{5}\overrightarrow{CS}$

et $\overrightarrow{DL} = \dfrac{4}{5}\overrightarrow{DS}$.

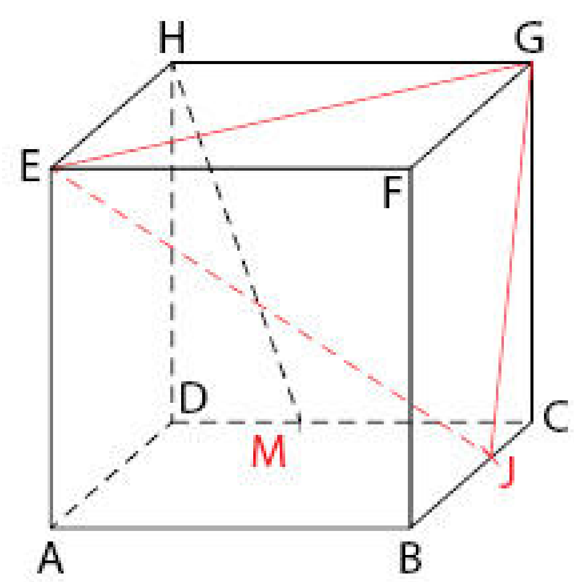


a) Justifier que $(\overrightarrow{AS}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ est une base de l'espace.

b) Décomposer chacun des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{IL}$ dans cette base.

c) Les points I, J, K et L sont-ils coplanaires ? Justifier.

91 ABCDEFGH est le cube représenté ci-contre.



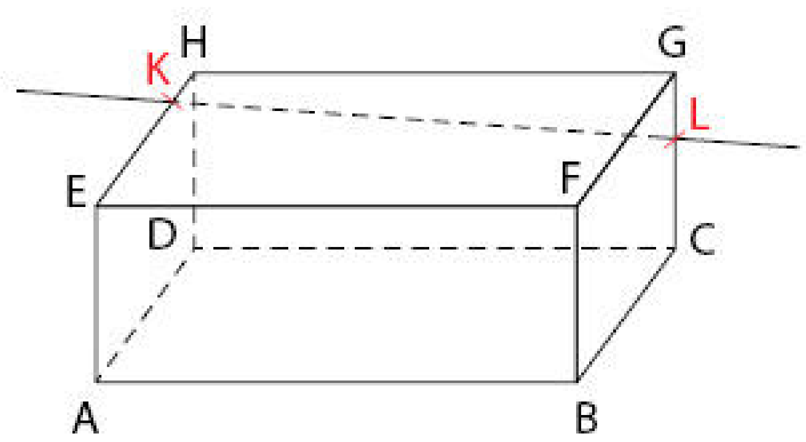
M et J sont les points définis par :

$\overrightarrow{DM} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{BJ} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

a) Décomposer le vecteur $\overrightarrow{HM}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{GE}$ et $\overrightarrow{GJ}$.

b) En déduire la position relative de la droite (HM) et du plan (EGJ).

92 ABCDEFGH est le parallélépipède rectangle représenté ci-contre.



K et L sont les points définis par :

$\overrightarrow{HK} = \lambda\overrightarrow{HE}$ et $\overrightarrow{GL} = \lambda\overrightarrow{GC}$ où λ est un nombre réel.

a) Décomposer le vecteur $\overrightarrow{KL}$ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

b) Les vecteurs $\overrightarrow{FE}$, $\overrightarrow{FC}$ et $\overrightarrow{KL}$ sont-ils coplanaires ?

c) Déterminer la position relative de la droite (KL) et du plan (CEF).

Travailler avec des coordonnées

L'espace est muni d'un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

93 **PARCOURS DIFFÉRENCIÉS**

Parcours 1

On donne les points :
$A(1\,;-2\,;-1)$, $B(2\,;-1\,;-2)$ et $C(1\,;3\,;-2)$.
On note d la droite qui passe par le point $D(2\,;1\,;0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(-1;2;1)$.
Justifier que les points A, B et C définissent un plan et démontrer que la droite d et ce plan sont sécants.

Parcours 2

On donne les points $A(2\,;1\,;0)$, $B(0\,;1\,;1)$ et $C(0\,;3\,;2)$.
a) Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
b) Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\vec{k}$ ne sont pas coplanaires.
c) En déduire que la droite d passant par le point $D(-1\,;1\,;2)$, de vecteur directeur $\vec{k}$ et le plan (ABC) sont sécants.

94 On donne les points $A(-3\,;4\,;5)$, $B(1\,;-2\,;3)$ et $M(-1\,;a\,;b)$ où a et b sont des nombres réels.
Déterminer les valeurs de a et b telles que le point M appartienne à la droite (AB).

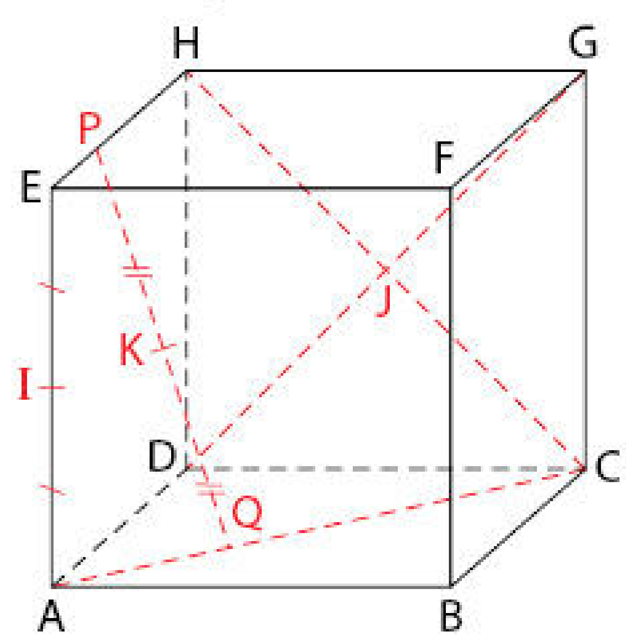
Vidéo

JaiCompris.com — Cet exercice est corrigé en vidéo

95 ABCDEFGH est le cube représenté ci-dessous.
I est le milieu de l'arête [AE], J le centre de la face CDHG, P et Q sont les points définis par :

$$\overrightarrow{EP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{EH} \text{ et } \overrightarrow{AQ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

et K est le milieu du segment [PQ].
On se place dans le repère $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.

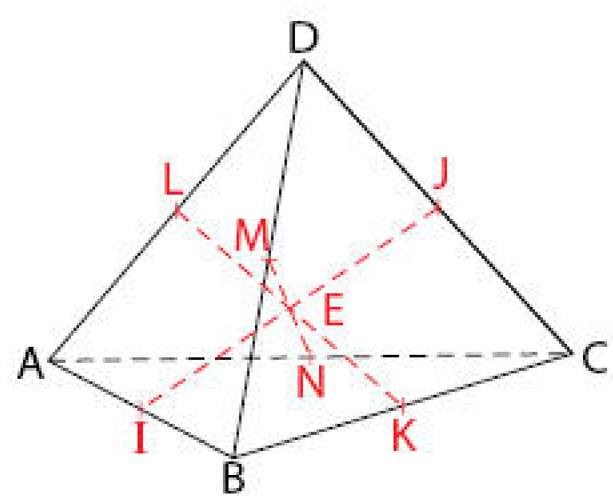


1. Calculer les coordonnées des points I et J.
2. a) Calculer les coordonnées des points P et Q, puis celles du point K.
b) Démontrer que les points I, K et J sont alignés.

96 d est la droite qui passe par le point $A(-1\,;2\,;2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1;0;3)$.
d' est la droite qui passe par le point $B(-4\,;5\,;7)$ et de vecteur directeur $\vec{v}(-2;6;22)$.
M est le point de coordonnées $(-3\,;2\,;-4)$.
a) Démontrer que le point M appartient à la droite d.
b) Le point M appartient-il à la droite d' ?
c) En déduire la position relative des droites d et d'.

97 On donne le point $A(2\,;-1\,;-3)$ et les vecteurs $\vec{u}(2;1;0)$ et $\vec{v}(-1;4;5)$.
$\mathscr{P}$ désigne le plan $(A\,;\vec{u},\vec{v})$.
1. a) Le point $B(-2\,;6\,;7)$ appartient-il au plan $\mathscr{P}$?
b) M est le point tel que B soit le milieu de [AM].
Justifier que M appartient au plan $\mathscr{P}$.
2. On donne le point $C(12\,;-8\,;-11)$.
a) Ce point appartient-il au plan $\mathscr{P}$?
b) Déterminer la position relative de la droite (MC) et du plan $\mathscr{P}$.

98 ABCD est un tétraèdre.
I, J, K, L, M et N sont les milieux respectifs des arêtes [AB], [CD], [BC], [DA], [BD] et [AC].



1. Démontrer que les segments [IJ], [KL] et [MN] ont le même milieu E.
2. En déduire que $\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{ED}=\vec{0}$.
3. Quelles sont les coordonnées du point E dans le repère $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$?
4. a) Décomposer chacun des vecteurs $\overrightarrow{EI}$, $\overrightarrow{EK}$, $\overrightarrow{EM}$ dans la base $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$.
b) Vérifier que $(E\,;\overrightarrow{EI},\overrightarrow{EK},\overrightarrow{EM})$ est un repère de l'espace.
5. Quelles sont, dans ce repère, les coordonnées de chacun des sommets A, B, C et D du tétraèdre ?

99 On donne le point $A(1\,;-1\,;3)$ et les vecteurs $\vec{u}(1;1;0)$ et $\vec{v}(2;-1;3)$.
$\mathscr{P}$ désigne le plan $(A\,;\vec{u}\,;\vec{v})$.
Déterminer l'intersection du plan $\mathscr{P}$ et du plan :
a) $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ **b)** $(O\,;\vec{i}\,;\vec{k})$ **c)** $(O\,;\vec{j}\,;\vec{k})$

100 On donne les points $A(3\,;0\,;5)$, $B\left(0\,;-\dfrac{3}{2}\,;\dfrac{1}{2}\right)$ et $C(1\,;0\,;2)$.

1. a) Démontrer que les points A, B et C définissent un plan.

b) Donner un couple de vecteurs directeurs de ce plan.

2. On donne les points $E\left(2\,;0\,;\dfrac{1}{2}\right)$ et $F\left(1\,;-\dfrac{3}{2}\,;-1\right)$.

Démontrer que la droite (EF) est parallèle au plan (ABC).

101 On considère les points $A(0\,;0\,;1)$, $B(-3\,;0\,;0)$, $C(-1\,;-2\,;0)$, $D(6\,;0\,;-1)$ et $E(0\,;3\,;1)$.

1. a) Démontrer que les points A, B et C déterminent un plan, on le note $\mathcal{P}_1$.

b) Démontrer que les points O, D et E déterminent aussi un plan, on le note $\mathcal{P}_2$.

2. a) Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{OD}$ ne sont pas coplanaires.

b) Que peut-on en déduire pour les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$?

102 $\mathcal{P}_1$ est le plan qui passe par le point $A(1\,;0\,;-1)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}(2\,;1\,;-1)$ et $\vec{v}(0\,;2\,;1)$.
$\mathcal{P}_2$ est le plan qui passe par le point $B(-2\,;3\,;5)$ et de vecteurs directeurs $\vec{t}(-2\,;5\,;4)$ et $\vec{w}(4\,;0\,;-3)$.

1. a) Démontrer que chacun des vecteurs $\vec{t}$ et $\vec{w}$ peut s'exprimer en fonction des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

b) Que peut-on en déduire pour les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$?

2. a) Le point B appartient-il au plan $\mathcal{P}_1$?

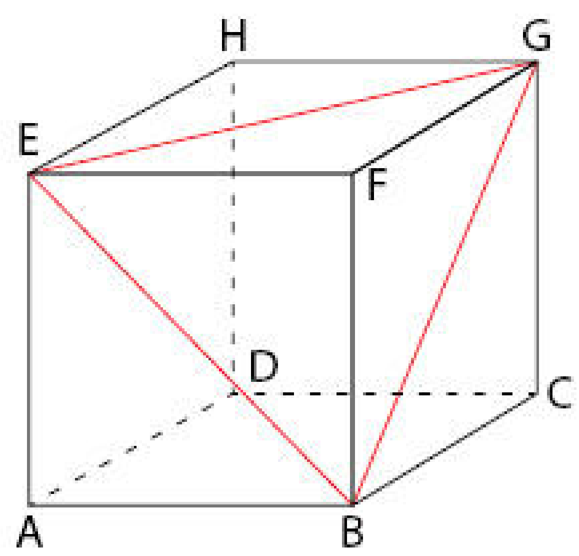
b) Déterminer la position relative des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

103 $\mathcal{P}$ est le plan qui passe par le point $M(2\,;1\,;-1)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}(1\,;-1\,;0)$ et $\vec{v}(2\,;0\,;1)$.
d est la droite qui passe par le point $N(-2\,;3\,;5)$ et de vecteur directeur $\vec{w}(-1\,;2\,;-3)$.

a) Démontrer que la droite d et le plan $\mathcal{P}$ sont sécants.

b) Justifier que leur point d'intersection est le point $K(-4\,;7\,;-1)$.

104 ABCDEFGH est le cube représenté ci-dessous.
L'espace est muni du repère $(D\,;\overrightarrow{DA}\,;\overrightarrow{DC}\,;\overrightarrow{DH})$.



1. Donner les coordonnées :

a) d'un vecteur directeur de la droite (DF) ;

b) de deux vecteurs directeurs du plan (EBG).

2. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite (DF) et du plan (EBG).

105 $\mathcal{P}$ est le plan qui passe par le point $A(-2\,;3\,;0)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}(2\,;0\,;-2)$ et $\vec{v}(1\,;-3\,;0)$.
d est la droite qui passe par le point $B(5\,;0\,;-2)$ et de vecteur directeur $\vec{w}(-2\,;-1\,;1)$.

1. a) Démontrer que la droite d et le plan $\mathcal{P}$ sont sécants.

b) Justifier que déterminer les coordonnées du point d'intersection K de la droite d et du plan $\mathcal{P}$ revient à résoudre le système :

$$\begin{cases} 2a + b + 2c = 7 \\ -3b + c = -3 \\ -2a - c = -2 \end{cases}.$$

2. À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on a obtenu le résultat suivant :

1	Résoudre({2 a + b + 2 c = 7, −3 b + c = −3, −2 a − c = −2})
	$\rightarrow \left\{\left\{a = -\frac{1}{2}, b = 2, c = 3\right\}\right\}$

Donner alors les coordonnées du point K.

S'entraîner à la logique

→ p. 525

106 Implications

A et B sont deux points de l'espace.
$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs de l'espace tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, $\vec{u}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires.
Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse.
Justifier chaque réponse.

a) Si $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires, alors les plans $\mathcal{P}(A\,;\vec{u},\vec{v})$ et $\mathcal{Q}(A\,;\vec{u},\vec{w})$ sont confondus.

b) Si $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires, alors les plans $\mathcal{P}(A\,;\vec{u},\vec{v})$ et $\mathcal{R}(B\,;\vec{u},\vec{w})$ sont parallèles.

c) Si $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires, alors les plans $\mathcal{P}(A\,;\vec{u},\vec{v})$ et $\mathcal{R}(B\,;\vec{u},\vec{w})$ sont sécants.

d) Si $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires, alors la droite $d(B\,;\vec{w})$ et le plan $\mathcal{P}(A\,;\vec{u},\vec{v})$ sont parallèles.

107 Réciproque d'une implication

Voici une implication :
P : « Si $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont des vecteurs deux à deux non colinéaires, alors ces vecteurs sont non coplanaires »

a) P est-elle vraie ?

b) Énoncer la réciproque de P.
Est-elle vraie ?

108 ÉTUDE D'UNE CONFIGURATION

Tice

Objectif
Étudier des propriétés du centre de gravité d'un tétraèdre.

ABCD est un tétraèdre. Le point G, appelé centre de gravité du tétraèdre est défini par :

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}.$$

Partie A : conjecturer avec un logiciel de géométrie dans l'espace

1. Créer le tétraèdre ABCD (utiliser Tétraèdre)

2. a) Établir que $\overrightarrow{AG}=\vec{u}$ où $\vec{u}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})$.

b) Créer le vecteur $\vec{u}$ en saisissant : $u=\frac{1}{4}$(Vecteur(A, B) + Vecteur(A, C) + Vecteur(A, D)), puis créer le point G image du point A par la translation de vecteur $\vec{u}$ (utiliser Représentant).

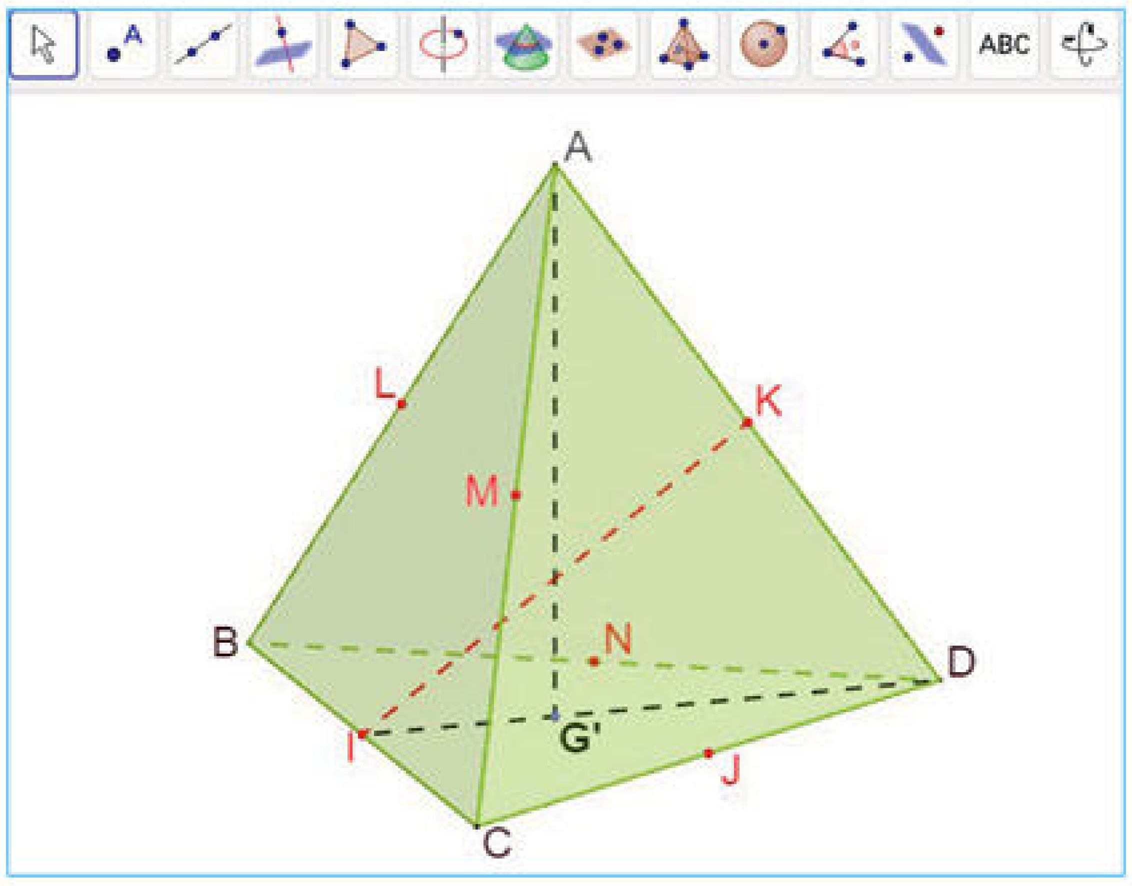
3. a) Créer les milieux I, J, K, L, M et N des arêtes respectives [BC], [CD], [AD], [AB], [AC] et [BD].

b) Créer le centre de gravité du triangle BCD, c'est-à-dire le point G′ défini par $\overrightarrow{DG'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DI}$.

c) Construire de même les centres de gravité G″, G_1 et G_2 des triangles respectifs ACD, ABD et ABC.

4. a) Conjecturer que le point G est le point de concours des droites (AG′), (BG″), (CG_1) et (DG_2).

b) Conjecturer que les droites (IK), (JL) et (MN) sont concourantes en G.



Partie B : démontrer

1. a) Démontrer que $\overrightarrow{AG}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AG'}$. En déduire que le point G appartient à la droite (AG′).

b) Démontrer que le point G appartient également aux droites (BG″), (CG_1) et (DG_2).

c) Énoncer le résultat obtenu.

2. a) À partir de l'égalité $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$, démontrer que $\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{GK}=\vec{0}$.
En déduire la position du point G sur le segment [IK].

b) Démontrer de même que le point G est le milieu des segments [LJ] et [MN].

c) Énoncer la propriété obtenue.

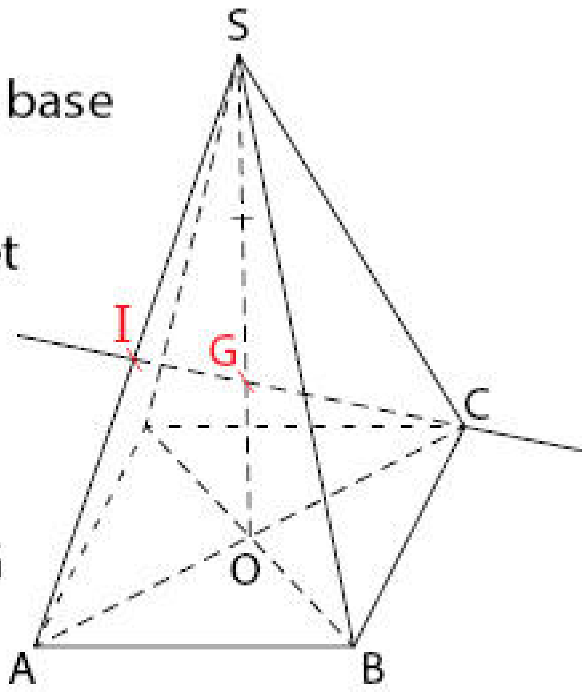
109 Prendre des initiatives

Représenter **Raisonner**

SABCD est une pyramide de base le carré ABCD de centre O.
I est le milieu de l'arête [SA] et G est le point défini par :

$$\overrightarrow{SG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{SO}.$$

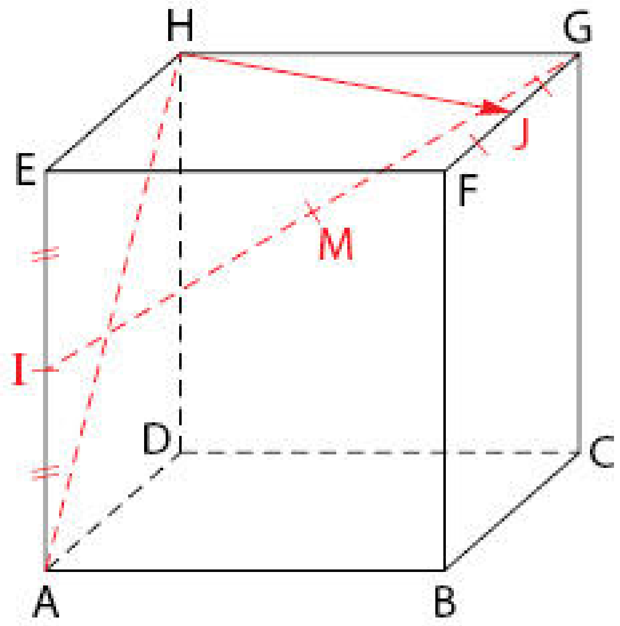
Démontrer que les points C, G et I sont alignés.



110 Imaginer une stratégie

Représenter **Raisonner**

ABCDEFGH est le cube représenté ci-contre.
I et J sont les milieux des arêtes respectives [AE] et [FG].
M est le milieu du segment [IG].

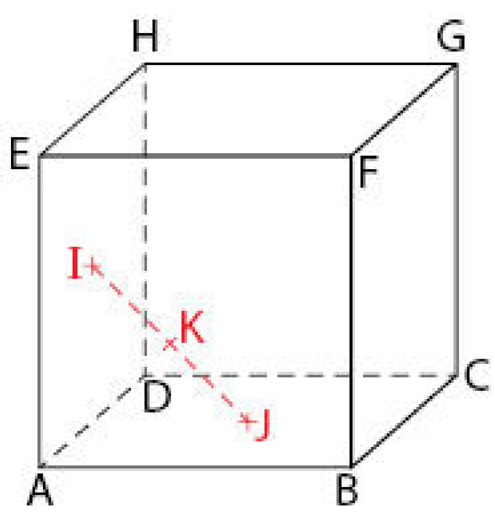


a) Démontrer que le point M appartient au plan (AHJ).
b) En déduire la position relative de la droite (IG) et du plan (AHJ).

111 Démontrer que deux plans coïncident

Représenter **Raisonner**

ABCDEFGH est le cube représenté ci-dessous.
I est le centre de la face ADHE, J celui de la face ABCD et K le milieu du segment [IJ].



Démontrer que les plans (AKG) et (ADF) coïncident.

112 Situer une droite et un plan

Calculer **Communiquer**

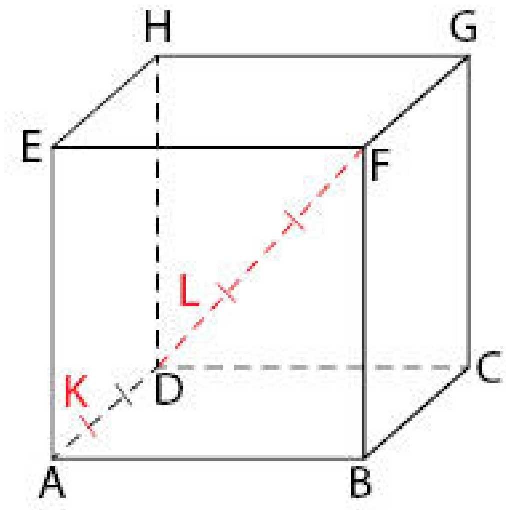
$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ is a base in space.
$\mathscr{P}$ is the plane that goes through the point $A(5\,;-2\,;1)$ and led by $\vec{u}(1;2;0)$ and $\vec{v}(-2\,;0\,;1)$.
Prove that line d that goes through the point $B(-1\,;0\,;3)$ and led by $\vec{w}(4\,;4\,;-1)$ is parallel to $\mathscr{P}$.

113 Étudier une configuration

Problème ouvert

Représenter **Raisonner**

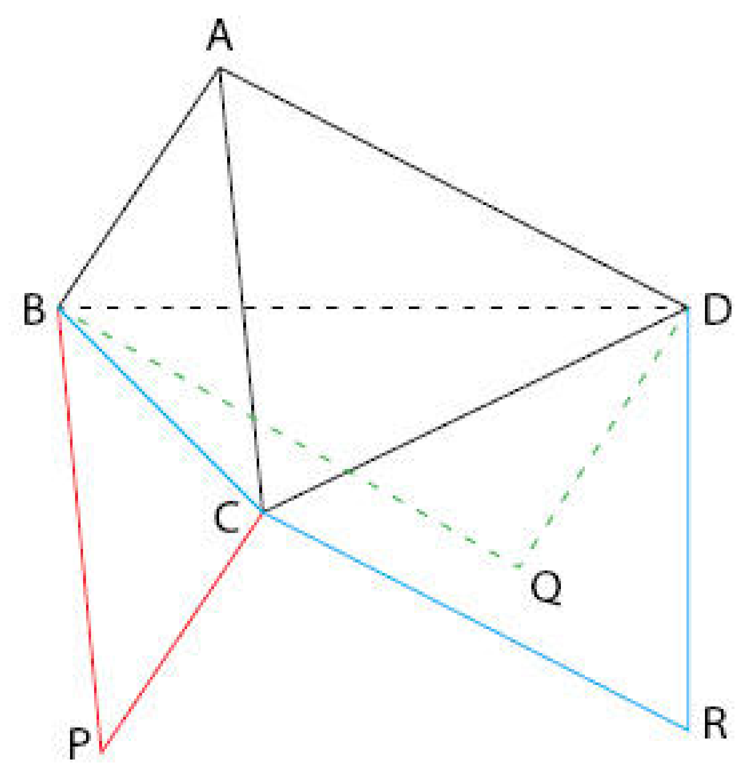
ABCDEFGH est le cube représenté ci-contre.
K et L sont les points définies par $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{DL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DF}$.
Le point L appartient-il au plan (CGK) ?



114 Démontrer que des droites sont concourantes

Raisonner **Calculer**

ABCD est un tétraèdre.
P, Q et R sont les points tels que les quadrilatères ABPC, ABQD et ACRD soient des parallélogrammes.



On se place dans le repère $(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$.
a) Calculer les coordonnées des points P, Q et R.
b) Démontrer que les droites (BR) et (DP) sont sécantes et donner les coordonnées de leur point d'intersection.
c) Démontrer que les trois droites (BR), (CQ) et (DP) sont concourantes.

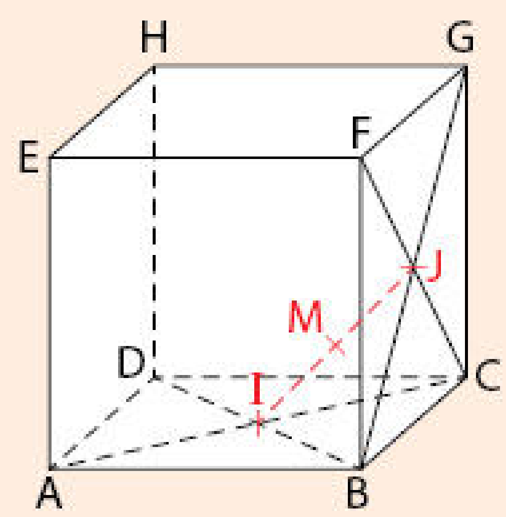
115 Démontrer la coplanarité de quatre points

Narration de recherche

Représenter **Raisonner** **Calculer**

Rédiger les différentes étapes de la recherche, sans omettre les fausses pistes et les changements de méthode.

Problème
ABCDEFGH est le cube représenté ci-contre.
I et J sont les centres respectifs des faces ABCD et BCGF.
M est le milieu du segment [IJ].
Démontrer que les points B, C, M et H sont coplanaires.

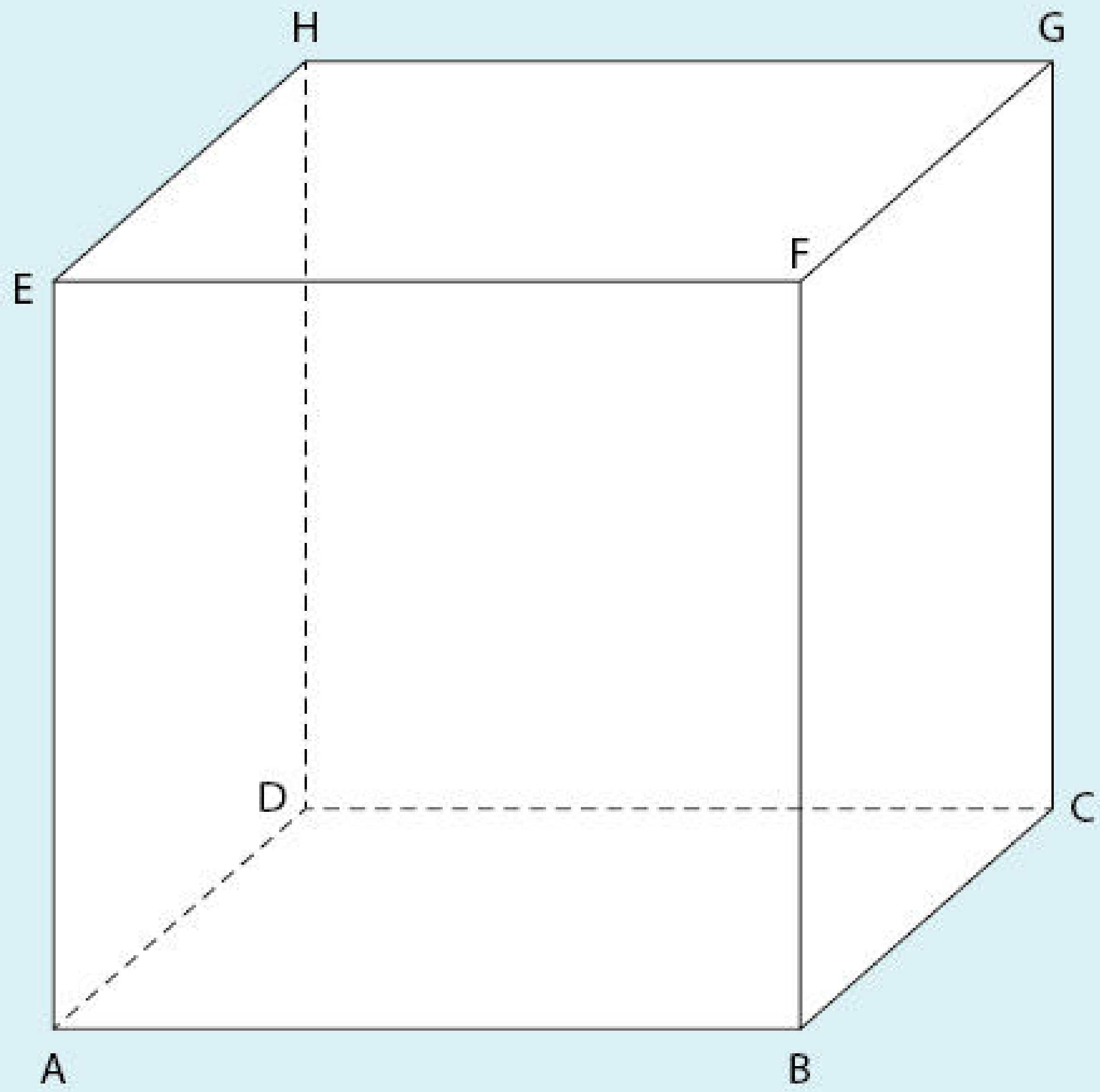


116 Étudier une configuration

40 min

D'après Bac, Centres étrangers 2012

ABCDEFGH est le cube représenté ci-dessous.



Réaliser cette figure avec AB $= 6$ cm et la compléter au fur et à mesure.

On se place dans le repère $(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

Partie A

1. a) Construire les points I, J et K définis par :

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}, \quad \overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}, \quad \overrightarrow{AK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}.$$

b) Déterminer les coordonnées de chacun des points I, J et K.

c) Déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur de chacune des droites (IJ) et (IK).

2. L est un point de l'arête [CD].

a) Justifier que les coordonnées de L sont de la forme $(a\,;1\,;0)$ où a est un nombre réel de l'intervalle $[0\,;1]$.

b) Pour quelle valeur de a, le point L appartient-il au plan (IJK) ?

Partie B

Dans cette partie, on pose $a = \frac{1}{4}$ et le point L a pour coordonnées $\left(\frac{1}{4};1;0\right)$.

1. a) Démontrer que le quadrilatère IKJL est un parallélogramme.

b) Calculer les coordonnées du centre de IKLJ.

c) Quelle est la position relative des droites (IJ) et (KL) ?

2. a) Démontrer que les droites (IJ) et (BH) sont sécantes.

b) Le centre du cube appartient-il au plan (IJK) ?

3. a) Déterminer un point M de la droite (HG) tel que les droites (MF) et (IL) soient parallèles.

b) Justifier que la droite (MF) est parallèle au plan (IJK).

Guide de résolution
2. b) L appartient au plan (IJK) si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{IL}$ sont coplanaires.

Guide de résolution
3. a) (MF) et (IL) sont parallèles si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{FM}$ et $\overrightarrow{IL}$ sont colinéaires.

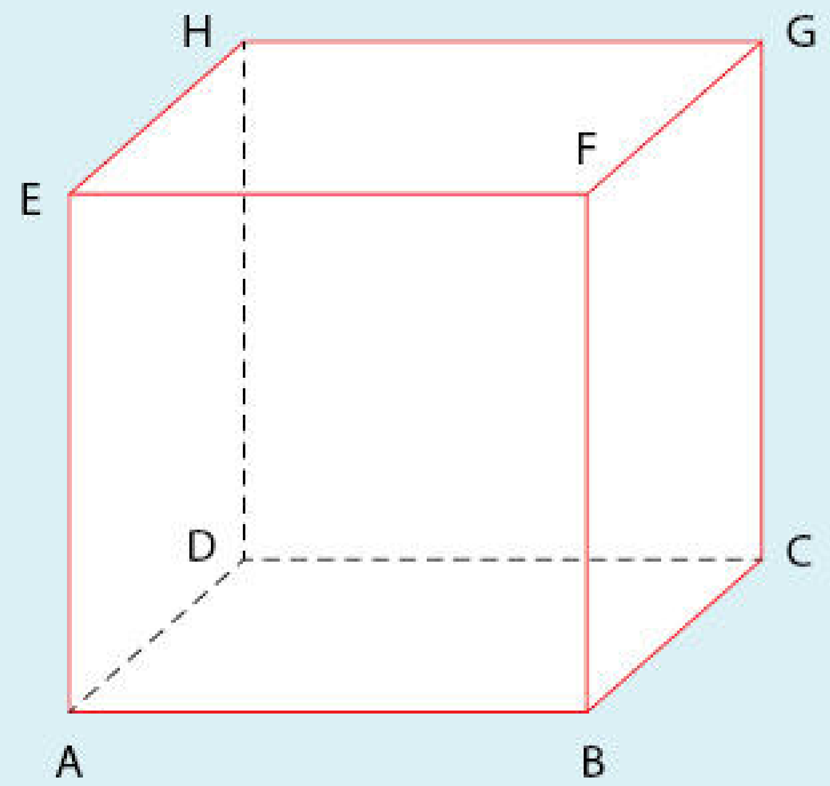
117 Étudier des droites, des plans

40 min

D'après Bac, Métropole – La Réunion 2019

La partie **C** est indépendante des parties **A** et **B**.

ABCDEFGH est le cube représenté ci-contre.



Partie A : premiers résultats

1. Réaliser la figure et construire les points I, J et K :

- I le milieu de [EF] ;
- J le milieu de [EH] ;
- K le point tel que $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.

2. On munit l'espace du repère $(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

a) Déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur de la droite (AE).

b) Déterminer un couple de vecteurs directeurs du plan (FHK).

c) Démontrer que la droite (AE) et le plan (FHK) ne sont pas parallèles.

Partie B : étude de l'intersection

1. a) M est un point de la droite (AE).

Justifier qu'il a pour coordonnées $(0\,;0\,;a)$ où a est un nombre réel.

b) Justifier que le point M appartient au plan (FHK) s'il vérifie :

$$\overrightarrow{HM} = x\overrightarrow{HF} + y\overrightarrow{HK} \text{ où } x \text{ et } y \text{ sont deux nombres réels.}$$

c) Vérifier que le point d'intersection M de (AE) et (FHK), a pour coordonnées $\left(0\,;0\,;-\frac{1}{3}\right)$. En déduire les valeurs de x et y.

2. Placer le point M sur la figure.

Partie C : justifier des affirmations

Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier.

$(O\,;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère.

$\mathcal{P}$ est le plan qui passe par $A(1\,;0\,;-2)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}(-1;0;-3)$ et $\vec{v}(0;1;2)$.

1. Affirmation 1 : le point $M(-1\,;-1\,;-10)$ est un point du plan $\mathcal{P}$.

2. Affirmation 2 : la droite d qui passe par le point $B(0\,;-1\,;3)$ et de vecteur directeur $\vec{w}(1;-2;4)$ est parallèle au plan $\mathcal{P}$.

3. Le plan $\mathcal{Q}$ est le plan qui passe par $C(-1\,;2\,;-1)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}'(-1;1;-1)$ et $\vec{v}'(-3;2;-5)$.

Affirmation 3 : le plan $\mathcal{Q}$ est parallèle au plan $\mathcal{P}$.

> **Guide de résolution**
> **2. c)** On démontre que le vecteus $\overrightarrow{AE}$ et deux vecteurs directeurs du plan (FHK) ne sont pas coplanaires.

> **Guide de résolution**
> **1. a)** M est un point de (AE) si, et seulement si, $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont colinéaires.

> **Guide de résolution**
> **3.** Démontrer que les quatre vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{u}'$ et $\vec{v}'$ sont coplanaires.

118 Trouver la bonne réponse

⏱ 30 min

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple. Pour chaque question, une seule proposition est correcte. Indiquer cette réponse. On ne demande pas de justifier.

L'espace est muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère les points :

$A(1;2;0)$, $B(0;3;1)$, $C(1;1;-1)$, $D(-1;4;2)$ et $E(1;5;1)$.

a)

(1) $D \in (ABC)$	**(2)** $E \in (ABC)$	**(3)** $E \in (BCD)$

b)

(1) A, B, E sont alignés	**(2)** B, D, E sont alignés	**(3)** A, B, D sont alignés

c) Un vecteur directeur de la droite (AB) a pour coordonnées …

(1) $(-1;1;-1)$	**(2)** $(2;-2;-2)$	**(3)** $(1;5;1)$

d) Le plan qui passe par le point E et de vecteurs directeurs …

(1) $\vec{u}(-2;2;2)$ et $\vec{v}(0;-1;-1)$ est sécant avec (ABC)	**(2)** $\vec{u}(-2;2;2)$ et $\vec{v}(0;-1;-1)$ est parallèle à (ABC)	**(3)** $\vec{u}(0;3;1)$ et $\vec{v}(-1;1;1)$ est parallèle à (ABC)

Guide de résolution
c) Deux vecteurs directeurs d'une droite sont colinéaires.

Guide de résolution
d) Déterminer des vecteurs directeurs du plan (ABC) et les comparer aux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Se préparer À L'ORAL

119 Présenter un exposé

a) Lister les positions relatives de deux droites de l'espace, de deux plans et d'une droite et d'un plan.
b) Dans un exposé oral de 10 min, présenter ces notions. On pourra s'appuyer sur les solides usuels (parallélépipèdes rectangles, pyramides, etc.). On s'attachera à décrire la nature des intersections lorsqu'elles existent.

120 Travailler l'oral en groupe

Résoudre cet exercice en groupe, puis en présenter les résultats à l'oral. Certains groupes travailleront avec les vecteurs, d'autres avec les coordonnées dans un repère choisi de l'espace.
Les élèves analyseront les avantages et inconvénients de chacune des méthodes.

ABCD est un tétraèdre.
Les points I, J, K sont les milieux respectifs de [AD], [BD] et [BC].

Le point E est tel que D est le milieu de [EC] et le point G est défini par $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AK}$.

Démontrer que le point E appartient au plan (IJG).

121 Travailler des compétences orales

▶ **ANTICIPER LES QUESTIONS DU JURY**

a) Par groupe de 4, chaque élève choisit une des affirmations et l'étudie (10 min).
b) Chaque élève présente sa réponse à l'oral aux 3 autres élèves du groupe, qui composent le jury. Chaque élève du jury pose une question au candidat.

$(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est un repère. On considère les points $A(-2;1;1)$, $B(-4;0;-5)$, $C(0;3;-1)$, $D(1;0;-2)$ et $E(1;0;-5)$.
On note P le plan qui passe par A et de vecteurs directeurs $\vec{u}(-1;1;0)$ et $\vec{v}(0;1;2)$.
Pour chacune des affirmations ci-dessous, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.
Affirmation 1 : le point B est un point de P.
Affirmation 2 : le point A est un point de la droite qui passe par C et de vecteur directeur $\vec{u}'(-4;5;-1)$
Affirmation 3 : la droite d qui passe par D et de vecteur directeur $\vec{v}'(2;-1;3)$ est parallèle au plan P.
Affirmation 4 : le plan Q qui passe par E et qui est dirigé par les vecteurs $\vec{w}(1;0;2)$ et $\vec{t}(0;-2;-4)$ est parallèle au plan P.

122 Barycentre d'une famille d'un système de points pondérés

Partie A : barycentre de deux points pondérés

A et B sont deux points de l'espace et a, b sont deux nombres réels tels que $a + b \neq 0$.

1. a) M désigne un point de l'espace.
Démontrer que $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ équivaut à :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}.$$

b) En déduire qu'il existe un unique point G tel que $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{0}$.
G est appelé **barycentre** des points pondérés (A, a) et (B, b).

2. a) Démontrer que si G est barycentre des points pondérés (A, a) et (B, b), alors pour tout réel $k \neq 0$, G est barycentre des points pondérés (A, ka) et (B, kb).
b) Lorsque $a = b$, que peut-on dire du point G ?

3. Application
[AB] est un segment de longueur 6 cm.
Dans chaque cas, construire le barycentre indiqué.
a) G_1 est le barycentre de $(A, 2)$ et $(B, 1)$;
b) G_2 est le barycentre de $(A, 7)$ et $(B, -1)$;
c) G_3 est le barycentre de $(A, -6)$ et $(B, -2)$.

Partie B : barycentre de trois, quatre points pondérés

A, B et C sont trois points de l'espace et a, b, c sont trois nombres réels tels que $a + b + c \neq 0$.

1. Démontrer qu'il existe un unique point G tel que :

$$a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

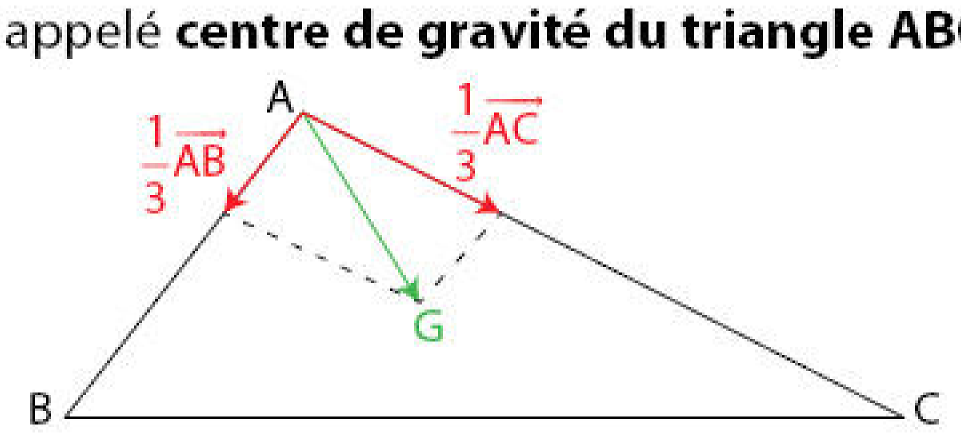
G est appelé **barycentre** des points pondérés (A, a), (B, b) et (C, c).

Remarque : on peut étendre cette définition à quatre points de l'espace.

2. a) Démontrer que si G est barycentre des points pondérés (A, a), (B, b) et (C, c), alors pour tout réel $k \neq 0$, G est barycentre des points pondérés (A, ka), (B, kb) et (C, kc).
b) Dans le cas où $a = b = c$, démontrer que :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$$

G est appelé **centre de gravité du triangle ABC**.



3. On suppose que G est le barycentre des points pondérés (A, a), (B, b) et (C, c) et que H est le barycentre des points pondérés (A, a) et (B, b) avec $a + b \neq 0$.
a) Démontrer que $(a + b)\overrightarrow{GH} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}$.
b) En déduire que G est le barycentre des points pondérés $(H, a + b)$ et (C, c).

Remarque : cette propriété s'appelle **propriété d'associativité** du barycentre.

4. Dans un repère de l'espace, on donne les coordonnées de A, B et C :

$$A(x_A\,;y_A\,;z_A),\ B(x_B\,;y_B\,;z_B) \text{ et } C(x_C\,;y_C\,;z_C).$$

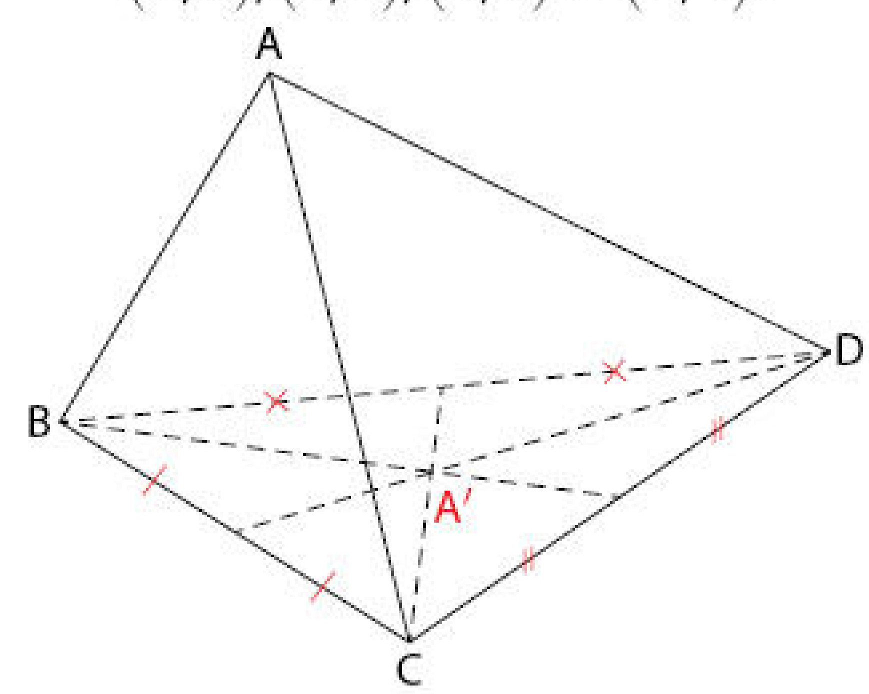
Calculer les coordonnées du point G en fonction des coordonnées de A, B et C.

5. Application
ABC est un triangle de centre de gravité G.
I est le milieu du côté [BC].
a) À l'aide de la propriété d'associativité, démontrer que G est barycentre des points pondérés $(A, 1)$ et $(I, 2)$.
En déduire que G appartient à la médiane (AI).
b) Démontrer que les médianes du triangle ABC sont concourantes en G.

123 Application de la propriété d'associativité

ABCD est un tétraèdre.
G est le barycentre des points pondérés

$$(A, 1), (B, 1), (C, 1) \text{ et } (D, 1).$$



1. a) A' est le centre de gravité du triangle BCD.
Démontrer que G appartient au segment [AA'].
Réaliser la figure et construire le point G.
b) De façon analogue, citer trois autres segments qui passent par G.
c) Énoncer la propriété ainsi démontrée.

2. I, J, K, L, M, N sont les milieux respectifs des arêtes [AB], [AC], [AD], [BC], [CD], [BD].
Démontrer que les segments qui joignent les milieux de deux côtés opposés du tétraèdre sont concourants.

124 Fonction vectorielle de Leibniz

A, B, C sont des points de l'espace et a, b, c des nombres réels.

f est la fonction qui à tout point M de l'espace associe le vecteur $\overrightarrow{f(\mathrm{M})} = a\overrightarrow{\mathrm{MA}} + b\overrightarrow{\mathrm{MB}} + c\overrightarrow{\mathrm{MC}}$.

Partie A : étude de la fonction *f*

1. On suppose que $a + b + c \neq 0$.
On note G le barycentre des points pondérés (A, a), (B, b) et (C, c) (voir exercice 122).
Démontrer que pour tout point M de l'espace :
$$\overrightarrow{f(\mathrm{M})} = (a + b + c)\overrightarrow{\mathrm{MG}}.$$

2. On suppose que $a + b + c = 0$.
a) Démontrer que pour tous points M et N de l'espace :
$$\overrightarrow{f(\mathrm{M})} - \overrightarrow{f(\mathrm{N})} = \vec{0}.$$
b) Que peut-on en déduire pour la fonction f ?

Partie B : applications

1. $\vec{u}$ est un vecteur non nul.
Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{MB}} + \overrightarrow{\mathrm{MC}}$ et $\vec{u}$ soient colinéaires.

2. Déterminer l'ensemble des points N de l'espace tels que $\|2\overrightarrow{\mathrm{NA}} + \overrightarrow{\mathrm{NB}} - \overrightarrow{\mathrm{NC}}\| = 3$.

3. a) Justifier que le vecteur $3\overrightarrow{\mathrm{MA}} - \overrightarrow{\mathrm{MB}} - 2\overrightarrow{\mathrm{MC}}$ est indépendant du point M.
b) Placer A, B, C et représenter ce vecteur.

125 Familles libres, familles liées

> **Définitions**
> $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont trois vecteurs de l'espace.
> On dit que la famille $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ est **liée** s'il existe des réels a, b, c tels que :
> $(a\,;b\,;c) \neq (0\,;0\,;0)$ et $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$.
> Sinon, on dit que la famille est **libre**.

1. $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base de l'espace.
On donne les vecteurs $\vec{u}(-1;2;0)$ et $\vec{v}(-2;3;-1)$.
a) Démontrer que la famille $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ où $\vec{w}(0;1;1)$ est liée.
b) Déterminer un vecteur $\vec{w}_1$ tel que la famille $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}_1$ soit libre.

2. Démontrer que la famille $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ est liée si, et seulement si, les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}_1$ sont coplanaires.

3. $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base de l'espace.
a) Déterminer l'ensemble des vecteurs $\vec{\ell}$ tels que la famille $\vec{i}, \vec{j}, \vec{\ell}$ soit liée.
b) Déterminer l'ensemble des vecteurs $\vec{t}$ tels que la famille $\vec{i}, \vec{k}, \vec{t}$ soit liée.

126 Avec un contre-exemple

On considère, dans l'espace, deux droites d et d' et deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$.
Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Pour les affirmations fausses, proposer un contre-exemple.
A1 : Si d et d' ne sont pas parallèles, alors elles sont sécantes.
A2 : Si d et d' sont sécantes, alors elles sont coplanaires.
A3 : Si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles, alors toute droite d du plan $\mathcal{P}$ est parallèle à $\mathcal{P}'$.

127 Positions relatives de deux plans

L'espace est muni d'un repère $(\mathrm{O}\,;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
$\mathcal{P}_1$ est le plan qui passe par le point $\mathrm{A}(-1\,;1\,;0)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u_1}(2\,;0\,;-1)$ et $\vec{v_1}(3\,;-2\,;0)$.
$\mathcal{P}_2$ est le plan qui passe par le point $\mathrm{B}(-1\,;1\,;-1)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u_2}(1\,;0\,;-1)$ et $\vec{v_2}(2\,;-1\,;0)$.
Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Justifier.
A1 : Les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont parallèles.
A2 : Les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants et leur droite d'intersection a pour vecteur directeur $\vec{u}(-5\,;2\,;1)$.

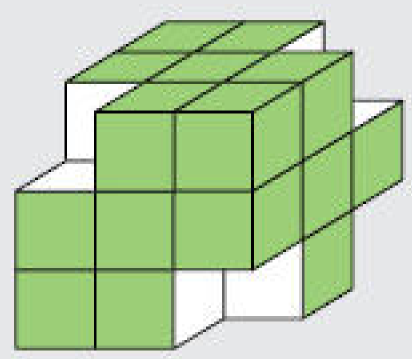
Des Défis

128 Démontrer un parallélisme

ABCD est un tétraèdre. I, J, K et L sont les points tels que $\overrightarrow{\mathrm{AI}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{BJ}} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CK}} = \frac{3}{8}\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AL}} = \frac{1}{6}(\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}})$.
Démontrer que les droites (IL) et (JK) sont parallèles.

129 Imaginer l'espace

Rafaël a retiré quatre petits cubes à certains coins d'un cube.



Il utilise les faces du solide obtenu comme tampons encreurs. Déterminer l'ensemble des tampons possibles.

D'après concours Kangourou