9 Fonctions : courbes représentatives

Avant

▶ Dans les années 50, les designers utilisaient une règle déformable pour dessiner les carrosseries automobiles.

À présent

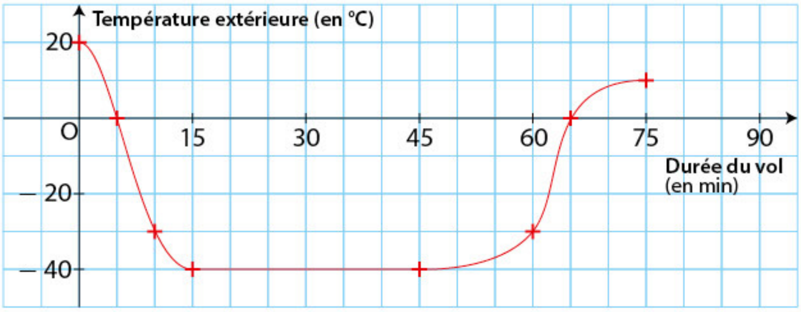
▶ L'élégante carrosserie de cette voiture concept a pu être usinée grâce à des algorithmes implantés dans des ordinateurs et utilisant les courbes de Bézier, du nom d'un ingénieur chez Renault dans les années 1960.

Les capacités travaillées dans ce chapitre

	Exercices
• Comprendre la notion de courbe représentative d'une fonction.	13 à 20
• Exploiter l'équation $y = f(x)$ d'une courbe : appartenance, calcul de coordonnées.	1, 3, 21 à 29
• Modéliser par des fonctions des situations issues des mathématiques, des autres disciplines.	40 à 42
• Résoudre une équation ou une inéquation du type $f(x) = k$, $f(x) < k$, en choisissant une méthode adaptée : graphique, algébrique, logicielle.	2, 4, 5, 7, 30 à 34
• Résoudre graphiquement ou à l'aide d'un outil numérique une équation ou inéquation du type $f(x) = g(x)$, $f(x) < g(x)$.	6, 8, 9, 11, 35 à 39
• Étudier la parité d'une fonction.	10, 12, 43 à 54

1 Lectures graphiques

Un avion de ligne effectue un vol de Toulouse vers Paris.
Ses capteurs de température extérieure ont fourni des données tout au long du vol.
La situation est modélisée par la fonction *f* définie par la courbe ci-dessous.



1 **a)** Combien de temps le vol a-t-il duré ?
b) Quelle température faisait-il cet après-midi-là :
- à Toulouse ?
- à Paris ?

2 Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = -30$.
Interpréter ce résultat.

3 Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leqslant 0$.
Interpréter ce résultat.

2 Parité d'une fonction

Un bâtiment de forme cubique a pour côté intérieur x, en m, où x désigne un nombre réel positif.

1 Exprimer en fonction de x :
a) l'aire $A(x)$, en m^2, de la surface à carreler au sol ;
b) le volume $V(x)$, en m^3, du volume à chauffer.

2 **a)** Dans un repère, tracer la courbe représentative de la fonction A sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
b) À partir de cette courbe, quelle transformation géométrique permet d'obtenir celle de la fonction carré *f* définie sur $\mathbb{R}$? Représenter graphiquement la fonction *f*.
c) Comparer alors graphiquement $f(-x)$ et $f(x)$ pour tout nombre x de $\mathbb{R}$. Le vérifier par le calcul.

3 **a)** Dans un repère, tracer la courbe représentative de la fonction V sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
b) À partir de cette courbe, quelle transformation géométrique permet d'obtenir celle de la fonction cube g définie sur $\mathbb{R}$? Représenter graphiquement la fonction g.
c) Comparer alors graphiquement $g(-x)$ et $g(x)$ pour tout nombre x de $\mathbb{R}$. Le vérifier par le calcul.

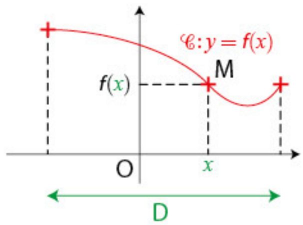
Cours

1 Courbe représentative d'une fonction

A Définition

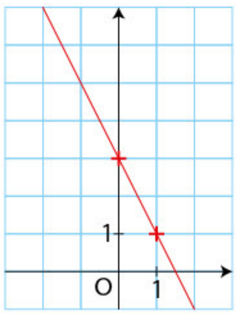
Définition

f est une fonction d'ensemble de définition D (intervalle ou réunion d'intervalles).
Dans un repère, la **courbe représentative** (ou représentation graphique) $\mathscr{C}$ de la fonction *f* est l'ensemble des points de coordonnées $(x\,;y)$ telles que :
x **appartient à D** et $y = f(x)$.
On dit qu'une **équation de la courbe** $\mathscr{C}$, dans ce repère, est $y = f(x)$.



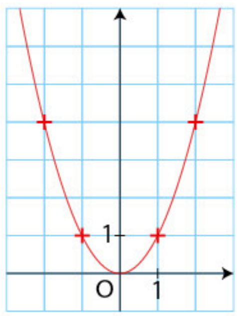
Exemples

• Cas d'une fonction affine



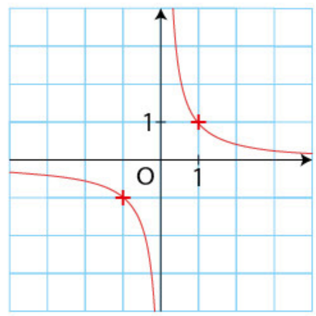
La courbe représentative de la fonction affine $x \mapsto -2x+3$ est la droite d'équation $y = -2x+3$.

• Cas de la fonction carré



La courbe représentative de la fonction carré est la **parabole** d'équation $y = x^2$.

• Cas de la fonction inverse



La courbe représentative de la fonction inverse est l'**hyperbole** d'équation $y = \dfrac{1}{x}$.

Convention graphique :
La présence d'une croix sur une courbe permet de lire les coordonnées exactes.

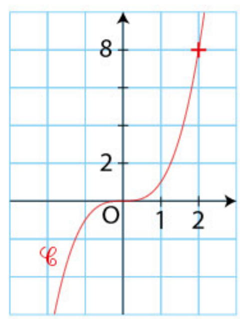
B Appartenance d'un point à une courbe

Conséquence

f est une fonction définie sur un ensemble D et de courbe représentative $\mathscr{C}$ dans un repère.
• **Si** M$(x\,;y)$ appartient à $\mathscr{C}$, **alors** x appartient à D et $y = f(x)$.
• **Si** x appartient à D et $y = f(x)$, **alors** M$(x\,;y)$ appartient à $\mathscr{C}$.
Autrement dit, un point M$(x\,;y)$ appartient à $\mathscr{C}$ **si, et seulement si**, x appartient à D et $y = f(x)$.

Exemple

f est la fonction cube définie sur $\mathbb{R}$.
$\mathscr{C}$ est sa courbe représentative dans le repère ci-contre.
• $f(2) = 2^3 = 8$ ainsi le point M(2 ; 8) appartient à la courbe $\mathscr{C}$.
• Graphiquement, le point N(1,4 ; 3) semble aussi appartenir à la courbe $\mathscr{C}$.
Mais $f(1{,}4) = 1{,}4^3 = 2{,}744$ et $f(1{,}4) \neq 3$.
Ainsi le point N(1,4 ; 3) n'appartient pas à la courbe $\mathscr{C}$.



2 Résolutions graphiques

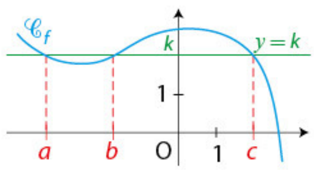
A Résolutions graphiques d'équations du type $f(x) = k$ et $f(x) = g(x)$

Propriétés

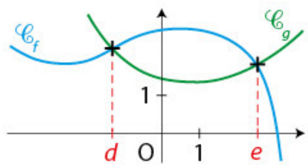
- Dans un repère, les solutions de l'équation $\boldsymbol{f(x) = k}$ sont **les abscisses** des points d'intersection de la droite d'équation $y = k$ et de la courbe $\mathscr{C}_f$ représentant f.

- Dans un repère, les solutions de l'équation $\boldsymbol{f(x) = g(x)}$ sont **les abscisses** des points d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentant f et g.

Sur cette figure, l'équation $f(x) = k$ a pour solutions les nombres a, b, c.

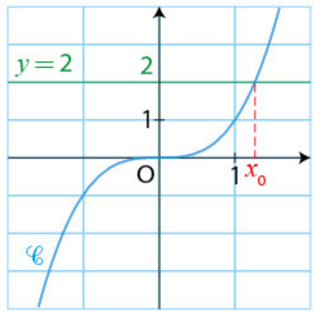


Sur cette figure, l'équation $f(x) = g(x)$ a pour solutions les nombres d et e.



Exemple

Dans le repère ci-contre, $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction cube.
Pour résoudre graphiquement l'équation $x^3 = 2$, on trace la droite d'équation $y = 2$ (en vert sur le graphique).
Cette droite coupe la courbe $\mathscr{C}$ en un seul point, donc l'équation $x^3 = 2$ a une unique solution.
Cette solution est l'abscisse x_0 de ce point d'intersection.
Ainsi, la solution de l'équation $x^3 = 2$ est le nombre réel x_0 ; on lit sur le graphique que $x_0 \approx 1{,}2$.



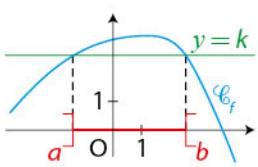
B Résolutions graphiques d'inéquations du type $f(x) \leqslant k$ et $f(x) \leqslant g(x)$

Propriétés

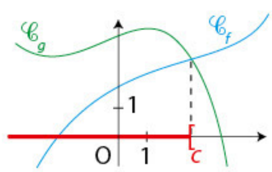
- Dans un repère, les solutions de l'inéquation $\boldsymbol{f(x) < k}$ sont **les abscisses** des points de la courbe $\mathscr{C}_f$ situés au-dessous de la droite d'équation $y = k$.

- Dans un repère, les solutions de l'inéquation $\boldsymbol{f(x) < g(x)}$ sont **les abscisses** des points de la courbe $\mathscr{C}_f$ situés au-dessous de la courbe $\mathscr{C}_g$.

Sur cette figure, l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) < k$ est l'intervalle $]a\,;b[$.

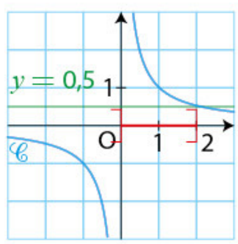


Sur cette figure, l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) < g(x)$ est l'intervalle $]-\infty\,;c[$.



Exemple

Dans le repère ci-contre, $\mathscr{C}$ est l'hyperbole représentant la fonction inverse.
Pour résoudre graphiquement l'inéquation $\dfrac{1}{x} \geqslant 0{,}5$, on trace la droite d'équation $y = 0{,}5$ (en vert sur le graphique).
Ses solutions sont les abscisses des points de la courbe $\mathscr{C}$ dont l'ordonnée est supérieure ou égale à $0{,}5$.
On lit sur le graphique que l'ensemble des solutions de l'inéquation $\dfrac{1}{x} \geqslant 0{,}5$ est l'intervalle $]0\,;\,2]$.

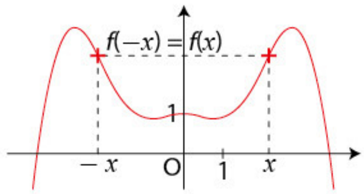


3 Fonction paire, fonction impaire

A Fonction paire

Définition

f est une fonction définie sur un ensemble D.
Dire que *f* est une fonction **paire** signifie que :
(1) pour tout x de D, $-x$ **appartient aussi à D** ;
(2) pour tout x de D, $\boldsymbol{f(-x) = f(x)}$.



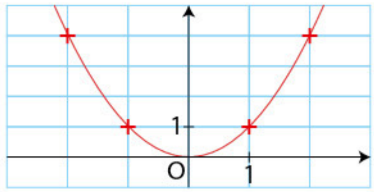
Vocabulaire : un ensemble D qui vérifie la condition **(1)** est dit symétrique par rapport à 0.

Conséquence graphique :
Dans un repère orthogonal, une fonction est paire si, et seulement si, sa courbe représentative admet l'**axe des ordonnées** comme **axe de symétrie**.

Exemple

La fonction carré *f* est paire. En effet, pour tout nombre réel x :
- $-x$ appartient à $\mathbb{R}$;
- $f(-x) = (-x)^2 = x^2$ soit $f(-x) = f(x)$.

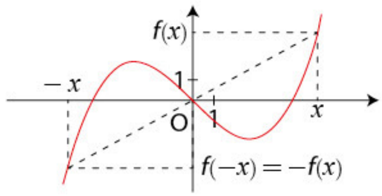
On retrouve ainsi le fait que, dans un repère orthogonal, la parabole est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (voir p. 191).



B Fonction impaire

Définition

f est une fonction définie sur un ensemble D.
Dire que *f* est une fonction **impaire** signifie que :
(1) pour tout x de D, $-x$ **appartient aussi à D** ;
(2) pour tout x de D, $\boldsymbol{f(-x) = -f(x)}$.

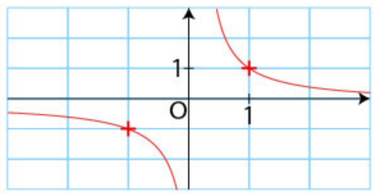


Conséquence graphique :
Dans un repère, une fonction est impaire si, et seulement si, sa courbe représentative admet l'**origine du repère** pour **centre de symétrie**.

Exemple

La fonction inverse *g* est impaire. En effet, pour tout nombre réel $x \neq 0$:
- $-x$ appartient à $\mathbb{R}^*$;
- $g(-x) = \dfrac{1}{-x} = -\dfrac{1}{x}$ soit $g(-x) = -g(x)$.

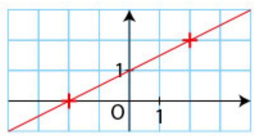
On retrouve ainsi le fait que l'hyperbole est symétrique par rapport à l'origine O du repère (voir p. 191).



Attention ! Il ne faut pas croire que toute fonction est soit paire soit impaire.

- La fonction racine carrée définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ n'est ni paire ni impaire. En effet, l'intervalle $[0\,;+\infty[$ n'est pas symétrique par rapport à 0.
- La fonction affine *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0{,}5x + 1$ n'est ni paire ni impaire.

En effet, $\mathbb{R}$ est bien symétrique par rapport à 0, mais $f(-2) = 0$ et $f(2) = 2$, donc $f(-2) \neq f(2)$ et $f(-2) \neq -f(2)$.

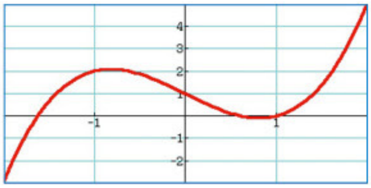


EXERCICES RÉSOLUS

1 Reconnaître l'appartenance à une courbe

→ Cours 1. B

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 2x + 1$.
Voici la courbe représentative de f obtenue à l'écran de la calculatrice.
a) M est le point d'abscisse 2 de cette courbe.
Calculer son ordonnée.
b) Le point $N(1{,}4\ ;\ 1)$ appartient-il à la courbe ?



Solution

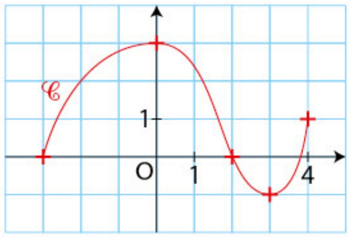
a) Les coordonnées de M sont $(2\ ;\ f(2))$.
$f(2) = 2^3 - 2 \times 2 + 1 = 5$
Donc l'ordonnée de M est 5.
b) $f(1{,}4) = 1{,}4^3 - 2 \times 1{,}4 + 1 = 0{,}944$
0,944 est différent de l'ordonnée 1 du point N.
Donc le point N n'appartient pas à cette courbe.

L'équation $y = f(x)$ de la courbe $\mathscr{C}$ d'une fonction f, dans un repère, permet :
- de calculer l'ordonnée d'un point de $\mathscr{C}$ connaissant son abscisse ;
- de savoir si un point de coordonnées données appartient ou non à $\mathscr{C}$.

2 Résoudre graphiquement une équation du type $f(x) = k$

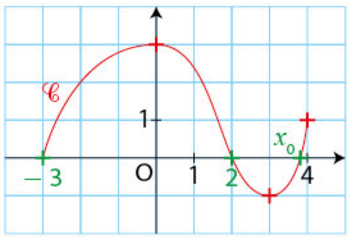
→ Cours 2. A

f est la fonction définie sur l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$ par la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère ci-contre.
Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 0$.



Solution

On lit sur le graphique les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec la droite d'équation $y = 0$, c'est-à-dire l'axe des abscisses.
Ce sont les nombres :
- -3
- 2
- x_0 avec $x_0 \approx 3{,}7$.

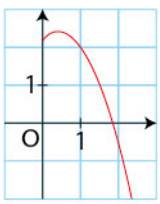


Les solutions d'une équation du type $f(x) = k$ se lisent sur l'axe des abscisses.
En particulier, celles de l'équation $f(x) = 0$ sont les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 1

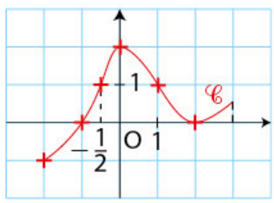
3 f est la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x} - x^2 + 2$.
Voici la courbe représentative de f dans un repère.



a) M est le point d'abscisse 1 de cette courbe.
Calculer son ordonnée.
b) Le point $N(2\ ;-0{,}5)$ appartient-il à cette courbe ?

Sur le modèle de l'exercice résolu 2

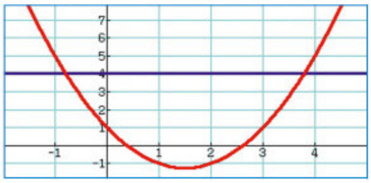
4 f est la fonction définie sur l'intervalle $[-2\ ;\ 3]$ par la courbe $\mathscr{C}$ dans ce repère.
Résoudre graphiquement l'équation :
a) $f(x) = 0$
b) $f(x) = 1$
c) $f(x) = 2$
d) $f(x) = 1{,}8$

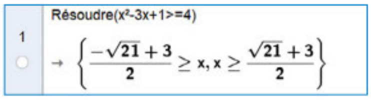


EXERCICES RÉSOLUS

5 Résoudre une inéquation du type $f(x) \geqslant k$

→ Cours 2. B





f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 - 3x + 1$$

a) Voici la courbe représentative de *f* obtenue à l'écran de la calculatrice.

Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geqslant 4$.

b) Utiliser cet écran de calcul formel pour écrire précisément l'ensemble des solutions $\mathcal{S}$ de cette inéquation.

Solution

a) Les solutions de $f(x) \geqslant 4$ sont les abscisses des points de la courbe situés au-dessus de la droite d'équation $y = 4$.

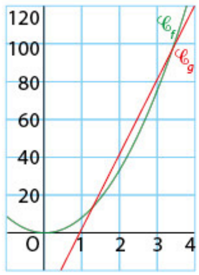
On lit que l'ensemble des solutions est $]-\infty\ ;x_0] \cup [x_1\ ;+\infty[$ avec $x_0 \approx -0{,}8$ et $x_1 \approx 3{,}8$.

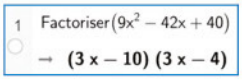
b) Les solutions vérifient $x \leqslant \dfrac{-\sqrt{21}+3}{2}$ ou $x \geqslant \dfrac{\sqrt{21}+3}{2}$

donc $\mathcal{S} = \left]-\infty\ ;\dfrac{-\sqrt{21}+3}{2}\right] \cup \left[\dfrac{\sqrt{21}+3}{2}\ ;+\infty\right[$.

6 Résoudre une équation du type $f(x) = g(x)$

→ Cours 2. A





Dans le repère ci-contre, $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont les courbes représentatives des fonctions *f* et *g* définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 9x^2 \text{ et } g(x) = 42x - 40$$

a) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$.

b) Utiliser l'écran de calcul formel ci-contre pour résoudre algébriquement l'équation $f(x) = g(x)$.

Solution

a) On lit les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

Ce sont les nombres x_0 et x_1 avec $x_0 \approx 1{,}3$ et $x_1 \approx 3{,}3$.

b) $f(x) = g(x)$ équivaut à $9x^2 = 42x - 40$ c'est-à-dire $9x^2 - 42x + 40 = 0$ soit $(3x-10)(3x-4) = 0$.

Ainsi, $f(x) = g(x)$ équivaut à $3x - 10 = 0$ ou $3x - 4 = 0$.

L'ensemble des solutions de cette équation est $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{4}{3}\ ;\ \dfrac{10}{3}\right\}$.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 5

7 *f* est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

a) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 2$ avec la calculatrice.

b) Vérifier que les valeurs exactes des solutions sont $\dfrac{-\sqrt{2}}{2}$ et $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Sur le modèle de l'exercice résolu 6

8 *f* est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x$.

g est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \dfrac{4}{x} - x$.

Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$:

a) graphiquement avec la calculatrice ;

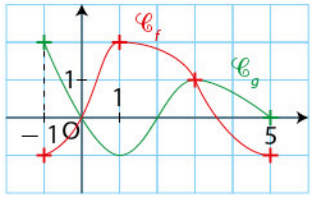
b) algébriquement en se ramenant à $x^2 = \dfrac{4}{3}$.

EXERCICES RÉSOLUS

9 Résoudre graphiquement une inéquation $f(x) \geqslant g(x)$

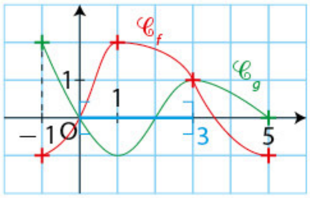
→ Cours 2. B

Dans le repère ci-contre, $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont les courbes représentatives des fonctions f et g définies sur l'intervalle $[-1\,;\,5]$.
Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geqslant g(x)$.



Solution

On repère sur le graphique les points de la courbe $\mathscr{C}_f$ qui sont au-dessus de la courbe $\mathscr{C}_g$.
Leurs abscisses sont les solutions de l'inéquation $f(x) \geqslant g(x)$; ce sont les nombres de l'intervalle $[0\,;\,3]$.



Les solutions d'une inéquation du type $f(x) \geqslant g(x)$ se lisent sur l'axe des abscisses. On peut colorier l'intervalle des solutions sur cet axe des abscisses, puis conclure en écrivant cet intervalle.

10 Étudier la parité d'une fonction

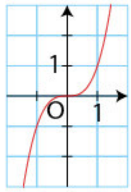
→ Cours 3

Voici, dans le repère ci-contre, la courbe représentative de la fonction cube définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.

a) Pour tout nombre réel x, exprimer $f(-x)$ en fonction de x.

b) Que peut-on en déduire pour la parité de la fonction cube ?

c) En quoi ce résultat est-il en accord avec la courbe de la fonction cube ?



Solution

a) Pour tout nombre réel x :
$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3$$

b) Pour tout nombre x de $\mathbb{R}$,
- $-x$ appartient aussi à $\mathbb{R}$;
- $f(-x) = -f(x)$.

Donc la fonction cube est impaire.

Étudier la parité d'une fonction consiste à déterminer si elle est paire, impaire ou ni l'un ni l'autre.

On vérifie d'abord que l'ensemble de définition est symétrique par rapport à 0, puis on compare $f(-x)$ et $f(x)$ ou $-f(x)$.

c) Ce résultat est en accord avec le fait que la courbe de la fonction cube admet l'origine du repère pour centre de symétrie (voir p. 192).

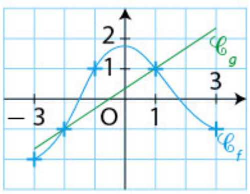
EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 9

11 f et g sont les fonctions définies sur l'intervalle $[-3\,;\,3]$ par les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ dans ce repère.
Résoudre graphiquement l'inéquation :

a) $f(x) \geqslant g(x)$

b) $f(x) < g(x)$



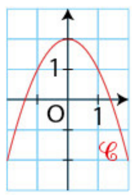
Sur le modèle de l'exercice résolu 10

12 Voici, dans ce repère, la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 2$.

a) Pour tout nombre réel x, exprimer $f(-x)$ en fonction de x.

b) Que peut-on en déduire pour la parité de la fonction f ?

c) Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?



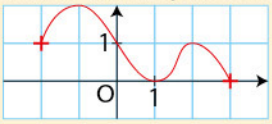
Calcul mental → Exercez-vous sur la plateforme Hyperbole
⊕ de détails page 4

Courbe représentative

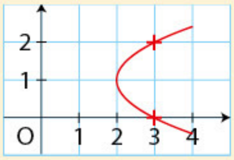
→ Cours 1. A

Questions flash

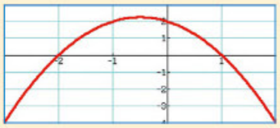
13 Kim affirme : « La fonction définie par cette courbe a pour ensemble de définition $D = [0 ; 2]$. »
Que peut-on en penser ?

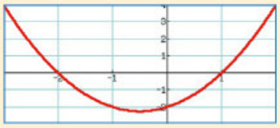


14 Expliquer oralement pourquoi cette courbe ne définit pas une fonction sur l'intervalle $[2 ; 4]$.

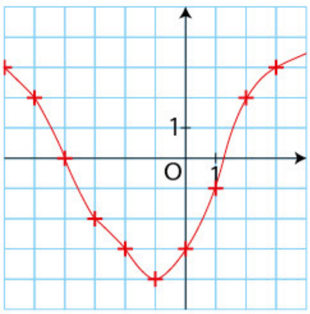


15 g est la fonction définie sur l'intervalle $[-3 ; 2]$ par $g(x) = (1 - x)(2 + x)$.
Dire mentalement lequel de ces écrans affiche la courbe représentative de la fonction g.


①


②

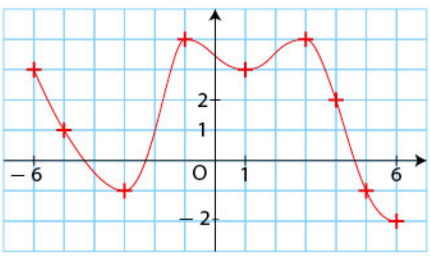
16 f est la fonction définie sur $[-6 ; 4]$ dans le repère ci-contre.



1. Lire les images :
a) $f(-5)$ **b)** $f(2)$
c) $f(-1)$ **d)** $f(-6)$

2. Lire les éventuels antécédents par f de :
a) -3 **b)** 2 **c)** 4

17 f est la fonction définie sur l'intervalle $[-6 ; 6]$ par la courbe dans le repère ci-dessous.



a) Quelle est l'image par f de :
• -5 ? • 3 ? • -1 ? • 1 ? • 4 ?

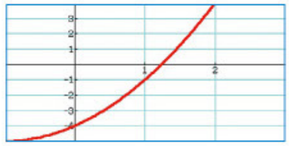
b) Lire approximativement l'image par f de 2.

c) Quel est le nombre d'antécédents par f de :
• 4 ? • 2 ? • 0 ? • -1 ? • -2 ? • 3 ?

18 h est la fonction définie sur l'intervalle $[-2 ; 5]$ par $h(x) = x^2 - 4x$. Avec la calculatrice :
a) tabuler la fonction h avec le pas 0,2 ;
b) afficher la courbe représentative de h en précisant la fenêtre choisie.

19 k est la fonction définie sur l'intervalle $[-4 ; 6]$ par :

$$k(x) = x^2 + 2x - 4$$



Valentin a affiché la courbe représentative de k, à l'écran de la calculatrice.
Il affirme : « 1 est le seul antécédent de -1 par k. »
Utiliser la calculatrice pour savoir s'il a raison.

20 **a)** Choisir une fenêtre convenable pour visualiser à l'écran la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[-5 ; 2]$ par :

$$f(x) = x^3 + 5x^2 - 1$$

b) Recopier et compléter ce tableau de valeurs.

x	-5	$-1{,}8$	$-0{,}9$	1,7	1,9
$f(x)$					

Reconnaître l'appartenance d'un point à une courbe

→ Cours 1. B

Questions flash

21 Dans un repère, A, B et C sont trois points de la courbe $\mathscr{C}$ d'équation :

$$y = 2x - 3$$

Compléter mentalement leurs coordonnées.

a) $A(1{,}2 ; \dots)$ **b)** $B\left(-\dfrac{1}{4} ; \dots\right)$ **c)** $C(\dots ; 23)$

22 Dans un repère, $\mathscr{C}$ est la courbe d'équation :

$$y = \frac{1}{x}$$

Laquelle de ces affirmations est exacte ?
(1) Le point $B(-4 ; 0{,}25)$ appartient à $\mathscr{C}$.
(2) Le point $A(0{,}1 ; 10)$ appartient à $\mathscr{C}$.

23 Dans un repère, $\mathscr{C}$ est la courbe d'équation :

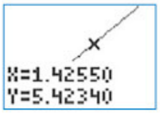
$$y = x^2$$

Alix affirme : « Le point M de $\mathscr{C}$ d'ordonnée 81 a pour abscisse 9. »
Hugo lui répond : « Tu as tort, le point M de $\mathscr{C}$ d'ordonnée 81 a pour abscisse -9. »
Qui a raison ?

24 Dans un repère, $\mathscr{C}$ est la courbe d'équation $y = x(2x - 5)$.
Déterminer les coordonnées de cinq points de $\mathscr{C}$.

25 f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
Dans un repère, $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de f.
Traduire chaque information par l'appartenance de points à la courbe $\mathscr{C}$.
a) 3 est l'image de 2 par f.
b) -1 admet deux antécédents par f qui sont 0 et 5.

26 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1{,}7x + 3$.
Filipe annonce : « J'ai tracé la courbe représentant la fonction f à l'écran de ma calculatrice. » Cette affirmation est-elle vraie ou fausse ? Justifier.



27 f est la fonction définie sur $[0\ ;+\infty[$ par :
$$f(x) = x\sqrt{x}$$
Jeanne a tabulé la fonction f sur sa calculatrice et affirme : « Les points M(1 ; 1) et N(0,5 ; 0,3536) appartiennent à la courbe représentative de f. » A-t-elle raison ?

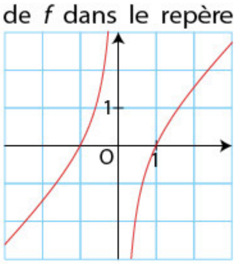
X	Y1
0	0
0.5	0.3536
1	1
1.5	1.8371
2	2.8284

28 La courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous représente une fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 5]$.

a) Parmi les points suivants, quels sont ceux dont on peut affirmer qu'ils appartiennent à la courbe $\mathscr{C}$?
- O(0 ; 0)
- A(1 ; 1)
- B(2 ; 1,4)
- C(3 ; 1,7)
- D(4 ; 2)
- E(2,25 ; 1,5)

b) Sachant que f est définie par $f(x) = \sqrt{x}$, reprendre la question précédente par le calcul.

29 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$.
$\mathscr{C}$ est la courbe représentative de f dans le repère ci-contre. Pour chaque point, dire s'il appartient ou non à $\mathscr{C}$.
- A(0 ; 5)
- B(−2 ; −1,5)
- C(1 ; 0)
- D$\left(4\ ;\ \dfrac{15}{4}\right)$
- E(−5 ; −4,8)
- F(9 ; 9)

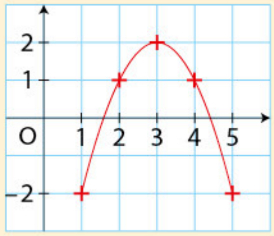


Résolution graphique de $f(x) = k$ ou $f(x) \leqslant k$

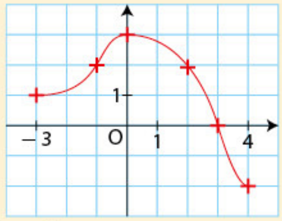
→ Cours 2. A et B

Questions flash

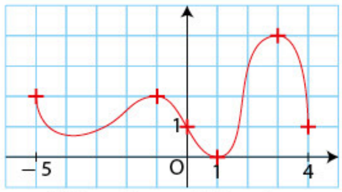
30 f est la fonction représentée dans le repère ci-contre.
Pour chaque nombre, dire s'il est solution de l'équation $f(x) = 1$.
a) 2 **b)** -2 **c)** 4



31 g est la fonction représentée dans le repère ci-contre.
Lily affirme : « L'ensemble des solutions de l'inéquation $g(x) \leqslant 2$ est $[-3\ ;-1]$. » A-t-elle raison ?

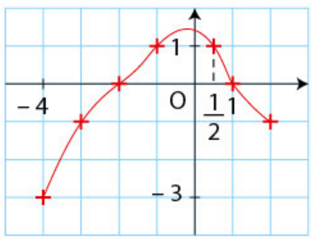


32 g est la fonction définie sur l'intervalle $[-5\ ;\ 4]$ par la courbe dans le repère ci-contre.

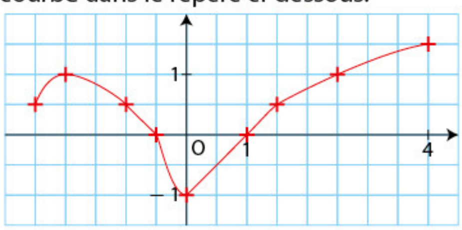


1. Résoudre graphiquement l'équation $g(x) = 4$.
2. Lire le nombre de solutions de chaque équation.
a) $g(x) = 1{,}5$ **b)** $g(x) = 2{,}3$

33 f est la fonction définie sur l'intervalle $[-4\ ;\ 2]$ par la courbe dans le repère ci-contre.
Résoudre graphiquement les inéquations :
a) $f(x) \geqslant 1$
b) $f(x) > 0$
c) $f(x) \geqslant -1$



34 g est la fonction définie sur l'intervalle $[-2{,}5\ ;\ 4]$ par la courbe dans le repère ci-dessous.



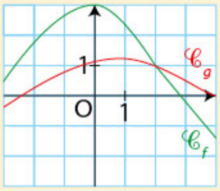
Résoudre graphiquement chaque inéquation.
a) $g(x) \geqslant 0{,}5$ **b)** $g(x) < 0$ **c)** $g(x) > 1$

Résolution graphique de $f(x) = g(x)$ ou $f(x) \leqslant g(x)$

→ Cours 2. A et B

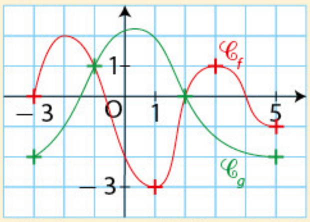
Questions flash

35 Les fonctions f et g sont définies sur l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$ par les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ dans le repère ci-contre.



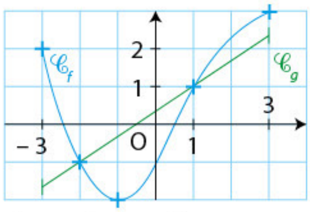
Jad affirme : « L'équation $f(x) = g(x)$ admet deux solutions. » A-t-il raison ?

36 Les fonctions f et g sont définies sur l'intervalle $[-3\ ;\ 5]$ par les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ dans le repère ci-contre. Parmi les ensembles suivants, lequel est l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) < g(x)$?



• $[-3\ ;-1[\cup]2\ ;\ 5]$ • $[-1\ ;\ 2]$ • $]-1\ ;\ 2[$

37 Dans un repère, $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont les courbes représentatives des fonctions f et g définies sur l'intervalle $[-3\ ;\ 3]$.



Résoudre graphiquement chaque inéquation.

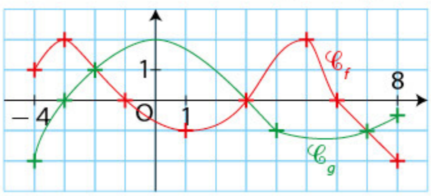
a) $f(x) \geqslant g(x)$ **b)** $f(x) > g(x)$ **c)** $f(x) \leqslant g(x)$

38 Dans un repère, $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont les courbes représentatives des fonctions f et g définies sur $[-4\ ;\ 8]$.

Déterminer graphiquement :

a) le signe de $f(x)$ puis de $g(x)$;

b) l'ensemble des solutions de $f(x) \geqslant g(x)$.



39 **a)** Construire dans un même repère les courbes d'équations $y = x^2$ et $y = \dfrac{1}{x}$ (avec $x \neq 0$).

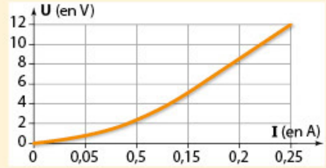
b) Résoudre graphiquement l'inéquation $x^2 \geqslant \dfrac{1}{x}$.

Modélisation d'une situation

→ Cours 2

Questions flash

40 Cette courbe définit une fonction qui, à l'intensité I du courant dans une LED, associe la tension U à ses bornes. Dans chaque cas, donner la réponse exacte.



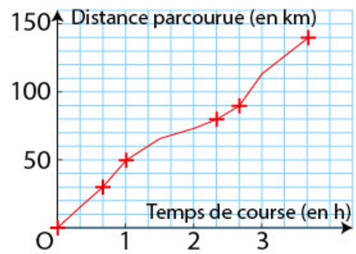
a) Graphiquement, la valeur de la tension lorsque l'intensité vaut 0,25 A est :

(1) 12 A **(2)** 5 V **(3)** 12 V

b) Graphiquement, la valeur de l'intensité à partir de laquelle la tension dépasse 5 V est environ :

(1) 1 A **(2)** 0,15 A **(3)** 0,15 V

41 Le compteur de vitesse d'un coureur du tour de France a produit le graphique ci-dessous.

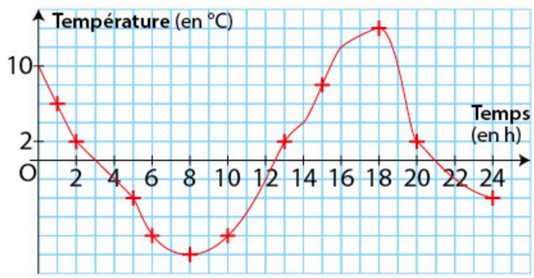


a) Lire graphiquement la distance totale parcourue et la durée de la course.

b) Déterminer la vitesse moyenne du cycliste durant la première heure.

c) Après combien d'heures de course le coureur a-t-il dépassé les 80 km parcourus ?

42 Dans le repère ci-dessous, la courbe représente la fonction f qui à un instant t, en heure, de l'intervalle $[0\ ;\ 24]$ associe la température T, en degré Celsius, en un lieu.



a) Résoudre graphiquement l'équation $f(t) = 2$. Interpréter la réponse pour cette situation.

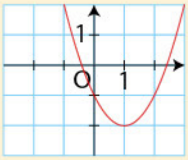
b) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(t) \geqslant -8$. Interpréter la réponse pour cette situation.

Fonction paire, fonction impaire

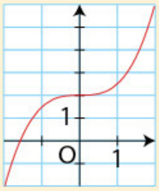
→ Cours 3

Questions Flash

43 Élisa affirme : « La fonction représentée par cette courbe est paire puisqu'elle admet un axe de symétrie. »
Que peut-on en penser ?

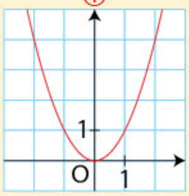


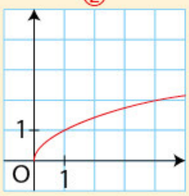
44 Ahmed affirme : « La fonction représentée par cette courbe est impaire puisqu'elle admet un centre de symétrie. »
Que peut-on en penser ?

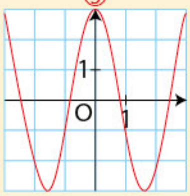


45 Laly affirme : « La fonction f n'est ni paire ni impaire puisqu'elle est définie sur $[-2\ ;\ 1]$. »
A-t-elle raison ?

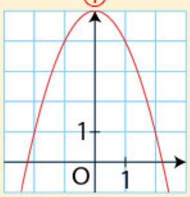
46 Parmi les trois courbes ci-dessous, donner celles qui semblent représenter une fonction paire.

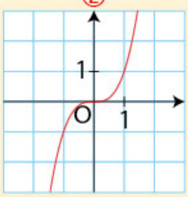
①


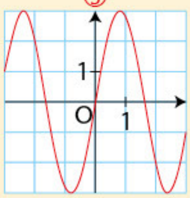
②


③


47 Parmi les trois courbes ci-dessous, donner celles qui semblent représenter une fonction impaire.

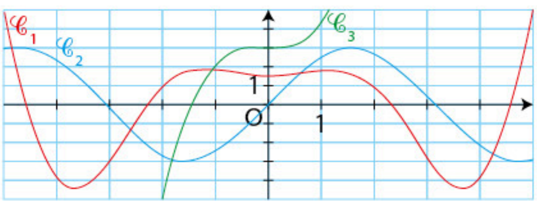
①


②


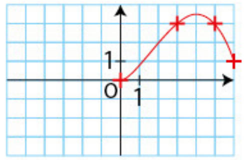
③


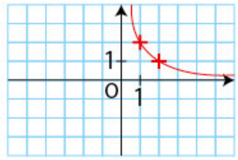
48 Indiquer, parmi les trois courbes représentées dans le repère ci-dessous, celle qui semble représenter une fonction :

a) paire ; **b)** impaire ; **c)** ni paire ni impaire.

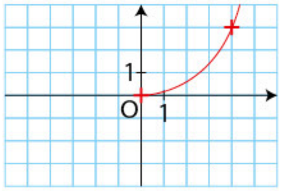


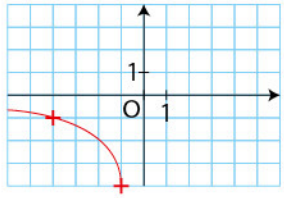
49 Dans chaque cas, tracer et compléter la courbe afin qu'elle représente une fonction paire.

a)


b)


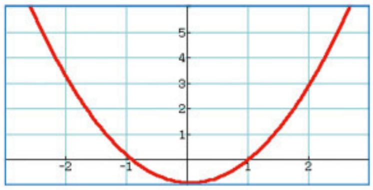
50 Dans chaque cas, tracer et compléter la courbe afin qu'elle représente une fonction impaire.





51 f est une fonction définie sur l'intervalle $[-4\ ;\ 4]$ telle que $f(2) = 3$ et $f(-2) = 4$.
Tristan affirme : « Cette fonction n'est ni paire ni impaire. » A-t-il raison ? Justifier.

52 Owen a affiché à l'écran de sa calculatrice la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 0{,}1x - 0{,}9$.
Il affirme : « Cette fonction f est paire. »
A-t-il raison ? Justifier.



53 Parmi les fonctions définies par leur expression ci-dessous, l'une est paire et une autre est impaire.

- $h(x) = \sqrt{x} - 1$ sur $[0\ ;+\infty[$
- $k(x) = \dfrac{1}{x^2}$ sur $\mathbb{R}^*$
- $f(x) = 3x + 2$ sur $\mathbb{R}$
- $g(u) = u^3 - 2u$ sur $\mathbb{R}$

Afficher leur courbe représentative à l'écran de la calculatrice afin de conjecturer lesquelles.
Le justifier ensuite.

54 Pour chaque fonction f définie par son expression, déterminer $f(-x)$ puis en déduire la parité de la fonction f.

a) $f(x) = 3x^2 - 10$ sur $\mathbb{R}$

b) $f(x) = x^3 - 2x + 7$ sur $\mathbb{R}$

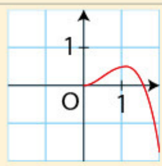
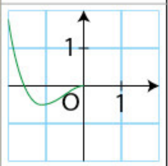
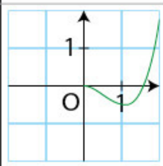
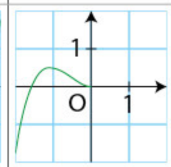
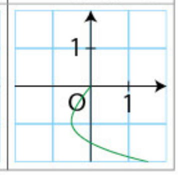
c) $f(x) = \dfrac{4}{x^3}$ sur $\mathbb{R}^*$

d) $f(x) = \dfrac{3}{x^2 - 4}$ sur $[-1\ ;\ 1]$

QCM interactifs

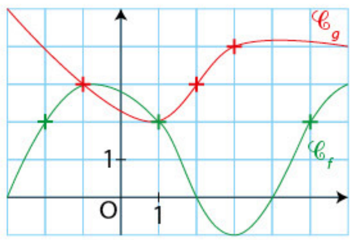
Pour se tester

55 Dans chaque cas, donner la réponse exacte sans justifier.

		A	B	C	D
1	f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + 3$. Un antécédent de 11 est …	-3	-2	-1	4
2	Dans un repère, l'ordonnée du point d'abscisse 1 de la courbe d'équation $y = x^3 + \frac{1}{x}$ (avec $x \neq 0$) est …	1	2	3	4
3	Dans un repère, l'abscisse d'un point d'ordonnée 5 de la courbe d'équation $y = -x^2 + 6$ est …	-19	2	1	0
4	g est une fonction impaire telle que $g(3) = -1$. Alors …	$g(-3) = 1$	$g(-3) = -1$	$g(0) = 3$	-3 n'a pas d'image par g
5	La courbe d'une fonction paire est incomplète. La partie manquante est … 				

56 Dans chaque cas, donner la (ou les) réponse(s) exacte(s) sans justifier.

Dans le repère ci-contre, $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont les courbes représentatives des fonctions f et g définies sur l'intervalle $[-3\ ;\ 6]$.



		A	B	C	D
1	Un antécédent de 3 par g est …	4	5	-1	2
2	Une solution de l'équation $f(x) = 2$ est …	-2	0	1	5
3	Les solutions de l'inéquation $f(x) \geqslant g(x)$ sont telles que …	$x \in [-3\ ;-2]$ ou $x \in [1\ ;\ 6]$	$x \in [2\ ;\ 4]$	$x \in [-1\ ;\ 1]$	$x \in [2\ ;\ 3]$

57 Dans chaque cas, dire si l'affirmation est vraie ou fausse en justifiant.

1 Dans un repère, $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2}(3x+1)^2$.
Affirmation : le point $M(50\ ;\ 11401)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}$.

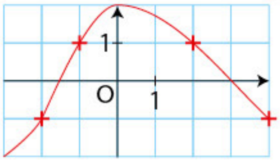
2 g est la fonction définie sur l'intervalle $[-4\ ;\ 4]$ par $g(x) = -x^3 + 3x$.
Affirmation : la fonction g est impaire.

3 h est une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
Affirmation : si $h(-2) = h(2)$, alors h est paire.

Vérifiez vos réponses : p. 346

58 Lire des informations sur une courbe

f est la fonction définie sur l'intervalle $[-1\ ;\ 2]$ par la courbe ci-dessous.



a) Lire l'image de 2 par la fonction *f*.

b) Déterminer les antécédents de -1 par *f*.

AIDE

a) On place 2 en abscisse et on lit l'ordonnée du point d'abscisse 2 de la courbe.

b) On place -1 en ordonnée et on lit l'abscisse des points d'ordonnée -1 de la courbe.

59 Utiliser une équation de courbe

Dans un repère, $\mathscr{C}$ est la courbe d'équation $y = x^2 + 1{,}5$.

a) Le point M(3 ; 10,5) appartient-il à la courbe $\mathscr{C}$?

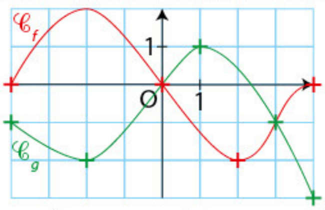
b) Déterminer les abscisses des points appartenant à la courbe $\mathscr{C}$ d'ordonnée 5,5.

AIDE

b) $x^2 = k$ (avec $k > 0$) équivaut à $x = \sqrt{k}$ ou $x = -\sqrt{k}$.

60 Résoudre graphiquement une équation ou une inéquation

f et *g* sont les fonctions dont les courbes représentatives sont données dans le repère ci-dessous.



a) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 0$.

b) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geqslant g(x)$.

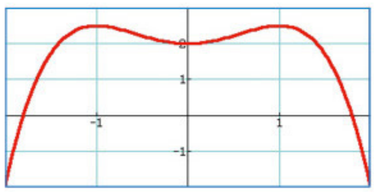
AIDE

a) Il faut lire les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et de la droite d'équation $y = 0$. Quelle est cette droite ?

b) Il faut lire sur l'axe des abscisses les intervalles sur lesquels $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$.

61 Déterminer la parité d'une fonction

On a affiché à l'écran de la calculatrice la courbe représentative de la fonction *f* définie sur $[-2\ ;\ 2]$ par $f(x) = -\dfrac{1}{2}x^4 + x^2 + 2$.



1. Quelle semble être la parité de la fonction *f* ?

2. a) L'intervalle $[-2\ ;\ 2]$ est-il symétrique par rapport à 0 ?

b) Pour tout x de l'intervalle $[-2\ ;\ 2]$, exprimer $f(-x)$ en fonction de x.

c) Pour tout x de l'intervalle $[-2\ ;\ 2]$, comparer $f(-x)$ et $f(x)$.

d) Que peut-on en déduire ?

AIDE

Pour déterminer $f(-x)$, on remplace x par $-x$ dans l'expression de *f*, sans oublier des parenthèses : il ne faut pas confondre $-x^2$ et $(-x)^2$.

EXERCICE RÉSOLU

62 Tracer un nuage de points

Le plan est muni d'un repère.
On considère l'algorithme ci-contre.

a) Construire un tableau de suivi des variables k, x et y lorsqu'on exécute cet algorithme pas à pas.
Arrondir au centième si besoin.

b) Placer les points obtenus dans le repère.

c) Préciser l'équation de la courbe à laquelle appartiennent les points placés.

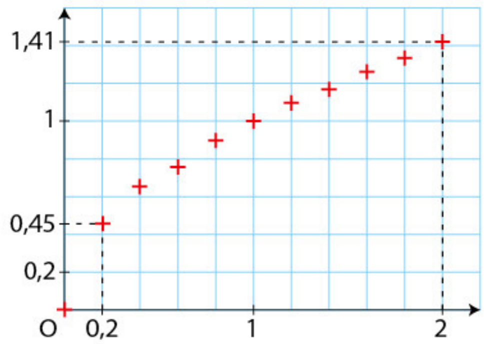
```
x ← 0
y ← 0
Pour k allant de 0 à 10
  | Placer le point de coordonnées (x ; y)
  | x ← x + 0,2
  | y ← √x
Fin Pour
```

Solution

a) Pour $k = 0$, on trace le point de coordonnées $(0\ ;\ 0)$, puis x prend la valeur 0,2 et y prend la valeur $\sqrt{0{,}2}$.
On poursuit ainsi la construction jusqu'à $k = 10$.
Voici les valeurs obtenues.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2
y	0	0,45	0,63	0,77	0,89	1	1,10	1,18	1,26	1,34	1,41

b) On obtient le nuage des 11 points $M(x\ ;\ y)$ dans le repère ci-contre.



c) Ces points appartiennent à la courbe d'équation $y = \sqrt{x}$ dans ce repère, c'est-à-dire à la courbe représentative de la fonction racine carrée.

À VOTRE TOUR

63 Le plan est muni d'un repère.
On considère l'algorithme ci-dessous.

```
x ← −2
y ← 4
Pour k allant de 0 à 20
  | Placer le point de coordonnées (x ; y)
  | x ← x + 0,2
  | y ← x²
Fin Pour
```

a) Construire un tableau de suivi des variables k, x et y lorsqu'on exécute cet algorithme pas à pas.

b) Placer les points obtenus dans le repère.

c) Préciser l'équation de la courbe à laquelle appartiennent les points placés.

64 Le plan est muni d'un repère.
On considère l'algorithme ci-dessous.

```
x ← −1
y ← −1
Pour k allant de 0 à 9
  | u ← x + 0,2
  | v ← u³
  | Tracer le segment qui relie les points
  | de coordonnées (x ; y) et (u ; v)
  | x ← u
  | y ← v
Fin Pour
```

a) Construire un tableau de suivi des variables k, u, v, x et y lorsqu'on exécute cet algorithme pas à pas.

b) Effectuer les tracés successifs dans le repère.

c) La figure tracée est-elle celle de la courbe d'équation $y = x^3$?

EXERCICE RÉSOLU

65 Résoudre une équation

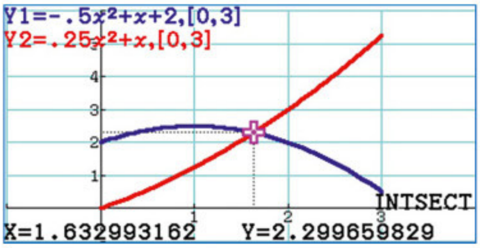
Les altitudes, en dizaines de mètres, de deux drones sont modélisées par les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0\ ;\ 3]$ par $f(t) = 0{,}25t^2 + t$ et $g(t) = -0{,}5t^2 + t + 2$, où t est exprimé en seconde.

a) Afficher à l'écran de la calculatrice les deux trajectoires puis, à l'aide de Calculs ou G-Solv, déterminer l'arrondi au dixième de seconde de l'instant t_0 où les deux drones ont la même altitude.

b) Déterminer algébriquement la valeur exacte de t_0.

Solution

a) Déterminer l'instant où les deux drones ont la même altitude revient à résoudre l'équation $f(t) = g(t)$. Avec la calculatrice, on lit une valeur approchée de l'instant t_0. Son arrondi au dixième est $t_0 \approx 1{,}6$ s.



b) Algébriquement, $f(t) = g(t)$ équivaut à :

$$0{,}25t^2 + t = -0{,}5t^2 + t + 2$$

c'est-à-dire $0{,}75t^2 = 2$,

soit $t^2 = \dfrac{8}{3}$.

Ainsi cette équation admet deux solutions : $-\sqrt{\dfrac{8}{3}}$ et $\sqrt{\dfrac{8}{3}}$.

L'intervalle de définition étant $[0\ ;\ 3]$, la valeur exacte de t_0 est $\sqrt{\dfrac{8}{3}}$ s.

À VOTRE TOUR

66 f et g sont les fonctions définies sur l'intervalle $[1\ ;\ 3]$ par :

$$f(x) = x^2 \text{ et } g(x) = 2x$$

a) Afficher à l'écran de la calculatrice les courbes représentatives des fonctions f et g puis déterminer la solution de l'équation :

$$f(x) = g(x)$$

b) Retrouver algébriquement cette solution.

67 f est la fonction définie sur l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$ par :

$$f(x) = 27x^3$$

a) Tracer à l'écran de la calculatrice la courbe représentative de la fonction f et la droite d'équation $y = 1$ puis déterminer l'arrondi au centième de la solution de l'équation $f(x) = 1$.

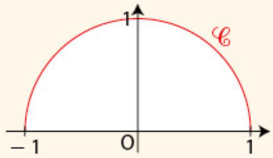
b) Déterminer algébriquement la valeur exacte de cette solution.

Démontrer et raisonner

68 Déterminer une équation d'une courbe

Méthode
Pour déterminer l'équation d'une courbe dans un repère, on cherche une relation liant les coordonnées x et y d'un point M appartenant à cette courbe, puis on exprime y en fonction de x.

Dans un repère orthonormé d'origine O, $\mathscr{C}$ est le demi-cercle de centre O et de rayon 1.



a) M$(x\ ;\ y)$ est un point de $\mathscr{C}$.
Exprimer la distance OM en fonction de x et y.
b) En déduire que M$(x\ ;\ y)$ appartient à $\mathscr{C}$ si, et seulement si, $x^2 + y^2 = 1$, puis l'équation de $\mathscr{C}$.

69 Reconnaître des axes de symétrie

Méthode
Dans un repère orthogonal, les coordonnées du symétrique d'un point M$(x\ ;\ y)$ par rapport :
- à l'axe des abscisses sont $(x\ ;-y)$;
- à l'axe des ordonnées sont $(-x\ ;\ y)$;
- à l'origine du repère sont $(-x\ ;-y)$.

Dans un repère, $\mathscr{C}$ est la courbe d'équation $|x|+|y| = 1$.
a) Dans le cas où $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$, exprimer y en fonction de x.
b) Démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ est symétrique par rapport à l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et l'origine du repère. Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

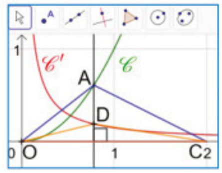
70 Utiliser une symétrie axiale

Dans un repère, $\mathscr{C}$ est la courbe d'équation $y = x^3 - x^2 + 4$. On se propose de déterminer l'équation de la courbe $\mathscr{C}'$ symétrique de $\mathscr{C}$ par rapport à l'axe des ordonnées.
a) M$(x\ ;\ y)$ est un point de $\mathscr{C}'$.
Donner les coordonnées de son symétrique N par rapport à l'axe des ordonnées en fonction de x et y.
b) En traduisant l'appartenance du point N à $\mathscr{C}$, exprimer y en fonction de x.
c) En déduire une équation de la courbe $\mathscr{C}'$.
d) Vérifier la symétrie en traçant les deux courbes à l'écran de la calculatrice.

Utiliser une équation de courbe

71 Dans un repère, $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont les courbes d'équations respectives $y = \dfrac{4x}{4x^2+1}$ et $y = 4x^2$.
a) Vérifier que le point M(0,5 ; 1) est un point d'intersection des courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.
b) On admet que les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ ne se coupent qu'en deux points.
Déterminer l'autre point d'intersection.

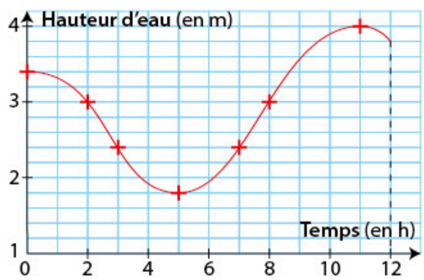
72 Tice **1. a)** Tracer à l'aide d'un logiciel de géométrie les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ d'équations respectives $y = x^2$ et $y = \dfrac{4}{27x}$ (avec $x > 0$).



b) Créer un point A sur $\mathscr{C}$ d'abscisse x de l'intervalle $]0\ ;\ 2]$.
c) Créer la perpendiculaire à l'axe des abscisses passant par A. Celle-ci coupe $\mathscr{C}'$ en D.
d) Créer les points O(0 ; 0) et C(2 ; 0) puis créer les triangles AOC et DOC.
e) Déplacer le point A et conjecturer une valeur de x pour laquelle l'aire du triangle AOC est le double de celle du triangle DOC.
2. a) Exprimer les coordonnées des points A et D en fonction de x.
b) En déduire l'aire des triangles AOC et DOC en fonction de x puis démontrer la conjecture.

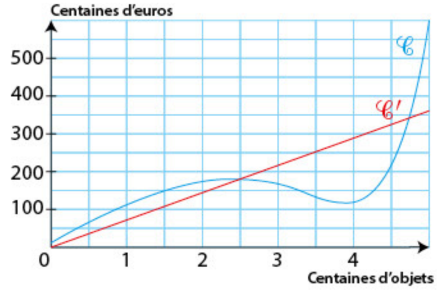
Résoudre graphiquement

73 h est la fonction qui, à chaque instant entre 0 h et 12 h, associe la hauteur d'eau, en mètre, dans un port de plaisance. Voici la courbe représentative de la fonction h dans un repère.



a) Résoudre graphiquement l'équation $h(x) = 2{,}4$.
b) Le voilier de Nolwenn ne peut sortir du port que si la hauteur d'eau dépasse 3 m.
Quand Nolwenn peut-elle sortir son voilier ?

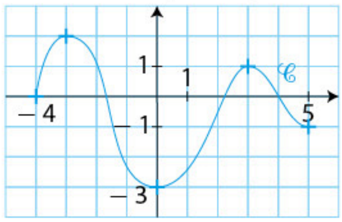
74 Une entreprise fabrique chaque jour des objets. Dans ce repère ci-dessous, on a modélisé la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction coût total de production C et celle $\mathscr{C}'$ de la fonction recette R.



a) Combien l'entreprise doit-elle vendre pour réaliser un bénéfice positif ? *Utiliser le graphique.*

b) Que penser de l'affirmation : « Il est préférable pour l'entreprise de fabriquer 400 objets plutôt que 450 objets » ?

75 Dans un repère, $\mathscr{C}$ est la courbe représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-4 ; 5]$.



1. Indiquer le nombre de solutions de chacune des équations suivantes :

a) $f(x) = 3$

b) $f(x) = 1$

c) $f(x) = -3$

2. Préciser les valeurs du nombre réel m pour lesquelles l'équation $f(x) = m$ possède :

a) aucune solution ; **b)** 1 solution ; **c)** 2 solutions ; **d)** 3 solutions ; **e)** 4 solutions.

Choisir la méthode la plus adaptée

76 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{15}{x}$.

g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 9x - 6$.

On se propose de résoudre l'équation $f(x) = g(x)$.

a) Graphiquement

Afficher à l'écran de la calculatrice les courbes représentatives des fonctions f et g et donner l'arrondi au centième de la ou des solutions de l'équation.

b) Algébriquement

Utiliser cet écran pour résoudre l'équation $f(x) = g(x)$.

1	Factoriser$(9x^2 - 6x - 15)$
	→ $\mathbf{3\,(x+1)\,(3\,x-5)}$

c) Quelle méthode semble être la plus adaptée ?

77 Algo Tice f et g sont les fonctions définies sur l'intervalle $[0{,}5 ; 1]$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et $g(x) = x^2 + 1$.

On se propose de résoudre l'inéquation $f(x) \leqslant g(x)$.

1. Graphiquement

a) Avec un logiciel de géométrie, représenter les courbes des fonctions f et g.

b) À l'aide de la commande intersection, donner une estimation de l'ensemble des solutions de l'inéquation.

2. À l'aide d'un algorithme

$x \leftarrow 0{,}5$
Tant que $f(x) > g(x)$
  $x \leftarrow x + 0{,}001$
Fin Tant que
Afficher x

a) Que représente la valeur de la variable x obtenue à la fin de cet algorithme ?

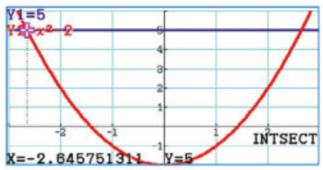
b) Coder cet algorithme en langage Python et le modifier de façon à pouvoir choisir le pas.

c) Le saisir et l'exécuter afin d'obtenir une réponse plus précise qu'à la question **1.b)**.

78 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2$.

Voici les ébauches de travaux réalisés par trois élèves afin de résoudre l'équation $f(x) = 5$.

Oriane



Ali

X	Y1
2.64	4.9696
2.641	4.9749
2.642	4.9802
2.643	4.9854
2.644	4.9907
2.645	4.996
2.646	5.0013
2.647	5.0066
2.648	5.0119
2.649	5.0172
2.65	5.0225

Gabriel

Résoudre $f(x) = 5$ équivaut à résoudre $x^2 = 7$

Ranger ces démarches suivant la précision donnée à l'ensemble des solutions de l'équation et terminer celle qui donnera des valeurs exactes.

79 Tice **1. a)** Avec un logiciel de géométrie, créer la courbe d'équation $y = x^2$.

b) Créer un point M d'abscisse positive de la courbe et son projeté orthogonal P sur l'axe des abscisses.

c) En déplaçant le point M, déterminer une valeur approchée de son abscisse telle que l'aire du triangle MOP soit égale à 5.

2. Expliquer pourquoi l'écran de calcul formel ci-dessous permet de donner une réponse plus précise.

1	Numérique(Résoudre(x^3=10), 10)
	→ $\mathbf{\{x = 2.15443469\}}$

Étudier la parité d'une fonction

80 f est une fonction paire telle que $f(3) = 1$ et telle que l'équation $f(x) = 4$ admet 1 et 4 pour solutions dans l'intervalle $[0\,;+\infty[$. Donner :

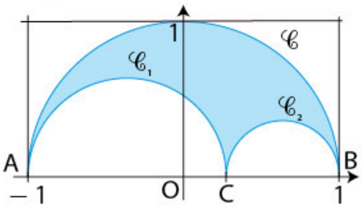
a) l'image de -3 par f ;

b) les solutions de l'équation $f(x) = 4$ dans $\mathbb{R}$.

81 Tice Dans un repère orthonormé d'origine O, A et B sont les points de coordonnées $(-1\,;\,0)$ et $(1\,;\,0)$. C est un point du segment [AB], on note x son abscisse. $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sont les demi-cercles de diamètres respectifs [AB], [AC] et [CB]. On note $\mathscr{A}(x)$ l'aire de la zone colorée appelée **arbelos**.

1. Observer

En observant la figure, déterminer la parité de la fonction $\mathscr{A}$.



2. Tester

a) Avec un logiciel de géométrie, créer les points O, A, B et C. Créer le milieu des segments [AC] et [CB].

b) Avec la commande, créer les trois secteurs circulaires formés par les demi-cercles $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ et les renommer respectivement D, D1 et D2.

c) Exprimer l'aire de l'arbelos en fonction de D, D1 et D2.

d) On note F le point d'abscisse x qui a pour ordonnée l'aire de l'arbelos.

Créer le point F, afficher sa trace et animer le point C.

e) La courbe décrite par le point F semble-t-elle en accord avec l'observation faite à la question 1 ?

3. Démontrer

a) Calculer l'aire du demi-disque formé par le demi-cercle $\mathscr{C}$.

b) Exprimer en fonction de x l'aire de chacun des demi-disques formés par les demi-cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.

c) En déduire que, pour tout nombre x de $[-1\,;\,1]$:

$$\mathscr{A}(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}(x^2 + 1)$$

d) Démontrer alors que la fonction $\mathscr{A}$ est paire.

82 Dans un repère, tracer la courbe représentative d'une fonction paire f définie sur l'intervalle $[-4\,;\,4]$ vérifiant les conditions données ci-dessous.

- L'image de -1 par f est 4.
- 0 et 2 sont solutions de l'équation $f(x) = 3$.
- L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \leqslant 0$ est $[-4\,;-3] \cup [3\,;\,4]$.

83 L'affirmation suivante est-elle vraie ?

« La courbe représentative d'une fonction impaire passe toujours par l'origine du repère. »

84 Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse. Justifier.

a) f est une fonction paire (resp. impaire).

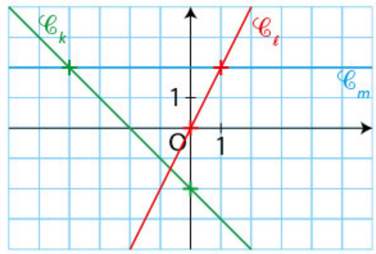
On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

La symétrique par rapport à l'axe des ordonnées ou des abscisses de $\mathscr{C}$ est une courbe représentant une fonction paire (resp. impaire).

b) f est une fonction paire. Le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1$ est pair.

c) f est une fonction impaire. Le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1$ est impair.

85 **1.** Déterminer la parité des fonctions affines k, ℓ et m dont les droites sont tracées dans le repère ci-contre.



2. $f : x \mapsto ax + b$ est une fonction affine où a et b désignent deux nombres réels.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que f soit :

a) paire ;

b) impaire ;

c) ni paire ni impaire.

S'entraîner à la logique → p. XXI

86 **Implication et réciproque**

Les affirmations suivantes sont vraies.

Qu'en est-il de leurs réciproques ?

a) Si f est une fonction paire définie sur $\mathbb{R}$, alors $f(1) = f(-1)$.

b) f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

Si f est à la fois paire et impaire, alors f est affine.

87 **Négation d'une proposition**

f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

Écrire la négation de chacune des propositions suivantes :

P : « f est paire ».

Q : « 2 admet au moins un antécédent par f ».

88 Retrouver une courbe

Problème ouvert

Représenter **Communiquer**

À partir de la courbe représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 8]$, Apolline a écrit ci-dessous l'ensemble des solutions de certaines inéquations.

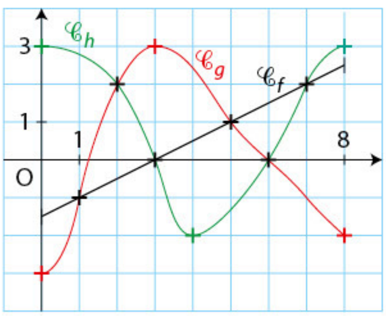
• $f(x) \geqslant 1$	$\mathcal{S} = [0\ ;\ 8]$
• $f(x) > 1$	$\mathcal{S} =]0\ ;\ 8[$
• $f(x) \geqslant 2$	$\mathcal{S} = [3\ ;\ 6]$
• $f(x) \geqslant 3$	$\mathcal{S} = [3{,}5\ ;\ 5]$
• $f(x) \geqslant 4$	$\mathcal{S} = \{4\}$

Dans un repère, tracer une courbe susceptible de représenter la fonction f.

89 Solve a system of inequations

Raisonner **Calculer**

In this coordinate system, $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ and $\mathscr{C}_h$ are graphs of the functions f, g and h for the interval $[0\ ;\ 8]$.



In each case, find the solution set with a graphic reading.

a) $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$

b) $h(x) \leqslant g(x) \leqslant f(x)$

c) $f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$

90 Prendre des initiatives

Chercher **Raisonner**

Dans un repère orthogonal $(\mathrm{O}\ ;\ \mathrm{I},\ \mathrm{J})$, M un point de la demi-droite $[\mathrm{OI})$.

Sur la perpendiculaire à (OI) passant par I, on place le point N d'ordonnée positive tel que $\mathrm{IN} = \mathrm{OM}$.

P est le point de la demi-droite $[\mathrm{ON})$ tel que (MP) soit perpendiculaire à (OI).

À quelle courbe appartient le point P ?

91 Construire point par point

Narration de recherche

Modéliser **Raisonner**

Rédiger les différentes étapes de la recherche, sans omettre les fausses pistes et les changements de méthode.

Problème x désigne un nombre réel positif.
Dans un repère orthonormé d'origine O, on considère les points $\mathrm{M}(x\ ;\ 0)$ et $\mathrm{C}(x+1\ ;\ 0)$. La perpendiculaire à l'axe des abscisses passant par M coupe le demi-cercle supérieur de diamètre $[\mathrm{OC}]$ en N.
À quelle courbe appartient le point N ?

92 Tice Imaginer une stratégie

Modéliser **Raisonner** **Communiquer**

Une ville de France tente d'inciter ses habitants à rouler en voiture électrique.

Estimer l'année à partir de laquelle le nombre de véhicules électriques sera supérieur au nombre des véhicules thermiques.

	2012	2014	2016	2018
Rang	0	2	4	6
Véhicules électriques	3	10	56	340
Véhicules thermiques	3 784	3 641	3 450	3 164

93 Algo Utiliser un algorithme

Raisonner **Calculer**

1. Afficher à l'écran de la calculatrice la courbe de la fonction $f : x \mapsto x^2 + 3x - 1$.
(*fenêtre* : $0 \leqslant \mathrm{X} \leqslant 1$, pas 1 et $-1 \leqslant \mathrm{Y} \leqslant 5$, pas 1)

2. On se propose de déterminer une valeur approchée de la solution x_0 de l'équation $f(x) = 0$ sur $[0\ ;\ 1]$.

a) Utiliser cet algorithme pour compléter ce tableau.

k	m	a	b
		0	1
1	0,5	0	0,5
2			
3			
…			
10			

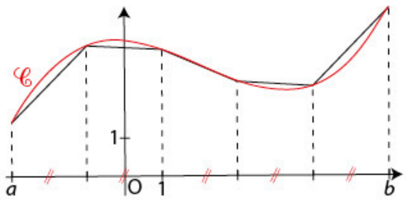
$a \leftarrow 0$
$b \leftarrow 1$
Pour k allant de 1 à 10
  $m \leftarrow \dfrac{a+b}{2}$
  Si $f(m) \times f(a) \geqslant 0$ alors
    $a \leftarrow m$
  sinon
    $b \leftarrow m$
  Fin Si
Fin Pour

b) Quel est le rôle de cet algorithme ? Interpréter les valeurs de a et b obtenues à la fin de l'algorithme.
En déduire une valeur approchée de x_0.

94 Algo Approcher la longueur d'une courbe

Chercher | Représenter | Calculer

On se propose d'approcher la longueur d'une portion de courbe à l'aide d'un algorithme.



f étant une fonction définie sur un intervalle $[a\ ;\ b]$, la méthode consiste à approcher sa courbe représentative dans un repère orthonormé par des segments dont les extrémités sont des points de la courbe et de sommer leurs longueurs. Les points de la courbe choisis ont leurs abscisses équiréparties sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$.

Ainsi plus le nombre de divisions de l'intervalle $[a\ ;\ b]$ sera grand, plus l'approximation sera précise.

1. Calculer la longueur d'un segment

Dans un repère orthonormé, $\mathrm{A}(x_\mathrm{A}\ ;\ y_\mathrm{A})$ et $\mathrm{B}(x_\mathrm{B}\ ;\ y_\mathrm{B})$ sont deux points.

a) Exprimer la distance AB en fonction des coordonnées de A et B.

b) Compléter ce programme en langage Python de la fonction `Distance` qui a pour paramètres les coordonnées des points A et B et qui renvoie la distance AB.

```
from math import *

def Distance(xA,yA,xB,yB):
    d=[      ]
    return d
```

2. Diviser l'intervalle

On subdivise l'intervalle $[a\ ;\ b]$ en N intervalles de même amplitude.

a) Exprimer l'amplitude de chaque intervalle en fonction de a, b et N.

b) Si u est l'abscisse d'un des points choisis de la courbe, quelle est l'abscisse du point suivant ?

3. Sommer puis tester

On se propose d'approcher la longueur d'une portion de parabole représentant la fonction carré.

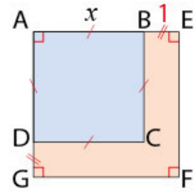
a) Compléter la fonction `Longueur` suivante écrite en langage Python qui renvoie la somme des longueurs des segments ainsi formés.

```
def Longueur(a,b,N):
    S=0
    u=a
    for i in range(0,N):
        v=[      ]
        S=S+Distance([ ],[   ],[ ],[   ])
        u=v
    return S
```

b) Saisir ces fonctions l'une à la suite de l'autre et les tester en approchant la longueur de la parabole représentant la fonction carré sur l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$.

95 Tice Utiliser le calcul formel

Chercher | Raisonner



ABCD est un carré de côté x (avec $x \geqslant 0$).

AEFG est le carré obtenu en augmentant de 1 chaque côté de ABCD.

On note $\mathscr{A}(x)$ et $\mathscr{B}(x)$ les aires respectives du carré ABCD et du polygone BCDGFE.

a) Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, $\mathscr{B}(x) = 2x + 1$.

b) À l'écran de la calculatrice, afficher les courbes représentatives des fonctions $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$.

c) Déduire de la question **b)** et de cet écran de calcul formel les solutions de l'inéquation $\mathscr{A}(x) \geqslant \mathscr{B}(x)$.

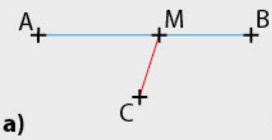
1	Résoudre(x²=2x+1,x)
	$\rightarrow \left\{x = -\sqrt{2}+1, x = \sqrt{2}+1\right\}$

Des Défis

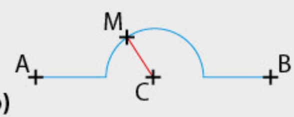
96 Imaginer une courbe

Sur chaque figure, A, B, C sont des points donnés et un point M se déplace sur un chemin allant de A à B. On définit x comme la longueur de la partie de chemin de A à M et $f(x)$ comme la distance CM.

Dans chaque cas, construire l'allure de la courbe représentative de f dans un repère.



a)



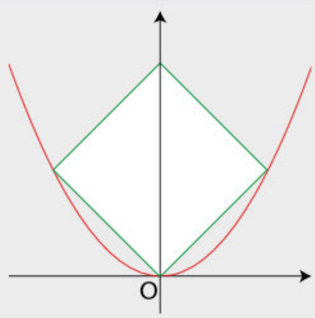
b)

(d'après APMEP)

97 Un carré dans une parabole

k est un nombre réel strictement positif et f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = kx^2$.

On inscrit un carré, symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, dans la parabole représentant la fonction f comme ci-contre.



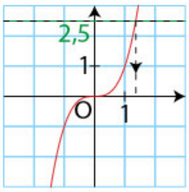
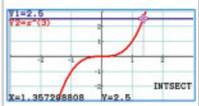
Déterminer le périmètre de ce carré.

(d'après Olympiades)

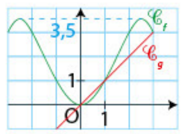
QCM Bilan

QCM interactifs

98 **Dans chaque cas, donner la réponse exacte en justifiant.**

		A	B	C	D
1	Dans un repère, le point de coordonnées $(1\,;\,7)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}$ d'équation …	$y=2x+7$	$y=\dfrac{7}{x-1}$	$y=\sqrt{x+7}$	$y=7x^2$
2	Une fonction dont la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées d'un repère est …	$x\mapsto \dfrac{1}{x}$	$x\mapsto\sqrt{x+2}$	$x\mapsto x-3$	$x\mapsto x^4-x^2$
3	Si g est une fonction paire et f une fonction impaire, alors la fonction …	$f-g$ est paire	$-f$ est impaire	$f+g$ est paire	$f\times g$ est paire
4	La valeur de x affichée en sortie est … $x \leftarrow 0$ Tant que $x^2+1>x^3$ $\quad x\leftarrow x+0{,}01$ Fin Tant que Afficher x	1,5	1,46	1,47	1
5	h est une fonction paire telle que l'équation $h(x)=3$ admet deux solutions : 4 et …	-3	-4	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{1}{4}$
6	Une méthode qui ne permet pas de donner l'arrondi au millième de la solution de l'équation $x^3=2{,}5$ est …		X / Y1 1.3568 / 2.4977 1.3569 / 2.4983 1.357 / 2.4988 1.3571 / 2.4994 1.3572 / 2.5 1.3573 / 2.5005		Numérique(Résoudre(x^3=2.5,x),10) → {x = 1.357208808}

Pour les questions **7** à **10**, on donne les courbes représentatives d'une fonction f et d'une fonction g définies sur l'intervalle $[-3\,;\,3]$ dans un repère.



		A	B	C	D
7	L'équation $f(x)=m$ admet quatre solutions lorsque m appartient à …	$[-3\,;-2]\cup[2\,;\,3]$	$]0\,;\,3[$	$[3\,;\,3{,}5[$	$[3{,}5\,;+\infty[$
8	L'équation $f(x)=g(x)-1$ …	n'a pas de solution	a une solution	a deux solutions	a trois solutions
9	Pour tout nombre x de l'intervalle $[1\,;\,3]$, $f(x)-g(x)$ est …	positif	négatif	nul	égal à $f(-x)+g(-x)$
10	La courbe obtenue par symétrie de $\mathscr{C}_f$ par rapport à $\mathscr{C}_g$ …	représente une fonction paire	représente une fonction impaire	ne représente pas une fonction	est celle de la fonction $f-g$

Vérifiez vos réponses p. 346 pour avoir votre note (considérez 1 point par réponse juste).

Exploiter ses compétences

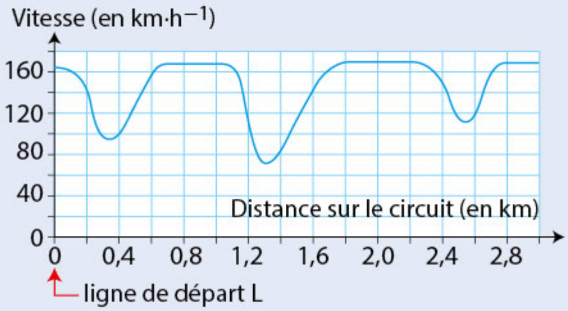
99 Analyser une courbe

La situation problème

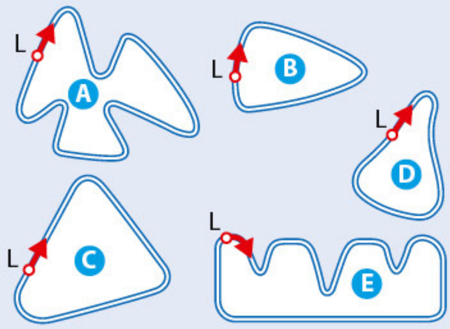
Un championnat d'autocross se déroule sur cinq circuits différents.
L'une de ces courses vient de se dérouler sur un circuit en terre entre 10 voitures.
Les capteurs de la voiture du vainqueur ont permis d'enregistrer sa vitesse à chaque tour de circuit.
Utiliser les différentes informations pour indiquer la longueur du circuit et reconnaître le circuit sur lequel s'est déroulée cette course.

(*d'après Évaluation PISA*)

DOC 1 Enregistrement de la vitesse de la voiture du vainqueur lors du 2e tour



DOC 2 Les 5 circuits du championnat



100 Tice Modéliser pour prévoir

La situation problème

Les effectifs d'une grande université sont en pleine progression.
Le président de l'université est inquiet parce qu'il sait que, malgré une gestion optimale des locaux et une répartition des étudiants sur les divers sites de son université, il ne pourra pas accueillir plus de 35 000 étudiants.
Utiliser les informations données pour aider ce président à estimer l'année où il ne pourra plus accueillir tous les étudiants.

DOC 1 Graphique et tableur

Avec le tableur, on peut représenter graphiquement une série de données par un nuage de points.
Par un clic droit sur l'un de ces points, on peut *insérer une courbe de tendance* et afficher son équation.

DOC 2 Évolution des effectifs

Année	Effectif en septembre
2013	27 500
2014	28 440
2015	29 020
2016	30 200
2017	31 000
2018	31 500

101 Tice Dessiner des allures de courbes

La situation problème

Les courbes d'une voiture sont réalisées à partir de fonctions qui permettent d'allier esthétisme et aérodynamisme. Un designer désire trouver la fonction représentant la courbure générale de cette Ferrari.

Utiliser les différentes informations pour aider ce designer.

DOC 1 Logiciel GeoGebra

- La commande AjustPoly() permet de déterminer l'expression d'une fonction composée de puissances de x dont la courbe passe à proximité de points définis à l'avance.
- Le bouton permet d'effectuer la symétrie centrale d'un objet par rapport à un point.

DOC 2 Contraintes

La fonction modélisant la courbure doit vérifier :

- f est définie sur l'intervalle $[-8 ; 8]$;
- l'image par f de 2 est égale à -1 ;
- 0 et 8 sont solutions de l'équation $f(x) = 0$;
- f est impaire ;
- pout tout x de l'intervalle $[-8 ; 8]$, $-1 \leqslant f(x) \leqslant 1$.

102 Algo Prévoir les effets d'un plan

La situation problème

La COP21, conférence sur les changements climatiques des Nations Unies, a adopté le 12 décembre 2015 le premier accord universel sur le climat, appelé accord de Paris et signé par 195 pays.

Suite à cet accord, une zone industrielle a décidé de mettre en place un plan qui lui permettra de réduire de moitié au moins les émissions des gaz à effet de serre (GES) des entreprises installées sur ce site.

Utiliser les différentes informations pour aider ces entreprises à connaître l'année à partir de laquelle elles auront atteint leur objectif.

On peut utiliser le tableur ou le langage Python.

DOC 1 Les mesures du plan

- En 2016, cette zone industrielle a émis 40 milliers de tonnes de CO_2 au total.
- Pour les entreprises déjà installées, les mesures de ce plan conduisent à une réduction des émissions de 2 % d'une année sur l'autre.
- Chaque année, les émissions de nouvelles entreprises sur le site génèrent 0,2 millier de tonnes de CO_2.

DOC 2 Un algorithme

```
u ← 40
n ← 0
Tant que u > 20
    u ← 0,98 × u + 0,2
    n ← n + 1
Fin Tant que
```