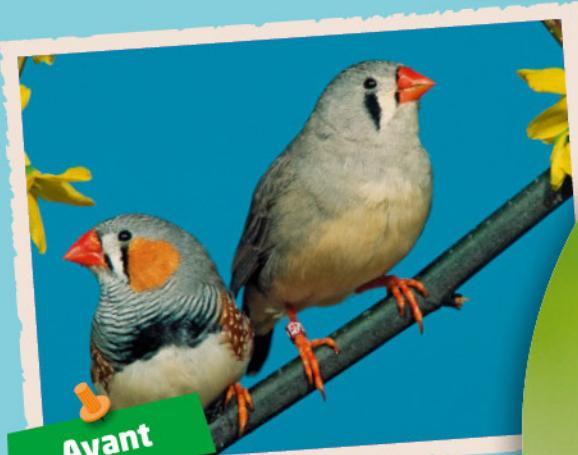


14

Échantillonnage



Avant

► En écologie, on utilise depuis plusieurs décennies la technique de l'échantillonnage pour déterminer s'il existe des différences morphologiques notables entre mâles et femelles d'une même espèce.



À présent

► Le *Varroa destructor* est un acarien parasite de l'abeille qui est en partie responsable de l'importante diminution du nombre d'abeilles depuis les années 2000. Pour détecter sa présence au sein d'une ruche et commencer le traitement, l'apiculteur doit récolter un échantillon de 300 abeilles, sur au moins 10 % de ses ruches.

Les capacités travaillées dans ce chapitre

- Connaître et comprendre la notion d'échantillonnage.
- Connaître le principe de l'estimation d'une probabilité ou d'une proportion dans une population par une fréquence observée dans un échantillon.
- Lire et comprendre une fonction en langage Python renvoyant le nombre ou la fréquence de succès dans un échantillon de taille n pour une expérience aléatoire à deux issues.
- Observer la loi des grands nombres à l'aide d'une simulation sur Python ou tableur.

Exercices

5, 6, 8 à 16

2, 4, 21 à 34

1, 3, 7, 17 à 20

41 à 46

1

Observer des fluctuations

Une célèbre marque de confiserie produit des bonbons avec deux parfums différents, citron vert et orange, en quantités égales. Les bonbons sont ensuite placés aléatoirement, par une machine, dans des boîtes de 100.

On a relevé le nombre n de bonbons à l'orange dans 40 boîtes.

Boîte	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n	56	50	57	47	54	46	53	50	53	52

Boîte	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
n	49	46	46	51	50	47	43	59	49	48

Boîte	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
n	54	56	47	40	49	47	42	53	53	58

Boîte	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
n	52	60	43	50	51	58	46	56	59	49

- a) Le nombre de bonbons à l'orange est-il le même dans toutes les boîtes ?
 - b) Dans combien de boîtes a-t-on trouvé le même nombre de bonbons de chaque parfum ?
 - c) Quelles sont les proportions minimum et maximum, en pourcentage, de bonbons à l'orange pour ces 40 boîtes ?
- Arrondir au centième.
- d) Calculer l'écart maximum entre la proportion de bonbons à l'orange dans une boîte et 50 %.



2

Estimer des probabilités

Marion a acheté un lot de dés sphériques.

Ces dés sont tous identiques, hormis la couleur.

Un tel dé est conçu de sorte que, quand on le lance, il se stabilise avec un numéro de 1 à 6 sur le dessus.

Marion se demande si ces dés sont vraiment équilibrés.

- a) Elle lance 200 fois l'un de ces dés et obtient 34 fois le nombre 1.

Quelle est la fréquence d'obtention du 1 dans ces lancers ?

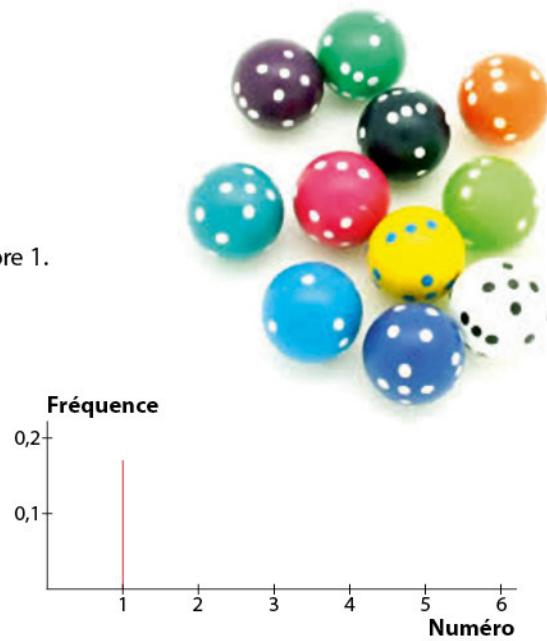
- b) Le tableau ci-dessous indique l'effectif d'obtention de chaque numéro, de 1 à 6, parmi les 200 lancers.

Numéro	1	2	3	4	5	6
Effectif	34	32	30	34	35	35

Calculer la fréquence d'obtention de chaque nombre dans cet échantillon.

- c) Représenter ces données par un diagramme en bâtons, tel que celui commencé ci-contre.

- d) Peut-on penser que ce dé est bien équilibré ?



1 Échantillonnage

A Présentation

L'échantillonnage est un domaine assez récent des mathématiques, à la croisée des statistiques et des probabilités. Ce domaine intervient dans les situations où l'on veut étudier certaines propriétés d'une **population** de trop grand effectif pour être observée de façon exhaustive.

On prélève alors un **échantillon** de cette population, échantillon à partir duquel on souhaite obtenir des informations sur la population totale avec un certain degré de précision.

Un exemple omniprésent dans les médias est la réalisation de sondages d'opinion.

B Notion d'échantillon

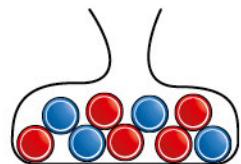
On s'intéresse à une expérience aléatoire à deux issues que l'on peut considérer comme succès et échec. En répétant cette expérience de façon indépendante, on constitue un **échantillon aléatoire**.

Définition

Un **échantillon aléatoire** de taille n est constitué des résultats de n répétitions indépendantes de la même expérience aléatoire.

Exemple

- Un sac opaque contient des jetons bleus ou rouges. On tire au hasard un jeton du sac, on note sa couleur, puis on le replace dans le sac.
- En répétant ce procédé, on constitue un échantillon de jetons du sac.
- Dans ce cas, la taille de l'échantillon peut être supérieure au nombre de jetons dans le sac.



Exemple

- Quelques jours avant un référendum, on interroge 1 000 personnes sur leurs intentions de vote.
- Ces personnes sont choisies au hasard dans un annuaire et une même personne ne peut pas être interrogée plusieurs fois. Cependant, si le sondage concerne **une population de grande taille**, on **admet** que l'on peut assimiler ce procédé à la répétition de 1 000 tirages avec remise.

C Fluctuation d'échantillonnage

Dans une population, on s'intéresse à l'apparition d'un certain caractère. On note p la **proportion** d'individus présentant ce caractère dans la population totale.

On prélève un échantillon dans la population et on note f la **fréquence** d'apparition du caractère observé dans cet échantillon.

En étudiant plusieurs échantillons prélevés dans la même population, on constate que la fréquence observée **fluctue** autour de la proportion p . Ce phénomène, dû au hasard dans la constitution des échantillons, est appelé **fluctuation d'échantillonnage**.

Exemple

- Dans un lycée, il y a 63 % de filles.
- Dans 10 échantillons de taille 50 des élèves de ce lycée, les fréquences observées de filles fluctuent autour de la proportion de filles dans la population totale du lycée.

Échantillon	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Pourcentage de filles	62 %	68 %	60 %	68 %	66 %	68 %	68 %	54 %	66 %	70 %

2 Estimation

A La loi des grands nombres

Propriété

Dans une population, la proportion d'individus présentant un certain caractère est p .

On préleve dans cette population un échantillon aléatoire de taille n . On note f la fréquence d'apparition du caractère dans cet échantillon.

Lorsque n est grand, sauf exception, la **fréquence observée f** est proche de la **proportion p** .

Dans le cas d'un échantillon de n répétitions indépendantes d'une expérience aléatoire à deux issues, succès et échec, lorsque n est grand, la fréquence observée f du succès dans l'échantillon est proche de la probabilité p du succès.

Exemple

- Quand on lance une pièce bien équilibrée, la probabilité d'obtenir Pile est $p = 0,5$.
- On a simulé des échantillons avec le tableur et compté le nombre d'apparitions de Pile.

Taille n de l'échantillon	100	1 000	10 000	100 000
Nombre de Pile	54	490	5 010	49 942
Fréquence observée f	0,54	0,49	0,501	0,49942

- On observe que lorsque n est grand, la fréquence observée f est proche de la probabilité $p = 0,5$.

B Estimer une proportion ou une probabilité

Définition

Dans une population, la proportion p d'individus présentant un certain caractère est inconnue.

On préleve dans cette population un échantillon aléatoire de taille n . On note f la fréquence d'apparition du caractère dans l'échantillon.

La fréquence observée f est appelée une **estimation** de la proportion p .

Remarque : l'estimation trouvée dépend de l'échantillon considéré, donc il y a plusieurs estimations possibles d'une même proportion p .

Exemple

- Avant un référendum, le gouvernement d'un état souhaite estimer la proportion de votants qui répondront favorablement à la question posée. Pour cela, un institut organise un sondage auprès de 1 200 individus de cette population. 636 personnes répondent favorablement. La fréquence observée est donc $f = \frac{636}{1200}$ soit $f = 0,53$. Ainsi, une estimation de la proportion de votants favorables est 0,53.

Dans le cas d'une expérience aléatoire où les probabilités des événements élémentaires ne sont pas connues a priori, on peut estimer ces probabilités à partir des fréquences observées dans les échantillons.

Exemple

- Hippolyte a acheté un dé à 6 faces annoncé comme non équilibré, c'est-à-dire que toutes les faces n'ont pas la même probabilité d'apparaître. Mais il ne connaît pas les probabilités réelles d'apparition de chaque face. Il effectue 500 lancers et obtient les résultats ci-dessous.
- La fréquence d'apparition du 6 est $\frac{118}{500}$, c'est-à-dire 0,236.
- C'est une estimation de la probabilité d'obtenir ce numéro.

Face	1	2	3	4	5	6
Effectif	42	82	80	90	88	118

Acquérir des automatismes

EXERCICES RÉSOLUS

1 Algo Comprendre une fonction écrite en langage Python

→ Cours 1. B

Dans un jeu de hasard, il faut trouver la Dame de cœur parmi trois cartes dont les faces sont cachées. Pour simuler cette expérience, on utilise la fonction écrite en langage Python ci-contre.

a) La fonction random renvoie un nombre aléatoire de l'intervalle $[0 ; 1]$.

Expliquer pourquoi la fonction `Jeu` permet de simuler cette expérience.

b) Saisir ce programme et l'exécuter 10 fois. Noter les résultats obtenus.

```
1 from random import *
2
3 def Jeu():
4     if random() <= 1/3:
5         p=1
6     else:
7         p=0
8     return p
```

Solution

a) La probabilité d'obtenir la Dame de cœur est $\frac{1}{3}$. C'est aussi

la probabilité de réalisation de la condition de la ligne 4.

Donc on assimile la sortie 1 à l'obtention de la Dame de cœur et la sortie 0 au fait de ne pas l'obtenir.

b) On peut par exemple obtenir : 0 ; 0 ; 0 ; 1 ; 0 ; 1 ; 0 ; 1 ; 0 ; 1 .

Pour exécuter cette fonction, on saisit `Jeu()` dans la console Python.

2 Estimer une proportion

→ Cours 2. B

Dans une ville, un chercheur en médecine s'intéresse à la proportion de personnes de plus de 40 ans atteintes du diabète de type 2. Il fait appel à un institut de sondage qui interroge 1153 personnes, parmi lesquelles 70 personnes se déclarent atteintes de cette maladie.

Quelle estimation, en pourcentage, le chercheur obtient-il ainsi? Arrondir au centième.

Solution

La fréquence observée est $f = \frac{70}{1153}$, soit $f \approx 6,07\%$.

Ce pourcentage est une estimation de la proportion de personnes de plus de 40 ans atteintes du diabète de type 2 dans cette ville.

On obtient la valeur approchée 0,0607, que l'on traduit ensuite en pourcentage.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 1

3 Algo Un paquet de cartes contient 4 cartes noires et 6 cartes rouges. On tire au hasard une carte de ce paquet et on gagne si elle est noire.

a) Quelle est la probabilité de gagner?

b) Pour simuler cette expérience, on écrit une fonction en langage Python nommée `Tirage()`.

Programmer cette fonction en modifiant les lignes 3 et 4 du programme de l'exercice 1.

c) Exécuter cette fonction 10 fois et noter les résultats obtenus.

Calculer la fréquence d'obtention d'une carte noire dans cet échantillon.

Sur le modèle de l'exercice résolu 2

4 Dans une forêt, on s'intéresse à la proportion d'écureuils porteurs d'une certaine maladie.

Pour cela, on prélève

au cours d'un mois un échantillon aléatoire de 250 écureuils, parmi lesquels 47 sont porteurs de cette maladie.

Quelle estimation, en pourcentage, de la proportion d'écureuils porteurs de cette maladie dans la population totale obtient-on ainsi ?



Échantillonnage et simulation

→ Cours 1

Questions Flash

- 5** On lance un dé à six faces numérotées de 1 à 6 et on note le numéro obtenu.
Donner un exemple d'échantillon de taille 5 possible.

- 6** Pour fêter l'anniversaire de son ouverture, un magasin offre à ses clients, de façon aléatoire, des bons d'achats de 5 € ou 10 €.
Parmi les listes ci-dessous, lesquelles peuvent constituer un échantillon de taille 8 dans cette situation?

- Liste A : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8
Liste B : 5 ; 10 ; 5 ; 5 ; 5 ; 10 ; 10 ; 5
Liste C : 5 ; 5 ; 10 ; 5 ; 5 ; 0 ; 5 ; 10
Liste D : 5 ; 5 ; 5 ; 5 ; 5 ; 5 ; 5 ; 5
Liste E : 10 ; 5 ; 5 ; 10

- 7 Algo** On s'intéresse à l'instruction Python :
`if random() <= 0.3:`

Nefeli affirme : « Il y a 1 chance sur 3 pour que la condition soit réalisée. » A-t-elle raison ?

- 8** On lance une pièce de monnaie et on note le côté apparent.

Donner un exemple d'échantillon de taille 12.

- 9** On pioche un jeton dans un sac qui contient des jetons rouges et des jetons verts.

Donner un exemple d'échantillon de taille 10.

- 10** On tire au hasard un nombre aléatoire décimal dans l'intervalle [0 ; 1] et on observe s'il est ou non inférieur ou égal à 0,2.

Donner un exemple d'échantillon de taille 15.

- 11** Pour simuler un échantillon de 50 lancers d'une pièce équilibrée, on dispose d'une table de 50 chiffres au hasard. On décide d'associer Pile aux chiffres pairs et Face aux chiffres impairs.

6 - 3 - 7 - 9 - 4 - 0 - 2 - 2 - 6 - 4 - 4 - 4 - 2
9 - 6 - 9 - 4 - 0 - 2 - 2 - 1 - 9 - 2 - 3 - 0 - 1
6 - 4 - 6 - 3 - 6 - 1 - 9 - 3 - 8 - 3 - 4 - 1 - 9
7 - 9 - 4 - 8 - 8 - 6 - 8 - 6 - 0 - 5 - 2

- a)** Justifier la méthode de simulation choisie.
b) Calculer la fréquence de Pile dans l'échantillon.

- 12 Tice** La formule tableur `=ALEA()` renvoie un nombre aléatoire décimal dans l'intervalle [0 ; 1].

Pour chaque formule tableur ci-dessous, indiquer à quel intervalle appartient le nombre aléatoire affiché.

- a) `=ALEA() + 0,4` b) `=ALEA() + 0,9`
c) `=ALEA() + 0,71` d) `=ALEA() + 0,18`

- 13 Tice** La formule tableur `=ENT(x)` renvoie la partie entière du nombre x . Par exemple, `=ENT(0,23)` renvoie 0 alors que `=ENT(1,35)` renvoie 1.

Pour chaque formule tableur ci-dessous, indiquer la probabilité d'obtenir 1 puis celle d'obtenir 0.

- a) `=ENT(ALEA() + 0,5)`
b) `=ENT(ALEA() + 0,2)`
c) `=ENT(ALEA() + 0,37)`
d) `=ENT(ALEA() + 0,85)`

- 14 Tice** Dans un sac, il y a 60 % de haricots blancs et 40 % de haricots rouges.

On souhaite simuler avec le tableur un échantillon de haricots extraits de ce sac.

- a) Expliquer comment la formule tableur `=ENT(ALEA() + 0,6)` peut être utilisée pour simuler cette expérience aléatoire.

- b) Avec le tableur, simuler un échantillon de 38 haricots extraits de ce sac.

- c) Calculer la fréquence des haricots blancs dans cet échantillon. Arrondir au centième.

Pourquoi cette fréquence n'est-elle pas nécessairement égale à 0,6 ?

- 15 Tice** Dans une entreprise, 26 % des salariés sont allergiques au pollen.

On s'intéresse à l'expérience aléatoire qui consiste à tirer au hasard la fiche médicale d'un salarié et à observer s'il est ou non allergique au pollen.



- a) Quelle formule tableur peut être utilisée pour simuler cette expérience aléatoire ?

- b) Avec le tableur, simuler deux échantillons de 75 individus.

- c) Calculer la fréquence de salariés allergiques dans chaque échantillon.

- d) Pourquoi les fréquences dans les deux échantillons ne sont-elles pas nécessairement égales ?

- e) Doit-il nécessairement y avoir, parmi les échantillons obtenus dans l'entreprise, une fréquence observée égale à 0,26 ?



16 Algo Pour son anniversaire, Fiona a reçu une boîte de perles contenant 75 % de perles dorées et 25 % de perles argentées. Elle tire au hasard une perle de cette boîte. On utilise la fonction écrite en langage Python ci-dessus pour simuler un tel tirage.

```
1 from random import *
2
3 def Tirage():
4     if random() <= 0.75:
5         p=1
6     else:
7         p=0
8     return p
```

1. Appliquer cette fonction à la main, en utilisant la commande NbrAléat ou Ran# ou random() de la calculatrice pour générer un nombre aléatoire.

2. a) On complète ainsi le programme. Saisir ce nouveau programme.

```
10 for k in range(12):
11     print(Tirage())
```

b) Avec ce programme, simuler un échantillon de 12 tirages dans cette boîte.

c) Calculer la fréquence de perles dorées dans l'échantillon ainsi simulé. Pourquoi cette fréquence n'est-elle pas nécessairement égale à 0,75 ?

17 Algo Dans un grand lycée, 55 % des élèves sont des filles.

On considère l'expérience aléatoire qui consiste à tirer au hasard la fiche d'un élève du lycée et à noter si c'est une fille.

On utilise la fonction écrite en langage Python ci-dessus pour simuler un échantillon.

```
1 from random import *
2
3 def Echantillon():
4     n=0
5     for i in range(45):
6         if random() <= 0.55:
7             n=n+1
8     return n
```

a) Expliquer pourquoi cette fonction permet de simuler un tel échantillon.

b) Que représente le nombre n renvoyé en sortie ?

c) Saisir et exécuter ce programme.

d) Calculer la fréquence des filles dans l'échantillon.

Doit-elle nécessairement être égale à 0,55 ?

18 Algo Un jeton possède une face rouge et une face noire. On le fait tourner sur la tranche puis, quand il se stabilise, on note la couleur de la face visible.

a) Écrire une fonction en langage Python qui simule un échantillon de taille 50 et renvoie le nombre de faces rouges obtenues.

b) Saisir et exécuter ce programme.

c) Calculer la fréquence des faces rouges dans l'échantillon.

19 Algo Dans un jeu d'argent à gratter, la probabilité de gagner plus que sa mise est de 8 %.

a) Écrire une fonction en langage Python qui simule un échantillon de taille 60 et renvoie le nombre de gains supérieurs à la mise.

b) Saisir ce programme et l'exécuter 5 fois.

c) Dans chaque échantillon, calculer la fréquence des gains supérieurs à la mise. Les fréquences observées sont-elles toujours égales à 8 % ?

20 Algo Une machine remplit des sacs de bonbons en mélangeant deux parfums : fraise et framboise.

La machine est réglée de sorte que, pour chaque bonbon, il y a 50 % de chances qu'il soit à la fraise.

a) Écrire une fonction en langage Python qui simule le contenu d'un sac de 36 bonbons et renvoie le nombre de bonbons à la fraise.

b) Saisir ce programme et l'exécuter 5 fois.

c) Chaque sac contiendra-t-il autant de bonbons à la fraise que de bonbons à la framboise ?

Estimation

→ Cours 2. B

Questions flash

21 Parmi les nombres ci-dessous, lesquels peuvent être des fréquences observées dans des échantillons ?

- 0,57 • 1,25 • 0,9 • -0,25

22 Dans chaque cas, calculer mentalement la fréquence que représente l'effectif indiqué par rapport à l'effectif total.

Donner la réponse avec un nombre décimal.

- | | |
|--------------------------|----------------------|
| a) Effectif : 43 | Effectif total : 100 |
| b) Effectif : 120 | Effectif total : 200 |
| c) Effectif : 37 | Effectif total : 50 |

23 Dans une maternité, ces derniers jours, sont nés 18 garçons et 12 filles. Que peut-on penser de cette affirmation ? « Dans cette maternité, chaque année, 60% des nouveau-nés sont des garçons. »

24 Un sac contient des jetons verts ou bleus. Voici un échantillon de jetons prélevés aléatoirement dans ce sac. Estimer la proportion, en pourcentage, des jetons verts dans ce sac. *Arrondir au dixième.*

B ; B ; V ; B ; B ; B ; B ; V ; V ; B ; B ; B
B ; B ; B ; B ; B ; B ; V ; B ; B ; B ; B

25 Un sac contient un nombre inconnu de jetons, les uns portant le chiffre 1, les autres le chiffre 5. Sur un échantillon de 4000 tirages au hasard, on a obtenu 406 jetons portant le chiffre 5. Estimer la probabilité d'obtention d'un tel jeton.

26 Dans un supermarché, à la fin d'une opération commerciale, une urne contient 2573 bulletins de participation, dont 1421 ont été complétés par des femmes.

On considère que cet ensemble de bulletins constitue un échantillon aléatoire des clients de ce supermarché. Estimer la proportion, en pourcentage, de femmes dans la clientèle. *Arrondir au dixième.*

27 Une entreprise d'assemblage d'ordinateurs portables veut estimer la proportion de ses produits qui présentent un défaut logiciel.

Pour cela, le service qualité prélève un échantillon de 200 ordinateurs, que l'on considère comme obtenu par des tirages au hasard avec remise. Sur cet échantillon, 4 ordinateurs présentent un défaut logiciel.

Estimer la proportion d'ordinateurs défectueux dans la production totale.

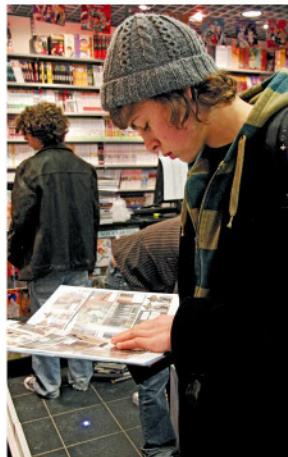
28 Dans le catalogue d'un service de streaming musical, on s'intéresse à la proportion des chansons qui durent moins de 4 min.

Dans un échantillon de 500 chansons, que l'on peut considérer obtenu par des tirages au hasard avec remise, on compte 427 chansons de moins de 4 min. Estimer la proportion, en pourcentage, de chansons de moins de 4 min dans le catalogue complet.

29 Dans une métropole, on s'intéresse à la proportion d'habitants qui lisent régulièrement des bandes dessinées.

On interroge 855 personnes, ce qui constitue un échantillon que l'on considère obtenu par des tirages avec remise. 136 déclarent lire régulièrement des bandes dessinées.

Estimer la proportion, en pourcentage, de lecteurs de bandes dessinées dans la population totale. *Arrondir au dixième.*



30 Avant le second tour d'une élection, un institut organise un sondage pour estimer le pourcentage de votants pour l'un des candidats.

Lors de ce sondage, réalisé auprès de 1 123 personnes, 571 déclarent vouloir voter pour ce candidat.

Quelle estimation l'institut obtient-il ainsi ?

31 En octobre 2018, un institut de sondage britannique a interrogé 1 128 anglais pour savoir si, dans le cas d'un nouveau référendum, ils voterait pour ou contre le maintien du Royaume-Uni dans l'Union européenne.

Voici les résultats.

Pour	Contre	Indécis
429	395	304

Estimer la proportion, en pourcentage, de votants de chaque catégorie dans la population totale.

Arrondir au dixième.

32 Voici des données statistiques concernant un jeu d'argent. Pour chaque échantillon, on a compté le nombre de tickets gagnants.

Taille de l'échantillon	10 000	20 000
Nombre de tickets gagnants	486	997

Utiliser ces données pour obtenir deux estimations de la probabilité de gagner.

33 Pour tester le bon équilibre d'une pièce de monnaie, on a réalisé plusieurs échantillons de lancers successifs.

Voici les résultats.

Taille de l'échantillon	1 000	10 000	100 000
Nombre de Pile	616	5 999	60 024

a) Utiliser ces données pour obtenir trois estimations de la probabilité d'obtenir Pile.

b) Peut-on penser que cette pièce est bien équilibrée ?

34 Un dé à six faces possède des faces blanches et des faces noires. On a construit plusieurs échantillons de lancers successifs et compté le nombre de faces noires obtenues.

Voici les résultats.

Taille de l'échantillon	500	2 000	5 000
Nombre de faces noires	174	660	1 636

a) Calculer la fréquence des faces noires dans chaque échantillon.

b) Estimer la probabilité d'obtention d'une face noire. *Donner le résultat sous forme de fraction irréductible.*

35 Dans chaque cas, donner la réponse exacte sans justifier.

On lance 5 000 fois une pièce équilibrée.

On note f la fréquence d'obtention de Pile dans cet échantillon.

	A	B	C	D
1 La fréquence f est nécessairement ...	égale à 0,5	différente de 0,5	proche de 0,5	inférieure à 0,5
2 La fréquence d'obtention de Face est nécessairement ...	égale à 0,5	égale à f	différente de f	égale à $1-f$
3 Pour simuler cette expérience avec le tableur, on utilise la formule ...	=ENT(ALEA()+0,5)	=ENT(ALEA())	=ENT(ALEA())+0,5	=ALEA()+0,5
4 Pour simuler cette expérience en langage Python, on peut utiliser l'instruction ...	if i<2500	if random()<=0.5	if p<=p+1	if random()<=2500

36 Dans chaque cas, donner la (ou les) réponse(s) exacte(s) sans justifier.

Lors d'une grande opération commerciale, un présentateur annonce : « 60 % des tickets sont gagnants. »

On prélève un échantillon de 500 tickets, que l'on considère comme constitué par des tirages au hasard avec remise. On note f la fréquence des tickets gagnants dans cet échantillon et p la proportion de tickets gagnants dans l'ensemble des tickets.

	A	B	C	D
1 La fréquence f vérifie nécessairement ...	$f = 0,6$	$f \geq 0$	$f \geq p$	$f = p$
2 La proportion p vérifie nécessairement ...	$p = 0,6$	$p \neq f$	$p \in [0 ; 1]$	$p \in [0 ; f]$
3 Dans l'échantillon, il y a 320 tickets gagnants. Alors ...	$p = 0,64$	$p = 0,6$	$f = 0,64$	$f - p = 0,04$
4 Dans l'échantillon, il y a 320 tickets gagnants. Alors une estimation de p est ...	f	0,64	$\frac{f}{500}$	$\frac{320}{500}$

37 Algo Dans chaque cas, dire si l'affirmation est vraie ou fausse en justifiant.

On s'intéresse à la fonction écrite en langage Python ci-contre, qui permet de simuler un échantillon.

Affirmations :

- 1 Cette fonction ne contient pas d'erreur.
- 2 k représente l'effectif total de l'échantillon.
- 3 p représente la fréquence dans l'échantillon.
- 4 À chaque itération, la probabilité que le compteur k soit incrémenté de 1 est p .
- 5 Cette fonction renvoie la fréquence du caractère dans l'échantillon.

```
1 from random import *
2
3 def Echantillon(n,p):
4     k=0
5     for i in range(n):
6         if random()<=p:
7             k=k+1
8     f=k/n
9     return f
```

Vérifiez vos réponses : p. 346

38 Comprendre la loi des grands nombres

On considère l'expérience aléatoire qui consiste à lancer une pièce de monnaie équilibrée et à observer le côté apparent.

1. Quelle est la probabilité que le côté apparent soit Pile ?
2. a) Si on répète 10 fois l'expérience, est-on certain d'obtenir exactement 5 fois Pile ?
- b) Répéter 10 fois l'expérience avec une pièce et compter le nombre de Pile obtenus. Calculer la fréquence observée dans cet échantillon.
3. a) Si on répète 1 000 fois l'expérience, est-on certain d'obtenir exactement 500 fois Pile ?
- b) On a répété 1 000 fois l'expérience et obtenu 514 fois Pile. Calculer la fréquence observée dans cet échantillon.
4. Si on répète 100 000 fois l'expérience, que peut-on attendre de la fréquence observée ?

AIDE

4. La loi des grands nombres affirme que, lorsque n est grand, sauf exception, la fréquence observée f est proche de la probabilité p .

39 Comprendre l'estimation d'une proportion

Un viticulteur souhaite estimer la proportion des pieds de vignes infectés par un champignon.

Pour cela, il étudie un échantillon de 400 pieds, que l'on considère comme prélevé par des tirages au hasard avec remise.

Il constate que 53 pieds sont infectés par le champignon.

- a) Vérifier que la fréquence de pieds infectés est $f = 0,1325$.
- b) Peut-on affirmer que 13,25 % de l'ensemble des pieds sont infectés ?
- c) Si le viticulteur avait prélevé un échantillon différent, aurait-il nécessairement obtenu la même fréquence de pieds infectés ?
- d) Comment peut-on exprimer l'information obtenue par le viticulteur à partir de cet échantillon ?



AIDE

d) Il faut utiliser le mot « estimation » ou le verbe « estimer ».

40 Algo Comprendre une fonction écrite en langage Python

On lance un dé équilibré à 10 faces numérotées de 1 à 10 et on appelle succès le fait d'obtenir un nombre supérieur ou égal à 8.

Voici une fonction écrite en langage Python qui simule un échantillon de répétitions de cette expérience aléatoire et renvoie le nombre de succès.

- a) Quelle est la taille de l'échantillon simulé par cette fonction ?
- b) Repérer dans le programme la probabilité du succès.
- c) Comment faudrait-il modifier la fonction si l'on appelait succès le fait d'obtenir un nombre strictement inférieur à 7 ?
- d) Que représente la variable k ?

```
1 from random import *
2
3 def Echantillon():
4     k=0
5     for i in range(500):
6         if random()<=0.3:
7             k=k+1
8     return k
```

AIDE

- b) et c) À la ligne 6, on compare le résultat de la fonction random() à la probabilité du succès.
- d) La variable k est un compteur. Il faut donc savoir ce qu'elle compte.

EXERCICE RÉSOLU

41 Étudier l'écart entre probabilité et fréquence observée

On considère l'expérience qui consiste à lancer un dé équilibré à 10 faces numérotées de 1 à 10 et à observer si le numéro 1 apparaît sur la face du dessus.

La fonction `Ecart` écrite ci-contre en langage Python permet de simuler $n = 1\ 000$ répétitions de cette expérience et de renvoyer l'écart entre la fréquence observée et la probabilité p d'obtention de la face 1.

a) Quelle est la valeur de la probabilité p ?

b) Saisir ce programme et l'exécuter.

Observer les 40 valeurs obtenues.

c) Calculer la proportion des cas où l'écart entre p et f est inférieur ou égal à $\frac{1}{\sqrt{n}}$.



```
1 from random import *
2
3 def Ecart():
4     k=0
5     for i in range(1000):
6         if random()<0.1:
7             k=k+1
8     f=k/1000
9     e=abs(f-0.1)
10    e=round(e,3)
11    return e
12
13 for i in range(40):
14     print(Ecart())
```

Solution

a) La probabilité d'obtenir la face 1 est $p = 0,1$.

b) Voici des résultats possibles.

0,004	0,003	0,015	0,005	0,01
0,012	0,032	0,014	0,003	0,003
0,019	0,002	0,009	0,006	0,009
0,012	0	0,008	0,013	0,003
0,003	0,005	0,001	0,013	0,002
0,008	0,009	0,033	0,01	0,011
0,001	0,007	0,006	0,008	0,014
0,001	0	0,001	0,001	0,016

À la ligne 10, la fonction `round` retourne l'arrondi, ici du nombre e , à la précision indiquée, ici au millième.

c) $\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{1000}}$ donc $\frac{1}{\sqrt{n}} \approx 0,03$.

On constate que 38 écarts sont inférieurs à 0,03, soit une proportion égale à $\frac{38}{40}$, soit 0,95, c'est-à-dire 95 %.

Cette proportion n'est pas toujours égale à 95 %, mais elle en est proche.

À VOTRE TOUR

42 Un sac contient 25 jetons dont 10 bleus.

On considère l'expérience aléatoire qui consiste à tirer au hasard un jeton et à noter s'il est bleu.

a) Comment modifier le programme de l'exercice 41 pour répéter 40 fois une simulation de 2000 répétitions de cette expérience ?

b) Saisir et exécuter ce programme puis observer les écarts obtenus.

c) Calculer la proportion des cas où l'écart entre p et f est inférieur ou égal à $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

43 Dans un jeu de hasard, on gagne avec une probabilité p égale à 0,25.

a) Comment modifier le programme de l'exercice 41 pour répéter 40 fois une simulation de 500 parties de ce jeu ?

b) Saisir et exécuter ce programme puis observer les écarts obtenus.

c) Calculer la proportion des cas où l'écart entre p et f est inférieur ou égal à $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

EXERCICE RÉSOLU

44 Étudier l'écart entre proportion et fréquence observée

Un magasin souhaite réaliser un sondage auprès de ses clients habituels. Pour cela, le service clientèle prélève, au hasard et avec remise, les noms de 400 clients dans le fichier des possesseurs de la carte de fidélité.

On sait que 60 % des inscrits dans ce fichier sont des femmes.

Voici une partie d'une feuille de calcul qui permet de simuler des échantillons ainsi obtenus et de calculer l'écart entre la fréquence observée des femmes dans chaque échantillon et 0,6.

a) Voici les formules utilisées :

- en B2 : `=ENT(ALEA())+0,6`
- en B402 : `=SOMME(B2:B401)`
- en B403 : `=B402/400`
- en B404 : `=ABS(0,6-B403)`

Expliquer les formules saisies en B2 et en B404.

b) Réaliser cette feuille de calcul pour simuler 100 échantillons et calculer la proportion des échantillons où l'écart entre 0,6 et la fréquence observée est inférieur ou égal à $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Solution

a) La formule saisie en B2 renvoie 1 avec une probabilité égale à 0,6, ce qui correspond au tirage d'une femme. La formule saisie en B404 calcule l'écart entre 0,6 (la proportion de femmes dans le fichier) et la fréquence observée.

b) Voici des résultats possibles pour les 10 premiers échantillons simulés.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Echantillon	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
402	Nombre de femmes	249	262	247	235	243	255	248	241	250	240
403	Fréquence	0,6225	0,655	0,6175	0,5875	0,6075	0,6375	0,62	0,6025	0,625	0,6
404	Ecart à 0,6	0,0225	0,055	0,0175	0,0125	0,0075	0,0375	0,02	0,0025	0,025	0

c) $\frac{1}{\sqrt{400}} = 0,05$; avec la feuille de calcul ci-dessus, on a trouvé 94 % d'échantillons dont la fréquence f

vérifie $|0,6 - f| \leq 0,05$.

	A	B	C	D
1	Echantillon	1	2	3
2		1	1	0
3		0	1	1
4		0	1	0
5		1	1	0
398		1	1	1
399		1	0	0
400		1	0	0
401		1	0	1
402	Nombre de femmes	233	242	235
403	Fréquence	0,5825	0,605	0,5875
404	Ecart à 0,6	0,0175	0,005	0,0125

Dans les cellules de la ligne 403, on calcule la fréquence observée dans chaque échantillon simulé.

À VOTRE TOUR

45 Un sac contient 100 billes dont 35 blanches. On considère l'expérience aléatoire qui consiste à piocher une bille et à noter si elle est blanche.

a) Modifier la feuille de calcul de l'exercice 44 pour simuler un échantillon de 400 répétitions de ce tirage.

b) Réaliser cette nouvelle feuille de calcul, avec 100 échantillons simulés.

c) Calculer la proportion des échantillons où l'écart entre p et la fréquence observée f est inférieur ou égal à $\frac{1}{\sqrt{400}}$.

46 Lors d'une tombola, la probabilité d'avoir un ticket gagnant est $p = 0,17$.

a) Comment modifier la feuille de calcul de l'exercice 44 pour simuler un échantillon de 400 tickets ?

b) Réaliser cette nouvelle feuille de calcul, avec 100 échantillons simulés.

c) Calculer la proportion des échantillons où l'écart entre p et la fréquence observée f est inférieur ou égal à $\frac{1}{\sqrt{400}}$.

SIMULER UN ÉCHANTILLON

- 47 Algo** Selon une étude réalisée en 2017, 92 % des Français âgés de 15 à 18 ans jouaient à des jeux vidéos, contre 75 % des Français âgés de 25 à 34 ans.
- Écrire une fonction en langage Python qui simule un échantillon de 100 Français âgés de 15 à 18 ans et renvoie la fréquence de joueurs.
 - Écrire un programme pour exécuter 20 fois cette fonction.
 - Saisir et exécuter ce programme.
- 2. a)** Écrire une fonction en langage Python qui simule un échantillon de 100 Français âgés de 25 à 34 ans et renvoie la fréquence de joueurs.
- Écrire un programme pour exécuter 20 fois cette fonction.
 - Saisir et exécuter ce programme.
- 3.** Est-il possible d'obtenir avec la seconde fonction une fréquence supérieure à celle obtenue avec la première ?

- 48 Algo** Un Youtuber constate que dans 34 % des cas, sa vidéo est visionnée en entier.
- Programmer une fonction en langage Python qui simule un échantillon de taille 200 et renvoie la fréquence des vidéos visionnées en entier.
 - Écrire un programme pour exécuter 20 fois cette fonction, et repérer les fréquences minimum et maximum observées.

- 49 Algo** Dans une grande ville, un aquarium présente des poissons de 400 espèces différentes. La moitié de ces espèces vivent en eau douce. 30 % de ces espèces sont originaires d'Europe. De plus, 80 espèces sont originaires d'Europe et vivent en eau douce.



- Présenter les données dans un tableau croisé, puis compléter le tableau.
- On tire au hasard la fiche d'une des espèces dans le catalogue de l'aquarium.

Quelle est la probabilité que :

- ce soit un poisson d'eau de mer ?
 - ce ne soit pas un poisson originaire d'Europe ?
 - ce soit un poisson d'eau de mer non européen ?
- 3.** Écrire une fonction en langage Python qui simule un échantillon de 100 tirages au hasard avec remise et renvoie le nombre de poissons originaires d'Europe.

50 Algo En période de soldes, un magasin de vêtements applique des réductions de 20 %, 30 % ou 40 % sur les tee-shirts, puis une réduction supplémentaire de 10 % sur tous les prix soldés.

- a) Calculer le pourcentage total de réduction pour un tee-shirt annoncé avec une réduction de 20 %.
- Y a-t-il un tee-shirt soldé à 50 % ?
- Tous les tee-shirts sont mélangés dans un même bac. La moitié sont annoncés comme soldés à 20 %, un quart à 30 % et un quart à 40 %. On considère l'expérience aléatoire qui consiste à tirer au hasard un tee-shirt dans le bac et à noter s'il est soldé à plus de 35 %.
- Quelle est la probabilité de tirer un tel tee-shirt ?
- Écrire une fonction en langage Python qui simule un échantillon de 200 répétitions de cette expérience et qui renvoie le nombre de tee-shirts soldés à plus de 35 %.
- Est-il possible d'obtenir un échantillon avec exactement 100 tee-shirts soldés à plus de 35 % ?

51 Algo Dans les casinos, la roulette est partagée en 37 zones, numérotées de 0 à 36. Parmi les numéros de 1 à 36, 18 sont rouges dont 10 sont des numéros impairs.



On considère l'expérience aléatoire qui consiste à lancer la bille et à observer dans quelle zone elle s'arrête. Les probabilités que la bille s'arrête dans chacune des zones sont toutes égales.

- Quelle est la probabilité de l'événement A : « La bille s'arrête sur un numéro impair » ?
 - Quelle est la probabilité de l'événement B : « La bille s'arrête sur un numéro rouge » ?
 - Décrire l'événement $A \cap B$.
- Déterminer la probabilité de cet événement.
- Un joueur mise sur l'événement « La bille s'arrête sur un numéro impair ou bien sur un numéro rouge ». Expliquer pourquoi la probabilité qu'il gagne est égale à $\frac{26}{37}$.
 - Écrire une fonction en langage Python qui simule un échantillon de 200 répétitions de la situation décrite à la question d) et renvoie le nombre de parties gagnées par le joueur.
 - Écrire un programme pour exécuter 50 fois cette fonction. Saisir et exécuter ce programme.

52 **Algo** On lance deux fois successivement une pièce de monnaie équilibrée et on compte le nombre de Pile obtenus.

- Représenter la situation par un arbre.
- Démontrer que la probabilité d'obtenir deux fois Pile est égale à 0,25.
- Avec une fonction écrite en langage Python, simuler un échantillon de 200 répétitions de l'expérience qui consiste à lancer deux fois la pièce et à observer si on a obtenu deux fois Pile.

ESTIMER UNE PROPORTION OU UNE PROBABILITÉ

53 Dans un établissement scolaire de 1 540 élèves, on a effectué une enquête sur le système d'exploitation des smartphones. On considère qu'on a ainsi obtenu un échantillon aléatoire des smartphones utilisés en France.

Voici les résultats.

Android	iOS	Autres
1 260	275	5

Estimer la part de chaque système d'exploitation dans l'ensemble des smartphones en France.

Arrondir au dixième.

54 Axel et Baptiste jouent avec un jeu de cartes incomplet dont ils ne connaissent pas la composition. Ils souhaitent estimer la proportion de cartes rouges en prélevant des échantillons aléatoires.

- Axel prélève un échantillon aléatoire de taille 100 qui contient 68 cartes rouges.

Quelle estimation de la proportion de cartes rouges peut-il en déduire ?

- Baptiste prélève un échantillon aléatoire de taille 500 qui contient 328 cartes rouges.

Quelle estimation peut-il en déduire ?

55 Pour vérifier le bon équilibre d'un dé, on le lance 2 000 fois et on obtient les résultats ci-dessous.

Face	1	2	3	4	5	6
Effectif	331	308	344	350	319	348

- Estimer la probabilité d'apparition de chaque face.
- Représenter les probabilités estimées par un diagramme en bâtons.
- Selon cet échantillon, peut-on penser que ce dé est bien équilibré ?

56 En France, en 2016, on annonçait une épidémie de gastro-entérite dans une région quand la prévalence de cette maladie, c'est-à-dire la proportion de malades dans la population totale, dépassait 0,192 %. Au cours d'une semaine, les médecins d'une ville de 50 000 habitants déclarent 90 cas. On considère cette ville comme un échantillon des habitants de la région. Estimer alors la prévalence de la gastro-entérite dans la région. Selon cet échantillon, pourrait-on annoncer une épidémie dans cette région ?

57 Un fabricant de chaussures vend directement ses produits dans son magasin d'usine.

Une paire de chaussures sans défaut est vendue 60 €.

Si elle présente des défauts de fabrication, la paire de chaussures est alors vendue 40 €.



Sur un échantillon de 80 paires de chaussures, 10 présentent des défauts. La production totale est assez grande pour considérer que cet échantillon a été prélevé au hasard avec remise.

- Estimer la proportion de paires de chaussures qui présentent des défauts dans la production totale.

- En un mois, le magasin d'usine vend 560 paires de chaussures.

Estimer la recette réalisée pendant cette période.

58 Avant une élection locale, un institut a organisé un sondage auprès d'un échantillon de 1 050 électeurs. Chaque électeur devait indiquer pour quelle liste il prévoyait de voter.

Voici les résultats de ce sondage.

Liste	A	B	C	D
Effectif	251	124	301	374

- Estimer la proportion, en pourcentage, de votants pour chaque liste dans cette région. Arrondir au dixième.

- Selon ce sondage, quelle liste pourrait gagner l'élection ?

59 On considère une expérience aléatoire à deux issues, dont l'une a la probabilité p de se réaliser.

Dans environ 95 % des échantillons de taille n , pour n assez grand, l'écart entre la fréquence observée f et la probabilité p est inférieur ou égal à $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Pour quelles valeurs de n cet écart est-il, généralement, inférieur ou égal à 0,03 ?

60 Dans une usine de robots ménagers, on contrôle la qualité des robots produits.

On considère que si la proportion de robots défectueux dépasse 3 %, il faut revoir le processus de fabrication.

On prélève un échantillon de 400 robots.

La production est assez importante pour que l'on considère qu'il s'agit de tirages au hasard avec remise. On constate que 14 robots sont défectueux.

a) Estimer la proportion, en pourcentage, de robots défectueux dans la production totale. *Arrondir au dixième.*

b) D'après cet échantillon, faudrait-il revoir le processus de fabrication ?

2. Pour un échantillon de 400 robots, à partir de combien de robots défectueux faudrait-il revoir le processus de fabrication ?

61 Le directeur d'un musée s'intéresse à la proportion de visiteurs jeunes, âgés de moins de 25 ans.

a) Pendant une semaine, on compte 1250 visiteurs parmi lesquels 74 jeunes.

Estimer, dans ces conditions, la proportion, en pourcentage, des jeunes parmi les visiteurs de ce musée.

b) Le directeur décide de modifier les tarifs et d'offrir l'entrée gratuite aux jeunes. Après quelques temps et une campagne de publicité, on compte au cours d'une semaine 1 362 visiteurs dont 123 jeunes.

Estimer alors la proportion, en pourcentage, des jeunes parmi les visiteurs de ce musée.

Arrondir au dixième.

c) Ces résultats semblent-ils indiquer que la modification des tarifs a eu un impact ?

62 Une publicité annonce que 97 % des acheteurs sont satisfaits par un produit.

Pour vérifier cette annonce, une association de consommateurs constitue plusieurs échantillons de 400 acheteurs de ce produit.

Le nombre total d'acheteurs est assez grand pour considérer que ces échantillons sont prélevés au hasard avec remise.

a) Dans le premier échantillon, on compte 390 acheteurs satisfaits.

En déduire une première estimation de la proportion p , en pourcentage, d'acheteurs satisfaits sur l'ensemble des acheteurs.

b) Dans le deuxième échantillon, on compte 352 acheteurs satisfaits.

En déduire une deuxième estimation de la proportion p , en pourcentage.

c) Que peut-on penser de cette publicité ?

63 Un maraîcher reçoit des pommes de deux fournisseurs différents qui pratiquent les mêmes tarifs.

Certaines pommes ne peuvent pas être vendues car elles sont abîmées.

On suppose que les productions sont assez importantes pour que l'on considère les lots reçus comme des échantillons prélevés avec remise.

a) Dans un lot de 300 pommes du fournisseur A, il y a 16 pommes abîmées.

Estimer la proportion, en pourcentage, de pommes abîmées dans la production de ce fournisseur.

Arrondir au dixième.

b) Dans un lot de 350 pommes du fournisseur B, il y a 17 pommes abîmées.

Estimer la proportion, en pourcentage, de pommes abîmées dans la production de ce fournisseur.

Arrondir au dixième.

c) En supposant que ces échantillons sont représentatifs de la qualité générale des produits de chaque fournisseur, lequel le maraîcher devrait-il privilégier ?

64 Un étudiant s'intéresse aux parts de marché des opérateurs Internet dans sa ville.

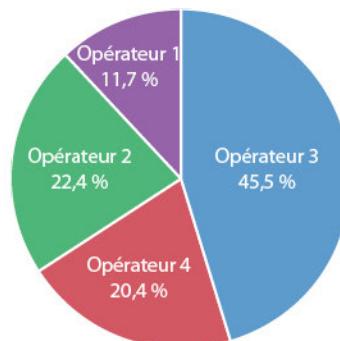
Il interroge 500 personnes, ce qui constitue un échantillon que l'on peut considérer comme prélevé au hasard avec remise.

Voici les résultats qu'il obtient.

Opérateur	1	2	3	4
Effectif	53	183	172	92

a) Estimer la part, en pourcentage, de chaque opérateur dans cette ville.

b) Ce diagramme circulaire représente les parts de marché de ces opérateurs au niveau national.



L'étudiant peut-il estimer qu'il y a une différence notable entre les parts de marché dans sa ville et au niveau national ?



65 Un casino reçoit un lot de dés (tous identiques) d'un nouveau fabricant et charge un employé d'en vérifier un au hasard.

1. Dans un premier temps, l'employé lance le dé 10 fois. Voici les résultats.

Face	1	2	3	4	5	6
Effectif	3	1	1	2	1	2



a) Calculer les fréquences de chaque face et donner les résultats dans un tableau qui sera complété par la suite.

b) À ce stade, peut-on penser que le dé est bien équilibré ?

2. L'employé continue son expérience en lançant à nouveau 90 fois le dé.

Voici les résultats pour l'ensemble des 100 tirages.

Face	1	2	3	4	5	6
Effectif	15	11	14	15	19	26

a) Indiquer les fréquences dans une nouvelle ligne du tableau de la question 1.

b) L'employé commence à avoir des doutes sur l'équilibre du dé. Quelle hypothèse peut-il logiquement formuler à ce stade ?

3. L'employé continue son expérience en lançant à nouveau 900 fois le dé.

Voici les résultats pour l'ensemble des 1 000 tirages.

Face	1	2	3	4	5	6
Effectif	170	79	167	176	238	170

a) Indiquer les fréquences dans une nouvelle ligne du tableau de la question 1.

b) Les doutes émis par l'employé au vu des 100 premiers lancers sont-ils confirmés ? Si non, que peut-il penser maintenant de l'équilibrage de ce dé ?

4. Avec l'aide de collègues, l'employé atteint un total de 5 000 lancers dont voici les résultats.

Face	1	2	3	4	5	6
Effectif	855	396	818	859	1223	849

a) Indiquer les fréquences dans une nouvelle ligne du tableau de la question 1.

b) Ce nouvel échantillon confirme-t-il les soupçons émis au vu des 1 000 premiers lancers ? Quelle semble alors être la bonne décision à prendre par l'employé ?

5. Les probabilités de chacune des faces de ce dé sont en fait des fractions simples.

Conjecturer leurs valeurs.

66 Une expérience aléatoire consiste à tirer simultanément deux cartes d'un paquet de cartes qui contient des cartes noires et des cartes rouges.

On gagne si l'on tire deux cartes rouges.

a) Le paquet contient 5 cartes rouges et 5 cartes noires. Sur un échantillon aléatoire simulé de 2000 tirages, on a gagné 882 fois.

En déduire une estimation de la probabilité de gagner dans ce cas.

b) Le paquet contient 4 cartes rouges et 5 cartes noires. Sur un échantillon aléatoire simulé de 2000 tirages, on a gagné 911 fois.

En déduire une estimation de la probabilité de gagner dans ce second cas.

c) On peut démontrer que les probabilités estimées précédemment sont des fractions de la forme $\frac{n}{9}$, où n est un nombre entier naturel.

Quelle conjecture peut-on alors émettre ?

S'ENTRAÎNER À LA LOGIQUE → p. XXI

67 Implications

Dans une expérience aléatoire à deux issues, p est la probabilité d'une des issues et f est la fréquence de cette issue observée dans un échantillon de n répétitions de cette expérience.

Dire si chaque affirmation est vraie ou fausse.

a) Si n est grand, sauf exception, alors f est proche de p .

b) Si f est proche de p , sauf exception, alors n est grand.

c) Si f n'est pas proche de p , sauf exception, alors n n'est pas grand.

d) Si n n'est pas grand, sauf exception, alors f n'est pas proche de p .

68 Exemples et contre-exemples

On considère l'expérience aléatoire qui consiste à lancer 12 fois une pièce équilibrée et à noter le côté obtenu.

Dire si chaque affirmation est vraie ou fausse et justifier avec un exemple ou un contre-exemple.

a) On peut ne pas obtenir Face.

b) On ne peut pas obtenir Face.

c) On obtient toujours autant de fois Pile que Face.

d) On peut obtenir deux fois plus de Pile que de Face.

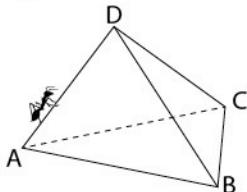
Organiser son raisonnement

69

Tice Prendre des initiatives

Modéliser | Raisonner | Communiquer

Une fourmi se promène aléatoirement sur les arêtes d'un tétraèdre régulier ABCD.



Depuis un sommet, les probabilités qu'elle se dirige vers l'un des trois autres sommets sont égales à $\frac{1}{3}$.

Une *promenade* est une suite de sommets parcourus par la fourmi, entre son point de départ (le sommet A) et le premier retour au sommet A.

Le trajet d'un sommet à un autre dure 1 min.

On s'intéresse à la durée d'une promenade de la fourmi.

a) Concevoir, avec le tableur ou la calculatrice, une méthode pour simuler une promenade de la fourmi.

b) Simuler 25 promenades et noter la durée de chacune d'entre elles.

Donner dans un tableau le nombre de promenades pour chaque durée, en commençant à 1 min.

c) Déterminer le minimum, le maximum, l'étendue, la moyenne et la médiane pour l'échantillon de 25 promenades simulées.

d) Samy affirme : « Il y a 50 % de chances que la promenade dure 3 min ou moins. »

À la lumière de l'échantillon simulé, que peut-on penser de cette affirmation ?

70

Algo Understand a program

**Chercher | Raisonner | Communiquer**

Here is a function coded in Python language.

```
1 def Estimation(n,m):
2     if n<m:
3         m=n+m
4         n=m-n
5         m=m-n
6     f=m/n
7     return f
```

- a) What is returned when you enter `Estimation(500,220)`? When you enter `Estimation(220,500)`?
- b) Explain what part of the function ensures that the two outcomes in question a) are the same.
- c) What is the use of this function ?

71

Évolution de résultats



Problème ouvert

Chercher | Calculer

Avant une élection, un candidat consulte les intentions de vote le concernant dans plusieurs sondages successifs.



Sondage	Effectif	Intentions de vote
1	1024	461
2	1117	525
3	925	462
4	1252	639
5	987	523

L'évolution des résultats de ces sondages est-elle rassurante pour le candidat ?

72

Algo Imaginer une stratégie

Modéliser**Raisonner****Calculer**

Un dé équilibré possède 6 faces numérotées -1, -1, -1, 0, 0 et 1. On considère l'expérience aléatoire qui consiste à lancer deux fois ce dé et à multiplier les deux résultats obtenus.

Écrire une fonction en langage Python qui simule 500 échantillons de $n = 100$ répétitions de cette expérience et qui renvoie le nombre d'échantillons pour lesquels l'écart entre la probabilité d'obtenir 1 et la fréquence observée est inférieur à $\frac{1}{\sqrt{n}}$.



73

Tice Estimer une probabilité

Sur un cercle, on place un point A, puis on place au hasard un point B.

Utiliser un logiciel de géométrie pour estimer la probabilité que la corde [AB] ait une longueur supérieure ou égale au rayon du cercle.

74

Lancer quatre dés

On lance quatre dés équilibrés à six faces numérotées de 1 à 6 et on additionne les nombres obtenus. Estimer la probabilité que le résultat soit supérieur ou égal à 10.

75 Dans chaque cas, donner la réponse exacte en justifiant.

Pour les questions **1 à 3**, on considère l'expérience aléatoire qui consiste à tirer une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.

On définit les événements :

F : « Obtenir une figure (Valet, Dame ou Roi) »

R : « Obtenir une carte rouge »



	A	B	C	D
1	La probabilité de F est ... égale à $\frac{3}{8}$	égale à $\frac{10}{32}$	égale à $\frac{12}{52}$	supérieure à 0,5
2	La probabilité de R est égale à ... $P(F)$	$1 - P(F)$	$P(\bar{R})$	$1 - P(\bar{R})$
3	La probabilité de l'événement $F \cap R$ est égale à ... $P(F) + P(R)$	$\frac{1}{2}P(F)$	$\frac{1}{2}P(R)$	$\frac{4}{32}$

Pour les questions **4 à 10**, on simule n répétitions de l'expérience qui consiste à tirer une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes et à observer si c'est une figure rouge.

Pour cela, on utilise la fonction écrite en langage Python ci-contre.

```
1 from random import *
2
3 def Echantillon(n):
4     p=0
5     for i in range(n):
6         if random()<=0.375:
7             p=p+1
8     return p
```

	A	B	C	D
4	La valeur à écrire dans le cadre à la ligne 5 est ... 0,1875	n	0,5	p
5	L'instruction de la ligne 4 permet de répéter les instructions de la boucle ... n fois	$n + 1$ fois	$i + 1$ fois	tant que $i < n$
6	Pour simuler 500 répétitions de cette expérience, il faut saisir ... Echantillon()	Echantillon(500)	500*Echantillon()	Echantillon(0,500)
7	Pour $n = 1000$, une valeur de sortie possible est ... 1530	0,18	945	1875
8	Pour calculer et afficher la fréquence observée, il suffit d'ajouter avant <code>return p</code> et hors de la boucle, la ligne ... $p=p/1000$	$f=p/1000$	$p=p/n$	$f=p/n$
9	L'écart entre la fréquence observée et la probabilité est inférieur à $\frac{1}{\sqrt{n}}$... dans aucun cas	dans 95 % des cas	dans environ 95 % des cas	dans tous les cas
10	Pour $n = 1000$, une valeur de sortie probable est ... 4	184	490	975

Vérifiez vos réponses p. 346 pour avoir votre note (considérez 1 point par réponse juste).

Exploiter ses compétences

76 Estimer un sex-ratio

La situation problème

Le village d'Aamjiwnaang se trouve dans la région des Grands Lacs, au Canada. Depuis la moitié du 20^e siècle, de nombreuses industries chimiques se sont installées dans cette région, et en particulier dans ce village.

DOC 1 Sex-ratio à la naissance



Une scientifique de l'université d'Ottawa s'est inquiétée de cette situation, et en particulier de son impact sur la répartition des garçons et filles à la naissance. Utiliser les différentes informations pour déterminer s'il y a lieu de s'inquiéter.



77 Tic Vérifier une affirmation

La situation problème

Les dés de Sicherman sont des dés équilibrés à 6 faces numérotées ainsi :

dé A : 1 ; 2 ; 2 ; 3 ; 3 ; 4

dé B : 1 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 8

On considère l'expérience aléatoire qui consiste à lancer ces deux dés et à additionner les nombres obtenus.

Alice affirme :

« La loi de probabilité de cette expérience est la même que celle obtenue avec deux dés classiques. »

Utiliser les différentes informations pour savoir si Alice a raison.



DOC 1 Simulation avec le tableur

	A	B	C	D	E
1		Dé 1		Dé 2	Somme
2	5	3	2	3	6
3	5	3	1	1	4
4	5	3	4	5	8
5	5	3	6	8	11
6	4	3	6	8	11
7	1	1	5	6	7
8	5	3	6	8	11

DOC 3 Loi de probabilité avec deux dés classiques

Total	2	3	4	5	6	7
Probabilité	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$
Total	8	9	10	11	12	
Probabilité	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	

DOC 2 Formules tableur

Formule saisie en A2 et en C2 : =ALEA.ENTRE.BORNES(1;6)

Formule saisie en B2 : =SI(A2=1;SI(A2=2;SI(A2=3;SI(A2=4;SI(A2=5;3;4))))

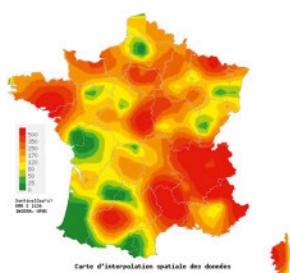
78 Estimer un intervalle

La situation problème

La grippe touche chaque année environ 20 % de la population française.

Dans une revue médicale, on peut lire : « Pour environ 95 % des échantillons de la population, le pourcentage de personnes grippées est compris dans un intervalle dont les bornes sont assez proches de 20 %. »

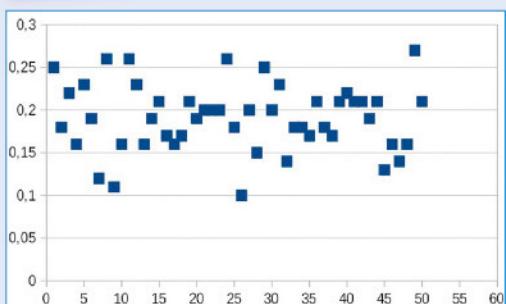
Utiliser les différentes informations pour estimer les bornes d'un tel intervalle.



DOC 1 Simulation de 50 échantillons de taille 100

	A	B	C	D	E	F	G
1	Échantillon	1	2	3	4	5	6
2		0	0	0	0	0	0
3		0	1	0	0	1	1
100		0	1	0	0	0	0
101		0	1	0	0	0	0
102		0	0	0	0	0	1
103	Effectif	23	24	19	20	21	20
104	Fréquence	0,23	0,24	0,19	0,2	0,21	0,2

DOC 2 Nuage de points des fréquences



79 Algo Étudier une probabilité

La situation problème

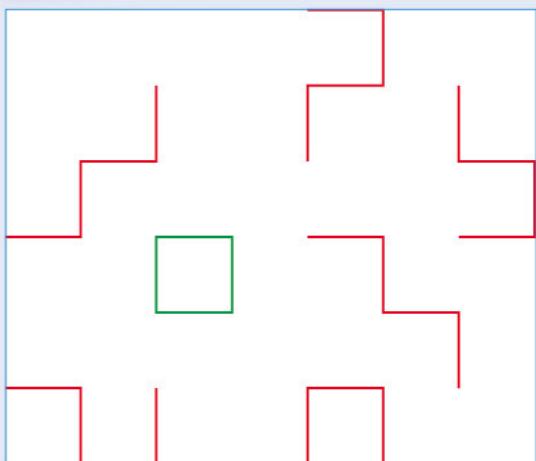
Un robot se déplace selon le programme constitué des deux tâches consécutives suivantes, répétées 4 fois :

- il avance de 1 m ;
- il décide aléatoirement de tourner de 90° dans un sens ou dans l'autre.

Utiliser les différentes informations pour estimer la probabilité que le robot se retrouve ainsi à son point de départ.



DOC 1 Quelques trajets possibles



DOC 2 Une fonction Python

```

1 from random import *
2
3 def Construction():
4     x=randint(0,1)+randint(0,1)+randint(0,1)
5     if x==0 or x==3:
6         message="Retour au point de départ"
7     else:
8         message="Pas de retour au point de départ"
9     return message

```