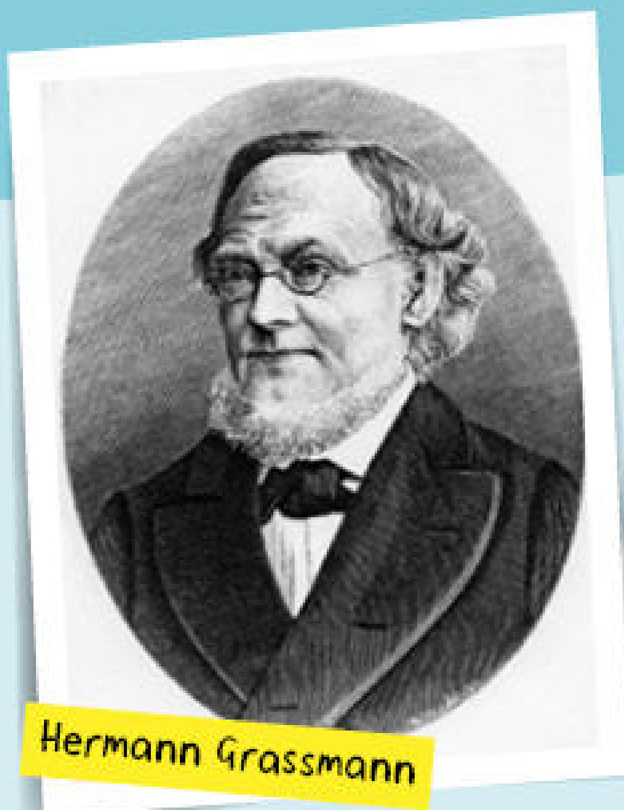
4 Orthogonalité et distances dans l'espace

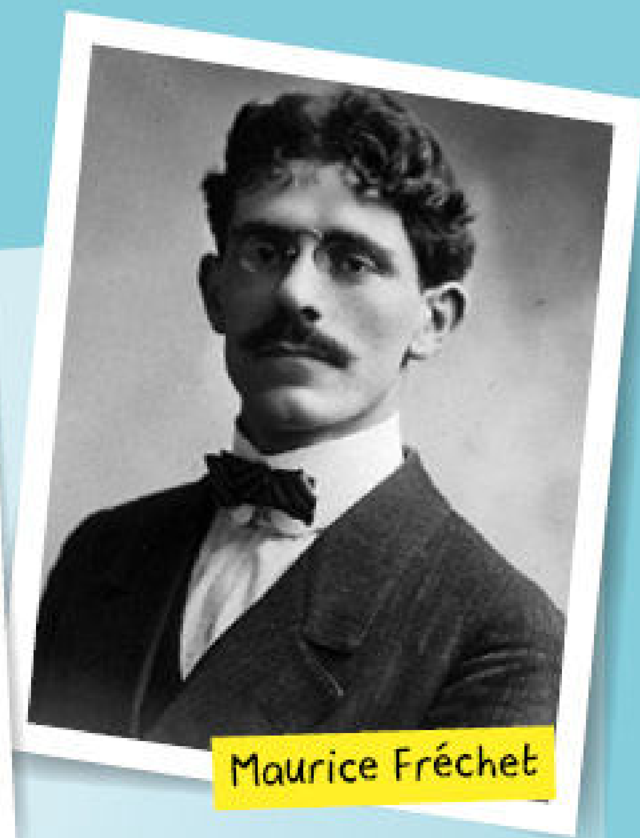
HISTOIRE DES MATHS

Le produit linéaire de deux vecteurs, notre produit scalaire, est né de la Physique. En 1839, dans sa thèse *Théorie des flots et des marées*, **Hermann Grassmann** propose une approche géométrique qui étend à l'espace la notion de vecteur. Mais cette thèse n'est pas lue par son examinateur ; elle ne sera publiée qu'en 1911.

En 1853, **William Hamilton** introduit l'expression « produit scalaire » pour distinguer ce produit dont le résultat est un nombre (un scalaire) du produit vectoriel dont le résultat est un vecteur.

En 1908, **Maurice Fréchet** introduit la notion d'espace métrique. Il utilise la notion de distance définie par Descartes à partir du théorème de Pythagore.


Hermann Grassmann


Maurice Fréchet

▶ **Hermann Grassmann** (1809-1877) est un mathématicien et linguiste allemand. Il est considéré comme le fondateur de la théorie des espaces vectoriels. Ses travaux ne seront reconnus qu'en 1888.

▶ **Maurice Fréchet** (1878-1973) est un mathématicien français, professeur dans plusieurs lycées et universités, élu à l'Académie des Sciences de Paris en 1956. Ses travaux portent sur divers domaines (analyse, probabilités, statistiques…).

1839 Grassmann définit le produit linéaire de deux vecteurs.

1853 Hamilton introduit l'expression « produit scalaire ».

1888 Peano diffuse le calcul vectoriel en Italie et en France.

1902 Gibbs note le produit scalaire à l'aide d'un point.

1826 Première photographie par Niépce

1839 *La Chartreuse de Parme* de Stendhal

1877 Brevet du phonographe par Edison

1889 Inauguration de la tour Eiffel

1912 Naufrage du Titanic

1928 Découverte de la pénicilline

1825 — 1850 — 1875 — 1900 — 1925

Retour des propulseurs de la fusée *Falcon Heavy*.

En avril 2019, l'entreprise SpaceX réussit à récupérer les propulseurs de sa fusée en vue d'une réutilisation future. Les trajectoires sont rectifiées au fur et à mesure de l'approche au sol, afin que chaque propulseur atterrisse, sans encombre, orthogonalement à la plateforme. Cette prouesse technologique est rendue possible par des outils de mesure de haute précision comme l'accéléromètre et le gyrolaser.

Les contenus et capacités travaillés dans ce chapitre

	Savoir-faire	Exercices
• Produit scalaire de deux vecteurs de l'espace. Bilinéarité, symétrie, orthogonalité de deux vecteurs.	1, 3	20 à 42
• Dans une base orthonormée, expression du produit scalaire, de la norme, et de la distance entre deux points.	5 à 8, 17 à 19	43 à 47
• Utiliser le produit scalaire pour calculer un angle, une longueur de l'espace.	2, 4	48, 49, 79 à 86
• Orthogonalité de deux droites, d'un plan et d'une droite.	9 à 12	50 à 68
• Utiliser la projection orthogonale pour déterminer la distance d'un point à une droite ou à un plan.	13 à 16	69 à 73
• Étudier des problèmes de configuration dans l'espace : orthogonalité de deux droites, d'une droite et d'un plan, plan médiateur de deux points.		78, 87 à 89

Calcul mental

Rappels utiles

• Produit scalaire dans le plan

Voici différentes façons de calculer le produit scalaire de deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, noté $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

(1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$.

(2) H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont même sens,
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont des sens contraires.

(3) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$.

• Expression analytique du produit scalaire

Dans un repère orthonormé, le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}\,(x\,;y)$ et $\vec{v}\,(x'\,;y')$ est :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

• Carré scalaire et norme

(1) Pour tout vecteur $\vec{u}$, $\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$.

(2) Dans un repère orthonormé, la norme de $\vec{u}(x\,;y)$ est :
$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

• Propriétés du produit scalaire

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$,

(1) Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$;

(2) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux si, et seulement si, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$;

(3) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

(4) $\vec{u} \cdot (\lambda\vec{v}) = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v})$ et $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

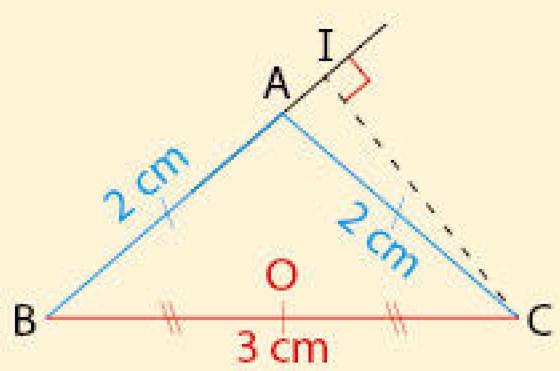
(5) $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$
$(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$
$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

À l'oral — Questions-Tests

Pour chaque question, il y a une seule réponse exacte.

1 ABC est un triangle tel que $AB = 2$, $AC = \sqrt{3}$ et $\widehat{BAC} = 30°$.
Le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ est égal à :
(1) $2\sqrt{3}$ **(2)** 6 **(3)** 3

2 ABC est le triangle isocèle en A ci-dessous.

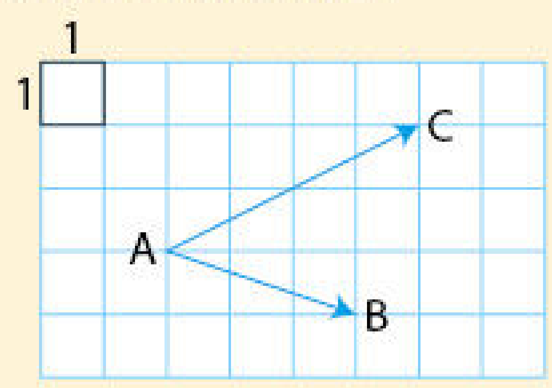


a) $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{BC}$ est égal à :
(1) $\frac{\sqrt{7}}{2}$ **(2)** 3 **(3)** 0

b) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ est égal à :
(1) 4,5 **(2)** 3 **(3)** 6

c) La longueur BI est égale à :
(1) 2,5 cm **(2)** 2,25 cm **(3)** 3 cm

3 A, B et C sont les trois points ci-dessous.



a) AB^2 est égal à :
(1) 9 **(2)** 16 **(3)** 10

b) AC^2 est égal à :
(1) 36 **(2)** 20 **(3)** 6

c) Le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ est égal à :
(1) 10 **(2)** 15 **(3)** $10\sqrt{2}$

4 Dans un repère orthonormé du plan, on donne les points $A(-4\,;1)$, $B(-1\,;2)$ et $C(1\,;-4)$.

a) **(1)** $\overrightarrow{AB}(-3\,;-1)$ et $\overrightarrow{AC}(5\,;-3)$
(2) $\overrightarrow{AB}(3\,;1)$ et $\overrightarrow{AC}(5\,;-3)$
(3) $\overrightarrow{AB}(3\,;1)$ et $\overrightarrow{AC}(5\,;-5)$

b) **(1)** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -20$
(2) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 10$
(3) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -22$

5 $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs orthogonaux tels que $\|\vec{u}\| = 1$ et $\|\vec{v}\| = \frac{1}{2}$.

a) $(\vec{u} - 2\vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v})$ est égal à :
(1) $\frac{3}{2}$ **(2)** 0 **(3)** $\frac{1}{2}$

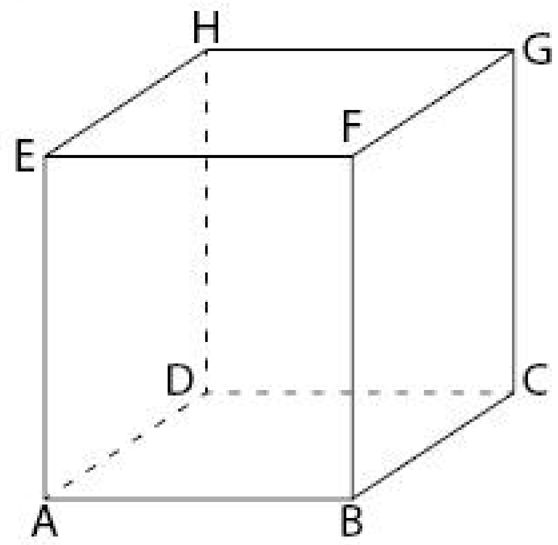
b) $(\vec{u} - \vec{v})^2$ est égal à :
(1) $\frac{1}{2}$ **(2)** $\frac{1}{4}$ **(3)** $\frac{5}{4}$

6 Dans un repère orthonormé du plan, on donne les points $A(-1\,;2)$, $B(4\,;7)$ et $C(9\,;-3)$.
Le triangle ABC est isocèle :
(1) en A **(2)** en B **(3)** en C

1 Produit scalaire du plan à l'espace

Pour calculer le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ de deux vecteurs de l'espace, on choisit trois points O, M, N tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{ON}$, puis on calcule $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON}$ dans un plan $\mathscr{P}$ contenant les points O, M, N.

On modélise un Rubik's cube par un cube ABCDEFGH d'arête 1 représenté ci-dessous.



1 **a)** Dans chaque cas, calculer le produit scalaire.
- $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AH}$ (utiliser le plan (ADE))
- $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$
- $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AG}$ (utiliser le plan du rectangle AFGD)

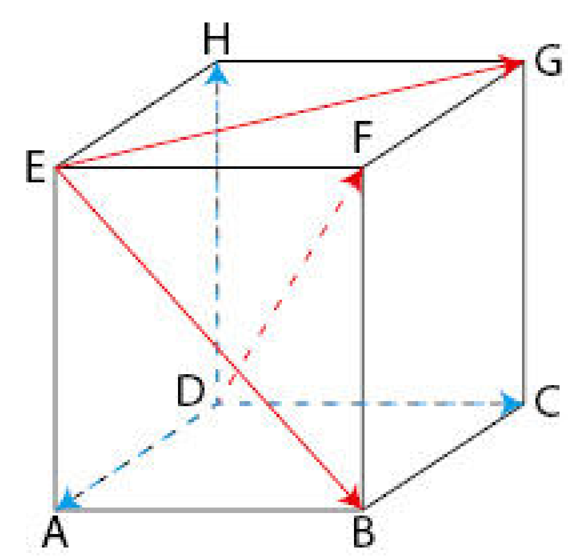
b) En déduire que dans l'espace, on a également $\overrightarrow{AD} \cdot (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AD} \cdot \text{AH} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$.

2 Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AF}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BG}$.
a) Choisir des représentants des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dont les extrémités appartiennent à un même plan.
b) Calculer alors $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

3 Calculer $\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{DC}$. Que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{EA}$ et $\overrightarrow{DC}$?
On dit alors que **les droites (EA) et (DC) sont orthogonales**.

2 Produit scalaire et repère orthonormé

ABCDEFGH est le cube d'arête 1 de l'activité précédente.
On se place dans le repère $(D\,;\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$.



1 **a)** Justifier que les droites (DA), (DC) et (DH) sont perpendiculaires deux à deux et que DA = DC = DH.
On dit que le repère $(D\,;\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$ est **orthonormé**.
b) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de coordonnées respectives $(x\,;y\,;z)$ et $(x'\,;y'\,;z')$ dans le repère orthonormé $(D\,;\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$.
- Exprimer les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{DH}$.
- Développer le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ en utilisant le fait que dans l'espace, le produit scalaire est encore bilinéaire et symétrique. En déduire que $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$.

1 **a)** Utiliser la formule précédente pour démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{EB}$ et $\overrightarrow{DF}$ sont orthogonaux.
b) Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{DF}$ sont orthogonaux.
On dit alors que **la droite (DF) est orthogonale au plan (EBG)**.

Exercices
- **1** à **4** (ci-contre)
- **20** à **42**

1 Produit scalaire dans l'espace

Vidéo JaiCompris.com — Cette notion est présentée en vidéo

A Extension du produit scalaire à l'espace

On étend aux vecteurs de l'espace la définition du produit scalaire dans le plan vue en classe de Première.

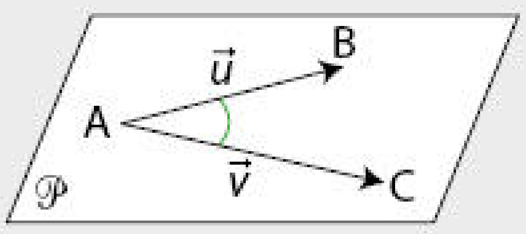
Définition

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de l'espace. A, B et C sont trois points de l'espace tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.
Il existe au moins un plan $\mathscr{P}$ contenant les points A, B et C.
Le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, est le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ calculé dans le plan $\mathscr{P}$.

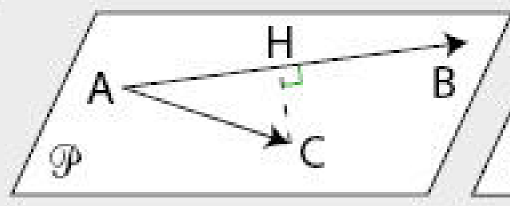
Propriétés

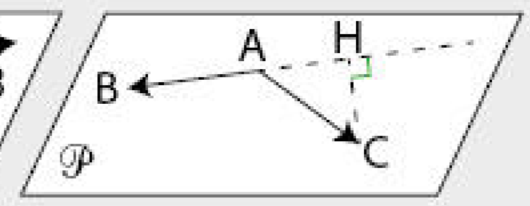
$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ sont deux vecteurs non nuls de l'espace.

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$



- Si H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB), alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$.





Définition

Le **carré scalaire** d'un vecteur $\vec{u}$, noté $\vec{u}^2$, est le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{u}$.

Ainsi, pour tout vecteur $\vec{u}$, $\vec{u}^2 = ||\vec{u}||^2$ et pour tous points A et B, $\overrightarrow{AB}^2 = ||\overrightarrow{AB}||^2 = AB^2$.

B Extension des propriétés algébriques

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de l'espace et k est un nombre réel.

Propriété

$\vec{u}$ **est orthogonal à** $\vec{v}$ équivaut à $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Remarque : le vecteur nul $\vec{0}$ est orthogonal à tout vecteur de l'espace.

Propriétés : Symétrie et bilinéarité

(1) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ **(2)** $\vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$ **(3)** $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

Remarque : la bilinéarité n'est pas une extension banale du plan à l'espace ; en effet, les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas nécessairement coplanaires. Pour une démonstration, voir l'exercice **77** p. 130.

Propriétés

(1) $||\vec{u} + \vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + ||\vec{v}||^2$ **(2)** $||\vec{u} - \vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + ||\vec{v}||^2$

En effet, ces formules se déduisent immédiatement des développements de $(\vec{u} + \vec{v})^2$ et $(\vec{u} - \vec{v})^2$.

Propriétés : Formules de polarisation

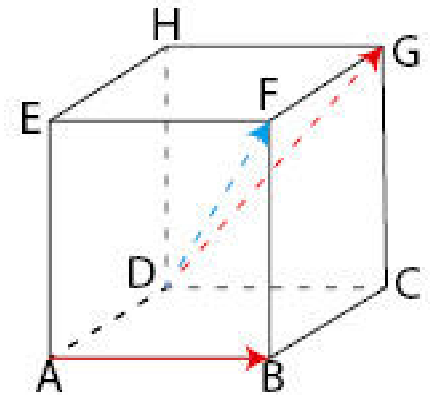
(1) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - ||\vec{u} - \vec{v}||^2)$ **(2)** $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(||\vec{u} + \vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2)$

Ces formules se déduisent immédiatement de la propriété précédente.

En particulier, pour trois points A, B, C de l'espace, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$.

EXERCICES RÉSOLUS

1 Calculer un produit scalaire



ABCDEFGH est un cube d'arête 1.

a) Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DG}$.

b) Utiliser la décomposition $\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{DG}+\overrightarrow{GF}$ pour calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DF}$.

Solution

a) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DG}$.

Or, C est le projeté orthogonal de G sur (DC), donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DC}=DC^2=1$.

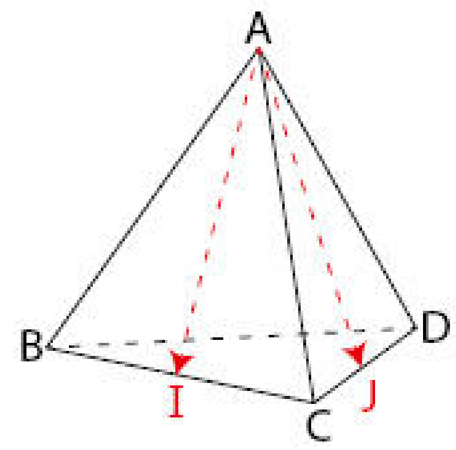
b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{DG}+\overrightarrow{GF})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DG}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{GF}$.

Or, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{EF}$ donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{GF}=\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{GF}$. EFGH est un carré donc $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GF}$ sont orthogonaux et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{GF}=0$.

De plus, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DG}=1$ d'après **a)**, donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DF}=1+0=1$.

> Le produit scalaire est indépendant des représentants choisis pour les vecteurs : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{EF}$.

2 Utiliser le produit scalaire pour déterminer un angle



ABCD est un tétraèdre régulier (chaque face est un triangle équilatéral) d'arête 6.
I et J sont les milieux respectifs des arêtes [BC] et [CD].

a) Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$, puis AI et AJ.

b) Calculer $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AJ}$ en utilisant les égalités $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AJ}$.

c) Exprimer ce produit scalaire en fonction de $\cos(\widehat{IAJ})$ et en déduire la mesure, en degré, de l'angle $\widehat{IAJ}$. *Arrondir au dixième.*

Solution

a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(AB^2+AC^2-BC^2)=\frac{1}{2}(6^2+6^2-6^2)=18.$

De même, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=18$ et $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=18$.

Dans le triangle AIC rectangle en I, $AI^2=AC^2-IC^2$ soit $AI^2=6^2-3^2=27$ et $AI=3\sqrt{3}$. De même $AJ=3\sqrt{3}$.

b) $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AJ}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+AC^2+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD})$

Donc $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AJ}=\frac{1}{4}(18+18+6^2+18)=\frac{1}{4}\times 90=22{,}5.$

c) $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AJ}=AI\times AJ\times\cos(\widehat{IAJ})$. Ainsi, $22{,}5=3\sqrt{3}\times3\sqrt{3}\times\cos(\widehat{IAJ})$.

Donc $\cos(\widehat{IAJ})=\frac{22{,}5}{27}=\frac{5}{6}$ et avec la calculatrice, $\widehat{IAJ}\approx 33{,}6°$.

> Autre façon de calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$:
> $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=6\times6\times\cos(60°)=18.$

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 1

3 On reprend le cube d'arête 1 de l'exercice 1.

a) Calculer $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{CG}$.

b) Utiliser la décomposition $\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EH}$ pour calculer $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CG}$.

Sur le modèle de l'exercice résolu 2

4 On reprend le tétraèdre d'arête 6 de l'exercice 2.

a) Calculer $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DI}$.

b) Déterminer $\cos(\widehat{ADI})$ et en déduire la mesure, en degré, de l'angle $\widehat{ADI}$. *Arrondir au dixième.*

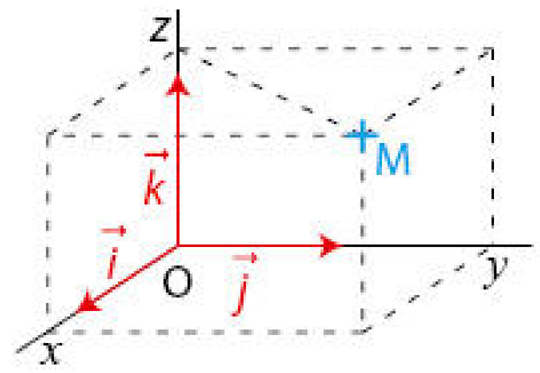
Exercices
- 5 à 8 (ci-contre)
- 43 à 49

2 Base orthonormée. Repère orthonormé

A Bases et repères orthonormés

Définitions

- Dire qu'une **base** $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace est **orthonormée** signifie que ses vecteurs sont deux à deux orthogonaux et de même norme choisie pour unité ($||\vec{i}|| = ||\vec{j}|| = ||\vec{k}|| = 1$).
- O étant un point de l'espace, le repère $(O\,;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est **orthonormé** lorsque la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthonormée.



B Expression analytique du produit scalaire

Propriété

Dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, si $\vec{u}\,(x\,;y\,;z)$ et $\vec{v}(x'\,;y'\,;z')$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$.

Démonstration

$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ et $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$, donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \cdot (x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k})$.

D'où $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx'\vec{i}^2 + yy'\vec{j}^2 + zz'\vec{k}^2 + (xy' + yx')\vec{i} \cdot \vec{j} + (xz' + zx')\vec{i} \cdot \vec{k} + (zy' + yz')\vec{j} \cdot \vec{k}$.

$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthonormée donc $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$ et $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$, donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$.

Exemple

Si $\vec{u}(1\,;4\,;0)$ et $\vec{v}(-2\,;5\,;1)$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \times (-2) + 4 \times 5 + 0 \times 1 = 18$.

Propriétés

Dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, $\vec{u}\,(x\,;y\,;z)$ et $\vec{v}\,(x'\,;y'\,;z')$ sont deux vecteurs.

(1) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** équivaut à $xx' + yy' + zz' = 0$; **(2)** $||\vec{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Démonstrations

(1) $\vec{u}\,(x\,;y\,;z)$ et $\vec{v}\,(x'\,;y'\,;z')$ sont orthogonaux équivaut à $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, c'est-à-dire $xx' + yy' + zz' = 0$.

(2) $||\vec{u}||^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = x^2 + y^2 + z^2$. Ainsi $||\vec{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Exemples

- Les vecteurs $\vec{u}(1\,;-2\,;5)$ et $\vec{v}(1\,;3\,;1)$ sont orthogonaux car $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \times 1 + (-2) \times 3 + 5 \times 1 = 0$.
- Si $\vec{u}(1\,;2\,;3)$, alors $||\vec{u}|| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$.

Propriété

Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, $A(x_A\,;y_A\,;z_A)$ et $B(x_B\,;y_B\,;z_B)$ sont deux points.

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

Démonstration

$\overrightarrow{AB}\,(x_B - x_A\,;y_B - y_A\,;z_B - z_A)$. Ainsi $AB = ||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

Exemple

$A(-1\,;5\,;3)$ et $B(9\,;5\,;-2)$ sont deux points dans un repère orthonormé.

La longueur AB est égale à : $AB = \sqrt{(9+1)^2 + (5-5)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$.

EXERCICES RÉSOLUS

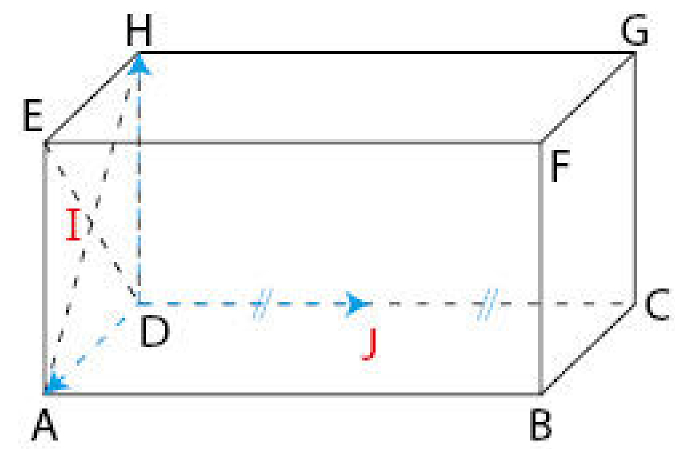
5 Calculer une distance dans un repère orthonormé

ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle tel que AD = AE =1 et AB = 2.
I est le centre du carré ADHE et J est le milieu de l'arête [DC].

a) Justifier que le repère $(D\,;\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DJ}, \overrightarrow{DH})$ est orthonormé.

b) Donner les coordonnées des points B et I dans ce repère.

c) En déduire la longueur BI.



Solution

a) ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle donc les vecteurs $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DJ}$ et $\overrightarrow{DH}$ sont orthogonaux deux à deux. De plus, DA = DJ = DH = 1, donc le repère $(D\,;\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DJ}, \overrightarrow{DH})$ est orthonormé.

b) $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{DJ}$ donc $B(1\,;2\,;0)$.

$\overrightarrow{DI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DH}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DH}$

donc $I\left(\frac{1}{2}\,;0\,;\frac{1}{2}\right)$.

Les coordonnées $(x\,;y\,;z)$ d'un point M dans le repère $(D\,;\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DJ}, \overrightarrow{DH})$ sont les nombres tels que $\overrightarrow{DM} = x\overrightarrow{DA} + y\overrightarrow{DJ} + z\overrightarrow{DH}$.

c) Donc $\overrightarrow{BI}\left(\frac{1}{2} - 1\,;0 - 2\,;\frac{1}{2} - 0\right)$, soit $\overrightarrow{BI}\left(-\frac{1}{2}\,;-2\,;\frac{1}{2}\right)$.

Ainsi, $BI = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + (-2)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

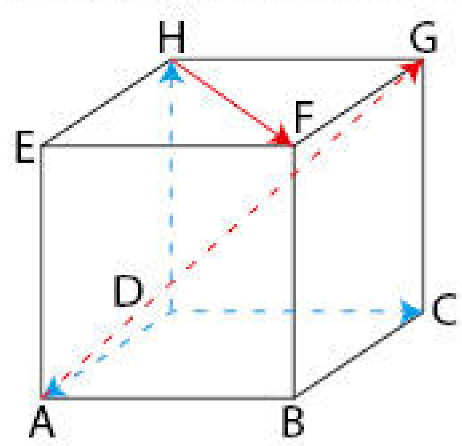
$$\sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

6 Étudier l'orthogonalité dans un repère orthonormé

ABCDEFGH est un cube d'arête 1.
On se place dans le repère orthonormé $(D\,;\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$.

a) Donner les coordonnées des sommets du cube dans ce repère.

b) Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{HF}$ sont orthogonaux.



Solution

a) $D(0\,;0\,;0)$, $A(1\,;0\,;0)$, $C(0\,;1\,;0)$, $H(0\,;0\,;1)$, $B(1\,;1\,;0)$, $E(1\,;0\,;1)$, $G(0\,;1\,;1)$, $F(1\,;1\,;1)$.

b) $\overrightarrow{AG}(-1\,;1\,;1)$ et $\overrightarrow{HF}(1\,;1\,;0)$ donc $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{HF} = -1\times1 + 1\times1 + 1\times0 = 0$.

Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{HF}$ sont orthogonaux.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 5

7 On reprend la figure de l'exercice 5.
On se place dans le repère $(C\,;\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CJ}, \overrightarrow{CG})$.

a) Justifier que ce repère est orthonormé.

b) K est le centre de la face EFGH et L celui de la face BCGF.
Donner les coordonnées des points K et L dans ce repère.

c) En déduire la longueur KL.

Sur le modèle de l'exercice résolu 6

8 On reprend la figure de l'exercice 6. On se place dans le repère orthonormé $(B\,;\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BF})$.

a) Donner les coordonnées des sommets du cube dans ce repère.

b) Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{BH}$ sont orthogonaux.

c) Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{HA}$ et $\overrightarrow{EC}$ sont orthogonaux.

Cours

Exercices
- 9 à 12 (ci-contre)
- 50 à 68

3 Orthogonalité dans l'espace

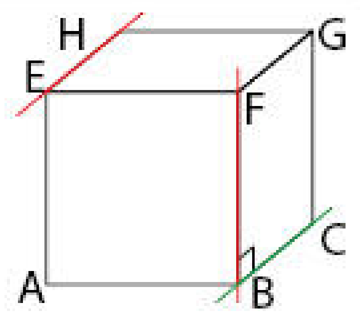
A Orthogonalité de deux droites

Définition

Dire que deux droites sont **orthogonales** signifie que leurs parallèles passant par un même point quelconque sont perpendiculaires.

Exemple

Dans ce cube ABCDEFGH, les droites (BF) et (EH) sont orthogonales car la parallèle (BC) à la droite (EH) est perpendiculaire en B à la droite (BF).



Propriété

Deux **droites** d et d' de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont **orthogonales** si, et seulement si, $\vec{u} \cdot \vec{u}' = 0$.

Démonstration

A est un point de l'espace, Δ et Δ' sont les parallèles aux droites d et d' passant par A. Les droites Δ et Δ' admettent respectivement $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ comme vecteurs directeurs. Par définition, les droites d et d' sont orthogonales si, et seulement si, les droites Δ et Δ' sont perpendiculaires, c'est-à-dire $\vec{u} \cdot \vec{u}' = 0$.

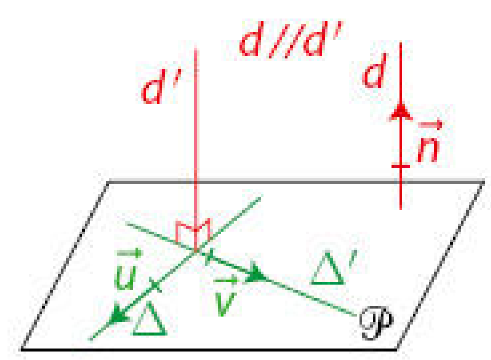
B Orthogonalité d'une droite et d'un plan

Définition

Dire qu'une droite est **orthogonale** à un plan signifie qu'elle est orthogonale à toute droite de ce plan.

Propriété

Une droite d est **orthogonale** à un plan $\mathscr{P}$ si, et seulement si, elle est orthogonale à **deux droites sécantes** de ce plan. Autrement dit :
une droite d de vecteur directeur $\vec{n}$ est orthogonale à un plan $\mathscr{P}$ si, et seulement si, il existe deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de ce plan tels que $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ et $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$.



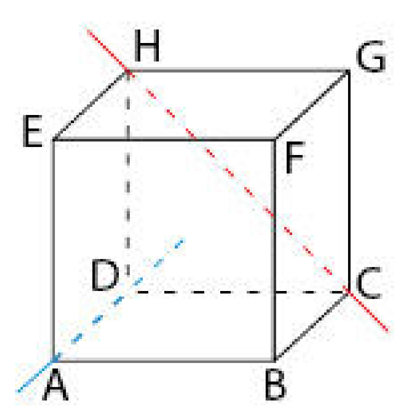
Démonstration

- On suppose que d est orthogonale à un plan $\mathscr{P}$, c'est-à-dire que d est orthogonale à toute droite de ce plan. En particulier, d est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan. Ce qui est équivalent à dire qu'il existe deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathscr{P}$ tels que $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ et $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$.
- Réciproquement, on suppose qu'il existe deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan $\mathscr{P}$ tels que $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ et $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$.

On note D une droite quelconque de vecteur directeur $\vec{w}$ contenue dans ce plan. Ainsi les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires, donc il existe deux réels α et β tels que $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$.
Ainsi, $\vec{n} \cdot \vec{w} = \vec{n} \cdot (\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha\vec{n} \cdot \vec{u} + \beta\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$. Donc toute droite D de $\mathscr{P}$ est orthogonale à d.
Ainsi d est orthogonale à $\mathscr{P}$.

Exemple

ABCDEFGH est un cube.
- La droite (DA) est perpendiculaire aux deux droites sécantes (DC) et (DH) du plan (DCH). Donc la droite (DA) est orthogonale au plan (DCH).
- La droite (DA) est orthogonale au plan (DCH), elle est donc orthogonale à toute droite du plan (DCH), en particulier à la droite (HC).



EXERCICES RÉSOLUS

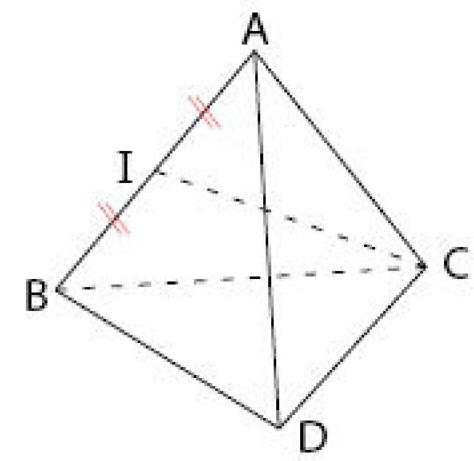
9 Démontrer l'orthogonalité avec le produit scalaire

ABCD est un tétraèdre régulier d'arête un nombre réel $a > 0$.
I est le milieu du segment [AB].

a) Exprimer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ en fonction de a.

b) Utiliser la relation de Chasles pour calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$.

c) En déduire que les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.



Solution

a) Dans le triangle équilatéral ABC, la droite (CI) est aussi médiatrice du segment [AB].

Donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI} = AB \times AI = a \times \dfrac{a}{2} = \dfrac{a^2}{2}$. De même, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \dfrac{a^2}{2}$.

b) D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$.

Donc, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot (-\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = -\dfrac{a^2}{2} + \dfrac{a^2}{2} = 0$.

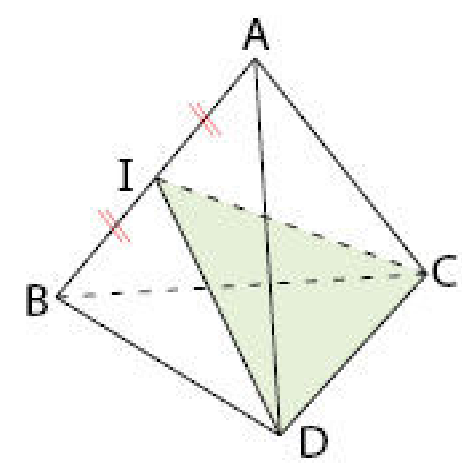
c) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont donc orthogonaux. Ainsi, les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.

10 Démontrer l'orthogonalité sans le produit scalaire

ABCD est un tétraèdre régulier. I est le milieu du segment [AB].

a) Démontrer que la droite (AB) est orthogonale au plan (CID).

b) En déduire que les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.



Solution

a) Dans le triangle équilatéral ABC, la droite (CI) est aussi médiatrice du segment [AB]. Ainsi les droites (CI) et (AB) sont orthogonales.
De même, les droites (DI) et (AB) sont orthogonales. La droite (AB) est donc orthogonale à deux droites sécantes du plan (CID). La droite (AB) est donc orthogonale au plan (CID).

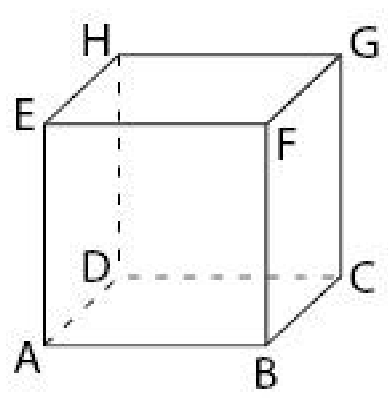
b) La droite (AB) est orthogonale au plan (CID), donc elle est orthogonale à toute droite de ce plan. En particulier, la droite (AB) est orthogonale à la droite (CD).

On vient ainsi de démontrer que dans un tétraèdre régulier, les arêtes opposées sont deux à deux orthogonales.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 9

11 ABCDEFGH est un cube d'arête un nombre réel a, avec $a > 0$.



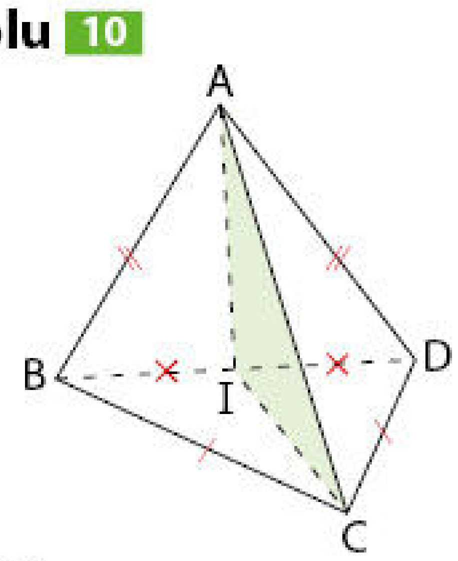
a) Exprimer $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{BG}$ en fonction de a.

b) Utiliser $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DH}$ pour calculer $\overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{BG}$.

c) En déduire que les droites (DF) et (BG) sont orthogonales.

Sur le modèle de l'exercice résolu 10

12 ABCD est un tétraèdre tel que le triangle ABD est isocèle en A et le triangle BCD est isocèle en C.
I est le milieu du segment [BD].



a) Démontrer que la droite (BD) est orthogonale au plan (AIC).

b) En déduire que les droites (BD) et (AC) sont orthogonales.

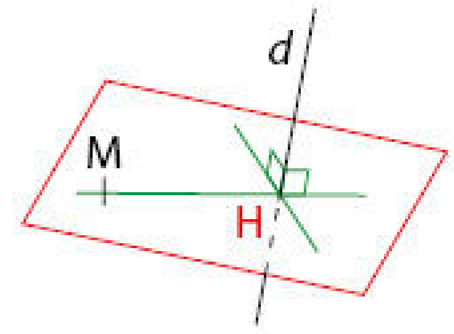
Exercices
- 13 à 16 (ci-contre)
- 69 à 73

4 Projections orthogonales dans l'espace

A Projection orthogonale d'un point sur une droite

Définition

Le **projeté orthogonal** d'un point M sur une droite d est le point d'intersection H de d avec le plan passant par M et orthogonal à d.



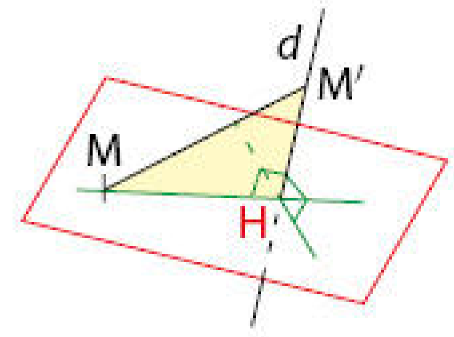
Remarques : • Le plan passant par M et orthogonal à d est unique.
• Lorsque $M \in d$, le projeté orthogonal de M sur d est le point M.

Propriété – Définition

Le projeté orthogonal H d'un point M sur une droite d est le point de d **le plus proche** de M.
On dit que MH est la **distance** du point M à la droite d.

Démonstration

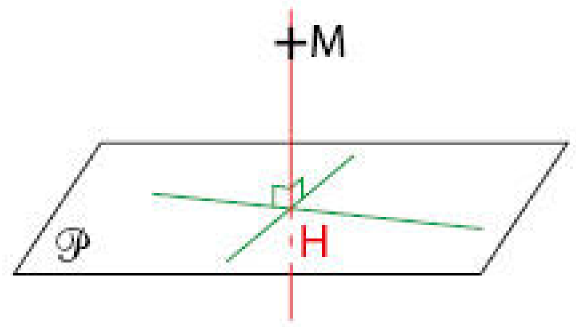
• Si $M \in d$, alors $MH = 0$ et H est le point de d le plus proche de M.
• Si $M \notin d$, alors pour tout point M′ de d, le triangle MHM′ est rectangle en H, donc son hypoténuse est le côté le plus long soit $MM' > MH$.
Donc H est le point de d le plus proche de M.



B Projection orthogonale d'un point sur un plan

Définition

Le **projeté orthogonal** d'un point M sur un plan $\mathscr{P}$ est le point d'intersection H du plan $\mathscr{P}$ et de la droite passant par M orthogonale à $\mathscr{P}$.



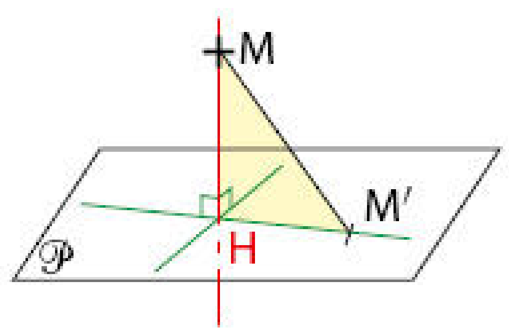
Remarque : lorsque $M \in \mathscr{P}$, le projeté orthogonal de M sur $\mathscr{P}$ est le point M.

Propriété – Définition

Le projeté orthogonal H d'un point M sur un plan $\mathscr{P}$ est le point de $\mathscr{P}$ **le plus proche** de M.
On dit que MH est la **distance** du point M au plan $\mathscr{P}$.

Démonstration

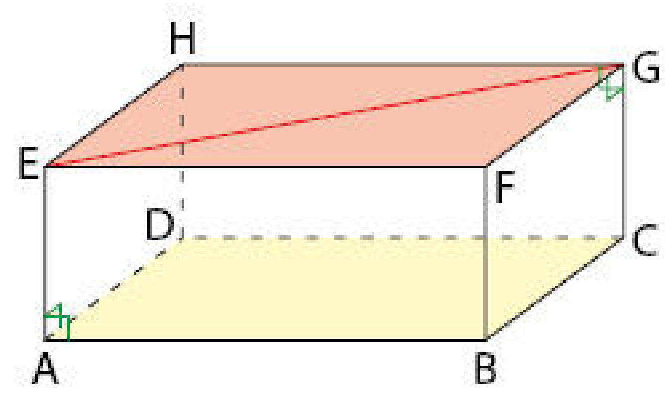
• Si $M \in \mathscr{P}$, alors $MH = 0$ et H est le point de $\mathscr{P}$ le plus proche de M.
• Si $M \notin \mathscr{P}$, alors pour tout point M′ de $\mathscr{P}$, le triangle MHM′ est rectangle en H, donc son hypoténuse est le côté le plus long, soit $MM' > MH$.
Donc H est le point de $\mathscr{P}$ le plus proche de M.



Vidéo
JAICOMPRIS.COM
Cette démonstration est présentée en vidéo

Exemples

ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle.
• Le projeté orthogonal du point E sur le plan (ABC) est le point A. En effet, la droite (EA) est orthogonale au plan (ABC).
• Le projeté orthogonal du point E sur la droite (CG) est le point G.
En effet, le plan (EFG) est orthogonal à la droite (CG) et passe par E.



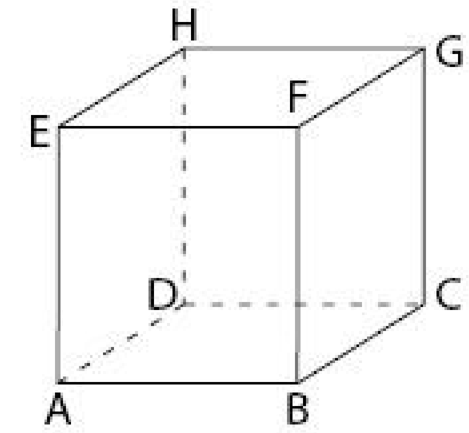
EXERCICES RÉSOLUS

13 Déterminer un projeté orthogonal

ABCDEFGH est un cube.

a) Déterminer le projeté orthogonal du point E sur le plan (CDG).

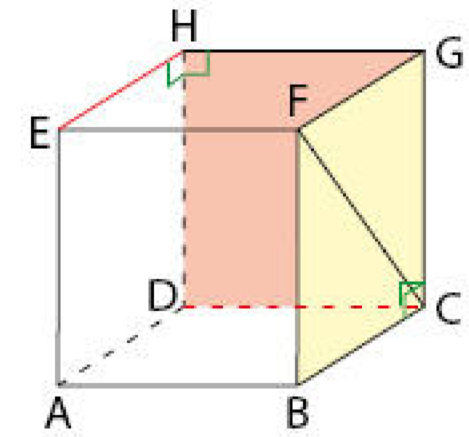
b) Déterminer le projeté orthogonal du point F sur la droite (CD).



Solution

a) La droite (EH) est orthogonale aux deux droites sécantes (HG) et (HD) du plan (CDG). Ainsi, la droite passant par le point E et orthogonale au plan (CDG) est la droite (EH). Elle coupe le plan (CDG) en H.
Ainsi, H est le projeté orthogonal du point E sur le plan (CDG).

b) Le plan (BCG) contient deux droites sécantes (CB) et (CG) orthogonales à la droite (CD). De plus, F appartient à ce plan. Donc (BCG) est le plan passant par F et orthogonal à (CD). Il coupe la droite (CD) en C.
Ainsi, C est le projeté orthogonal du point F sur la droite (CD).



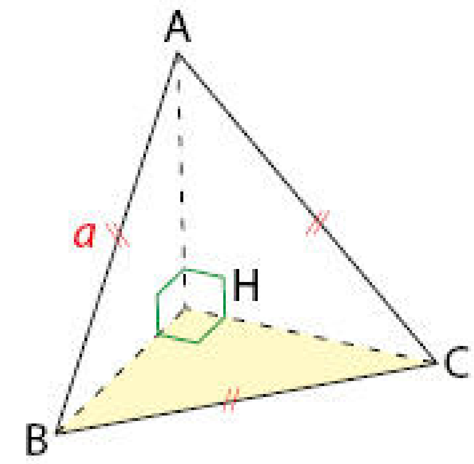
14 Calculer une distance

ABCH est un tétraèdre tel que ABC est un triangle équilatéral d'arête a (avec $a > 0$), et les autres faces sont des triangles rectangles en H.

a) Déterminer le produit scalaire $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC}$.

b) Développer et réduire le produit scalaire $(\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AC})$.

c) Exprimer la distance du point A au plan (BHC) en fonction de a.



Solution

a) Le triangle HBC est rectangle en H donc $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC} = 0$.

b) $(\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AC}) = HA^2 + \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

Donc

$(\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AC}) = HA^2 - HA^2 - HA^2 + a \times a \times \cos(60°)$.

D'où $(\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AC}) = \dfrac{a^2}{2} - HA^2$.

> $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AC}$
> Or, H est le projeté orthogonal de C sur (AH) donc $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{AC} = -HA^2$.

c) H est le projeté orthogonal du point A sur le plan (BHC), donc la distance du point A au plan (BHC) est égale à HA.

Or, $(\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC} = 0$ donc $\dfrac{a^2}{2} - HA^2 = 0$ et $HA = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

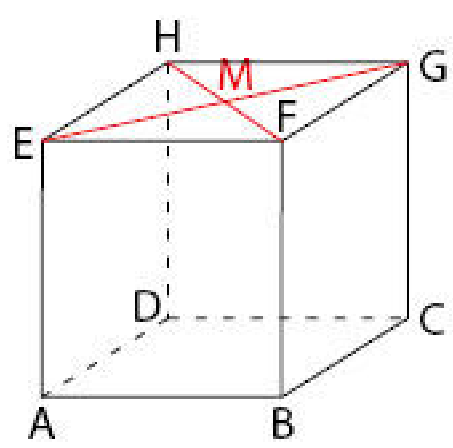
EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 13

15 ABCDEFGH est un cube.
M est le centre de la face EFGH.

a) Déterminer le projeté orthogonal du point M sur le plan (ABC).

b) Déterminer le projeté orthogonal du point M sur la droite (FB).



Vidéo

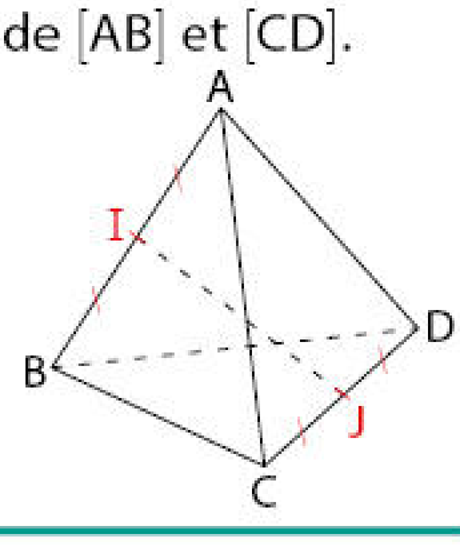
JaiCompris.com — Cet exercice est corrigé en vidéo

Sur le modèle de l'exercice résolu 14

16 ABCD est un tétraèdre régulier d'arête 1.
I et J sont les milieux respectifs de [AB] et [CD].

a) Démontrer que les droites (IJ) et (CD) sont orthogonales.

b) En déduire la distance du point I à la droite (CD).



EXERCICE RÉSOLU

17 Reconnaître des droites orthogonales

Cours 3. A

L'espace est muni d'un repère orthonormé.

a) A, B, C, D sont quatre points de l'espace dont les coordonnées sont connues.
Écrire une fonction **Sont_orthogonales** en langage Python qui a pour paramètres les coordonnées successives des points A, B, C, D et qui renvoie si les droites (AB) et (CD) sont orthogonales ou non.

b) On donne $A\left(1\,;1\,;\frac{3}{4}\right)$, $B\left(0\,;\frac{1}{2}\,;1\right)$, $C\left(1\,;0\,;-\frac{5}{4}\right)$, $D\left(1\,;\frac{3}{4}\,;\frac{1}{4}\right)$.
Saisir et exécuter la fonction précédente afin d'étudier l'orthogonalité des droites (AB) et (CD).

Solution

a) Les droites (AB) et (CD) sont orthogonales si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux.
La fonction **Sont_orthogonales** calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$, puis calcule le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$.
Enfin on teste si ce produit scalaire est nul ou non.

```python
def Sont_orthogonales(xA,yA,zA,xB,yB,zB,xC,yC,zC,xD,yD,zD):
    a=xB-xA
    b=yB-yA
    c=zB-zA
    d=xD-xC
    e=yD-yC
    f=zD-zC
    w=a*d+b*e+c*f
    if w==0:
        M='(AB) et (CD) sont orthogonales'
    else:
        M='(AB) et (CD) ne sont pas orthogonales'
    return M
```

Les variables a, b, c ont pour valeurs les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et les variables d, e, f celles du vecteur $\overrightarrow{CD}$.
La valeur de la variable w est le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$.
Le test compare alors la variable w à 0 afin de définir la chaîne M.

b) L'affichage obtenu ci-dessous montre que les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.

```
>>> Sont_orthogonales(1,1,0.75,0,0.5,1,1,0,-1.25,1,0.75,0.25)
'(AB) et (CD) sont orthogonales'
```

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 17

18 L'espace est muni d'un repère orthonormé.
E, F et G sont trois points de l'espace dont les coordonnées sont connues.
Écrire une fonction **Est_rectangle** en langage Python qui a pour paramètres les coordonnées de ces points et qui renvoie si le triangle EFG est rectangle ou non.
Dans le cas où le triangle est rectangle, prévoir d'afficher en quel sommet.
Tester cette fonction.

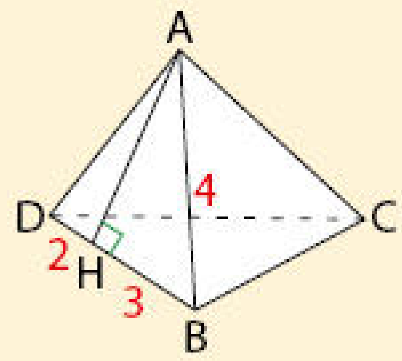
19 L'espace est muni d'un repère orthonormé.
A et B sont deux points distincts de l'espace dont les coordonnées sont connues.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non colinéaires dont les coordonnées sont connues.
Écrire une fonction **Est_orthogonale** en langage Python qui a pour paramètres les coordonnées de A, B, $\vec{u}$, $\vec{v}$ et qui renvoie si la droite (AB) est orthogonale ou non à un plan dont $(\vec{u}\,;\vec{v})$ est un couple de vecteurs non colinéaires.
Tester cette fonction.

Produit scalaire dans l'espace

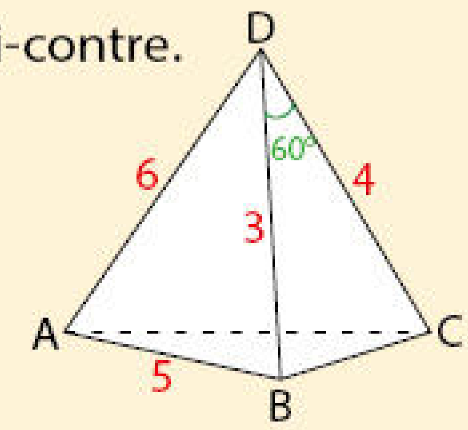
Cours 1. A

Questions flash — À l'oral

20 ABCD est le tétraèdre ci-contre et H est le pied de la hauteur issue de A du triangle ABD.
Déterminer mentalement le produit scalaire $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}$.



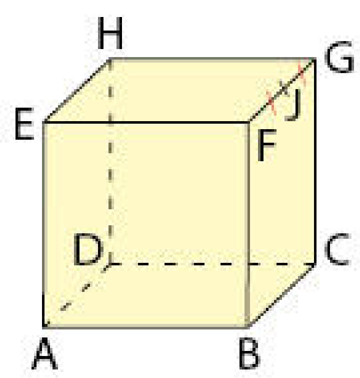
21 ABCD est le tétraèdre ci-contre.
Déterminer mentalement le produit scalaire $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}$.



22 ABCD est le tétraèdre ci-contre.
Jeanne affirme : « $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=26$ ». A-t-elle raison ?

23 A, B, C sont trois points non alignés de l'espace et on se place dans le plan (ABC).
Le projeté orthogonal H du point C sur la droite (AB) n'appartient pas à la demi-droite [AB).
Sachant que AB = 6 et AH = 2, calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

Pour les exercices 24 à 26, le cube a pour arête a avec $a>0$.
J est le milieu de l'arête [FG].
Déterminer chaque produit scalaire en précisant l'expression et le plan utilisés.

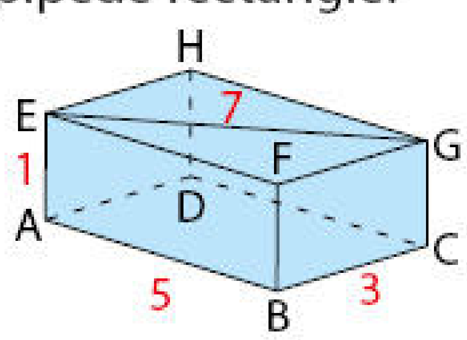


24 a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EG}$ c) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EH}$

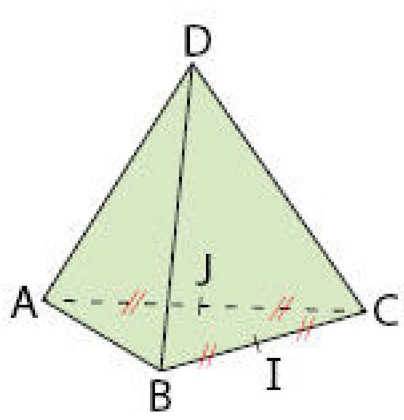
25 a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ b) $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AB}$ c) $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}$

26 a) $\overrightarrow{FJ}\cdot\overrightarrow{FA}$ b) $\overrightarrow{FJ}\cdot\overrightarrow{GD}$ c) $\overrightarrow{BJ}\cdot\overrightarrow{EH}$

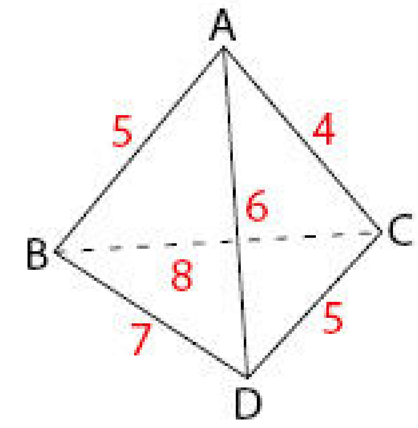
27 ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle.
Calculer :
a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$
b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$
c) $\overrightarrow{EG}\cdot\overrightarrow{BC}$



28 ABCD est un tétraèdre régulier d'arête 2. I et J sont les milieux respectifs des segments [BC] et [AC].
Calculer chaque produit scalaire.
a) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AJ}$ b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$
c) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IJ}$ d) $\overrightarrow{DI}\cdot\overrightarrow{DC}$



29 ABCD est un tétraèdre.
Dans chaque cas, calculer le produit scalaire.
a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BA}$
c) $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CD}$ d) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}$



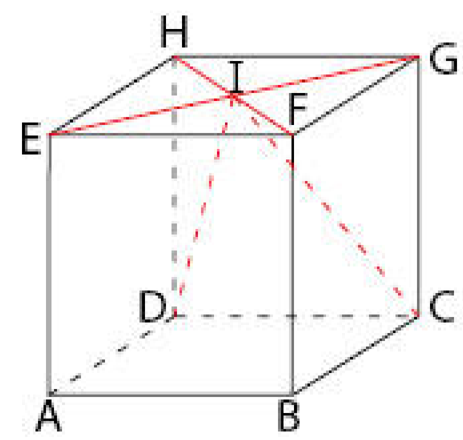
30 $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de l'espace tels que :
$$\|\vec{u}\|=3,\ \|\vec{v}\|=5,\ \|\vec{u}+\vec{v}\|=4.$$
Calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

31 $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de l'espace tels que :
$$\|\vec{u}\|=1,\ \|\vec{v}\|=2,\ \|\vec{v}-\vec{u}\|=\sqrt{5}.$$
Calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

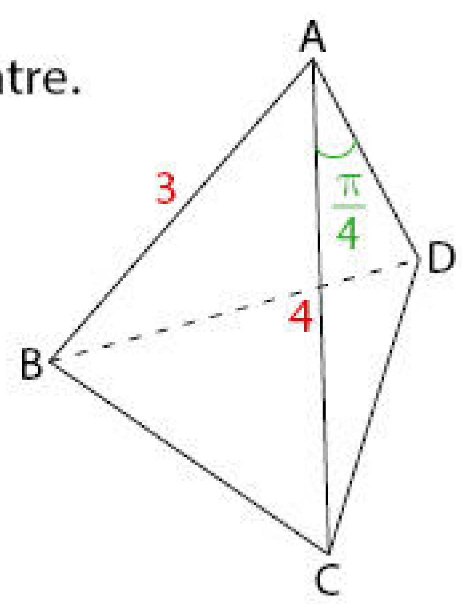
32 Algo python
A, B, C sont trois points de l'espace.
Que renvoie cette fonction écrite en langage Python lorsque $a=BC$, $b=AC$ et $c=AB$?

```python
def P(a,b,c):
    p=(1/2)*(a**2+b**2-c**2)
    return p
```

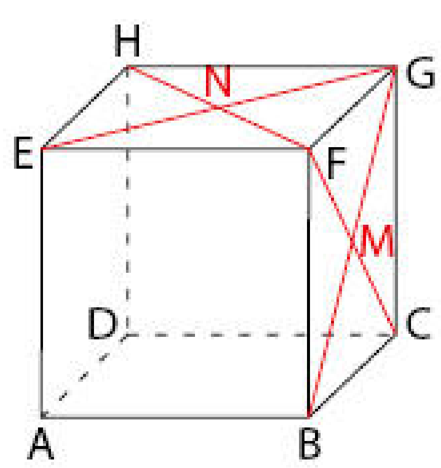
33 ABCDEFGH est un cube d'arête a et I est le centre de la face EFGH.
a) Donner la nature du triangle DCI.
b) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{ID}\cdot\overrightarrow{IC}$.
c) Exprimer ce produit scalaire en fonction de $\cos(\widehat{DIC})$ et en déduire la mesure en degré de l'angle $\widehat{DIC}$.
Arrondir au dixième.



34 ABCD est le tétraèdre ci-contre.
a) On donne $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=6$.
Déterminer la mesure, en radian, de l'angle $\widehat{BAC}$.
b) On donne $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=8$.
Déterminer la longueur AD.
Arrondir au dixième.



35 ABCDEFGH est un cube d'arête a, avec $a>0$.
Les points M et N sont les centres des faces BCGF et EFGH.
a) Vérifier que $AM^2=\dfrac{3}{2}a^2$.
b) Exprimer AN^2 et MN^2 en fonction de a.
c) En déduire la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}$.



Règles de calculs

Cours 1. B

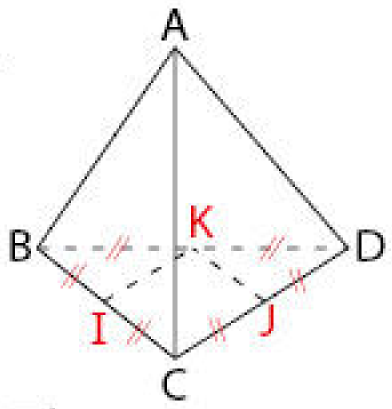
Questions flash À l'oral

36 Dans l'espace, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs tels que $\vec{u}\cdot\vec{v}=2$.
Dans chaque cas, déterminer mentalement le produit scalaire.

a) $(3\vec{u})\cdot\vec{v}$ **b)** $\vec{u}\cdot(-\vec{v})$ **c)** $\left(\dfrac{1}{2}\vec{u}\right)\cdot(-\vec{v})$

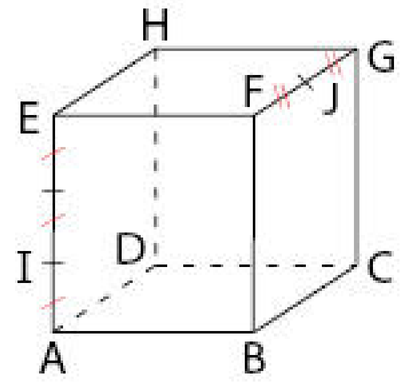
37 Dans l'espace, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs tels que $\|\vec{u}\|=2$, $\|\vec{v}\|=3$, et $\vec{u}\cdot\vec{v}=1$.
Franck affirme : « $(\vec{u}+\vec{v})^2=14$ ». A-t-il raison ?

38 ABCD est un tétraèdre régulier d'arête a et I, J, K sont les milieux respectifs des arêtes [BC], [CD], [BD].



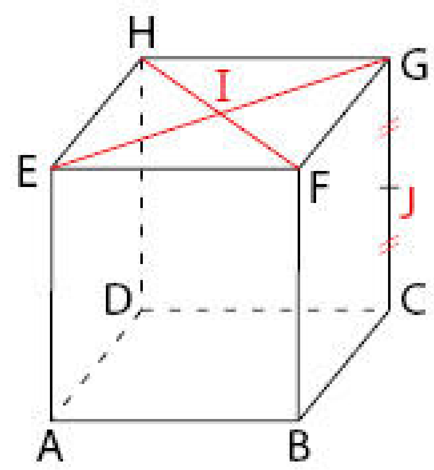
a) Calculer chacun des produits scalaires $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{JK}$.
b) En déduire le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IK}$.

39 Ce cube a pour arête 2.
I est le point de l'arête [AE] tel que $\overrightarrow{AI}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AE}$ et J est le milieu de l'arête [FG].



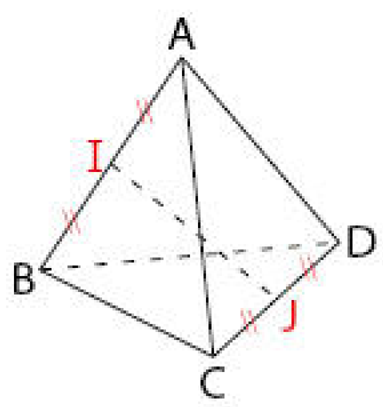
Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BJ}$.
Conseil : écrire que $\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{BJ}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AJ}$.

40 ABCDEFGH est un cube d'arête a.
I est le centre de la face EFGH et J est le milieu de l'arête [CG].
Utiliser la relation de Chasles pour exprimer en fonction de a chaque produit scalaire.



a) $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{FB}$ **b)** $\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{DB}$.

41 ABCD est un tétraèdre régulier d'arête a.
I et J sont les milieux respectifs des arêtes [AB] et [DC].



a) Exprimer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ en fonction de a.
b) En déduire $\overrightarrow{AJ}\cdot\overrightarrow{AI}$.

42 Dans l'espace, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de même norme.
Démontrer que les vecteurs $\vec{u}-\vec{v}$ et $\vec{u}+\vec{v}$ sont orthogonaux.

Repère orthonormé

Cours 2

Questions flash À l'oral

43 Dans un repère orthonormé, calculer mentalement la norme du vecteur $\vec{u}\,(1\,;3\,;-1)$.

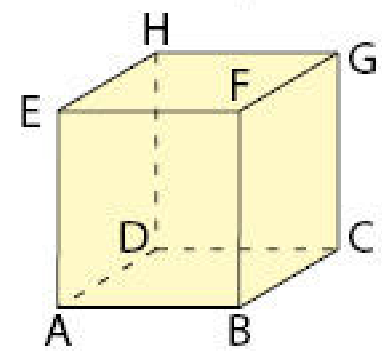
44 Dans un repère orthonormé, calculer mentalement la longueur AB avec A(1 ; 0 ; 2) et B (0 ; 1 ; 1).

45 On munit l'espace d'un repère orthonormé. Dans chaque cas, déterminer la longueur AB.
a) A(3 ; 1 ; 2) et B(5 ; – 1 ; 1)
b) A(– 4 ; 3 ; – 2) et B(3 ; – 1 ; 7)

46 Justifier l'affichage de la ligne 4 ci-dessous obtenu avec un logiciel de calcul formel.

1	A := (1, 2, −1)
	→ **A := (1, 2, −1)**
2	B := (0, 1, −2)
	→ **B := (0, 1, −2)**
3	C := (1, 2, 3)
	→ **C := (1, 2, 3)**
4	ProduitScalaire(vecteur(A, B), vecteur(A, C))
	→ −4

47 ABCDEFGH est un cube d'arête 1. On munit l'espace du repère orthonormé $(D\,;\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DH})$.
a) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{DH}$ et $\overrightarrow{BH}$.
b) Calculer la longueur AG.
c) Calculer chaque produit scalaire.

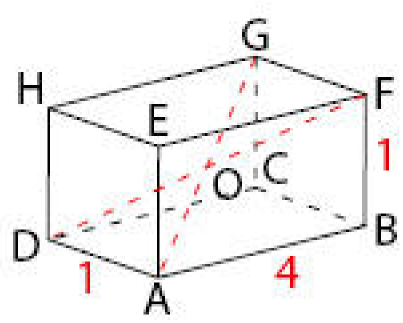


- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AG}$
- $\overrightarrow{DH}\cdot\overrightarrow{AG}$
- $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{DH}$

Vidéo

JaiCompris.com — Cet exercice est corrigé en vidéo

48 ABCDEFGH est le parallélépipède rectangle représenté ci-contre.



a) Choisir un repère orthonormé de l'espace d'origine A.
b) Calculer $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OF}$.
c) Déterminer la mesure, en degré, de l'angle $\widehat{AOF}$. *Arrondir au dixième.*

49 Déterminer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$, puis la mesure, en degré, de l'angle $\widehat{BAC}$. *Arrondir au centième si besoin.*
a) A(3 ; 1 ; 5) B(3 ; 5 ; 1) C(– 1 ; 5 ; 5)
b) A(0 ; 1 ; 0) B(7 ; 1 ; – 1) C(10 ; 0 ; 0)

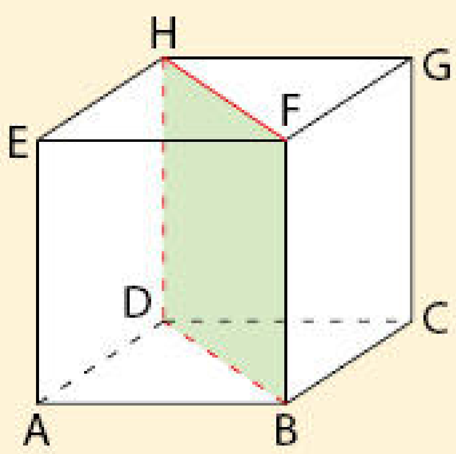
Orthogonalité dans l'espace

Cours 3

Questions flash — À l'oral

Pour les exercices 50 à 52, ABCDEFGH est un cube.

50 Charles affirme : « Les droites (FG) et (FB) sont orthogonales donc la droite (FG) est orthogonale au plan (HFB) ».
A-t-il raison ?



51 Lily affirme : « La droite (EG) est orthogonale au plan (HFB) ». A-t-elle raison ?

52 Déterminer mentalement celui de ces produits scalaires qui est nul.
(1) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}$ **(2)** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CG}$ **(3)** $\overrightarrow{ED}\cdot\overrightarrow{FC}$

53 Alix affirme : « Dans un repère orthonormé, les vecteurs $\vec{u}(1\,;1\,;1)$ et $\vec{v}(-1\,;-1\,;-1)$ sont orthogonaux. » A-t-il raison ?

54 Dans un repère orthonormé, déterminer mentalement celui de ces vecteurs qui est orthogonal au vecteur $\vec{u}(0\,;1\,;2)$.
(1) $\vec{v}(0\,;1\,;-2)$ **(2)** $\vec{w}(1\,;2\,;1)$ **(3)** $\vec{z}(10\,;-6\,;3)$

55 Dans un repère orthonormé de l'espace, étudier mentalement l'orthogonalité de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
a) $\vec{u}(2\,;3\,;-1)$ et $\vec{v}(1\,;0\,;2)$
b) $\vec{u}(-1\,;0\,;3)$ et $\vec{v}(3\,;2\,;1)$
c) $\vec{u}(0\,;-2\,;5)$ et $\vec{v}(6\,;1\,;1)$
d) $\vec{u}(2\,;1\,;1)$ et $\vec{v}(6\,;2\,;-14)$
e) $\vec{u}(1-\sqrt{2}\,;1\,;-1)$ et $\vec{v}(1+\sqrt{2}\,;0\,;-3)$

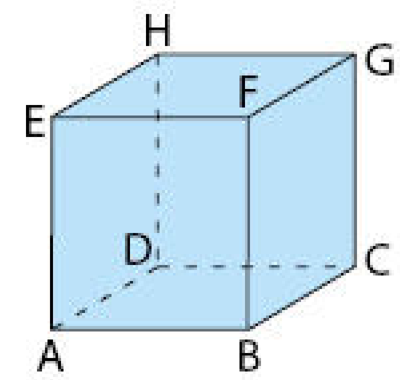
56 L'espace est muni d'un repère orthonormé.
Dans chaque cas, déterminer la ou les valeurs de α pour que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux.
a) $\vec{u}(-3\alpha\,;1\,;\alpha)$ et $\vec{v}(1\,;2\alpha\,;3)$
b) $\vec{u}(-1\,;3\alpha\,;2)$ et $\vec{v}(0\,;\alpha\,;3\alpha)$
c) $\vec{u}(1\,;\alpha\,;\alpha)$ et $\vec{v}(1\,;2\,;\alpha)$

57 L'espace est muni d'un repère orthonormé.
Dans chaque cas, indiquer les éventuelles droites orthogonales parmi (AB), (AC) et (BC).
a) $\overrightarrow{AB}(3\,;0\,;1)$, $\overrightarrow{AC}(-5\,;10\,;15)$, $\overrightarrow{BC}(-8\,;10\,;14)$
b) $\overrightarrow{AB}(-7\,;5\,;-5)$, $\overrightarrow{AC}(-5\,;10\,;0)$, $\overrightarrow{BC}(2\,;1\,;5)$
c) $\overrightarrow{AB}(4\,;1\,;2)$, $\overrightarrow{AC}(0\,;3\,;-1)$, $\overrightarrow{BC}(-4\,;2\,;-3)$

58 L'espace est muni d'un repère orthonormé.
$A(0\,;1\,;2)$, $B(1\,;2\,;3)$, $C(5\,;-3\,;-2)$ et $D(7\,;-4\,;-3)$ sont quatre points de l'espace.
Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.

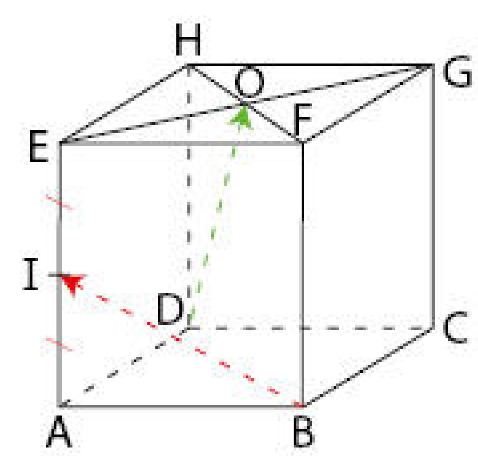
59 L'espace est muni d'un repère orthonormé.
Dans chaque cas, dire si la droite d de vecteur directeur $\vec{u}$ est orthogonale au plan (ABC).
a) $\vec{u}(2\,;1\,;3)$, $\overrightarrow{AB}(5\,;-4\,;-2)$, $\overrightarrow{AC}(0\,;-6\,;2)$
b) $\vec{u}(1\,;2\,;0)$, $\overrightarrow{AB}(-4\,;2\,;3)$, $\overrightarrow{AC}(1\,;1\,;1)$
c) $\vec{u}(0\,;3\,;-1)$, $\overrightarrow{AB}(5\,;1\,;2)$, $\overrightarrow{AC}(7\,;2\,;6)$.

60 ABCDEFGH est un cube d'arête 1.
a) Choisir un repère orthonormé de l'espace d'origine A.
b) Dans ce repère, donner les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{DF}$.
c) Démontrer que la droite (DF) est orthogonale au plan (EBG).

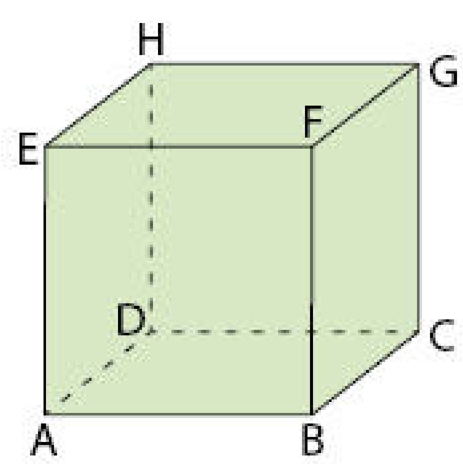


61 L'espace est muni d'un repère orthonormé.
ABCD est un tétraèdre avec $A(2\,;2\,;2)$, $B(2\,;-2\,;-2)$, $C(-2\,;2\,;-2)$ et $D(-2\,;-2\,;2)$.
a) Vérifier que le tétraèdre ABCD est régulier.
b) Calculer les coordonnées du point I milieu du segment [AB].
c) Démontrer que la droite (AI) est orthogonale à la droite (CD).

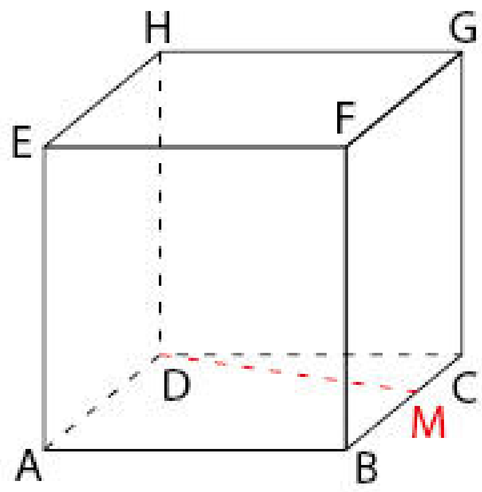
62 ABCDEFGH est un cube de côté 1.
O est le centre de la face EFGH et I est le milieu de l'arête [AE].
On se place dans le repère orthonormé $(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.
a) Donner les coordonnées des points D, O, B et I dans ce repère.
b) Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{DO}$ et $\overrightarrow{BI}$ sont orthogonaux.



63 ABCDEFGH est un cube.
Dans chaque cas, justifier l'orthogonalité de la droite et du plan.
a) (AE) et (FGH).
b) (AB) et (GCF).
c) (BE) et (ADG).



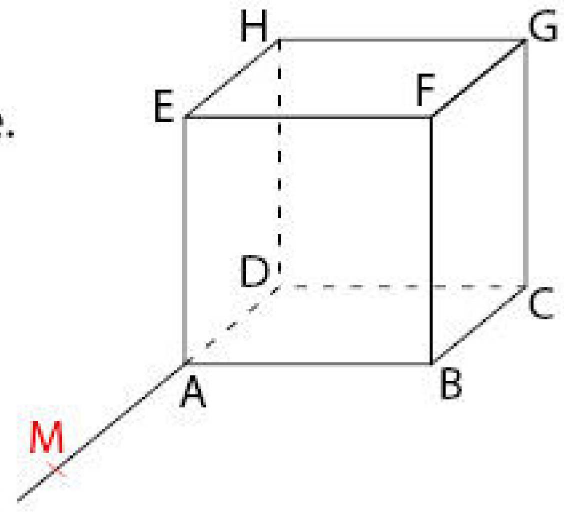
64 ABCDEFGH est un cube.
M est un point de l'arête [BC].



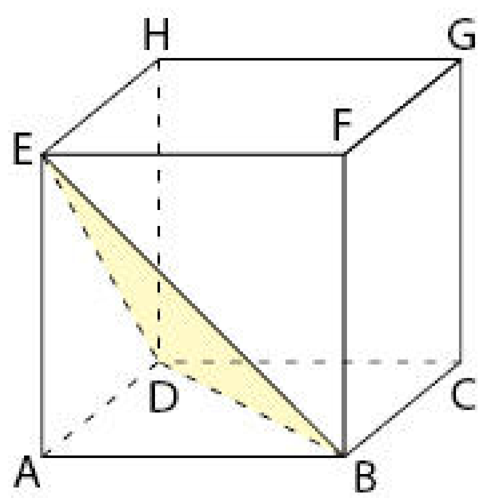
a) En utilisant la définition, démontrer que la droite (FB) est orthogonale au plan (ABC).

b) En déduire que la droite (FB) est orthogonale à la droite (DM).

65 ABCDEFGH est un cube.
M est un point de la droite (AD).
Démontrer que le triangle GCM est rectangle.



66 ABCDEFGH est un cube.

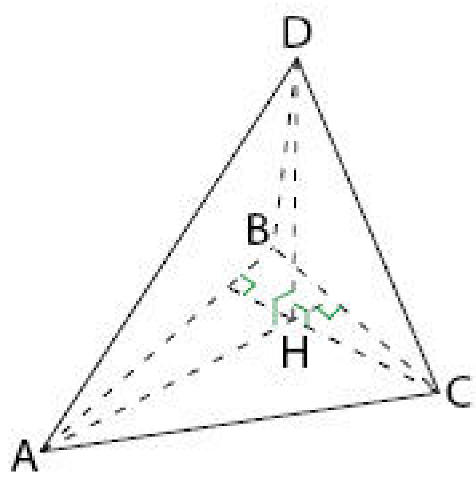


a) Utiliser $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FG}$ pour calculer $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{EB}$.

b) Calculer $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{ED}$.

c) Que peut-on en déduire pour la droite (AG) et le plan (BDE) ?

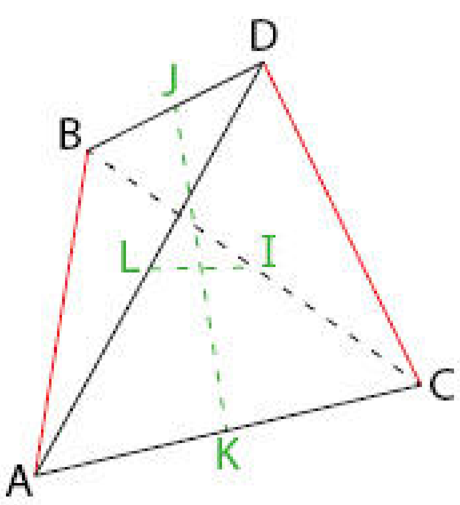
67 ABCD est un tétraèdre tel que la droite (DH) est orthogonale au plan (ABC) où H est le point d'intersection des hauteurs du triangle ABC.



a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{AB}$, puis $\overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{AB}$.

b) En déduire que les droites (DC) et (AB) sont orthogonales.

68 ABCD est un tétraèdre tel que AB = CD.
I, J, K et L sont les milieux respectifs des arêtes [BC], [BD], [CA] et [DA].



a) Démontrer que $\overrightarrow{LI} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{DC}$.

b) Exprimer de même $\overrightarrow{KJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$.

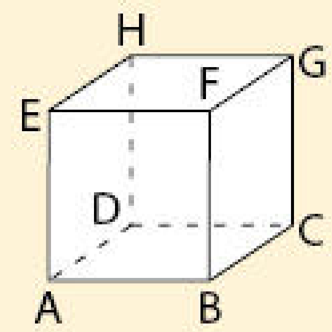
c) En déduire que les droites (LI) et (KJ) sont orthogonales.

Projections orthogonales

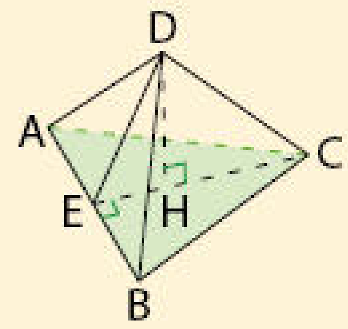
Cours 4

Questions flash — À l'oral

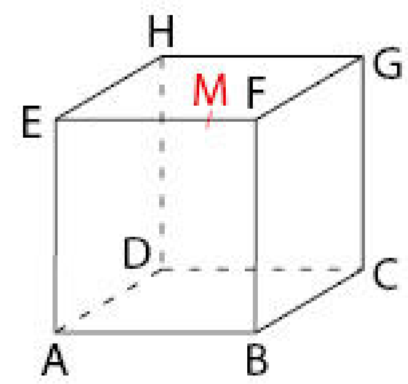
69 ABCDEFGH est un cube.
Rémi affirme : « Le projeté orthogonal du point G sur le plan (ABE) est E ». A-t-il raison ?



70 ABCD est un tétraèdre.
La distance entre le point D et le plan (ABC) est :
(1) DA **(2)** DE **(3)** DH



71 ABCDEFGH est un cube.
M est un point de l'arête [EF].
On se propose de construire le projeté orthogonal M′ du point M sur la droite (DC).



a) Démontrer que les droites (FC) et (DC) sont orthogonales.

b) Démontrer que les droites (MM′) et (FC) sont parallèles.

c) Réaliser cette figure et construire le point M′.

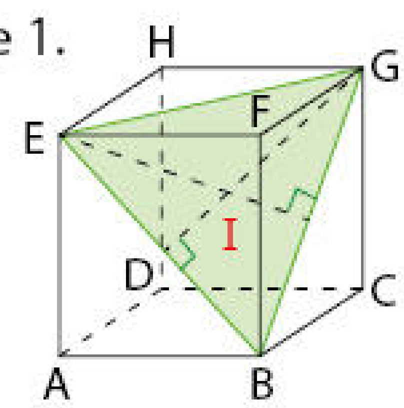
72 $\mathcal{P}$ est un plan contenant une droite d de vecteur directeur $\vec{u}$. A est un point n'appartenant pas au plan $\mathcal{P}$ qui se projette orthogonalement en B sur ce plan.
B se projette orthogonalement en C sur la droite d.

a) Représenter cette situation.

b) Déterminer les produits scalaires $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}$ et $\overrightarrow{BC} \cdot \vec{u}$.

c) En déduire que C est le projeté orthogonal de A sur la droite d.

73 ABCDEFGH est un cube d'arête 1.
On munit l'espace du repère orthonormé $(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.



a) Déterminer les coordonnées des points B, E, G, F.

b) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{EB}$ et $\overrightarrow{EG}$.

c) On admet que le point d'intersection I des médiatrices du triangle équilatéral EGB vérifie l'égalité :
$$\overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IG} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}.$$
Déterminer les coordonnées du point I.

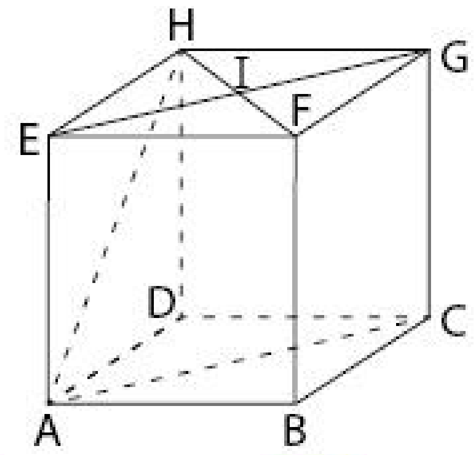
d) Démontrer que I est le projeté orthogonal du point F sur le plan (EGB).

e) Déterminer la distance du point F au plan (EGB).

Exercices interactifs

74 QCM **Dans chaque cas, donner la réponse exacte sans justifier.**

ABCDEFGH est le cube d'arête 1 représenté ci-contre.
I est le centre de la face EFGH.



		A	B	C	D
1	Le produit scalaire $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AG}$ est égal à …	AG^2	2	0	GC
2	Une mesure, en degré, de l'angle $\widehat{CAG}$, arrondie au centième, est …	0,62°	90°	35,26°	30°
3	Le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{GC}$ est égal à …	1	AG^2	0	$\sqrt{3}$
4	Le produit scalaire $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AC}$ est égal à …	0	1	2	$\sqrt{3}$
5	Le produit scalaire $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AC}$ est égal à …	$\overrightarrow{AI}^2$	1	$\overrightarrow{IE} \cdot \overrightarrow{AC}$	0
6	La distance entre le point I et le plan (ABC) est égale à …	IH	IA	1	0

75 QCM **Dans chaque cas, donner la ou les réponse(s) exacte(s) sans justifier.**

A(3 ; 0 ; 0), B(0 ; 3 ; 0), C(0 ; 0 ; 3) sont trois points dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

		A	B	C	D
1	Les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ vérifient …	$(\vec{i}+\vec{j})\cdot\vec{k}=2$	$\lVert\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}\rVert=3$	$(\vec{i}+\vec{j})\cdot\vec{j}=1$	$(\vec{i}+\vec{j})\cdot(\vec{i}+\vec{k})=1$
2	Le triangle ABC est …	rectangle	isocèle	équilatéral	quelconque
3	I est le point défini par $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. Alors …	I appartient au plan (ABC)	I a pour coordonnées (1, 1, 1)	I a pour coordonnées (− 1, − 1, − 1)	le vecteur $\overrightarrow{OI}$ est orthogonal au plan (ABC)
4	La distance du point O au plan (ABC) est …	nulle	OI	$\sqrt{3}$	3

76 Vrai/Faux **Dans chaque cas, dire si l'affirmation est vraie ou fausse en justifiant.**

1 Une droite d est orthogonale à une droite d' contenue dans un plan $\mathcal{P}$.
Affirmation : la droite d est nécessairement orthogonale au plan $\mathcal{P}$.

2 A, B et C sont trois points de l'espace tels que $AB = 2$ et $AC = 3$.
Affirmation : si $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -3$, alors $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$ rad.

3 A(1 ; 2 ; 0), B(2 ; 3 ; 0), C(2 ; 1 ; 0) et D(2 ; 2 ; − 1) sont des points dans un repère orthonormé.
Affirmation : $\left(A ; \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{AC}, \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{AD}\right)$ est un repère orthonormé de l'espace.

Vérifiez vos réponses : p. 529

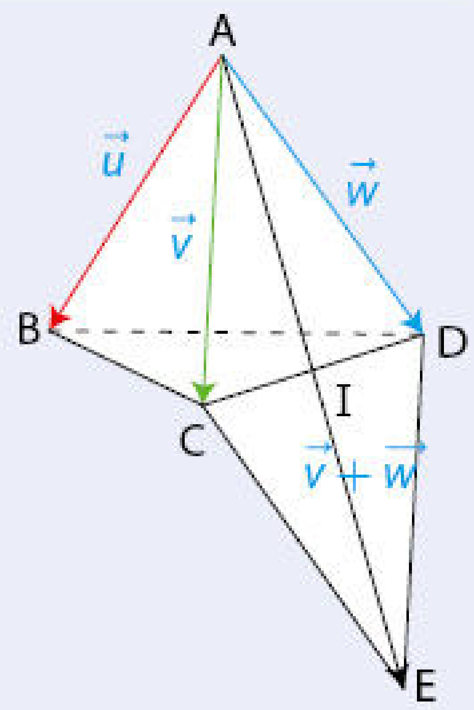
77 Suivre un guide pour rédiger une démonstration

On a admis en cours (p. 116) la propriété suivante :

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace, $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$

Cette propriété n'est pas une extension banale du plan à l'espace ; en effet, les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas nécessairement coplanaires.
On se propose de la démontrer ici.

Rédiger la démonstration de cette propriété en suivant le guide ci-dessous.



$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs de l'espace, et A, B, C, D et E sont quatre points tels que :

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB},\ \vec{v} = \overrightarrow{AC},\ \vec{w} = \overrightarrow{AD} \text{ et } \vec{v}+\vec{w} = \overrightarrow{AE}.$$

(1) Écrire ce que l'on cherche à démontrer :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\ldots} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\ldots} + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\ldots}$$

(2) Transformer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2+AC^2-\ldots^2)$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\ldots^2+\ldots^2-BD^2)$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = \ldots^2+\frac{1}{2}(\ldots^2+\ldots^2)-\frac{1}{2}(\ldots^2+\ldots^2)$$

(3) Utiliser le théorème de la médiane dans le triangle ACD :
on note I le milieu de [CD] et alors $AC^2+AD^2 = 2AI^2+\ldots$.

(4) Utiliser le théorème de la médiane dans le triangle BCD :

$$BC^2+BD^2 = 2\ldots^2+\ldots.$$

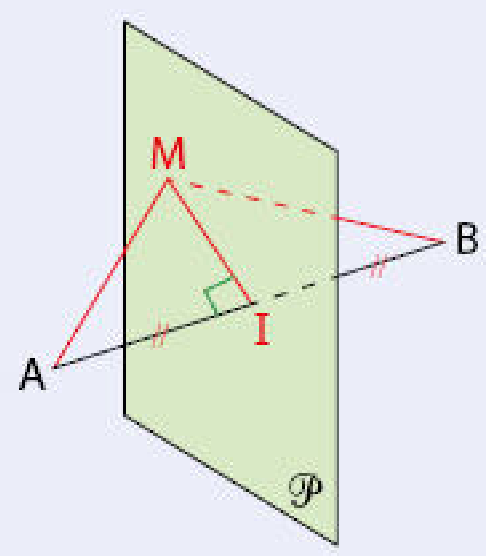
(5) Remplacer dans l'égalité obtenue en **(2)** :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = AB^2+\ldots^2-\ldots^2.$$

(6) Transformer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}$: $\overrightarrow{AE} = \ldots\overrightarrow{AI}$ donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE} = \ldots\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AI}$.
D'après le théorème de la médiane dans le triangle ABI, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE} = \ldots^2+\ldots^2-\ldots^2$.

(7) Conclure : expliquer pourquoi $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$ et rédiger une phrase de conclusion.

78 Déterminer un lieu géométrique : le plan médiateur



A et B sont deux points de l'espace.
I est le milieu du segment [AB].
$\mathscr{P}$ est le plan orthogonal à la droite (AB) passant par I.
On se propose de démontrer que l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M équidistants de A et B est le plan $\mathscr{P}$.

a) M est un point équidistant de A et B signifie que MA = MB.

Démontrer que MA = MB équivaut à $\overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 = 0$.

b) Démontrer que cela est équivalent à $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{MI} = 0$.

c) Conclure.

Le plan $\mathscr{P}$ est appelé **le plan médiateur** du segment [AB].

Vidéo JAICOMPRIS.COM

Toutes les démonstrations au programme en vidéo

Liste des démonstrations :

- Le projeté orthogonal d'un point M sur un plan $\mathscr{P}$ est le point de $\mathscr{P}$ le plus proche de M.

Rappel
On rappelle un théorème de la médiane établi en classe de Première dans le plan.
A et B sont deux points et I le milieu du segment [AB].
Alors pour tout point M, $\mathbf{MA^2+MB^2}$ est égal à

$$\mathbf{2MI^2+\frac{1}{2}AB^2}.$$

Conseil
Pour démontrer l'égalité de deux ensembles, ici $\mathscr{E} = \mathscr{P}$, on peut :
– soit raisonner par implication : si $M \in \mathscr{E}$, alors $M \in \mathscr{P}$ (soit $\mathscr{E} \subset \mathscr{P}$) et si $M \in \mathscr{P}$, alors $M \in \mathscr{E}$ (soit $\mathscr{P} \subset \mathscr{E}$)
– soit raisonner par équivalence (c'est le cas ici) : $M \in \mathscr{E}$ si, et seulement si, $M \in \mathscr{P}$.

Calculer des angles, des longueurs

79 **PARCOURS DIFFÉRENCIÉS**

Parcours 1

Dans un repère orthonormé, $A(2\,;-4\,;1)$, $B(-5\,;-1\,;0)$ et $C(1\,;3\,;-1)$ sont des points.
Déterminer la mesure, en degré, de l'angle $\widehat{BAC}$.
Arrondir au dixième.

Parcours 2

Dans un repère orthonormé, $M(3\,;0\,;1)$, $N(-1\,;3\,;0)$ et $P(0\,;2\,;-1)$ sont des points.

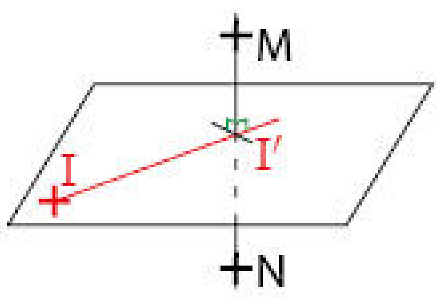
a) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$. En déduire les longueurs MN et MP.

b) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MP}$.

c) Exprimer ce produit scalaire en fonction de $\cos(\widehat{NMP})$ et en déduire la mesure, en degré, de l'angle $\widehat{NMP}$. *Arrondir à l'unité.*

80 M, N, I sont trois points de l'espace. I′ est le projeté orthogonal de I sur la droite (MN) et I′ se trouve entre les points M et N. On donne :

$MN = 5$, $MI = 4$ et $MI' = 2$.

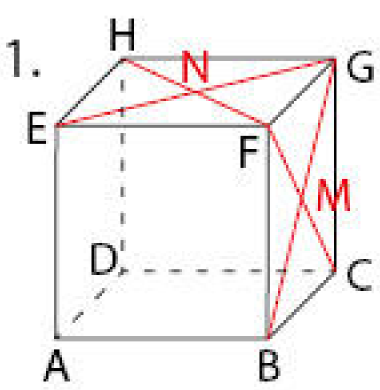


a) Calculer $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MI}$.

b) En déduire la mesure, en degré, de l'angle $\widehat{IMN}$.

c) Calculer la longueur NI. *Arrondir au dixième.*

81 ABCDEFGH est un cube d'arête 1.
L'espace est muni du repère orthonormé $(B\,;\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BF})$.
Les points M et N sont les centres des faces BCFG et EFGH.

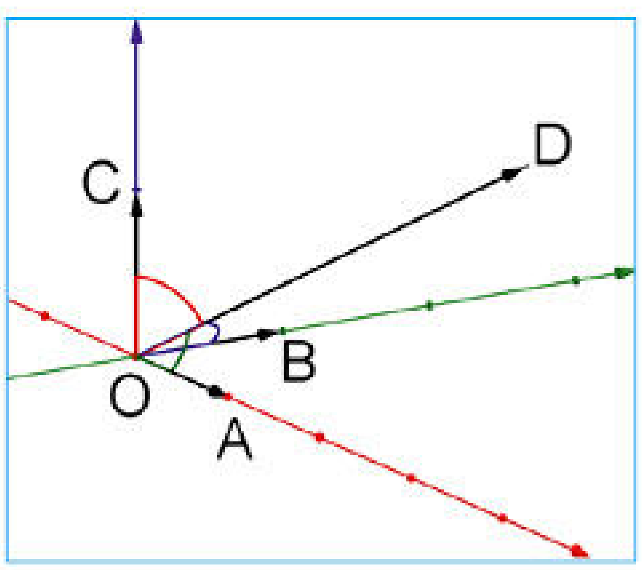


a) Déterminer les coordonnées des points D, M et N.

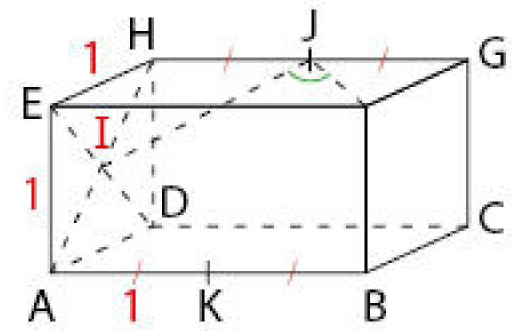
b) Calculer $\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{DN}$.

c) En déduire la mesure, en degré, de l'angle $\widehat{MDN}$.
Arrondir au dixième.

82 $(O\,;\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC})$ est un repère orthonormé dans lequel le point D a pour coordonnées $(2\,;\sqrt{2}\,;\sqrt{2})$.
Déterminer la mesure, en radian, de chacun des angles $\widehat{AOD}$, $\widehat{BOD}$ et $\widehat{COD}$.



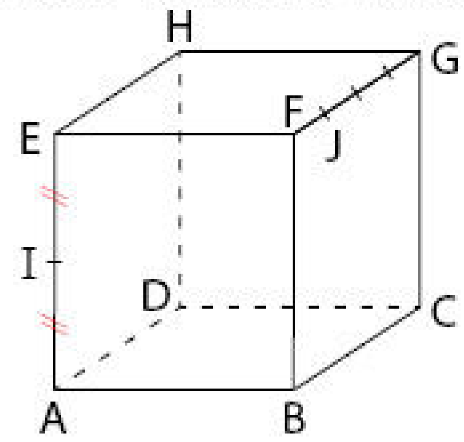
83 ABCDEFGH est le parallélépipède rectangle représenté ci-contre.
Utiliser le repère orthonormé $(A\,;\overrightarrow{AK},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ pour :



a) calculer le produit scalaire $\overrightarrow{JI}\cdot\overrightarrow{JF}$;

b) déterminer la mesure, en degré, de l'angle $\widehat{IJF}$.
Arrondir au dixième.

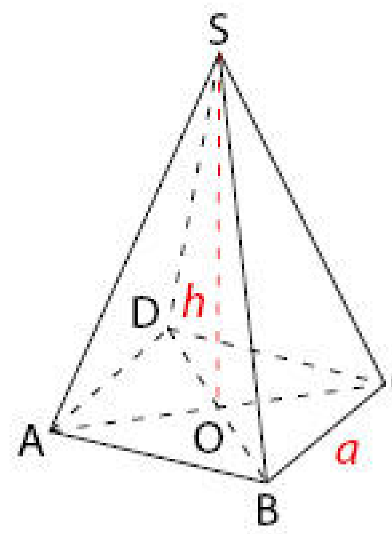
84 ABCDEFGH est un cube d'arête 4. I est le milieu de l'arête [EA], J est le point défini par $\overrightarrow{FJ} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{FG}$.



a) Démontrer que les droites (FI) et (FJ) sont orthogonales.

b) En déduire la longueur IJ.

85 SABCD est une pyramide régulière dont la base carrée ABCD a pour centre O et pour côté a. Sa hauteur [SO] a pour longueur h.



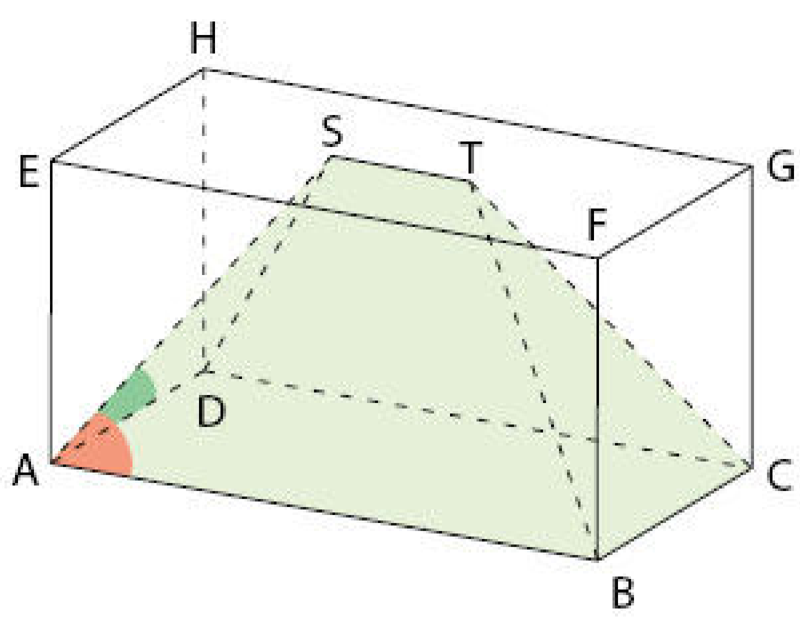
a) Exprimer le produit scalaire $\overrightarrow{SB}\cdot\overrightarrow{SD}$ en fonction de a et h.

b) Déterminer h pour que le volume de la pyramide soit égal à $\dfrac{a^3}{3\sqrt{2}}$.

c) Que dire alors des droites (SB) et (SD) ?

86 Alice réalise la maquette d'un toit représentée ci-dessous par le polyèdre ABCDST inscrit dans le parallélépipède rectangle ABCDEFGH.
Les faces ADS et BCT sont des triangles isocèles identiques et on connaît les dimensions :

$AB = 4$ dm, $BC = 2$ dm, $AE = 2$ dm, $ST = 1$ dm.



a) Choisir un repère orthonormé de l'espace d'origine A, puis déterminer les coordonnées du point S dans ce repère.

b) Déterminer la mesure, en degré, de chacun des angles $\widehat{SAB}$ et $\widehat{SAD}$. *Arrondir au dixième.*

Étudier l'orthogonalité

87 **PARCOURS DIFFÉRENCIÉS**

Parcours 1

Dans un repère orthonormé, $A(3\,;2\,;1)$, $B(3\,;-2\,;1)$, $C(0\,;\,4\,;2)$, $D(-1\,;1\,;5)$ sont des points.

La droite (AB) est-elle orthogonale au plan (BCD) ?

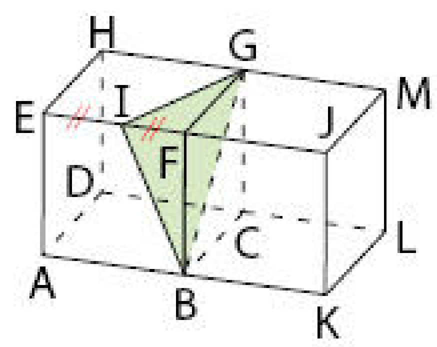
Parcours 2

Dans un repère orthonormé, $E(7\,;-1\,;14)$, $F(0\,;3\,;1)$, $G(2\,;0\,;-1)$, $H(-3\,;1\,;2)$ sont des points.

a) Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{FG}$ et $\overrightarrow{FH}$ ne sont pas colinéaires.

b) Calculer chacun des produits scalaires $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{FG}$ et $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{FH}$. Que peut-on en déduire pour la droite (EF) et le plan (FGH) ?

88 Deux cubes sont accolés comme sur la figure ci-contre.



I est le milieu du segment $[EF]$.

On se propose de démontrer que la droite (DJ) est orthogonale au plan (BGI) de deux façons.

Méthode 1 : géométriquement

1. a) En écrivant $\overrightarrow{AJ}=\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{KJ}$, calculer $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{AJ}$.

b) Justifier que $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{AJ}=0$.

c) En déduire que $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{DJ}=0$.

2. Démontrer de même que $\overrightarrow{GI}\cdot\overrightarrow{DJ}=0$. Conclure.

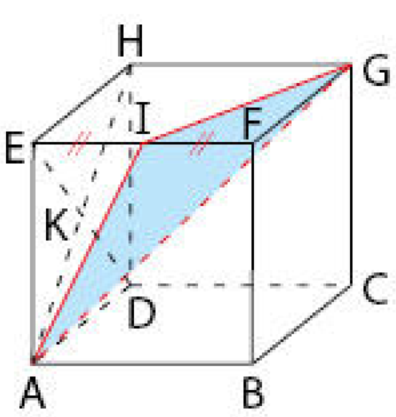
Méthode 2 : analytiquement

1. a) Choisir un repère orthonormé de l'espace d'origine A.

b) Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{DJ}$ et $\overrightarrow{GI}\cdot\overrightarrow{DJ}$.

2. Conclure.

89 ABCDEFGH est un cube.



I est le milieu de $[EF]$ et K est le centre de la face ADHE.

1. a) En écrivant $\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG}$, calculer $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{AG}$.

b) En écrivant $\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EI}$, calculer $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{AI}$.

c) En déduire que la droite (BK) est orthogonale au plan (AIG).

2. Se placer dans un repère orthonormé d'origine A et retrouver le résultat précédent.

Calculer des distances

90 **PARCOURS DIFFÉRENCIÉS**

Parcours 1

Dans un repère orthonormé, $A(1\,;2\,;3)$, $B(0\,;1\,;1)$, $C(-1\,;2\,;0)$, $D(5\,;0\,;3)$ sont des points.

La distance du point A au plan (BCD) est-elle égale à AH, avec $H\left(\dfrac{18}{13}\,;\dfrac{11}{13}\,;\dfrac{19}{13}\right)$?

Parcours 2

Dans un repère orthonormé, $E(-1\,;-1\,;4)$, $F(0\,;0\,;1)$, $G(2\,;-1\,;0)$, $H(1\,;2\,;3)$ et $M(-1\,;1\,;2)$ sont des points.

a) Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{FG}$ et $\overrightarrow{FH}$ ne sont pas colinéaires.

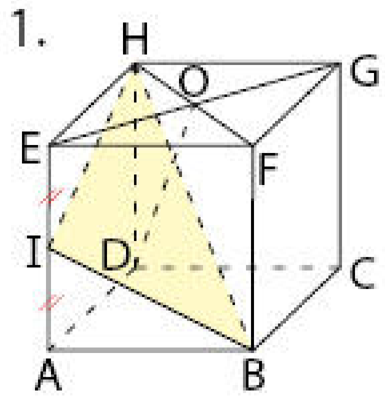
b) Déterminer des nombres réels a et b tels que :

$$\overrightarrow{FM}=a\overrightarrow{FG}+b\overrightarrow{FH}.$$

c) Démontrer que la droite (EM) est orthogonale au plan (FGH).

d) En déduire la distance de E au plan (FGH).

91 ABCDEFGH est un cube d'arête 1.



O est le centre de la face EFGH.

I est le milieu de l'arête $[AE]$.

On se place dans le repère orthonormé $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.

1. a) Déterminer les coordonnées des points B, D, H, O et I.

b) Démontrer que les droites suivantes sont orthogonales :

- (DO) et (BI) ;
- (DO) et (BH).

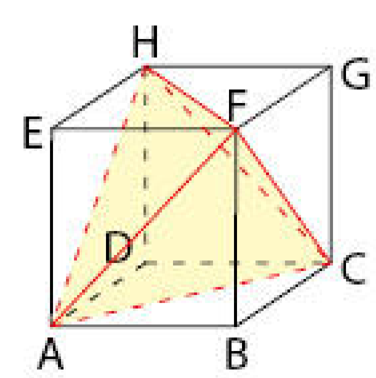
c) En déduire que la droite (DO) est orthogonale au plan (BIH).

2. a) Justifier que les droites (DO) et (BH) sont sécantes en un point K.

b) Déterminer l'aire du triangle BDH.

c) En déduire la distance du point O au plan (BIH).

92 ABCDEFGH est un cube d'arête a, avec $a>0$.



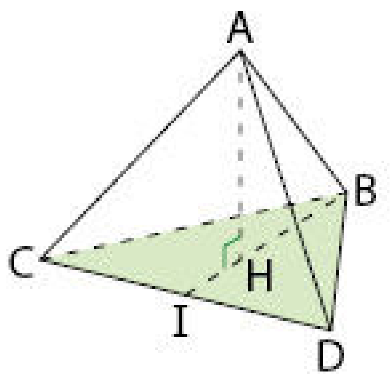
a) Que peut-on dire des faces du tétraèdre AFCH ?

b) Déterminer le volume du tétraèdre AFHE.

c) En déduire le volume $\mathcal{V}$ du tétraèdre AFCH.

d) En déduire la distance du point F au plan (HAC).

93 La Maladrerie Saint-Lazare, à Beauvais, accueille une sculpture formée de 693 pièces de zinc. On modélise cette œuvre par un tétraèdre régulier ABCD d'arête 1.



1. a) Calculer chacun des produits scalaires : • $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}$ • $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$

b) En déduire le produit scalaire $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CD}$.

2. H est le projeté orthogonal du point A sur le plan (BCD). I est le point d'intersection des droites (BH) et (CD).

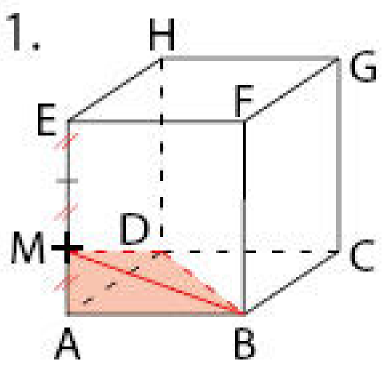
a) En écrivant $\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AH}$, calculer $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CD}$.

b) En déduire les longueurs BI et AI, ainsi que le produit scalaire $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BI}$.

c) Écrire $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BI}$ d'une autre façon et en déduire la longueur BH.

3. En déduire la distance du point A au plan (BCD).

94 ABCDEFGH est un cube d'arête 1.



M est le point défini par $\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AE}$

et K par $\overrightarrow{BK}=\dfrac{9}{11}\overrightarrow{BM}+\dfrac{1}{11}\overrightarrow{BD}$.

1. Déterminer le volume du tétraèdre ABDM.

2. a) Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{AD}$.

b) En déduire le produit scalaire $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{MD}$.

Que peut-on en déduire ?

c) On admet que les droites (DK) et (MB) sont orthogonales. Que dire du point K ?

3. a) Démontrer que $\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ et $\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{MD}=0$.

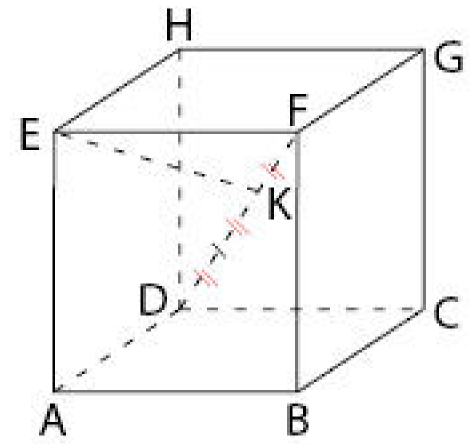
b) En déduire que le point K est le projeté orthogonal du point A sur le plan (BDM).

4. a) Démontrer que le triangle BDM est isocèle.

b) Justifier que son aire est égale à $\dfrac{\sqrt{11}}{6}$.

c) En déduire, à l'aide de la question **1.**, la distance du point A au plan (BDM).

95 ABCDEFGH est un cube d'arête 1.



L'espace est muni d'un repère orthonormé $(D\,;\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DH})$.

K est le point de la droite (DF) défini par $\overrightarrow{DK}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{DF}$.

a) Déterminer les coordonnées du point K.

b) Montrer que le point K est le projeté orthogonal du point E sur la droite (DF).

c) Calculer la distance du point E à la droite (DF).

96 L'espace est muni d'un repère orthonormé d'origine O.

Les points B et C ont pour coordonnées respectives $(-2\,;-6\,;5)$ et $(-4\,;0\,;-3)$.

H est le projeté orthogonal du point O sur la droite (BC). On pose $\overrightarrow{BH}=t\overrightarrow{BC}$ où t est un nombre réel.

a) Démontrer que $\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BC}=t\|\overrightarrow{BC}\|^2$.

b) En déduire le nombre réel t.

c) Calculer la distance du point O à la droite (BC).

S'entraîner à la logique → p. 525

97 Propositions réciproques

Dans chaque cas, énoncer la proposition réciproque.

Dire si la proposition et sa réciproque sont vraies ou fausses.

a) Si $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$, alors $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$.

b) Si $\vec{u}\cdot\vec{v}\neq 0$, alors $\vec{u}\neq\vec{0}$ et $\vec{v}\neq\vec{0}$.

c) Si $\vec{u}\cdot\vec{v}<0$, alors il existe un réel $k<0$ tel que $\vec{u}=k\vec{v}$.

98 Contre-exemple

Chacune des implications suivantes est fausse. Le démontrer à l'aide d'un contre-exemple.

a) Dans l'espace, si deux droites sont orthogonales à une même troisième, alors elles sont parallèles.

b) Si une droite (AB) est orthogonale à un plan $\mathscr{P}$, alors le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathscr{P}$ est le point B.

c) d est une droite contenue dans un plan $\mathscr{P}$. Si M est un point de l'espace n'appartenant pas au plan $\mathscr{P}$, alors la distance du point M à la droite d est égale à la distance du point M au plan $\mathscr{P}$.

99 DÉTERMINER LA DISTANCE ENTRE DEUX DROITES

Tice

Objectif
Conjecturer à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, puis établir une méthode pour calculer la distance entre deux droites.

L'espace est muni d'un repère orthonormé d'origine O.
OABC est un tétraèdre avec $A(0\,;6\,;0)$, $B(0\,;0\,;8)$ et $C(4\,;0\,;8)$.
M est un point mobile du segment [OB] ; on note $OM = k$ où k est un nombre réel de l'intervalle $[0\,;8]$.
Le plan $\mathscr{P}$, orthogonal à la droite (OB) passant par M, coupe les droites (OC), (AC) et (AB) respectivement en N, P et Q.
On se propose de déterminer la position du point M telle que la droite (MP) soit orthogonale aux droites (OB) et (AC).

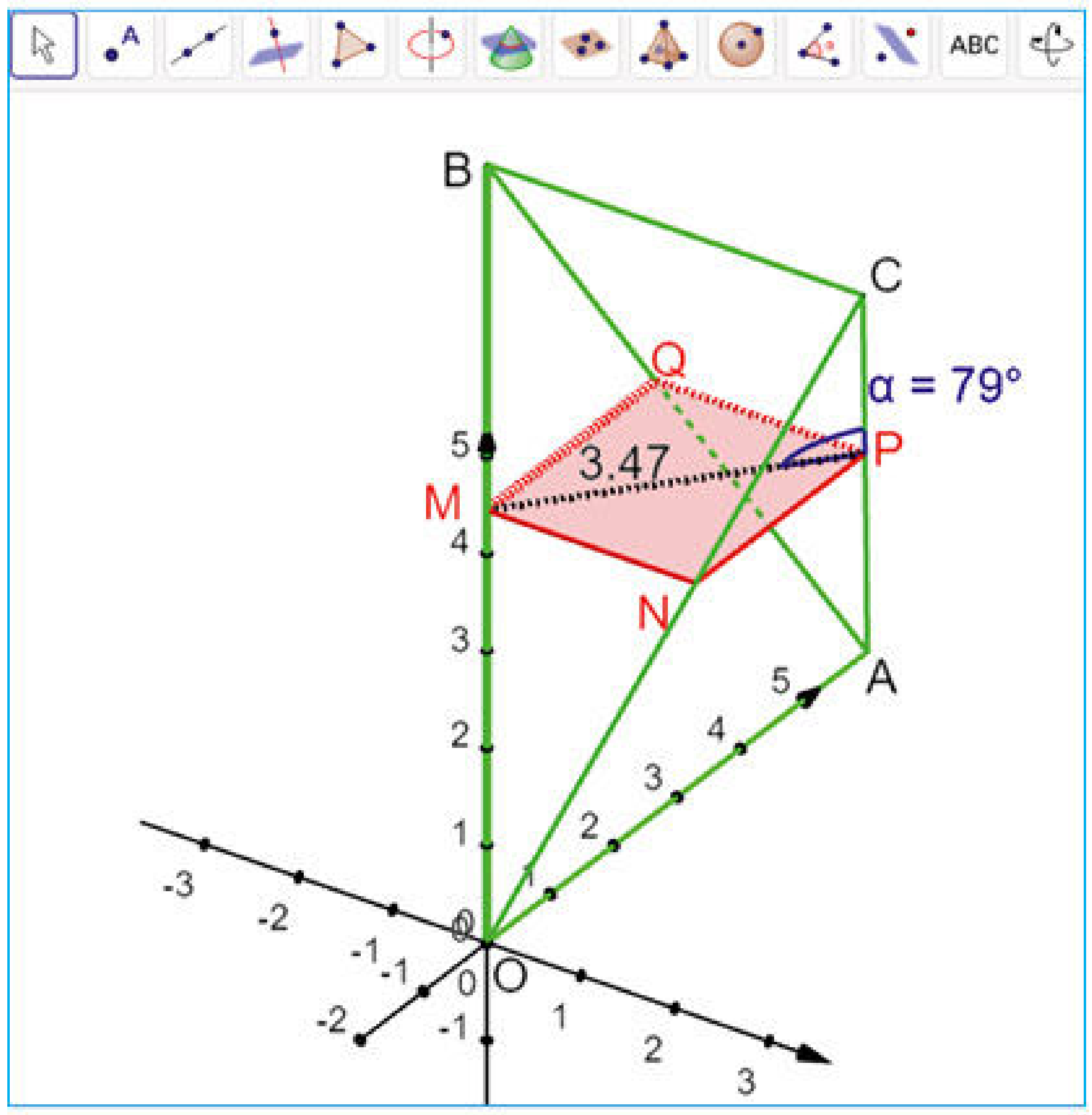
1. Réaliser une figure à l'aide d'un logiciel

a) Dans la fenêtre 3D d'un logiciel de géométrie dynamique, placer les points O, A, B et C, puis créer le tétraèdre OABC.

b) Créer un curseur k allant de 0 à 8 avec pour incrément 0,001 en saisissant k=Curseur(0,8,0.001), puis placer le point M de coordonnées $(0, 0, k)$ en saisissant M=(0,0,k).

c) Placer les points N, P et Q.

d) Afficher la mesure de l'angle $\widehat{MPC}$.



2. Conjecturer

a) Conjecturer la valeur de k pour laquelle les droites (PM) et (AC) sont orthogonales.

b) Afficher la distance PM.
Conjecturer la valeur de k pour laquelle la distance PM est minimum. Quel résultat peut-on conjecturer ?

3. Démontrer

a) Démontrer que les droites (PM) et (OB) sont orthogonales.

b) Exprimer le produit scalaire $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{AC}$ en fonction de k.

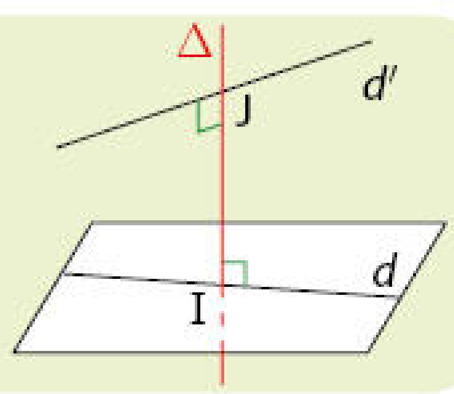
c) Déterminer la valeur de k pour laquelle la droite (PM) est orthogonale aux droites (OB) et (AC).
On dit alors que la droite (PM) est la **perpendiculaire commune** aux droites (OB) et (AC).

4. a) Exprimer la distance PM^2 en fonction de k.

b) Déterminer la valeur de k pour laquelle la distance PM est minimum.

5. Étudier la notion de distance entre deux droites

On admet que si d et d' sont deux droites non coplanaires, alors il existe une unique droite Δ perpendiculaire à d et d'.
Si Δ coupe d en I et d' en J, la distance IJ est appelée **distance de d à d'**, c'est la plus petite distance qui sépare deux points sur chacune des deux droites.



Déterminer la distance entre les droites (OB) et (AC).

100 OPTIMISER LA MESURE D'UN ANGLE

Tice

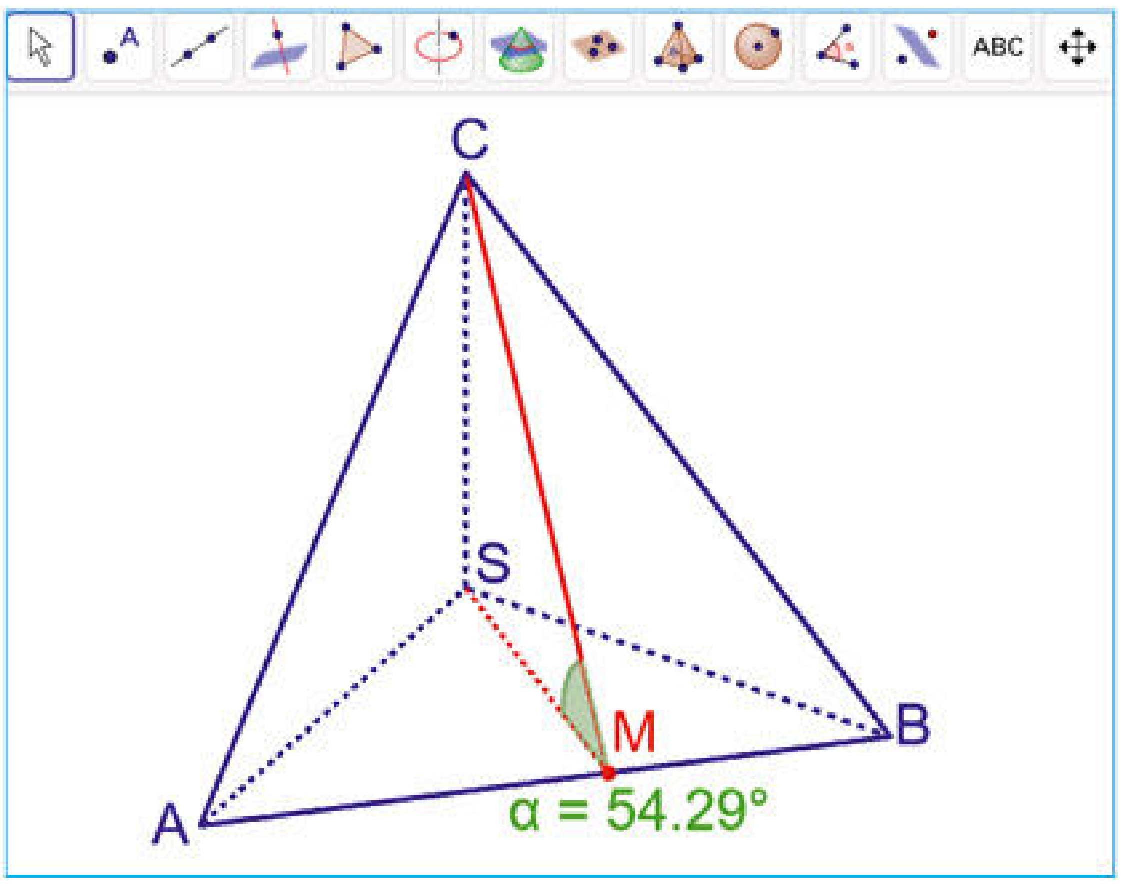
Objectif
Conjecturer à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, puis établir une méthode pour déterminer la mesure maximum d'un angle.

L'espace est muni d'un repère orthonormé.
SABC est un tétraèdre avec $S(0\,;0\,;0)$, $A(2\,;0\,;0)$, $B(0\,;2\,;0)$ et $C(0\,;0\,;2)$.
M est un point du segment $[AB]$.

1. Conjecturer

a) Réaliser une figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

b) Conjecturer la position du point M pour laquelle la mesure de l'angle $\widehat{SMC}$ est maximum.



2. Démontrer

a) On pose $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$ avec t nombre réel.
À quel intervalle appartient le nombre réel t ?

b) Exprimer les coordonnées du point M en fonction de t.

c) Exprimer en fonction de t, le produit scalaire $\overrightarrow{MS} \cdot \overrightarrow{MC}$, puis les longueurs MS et MC.

En déduire que $\cos(\widehat{SMC}) = \sqrt{\dfrac{2t^2 - 2t + 1}{2t^2 - 2t + 2}}$.

d) f est la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;1]$ par :

$$f(t) = \frac{2t^2 - 2t + 1}{2t^2 - 2t + 2}.$$

Étudier les variations de cette fonction.

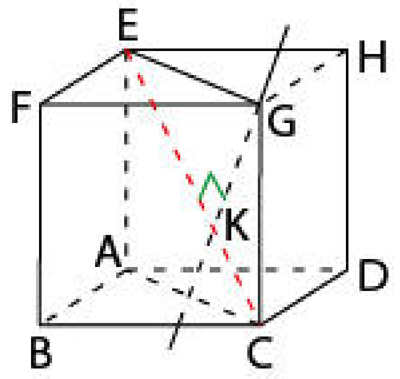
e) En déduire la position du point M pour laquelle la mesure de l'angle $\widehat{SMC}$ est maximum.
Quelle est cette mesure maximum de l'angle $\widehat{SMC}$? *Arrondir au dixième.*

On admet que si u est une fonction strictement positive sur un intervalle I, alors les fonctions u et $\sqrt{u}$ ont même sens de variation sur I.

101 Find a distance

Représenter | Calculer | Communiquer

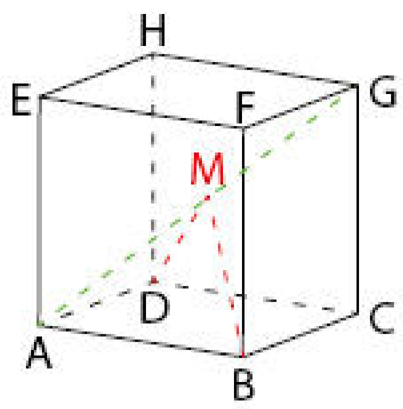
ABCDEFGH is a cube of side length 1. Let K be the orthogonal projection of G on the line EC.
What is the distance between the point G and the line EC ?



102 Prendre des initiatives

Chercher | Raisonner

Déterminer le(s) point(s) M de la diagonale [AG] du cube ci-contre tel(s) que l'angle $\widehat{BMD}$ soit droit.
On peut munir l'espace du repère orthonormé $(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.



103 Déterminer un projeté

Narration de recherche

Raisonner | Communiquer

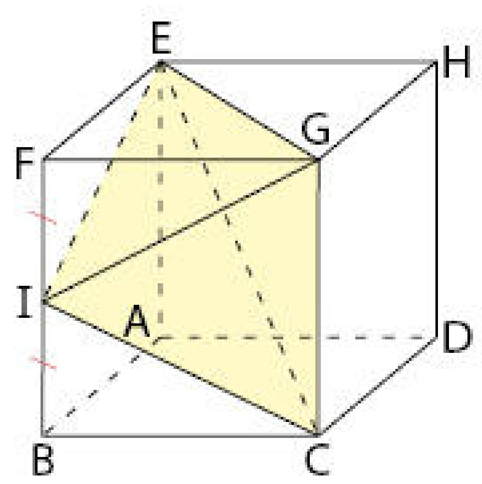
Rédiger les différentes étapes de la recherche, sans omettre les fausses pistes et les changements de méthode.

Problème
L'espace est muni d'un repère orthonormé.
On considère les points $A(-1\,;2\,;3)$ et $B(5\,;1\,;0)$.
Déterminer les coordonnées du point C, projeté orthogonal du point $D(6\,;3\,;8)$ sur la droite (AB).

104 Imaginer une stratégie

Raisonner | Calculer

Voici un cube d'arête 1.
I est le milieu de l'arête [BF].
a) Calculer l'aire du triangle GCI, puis le volume du tétraèdre GCIE.
b) En déduire la distance du point G au plan (ICE).

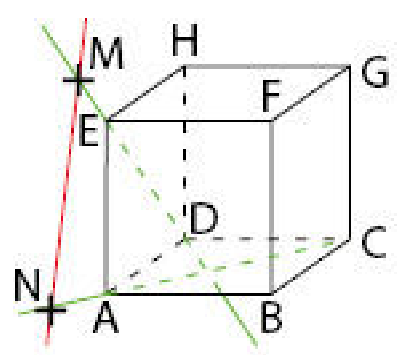


105 Trouver les bonnes positions

Problème ouvert

Raisonner | Calculer

ABCDEFGH est un cube d'arête 1.
M est un point de la droite (ED) et N est un point de la droite (AC).
On pose $\overrightarrow{DM} = a\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{AN} = b\overrightarrow{AC}$ où a et b sont des nombres réels.

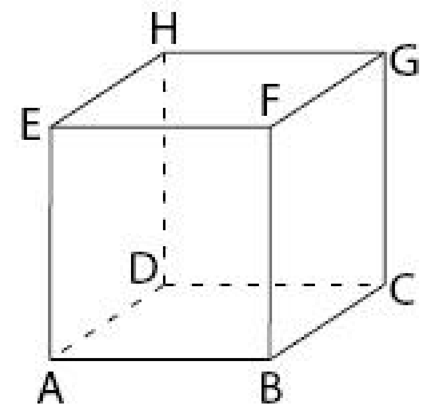


Déterminer les valeurs de a et b pour que la droite (MN) soit perpendiculaire aux droites (AC) et (DE).

106 Identifier une perpendiculaire commune

Représenter | Calculer

ABCDEFGH est un cube d'arête 1.
M et N sont les points définis par
$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BE}$.



1. a) I est le milieu de l'arête [BF].
Vérifier que $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$.
b) J est le milieu de l'arête [AD].
Vérifier que $\overrightarrow{BM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BJ}$.
c) Réaliser une figure, placer les points I, J, M et N et tracer la droite (MN).

2. On se propose de démontrer de deux façons différentes que la droite (MN) est perpendiculaire commune aux diagonales (EB) et (AC).

1^re^ méthode : analytiquement
On munit l'espace du repère orthonormé
$$(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}).$$
a) Déterminer les coordonnées du point M.
b) Déterminer les coordonnées du point N.
c) Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{EB}$ et $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AC}$, puis conclure.

2^e^ méthode : vectoriellement
a) À l'aide de la relation de Chasles, démontrer que $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DF}$.
b) Démontrer que $\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{EB} = 0$.
c) Démontrer que $\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$.
d) Conclure.

107 Calculer des distances, des aires, des volumes

Raisonner | Calculer

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On considère les points :
$A(3\,;-2\,;2)$, $B(6\,;1\,;5)$, $C(6\,;-2\,;-1)$, $D(0\,;4\,;-1)$.
1. a) Montrer que le triangle ABC est rectangle.
b) Montrer que la droite (AD) est perpendiculaire au plan (ABC).
2. a) Calculer le volume du tétraèdre ABCD.
b) Expliquer pourquoi l'angle $\widehat{BDC}$ a pour mesure $\frac{\pi}{4}$ rad.
3. a) Expliquer pourquoi l'aire S du triangle BDC est $S = \frac{1}{2}\times DB\times DC\times \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$. Calculer cette aire.
b) En déduire la distance du point A au plan (BDC).

108 Étudier un tétraèdre orthocentrique

60 min

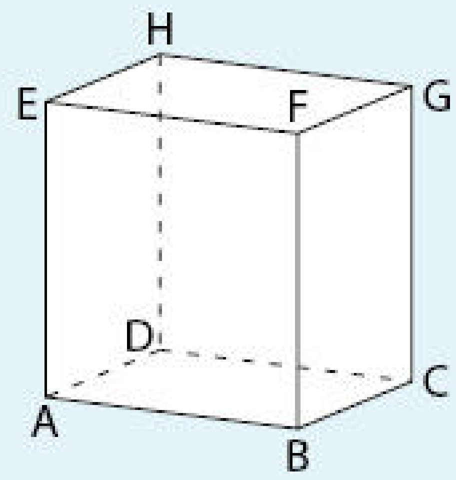
D'après Bac, Métropole-La Réunion 2018

Le but de cet exercice est d'examiner, dans différents cas, si les hauteurs d'un tétraèdre sont concourantes, c'est-à-dire d'étudier l'existence d'un point d'intersection de ses quatre hauteurs.

On rappelle que dans un tétraèdre MNPQ, la hauteur issue de M est la droite passant par M et orthogonale au plan (NPQ).

Partie A : étude de cas particuliers

On considère un cube ABCDEFGH. On admet que les droites (AG), (BH), (CE) et (FD), appelées « grandes diagonales » du cube, sont concourantes.



1. On considère le tétraèdre ABCE.

a) Préciser la hauteur issue de E et la hauteur issue de C dans ce tétraèdre.

b) Les quatre hauteurs du tétraèdre ABCE sont-elles concourantes ?

2. On considère le tétraèdre ACHF et on se place dans le repère orthonormé $(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

a) Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{FD}\cdot\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{FD}\cdot\overrightarrow{AH}$.

b) En déduire que (FD) est la hauteur issue de F du tétraèdre ACHF.

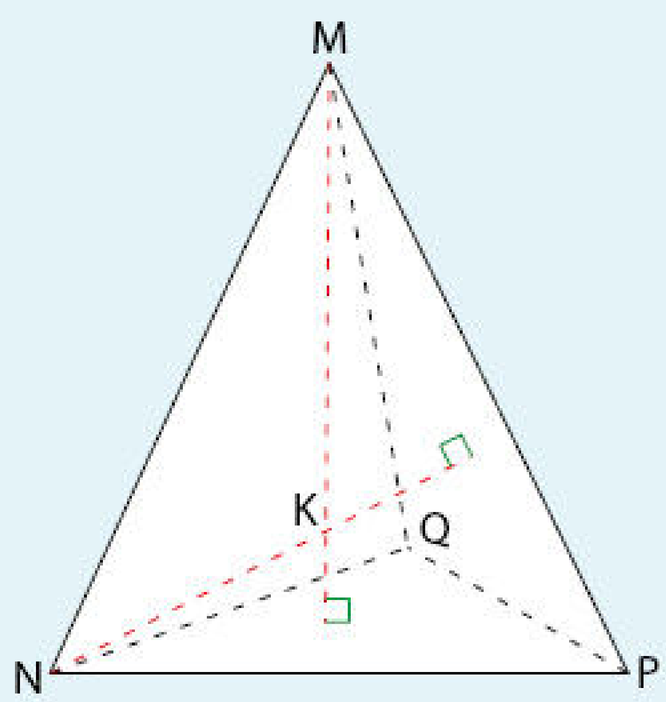
c) Par analogie avec le résultat précédent, préciser les hauteurs du tétraèdre ACHF issues respectivement des sommets A, C et H.

Les quatre hauteurs du tétraèdre ACHF sont-elles concourantes ?

Dans la suite de cet exercice, un tétraèdre dont les quatre hauteurs sont concourantes sera appelé un tétraèdre orthocentrique.

Partie B : une propriété des tétraèdres orthocentriques

Dans cette partie, on considère un tétraèdre MNPQ dont les hauteurs issues des sommets M et N sont sécantes en un point K. Les droites (MK) et (NK) sont donc orthogonales aux plans (NPQ) et (MPQ) respectivement.



1. a) Justifier que la droite (PQ) est orthogonale à la droite (MK).

On admet de même que les droites (PQ) *et* (NK) *sont orthogonales.*

b) Que peut-on déduire de la question précédente relativement à la droite (PQ) et au plan (MNK) ? Justifier la réponse.

2. Montrer que les arêtes [MN] et [PQ] sont orthogonales.

Ainsi, on obtient la propriété suivante :

> Si un tétraèdre est orthocentrique, alors ses arêtes opposées sont orthogonales deux à deux.

Partie C : application

Dans un repère orthonormé, on considère les points :

$$R(-3\,;5\,;2),\ S(1\,;4\,;-2),\ T(4\,;-1\,;5) \text{ et } U(4\,;7\,;3)$$

Le tétraèdre RSTU est-il orthocentrique ? Justifier.

Guide de résolution
2. a) Déterminer tout d'abord les coordonnées des points F, D, A, C et H.
b) Traduire les égalités précédentes par une relation d'orthogonalité entre la droite (FD) et deux droites sécantes du plan (ACH).

Guide de résolution
1. a) Utiliser le fait que la droite (MK) est orthogonale au plan (NPQ).

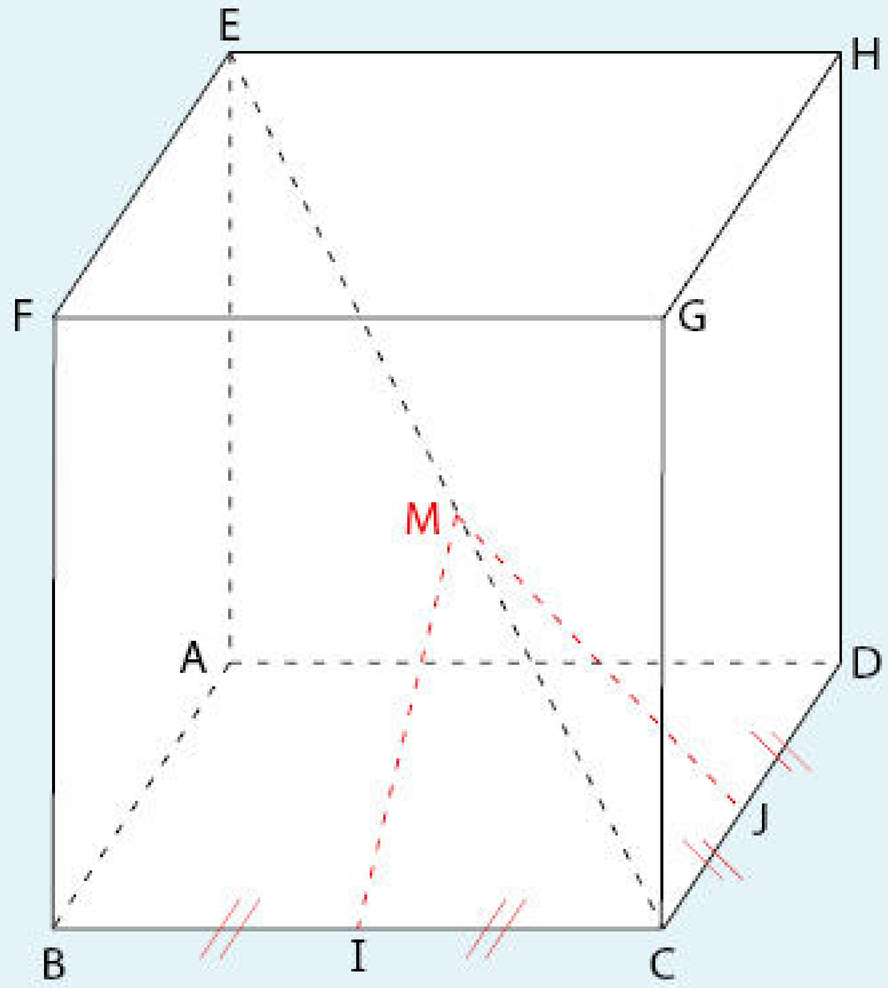
Guide de résolution
Utiliser la contraposée de la propriété établie à la **partie B**.

109 Rechercher un angle de mesure maximum

40 min

D'après Bac, Centres étrangers 2011

La figure ci-dessous représente un cube ABCDEFGH d'arête 1.
I et J sont les milieux respectifs des arêtes [BC] et [CD].
M est un point du segment [CE] tel que $\overrightarrow{CM} = t\overrightarrow{CE}$ $(0 \leq t \leq 1)$.



Dans tout l'exercice, on se place dans le repère orthonormé $(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1. a) Donner, sans justification, les coordonnées des points C, E, I et J.
b) Justifier que les coordonnées du point M sont $(1-t\,;1-t\,;t)$.
2. a) On rappelle que le plan médiateur du segment [IJ] est l'ensemble des points équidistants des points I et J.
Démontrer que les points C et E appartiennent au plan médiateur du segment [IJ].
b) En déduire que le triangle MIJ est un triangle isocèle en M.
c) Exprimer IM^2 en fonction de t.
3. Le but de cette question est de déterminer la position du point M sur le segment [CE] pour laquelle la mesure de l'angle $\widehat{IMJ}$ est maximum.
θ est la mesure, en radian, de l'angle $\widehat{IMJ}$.
a) En admettant que la mesure θ appartient à l'intervalle $[0\,;\pi]$, démontrer que la mesure θ est maximum lorsque $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ est maximum.
b) En déduire que la mesure θ est maximum lorsque la longueur IM est minimum.
c) Étudier les variations de la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;1]$ par :

$$f(t) = 3t^2 - t + \frac{1}{4}.$$

d) En déduire qu'il existe une unique position M_0 du point M sur le segment [EC] telle que la mesure de l'angle $\widehat{IMJ}$ soit maximum.
e) Démontrer que le point M_0 est le projeté orthogonal du point I sur le segment [EC].

Guide de résolution
1. b) Noter $(x_M\,;y_M\,;z_M)$ les coordonnées de M et traduire l'égalité $\overrightarrow{CM} = t\overrightarrow{CE}$ par un système d'équations.

Guide de résolution
3. a) Considérer le triangle MHI rectangle en H où H est le milieu de [IJ].

Guide de résolution
3. d) La fonction f est strictement positive sur $[0\,;1]$, donc f et $\sqrt{f}$ ont le même sens de variation sur $[0\,;1]$.
En effet, $(\sqrt{f})' = \dfrac{f'}{2\sqrt{f}}$.

110 Relier Mathématiques et Chimie

40 min

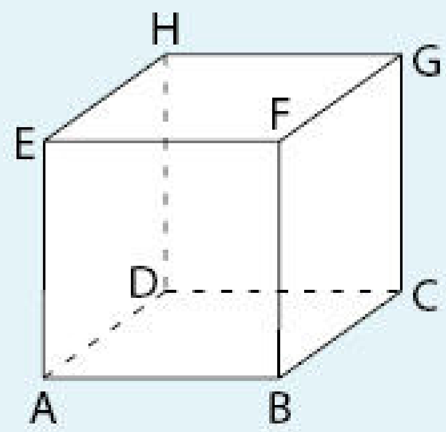
D'après Bac, Polynésie 2017

Les interactions électriques conduisent à modéliser la molécule de méthane CH_4 de la façon suivante :

- les noyaux d'atomes d'hydrogène occupent les positions des quatre sommets d'un tétraèdre régulier ;
- le noyau de carbone au centre de la molécule est à égale distance des quatre atomes d'hydrogène.

L'objectif est de déterminer une mesure de l'angle entre deux liaisons carbone-hydrogène.

1. a) Justifier qu'on peut inscrire ce tétraèdre dans le cube ABCDEFGH ci-contre en positionnant deux atomes d'hydrogène sur les sommets A et C du cube et les deux autres atomes d'hydrogène sur deux autres sommets du cube.



b) Reproduire le cube et représenter la molécule dans celui-ci.

2. Dans la suite de l'exercice, l'espace est muni du repère orthonormé $(D\,;\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DH})$.

a) Démontrer que l'atome de carbone est au centre Ω du cube.

b) Déterminer la mesure, en degré, de l'angle que forment entre elles les liaisons carbone-hydrogène, c'est-à-dire l'angle $\widehat{A\Omega C}$. *Arrondir au dixième.*

Guide de résolution
1. a) Les quatre faces d'un tétraèdre régulier sont des triangles équilatéraux.

Guide de résolution
2. a) Aucun calcul n'est à effectuer. Se souvenir d'une propriété du centre d'un cube.
b) Lire les coordonnées de Ω sur la figure.

Se préparer À L'ORAL

111 Présenter un exposé

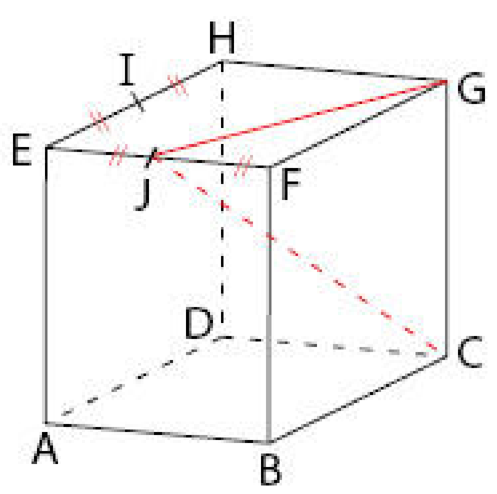
a) Citer deux méthodes permettant de démontrer qu'une droite est orthogonale à un plan.

b) Dans un exposé de 10 min, présenter ces deux méthodes sur quelques exemples.

112 Travailler l'oral en groupe

Résoudre cet exercice en petit groupe, puis en présenter les résultats à l'oral.

ABCDEFGH est un cube d'arête 1.
I et J sont les milieux respectifs des arêtes [EH] et [EF].
Démontrer que la droite (FI) est orthogonale au plan (GCJ).



113 Travailler oralement un Vrai-Faux

▶ **SAVOIR PRÉSENTER ORALEMENT UNE DÉMARCHE**

1. Préparation (5 min) : Pour chaque affirmation un membre du groupe prépare le résultat de cours qui permet de la valider ou non.

2. Jeu de rôle (15 min) : Les autres membres du groupe composent le jury et guident si nécessaire le candidat qui traite oralement une affirmation.

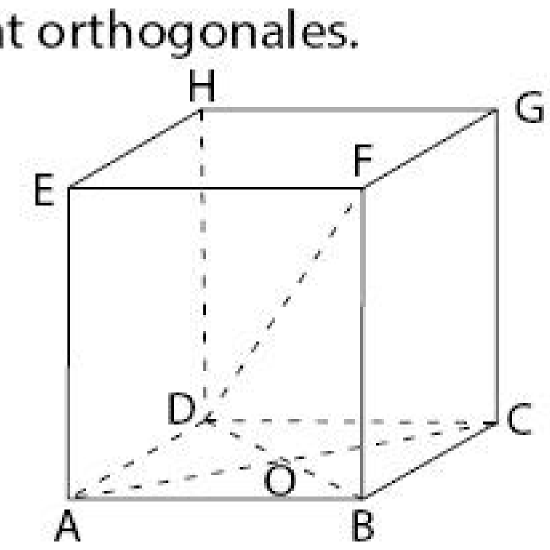
Énoncé : ABCDEFGH est un cube d'arête 1.
O est le centre de la face ABCD.
Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse. Justifier.

a) Les droites (OC) et (BD) sont orthogonales.

b) Les droites (OC) et (BF) sont orthogonales.

c) O est le projeté orthogonal du point C sur le plan (FBD).

d) La distance du point C au plan (FBD) est égale à $\sqrt{2}$.



114 Fonction scalaire de Leibniz

n désigne un nombre entier naturel, $n \geqslant 1$.

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont n points de l'espace associés respectivement aux poids (nombres réels) $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

On considère alors la fonction f qui à tout point M de l'espace associe le nombre réel $f(M)$ défini par :

$$f(M) = \alpha_1 MA_1^2 + \alpha_2 MA_2^2 + \ldots + \alpha_n MA_n^2.$$

f est appelée **fonction scalaire de Leibniz**.

1. En utilisant la relation de Chasles, démontrer que pour tout point N de l'espace :

$$f(M) = f(N) + (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)MN^2 + 2\overrightarrow{MN}\cdot(\alpha_1\overrightarrow{NA_1} + \alpha_2\overrightarrow{NA_2} + \ldots + \alpha_n\overrightarrow{NA_n}).$$

Pour réduire l'expression de $f(M)$ deux cas sont à envisager selon que la somme des poids est nulle ou non. On se propose d'étudier chacun de ces cas sur des exemples de recherche d'ensembles de points.

2. Exemple 1 : $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 0$

ABC est un triangle équilatéral de côté 1 et D le point de l'espace défini par $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$.

On se propose de déterminer l'ensemble $\mathscr{E}_1$ des points M de l'espace tels que $MA^2 + MB^2 - MC^2 - MD^2 = 3$.

a) Réaliser une figure puis vérifier que la somme des poids est nulle.

b) Démontrer, à l'aide de la question **1.**, que, pour tout point N de l'espace,

$$MA^2 + MB^2 - MC^2 - MD^2 = NA^2 + NB^2 - NC^2 - ND^2 + 2\overrightarrow{MN}\cdot(\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} - \overrightarrow{NC} - \overrightarrow{ND}).$$

c) Vérifier que $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} - \overrightarrow{NC} - \overrightarrow{ND} = 2\overrightarrow{CB}$.

d) Démontrer que $DA^2 + DB^2 - DC^2 = 3$ et donc que $D \in \mathscr{E}_1$.

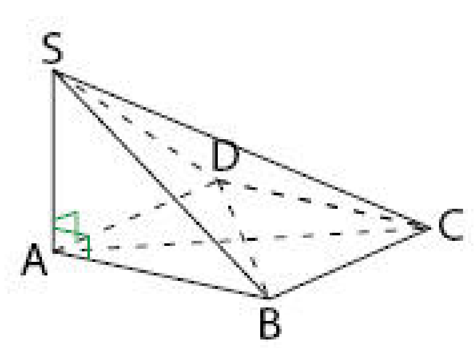
e) En déduire que $M \in \mathscr{E}_1$ si, et seulement si,

$$\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{CB} = 0.$$

f) Conclure alors que $\mathscr{E}_1$ est un plan à préciser.

3. Exemple 2 : $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n \neq 0$

SABCD est une pyramide : sa base ABCD est un carré de côté 1 et sa hauteur est l'arête [SA] de longueur $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.



On se propose de déterminer l'ensemble $\mathscr{E}_2$ des points M de l'espace tels que :

$$MA^2 + 2MB^2 - MC^2 + 2MD^2 = 4.$$

a) Vérifier que la somme des poids est non nulle.

b) G est le point défini par :

$$\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC} + 2\overrightarrow{GD} = \vec{0}.$$

Démontrer que $\overrightarrow{AG} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

Réaliser la figure et placer le point G.

c) Démontrer que $GA^2 + 2GB^2 - GC^2 + 2GD^2 = \dfrac{3}{2}$.

d) Démontrer, à l'aide de la question **1.**, que :

$$MA^2 + 2MB^2 - MC^2 + 2MD^2 = GA^2 + 2GB^2 - GC^2 + 2GD^2 + 4MG^2.$$

e) En déduire que $M \in \mathscr{E}_2$ si, et seulement si,

$$MG = \sqrt{\frac{5}{8}}.$$

f) Quelle est alors la nature de $\mathscr{E}_2$? Préciser ses éléments caractéristiques.

g) Le point S appartient-il à cet ensemble ? Justifier.

115 Sphère circonscrite à un tétraèdre

ABCD est un tétraèdre non aplati.

Savoir si les quatre sommets A, B, C, D appartiennent à une même sphère revient à savoir s'il existe un point O situé à égale distance des points A, B, C, D.

1. Le plan médiateur de l'arête [AB] est le plan $\mathscr{P}$ perpendiculaire à cette arête en son milieu I.

Un point M appartient à $\mathscr{P}$ si, et seulement si, $\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{BA} = 0$.

En déduire que M appartient à $\mathscr{P}$ si, et seulement si, MA = MB.

Conseil : factoriser la différence $\overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2$ avec le produit scalaire.

2. On se propose de déterminer d'abord l'ensemble Δ des points de l'espace équidistants des trois points A, B, C.

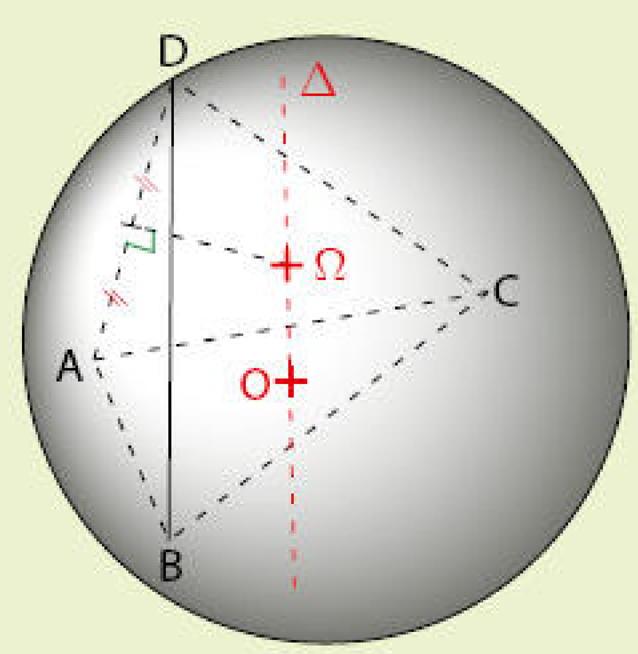
a) Il existe un point O, et un seul, du plan (ABC) qui appartient à Δ. Lequel ?

b) Montrer que Δ est une droite. Préciser sa position par rapport au plan (ABC).

3. Démontrer que Δ coupe le plan médiateur de l'arête [AD].

Conseil : pour cela, raisonner par l'absurde : supposer que Δ et ce plan ne se coupent pas et trouver une contradiction.

Il existe donc un unique point Ω de l'espace, équidistant des sommets du tétraèdre, et donc une sphère, et une seule, qui passe par ses quatre sommets. Cette sphère est dite **circonscrite au tétraèdre**.



116 Le point de Monge

ABCD est un tétraèdre. O est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre (voir exercice **115**).

I et J sont les milieux respectifs des arêtes opposées [AB] et [CD].

1. Le centre de gravité du tétraèdre ABCD est le point G défini par la relation :

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}.$$

Démontrer G est le milieu du segment [IJ].

On en déduit que les trois droites joignant les milieux des arêtes opposées sont concourantes en G.

2. Le point de Monge est le point M défini par la relation $\overrightarrow{OM}=2\overrightarrow{OG}$.

a) Démontrer que $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{MO}$.

b) En déduire que $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{DO}$.

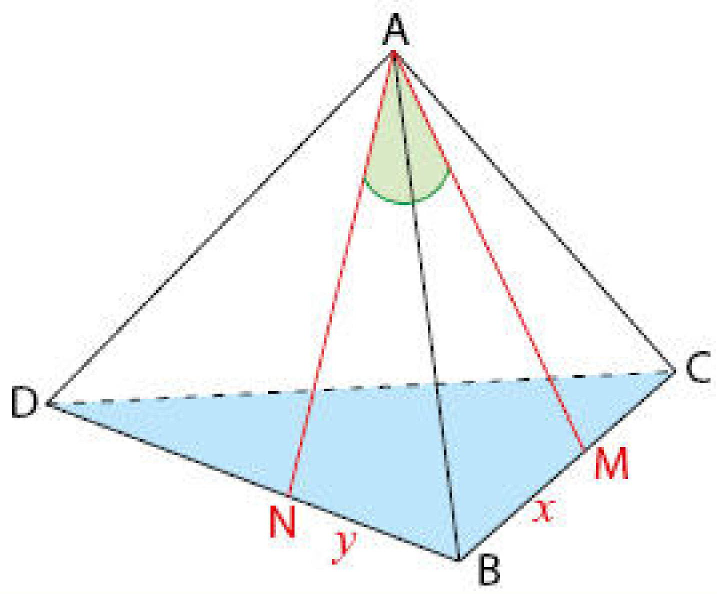
c) En déduire que $(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})\cdot\overrightarrow{CD}=0$.

d) Démontrer que M appartient au plan passant par le milieu I du segment [AB] et orthogonal à la droite (CD).

On peut montrer que le point de Monge M appartient aux cinq autres plans passant par le milieu d'une arête d'un tétraèdre et orthogonal à l'arête opposée.

117 Mesure d'un angle dans un tétraèdre

ABCD est un tétraèdre régulier d'arête a, avec $a>0$.



Problème

On se propose de montrer que quelles que soient les positions du point M sur l'arête [BC] et du point N sur l'arête [BD], la mesure de l'angle $\widehat{MAN}$ est inférieure ou égale à $\frac{\pi}{3}$.

On note $x=\mathrm{BM}$ et $y=\mathrm{BN}$.

1. a) Démontrer que $\mathrm{MA}^2=a^2+x^2-ax$.

b) Démontrer que $\mathrm{NA}^2=a^2+y^2-ay$.

c) En déduire que $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=\dfrac{a^2+(a-x)(a-y)}{2}$.

2. a) En déduire chacune des inégalités suivantes :

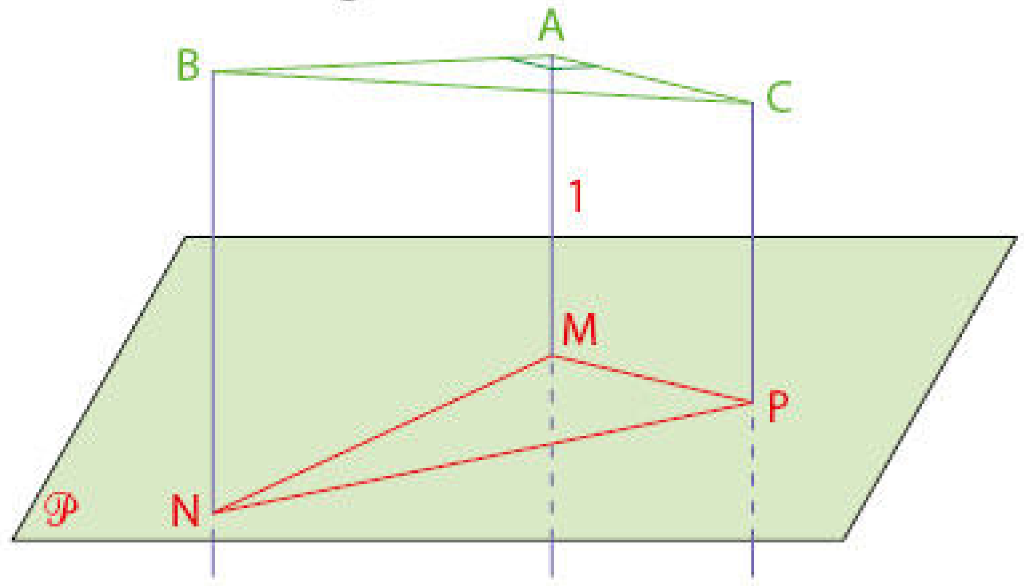
- $\mathrm{AM}\leqslant a$
- $\mathrm{AN}\leqslant a$
- $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}\geqslant\dfrac{a^2}{2}$

b) Conclure pour le problème initial.

118 Projection d'un angle droit

ABC est un triangle rectangle en A.

M, N et P sont les projetés orthogonaux respectifs des points A, B et C sur un plan $\mathscr{P}$ tel que la distance AM de A à $\mathscr{P}$ soit égale à 1.



On se propose de savoir si l'angle droit $\widehat{BAC}$ se projette en un angle $\widehat{NMP}$ droit.

On admet qu'il existe deux nombres réels s et t tels que $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{AC}+t\overrightarrow{MA}$.

1. a) Exprimer le produit scalaire $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MA}$ en fonction de s et t.

b) En déduire que $s=-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MA}$.

c) De même, démontrer que $t=-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{MA}$.

2. a) Démontrer que

$$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MP}=-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MA})\times(\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{MA}).$$

b) En déduire que l'angle $\widehat{NMP}$ est droit si, et seulement si, la droite (AB) ou la droite (AC) sont parallèles au plan $\mathscr{P}$.

Des défis

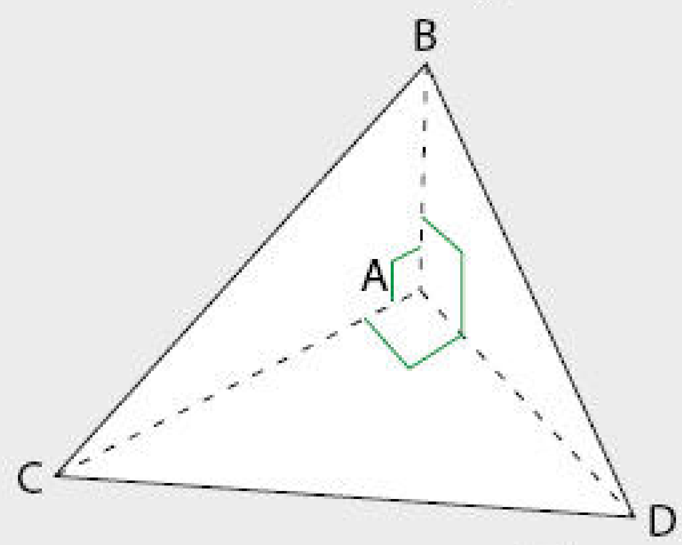
119 Établir une inégalité

A, B, C et D sont quatre points de l'espace tels que $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}\leqslant 0$ et $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}\leqslant 0$.

Démontrer que $\mathrm{AC}\geqslant\mathrm{BD}$.

120 Déterminer une valeur minimale

ABCD est un tétraèdre tel que les arêtes [AB], [AC] et [AD] sont deux à deux orthogonales.



Sachant que $\mathrm{AB}=3$ et $\mathrm{CD}=\sqrt{2}$, déterminer la valeur minimum de $\mathrm{BC}^6+\mathrm{BD}^6-\mathrm{AC}^6-\mathrm{AD}^6$.