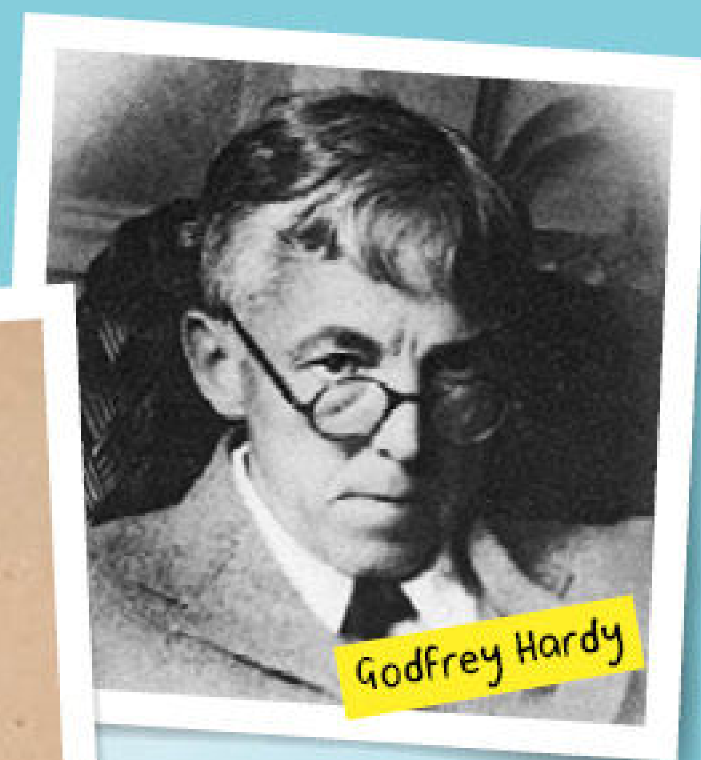
9 Compléments sur la dérivation

HISTOIRE DES MATHS

Au cours de la seconde guerre punique, en 213 avant notre ère, lors du siège de Syracuse, **Archimède** aurait orienté des miroirs concaves vers des navires romains pour y concentrer les rayons du soleil et enflammer leurs voiles.

Au début du 19e siècle, la convexité fait l'objet de travaux par **Augustin Cauchy**. Plus tard, à l'aide de fonctions convexes, des mathématiciens démontrent un grand nombre d'inégalités remarquables, dites inégalités de convexité. Ainsi, en 1906, **Jensen** démontre une inégalité qui permet notamment la comparaison entre la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique de plusieurs nombres.

Dans les années 1930, **Hardy** étudie les fonctions convexes. Il consacre son ouvrage *Inégalités* à l'obtention d'inégalités grâce à la convexité.


Godfrey Hardy


Johan Jensen

▶ **Johan Jensen** (1859-1925) est un ingénieur danois. Employé dans une compagnie de téléphone, il consacre son temps libre à des recherches en mathématiques. Il est surtout connu pour l'inégalité de Jensen.

▶ **Godfrey Hardy** (1877-1947) est un mathématicien anglais qui a enseigné au Trinity College de Cambridge. Sa collaboration avec le mathématicien Littlewood, l'une des plus fructueuses dans l'histoire des mathématiques, donne lieu à des centaines de publications en analyse et en théorie des nombres.

1845
Verhulst définit une courbe avec un point d'inflexion pour décrire l'évolution d'une population.

1876
Jordan, auteur d'une inégalité sur une fonction concave, enseigne à Polytechnique.

1906
Jensen démontre l'inégalité portant son nom.

1930
Hardy publie *Inégalités*, ouvrage sur la convexité.

1848 Fin de la monarchie de Juillet

1867 Les États-Unis achètent l'Alaska

1883 Au *Bonheur des Dames* de Zola

1905 Einstein publie sa théorie de la relativité

1930 Découverte de Pluton

1945 Fin de la Seconde Guerre mondiale

1850 1875 1900 1925 1950

Le télescope spatial *James-Webb* en salle de test.

Le télescope spatial *James-Webb*, développé par la Nasa, est le successeur du télescope *Hubble*. Un télescope est un instrument d'optique composé d'un miroir concave qui joue le rôle d'objectif. Il fournit, d'un objet quelconque se trouvant à l'infini (par exemple d'une étoile ou d'une galaxie), une image réelle se trouvant dans le plan focal du miroir.

Les contenus et capacités travaillés dans ce chapitre

	Savoir-faire	Exercices
• Utiliser la dérivée pour déterminer une équation de tangente, étudier les variations d'une fonction.	1 à 4	22, 23, 27, 28
• Composée de deux fonctions. Calculer la dérivée d'une fonction donnée par une formule simple.	5 à 10	29 à 41
• Fonctions convexes sur un intervalle ; position d'une courbe par rapport à ses tangentes, points d'inflexion.	11 à 14	42, 43, 45 à 48
• Convexité et croissance de f', positivité de f''.	15 à 21	54 à 65
• Démontrer des inégalités en utilisant la convexité d'une fonction.		44, 49, 69, 71, 79
• Esquisser l'allure de la courbe d'une fonction f à partir de tableaux de variations de f, de f' ou de f''.		24 à 26, 50 à 53

Bien démarrer

Calcul mental

Rappels utiles

• La fonction exponentielle

Pour tout nombre réel x,

$e^0 = 1$ $\exp'(x) = e^x$ $e^x > 0$

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

• Dérivées de fonctions usuelles

$f(x)$	f est dérivable sur	$f'(x)$
$k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	0
x	$\mathbb{R}$	1
x^n ($n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$ et $n \neq 1$)	$\mathbb{R}$ si $n \geqslant 2$ $]-\infty\,;0[$ ou $]0\,;+\infty[$ si $n \leqslant -1$	nx^{n-1}
$\dfrac{1}{x}$	$]-\infty\,;0[$ ou $]0\,;+\infty[$	$-\dfrac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$]0\,;+\infty[$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

• Sens de variation et dérivée

f est une fonction dérivable sur un intervalle I.

Si pour tout réel x de I, $f'(x) \geqslant 0$ (resp. $f'(x) \leqslant 0$), alors la fonction f est croissante (resp. décroissante) sur I.

• Dérivée de $x \mapsto g(ax+b)$

a et b désignent deux nombres réels avec $a \neq 0$.

Si g est une fonction dérivable sur un intervalle J, alors la fonction $f : x \mapsto g(ax+b)$ est dérivable sur l'intervalle I formé des nombres réels x tels que $ax+b$ appartient à J et $\boldsymbol{f'(x) = ag'(ax+b)}$.

En particulier, la fonction $f : x \mapsto e^{ax+b}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = ae^{ax+b}$.

• Équation de la tangente à une courbe

Dans un repère, une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse a est $\boldsymbol{y = f'(a)(x-a) + f(a)}$.

À l'oral

Questions-Tests

Pour chaque question, il y a une seule réponse exacte.

1 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2 - 2e^x$.

a) $f(0)$ est égal à :

(1) -2 (2) 0 (3) 2

b) f est positive sur l'intervalle :

(1) $]-\infty\,;+\infty[$ (2) $[0\,;+\infty[$ (3) $]-\infty\,;0]$

c) Pour tout réel x, $f'(x)$ est égal à :

(1) $2e^x$ (2) $2-2e^x$ (3) $-2e^x$

2 **a)** f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 - 5x + 1.$$

$f'(0)$ est égal à :

(1) -5 (2) 0 (3) 1

b) g est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \dfrac{1}{x} + x$.

Pour tout réel $x \neq 0$, $g'(x)$ est égal à :

(1) 2 (2) $\dfrac{1}{x^2} + 1$ (3) $\dfrac{x^2-1}{x^2}$

c) h est la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $h(x) = -2\sqrt{x}$.

Le nombre dérivé de h en 1 est :

(1) $h'(1) = -2$ (2) $h'(1) = -1$ (3) $h'(1) = 0{,}5$

3 f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, $f'(x) = e^x(x-1)$.

a) f est croissante sur l'intervalle :

(1) $[0\,;+\infty[$ (2) $[1\,;+\infty[$ (3) $]-\infty\,;1]$

b) f est décroissante sur l'intervalle :

(1) $[0\,;+\infty[$ (2) $[1\,;+\infty[$ (3) $]-\infty\,;1]$

4 **a)** f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{3x+1}.$$

Pour tout réel x, $f'(x)$ est égal à :

(1) e^{3x+1} (2) $3e^{3x+1}$ (3) $(3x+1)e^{3x+1}$

b) g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (5x+1)^3$.

Pour tout réel x, $g'(x)$ est égal à :

(1) $15(5x+1)^2$ (2) $3(5x+1)^2$ (3) 5^3

5 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 1 + e^{-x+2}.$$

$\mathscr{C}$ est la courbe représentative de f dans un repère.

a) $f(2)$ est égal à : (1) 0 (2) 1 (3) 2

b) $f'(2)$ est égal à : (1) -1 (2) 1 (3) 2

c) Une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2 est :

(1) $y = -x+4$ (2) $y = x$ (3) $y = x+4$

1 Composée de deux fonctions

Un agriculteur possède 5 hectares de terre sur lesquelles il cultive du blé. Sa production, en quintal, lorsqu'il cultive x hectares de terre est modélisée par la fonction p définie sur l'intervalle $[0\,;5]$ par :

$$p(x) = 65x + 5.$$

Son revenu, en euro, lorsqu'il produit X quintaux de blé est donné par la fonction r définie par :

$$r(\mathrm{X}) = 90\mathrm{X} + 0{,}9\mathrm{e}^{-\mathrm{X}}.$$

1 Déterminer le revenu de l'agriculteur lorsqu'il cultive 2 hectares de terre. *Utiliser 1 q = 100 kg.*

2 On note $r \circ p$ la fonction qui à x hectares de terre cultivée associe le revenu, en euro, de l'agriculteur.

a) S'aider du schéma de composition ci-contre pour exprimer $(r \circ p)(x)$, c'est-à-dire $r(p(x))$ en fonction de x.

b) Vérifier le résultat obtenu à la question **1**.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, mapsto, "p"] \arrow[rr, bend right, "r \circ p"'] & \underbrace{p(x)}_{\mathrm{X}} \arrow[r, mapsto, "r"] & r(\mathrm{X}) = r(p(x)) \end{tikzcd}$$

3 **a)** Pour tout réel x de $[0\,;5]$, déterminer : • $(r \circ p)'(x)$; • $(r' \circ p)(x)$, c'est-à-dire $r'(p(x))$.

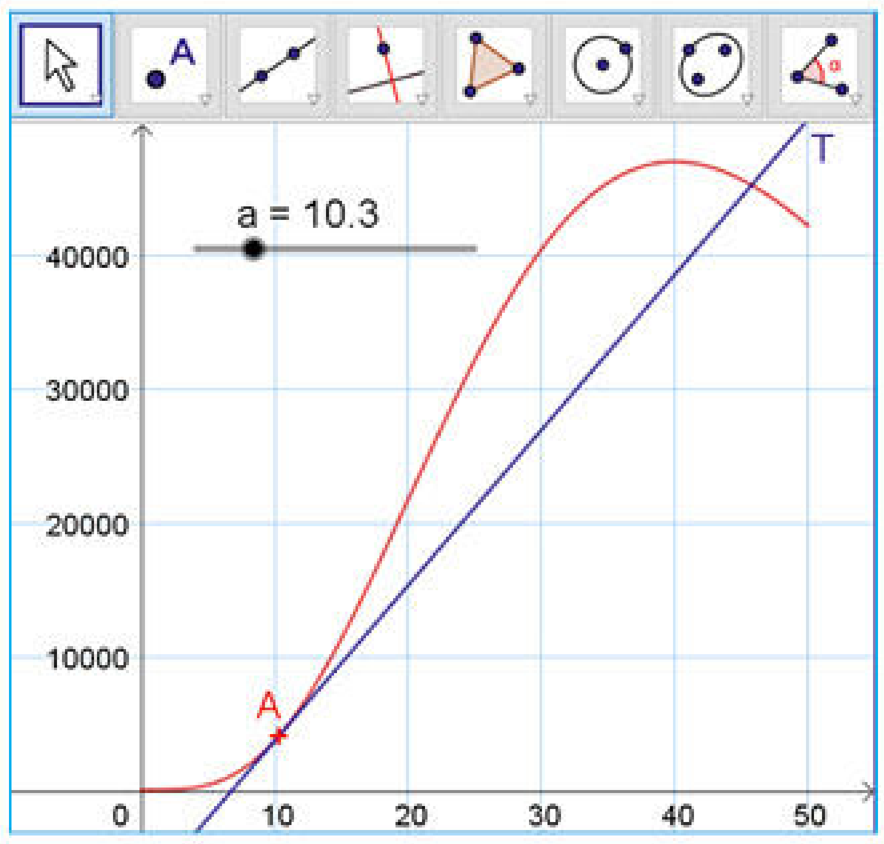
b) Pour tout réel x de $[0\,;5]$, comparer alors $(r \circ p)'(x)$ et $(r' \circ p)(x) \times p'(x)$.

2 Tice Convexité d'une fonction

Lors de la propagation d'une rumeur, l'évolution du nombre d'individus d'une population propageant celle-ci, x jours après son commencement, peut être modélisée par la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;50]$ par :

$$f(x) = 100 + x^4\mathrm{e}^{-0{,}1x}.$$

La vitesse de propagation de la rumeur est assimilée à la fonction dérivée f' de f.



1 **a)** Avec un logiciel de géométrie, créer un curseur a allant de 0 à 50 avec un incrément de 0,1.

b) Dans la zone de saisie, taper :

```
• f(x):=Fonction(100+x^4*exp(-0,1x),0,50)
• A(a,f(a))      • T=Tangente(A,f)      • f'(a)
```

2 Faire varier le curseur a et conjecturer sur quel intervalle :

a) la vitesse de propagation de la rumeur augmente ;

b) la courbe représentative de f est située au-dessus de ses tangentes. Que remarque-t-on ?

On dit que la fonction f est **convexe** sur cet intervalle.

3 Faire varier le curseur a et conjecturer sur quel intervalle :

a) la vitesse de propagation de la rumeur diminue ;

b) la courbe représentative de f est située au-dessous de ses tangentes. Que remarque-t-on ?

On dit que la fonction f est **concave** sur cet intervalle.

Exercices
- 1 à 4 (ci-contre)
- 22 à 28

1 Rappels sur la dérivation

f désigne une fonction définie sur un intervalle I.

A Nombre dérivé, fonction dérivée

Définitions

- a et $a+h$ désignent deux nombres réels de I avec $h \neq 0$.

Dire que f **est dérivable en a** signifie que la fonction $h \mapsto \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet un nombre réel pour limite en 0. Ce nombre réel est appelé **nombre dérivé de f en a** et on le note $f'(a)$.

Ainsi,

$$\boldsymbol{f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}}.$$

- Dire que f est **dérivable sur I** signifie que f est dérivable en tout réel x de I.

La **fonction dérivée** de f, notée f', est la fonction qui, à tout x de I, associe le nombre $f'(x)$.

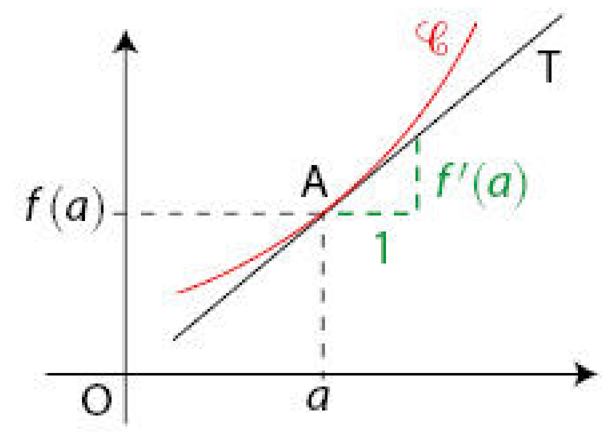
B Tangente à la courbe d'une fonction

Définition – Propriété

f est une fonction dérivable en un réel a de I.

Dans un repère, **la tangente** à la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f au point A d'abscisse a est la droite T qui passe par le point A et de coefficient directeur $f'(a)$.

Une équation de T est $\boldsymbol{y = f'(a)(x-a)+f(a)}$.



C Signe de la dérivée et sens de variation

Propriétés

f est une fonction dérivable sur I.

- Si, pour tout réel x de I, $\boldsymbol{f'(x) > 0}$ (resp. $f'(x) < 0$) sauf peut-être en un nombre fini de points où f' s'annule, alors f est **strictement croissante** (resp. décroissante) sur I.
- Si, pour tout réel x de I, $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I.

D Dérivée et extremum local

Propriétés

f est une fonction dérivable sur un intervalle **ouvert I** et x_0 est un nombre réel de I.

Si $f(x_0)$ est un extremum local de f, alors $f'(x_0) = 0$.

Si f' s'annule en x_0 **en changeant de signe**, alors $f(x_0)$ est un extremum local.

x		x_0	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$f(x_0)$	$\nearrow$

$f(x_0)$ est un minimum local.

x		x_0	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(x_0)$	$\searrow$

$f(x_0)$ est un maximum local.

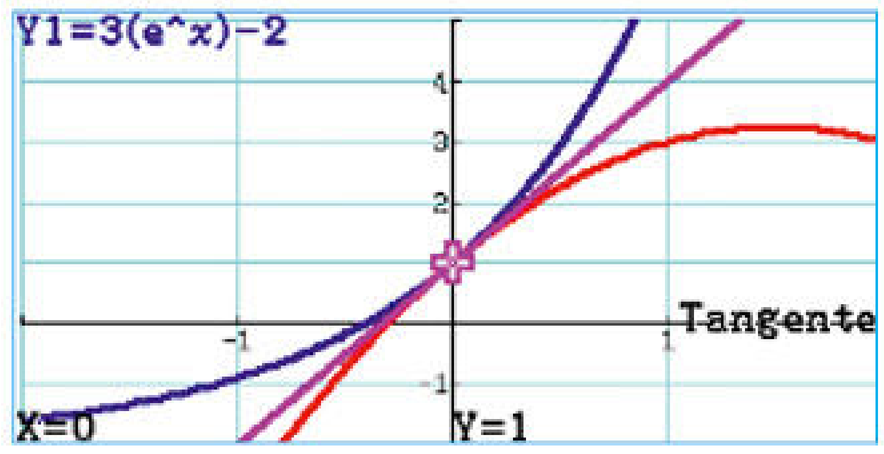
EXERCICES RÉSOLUS

1 Déterminer l'équation d'une tangente

Sur cet écran de calculatrice, sont affichées les courbes représentatives des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3e^x - 2 \quad \text{et} \quad g(x) = -x^2 + 3x + 1.$$

Il semble que ces deux courbes admettent la même tangente au point d'abscisse 0.
Valider ou invalider cette conjecture par un calcul.



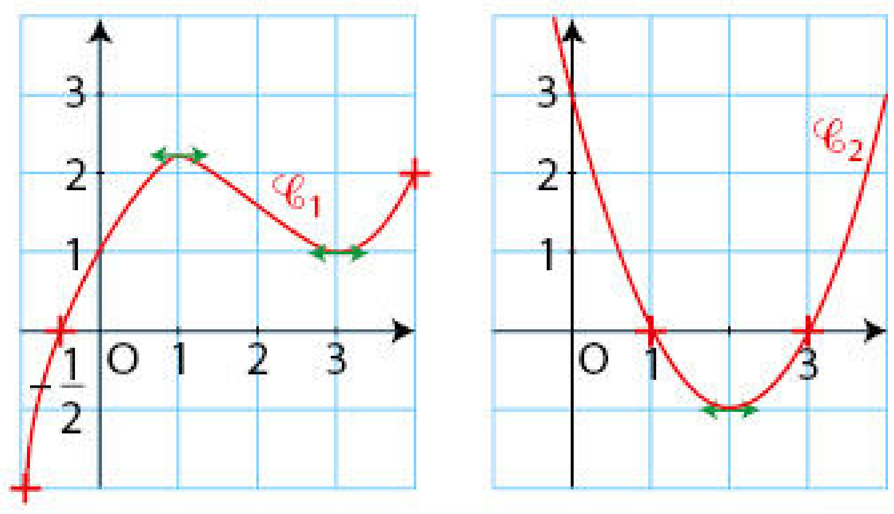
Solution

- $f(0) = g(0) = 1$ donc les deux courbes passent par le point A$(0\,;1)$.
- Pour tout réel x, $f'(x) = 3e^x$ et $g'(x) = -2x + 3$.
Ainsi, $f'(0) = g'(0) = 3$ donc les tangentes en A à chacune des deux courbes ont le même coefficient directeur.
- Conclusion : les tangentes en A aux deux courbes sont confondues.

Deux droites qui ont le même coefficient directeur sont parallèles. Si de plus, elles ont un point en commun, alors elles sont confondues.

2 Associer graphiquement une fonction et sa dérivée

Voici, dans un repère orthonormé, les courbes représentatives d'une fonction f et de sa dérivée f' sur l'intervalle $[-1\,;4]$.
Associer chaque fonction à sa courbe représentative.



Solution

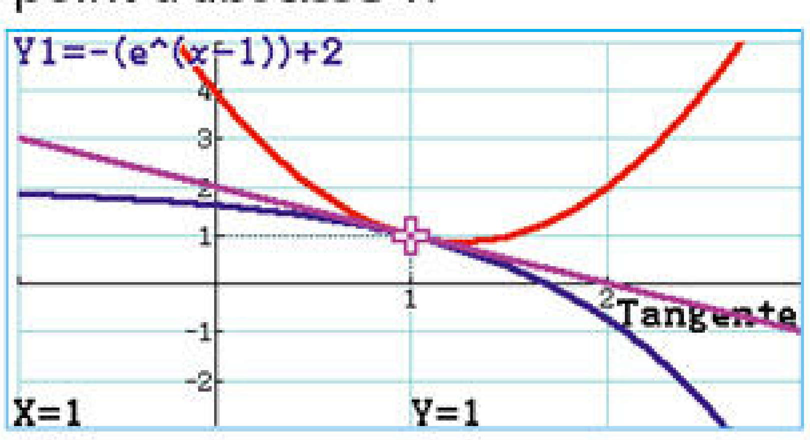
Si la courbe $\mathscr{C}_1$ représente la fonction f', alors $f'(x) \geqslant 0$ sur $[-0{,}5\,;4]$ et f devrait être croissante sur cet intervalle, ce qui n'est pas cohérent avec la courbe $\mathscr{C}_2$.
$\mathscr{C}_2$ représente donc la fonction f' et $\mathscr{C}_1$ représente la fonction f.
En effet, $f'(x) \geqslant 0$ sur $[-1\,;1]$ et $[3\,;4]$, et $f'(x) \leqslant 0$ sur $[1\,;3]$.
Cela est cohérent avec le fait que f est croissante sur $[-1\,;1]$ et $[3\,;4]$ et décroissante sur $[1\,;3]$.

- On lit graphiquement le signe de chacune des fonctions.
- On vérifie la cohérence entre le signe lu sur l'une des courbes et les variations lues sur l'autre courbe.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

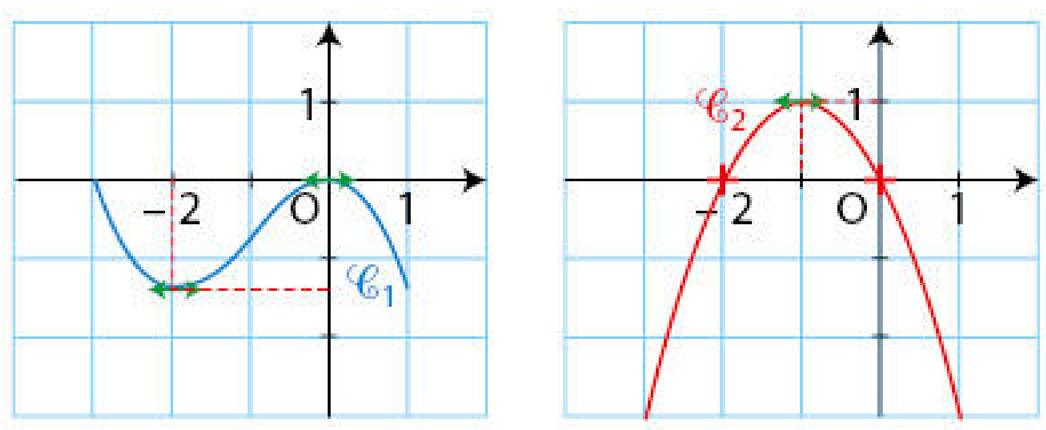
Sur le modèle de l'exercice résolu 1

3 Sur cet écran de calculatrice, sont affichées les courbes représentatives des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -e^{x-1} + 2$ et $g(x) = 2x^2 - 5x + 4$.
Démontrer que ces courbes ont une tangente commune au point d'abscisse 1.



Sur le modèle de l'exercice résolu 2

4 Voici dans un repère orthonormé, les courbes représentatives d'une fonction f et de sa dérivée f' sur l'intervalle $[-3\,;1]$.



Associer chaque fonction à sa courbe représentative.

Exercices
- **5** à **10** (ci-contre)
- **29** à **41**

2 Règles de dérivation

A Opérations et dérivation

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I et k désigne un nombre réel.

- $(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})'=\boldsymbol{u}'+\boldsymbol{v}'$
- $(\boldsymbol{ku})'=\boldsymbol{ku}'$
- $(\boldsymbol{uv})'=\boldsymbol{u}'\boldsymbol{v}+\boldsymbol{uv}'$
- $(\boldsymbol{u}^2)'=\boldsymbol{2uu}'$
- $\left(\dfrac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{v}}\right)'=\dfrac{-\boldsymbol{v}'}{\boldsymbol{v}^2}$ $(v(x)\neq 0 \text{ sur I})$
- $\left(\dfrac{\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{v}}\right)'=\dfrac{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{v}-\boldsymbol{uv}'}{\boldsymbol{v}^2}$ $(v(x)\neq 0 \text{ sur I})$

B Composée de deux fonctions

Définition

u est une fonction définie sur un intervalle I et v est une fonction définie sur un intervalle J tel que pour tout x de I, on ait $v(x)$ dans J.
La **fonction composée** de u suivie de v, notée $\boldsymbol{v \circ u}$, (lire « v rond u »), est la fonction définie sur I par $(\boldsymbol{v\circ u})(x)=\boldsymbol{v}(\boldsymbol{u}(x))$.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, mapsto, "u"] \arrow[rr, bend right, "v \circ u"'] & \underbrace{u(x)}_{X} \arrow[r, mapsto, "v"] & v(X)=v(u(x)) \end{tikzcd}$$

Exemple

u et v sont les fonctions dérivables sur $\mathrm{I}=\mathbb{R}$ par $u(x)=2x-1$ et sur $\mathrm{J}=\mathbb{R}$ par $v(x)=x^2$.
La fonction $v\circ u$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $(v\circ u)(x)=v(u(x))=v(2x-1)=(2x-1)^2$.
La fonction $u\circ v$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $(u\circ v)(x)=u(v(x))=u(x^2)=2x^2-1$.

En général, $v\circ u \neq u \circ v$.

C Dérivée de la composée de deux fonctions

Propriété (admise)

u est une fonction définie sur un intervalle I et v est une fonction définie sur un intervalle J tel que pour tout x de I, on ait $v(x)$ dans J.
Si u est dérivable sur I et v est dérivable sur J, alors la fonction $v\circ u$ est dérivable sur I et pour tout réel x de I,
$$(\boldsymbol{v\circ u})'(x)=(v'\circ u)(x)\times u'(x)=\boldsymbol{v}'(\boldsymbol{u}(x))\times \boldsymbol{u}'(x)$$

Exemple

u et v sont les fonctions définies sur $\mathrm{I}=\mathbb{R}$ par $u(x)=x^2+1$ et sur $\mathrm{J}=]0\,;+\infty[$ par $v(x)=\sqrt{x}$.
- Pour tout réel x, $x^2+1>0$ donc $x^2+1\in \mathrm{J}$. Donc la fonction $v\circ u$ est définie sur $\mathrm{I}=\mathbb{R}$.
- u est dérivable sur $\mathrm{I}=\mathbb{R}$ et v est dérivable sur $\mathrm{J}=]0\,;+\infty[$, donc la fonction $v\circ u$ est dérivable sur $\mathrm{I}=\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, $(v\circ u)'(x)=v'(u(x))\times u'(x)=v'(2x+1)\times 2x=\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\times 2x=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Conséquences

u est une fonction dérivable sur un intervalle I et n désigne un nombre entier relatif non nul.

La fonction …	**(1)** u^n avec $u(x)\neq 0$ lorsque $n\leqslant -1$	**(2)** $\sqrt{u}$ avec $u(x)>0$	**(3)** e^u
est dérivable sur I et…	$(\boldsymbol{u}^n)'=\boldsymbol{nu}^{n-1}\boldsymbol{u}'$	$(\sqrt{\boldsymbol{u}})'=\dfrac{\boldsymbol{u}'}{2\sqrt{\boldsymbol{u}}}$	$(\mathrm{e}^u)'=\boldsymbol{u}'\mathrm{e}^u$

(1) En effet, $u^n=f\circ u$ où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ si $n\geqslant 1$ ou $\mathbb{R}^*$ si $n\leqslant -1$ par $f(x)=x^n$.
Pour tout réel x de I, $(u^n)'(x)=f'(u(x))\times u'(x)=n[u(x)]^{n-1}\times u'(x)=nu^{n-1}(x)u'(x)$.
(2) et **(3)** se démontrent de façon analogue.

EXERCICES RÉSOLUS

5 Décomposer une fonction

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}-\{1\}$ par $f(x)=\mathrm{e}^{\frac{x}{x-1}}$.
Décomposer f sous la forme $v\circ u$ en précisant les fonctions u et v.

Solution

Voici le schéma de décomposition de la fonction f :

$$x \xmapsto{u} \underbrace{\frac{x}{x-1}}_{X} \qquad X \xmapsto{\exp} \mathrm{e}^X=\mathrm{e}^{\frac{x}{x-1}}$$

> Pour tout réel $x\neq 1$, $\dfrac{x}{x-1}\in\mathbb{R}$,
> donc la fonction $\exp\circ u$ est définie sur chaque intervalle $]-\infty\,;1[$ et $]1\,;+\infty[$.

Ainsi, $f=v\circ u$ où u est la fonction définie sur $\mathbb{R}-\{1\}$ par $u(x)=\dfrac{x}{x-1}$ et v la fonction exponentielle définie sur $\mathbb{R}$.

6 Utiliser les formules de dérivées

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x\sqrt{2x^2+1}$.
Justifier l'affichage obtenu ci-contre à l'aide d'un logiciel de calcul formel.

1	Simplifier$\left(\text{Dérivée}\left(x\sqrt{2x^2+1}\right)\right)$
	$\rightarrow\ (4x^2+1)\cdot\dfrac{\sqrt{2x^2+1}}{2x^2+1}$

Solution

La fonction $x\mapsto 2x^2+1$ est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$, la fonction v : $x\mapsto\sqrt{2x^2+1}$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}$. La fonction u : $x\mapsto x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
f est le produit des fonctions u et v dérivables sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x :

> Pour dériver la fonction v on utilise la formule :
> $(\sqrt{w})'=\dfrac{w'}{2\sqrt{w}}$ avec $w(x)=2x^2+1$.

$u(x)=x \qquad u'(x)=1$

$v(x)=\sqrt{2x^2+1} \qquad v'(x)=\dfrac{4x}{2\sqrt{2x^2+1}}=\dfrac{2x}{\sqrt{2x^2+1}}$

Ainsi $f'(x)=1\times\sqrt{2x^2+1}+x\times\dfrac{2x}{\sqrt{2x^2+1}}=\dfrac{\left(\sqrt{2x^2+1}\right)^2+2x^2}{\sqrt{2x^2+1}}=\dfrac{4x^2+1}{\sqrt{2x^2+1}}=(4x^2+1)\dfrac{\sqrt{2x^2+1}}{2x^2+1}$.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 5

7 Dans chaque cas, décomposer la fonction f sous la forme $v\circ u$ en précisant les fonctions u et v.
a) f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x^2-5x)^3$.
b) f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sqrt{5x^2+7}$.

8 Dans chaque cas, décomposer la fonction g sous la forme $v\circ u$ en précisant les fonctions u et v.
a) g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$g(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}.$$
b) g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$g(x)=\mathrm{e}^{2x}-4\mathrm{e}^x.$$

Sur le modèle de l'exercice résolu 6

9 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x)=(x-1)\sqrt{x^2+1}.$$
Justifier l'affichage obtenu ci-dessous.

1	Simplifier$\left(\text{Dérivée}\left((x-1)\sqrt{x^2+1}\right)\right)$
	$\rightarrow\ (2x^2-x+1)\cdot\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x^2+1}$

10 h est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$h(x)=\mathrm{e}^{x^2-3x+1}.$$
Déterminer la fonction dérivée de h.

Cours

Exercices
- 11 à 14 (ci-contre)
- 42 à 49

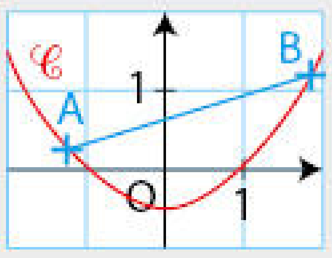
3 Fonctions convexes

A Convexité et lecture graphique

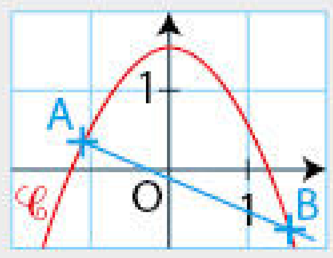
Définition

f est une fonction définie sur un intervalle I.
$\mathscr{C}$ est sa courbe représentative sur l'intervalle I dans un repère.

- Dire que f est convexe sur I signifie que pour tous points A et B distincts de $\mathscr{C}$, le segment [AB] est au-dessus de la courbe $\mathscr{C}$ entre A et B.



- Dire que f est concave sur I signifie que pour tous points A et B distincts de $\mathscr{C}$, le segment [AB] est au-dessous de la courbe $\mathscr{C}$ entre A et B.



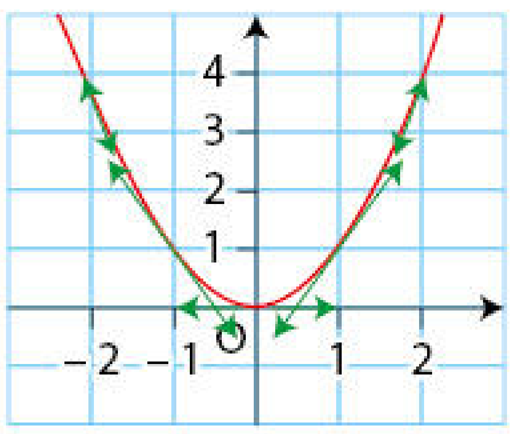
Propriétés (admises)

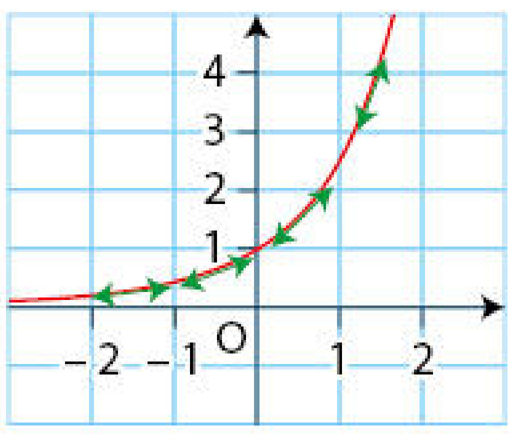
f est une fonction dérivable sur un intervalle I et $\mathscr{C}$ est sa courbe représentative dans un repère.

- Dire que f est convexe sur I signifie que, sur I, la courbe $\mathscr{C}$ est entièrement au-dessus de chacune de ses tangentes.
- Dire que f est concave sur I signifie que, sur I, la courbe $\mathscr{C}$ est entièrement au-dessous de chacune de ses tangentes.

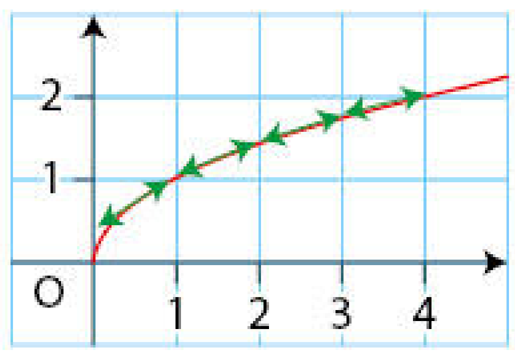
Exemples

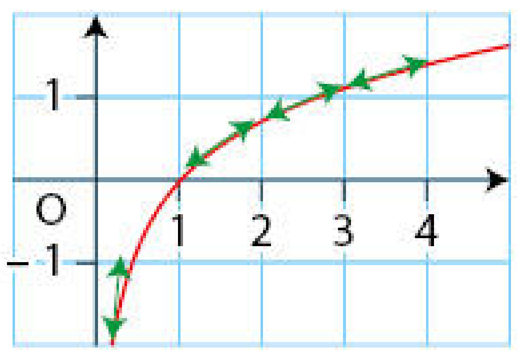
- La fonction carré et la fonction exponentielle sont convexes sur $\mathbb{R}$.





- La fonction racine carrée et la fonction ln sont concaves sur $]0\,;+\infty[$.



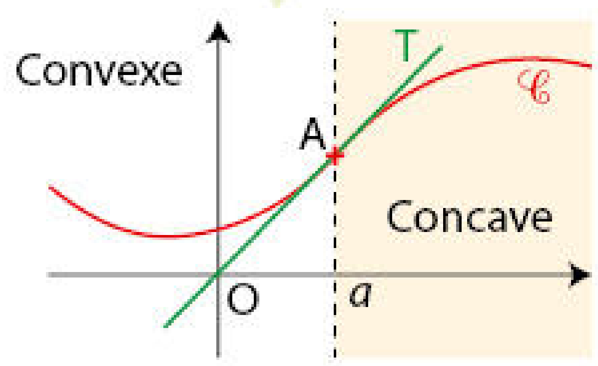


B Point d'inflexion

Définition

f est une fonction dérivable sur un intervalle I.
$\mathscr{C}$ est sa courbe représentative dans un repère et $a \in$ I.
Dire que $\mathrm{A}(a\,;f(a))$ est **un point d'inflexion** de $\mathscr{C}$ signifie qu'au point A, la courbe $\mathscr{C}$ traverse sa tangente.

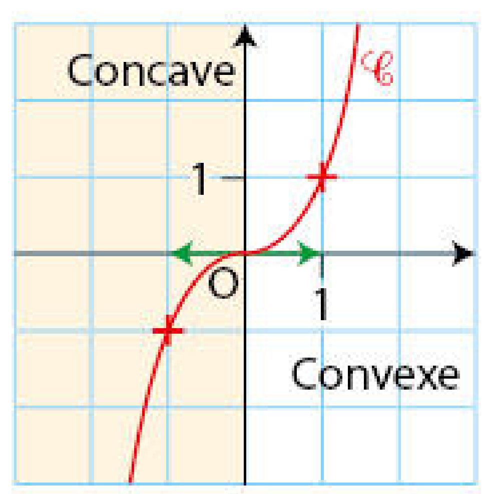
La courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de la tangente T en A, puis au-dessous.



Conséquence : en l'abscisse a d'un point d'inflexion, la fonction f passe de convexe à concave ou de concave à convexe.

Exemple

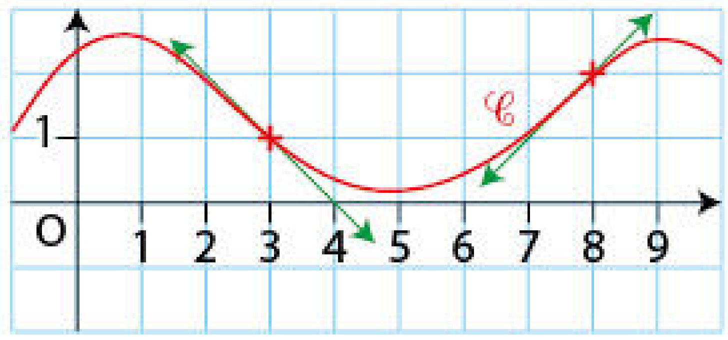
u est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^3$.
L'origine O du repère est un point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}$ représentative de u.
u est concave sur $]-\infty\,;0]$ et convexe sur $[0\,;+\infty[$.



EXERCICES RÉSOLUS

11 Reconnaître graphiquement la convexité

Voici, dans un repère, la courbe $\mathscr{C}$ représentative d'une fonction f dérivable sur l'intervalle $[-1\,;10]$.
Lire graphiquement les intervalles sur lesquels la fonction f est convexe ou concave.



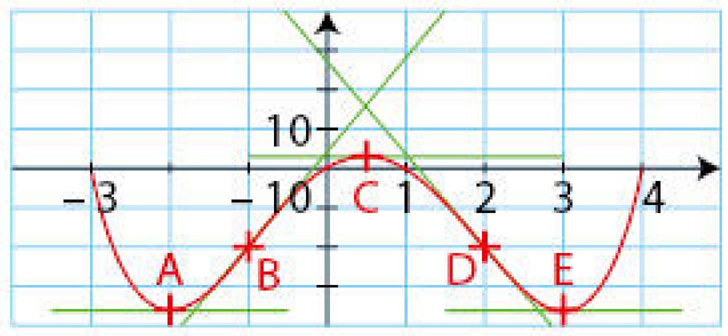
Solution

- La courbe $\mathscr{C}$ est au-dessous de ses tangentes sur les intervalles $[-1\,;3]$ et $[8\,;10]$. La fonction f est donc concave sur chacun de ces intervalles.
- La courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de ses tangentes sur l'intervalle $[3\,;8]$. La fonction f est donc convexe sur cet intervalle.

Intuitivement, une fonction convexe sur un intervalle est représentée par un « creux », alors qu'une fonction concave est représentée par une « bosse ».

12 Reconnaître un point d'inflexion

Dans le repère ci-contre, $\mathscr{C}$ est la courbe représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-3\,;4]$. Les droites tracées en vert sont des tangentes à la courbe $\mathscr{C}$.
Lire graphiquement les points d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}$.



Solution

D'après le graphique, il y a deux points où la courbe traverse sa tangente.
Ce sont :
- le point B de $\mathscr{C}$ d'abscisse -1 ;
- le point D de $\mathscr{C}$ d'abscisse 2.

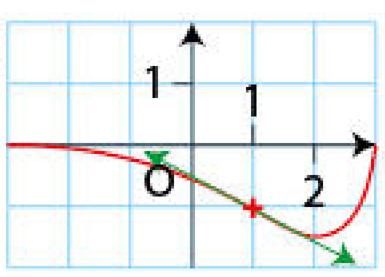
Ces points sont les points d'inflexion de $\mathscr{C}$.

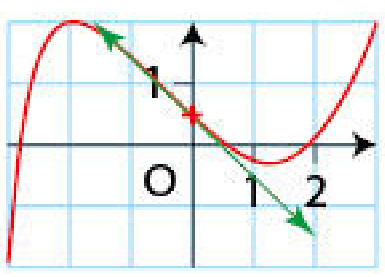
En B, la courbe $\mathscr{C}$ passe de convexe à concave.
En D, la courbe $\mathscr{C}$ passe de concave à convexe.

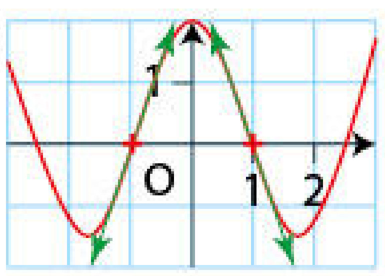
EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

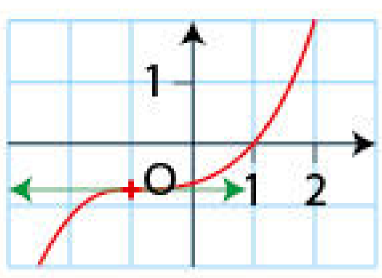
Sur le modèle de l'exercice résolu 11

13 Dans chaque cas, la fonction f, dérivable sur $[-3\,;3]$, est définie par sa courbe $\mathscr{C}$ dans un repère.
Lire graphiquement les intervalles sur lesquels f est convexe ou concave.

a)


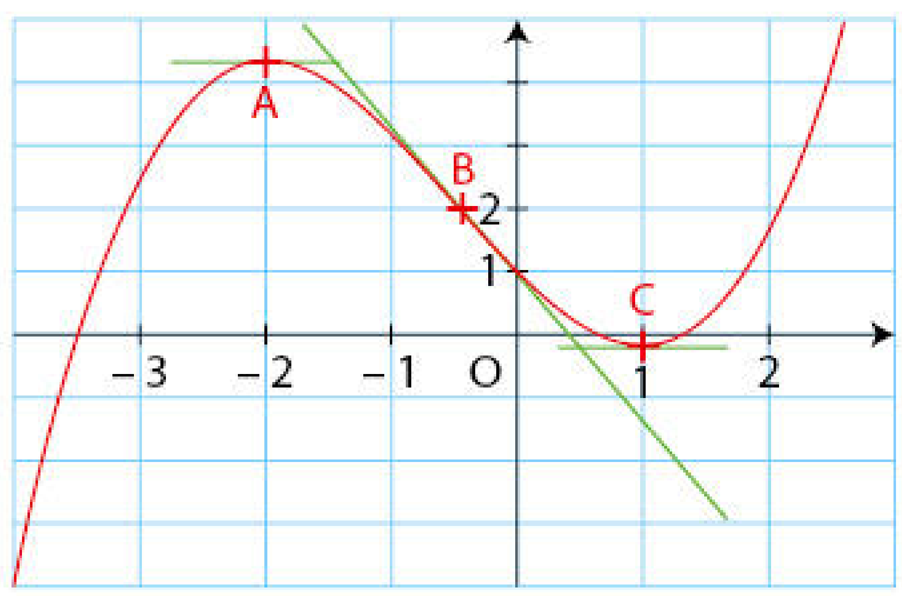
b)


c)


d)


Sur le modèle de l'exercice résolu 12

14 Dans le repère ci-dessous, $\mathscr{C}$ est la courbe représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-4\,;2{,}5]$.
Lire graphiquement le point ou les points d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}$.



Cours

Exercices
- **15** à **18** (ci-contre)
- **50** à **65**

4 Convexité et dérivées

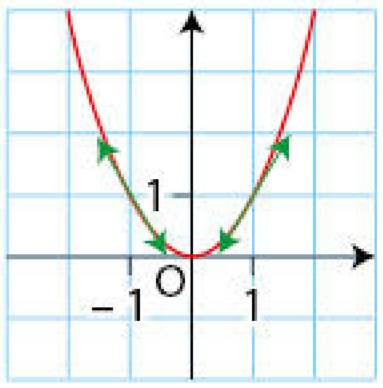
A Convexité et sens de variation de f'

Propriétés (admises)

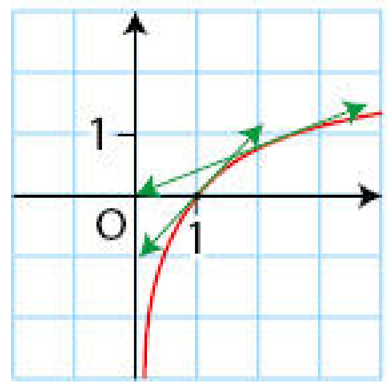
f est une fonction dérivable sur un intervalle I.
- f est convexe sur I si, et seulement si, f' est croissante sur I.
- f est concave sur I si, et seulement si, f' est décroissante sur I.

Exemples

$f : x \mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x, $f'(x) = 2x$ et la fonction affine $f' : x \mapsto 2x$ est croissante sur $\mathbb{R}$.



$g : x \mapsto \ln x$ est concave sur $]0\,;+\infty[$.
Pour tout réel $x > 0$, $g'(x) = \dfrac{1}{x}$ et la fonction inverse g' est décroissante sur $]0\,;+\infty[$.



B Convexité et signe de f''

Définition

f est une fonction dérivable sur un intervalle I.
Dire que f est deux fois dérivable sur I signifie que f' est elle-même dérivable sur I.
La fonction dérivée de f', notée f'', est appelée fonction **dérivée seconde** de f.

On déduit immédiatement les propriétés suivantes de celles énoncées au paragraphe A :

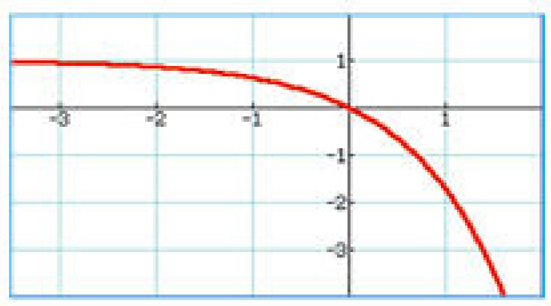
Propriétés

f est une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.
- f est convexe sur I si, et seulement si, pour tout réel x de I, $\boldsymbol{f''(x) \geqslant 0}$.
- f est concave sur I si, et seulement si, pour tout réel x de I, $\boldsymbol{f''(x) \leqslant 0}$.

Vidéo
JAICOMPRIS.COM
La démonstration est présentée en vidéo

Exemple

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 - e^x$.
Pour tout réel x, $f'(x) = -e^x$ et $f''(x) = -e^x$.
Donc, pour tout réel x, $f''(x) < 0$ et f est concave sur $\mathbb{R}$.



Conséquence : si f'' est positive, alors la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de ses tangentes.
En effet, si $f'' \geqslant 0$, alors f' est croissante sur I donc f est convexe sur I et la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de ses tangentes.

C Point d'inflexion et dérivée seconde

Propriété (admise)

f est une fonction deux fois dérivable sur I. $\mathscr{C}$ est sa courbe représentative dans un repère et $a \in$ I.
Le point A$(a\,;f(a))$ est un point d'inflexion de $\mathscr{C}$ si, et seulement si, **f'' s'annule en a en changeant de signe.**

Exemple

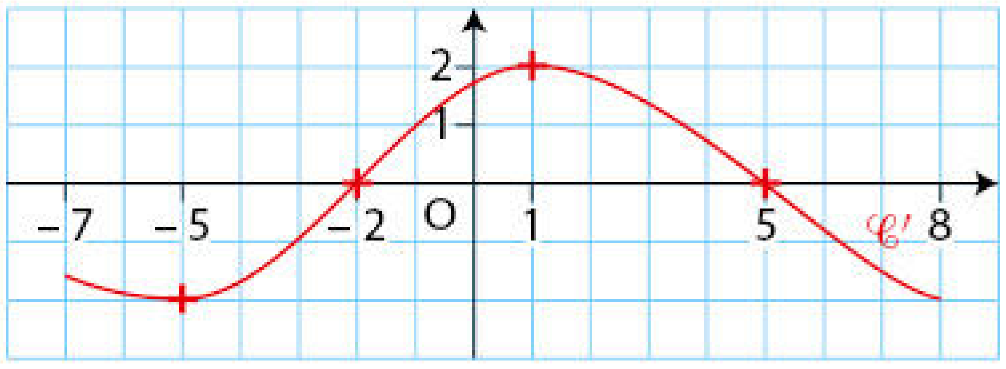
Pour tout réel x, $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2$ et $f''(x) = 6x$.
Avec le tableau de signes ci-contre, on retrouve le fait que l'origine O du repère est un point d'inflexion de la courbe représentative de f.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

EXERCICES RÉSOLUS

15 Lire la convexité d'une fonction sur la courbe de sa dérivée

f est une fonction dérivable sur l'intervalle $[-7\,;8]$.
Voici la courbe représentative de sa fonction dérivée f'.
Lire graphiquement les intervalles sur lesquels la fonction f est convexe ou concave ainsi que les points d'inflexion de la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f dans un repère.



Solution

- On observe que la fonction dérivée f' est décroissante sur chacun des intervalles $[-7\,;-5]$ et $[1\,;8]$. La fonction f est donc concave sur ces intervalles.
- D'autre part, la fonction dérivée f' est croissante sur l'intervalle $[-5\,;1]$, donc la fonction f est convexe sur cet intervalle.
- La courbe $\mathscr{C}$ admet donc deux points d'inflexion, d'abscisses -5 et 1.

16 Étudier la convexité d'une fonction avec la dérivée seconde

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^x$. $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de f dans un repère.

a) Déterminer la fonction dérivée seconde de la fonction f.
b) Étudier le signe de $f''(x)$ selon les valeurs de x.
c) En déduire les intervalles sur lesquels la fonction f est convexe ou concave.

Solution

a) Pour tout réel x, $f'(x) = 1 \times e^x + x \times e^x = (x+1)e^x$,
$f''(x) = 1 \times e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x$.

b) Pour tout réel x, $e^x > 0$ donc $f''(x)$ est du signe de $x+2$.
D'où le tableau de signes ci-contre.

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

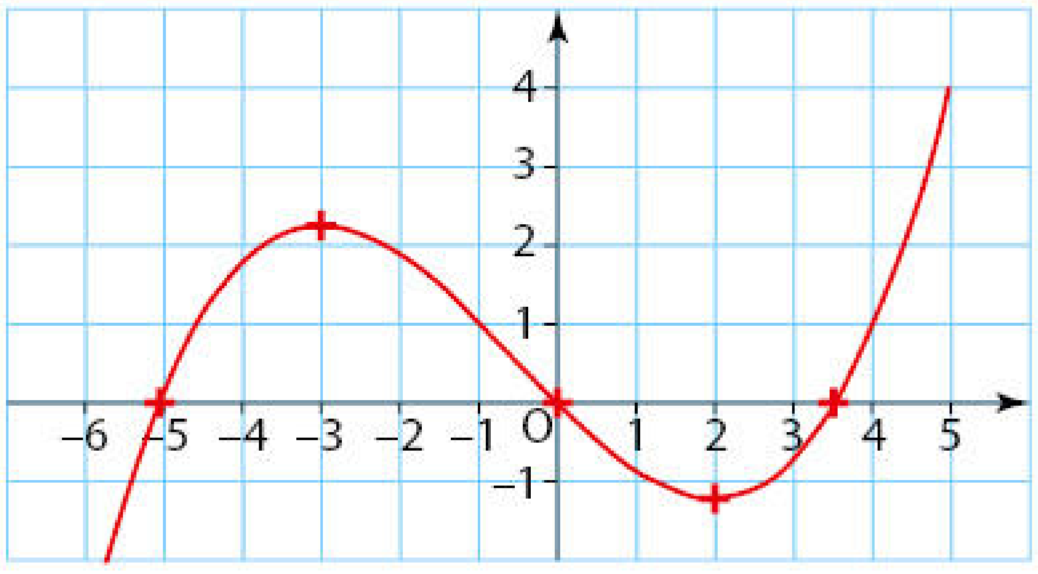
Pour déterminer f'' :
– on détermine d'abord la fonction dérivée f',
– ensuite on dérive f'.

c) Sur $]-\infty\,;-2]$, $f''(x) \leqslant 0$ donc f est concave. Sur $[-2\,;+\infty[$, $f''(x) \geqslant 0$ donc f est convexe.
La dérivée seconde s'annule en -2 en changeant de signe, donc $\mathscr{C}$ admet le point $A(-2\,;-2e^{-2})$ pour point d'inflexion.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 15

17 Voici, dans un repère, la courbe représentative de la fonction dérivée f' d'une fonction f définie sur $[-6\,;5]$.
Étudier la convexité de la fonction f, ainsi que les points d'inflexion de sa courbe.



Sur le modèle de l'exercice résolu 16

Vidéo

JAICOMPRIS.COM Cet exercice est corrigé en vidéo

18 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = (x-1)e^x.$$
a) Déterminer la dérivée seconde f'' de f.
b) Étudier le signe de $f''(x)$ selon les valeurs de x.
c) En déduire les intervalles sur lesquels la fonction f est convexe ou concave.
Préciser les points d'inflexion de la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f dans un repère.

EXERCICE RÉSOLU

19 Rechercher un point d'inflexion

Cours 4. C

f est la fonction définie sur l'intervalle $[-2\,;2]$ par $f(x)=x\mathrm{e}^{x}-2x^{2}$. $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction f dans un repère. On admet que la courbe $\mathscr{C}$ admet un unique point d'inflexion d'abscisse i.

a) Justifier que pour tout réel x de l'intervalle $[-2\,;2]$,

$$f''(x)=(2+x)\mathrm{e}^{x}-4.$$

b) On considère l'algorithme ci-contre.

Au début, on affecte la valeur -2 à la variable x.

En fin d'exécution, il renvoie les valeurs numériques de $x-0{,}01$ et x.

Expliquer le rôle de cet algorithme.

```
Tant que f''(x) ⩽ 0
    x ← x + 0,01
Fin Tant que
```

c) Coder cet algorithme en langage Python, le saisir, l'exécuter et interpréter l'affichage.

Solution

a) La fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $[-2\,;2]$.

Pour tout réel x de l'intervalle $[-2\,;2]$,

$f'(x)=1\times\mathrm{e}^{x}+x\times\mathrm{e}^{x}-4x=(x+1)\mathrm{e}^{x}-4x$

$f''(x)=1\times\mathrm{e}^{x}+(x+1)\times\mathrm{e}^{x}-4=(x+2)\mathrm{e}^{x}-4.$

> Pour dériver les fonctions f et f', on utilise la formule $(uv)'=u'v+uv'$

> Au départ, $f''(-2)=-4$ donc $f''(-2)<0$.

b) Cet algorithme tabule la fonction f'' avec le pas 0,01 à partir de -2 jusqu'à obtenir une valeur de x telle que $f''(x)>0$.

Donc cet algorithme permet d'obtenir un encadrement d'amplitude 0,01 de l'abscisse i du point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}$.

c) Voici un programme en langage Python qui renvoie un encadrement de i d'amplitude 0,01.

```python
from math import *

def fseconde(x):
    y=(2+x)*exp(x)-4
    return y

def Inflexion():
    x=-2
    while fseconde(x)<=0:
        x=x+0.01
    x1=round(x-0.01,2)
    x2=round(x,2)
    return x1,x2
```

Après exécution, on obtient l'affichage :

```
>>> Inflexion()
(0.47, 0.48)
```

Ainsi, le point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}$ a une abscisse i telle que $0{,}47<i<0{,}48$.

Remarque : en langage Python, la fonction **round** renvoie un arrondi d'un nombre réel. Par exemple **round**(x;2) renvoie l'arrondi au centième de x.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 19

20 f est la fonction définie sur l'intervalle $[-3\,;3]$ par :

$$f(x)=\frac{1}{20}x^{5}-\frac{1}{3}x^{3}+\frac{5}{2}x^{2}.$$

$\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction f dans un repère. On admet que la courbe $\mathscr{C}$ admet un unique point d'inflexion d'abscisse i.

a) Déterminer $f''(x)$.

b) Écrire un programme en langage Python qui renvoie un encadrement d'amplitude 10^{-2} de i.

Le saisir et l'exécuter, puis interpréter l'affichage.

21 f est la fonction définie sur l'intervalle $[-1\,;1]$ par :

$$f(x)=-x\mathrm{e}^{x}-x^{3}.$$

$\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction f dans un repère.

On admet que la courbe $\mathscr{C}$ admet un unique point d'inflexion d'abscisse i.

a) Déterminer $f''(x)$. Observer le signe de $f''(-1)$.

b) Écrire un programme en langage Python qui renvoie un encadrement d'amplitude 0,001 de i.

Le saisir et l'exécuter, puis interpréter l'affichage.

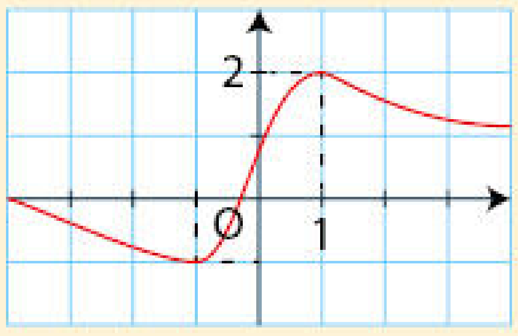
Rappels sur la dérivation

Cours 1

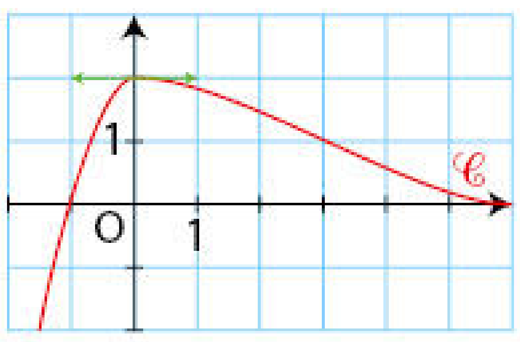
Questions flash À l'oral

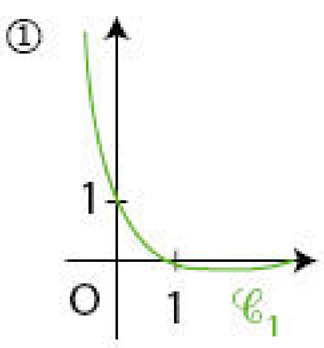
22 f est une fonction dérivable en -1 telle que $f(-1) = 2$ et $f'(-1) = -3$.
$\mathscr{C}$ est la courbe représentative de f dans un repère.
L'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse -1 est :
(1) $y = -3x + 5$ **(2)** $y = -3x - 1$ **(3)** $y = 2x - 1$

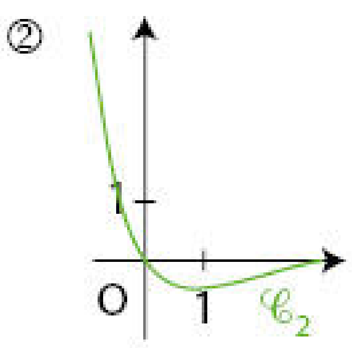
23 Ce graphique représente une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$.
Lire le signe de $f'(x)$, selon les valeurs de x.

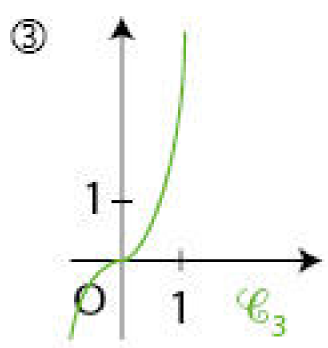


24 Ce graphique représente une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
Laquelle des courbes pourrait représenter sa fonction dérivée ? Justifier la réponse.

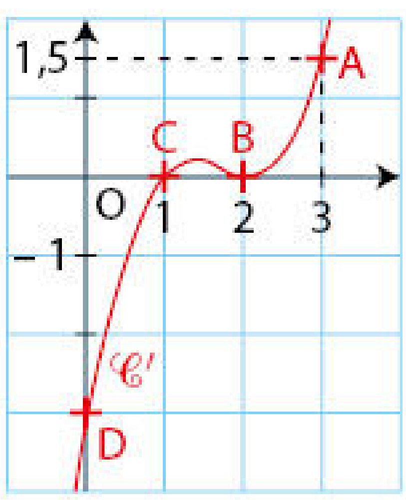








25 f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
Voici, dans un repère, la courbe représentative $\mathscr{C}'$ de sa fonction dérivée f'.
a) Quelles informations sur la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f peut-on déduire des points A, B, C, D ?
b) Tracer une allure possible de $\mathscr{C}$.



26 f est une fonction dérivable sur $[-5\,;5]$.
Voici le tableau de variations de sa fonction dérivée f'.

x	-5	-1	0	1	5
$f'(x)$	$-0{,}1$ ↘	$-0{,}5$ ↗	0 ↗	$0{,}5$ ↘	$0{,}1$

a) Déterminer le sens de variation de la fonction f.
b) Esquisser dans un repère une courbe susceptible de représenter la fonction f sur l'intervalle $[-5\,;5]$.

27 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = x^3 - 3x^2 + x - 1.$$
a) Étudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
b) Déterminer $f'(x)$ et étudier son signe selon les valeurs de x.

28 g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$g(x) = \frac{-2x}{x^2+1}.$$
a) Utiliser la calculatrice pour conjecturer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$. Démontrer ces conjectures.
b) Justifier que pour tout réel x, $g'(x) = \dfrac{2x^2-2}{(x^2+1)^2}$.
c) Dresser le tableau de variations de g.

Règles de dérivation

Cours 2

Questions flash À l'oral

29 f et g sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \mathrm{e}^x \quad \text{et} \quad g(x) = 2x.$$
Déterminer mentalement :
a) $g'(1)$ **b)** $(f' \circ g)(1)$ **c)** $(f \circ g)'(1)$

30 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = (x^2+1)^4.$$
Voici un écran de calcul formel. Expliquer oralement le résultat affiché.

1	Dérivée$\left((x^2+1)^4\right)$
	→ $8\,x\,(x^2+1)^3$

31 u et v sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :
$$u(x) = -3x + 4 \quad \text{et} \quad v(x) = x^3.$$
a) Exprimer pour tout réel x, $(v \circ u)(x)$ en fonction de x.
b) Déterminer de deux façons différentes $(v \circ u)'(x)$.

32 f est la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ définie par :
$$f(x) = \mathrm{e}^{\frac{x}{x^2+1}}.$$
a) Décomposer la fonction f sous la forme $v \circ u$ en précisant les fonctions u et v.
b) Déterminer les fonctions dérivées de u et v, puis de f.

33 f est une fonction dérivable sur l'intervalle $[1\,;10]$.
Dans chaque cas, déterminer $f'(1)$.
a) $f(x) = \sqrt{5x+1}$ **b)** $f(x) = (2-x)^5$
c) $f(x) = \mathrm{e}^{x^2+1}$ **d)** $f(x) = (1 + \mathrm{e}^{-x+1})^2$

Pour les exercices 34 à 37, déterminer la fonction dérivée de la fonction *f* définie sur l'intervalle I.

34 a) $f(x)=(x^2+5x)^4$ $\quad$ $\mathrm{I}=\mathbb{R}$
b) $f(x)=(x-5)(1-8x)^2$ $\quad$ $\mathrm{I}=\mathbb{R}$

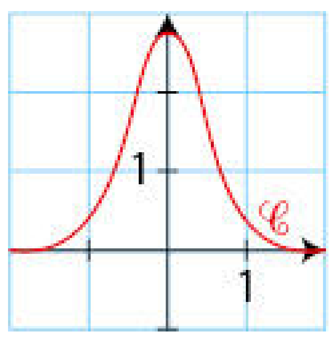
35 a) $f(x)=\dfrac{1}{(4-x)^2}$ $\quad$ $\mathrm{I}=]4\,;+\infty[$
b) $f(x)=\dfrac{x+1}{(1+x^2)^3}$ $\quad$ $\mathrm{I}=\mathbb{R}$

36 a) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ $\quad$ $\mathrm{I}=]-1\,;1[$
b) $f(x)=(x+1)\sqrt{x^2+1}$ $\quad$ $\mathrm{I}=\mathbb{R}$

37 a) $f(x)=\mathrm{e}^{-x}-8\mathrm{e}^{x+3}$ $\quad$ $\mathrm{I}=\mathbb{R}$
b) $f(x)=(x^2+5)\mathrm{e}^{x^2-1}$ $\quad$ $\mathrm{I}=\mathbb{R}$

38 g est la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par :
$$g(x)=(1-2x)^3.$$
a) Étudier la limite de g en $+\infty$.
b) Démontrer que la fonction g est décroissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
c) En déduire le tableau de variations de g.

39 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\mathrm{e}^{-2x^2+1}$.
Voici, dans un repère, la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f.



a) Conjecturer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
Démontrer ces conjectures.
b) Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
c) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.

40 g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\mathrm{e}^{x^2-x}$.
$\mathscr{C}$ est sa courbe représentative dans un repère et a désigne un nombre réel.
a) Déterminer une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a.
b) Existe-t-il une tangente à la courbe $\mathscr{C}$ passant par le point A(1 ; 0) ?
Si oui, préciser l'équation de cette tangente.

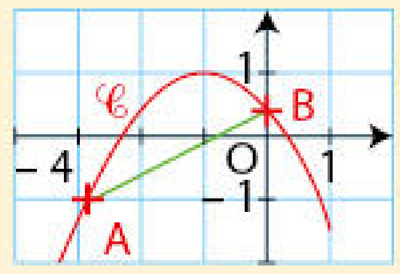
41 f est la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :
$$f(x)=\frac{x^2+4}{\sqrt{2x}}.$$
a) Vérifier que, pour tout réel $x>0$:
$$f'(x)=\frac{3x^2-4}{2x\sqrt{2x}}.$$
b) Montrer que f admet un minimum local.

Fonctions convexes

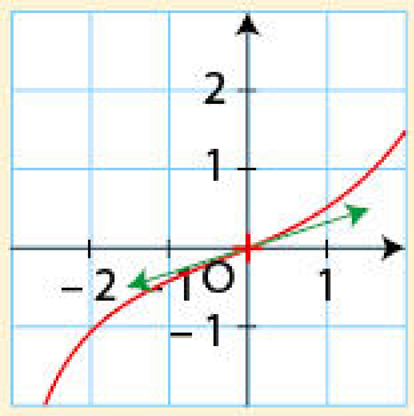
Cours 3

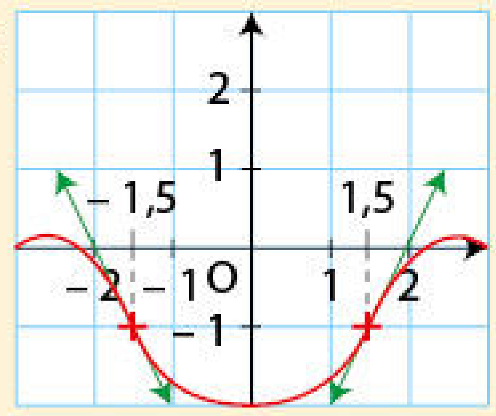
Questions flash — À l'oral

42 Voici, dans un repère, la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f dérivable sur l'intervalle $[-4\,;1]$.
Wassila affirme : « La fonction f est convexe sur l'intervalle $[-4\,;1]$ ». A-t-elle raison ?



43 Dans chaque cas, la courbe tracée dans le repère représente une fonction f.
Lire les intervalles sur lesquels f est convexe ou concave et préciser les éventuels points d'inflexion.

a)


b)


44 f est une fonction dérivable et concave sur $\mathbb{R}$. $\mathscr{C}$ est sa courbe représentative dans un repère. La tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 a pour équation $y=-2x+3$.
Expliquer oralement pourquoi $f(1)\leqslant 1$.

45 Voici le tableau de variations d'une fonction f dérivable sur l'intervalle $[-1\,;5]$.

x	-1		3		5
$f(x)$	-1	↗	2	↘	-1

Tracer dans un repère, une courbe $\mathscr{C}$ pouvant représenter la fonction f sachant qu'elle est convexe sur l'intervalle $[-1\,;2]$ et concave sur l'intervalle $[2\,;5]$.

46 Voici le tableau de variations d'une fonction f dérivable sur l'intervalle $[-2\,;3]$.

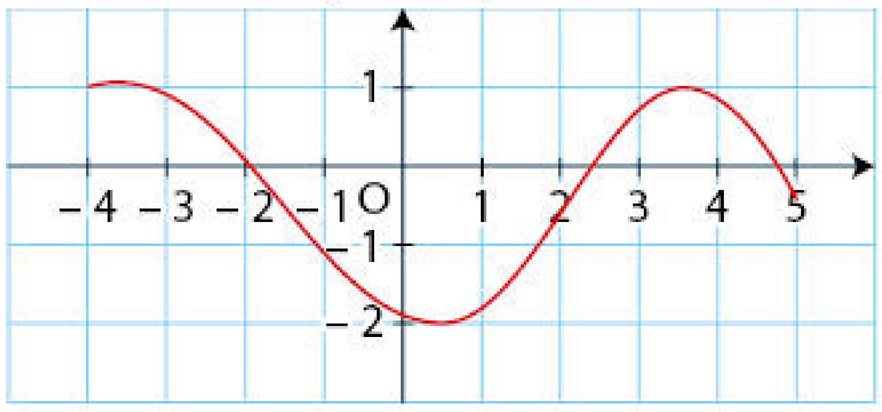
x	-2		-1		2		3
$f(x)$	$\frac{5}{3}$	↘	$-\frac{1}{6}$	↗	$\frac{13}{3}$	↘	$\frac{5}{2}$

Tracer dans un repère une courbe $\mathscr{C}$ pouvant représenter la fonction f, sachant que f est convexe sur l'intervalle $[-2\,;0{,}5]$ et concave sur l'intervalle $[0{,}5\,;3]$.

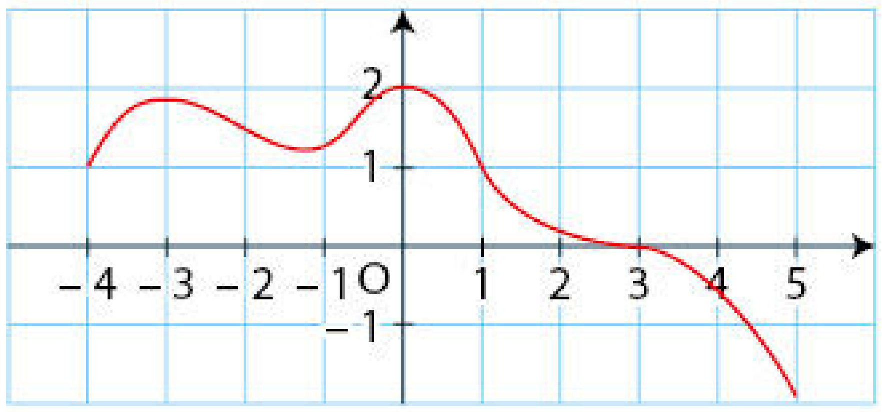
47 Parmi les trois courbes ci-dessous, déterminer celle qui représente une fonction f vérifiant :

- f est concave sur $[-4 ; -2]$ et sur $[4 ; 5]$;
- f' s'annule trois fois ;
- la courbe de f admet quatre points d'inflexion.

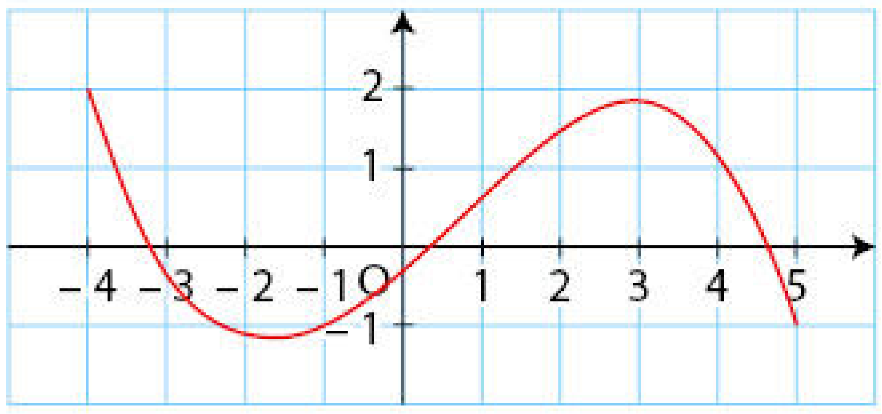
①



②



③



48 g est la fonction définie sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{2} ; +\infty\right[$ par :

$$g(x) = \sqrt{2x+1}.$$

On admet que la fonction g est concave sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{2} ; +\infty\right[$ et on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

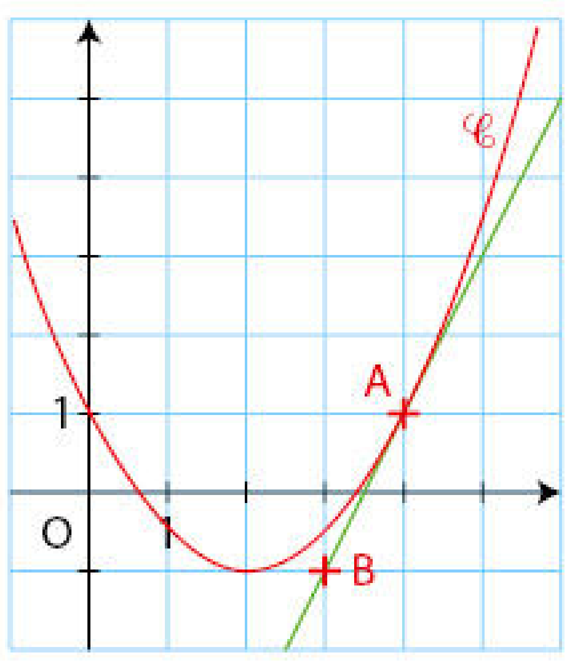
a) Déterminer une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 24.

b) En déduire sans calculatrice que $\sqrt{51} \leqslant \frac{50}{7}$.

49 Voici dans un repère, la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f définie sur l'intervalle $[-1 ; 6]$ par :

$$f(x) = 0{,}5(x-2)^2 - 1.$$

La tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point A$(4 ; 1)$ passe par le point B$(3 ; -1)$.



a) Lire graphiquement la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[-1 ; 6]$.

b) Déterminer une équation de la tangente T.

c) En déduire que pour tout réel x de l'intervalle $[-1 ; 6]$:

$$(x-2)^2 \geqslant 4x - 12.$$

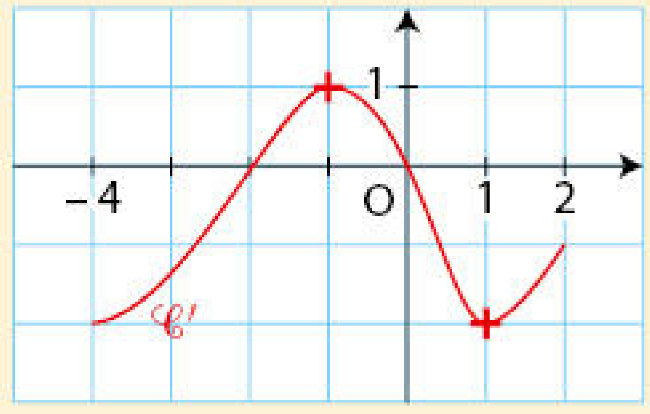
Convexité et dérivées

Cours 4

Questions flash À l'oral

50 f est une fonction dérivable sur l'intervalle $[-4 ; 2]$.

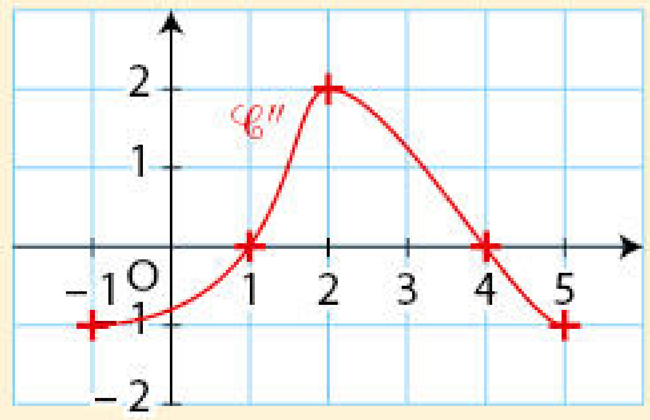
Voici, dans un repère, la courbe représentative $\mathscr{C}'$ de sa fonction dérivée f'.



Lire graphiquement la convexité de f'.

51 h est une fonction deux fois dérivable sur l'intervalle $[-1 ; 5]$.

Voici, dans un repère, la courbe représentative $\mathscr{C}''$ de sa fonction dérivée seconde f''.



Laquelle de ces affirmations est exacte ?

(1) La fonction h est convexe sur l'intervalle $[0 ; 1]$.

(2) La fonction h est concave sur l'intervalle $[1 ; 5]$.

(3) La fonction h est convexe sur l'intervalle $[1 ; 4]$.

52 Voici le tableau de variations de la fonction dérivée d'une fonction f dérivable sur l'intervalle $[-3 ; 7]$.

x	-3		-1		3		7
$f'(x)$	2	↘	-1	↗	2	↘	-1

a) Déterminer la convexité de la fonction f.

b) Sachant que $f(-1) = 1$ et $f(3) = 1$, tracer dans un repère une courbe pouvant représenter f.

53 Voici le tableau de signes de la fonction dérivée seconde f'' d'une fonction f deux fois dérivable sur l'intervalle $[-2 ; 6]$.

x	-2		0		4		6
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

a) Déterminer la convexité de la fonction f.

b) Est-il possible que :

- $f'(-2) = 1$ et $f'(0) = 0$?
- $f'(0) = 0$ et $f'(4) = -1$?

c) Sachant que $f(0) = 1$ et $f(4) = 1$, tracer dans un repère une courbe pouvant représenter f.

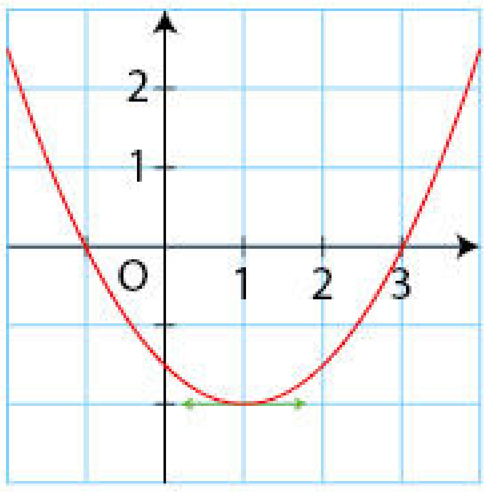
54 f est une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

Déterminer la convexité de la fonction f lorsque la courbe tracée dans le repère ci-contre est celle :

a) de la fonction f ;

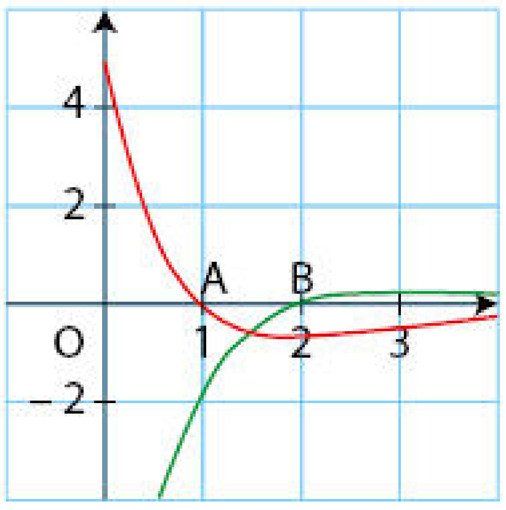
b) de la fonction f' ;

c) de la fonction f''.



55 f est une fonction deux fois dérivable sur $[0\,;4]$.

Voici la courbe représentative $\mathscr{C}'$ de sa fonction dérivée f' et la courbe représentative $\mathscr{C}''$ de sa fonction dérivée seconde f''.



A$(1\,;0)$ est un point appartenant à l'une de ces courbes et B$(2\,;0)$ un point appartenant à l'autre courbe.

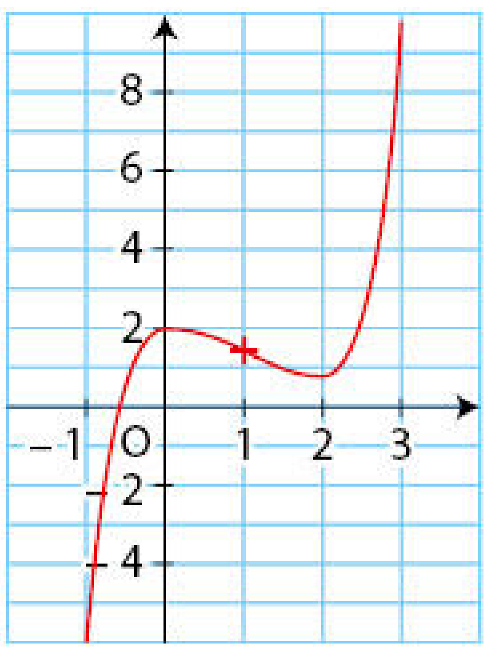
a) Identifier chaque courbe sur le graphique. Justifier.

b) En déduire la convexité de la fonction f et préciser les abscisses des éventuels points d'inflexion.

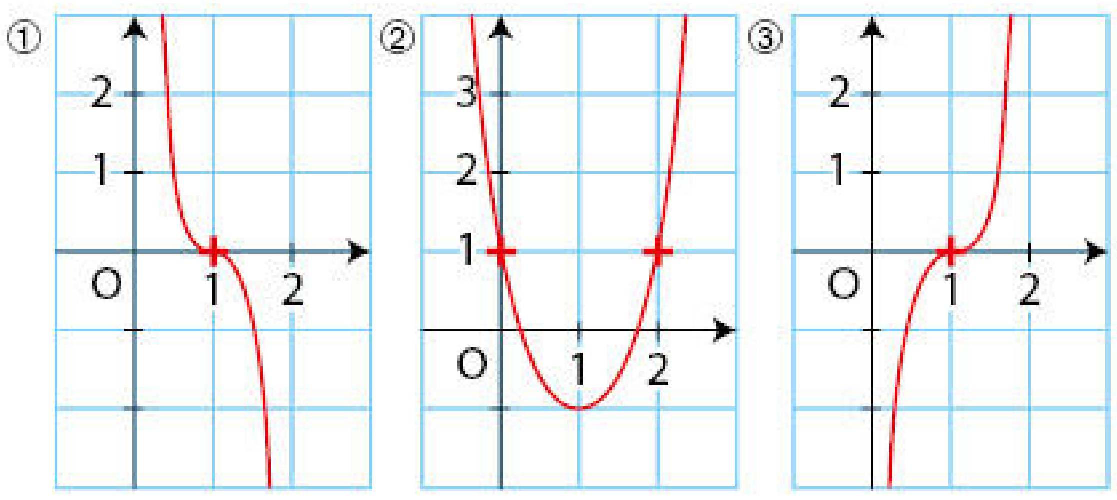
56 Dans un repère, voici la courbe représentative d'une fonction f deux fois dérivable sur $[-1\,;3]$.

a) Étudier graphiquement la convexité de la fonction f.

b) En déduire les variations de la fonction dérivée f'.



c) Parmi les trois courbes suivantes, laquelle représente la fonction f'', dérivée seconde de f ?



57 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (2-x)\mathrm{e}^{2x}.$$

a) Justifier l'affichage ci-dessous obtenu à l'aide d'un logiciel de calcul formel.

b) En déduire la convexité de la fonction f.

1	Dérivée(Dérivée($(2-x)\,\mathrm{e}^{2x}$))
	Factoriser: $-4\,\mathrm{e}^{2x}\,(x-1)$

JaiCompris.com — Vidéo — Cet exercice est corrigé en vidéo

58 Dans chaque cas, f est une fonction deux fois dérivable sur I.

Étudier le signe de $f''(x)$ sur I. En déduire la convexité de f et l'abscisse du point d'inflexion.

a) $f''(x) = \dfrac{3x^2-3x-6}{(x-1)^3}$ $\quad$ $\mathrm{I} =]1\,;+\infty[$

b) $f''(x) = (-0{,}08x+0{,}4)\mathrm{e}^{0{,}2x-3}$ $\quad$ $\mathrm{I} = \mathbb{R}$

c) $f''(x) = (4x-10)\sqrt{5x+2}$ $\quad$ $\mathrm{I} =]0\,;+\infty[$

59 k est une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la fonction dérivée k' est définie par :

$$k'(x) = (3x-12)^3\mathrm{e}^x.$$

a) Vérifier que pour tout x, $k''(x) = (3x-12)^2(3x-3)\mathrm{e}^x$.

b) Étudier le signe de $k''(x)$, puis déterminer la convexité de k et l'abscisse du point d'inflexion.

60 f est la fonction définie sur $[0\,;1]$ par :

$$f(x) = (1-x)\mathrm{e}^{3x}.$$

Dans chaque cas, indiquer la réponse exacte.

a) La fonction f est concave sur l'intervalle :

(1) $\left[0\,;\dfrac{1}{3}\right]$ $\quad$ **(2)** $[0\,;1]$ $\quad$ **(3)** $\left[\dfrac{1}{3}\,;1\right]$

b) La courbe représentative de la fonction f admet comme point d'inflexion le point :

(1) $\mathrm{I}\left(\dfrac{1}{3}\,;\dfrac{2}{3}\mathrm{e}\right)$ $\quad$ **(2)** $\mathrm{I}\left(\dfrac{2}{3}\,;\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^2\right)$ $\quad$ **(3)** $\mathrm{I}(1\,;0)$

61 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -x^4-2x^3-12x^2+8x+6.$$

a) Conjecturer la convexité de f à l'aide de la calculatrice.

b) Déterminer le signe de $f''(x)$ suivant les valeurs de x.

c) Infirmer ou confirmer la conjecture émise au **a)**.

62 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{5}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}).$$

a) Déterminer le signe de $f''(x)$ suivant les valeurs de x.

b) En déduire la convexité de la fonction f.

c) Vérifier le résultat à l'aide de la calculatrice.

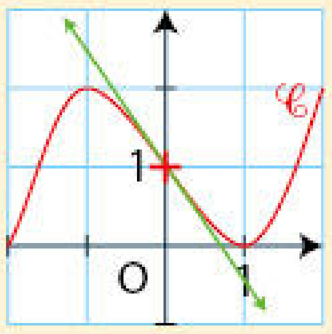
Pour les exercices 63 à 65, étudier la convexité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et préciser les abscisses des éventuels points d'inflexion.

63 $f(x) = -2x^3-3x^2-12x+4$

64 $f(x) = \dfrac{2}{x^2+2}$

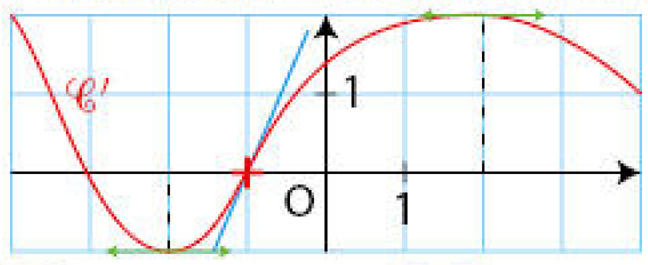
65 $f(x) = x\mathrm{e}^{0{,}4x-1}$

66 QCM **Dans chaque cas, donner la réponse exacte sans justifier.**

		A	B	C	D
1	f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x^2 - 5)^4$. Pour tout réel x, $f'(x)$ est égal à …	$4(x^2-5)^3$	$6x(x^2-5)^3$	$(2x)^4$	$8x(x^2-5)^3$
2	Pour tout réel $x > 0$, $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = \dfrac{1}{3x^2}$. Pour tout $x > 0$, $(g \circ f)\ (x)$ est égal à …	$\dfrac{1}{3x}$	$\dfrac{1}{3x^2}$	$\sqrt{\dfrac{1}{3x^2}}$	$\dfrac{1}{9x^2}$
3	f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \mathrm{e}^{-0{,}1x+1}$. Pour tout réel x, $f''(x)$ est égal à …	$-0{,}1\mathrm{e}^{-0{,}1x+1}$	$0{,}01\mathrm{e}^{-0{,}1x+1}$	$\mathrm{e}^{-0{,}1x+1}$	$0{,}01\mathrm{e}^{-0{,}1}$
4	La fonction représentée par la courbe tracée dans ce repère est … 	convexe sur $[-2\,;2]$	convexe sur $[0\,;2]$	concave sur $[-1\,;1]$	concave sur $[-2\,;1]$
5	f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 1$. La fonction f est …	convexe sur $[-1\,;+\infty[$	concave sur $[-1\,;+\infty[$	concave sur $[-2\,;0]$	convexe sur $[-2\,;+\infty[$

67 QCM **Dans chaque cas, donner la (ou les) réponse(s) exacte(s) sans justifier.**

f est une fonction deux fois dérivable sur l'intervalle $[-4\,;4]$.
On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère.
Voici, dans un repère, la courbe représentative $\mathscr{C}'$ de sa fonction dérivée f'.



		A	B	C	D
1	La fonction f est convexe sur l'intervalle …	$[-2\,;2]$	$[-1\,;4]$	$[-4\,;-1]$	$[-1\,;0]$
2	La fonction dérivée seconde f'' de f …	s'annule deux fois	est positive sur $[-4\,;-3]$	a pour image 1 en $x = 4$	est négative sur $[2\,;4]$
3	La courbe $\mathscr{C}$ …	traverse sa tangente au point d'abscisse -2	admet un seul point d'inflexion	admet deux points d'inflexion	est au-dessus de ses tangentes sur $[-2\,;2]$

68 Vrai/Faux **Dans chaque cas, dire si l'affirmation est vraie ou fausse en justifiant.**

1 g est une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que g est concave sur l'intervalle $]-\infty\,;-1]$ et convexe sur l'intervalle $[-1\,;+\infty[$.
Affirmation : la dérivée seconde g'' de g est négative sur l'intervalle $[0\,;2]$.

2 h est une fonction dérivable et convexe sur $\mathbb{R}$.
Dans un repère, la tangente à la courbe représentative $\mathscr{C}$ de h au point d'abscisse 1 a pour équation $y = -7x + 4$.
Affirmation : $h(-2) \geqslant 10$.

Vérifiez vos réponses : p. 529

69 Compléter une démonstration

f est une fonction dérivable sur un intervalle I. Dans un repère, $\mathscr{C}$ est sa courbe représentative. A et B sont les points de $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives a et b.

1. On se propose de démontrer la propriété :

> Si f est convexe sur I, alors pour tous réels a et b de I :
> $$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

Recopier et compléter la démonstration ci-dessous de cette propriété.

(1) Chercher les coordonnées du milieu M du segment [AB] : M(**…** ; **…**)

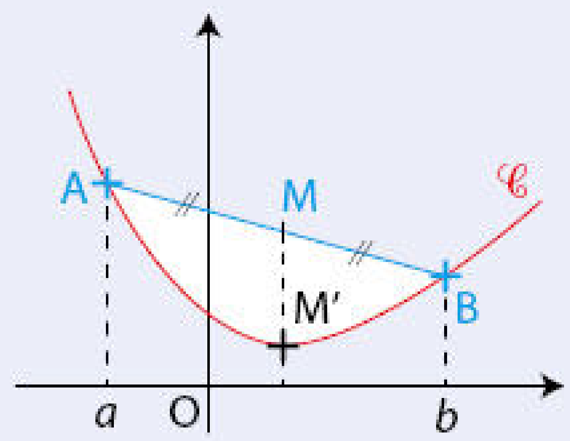
(2) Exploiter la convexité de f sur I : pour tous points A et B distincts de $\mathscr{C}$, le segment [AB] est **…**

(3) Utiliser le point M′ d'abscisse $\frac{a+b}{2}$ de $\mathscr{C}$: l'ordonnée de M′ est **…**

(4) Comparer les ordonnées de M et M′ : $f\left(\frac{\dots}{2}\right) \dots \frac{\dots}{2}$

(5) Conclure : rédiger une phrase de conclusion.

2. Énoncer, puis démontrer une propriété analogue lorsque la fonction f est concave sur un intervalle I.



70 Comprendre une démonstration

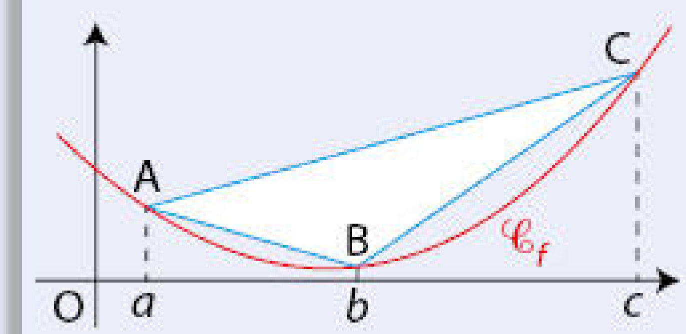
f est une fonction convexe sur un intervalle I. $\mathscr{C}$ est sa courbe dans un repère.
On souhaite démontrer que pour tous réels a, b, c de I avec $a < b < c$:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leqslant \frac{f(c)-f(b)}{c-b}.$$

1. Lire la démonstration ci-dessous et expliquer les passages en vert.

> A, B, C sont les points de $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives a, b, c.
>
> Une équation de la sécante (AC) est $y = \frac{f(c)-f(a)}{c-a}(x-a)+f(a)$.
>
> Le point B est au-dessous de (AC) donc $f(b) \leqslant \frac{f(c)-f(a)}{c-a}(b-a)+f(a)$
>
> c'est-à-dire $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \frac{f(c)-f(a)}{c-a}$.
>
> Une équation de la sécante (AC) est aussi $y = \frac{f(c)-f(a)}{c-a}(x-c)+f(c)$.
>
> En utilisant le point B, on obtient aussi $\frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leqslant \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$.

2. Interpréter géométriquement les inégalités précédentes.



Commentaire
Ces inégalités sont dites « inégalités des trois pentes ».

71 Démontrer des inégalités avec la convexité

$\mathscr{C}$ est la courbe représentative dans un repère de la fonction exponentielle.

a) Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

b) Utiliser la convexité de la fonction exponentielle pour démontrer que pour tout réel x, $e^x > x$.

Vidéo
JAICOMPRIS.COM
Toutes les démonstrations au programme en vidéo

Liste des démonstrations :
- Si f'' est positive, alors la courbe représentative de f est au-dessus de ses tangentes.

Utiliser les règles de dérivation

72 **PARCOURS DIFFÉRENCIÉS**

Parcours 1

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (-0{,}1x^2 + x - 1)^3.$$

Démontrer que f admet un maximum que l'on précisera.

Parcours 2

g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = (x^2 - 2)^3.$$

a) Justifier que pour tout réel x,

$$g'(x) = 6x(x^2 - 2)^2.$$

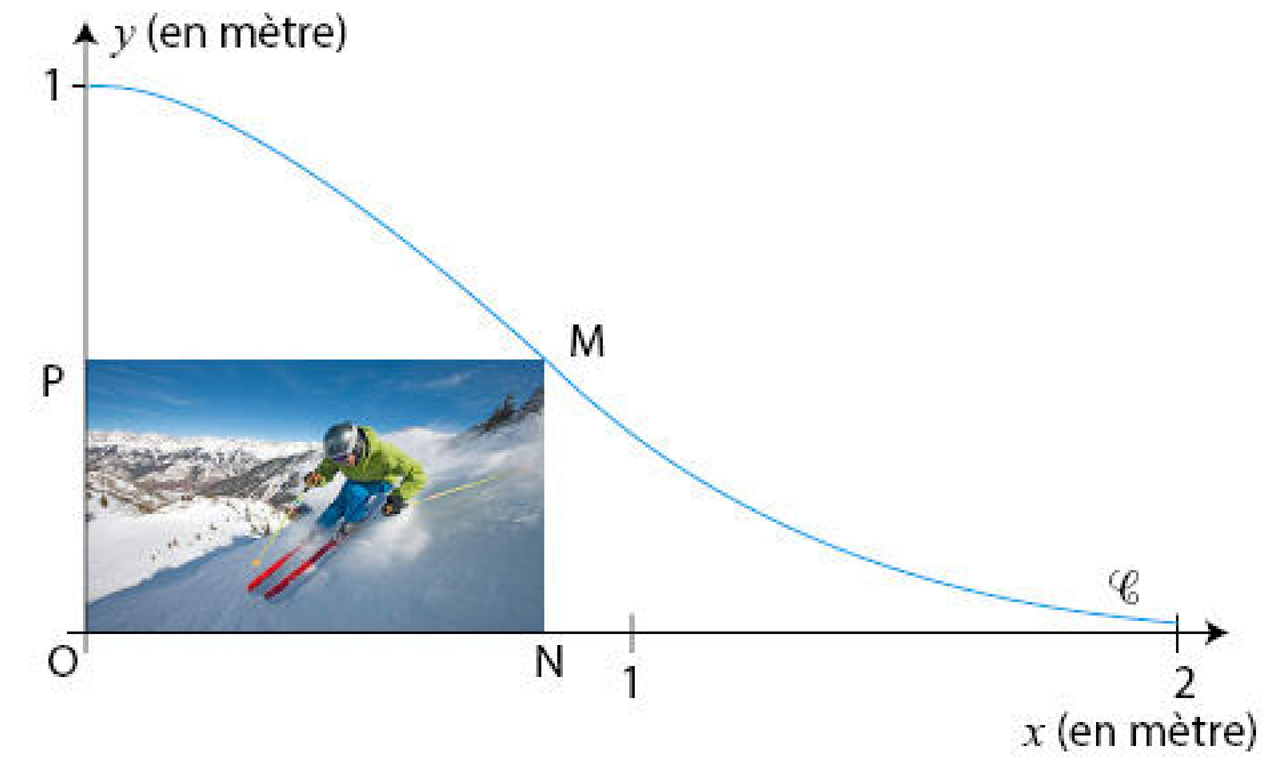
b) Étudier le sens de variation de g.

c) En déduire que la fonction g admet un minimum sur $\mathbb{R}$ que l'on précisera.

73 Une entreprise est chargée par l'office de tourisme d'une station de ski de la conception d'un panneau publicitaire ayant la forme d'une piste de ski.
Le profil de cette piste est modélisé, dans un repère, par la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 2]$ par :

$$f(x) = e^{-x^2}.$$

Cette courbe $\mathscr{C}$ est tracée dans le repère orthonormé d'origine O ci-dessous.



Afin de donner des informations sur la station, une zone rectangulaire ONMP est insérée sur le panneau publicitaire.
M appartient à la courbe $\mathscr{C}$, N appartient à l'axe des abscisses, P appartient à l'axe des ordonnées.

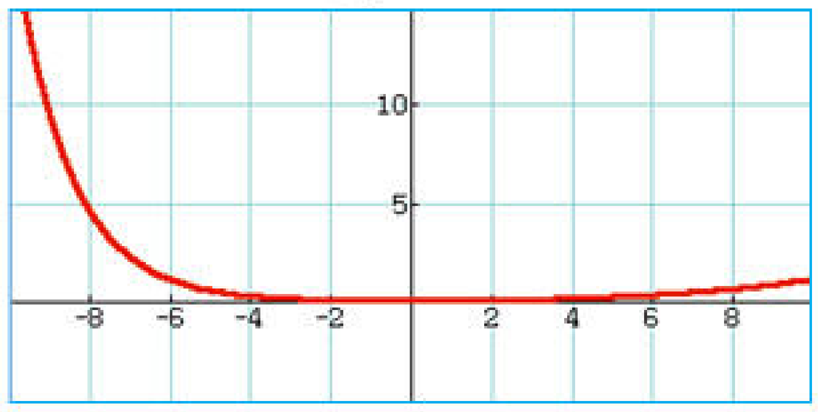
a) Exprimer pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; 2]$, l'aire $\mathscr{A}(x)$, en unité d'aire, de la zone rectangulaire ONMP.

b) Déterminer la position du point M sur la courbe $\mathscr{C}$ pour laquelle l'aire du rectangle ONMP est maximum.

74 f est la fonction définie sur $[-10 ; 10]$ par :

$$f(x) = (0{,}1x + 0{,}5e^{-0{,}2x})^3.$$

Voici sa courbe $\mathscr{C}$ obtenue avec une calculatrice (*fenêtre* : $-10 \leqslant X \leqslant 10$, pas 2 et $-5 \leqslant Y \leqslant 15$, pas 5).



a) Conjecturer l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

b) Déterminer $f'(x)$ pour tout réel x de $[-10 ; 10]$.

c) Valider ou infirmer alors la conjecture émise à la question **a)**.

75 **1.** g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(t) = 1 + e^t + te^t.$$

a) Déterminer $g'(t)$ pour tout réel t.

b) Démontrer que g admet un minimum sur $\mathbb{R}$.

c) En déduire le signe de la fonction g.

2. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(t) = \frac{t}{1 + e^{\frac{1}{t}}}$$

a) Déterminer $f'(t)$ pour tout réel $t \neq 0$.

b) Étudier le sens de variation de la fonction f.

Utiliser la convexité

76 **PARCOURS DIFFÉRENCIÉS**

Parcours 1

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^5 - 2x^3 - 4x + 1.$$

Étudier la convexité de la fonction f.

Parcours 2

g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{12}{5}x^5 - 2x^3.$$

a) Vérifier que pour tout réel x,

$$g'(x) = 12x^4 - 6x^2.$$

b) Vérifier que pour tout réel x,

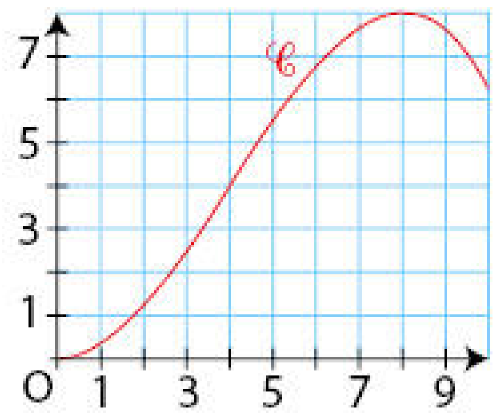
$$g''(x) = 12x(2x - 1)(2x + 1).$$

c) Déterminer le signe de $g''(x)$ suivant les valeurs de x.

d) En déduire la convexité de g sur $\mathbb{R}$.

77 Le nombre de pains produits à l'heure dans une entreprise, en dizaine de milliers, en fonction du nombre n de travailleurs employés, en centaine d'employés, vérifie $\mathrm{P}(n) = \frac{3}{8}n^2 - \frac{1}{32}n^3$.
Voici, dans un repère, la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f définie sur $[0\,;10]$ par :

$$f(x) = \frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{32}x^3.$$



a) Conjecturer graphiquement le nombre d'employés à partir duquel la croissance de production diminue.
b) Déterminer la fonction dérivée seconde de f et démontrer la conjecture précédente.

78 On appelle fonction « *satisfaction* » toute fonction dérivable qui prend ses valeurs entre 0 et 100. Lorsque la fonction « *satisfaction* » atteint la valeur 100, on dit qu'il y a « *saturation* ».
On définit aussi la fonction « *envie* » comme la fonction dérivée de la fonction « *satisfaction* ».
On dit qu'il y a « *souhait* » lorsque la fonction « *envie* » est positive ou nulle et qu'il y a « *rejet* » lorsque la fonction « *envie* » est strictement négative.
La direction des ressources humaines d'une entreprise modélise la satisfaction d'un salarié en fonction du salaire annuel qu'il perçoit. On admet que la fonction « *satisfaction* » h, est définie sur l'intervalle $[10\,;50]$ par :

$$h(x) = \frac{90}{1+\mathrm{e}^{-0{,}25x+6}} \quad (x \text{ en millier d'euros}).$$

Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants :

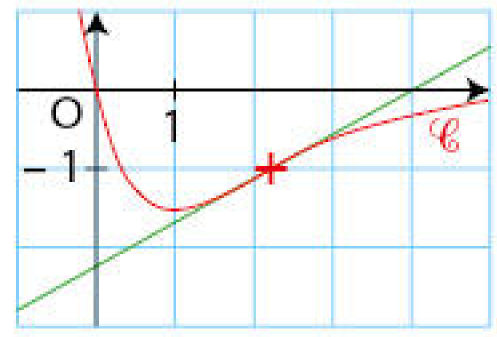
1	Dérivée$\left(\text{Dérivée}\left(\frac{90}{1+\mathrm{e}^{-0.25x+6}}\right)\right)$
	Factoriser: $45\,\mathrm{e}^{\frac{-x+24}{4}} \cdot \frac{\mathrm{e}^{\frac{-x+24}{4}}-1}{8\left(\mathrm{e}^{\frac{-x+24}{4}}+1\right)^3}$

a) Donner sans justification une expression de $h''(x)$.
b) Résoudre dans l'intervalle $[10\,;50]$ l'inéquation :

$$\mathrm{e}^{-0{,}25x+6} - 1 > 0.$$

c) Étudier la convexité de la fonction h sur l'intervalle $[10\,;50]$.
d) À partir de quel salaire annuel peut-on estimer que la fonction « *envie* » décroît ? Justifier.
e) Déterminer, en le justifiant, pour quel salaire annuel, en millier d'euros, la fonction « *satisfaction* » atteint 80. *Arrondir à l'unité.*

79 Voici, dans un repère, la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -4x\mathrm{e}^{-x}$.



a) Déterminer graphiquement la convexité de f.
b) Déterminer $f'(x)$ pour tout réel x, puis une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2.
c) Sur quel intervalle a-t-on $f(x) \geqslant 4\mathrm{e}^{-2}(x-4)$?
d) En déduire sans calculatrice que $\mathrm{e}^{0{,}5} \leqslant \frac{5}{3}$.
Le vérifier ensuite à la calculatrice.

80 On se propose de déterminer de deux façons différentes le signe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-2x+1} + 2x - 2.$$

1. a) Démontrer que f est convexe sur $\mathbb{R}$.
b) Dans un repère orthonormé, déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse $\frac{1}{2}$.
2. Étudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x :
a) en utilisant la question **1** ;
b) en dressant le tableau de variations de f.

S'entraîner à la logique → p. 525

81 **Implications et réciproques**

Pour chaque implication, indiquer si elle est vraie ou fausse, puis rédiger sa réciproque et dire si elle est vraie ou fausse.
f est une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I et $\mathscr{C}_f$ est sa courbe représentative dans un repère.
a) Si f'' s'annule en un réel α de I, alors $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion d'abscisse α.
b) Si f est convexe, puis concave sur I, alors $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion sur I.

82 **Contre-exemple**

Les implications suivantes sont fausses.
Infirmer chacune d'elles à l'aide d'un contre-exemple.
a) La composée de deux fonctions décroissantes est une fonction décroissante.
b) Si une fonction f n'est pas convexe sur un intervalle, alors elle est concave sur cet intervalle.

83 L'ÉVOLUTION D'UNE POPULATION

En 1798, l'économiste britannique Malthus publie un essai où il prédit que la population d'un pays croît indéfiniment, de façon exponentielle. En pratique, on observe souvent que la population atteint un plafond, tout environnement ayant une capacité d'accueil limitée. Vers 1840, le mathématicien belge Verhulst élabore un nouveau modèle où l'évolution de la population suit une « courbe logistique », en forme de S. La courbe trouvera par la suite de nombreuses applications ; au milieu du 20e siècle, par exemple, les responsables du parc Kruger (Afrique du Sud) ont décidé de gérer la population d'éléphants selon le modèle logistique.

Partie A : étude de la modélisation

Dans son modèle, Verhulst cherche les fonctions définies et positives sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$, vérifiant une condition initiale donnée et l'équation (dite « différentielle ») :

$$\textbf{(E)}\quad y' = ry\left(1-\frac{y}{\mathrm{K}}\right)$$

où y est une fonction de la variable x et où r et K sont des constantes positives dépendant de la population et du milieu.

HISTOIRE DES MATHS

Pierre-François Verhulst est né en 1804 à Bruxelles. Sous l'impulsion d'Adolphe Quetelet, son ancien professeur et ami, il étudie les évolutions de population et propose, dans trois publications (1838, 1845 et 1847), un nouveau modèle qui n'est pas exponentiel. Il appliquera son modèle à l'étude de l'évolution de la population en Belgique et en France jusqu'en 1833.

1. Vérifier que la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\mathrm{K}}{1+\mathrm{e}^{-r(x-a)}}$$

où a est un nombre réel, est solution de l'équation **(E)** ci-dessus.

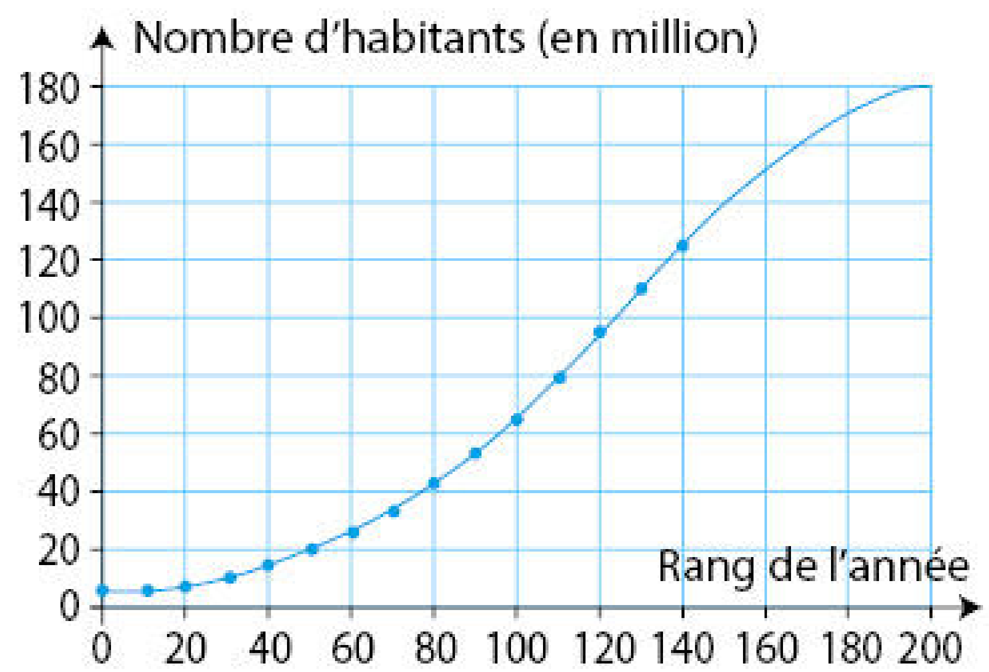
2. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

3. Étudier la convexité de f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

Partie B : application

Le graphique ci-contre montre l'évolution de la population des États-Unis entre 1790 et 1930 (rang 0 en 1790) ainsi que la courbe représentative de la fonction f avec $\mathrm{K} = 197\,273\,000$, $r = 0{,}031\,34$ et $a = 123{,}25$.

On constate que le modèle est bien adapté sur cette période.



1. Estimer graphiquement l'année durant laquelle le nombre d'habitants a dépassé 100 millions.

2. Selon cette modélisation, la croissance de la population semble s'être ralentie.

a) Conjecturer graphiquement l'année durant laquelle cela s'est produit.

b) En utilisant les résultats obtenus dans la **Partie A**, justifier que pour tout réel x positif, $f''(x)$ est du signe de $\mathrm{e}^{-0{,}031\,43(x-123{,}25)} - 1$.

c) Préciser alors la conjecture émise.

3. Ce modèle était-il encore adapté en 1960, sachant que la population des États-Unis était d'environ 189 323 000 habitants cette année-là ?

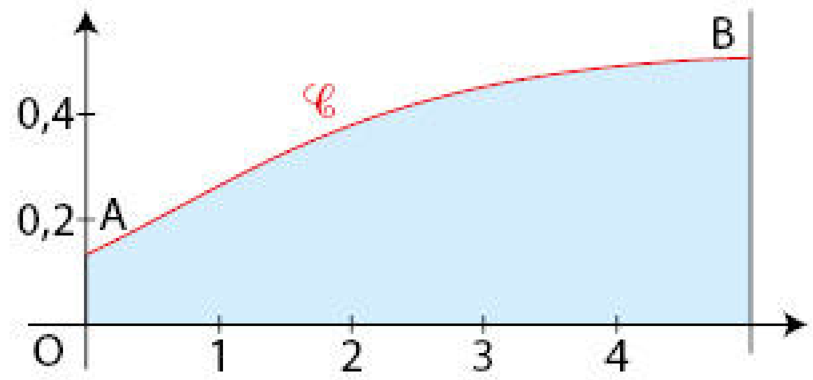
84 Prendre des initiatives

Chercher **Raisonner** **Calculer**

Une route de montagne reliant deux villages A et B est modélisée par la fonction f définie sur $[0\,;5]$ par :

$$f(x)=\frac{0{,}5}{\mathrm{e}^{-x+1}+1}$$

et représentée ci-dessous (x représente la distance horizontale, en km, et $f(x)$ l'altitude, en km).



Le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ en un point M est appelé « pente en M ». Les maires de ces villages affirment : « En aucun point de la route, la pente ne dépasse 12 %. » Ont-ils raison ? Justifier.

85 Démontrer une inégalité

Problème ouvert

Raisonner **Calculer**

Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;1]$,

$$\mathrm{e}^x \leqslant 1+x(\mathrm{e}-1).$$

86 Déterminer un nombre d'objets

Narration de recherche

Raisonner **Calculer** **Communiquer**

Rédiger les différentes étapes de la recherche, sans omettre les fausses pistes et les changements de méthode.

Problème

Le bénéfice, en million d'euros, réalisé par une entreprise lorsqu'elle produit et vend x tonnes de farine, $0\leqslant x\leqslant 8$, est donné par :

$$\mathrm{B}(x)=(20x+10)\mathrm{e}^{-0{,}5x}-10.$$

Déterminer la masse de farine à produire et à vendre à partir de laquelle l'évolution du bénéfice décélère, c'est-à-dire la masse à partir de laquelle le bénéfice commence à décroître de moins en moins vite.

87 Respect conditions

Calculer **Communiquer**

Find numbers a and b such that the graph of the function $f(x)=ax^3+bx^2$ passes through $(-1\,;1)$ and has an inflexion point at $x=0{,}5$.

88 Imaginer une stratégie

Raisonner **Calculer**

Pour tout entier naturel non nul n, f_n est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x)=10x^2\,\mathrm{e}^{nx-1}.$$

On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère.

Montrer que $\mathscr{C}_n$ admet deux points d'inflexion dont on donnera les abscisses.

89 Déterminer une vitesse minimum

Modéliser **Raisonner** **Calculer**

Lorsque la queue d'un lézard casse, elle repousse toute seule en une soixantaine de jours.

Lors de la repousse, on modélise la longueur, en centimètre, de la queue du lézard en fonction de la durée, en jour, par la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$f(x)=10\,\mathrm{e}^{u(x)}$ où u est la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $u(x)=-\mathrm{e}^{-2-\frac{x}{10}}$.

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

1. Vérifier que pour tout réel $x\geqslant 0$,

$$f'(x)=-u(x)\,\mathrm{e}^{u(x)}.$$

En déduire le sens de variation de f sur $[0\,;+\infty[$.

2. a) Calculer $f(20)$.

En déduire une estimation de la longueur, en cm, de la queue du lézard après 20 jours de repousse. *Arrondir au dixième.*

b) Selon cette modélisation, la queue du lézard peut-elle mesurer 11 cm ?

3. On se propose de déterminer au bout de combien de jours la vitesse de croissance est maximum.

On admet que la vitesse de croissance au bout de x jours est donnée par $f'(x)$.

On admet que la fonction dérivée f' est dérivable sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$, on note f'' la fonction dérivée de f'.

a) Vérifier que tout réel $x\geqslant 0$,

$$f''(x)=\frac{1}{10}u(x)\mathrm{e}^{u(x)}(1+u(x)).$$

b) Étudier les variations de f' sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

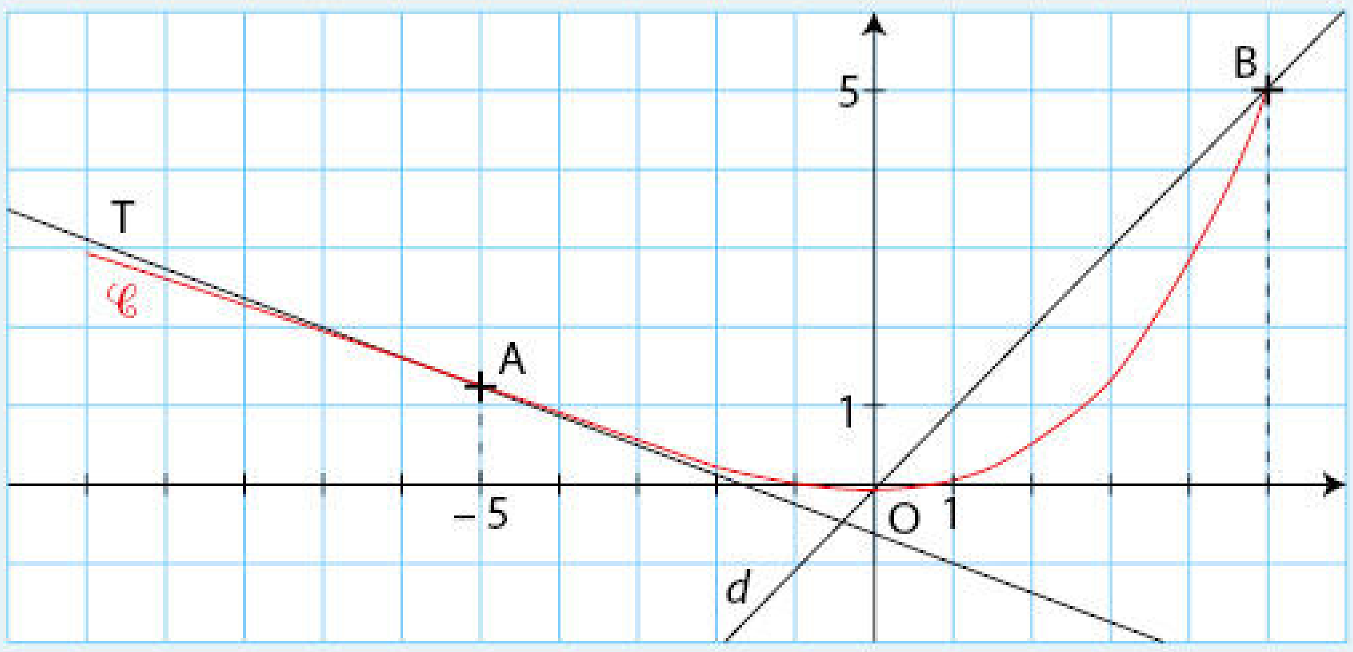
c) En déduire au bout de combien de jours la vitesse de croissance de la longueur de la queue du lézard est maximum.

90 Étudier la convexité d'une fonction

30 min

D'après Bac, Antilles-Guyane 2019

On a représenté dans le repère orthogonal ci-dessous, la courbe $\mathscr{C}$ représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-10\,;5]$, la tangente T à $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse -5 et la droite d d'équation $y=x$.



Partie A

Dans cette partie les estimations seront obtenues par lecture graphique.

Cette partie A est un questionnaire à choix multiples.

Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée.

1. Parmi les quatre valeurs ci-dessous, la meilleure valeur approchée du coefficient directeur de la tangente T est :

a) $-\dfrac{1}{3}$ **b)** -3

c) 3 **d)** $\dfrac{1}{3}$

2. La fonction f semble :

a) concave sur $[-5\,;0]$ **b)** concave sur $[-10\,;0]$

c) convexe sur $[-10\,;5]$ **d)** convexe sur $[-5\,;5]$

Partie B

La fonction f précédente, est la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-10\,;5]$ par :

$$f(x)=(x-5)\mathrm{e}^{0,2x}+5.$$

1. On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $[-10\,;5]$.

a) Montrer que $f'(x)=0{,}2x\mathrm{e}^{0,2x}$.

b) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[-10\,;5]$.

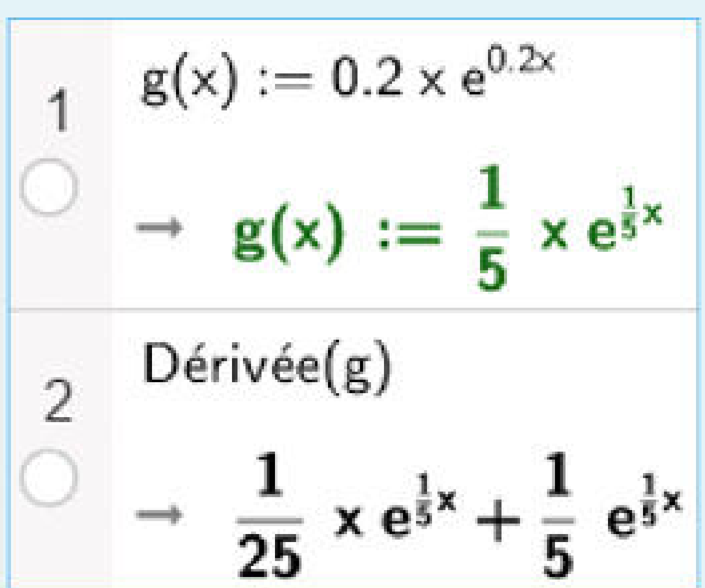
c) Déterminer la valeur exacte du coefficient directeur de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse -5.

2. Un logiciel de calcul formel donne les résultats ci-contre.

a) En utilisant ces résultats, justifier que la dérivée seconde de f, notée f'', est définie par :

$$f''(x)=(0{,}2+0{,}04x)\mathrm{e}^{0,2x}.$$

b) Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[-10\,;5]$.



Guide de résolution
1. Procéder par élimination.

Guide de résolution
1. b) Expliquer pourquoi $f'(x)$ est du même signe que x.

Guide de résolution
2. b) Étudier le signe de $f''(x)$.

91 Déterminer une proportion d'individus

40 min

D'après Bac, Antilles-Guyane 2019

Partie A

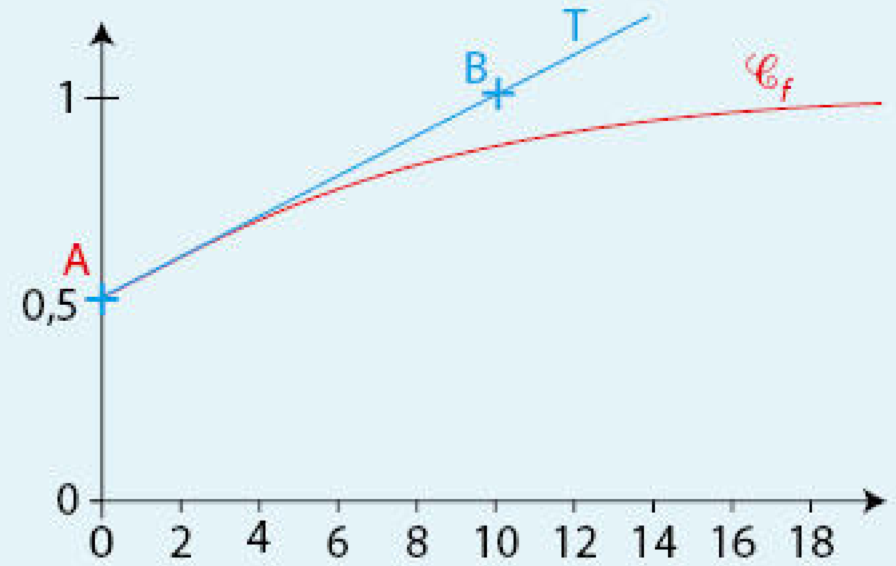
Soit a et b des nombres réels.

On considère une fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{a}{1+\mathrm{e}^{-bx}}.$$

La courbe $\mathscr{C}_f$ représentant la fonction f dans un repère orthogonal est donnée ci-dessous.

La courbe $\mathscr{C}_f$ passe par le point A$(0\,;0{,}5)$. La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A passe par le point B$(10\,;1)$.



a) Justifier que $a=1$. On obtient alors, pour tout réel $x\geqslant 0$, $f(x)=\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-bx}}$.

b) On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée. Vérifier que pour tout réel $x\geqslant 0$,

$$f'(x)=\frac{b\mathrm{e}^{-bx}}{(1+\mathrm{e}^{-bx})^2}.$$

c) En utilisant les données de l'énoncé, déterminer b.

Guide de résolution
c) Déterminer le coefficient directeur de la tangente T.

Partie B

La proportion d'individus qui possèdent un certain type d'équipement dans une population est modélisée par la fonction p définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :

$$p(x)=\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-0{,}2x}}.$$

Le réel x représente le temps écoulé, en année, depuis le 1er janvier 2000.

Le nombre $p(x)$ modélise la proportion d'individus équipés après x années. Ainsi, pour ce modèle, $p(0)$ est la proportion d'individus équipés au 1er janvier 2000 et $p(3,5)$ est la proportion d'individus équipés au milieu de l'année 2003.

1. Quelle est, pour ce modèle, la proportion d'individus équipés au 1er janvier 2010 ? *On en donnera une valeur arrondie au centième.*

2. a) Déterminer le sens de variation de la fonction p sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

b) Calculer la limite de la fonction p en $+\infty$.

c) Interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.

3. On considère que, lorsque la proportion d'individus équipés dépasse 95 %, le marché est saturé.

Déterminer, en expliquant la démarche, l'année au cours de laquelle cela se produit.

4. a) Déterminer $p''(x)$ pour tout réel x.

b) Alice affirme que la croissance de la proportion d'individus qui possèdent ce type d'équipement ne fait que ralentir. Que penser de cette affirmation ? Justifier.

Guide de résolution
2. a) Utiliser les résultats établis dans la **Partie A**.

Guide de résolution
4. b) Déterminer et interpréter la convexité de p.

Se préparer À L'ORAL

92 Présenter un exposé

a) Se souvenir comment utiliser la notion de convexité des fonctions pour établir des inégalités.
b) Dans un exposé oral de 10 min, présenter cette recherche et proposer des exemples d'application.

93 Travailler l'oral en groupe (1)

Résoudre cet exercice en petit groupe, puis présenter les résultats à l'oral.

f est la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;200]$ par :

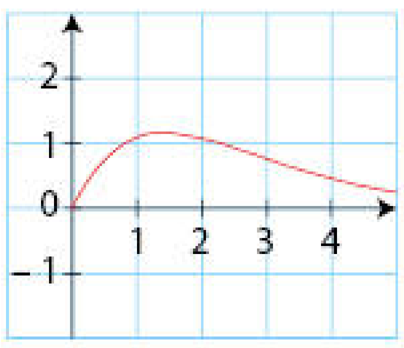
$$f(t) = (t-10)(1-\mathrm{e}^{-0{,}02t}) + 200.$$

Déterminer en quel point la vitesse de croissance de cette fonction décroit.

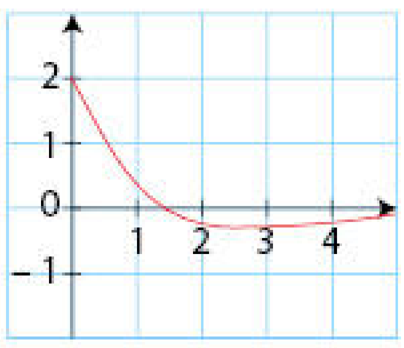
94 Travailler l'oral en groupe (2)

Résoudre cet exercice en petit groupe, puis présenter les résultats à l'oral.

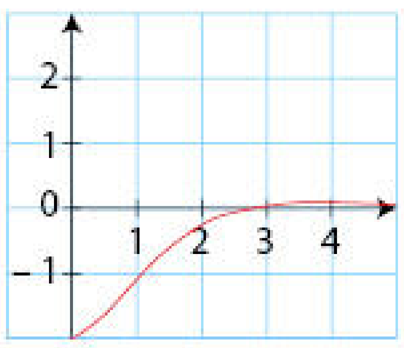
On donne ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative dans un repère donné d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;5]$ ainsi que les courbes représentatives $\mathscr{C}_{f'}$ et $\mathscr{C}_{f''}$ respectivement de la dérivée f' et de la dérivée seconde f'' de la fonction f.



Courbe $\mathscr{C}_f$



Courbe $\mathscr{C}_{f'}$



Courbe $\mathscr{C}_{f''}$

1. Répondre à chacune des questions suivantes à l'aide de lectures graphiques.
a) Donner un encadrement par deux entiers consécutifs du nombre réel pour lequel la fonction f semble atteindre son maximum.
b) Donner un intervalle défini par deux entiers sur lequel la fonction f semble convexe.
c) Expliquer pourquoi on peut conjecturer que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion. Donner un encadrement par deux entiers consécutifs de l'abscisse de ce point d'inflexion.
2. Expliquer comment retrouver chacune des réponses précédentes à l'aide de lectures sur les courbes $\mathscr{C}_{f'}$ ou $\mathscr{C}_{f''}$.

95 Travailler en binôme

On note $f^{(3)}$ la fonction dérivée de f'', $f^{(4)}$ la fonction dérivée de $f^{(3)}$; et ainsi de suite.
f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\mathrm{e}^{x}$.
Le binôme effectue les tâches décrites ci-dessous.

Élève 1

a) Pour tout réel x, déterminer :

- $f'(x)$
- $f''(x)$
- $f^{(3)}(x)$
- $f^{(4)}(x)$

b) Présenter ses réponses à l'élève 2 dans un exposé oral de 5 min.

Élève 2

a) Conjecturer l'expression de $f^{(5)}(x)$ pour tout réel x.
b) Au tableau, présenter la validation de sa conjecture à l'élève 1.

96 Travailler les compétences orales

▶ **ANTICIPER LES QUESTIONS DU JURY**

1. Préparation de la restitution orale (5 min)
Par groupe de 4, résoudre l'exercice ci-dessous, chaque élève travaillant sur une des quatre propositions.
2. Jeu de rôle (30 min)
Chaque élève présente son résultat à l'oral (2 min), pendant que les trois autres composent le jury. Chaque juré pose une question au candidat (5 min).

Énoncé : f est la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = (x^2+2x)\,\mathrm{e}^{-x}.$$

$\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative de f dans un repère.
Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse. Justifier.
a) Pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;+\infty[$,

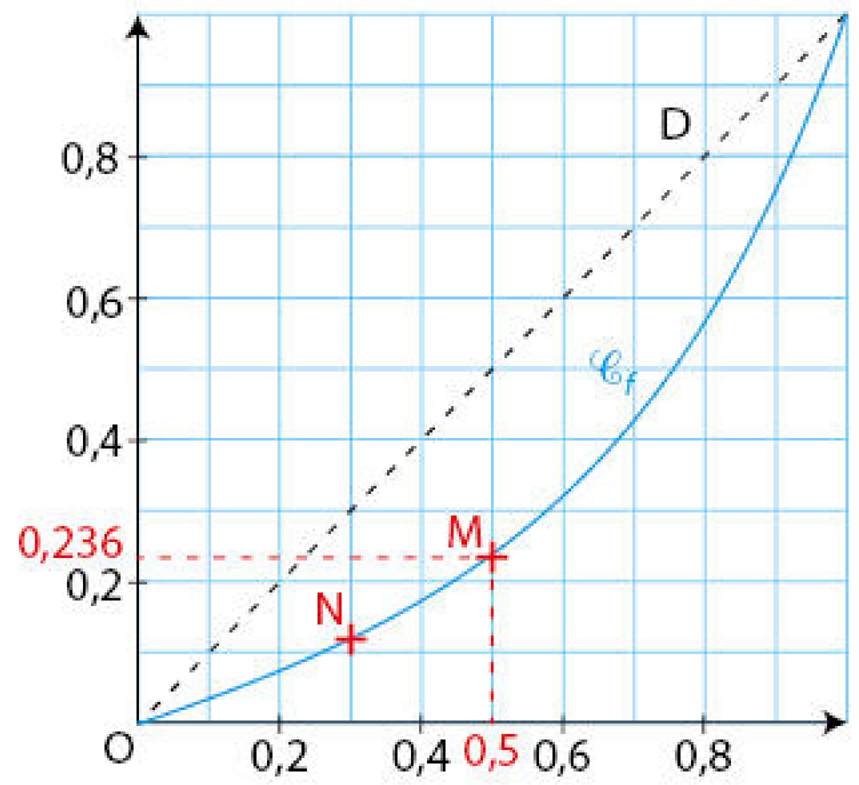
$$f(x) = (-x^2+2)\,\mathrm{e}^{-x}.$$

b) La fonction f admet sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ un maximum en $x = 1,4$.
c) La courbe $\mathscr{C}_f$ admet un unique point d'inflexion d'abscisse $1+\sqrt{3}$.
d) Une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 est $y = x$.

97 Courbe de Lorenz

Partie A : lecture d'une courbe de Lorenz

La courbe $\mathscr{C}_f$ représentée ci-dessous, dite **courbe de Lorenz**, illustre la répartition des salaires dans une entreprise. $f(x)$ représente la proportion de la masse salariale (somme de tous les salaires) correspondant à la proportion x des employés ayant les salaires les plus faibles de l'entreprise.



Ainsi environ 50 % des employés aux revenus les plus faibles se partagent 23,6 % de la masse salariale.

1. Interpréter le point N(0,3 ; 0,121) de $\mathscr{C}_f$.

2. Déterminer graphiquement quel pourcentage de la masse salariale, se partagent :

a) les 60 % des employés aux revenus les plus faibles ;

b) les 20 % des employés aux revenus les plus élevés.

Partie B : fonction associée à une courbe de Lorenz

De façon plus générale, une courbe de Lorenz est la représentation graphique d'une fonction f dérivable sur l'intervalle $[0 ; 1]$ et possédant les propriétés suivantes :

(1) $f(0) = 0$, $f(1) = 1$;

(2) f est croissante sur l'intervalle $[0 ; 1]$;

(3) pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; 1]$, $f(x) \leqslant x$.

La fonction f, représentée dans la partie A est la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par $f(x) = xe^{x^2-1}$.

1. Montrer que f possède les propriétés **(1)**, **(2)** et **(3)**.

2. Calculer le pourcentage de la masse salariale détenue par 20 % des employés ayant les salaires les plus élevés. *Arrondir au dixième.*

98 Dérivée *n*-ième d'une fonction

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1 - 2x)e^{2x}$.

On définit les dérivées successives de f par : $f^{(1)} = f'$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$.

1. Montrer par récurrence que pour tout réel x et tout entier naturel n non nul :

$$f^{(n)}(x) = 2^n(1 - n - 2x)e^{2x}.$$

2. Pour tout entier naturel n non nul, la courbe représentative de $f^{(n)}$, dans un repère, admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses en un point M_n.

a) Calculer les coordonnées $(x_n ; y_n)$ de M_n.

b) Vérifier que la suite (x_n) est une suite arithmétique dont précisera le premier terme et la raison.

c) Vérifier que la suite (y_n) est une suite géométrique dont précisera le premier terme et la raison.

99 Inégalité arithmético-géométrique

> **Définition**
> Pour tout réel $x \geqslant 0$, le nombre y tel que $x = y^n$ est la racine n-ième de x ; on la note $\sqrt[n]{x}$.

Pour tous réels positifs $x_1, x_2 \ldots x_n$ et tout entier naturel n non nul,

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

Cette inégalité est appelée l'inégalité arithmético-géométrique.

On se propose de démontrer de différentes façons cette inégalité dans le cas où $n = 2$, c'est-à-dire de démontrer que pour tous réels positifs a et b,

$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}.$$

1. Analytiquement

On admet que pour tous réels positifs a et b, il existe deux réels A et B tels que $e^A = a$ et $e^B = b$.

a) En utilisant la convexité de la fonction exponentielle, justifier que pour tous réels A et B,

$$e^{\frac{A+B}{2}} \leqslant \frac{e^A + e^B}{2}.$$

b) Conclure.

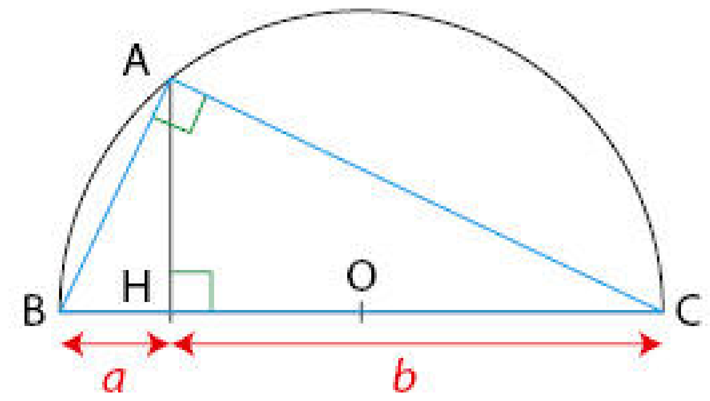
2. Algébriquement

Développer l'expression $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$, puis en déduire l'inégalité souhaitée.

3. Géométriquement

ABC est un triangle rectangle en A, inscrit dans le demi-cercle de centre le milieu O de [BC]. H est le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.

On note BH $= a$ et HC $= b$.



a) Exprimer la longueur AH en fonction de a et b.

b) Déterminer le maximum de la longueur AH et conclure.

100 Algo python

Limite d'une suite

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé du plan.

1. Étude de la fonction

a) Étudier la parité de la fonction f.

b) Établir le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

c) Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote horizontale et préciser la position de $\mathscr{C}$ par rapport à cette asymptote.

d) Déterminer une équation de la tangente T_0 à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

e) Étudier la convexité de f et déterminer les éventuels points d'inflexion.

f) Tracer T_0 et $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormé du plan, en choisissant une unité graphique adaptée.

2. Étude d'une suite

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Montrer que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

b) Déduire de la convexité de la fonction f le sens de variation de la suite (u_n).

c) Justifier que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite L.

d) Écrire un algorithme en langage naturel de sorte qu'il détermine le plus petit rang n_0 à partir duquel, pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$,

$$|u_n - \mathrm{L}| \leqslant 10^{-1}.$$

e) Coder cet algorithme en langage Python, le saisir et en déduire la valeur de n_0.

101 Famille de fonctions

Pour tout entier naturel n non nul, f_n est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \frac{1}{1+e^x} + nx.$$

On note $\mathscr{C}_n$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

a) Déterminer pour tout réel x, $f_n'(x)$ et $f_n''(x)$.

b) En déduire que la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

c) Démontrer que la courbe $\mathscr{C}_n$ admet un seul point d'inflexion, noté A.

Déterminer les coordonnées de A.

102 Des fonctions polynômes

1. Polynômes de degré 3

P est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\mathrm{P}(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

où a, b, c, d sont des nombres réels avec $a \neq 0$.

Étudier la convexité de la fonction P.

Conseil : envisager deux cas, $a > 0$ et $a < 0$.

2. Polynômes de degré 4

f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

où a, b, c, d et e sont des nombres réels avec $a > 0$.

a) Démontrer que la fonction f n'est jamais concave sur $\mathbb{R}$.

Conseil : utiliser un raisonnement par l'absurde.

b) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a, b, c pour que f soit convexe sur $\mathbb{R}$.

c) Montrer que si f n'est pas convexe sur $\mathbb{R}$, alors sa courbe admet deux points d'inflexion.

Préciser les abscisses de ces points d'inflexion.

Des défis

103 Composer deux fonctions

Déterminer deux fonctions f et g distinctes, définies sur l'intervalle $[1\,;2]$ telles que pour tout réel x de l'intervalle $[1\,;2]$,

$$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x).$$

104 Étudier un polynôme de degré 4

f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

où a, b, c, d et e sont des nombres réels avec $a \neq 0$.

Déterminer les réels a, b, c, d et e tels que, dans un repère, la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f admet :

- deux points d'inflexion d'abscisses 2 et $-0,5$;
- la droite d'équation $y = -x + 5$ comme tangente au point d'abscisse 0 ;
- une tangente au point d'abscisse -1 de coefficient directeur $-0,5$.