9 Produit scalaire et calcul vectoriel

Avant

▶ Le *Serment des Horaces* est un tableau du peintre français David (1748-1825). Le dessin des ombres, qui sont fondamentales dans ce chef-d'œuvre, a demandé de longues constructions préalables.

À présent

▶ Aujourd'hui, les logiciels de dessin et de traitement de l'image permettent d'ajouter l'ombre d'un objet en fonction de la lumière choisie. Pour cela, le signe du produit scalaire de deux vecteurs joue un rôle essentiel.

Les capacités travaillées dans ce chapitre

	Exercices
• Calculer un produit scalaire avec le cosinus.	1, 3, 13 à 24
• Calculer un produit scalaire à l'aide d'une projection orthogonale.	2, 4, 25 à 30
• Calculer un produit scalaire avec l'expression analytique.	6, 8, 37 à 42
• Calculer un produit scalaire à l'aide des normes.	43 à 51
• Choisir la méthode la plus adaptée de calcul d'un produit scalaire en vue de la résolution d'un problème.	9, 11, 52 à 57
• Démontrer une orthogonalité.	10, 12, 58 à 65
• Utiliser les règles de calcul. Calculer des longueurs et des angles.	5, 7, 31 à 36, 93 à 98

1 Le travail d'une force en physique

Vincent s'initie au kitesurf. Il se déplace en ligne droite d'un point A à un point B sur une distance de 50 m. La force de traction $\vec{F}$ exercée par la voile a pour intensité 1 000 newtons ($\|\vec{F}\| = 1000$).
En physique, le travail de la force $\vec{F}$ lors du déplacement de A en B est le nombre, noté W, tel que $W = AB \times \|\vec{F}\| \times \cos(\widehat{BAC})$.
L'unité du travail est le joule (noté J).

1 **a)** Reproduire et compléter le tableau ci-dessous à l'aide de valeurs exactes.

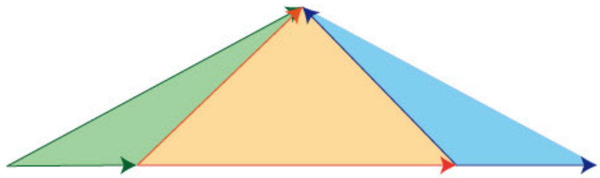
$\widehat{BAC}$	0°	30°	45°		120°
W				25 000	

b) Louise affirme : « Si le vecteur $\vec{F}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{AB}$ alors $\vec{F}$ n'influence pas le déplacement. » Est-ce exact ?

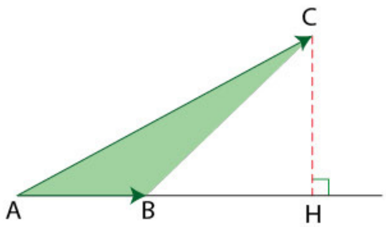
2 **a)** Étudier le signe de W en fonction de la mesure, en degré, de l'angle $\widehat{BAC}$.
b) Les physiciens parlent de travail résistant lorsque $W < 0$. Justifier le vocabulaire.
W est appelé produit scalaire du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par le vecteur $\vec{F}$ et se note $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{F}$.

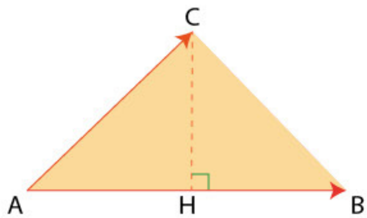
2 Une expression du produit scalaire

Fred a construit la figure ci-contre. Il affirme : « Pour calculer le produit scalaire de deux vecteurs de même couleur ci-contre, il suffit de mesurer deux longueurs à chaque fois. »

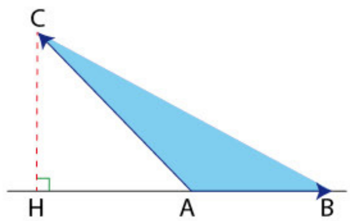


1 Pour chacune des figures ci-dessous, montrer que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH$.
L'affirmation de Fred est-elle vraie pour les vecteurs verts et les vecteurs rouges ?





2 ABC est le triangle donné ci-contre.
a) Justifier que $\cos(\widehat{BAC}) = -\cos(\widehat{HAC})$.
b) En déduire que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH$.
c) L'affirmation de Fred est-elle encore correcte pour les vecteurs bleus ?



Cours

1 Premières expressions du produit scalaire

A Définition du produit scalaire

Définition

Le produit scalaire d'un vecteur $\vec{u}$ par un vecteur $\vec{v}$ est le nombre réel, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ (lire « $\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$ »), défini par :
- si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ sont deux vecteurs non nuls, alors $\boldsymbol{\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})}$;
- si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Remarque : le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est indépendant des représentants des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On peut donc choisir des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de même origine.

Propriétés

- Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires de même sens, alors $\boldsymbol{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC}$.

- Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires de sens contraires, alors $\boldsymbol{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AC}$.

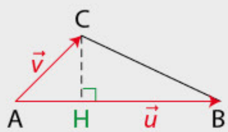
En effet, si $\widehat{BAC} = 0$, alors $\cos(\widehat{BAC}) = 1$ et si $\widehat{BAC} = \pi$, alors $\cos(\widehat{BAC}) = -1$.

B Expression du produit scalaire à l'aide d'un projeté orthogonal

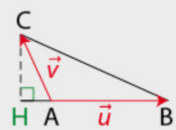
Propriétés

Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, si H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB), alors :

- $\boldsymbol{\vec{u} \cdot \vec{v} = AB \times AH}$ lorsque $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de **même sens**.



- $\boldsymbol{\vec{u} \cdot \vec{v} = -AB \times AH}$ lorsque $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de **sens contraires**.



Remarque : cette propriété démontrée à l'activité 2 s'écrit aussi $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$.

C Produit scalaire et orthogonalité

Définition

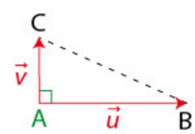
- Dire que deux vecteurs non nuls $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ sont **orthogonaux** signifie que les droites (AB) et (AC) sont **perpendiculaires**.
- Le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur.

Propriété

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $\boldsymbol{\vec{u}}$ **est orthogonal à** $\boldsymbol{\vec{v}}$ équivaut à $\boldsymbol{\vec{u} \cdot \vec{v} = 0}$.

Démonstration

Cas où $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ sont des vecteurs non nuls : $\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{v}$ équivaut à A est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB), soit $\vec{u} \cdot \vec{v} = AB \times AA = 0$.



2 Propriétés du produit scalaire

A Règles de calculs

Propriétés

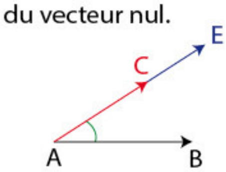
Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$, pour tout nombre réel λ : **(1)** $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$ **(2)** $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$
(3) $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w} = \vec{u}\cdot\vec{w} + \vec{v}\cdot\vec{w}$ **(4)** $\vec{u}\cdot(\lambda\vec{v}) = \lambda\times(\vec{u}\cdot\vec{v})$ **(5)** $(\lambda\vec{u})\cdot\vec{v} = \lambda\times(\vec{u}\cdot\vec{v})$

Démonstrations

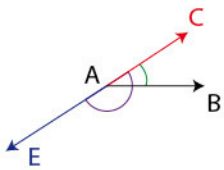
Pour $\lambda \neq 0$ et dans le cas où $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$ et $\lambda\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AE}$ sont distincts du vecteur nul.

(1) $\widehat{BAC} = \widehat{CAB}$ donc $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$.

(4) • Si $\lambda > 0$, alors $\overrightarrow{AC}$ et $\lambda\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et de même sens, donc $\widehat{BAE} = \widehat{BAC}$.
Ainsi, $\vec{u}\cdot(\lambda\vec{v}) = AB\times(\lambda AC)\times\cos(\widehat{BAE}) = \lambda(AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC})) = \lambda\times(\vec{u}\cdot\vec{v})$.



• Si $\lambda < 0$, alors $\overrightarrow{AC}$ et $\lambda\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et de sens contraires,
donc $\widehat{BAE} = \pi - \widehat{BAC}$.
Ainsi, $\cos(\widehat{BAE}) = -\cos(\widehat{BAC})$. D'autre part $\|\lambda\overrightarrow{AC}\| = -\lambda AC$, donc
$\vec{u}\cdot(\lambda\vec{v}) = AB\times(-\lambda AC)\times(-\cos(\widehat{BAC})) = \lambda(AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC})) = \lambda\times(\vec{u}\cdot\vec{v})$.



Remarques :
- La propriété **(1)** se traduit en disant que le produit scalaire est **symétrique**.
- Les propriétés **(2)** à **(5)** se traduisent en disant que le produit scalaire est **bilinéaire**.
- La propriété **(3)** se déduit de la propriété **(2)** par la symétrie du produit scalaire.

De la même façon, la propriété **(5)** se déduit de la propriété **(4)**.
- Des propriétés **(2)** et **(4)** et du fait que $\vec{u}-\vec{v} = \vec{u}+(-\vec{v})$, on déduit que $\boldsymbol{\vec{u}\cdot(\vec{v}-\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} - \vec{u}\cdot\vec{w}}$.

Exemple

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{u}\cdot(2\vec{v}-3\vec{w}) = \vec{u}\cdot(2\vec{v}) - \vec{u}\cdot(3\vec{w}) = 2\vec{u}\cdot\vec{v} - 3\vec{u}\cdot\vec{w}$.

B Carré scalaire d'un vecteur et identités remarquables

Définition

Le **carré scalaire** d'un vecteur $\vec{u}$, noté $\boldsymbol{\vec{u}^2}$, est le produit scalaire $\boldsymbol{\vec{u}\cdot\vec{u}}$.

Conséquences : pour tout vecteur $\vec{u}$, pour tous points A et B, $\boldsymbol{\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2}$ et $\boldsymbol{\overrightarrow{AB}^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = AB^2}$.

En effet, si $\vec{u}$ est un vecteur non nul, $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|\times\|\vec{u}\|\times\cos(0) = \|\vec{u}\|^2$.

Propriétés

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:
(1) $\boldsymbol{(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2}$ **(2)** $\boldsymbol{(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2}$ **(3)** $\boldsymbol{(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2}$

Démonstrations

(1) $(\vec{u}+\vec{v})^2 = (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{u} + \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{u} + \vec{v}\cdot\vec{v} = \vec{u}^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2$

(2) $(\vec{u}-\vec{v})^2 = (\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{u} - \vec{u}\cdot\vec{v} - \vec{v}\cdot\vec{u} + \vec{v}\cdot\vec{v} = \vec{u}^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2$

(3) $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{u} - \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{u} - \vec{v}\cdot\vec{v} = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

3 Autres expressions du produit scalaire

A Expression analytique du produit scalaire

Propriété

Dans une base orthonormée $(\vec{i},\vec{j})$, si $\vec{u}(x\,;y)$ et $\vec{v}(x'\,;y')$, alors $\boldsymbol{\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'}$.

Démonstration

$\vec{u}(x\,;y)$ et $\vec{v}(x'\,;y')$ donc $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$, $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}$ et $\vec{u}\cdot\vec{v}=(x\vec{i}+y\vec{j})\cdot(x'\vec{i}+y'\vec{j})$.
$\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'\vec{i}^{\,2}+(xy'+yx')\vec{i}\cdot\vec{j}+yy'\vec{j}^{\,2}=xx'+yy'$ car $\vec{i}^{\,2}=\vec{j}^{\,2}=1$ et $\vec{i}\cdot\vec{j}=0$.

Propriétés

Dans une base orthonormée $(\vec{i},\vec{j})$:
(1) si $\vec{u}(x\,;y)$, alors $\|\boldsymbol{\vec{u}}\|=\sqrt{\boldsymbol{x^2+y^2}}$ **(expression analytique de la norme)** ;
(2) $\vec{u}(x\,;y)$ et $\vec{v}(x'\,;y')$ sont **orthogonaux** équivaut à $\boldsymbol{xx'+yy'=0}$ **(critère d'orthogonalité)**.

Démonstrations

(1) $\|\vec{u}\|^2=\vec{u}\cdot\vec{u}=x^2+y^2$
(2) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux équivaut à $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ c'est-à-dire $x\,x'+y\,y'=0$.

Exemple

Dans une base orthonormée, on donne les vecteurs $\vec{u}\left(\sqrt{5}-2\,;-1\right)$ et $\vec{v}\left(\sqrt{5}+2\,;1\right)$.
$\vec{u}\cdot\vec{v}=\left(\sqrt{5}-2\right)\left(\sqrt{5}+2\right)+(-1)\times1=5-4-1=0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

B Développement de $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2$ et $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2$

Propriétés

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, **(1)** $\|\boldsymbol{\vec{u}+\vec{v}}\|^2=\|\boldsymbol{\vec{u}}\|^2+\boldsymbol{2\vec{u}\cdot\vec{v}}+\|\boldsymbol{\vec{v}}\|^2$, **(2)** $\|\boldsymbol{\vec{u}-\vec{v}}\|^2=\|\boldsymbol{\vec{u}}\|^2-\boldsymbol{2\vec{u}\cdot\vec{v}}+\|\boldsymbol{\vec{v}}\|^2$.

Démonstrations

(1) $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^{\,2}+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^{\,2}=\|\vec{u}\|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$

(2) $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=(\vec{u}-\vec{v})^2=\vec{u}^{\,2}-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^{\,2}=\|\vec{u}\|^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$

Conséquences : pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux équivaut à $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2$.
De même, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux équivaut à $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2$.

C Expressions du produit scalaire à l'aide de normes

Propriétés

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:
(1) $\vec{u}\cdot\vec{v}=\dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$ **(2)** $\vec{u}\cdot\vec{v}=\dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)$

En effet, ces deux propriétés se déduisent directement des expressions de $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2$ et $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2$ établies au paragraphe B.

EXERCICES RÉSOLUS

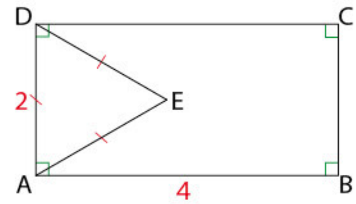
1 Calculer un produit scalaire avec un cosinus

→ Cours 1. A

ABCD est un rectangle tel que $AB = 4$ et $AD = 2$.
AED est un triangle équilatéral situé à l'intérieur de ABCD.

a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AD}$.

b) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AE}$.



Solution

a) $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AD} = AE \times AD \times \cos(\widehat{DAE})$

Le triange AED est équilatéral donc $\widehat{DAE} = 60°$.

$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AD} = 2 \times 2 \times \cos(60°) = 4 \times \dfrac{1}{2} = 2$

b) ABCD est un rectangle donc $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$.

D'où $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE}$.

$\widehat{EAB} = 90° - \widehat{DAE} = 90° - 60° = 30°$

Donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = AB \times AE \times \cos(\widehat{EAB}) = 4 \times 2 \times \cos(30°)$.

Par conséquent, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = 8 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$, soit $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AE} = 4\sqrt{3}$.

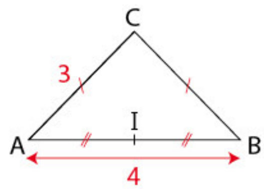
> On utilise la formule du cosinus car les longueurs AE, AD et une mesure de l'angle $\widehat{DAE}$ sont connues.

> Pour calculer $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AE}$, on remplace $\overrightarrow{DC}$ par un autre représentant, $\overrightarrow{AB}$.

2 Calculer un produit scalaire avec un projeté orthogonal

→ Cours 1. B

ABC est un triangle isocèle en C tel que $AB = 4$ et $AC = 3$.
I est le milieu du segment $[AB]$.
Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.



Solution

Le triangle ABC est isocèle en C et I est le milieu du segment $[AB]$, donc le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB) est le point I.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont colinéaires et de même sens, donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AI = 4 \times 2 = 8$.

> La présence d'un triangle isocèle permet d'utiliser un projeté orthogonal pour calculer ce produit scalaire. En effet, dans le triangle ABC isocèle en C, la médiane (CI) est aussi la hauteur issue de C.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 1

3 Reprendre les données de l'exercice 1 avec $AB = 5$ et $AD = 4$.
Calculer chacun des produits scalaires :

a) $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DC}$ **b)** $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{DE}$

Sur le modèle de l'exercice résolu 2

4 Reprendre les données de l'exercice 2 avec $AB = 5$ et $AC = 6$.
Calculer chacun des produits scalaires :

a) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}$ **b)** $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CI}$

EXERCICES RÉSOLUS

5 Calculer la mesure d'un angle

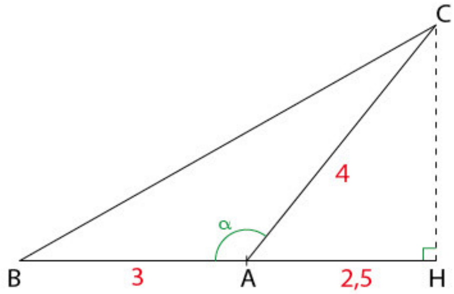
→ Cours 1. A et B

ABC est le triangle ci-contre avec $AB = 3$ et $AC = 4$.
H est le pied de la hauteur issue de C et $AH = 2{,}5$.

a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

b) En déduire la mesure α, en degré, de l'angle $\widehat{BAC}$.

Arrondir à l'unité.



Solution

a) H est le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB).

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires et de sens contraires,

donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH = -3 \times 2{,}5 = -7{,}5$.

b) De plus, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\alpha)$,
c'est-à-dire $-7{,}5 = 3 \times 4 \times \cos(\alpha)$.

Ainsi, $\cos(\alpha) = \dfrac{-7{,}5}{12} = -\dfrac{5}{8}$ et avec la calculatrice, $\alpha \approx 129°$.

> On calcule le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ de deux façons différentes :
> – au **a)**, avec un projeté orthogonal,
> – au **b)**, avec un cosinus.

6 Calculer une distance

→ Cours 1. B et 3. A

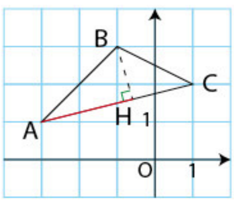
Dans un repère orthonormé, on donne les points :

$$A(-3\,;1),\quad B(-1\,;3)\quad \text{et}\quad C(1\,;2).$$

a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

b) En déduire la distance AH, où H est le projeté orthogonal de B sur la droite (AC).

Arrondir au dixième.



Solution

a) $\overrightarrow{AB}(2\,;2)$ et $\overrightarrow{AC}(4\,;1)$ donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times 4 + 2 \times 1 = 10$.

b) Les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et de même sens,

donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AH \times AC$.

Ainsi $AH \times AC = 10$, c'est-à-dire $AH = \dfrac{10}{AC} = \dfrac{10}{\sqrt{4^2 + 1^2}} = \dfrac{10}{\sqrt{17}}$.

Donc $AH \approx 2{,}4$.

> On calcule le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ de deux façons différentes :
> – au **a)**, avec l'expression analytique,
> – au **b)**, avec un projeté orthogonal.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 5

7 Reprendre les données de l'exercice 5 avec $AB = 4$, $AC = 5$ et $AH = 2$.

a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

b) En déduire la mesure α, en degré, de l'angle $\widehat{BAC}$.

Arrondir à l'unité.

Sur le modèle de l'exercice résolu 6

8 Reprendre les données de l'exercice 6 et calculer la distance AK, où K est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).

Arrondir au dixième.

EXERCICES RÉSOLUS

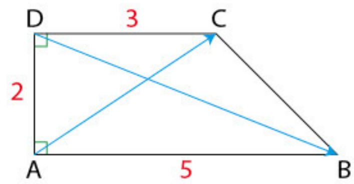
9 Utiliser la relation de Chasles pour calculer un produit scalaire

→ Cours 1. A et 2. A

ABCD est le trapèze rectangle ci-contre tel que :

$$AB = 5,\quad AD = 2 \quad \text{et} \quad CD = 3.$$

Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB}$.



Solution

- D'après la relation de Chasles :
$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) \cdot (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB})$
$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB}$ **(1)**
- $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux, de même que $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{DA}$, donc $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DA} = 0$.
- $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AD} \cdot (-\overrightarrow{AD}) = -\overrightarrow{AD}^2 = -AD^2 = -4$
- $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires et de même sens, donc $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB} = DC \times AB$, soit $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB} = 3 \times 5 = 15$.
- En reportant ces valeurs dans **(1)**, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = -4 + 15 = 11$.

La relation de Chasles est un outil important pour calculer un produit scalaire ; elle permet de se ramener à des produits scalaires que l'on calcule avec des expressions du cours.

En notant I le point tel que $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AI}$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont colinéaires de même sens, donc :
$$\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB} = AI \times AB = DC \times AB$$

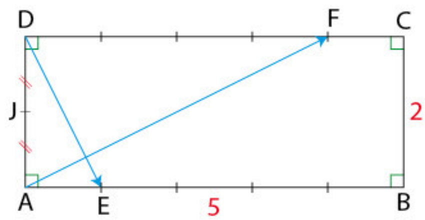
10 Démontrer l'orthogonalité de vecteurs

→ Cours 1. C et 3. A

ABCD est un rectangle tel que $AB = 5$ et $BC = 2$. E, F et J sont les points tels que $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DF} = \frac{4}{5}\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

a) Dans le repère orthonormé $(A ; \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AJ})$, déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{AF}$.

b) Démontrer que les droites (DE) et (AF) sont perpendiculaires.



Solution

a) $A(0 ; 0)$, $D(0 ; 2)$, $E(1 ; 0)$ et $F(4 ; 2)$ donc $\overrightarrow{DE}(1 ; -2)$ et $\overrightarrow{AF}(4 ; 2)$.

b) $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{AF} = 1 \times 4 + (-2) \times 2 = 4 - 4 = 0$
Donc, les vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{AF}$ sont orthogonaux et les droites (DE) et (AF) sont perpendiculaires.

Démontrer que deux droites sont perpendiculaires revient à démontrer qu'elles ont des vecteurs directeurs orthogonaux.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 9

11 Reprendre les données de l'exercice 10 et calculer $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{AF}$ à l'aide de la relation de Chasles et sans utiliser de repère orthonormé.
Que peut-on en déduire ?

Sur le modèle de l'exercice résolu 10

12 ABCD est le trapèze de l'exercice 9.
I, J, K sont les points tels que :
$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB},\quad \overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD},\quad \overrightarrow{AK} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AI}.$$
Démontrer que les droites (AC) et (DK) sont perpendiculaires en utilisant le repère $(A ; \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ})$.

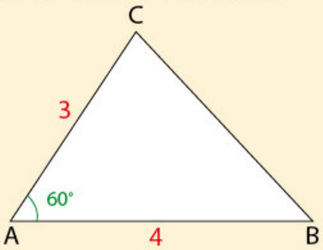
Calcul mental — Exercez-vous sur la plateforme Hyperbole
⊕ de détails page 4

Produit scalaire et cosinus

→ Cours 1. A

Questions Flash

13 ABC est le triangle ci-dessous.



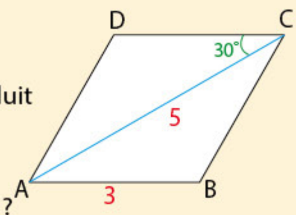
Calculer mentalement le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

14 A, B, C sont trois points tels que :

$\|\overrightarrow{AB}\| = 5$, $\|\overrightarrow{AC}\| = 3$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -15$.

Calculer mentalement la mesure, en radian, de $\widehat{BAC}$.

15 ABCD est ce parallélogramme.
Élida affirme : « Le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ est égal à 13. »
Que peut-on en penser ?



16 Voici des extraits de copies d'élèves qui comportent toutes des erreurs. Les identifier.

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{w}$

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ signifie $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$

c) si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$, alors $\vec{v} = \dfrac{1}{\vec{u}}$

d) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA}$

17 Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse. Expliquer.

a) Si ABC est un triangle équilatéral de côté 6, alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 36$.

b) Si A, B et C sont des points alignés dans cet ordre avec $AB = 5$ et $AC = 6$, alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 30$.

c) Si ABC est un triangle rectangle en A, alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

18 A, B, C sont les trois points alignés ci-dessous.

Calculer :

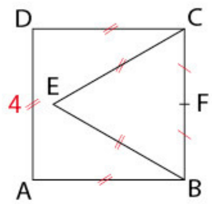
a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ **b)** $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$

19 A, B et C sont trois points distincts.
Recopier et compléter ce tableau.

AB	AC	$\widehat{BAC}$ en rad (dans $]-\pi\,;\pi]$)	$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
	8	$\dfrac{\pi}{4}$	12
5	8		-20
2	4		$4\sqrt{2}$
2		$-\dfrac{\pi}{3}$	7,5

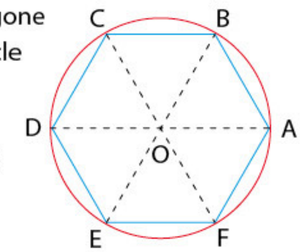
20 ABCD est un carré de côté 4, BCE est un triangle équilatéral et F est le milieu du côté $[BC]$.
Calculer les produits scalaires :

a) $\overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{EC}$ **b)** $\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{CF}$
c) $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CE}$ **d)** $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BF}$



21 ABCDEF est un hexagone régulier inscrit dans un cercle de centre O et de rayon 1.
Calculer :

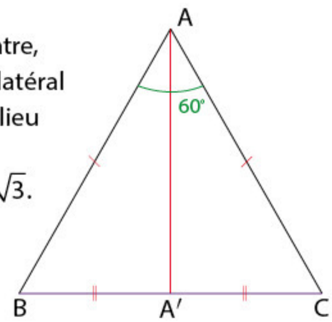
a) $\overrightarrow{OF} \cdot \overrightarrow{OA}$ **b)** $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD}$
c) $\overrightarrow{OF} \cdot \overrightarrow{OB}$ **d)** $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AB}$
e) $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DE}$ **f)** $\overrightarrow{OF} \cdot \overrightarrow{DA}$



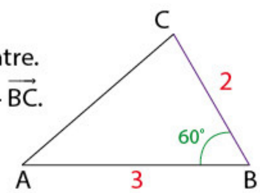
22 Sur la figure ci-contre, ABC est un triangle équilatéral de côté 4 et A' est le milieu du côté $[BC]$.

a) Justifier que $AA' = 2\sqrt{3}$.

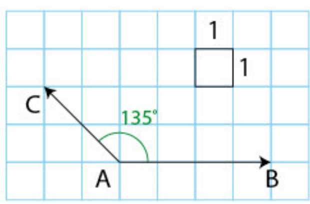
b) Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{BC}$.



23 ABC est le triangle ci-contre.
Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.



24 A, B, C sont les trois points ci-contre.
Calculer la valeur exacte du produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

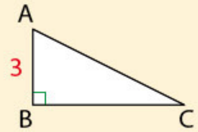


Produit scalaire et projeté orthogonal

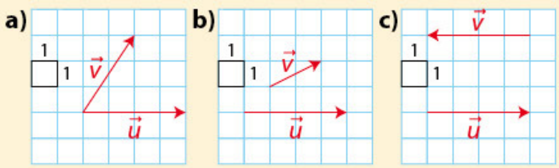
→ Cours 1. B et C

Questions flash

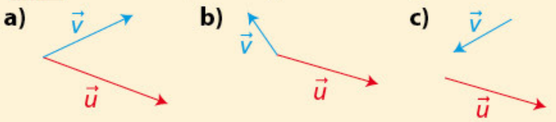
25 ABC est un triangle rectangle en B.
Calculer mentalement $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.



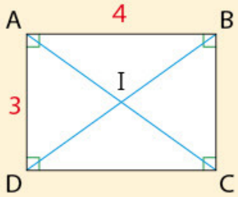
26 Dans chaque cas, calculer mentalement $\vec{u}\cdot\vec{v}$ à l'aide d'une projection orthogonale.



27 Dans chaque cas, préciser le signe de $\vec{u}\cdot\vec{v}$.



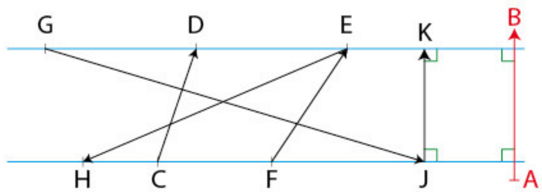
28 ABCD est un rectangle de centre I.
Ambre a écrit trois résultats.
Sont-ils corrects ?



$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=16$

$\overrightarrow{CI}\cdot\overrightarrow{CD}=6$ $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=16$

29 Sur la figure ci-dessous, les points G, D, E et K sont alignés ainsi que les points H, C, F et J.



Dans chaque cas, dire si le produit scalaire est égal à $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$.

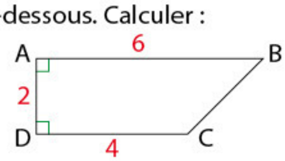
a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{FE}$ **b)** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{GJ}$ **c)** $\overrightarrow{EH}\cdot\overrightarrow{AB}$ **d)** $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{JK}$

30 ABCD est le trapèze ci-dessous. Calculer :

a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}$ **b)** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

c) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$ **d)** $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}$

e) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DC}$ **f)** $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{DA}$



Règles de calculs

→ Cours 2

Questions flash

31 ABC sont trois points tels que :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=4 \quad\text{et}\quad \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=-3.$$

Calculer mentalement : **a)** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}$ **b)** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}$

32 $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs tels que :

$$\|\vec{u}\|=1,\ \vec{v}^{\,2}=5 \text{ et } \vec{u}\cdot\vec{v}=-2.$$

Calculer mentalement :

a) $-3\vec{u}\cdot(4\vec{v})$ **b)** $\vec{u}^{\,2}$ **c)** $(\vec{u}+\vec{v})^2$

33 $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs orthogonaux tels que $\|\vec{u}\|=1$, $\|\vec{v}\|=\frac{1}{2}$.
Dans chaque cas, donner la bonne réponse.

a) $(\vec{u}-2\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})$ est égal à …

(1) $\frac{3}{2}$ **(2)** 0 **(3)** $\frac{1}{2}$

b) $(\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})$ est égal à …

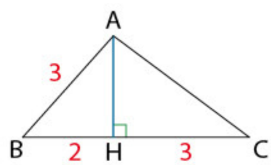
(1) $\frac{3}{4}$ **(2)** $\frac{5}{4}$ **(3)** $\frac{1}{2}$

c) $(\vec{u}-\vec{v})^2$ est égal à …

(1) $\frac{1}{2}$ **(2)** $\frac{1}{4}$ **(3)** $\frac{5}{4}$

34 ABCD est un rectangle tel que $AB=5$ et $AD=2$.
En écrivant $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}$, expliquer pourquoi $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}=21$.

35 ABC est un triangle tel que $AB=3$, $BC=5$ et $HC=3$ où H est le pied de la hauteur issue de A.



1. Calculer $(\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{BC})\cdot\overrightarrow{AC}$.

2. a) Calculer AH.

b) En déduire $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AH})\cdot\overrightarrow{AB}$.

36 ABCD est un parallélogramme de centre E.
En écrivant $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EB}$ et $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ED}$, démontrer que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=AE^2-EB^2$.

Produit scalaire et expression analytique

→ Cours 3. A

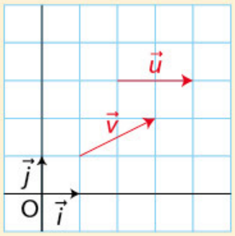
Questions flash

Pour les exercices 37 à 39, le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

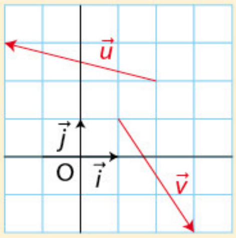
37 Calculer mentalement $\vec{u}\cdot\vec{v}$ avec $\vec{u}(-1\,;\sqrt{2})$ et $\vec{v}(\sqrt{10}\,;\sqrt{5})$. Qu'en déduit-on ?

38 Dans chaque cas, calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

a)



b)



39 Dans chaque cas, donner la bonne réponse.

a) On donne $\vec{u}(2\,;-4)$ et $\vec{v}(-1\,;3)$. Alors …

(1) $\vec{u}\cdot\vec{v}=2$ **(2)** $\vec{u}\cdot\vec{v}=-14$ **(3)** $\vec{u}\cdot\vec{v}=-10$

b) On donne $\vec{t}(-5\,;\sqrt{3})$. Alors …

(1) $\vec{t}\cdot\vec{i}=\sqrt{3}$ **(2)** $\vec{t}\cdot\vec{j}=-5$ **(3)** $\vec{t}\cdot\vec{i}=-5$

c) On donne $\vec{w}(-1\,;5)$. Alors …

(1) $\|\vec{w}\|=\sqrt{26}$ **(2)** $\|\vec{w}\|=\sqrt{24}$ **(3)** $\|\vec{w}\|=6$

40 Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(-3\,;-1)$, $B(-2\,;1)$ et $C(2\,;0)$.
Calculer :

a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ **b)** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}$ **c)** $\overrightarrow{AB}^2$ **d)** AB

41 ABC est un triangle rectangle isocèle en A tel que $AC=5$. D, E et F sont les milieux respectifs des côtés [AB], [AC] et [BC].
On introduit le repère orthonormé $\left(A\,;\frac{1}{5}\overrightarrow{AB},\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}\right)$.

a) Réaliser une figure et déterminer les coordonnées des points A, D, E et F.

b) Calculer $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{ED}$ et interpréter le résultat.

42 a et b désignent des nombres réels strictement positifs. ABCD est un rectangle tel que :

$$AB=a \quad\text{et}\quad BC=b.$$

On considère le repère orthonormé $\left(A\,;\frac{1}{a}\overrightarrow{AB},\frac{1}{b}\overrightarrow{AD}\right)$.
Montrer que $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}=a^2-b^2$.

Produit scalaire et normes

→ Cours 3. B et C

Questions flash

43 Yasmine affirme : « Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2+\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=2(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2)$. »
Que peut-on en penser ?

44 Yohann affirme : « Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=2\vec{u}\cdot\vec{v}$. »
Que peut-on en penser ?

45 Rym affirme : « Pour un triangle ABC, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(AB^2+AC^2-BC^2)$. »
A-t-elle raison ?

46 On sait que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2$.
Quelle propriété connue retrouve-t-on ainsi pour un triangle ABC ?

47 ABC est un triangle tel que :

$$AB=3,\ BC=5 \text{ et } AC=6.$$

Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

48 $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs tels que :

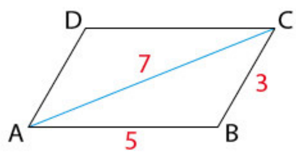
$$\|\vec{u}\|=3,\ \|\vec{v}\|=5 \quad\text{et}\quad \|\vec{v}+\vec{u}\|=4.$$

Calculer le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

49 ABCD est un parallélogramme tel que : $AB=5$, $BC=3$ et $AC=7$.
Calculer :

a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$



50 Algo ABC est un triangle tel que $BC=a$, $AC=b$ et $AB=c$ avec a, b, c strictement positifs.
Cette fonction écrite en langage Python renvoie un produit scalaire de vecteurs de cette figure. Lesquels ?

```
def P(a,b,c):
    p=(1/2)*(a**2+b**2-c**2)
    return p
```

51 Clémence peut-elle construire un triangle EFG tel que $EF=2$, $EG=5$ et $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EG}=12$?

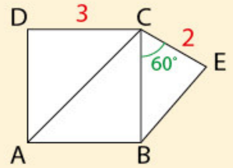
Différentes expressions du produit scalaire

→ Cours 1 et 2 et 3

Questions flash

52 ABCD est un carré de côté 3 et BEC est un triangle tel que $CE = 2$ et $\widehat{BCE} = 60°$.

Calculer mentalement :



a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

b) $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CE}$

c) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$

53 ABCD est un parallélogramme.

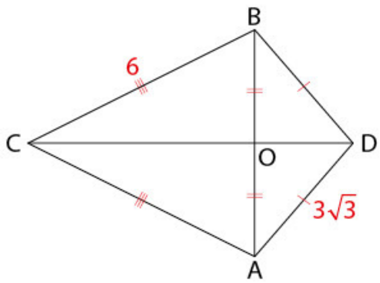
Est-il exact que $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB} = -AD^2$?

54 Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(1\,;2)$, $B(2\,;3)$ et $C(4\,;1)$.

a) Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

b) Calculer $\cos(\widehat{BAC})$. En déduire la mesure, en degré, de l'angle $\widehat{BAC}$. *Arrondir à l'unité.*

55 ABC est un triangle équilatéral de côté 6, ABD est un triangle isocèle en D tel que $AD = 3\sqrt{3}$ et O est le milieu du segment $[AB]$.



Choisir la méthode la plus adéquate pour calculer chaque produit scalaire.

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ **b)** $\overrightarrow{CO} \cdot \overrightarrow{BD}$ **c)** $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BD}$ **d)** $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BD}$

56 ABCD est un parallélogramme tel que :

$$AB = 4,\ AD = 2 \text{ et } \widehat{BAD} = 60°.$$

a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.

b) En déduire $\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\|^2$.

c) Déterminer la longueur AC, puis la longueur BD.

57 ABCD est un rectangle tel que $AB = 5$ cm et $AD = 2$ cm. H est le projeté orthogonal de B sur la droite (AC).

a) Construire une figure.

b) Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

c) En déduire la distance AH en cm. *Arrondir au dixième.*

Tester l'orthogonalité

→ Cours 1. c

Questions flash

58 Dans un repère orthonormé, on donne les vecteurs $\vec{u}\left(\sqrt{2}-1\,;4+\sqrt{5}\right)$ et $\vec{v}\left(\sqrt{2}+1\,;4-\sqrt{5}\right)$.
Déterminer mentalement s'ils sont orthogonaux.

59 Dans chaque cas, dire si l'affirmation est vraie.

a) A est un point d'un demi-cercle de diamètre $[BC]$.
Léa affirme : « $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$. »

b) C et D sont deux points de la médiatrice d'un segment $[AB]$. Rachid affirme : « $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$. »

60 Représenter deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que :

$$\|\vec{u} - \vec{v}\| = \|\vec{u} + \vec{v}\|$$

61 Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(4\,;0)$, $B(-2\,;1)$ et $C(5\,;6)$.

a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

b) Que peut-on en déduire pour le triangle ABC ?

62 Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(2\,;3)$, $B(5\,;1)$, $C(1\,;1)$ et $D(-3\,;-5)$.
Les droites (AB) et (CD) sont-elles perpendiculaires ?

63 **Algo** Voici un programme en langage Python, qui affiche si deux vecteurs $\vec{w}(x,y)$ et $\vec{t}(u,v)$ donnés dans un repère orthonormé sont orthogonaux ou non.

a) Que doit-on écrire aux lignes 5, 6 et 8 ?

```
1 x=float(input("x="))
2 y=float(input("y="))
3 u=float(input("u="))
4 v=float(input("v="))
5 if            :
6     print("              ")
7 else:
8     print("              ")
```

b) Saisir et tester ce programme.

64 Existe-t-il un nombre réel x tel que, dans un repère orthonormé, les vecteurs $\vec{u}(x+3\,;x+6)$ et $\vec{v}(-7-x\,;x+9)$ sont orthogonaux ?

65 ABCD est un rectangle tel que $AB = \sqrt{2}$ et $AD = 1$, E est le milieu du côté $[AB]$.
Les droites (ED) et (AC) sont-elles perpendiculaires ?

QCM interactifs

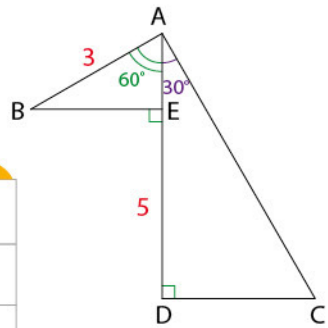
Pour se tester

66 Dans chaque cas, donner la seule réponse exacte sans justifier.

		A	B	C	D
1	ABC est un triangle équilatéral de côté 4. Alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ est égal à …	8	16	-16	0
2	ABCD est un parallélogramme tel que $AB = 6$ et $AD = 3$. Alors …	$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 36$	$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 18$	$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -36$	$\lVert\overrightarrow{AB}\rVert = \lVert\overrightarrow{BC}\rVert$
3	Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(-5\,;-1)$, $B(-3\,;1)$ et $C(2\,;-3)$. Alors …	$\lVert\overrightarrow{AB}\rVert = 4$	$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 10$	$\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux	$\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = -43$
4	$AB = 4$, $AC = 5$ et $\cos(\widehat{BAC}) = -0{,}5$. Alors …	$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} > 0$	$\lVert\overrightarrow{BC}\rVert^2 = 61$	$\lVert\overrightarrow{BC}\rVert = \sqrt{31}$	$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires
5	ABC est un triangle isocèle en C tel que $CA = 8$ et $AB = 6$. Alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ est égal à …	48	24	0	18

67 Dans chaque cas, donner la (ou les) réponse(s) exacte(s) sans justifier.

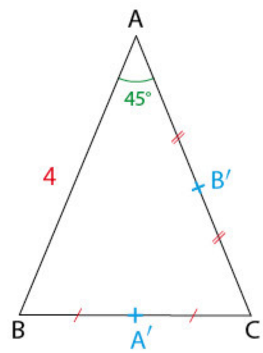
Sur la figure ci-contre, $AB = 3$, $AD = 5$, A, E et D sont alignés, $\widehat{BAE} = 60°$, $\widehat{DAC} = 30°$ et $\widehat{AEB} = \widehat{CDA} = 90°$.



		A	B	C	D
1	$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ est …	négatif	positif	égal à $AE \times AD$	égal à 7,5
2	$\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AD}$ est égal à …	$CD \times AD$	0	$\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AE}$	$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
3	$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BE}$ est égal à …	4,5	$\dfrac{27}{4}$	$-\dfrac{27}{4}$	$-BE^2$
4	$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC}$ est égal à …	$\dfrac{5\sqrt{3}}{2}AC$	25	-25	AD^2

68 Dans chaque cas, dire si l'affirmation est vraie ou fausse en justifiant.

ABC est un triangle isocèle en A tel que $AB = 4$ et $\widehat{BAC} = 45°$.
A' et B' sont les milieux respectifs des côtés $[BC]$ et $[AC]$.



Affirmations :

1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -8\sqrt{2}$
2. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB'} = 4\sqrt{2}$
3. $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = 4 \times CB \times \cos(67{,}5°)$
4. $BC^2 = 32 - 16\sqrt{2}$
5. $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = CB \times CA'$

Vérifiez vos réponses : p. 340

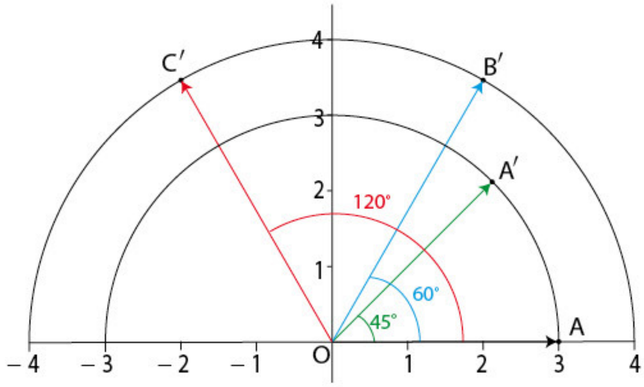
69 Calculer un produit scalaire à l'aide d'un cosinus

Sur la figure ci-contre, les points A, A', B', C' appartiennent à des demi-cercles de centre O.
Calculer le produit scalaire :

a) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA'}$ **b)** $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB'}$ **c)** $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC'}$

AIDE

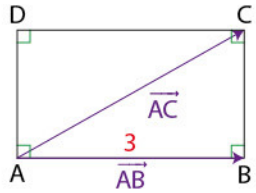
Pour calculer le produit scalaire $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA'}$ avec la formule du cosinus, il faut s'assurer que l'on connaît les longueurs OA et OA′ ainsi qu'une mesure de l'angle $\widehat{AOA'}$.



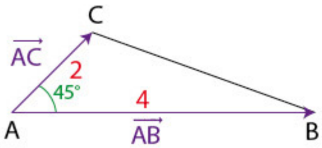
70 Choisir l'expression la mieux adaptée

Dans chaque cas, calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ en utilisant l'expression qui semble la mieux adaptée aux données.

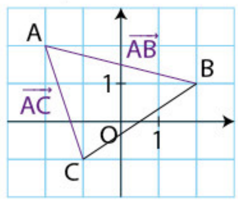
a) ABCD est un rectangle.



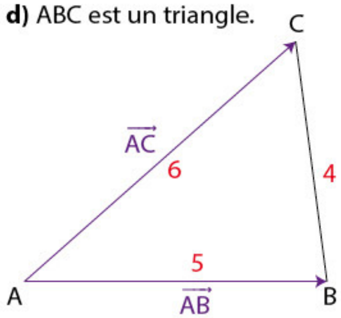
b) ABC est un triangle.



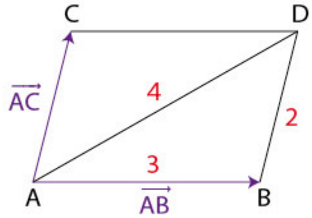
c) ABC est un triangle dans un repère orthonormé.



d) ABC est un triangle.



e) ABDC est un parallélogramme.



AIDE

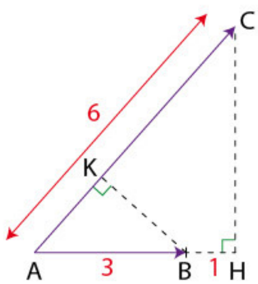
Pour calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, on utilise celle des expressions vues en cours qui est la mieux adaptée aux informations données.

71 Calculer un produit scalaire avec une projection orthogonale

Avec les données de la figure :

a) calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ à l'aide d'une projection orthogonale ;

b) en déduire la distance AK.



AIDE

Pour calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ à l'aide d'une projection orthogonale, on projette :
- le point B sur la droite (AC),
ou bien
- le point C sur la droite (AB).

EXERCICE RÉSOLU

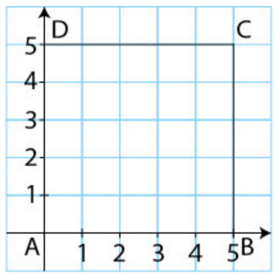
72 Rechercher un ensemble de points

Dans un repère orthonormé, ABCD est un carré tel que :

$A(0\,;0)$, $B(5\,;0)$, $C(5\,;5)$ et $D(0\,;5)$.

On note $\mathscr{E}$ l'ensemble de tous les points $M(x\,;y)$ **à coordonnées entières**, situés à l'intérieur ou sur le bord du carré ABCD, tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} > 0$.

Gabriel souhaite déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ en testant tous les points situés aux nœuds du quadrillage ci-contre.



a) Compléter l'algorithme ci-dessous, reposant sur la méthode de Gabriel, pour déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$.

b) Coder l'algorithme en langage Python.

c) Saisir et exécuter ce programme.

```
Pour x allant de 0 à 5
  Pour y allant de [    ] (1)
    Si [          ] (2)
      Tracer le point de coordonnées (x ; y)
    Fin Si
  Fin Pour
Fin Pour
```

Solution

a) **(1)** 0 à 5

(2) $-x(5-x)+y^2>0$

Pour compléter **(2)**, on utilise l'expression analytique de $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$.

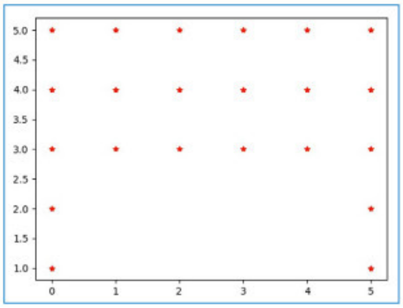
b) et c)

```python
from pylab import *

for x in range(0,6):
    for y in range(0,6):
        if -x*(5-x)+y**2>0:
            plot(x,y,"r*")
show()
```

Pour tracer des points, on commence par importer le module **pylab**.

L'ensemble $\mathscr{E}$ est constitué des 22 points rouges ci-contre puisque les deux « boucles Pour » imbriquées l'une dans l'autre permettent de tester tous les points du quadrillage.



L'instruction plot(x, y, "r*") permet de tracer en rouge le point de coordonnées $(x\,;y)$ et de le marquer avec *.
L'instruction show permet d'afficher l'ensemble des points dans un repère.

À VOTRE TOUR

73 Dans un repère orthonormé, ABCD est un carré tel que $A(0\,;0)$, $B(5\,;0)$, $C(5\,;5)$ et $D(0\,;5)$.
Écrire un programme en langage Python qui affiche l'ensemble des points M **à coordonnées entières**, situés à l'intérieur ou sur le bord du carré ABCD, tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=10$.

74 Dans un repère orthonormé, ABCD est un carré tel que $A(0\,;0)$, $B(5\,;0)$, $C(5\,;5)$ et $D(0\,;5)$.
Écrire un programme en langage Python qui affiche l'ensemble des points M **à coordonnées entières**, situés à l'intérieur ou sur le bord du carré ABCD, tels que $MA^2-MB^2=-15$.

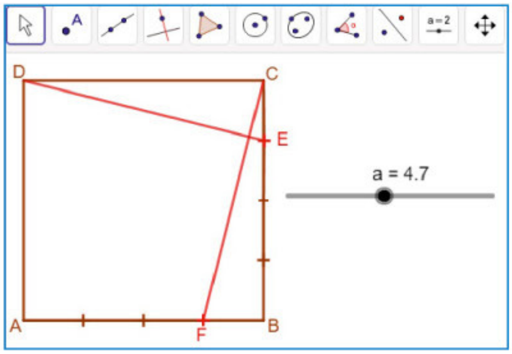
EXERCICE RÉSOLU

75 Conjecturer puis prouver une orthogonalité

ABCD est un carré de côté a (avec $a > 0$).
E et F sont des points définis par :

$$\overrightarrow{CE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA}.$$

a) Réaliser la figure à l'aide d'un logiciel de géométrie en créant un curseur a allant de 0 à 10 avec un incrément de 0,1.
Faire varier le curseur a, puis formuler une conjecture sur les droites (DE) et (CF).
b) Démontrer cette conjecture.



Solution

a) On conjecture que lorsque a varie, les droites (DE) et (CF) sont perpendiculaires.

b) $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{CF} = (\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CE})\cdot(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BF})$

$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{BF}$

Les vecteurs $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{CB}$, ainsi que les vecteurs $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{BF}$ sont orthogonaux donc $\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{BF} = 0$.

Ainsi, $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{CB}$.

De plus, $\overrightarrow{BF} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$,

donc $\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{BF} = -\frac{1}{4}DC^2 = -\frac{1}{4}a^2$,

et $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CB}$ donc $\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{CB} = \frac{1}{4}CB^2 = \frac{1}{4}a^2$.

Ainsi, $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{CF} = -\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{4}a^2 = 0$, donc les vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{CF}$ sont orthogonaux.

Pour tout nombre réel a strictement positif, les droites (DE) et (CF) sont perpendiculaires.

Pour démontrer que les droites (DE) et (CF) sont perpendiculaires, on utilise le produit scalaire et on démontre que $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{CF} = 0$.
Pour cela, on décompose $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{CF}$ à l'aide de la relation de Chasles en utilisant les points C et B qui sont les sommets d'angles droits.

Pour calculer le produit scalaire $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{CF}$, on aurait pu aussi utiliser son expression analytique dans le repère orthonormé $\left(A\,;\frac{1}{a}\overrightarrow{AB},\frac{1}{a}\overrightarrow{AD}\right)$.

À VOTRE TOUR

76 ABCD est un carré de côté a (avec $a > 0$).
E et F sont des points définis par :

$$\overrightarrow{CE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{DF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}.$$

a) Réaliser la figure à l'aide d'un logiciel de géométrie en créant un curseur a allant de 0 à 10 avec un incrément de 0,1. Faire varier le curseur a, puis émettre une conjecture sur les droites (BE) et (CF).
b) Démontrer cette conjecture.

77 ABCD est un carré de côté a (avec $a > 0$).
E, F et H sont les milieux respectifs des segments [AB], [AD] et [ED].
a) Réaliser une figure à l'aide d'un logiciel de géométrie en créant un curseur a prenant des valeurs positives.
Émettre une conjecture sur les droites (AH) et (FB).
b) Démontrer cette conjecture.

Démontrer et raisonner

78 Comment démontrer une équivalence ?

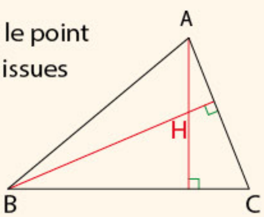
Méthode
Pour démontrer la proposition « P si, et seulement si, Q », on peut :
– soit raisonner par équivalences successives ;
– soit démontrer que « Si P, alors Q » et ensuite que « Si Q, alors P ».

a) Démontrer que pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$ si, et seulement si, les vecteurs $\vec{u}+\vec{v}$ et $\vec{u}-\vec{v}$ sont orthogonaux.
b) Le plan est muni d'un repère orthonormé.
x, y, a et b désignent des nombres réels.
Démontrer que le vecteur $\vec{v}(x\,;y)$ est orthogonal au vecteur non nul $\vec{u}(a\,;b)$ si, et seulement si, il existe un nombre réel k, tel que $x = kb$ et $y = -ka$.

79 Démontrer une égalité

Méthode
Pour calculer une longueur AB, il est parfois utile de considérer son carré et d'utiliser le fait que $AB^2 = \overrightarrow{AB}^2$.
L'avantage est qu'alors, on a la possibilité d'utiliser la relation de Chasles pour transformer l'écriture du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

ABC est un triangle et H est le point d'intersection des hauteurs issues respectivement de A et B.
Démontrer que :
$AB^2 - AC^2 = HB^2 - HC^2$

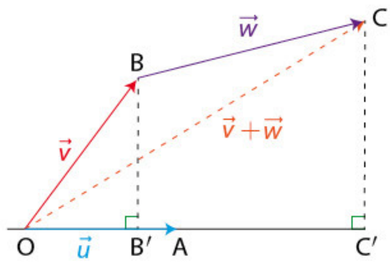


80 Reconnaître une configuration

ABC est un triangle rectangle en A.
A' est le milieu du côté $[BC]$ et H est le projeté orthogonal du point A sur le côté $[BC]$.
I et J sont des points respectivement situés sur les côtés $[AB]$ et $[AC]$ tels que AIHJ soit un rectangle.
1. Réaliser une figure et montrer que :
a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HA}$
b) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AH}$
2. Démontrer que les droites (AA') et (IJ) sont perpendiculaires.

81 Démontrer une propriété du cours

Prérequis : On suppose connue la définition du produit scalaire à l'aide d'un projeté orthogonal.
On se propose de démontrer que pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$:
$$\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$$
1. Justifier que l'égalité est vraie si au moins l'un des trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ ou $\vec{w}$ est nul.
2. On suppose que les trois vecteurs sont non nuls et on note $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{BC}$, ainsi que B' et C' les projetés orthogonaux respectifs de B et C sur la droite (OA).



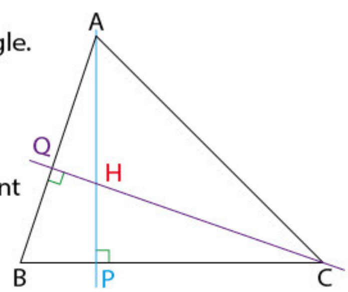
a) Justifier que $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$.
b) En déduire que $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = OA \times OC'$.
c) Justifier que $\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w} = OA \times OB' + OA \times B'C'$.
d) Conclure.
La démonstration est analogue pour B', A et C' alignés dans des ordres différents.

Étudier des situations d'orthogonalité

82 Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(-4\,;-1)$, $B(-1\,;2)$ et $C(3\,;-1)$.
Le triangle ABC est-il rectangle ?

83 Dans un repère orthonormé, on donne deux points $A(2\,;4)$ et $B(-2\,;2)$ ainsi que la droite d d'équation $y = x$.
Déterminer les coordonnées d'un point C appartenant à d, tel que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$.

84 ABC est un triangle.
P et Q sont les pieds des hauteurs issues respectivement de A et de C ; elles se coupent en H.
Démontrer que :
$\overrightarrow{HP}\cdot\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{HQ}\cdot\overrightarrow{HC}$



85 ABCD est un parallélogramme.

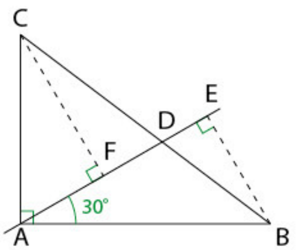
a) Justifier que $AB^2 - AD^2 = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB}$.

b) Que peut-on dire d'un parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires ?

86 ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB = 4$ et $AC = 3$.

D est le point du côté $[BC]$ tel que $\widehat{BAD} = 30°$.

E et F sont les projetés orthogonaux respectifs de B et C sur la droite (AD).



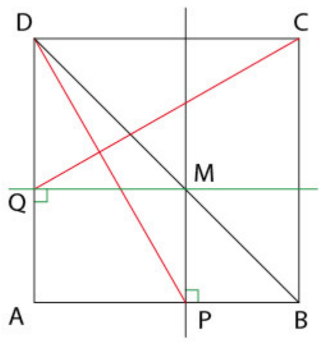
Calculer :

a) $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ **b)** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE}$ **c)** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF}$

d) $\overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE})$ **e)** $\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AF})$ **f)** $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{FE}$

87 ABCD est un carré de côté b (avec $b > 0$). M est un point quelconque du segment $[BD]$ distinct de B et de D.

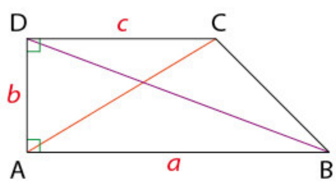
P et Q sont les projetés orthogonaux de M respectivement sur (AB) et (AD).



a) Démontrer que les droites (CQ) et (DP) sont perpendiculaires.

b) Démontrer que $CQ = DP$.

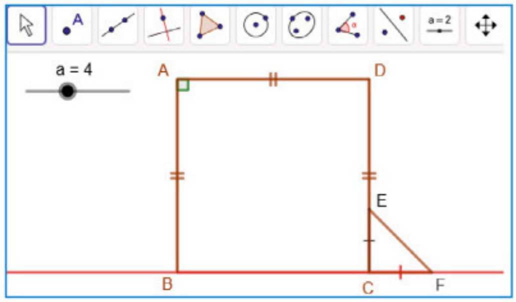
88 ABCD est un trapèze rectangle en A tel que $AB = a$, $AD = b$ et $DC = c$, où a, b et c sont des nombres réels strictement positifs.



a) Exprimer le produit scalaire $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB}$ en fonction de a, b et c.

b) Démontrer que les droites (DB) et (AC) sont perpendiculaires si, et seulement si, $a \times c = b^2$.

89 **Tice** ABCD est un carré de côté a (avec $a > 0$).
E est un point mobile du côté $[CD]$, distinct de C.
F est un point extérieur au carré, situé sur la droite (BC), tel que $CE = CF$.



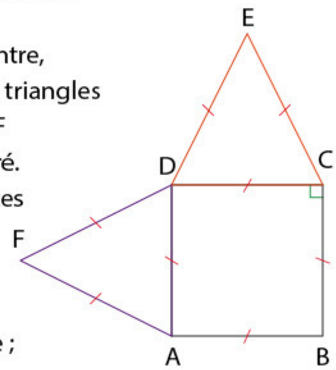
1. a) Réaliser une figure à l'aide d'un logiciel de géométrie en créant un curseur a allant de 0 à 10 avec un incrément de 0,1.
Créer les droites (BE) et (DF).

b) Faire varier le curseur a et déplacer le point E, puis émettre une conjecture sur les droites (BE) et (DF).

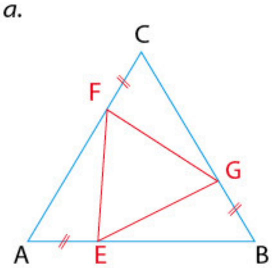
2. Démontrer cette conjecture.

90 Sur la figure ci-contre, ABCD est un carré et les triangles équilatéraux DCE et ADF sont à l'extérieur du carré.
Démontrer que les droites (BD) et (EF) sont perpendiculaires de **deux façons** :

- avec le produit scalaire ;
- sans le produit scalaire.



91 ABC est un triangle équilatéral de côté a (avec $a > 0$). E, F et G sont des points des segments respectifs $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$ tels que $AE = CF = BG = \ell$ avec $0 < \ell < a$.

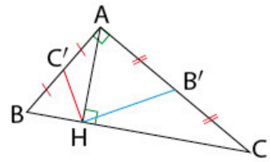


a) Exprimer $\overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{CG}$ en fonction de a et ℓ.

b) En déduire que $\overrightarrow{FG} \cdot \overrightarrow{FC} = \frac{3}{2}\ell^2 - \frac{1}{2}a \times \ell$.

c) Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur a et ℓ pour que le triangle CFG soit rectangle en F.

92 ABC est un triangle rectangle en A.
B' et C' sont les milieux des côtés $[AC]$ et $[AB]$.
H est le projeté orthogonal de A sur la droite (BC).



a) Justifier que $AH^2 = BH \times CH$.
b) En déduire que les droites (HB') et (HC') sont perpendiculaires.

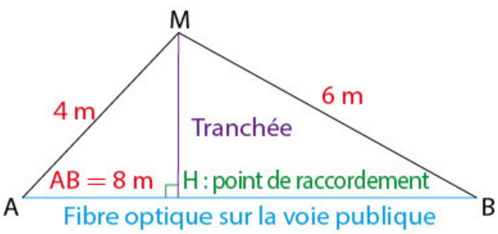
Calculer des grandeurs

93 ABCD est un rectangle tel que $AB = a$ et $AD = b$ avec a et b réels strictement positifs.
I est le milieu du côté $[DC]$ et E est le point d'intersection des segments $[DB]$ et $[AI]$.
a) Justifier que $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{DB} = \dfrac{a^2}{2} - b^2$.
b) Exprimer AI et DB en fonction de a et b.
c) En déduire une expression de $\cos(\widehat{BEI})$ en fonction de a et b.
d) Pour $a = 4$ et $b = 4$, déterminer la mesure, en degré, de l'angle $\widehat{BEI}$. *Arrondir à l'unité.*

94 **Algo** Écrire une fonction en langage Python, qui renvoie pour résultat la valeur de $\cos(\widehat{BAC})$ et dont les paramètres sont les coordonnées de points distincts A, B, C, dans un repère orthonormé.

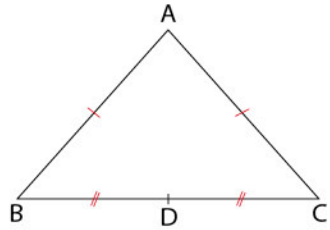
95 **a)** Dans un repère orthonormé, placer les points $A(2\,;4)$, $B(5\,;2)$, $C(1\,;1)$ et construire le point H, pied de la hauteur issue de A.
b) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$.
c) Calculer l'aire du triangle ABC.

96 Un technicien chargé de raccorder une maison M à la fibre optique, a réalisé le schéma ci-dessous.



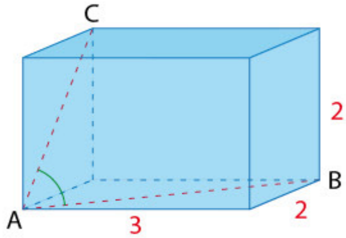
Déterminer la position du point H.

97 ABC est un triangle isocèle en A et D est le milieu du segment $[BC]$.



a) Démontrer que :
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AD^2 - DC^2$
b) En déduire que :
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB^2 - 2DC^2$
c) On donne :
$AB = 3$ et $BC = 4$.
En déduire la mesure, en degré, de l'angle $\widehat{BAC}$.
Arrondir à l'unité.

98 Voici un parallélépipède rectangle.
Déterminer la mesure en degré de l'angle $\widehat{BAC}$.
Arrondir à l'unité.



S'entraîner à la logique

→ p. 336

99 **Propositions vraies ou fausses**
Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse. Justifier.
Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ non nuls :
a) si $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$, alors $\vec{v} = \vec{w}$;
b) si $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$, alors les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux ;
c) $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leqslant \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$;
d) $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leqslant \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.

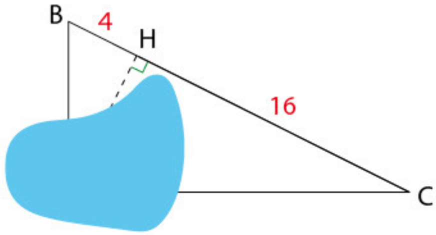
100 **Équivalence ou non ?**
Pour tous points A, B et C distincts deux à deux, on note P et Q les propositions :
P : « ABC est un triangle isocèle en A. »
Q : « $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \dfrac{BC^2}{2}$. »
Les propositions P et Q sont-elles équivalentes ?

101 **Implication, équivalence**
$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont trois vecteurs du plan.
Dans chaque cas, dire lesquelles des propositions :
• Si P, alors Q • Si Q, alors P • P est équivalent à Q
sont vraies. Justifier.
a) **P** : $\vec{u} = 3\vec{v}$ **Q** : $\|\vec{u}\| = 3\|\vec{v}\|$
b) **P** : $\vec{u} + \vec{v} = \vec{0}$ **Q** : $\vec{u}^{\,2} - \vec{v}^{\,2} = 0$

102 Imaginer une stratégie

Chercher Raisonner

Andréa doit calculer les longueurs des trois côtés d'un triangle ABC rectangle en A où H est le pied de la hauteur issue de A. On sait que $BH = 4$ et $CH = 16$.
Hélas, une tache d'encre l'en empêche.



Comment peut-elle faire ?

103 Tice Conjecturer puis démontrer

Représenter Calculer

ABCD est un carré de côté a (avec $a > 0$) et I est le milieu du segment $[AD]$.

1. a) Réaliser une figure à l'aide d'un logiciel de géométrie en créant un curseur a et en affichant la mesure, en degré, de l'angle $\widehat{ICA}$.

b) Faire varier le curseur a puis formuler une conjecture sur la mesure de l'angle $\widehat{ICA}$.

2. a) Montrer que $\overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{CA} = \dfrac{3}{2}a^2$.

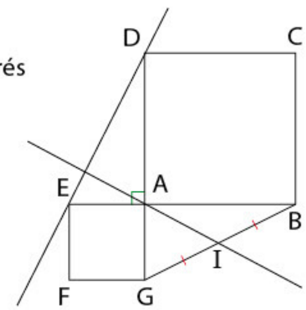
b) Justifier que $\overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{CA} = \dfrac{\sqrt{10}}{2}a^2 \times \cos(\widehat{ICA})$.

c) Démontrer la conjecture émise à la question **1**.

104 Démontrer une orthogonalité

Chercher Raisonner

ABCD et AEFG sont les carrés tracés ci-contre tels que $\widehat{EAD} = 90°$.
I est le milieu du segment $[BG]$.
Démontrer que les droites (IA) et (ED) sont perpendiculaires.



105 Établir une identité

Raisonner Calculer

Démontrer que pour tout parallélogramme ABCD, la somme des carrés des longueurs des diagonales est égale à la somme des carrés des longueurs des quatre côtés.

106 Histoire des maths Découvrir la droite d'Euler

Raisonner Calculer

ABC est un triangle non équilatéral et non aplati.
A', B' et C' sont les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.
O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, c'est-à-dire le point de concours des trois médiatrices du triangle.

1. Réaliser une figure que l'on complétera au fur et à mesure.

2. H est le point défini par $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

a) Démontrer que $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA'}$.

b) En déduire que $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OA'}$.

c) Justifier que les droites (AH) et (BC) sont perpendiculaires.

d) Montrer que la droite (BH) est perpendiculaire à la droite (AC).

e) En déduire que les trois hauteurs du triangle ABC concourent en H.

3. G est le point défini par $\overrightarrow{AG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$.

a) Démontrer que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

b) En déduire que $\overrightarrow{BG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{BB'}$.

4. a) Démontrer que $3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OH}$.

b) Que peut-on en déduire pour les points G, H et O ?

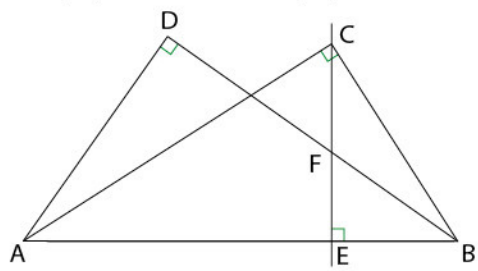
Dans tout triangle non équilatéral et non aplati, les points G, H et O sont alignés sur une droite appelée droite d'Euler, en l'honneur du mathématicien suisse Leonhard Euler qui l'a découverte en 1763.

107 Chercher une piste

? Problème ouvert

Chercher Raisonner

ABC et ABD sont des triangles rectangles respectivement en C et D tels que $BC = 4$ et $BD = 6$.
Dans le triangle ABC, E est le pied de la hauteur issue de C.
La droite (CE) coupe la droite (BD) en un point F.

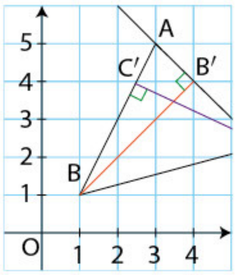


Comment peut-on calculer la longueur BF ?

108 Prendre des initiatives

Raisonner | Calculer

Louise a mal dimensionné sa capture d'image d'un triangle ABC tracé dans un repère orthonormé avec A(3 ; 5), B(1 ; 1).



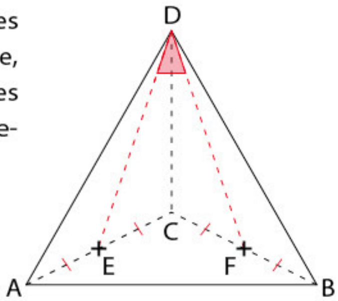
(BB′) et (CC′) sont deux hauteurs de ce triangle avec B′(4 ; 4) et C′(2,5 ; 4).
Retrouver les coordonnées du point C par des calculs.

109 Comprendre une situation

Narration de recherche

Chercher | Raisonner | Communiquer

Rédiger les différentes étapes de la recherche, sans omettre les fausses pistes et les changements de méthode.

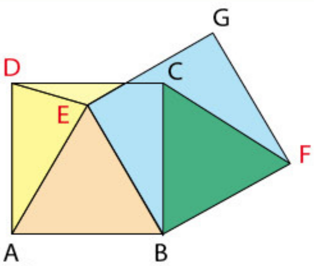


Problème ABCD est un tétraèdre régulier de côté a (avec $a > 0$) ; ainsi, toutes ses faces sont des triangles équilatéraux de côté a. E et F sont les milieux de $[AC]$ et $[BC]$. Démontrer que la mesure de l'angle $\widehat{EDF}$ est indépendante de a.

110 Montrer un alignement

Chercher | Raisonner

Sur cette figure, ABCD est un carré de côté 1, ABE est un triangle équilatéral et BFGE est un carré.



a) Montrer que $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BE} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et en déduire $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BE}$.

b) Calculer $\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EB}$.

c) Démontrer que le triangle BFC est équilatéral.

d) En déduire $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BF}$ puis $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{EG}$.

e) Justifier que $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{EG} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

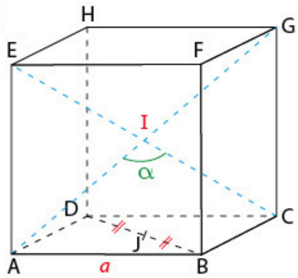
f) En décomposant les vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{BG}$ à l'aide de la relation de Chasles, calculer $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{BG}$.

g) En déduire l'alignement des points D, E et F.

111 Prove the independence of an angle

Chercher | Communiquer

ABCDEFGH is a cube shown on the right, such $AB = a$ (with $a > 0$).
I is the intersection point of (CE) and (AG) ; J is the midpoint of [BD].
Prove that the measure of the angle α is independent of a.

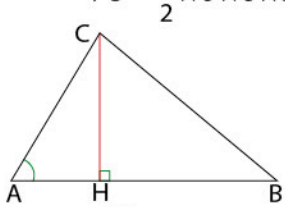


112 Découvrir la loi des sinus

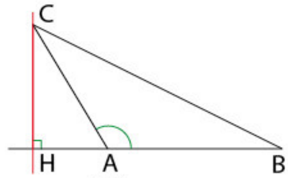
Raisonner | Calculer

ABC est un triangle, H est le pied de la hauteur issue de C. On pose $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$ et on note S l'aire du triangle ABC.

1. a) Démontrer que, dans les deux cas de figure ci-dessous, $S = \dfrac{1}{2} \times b \times c \times \sin(\widehat{BAC})$.



$\widehat{BAC}$ est aigu



$\widehat{BAC}$ est obtus

b) Démontrer de même que :

$$S = \frac{1}{2} \times a \times c \times \sin(\widehat{ABC})$$

c) Donner une troisième écriture de S analogue aux deux précédentes.

2. Déduire des formules précédentes que :

$$\frac{\sin(\widehat{BAC})}{a} = \frac{\sin(\widehat{CBA})}{b} = \frac{\sin(\widehat{ACB})}{c}$$

Cette formule est appelée la **loi des sinus** dans un triangle.

3. Application : ABC est un triangle tel que :

$$AB = 5,\ \widehat{BAC} = 75° \text{ et } \widehat{ABC} = 50°.$$

Calculer AC et BC. *Arrondir au dixième.*

113 Découvrir un point de concours

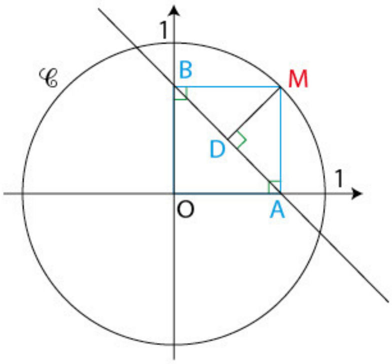
Chercher | Raisonner

A′, B′ et C′ sont les projetés orthogonaux respectifs des sommets A, B et C d'un triangle sur une droite d.
On note d_1, d_2 et d_3 les droites respectivement perpendiculaires à (BC), (AC) et (AB), passant respectivement par A′, B′ et C′.
Démontrer que les droites d_1, d_2 et d_3 concourent en un même point.

114 Algo Relier courbe et produit scalaire

Chercher Calculer

Dans un repère orthonormé d'origine O, $\mathscr{C}$ est le cercle de centre O et de rayon 1.
M est un point mobile de $\mathscr{C}$.
A est le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses et B est celui de M sur l'axe des ordonnées.
D est le projeté orthogonal de M sur la droite (AB).



1. a) Montrer que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = OB^2$.
b) En déduire que $AD = OB^2$ et $\overrightarrow{AD} = OB^2 \times \overrightarrow{AB}$.
2. On note $(x\,;y)$ les coordonnées de M, (avec $-1 \leqslant x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant y \leqslant 1$).
a) Démontrer que celles de D sont $(x^3\,;y^3)$.
b) En déduire que les coordonnées de D peuvent s'écrire :
$$\left(x^3\,; (1-x^2)\sqrt{1-x^2}\right) \quad \text{ou} \quad \left(x^3\,; -(1-x^2)\sqrt{1-x^2}\right).$$
3. Écrire un programme en langage Python, qui trace les points D pour x allant de -1 à 1 avec un pas de 0,01.

Les points obtenus sont situés sur une courbe appelée **astroïde**.

115 Déterminer un ensemble

Chercher Représenter

ABC est un triangle.
L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ est une droite remarquable du triangle ABC.
Mais quel est l'ensemble des points M tels que :
$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\left(AC^2 - AB^2\right)\ ?$$

Des Défis

116 Rechercher un ensemble de points

C est un point d'un segment $[AB]$ distinct de A et B.
Déterminer l'ensemble des points M du plan qui vérifient $(\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}) \times (\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC}) < 0$.

117 Histoire des maths Hommage à Euler

Léonhard Euler (1707-1783) énonça : « Dans un quadrilatère, la somme des carrés des côtés est supérieure ou égale à la somme des carrés des diagonales. » Démontrer cette propriété.

118 Trouver l'astuce !

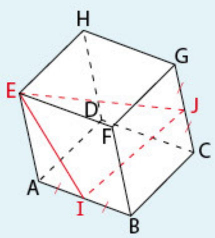
Dans un repère orthonormé, on donne les vecteurs :
$\vec{u}(46294416\,;92588832)$
et $\vec{v}(-79035264\,;39517632)$.
Sans calculatrice, prouver que ces deux vecteurs sont orthogonaux.

OBJECTIF BAC

119 Étudier un cube ⏱ 45 min

D'après Bac 2005, Amérique du Sud

On donne le cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1 et les milieux I et J des arêtes $[AB]$ et $[CG]$.



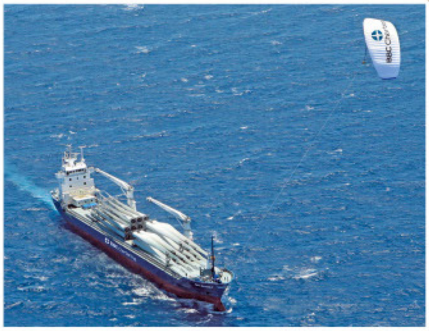
1. Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse. Justifier.
a) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{2}$ **b)** $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{IB}$
c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IC}$ **d)** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IJ} = AB \times IC \times \cos(60°)$
2. a) Montrer que $\overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{GC} = 0$.
b) En déduire IJ.
c) Déterminer la mesure en degré de l'angle $\widehat{IEJ}$. *Arrondir à l'unité.*

120 Calculer l'intensité d'une force

La situation problème

Pour réduire la consommation de carburant d'un cargo, un gigantesque cerf-volant est attaché à sa proue lorsque le vent souffle dans le sens de déplacement du bateau.

Utiliser les différentes informations pour calculer l'intensité de la force résultant de la force motrice (issue des moteurs) et de la force de traction du cerf-volant.



DOC 1 Force résultante

La force résultante de deux forces $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$ s'exerçant en un point A est le vecteur $\vec{F}$, défini par $\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$.

DOC 2 Longueur de câble

Le câble reliant le cerf-volant au cargo est à 45° de l'horizontale.

DOC 3 Intensité des forces

L'intensité d'une force $\vec{F}$ correspond à la norme du vecteur $\vec{F}$: $||\vec{F}||$.
La force motrice s'exerçant à la proue du bateau est considérée comme horizontale et d'intensité 600 000 N (ou 600 kN).
En considérant un vent de force 5, l'intensité de la force de traction du cerf-volant est de 50 000 N (50 kN).

121 Calculer la hauteur d'une tour

La situation problème

- La Jeddah Tower est une gigantesque tour dont la construction a débuté en 2014 à Djeddah (en Arabie Saoudite) et qui devrait atteindre une hauteur de 1 000 m à la fin des travaux prévue en 2020.
- En septembre 2018, un des architectes du projet a annoncé que la construction dépassait déjà 300 m.
- Le chantier étant interdit au public, des journalistes ont décidé d'utiliser un drone placé en vol stationnaire au sommet de l'édifice et pouvant mesurer dans un plan vertical, la distance entre sa position et deux bornes situées au sol.

Utiliser les différentes informations pour permettre aux journalistes de valider ou d'infirmer la déclaration de l'architecte.

DOC 1 Distance entre le drone et les bornes

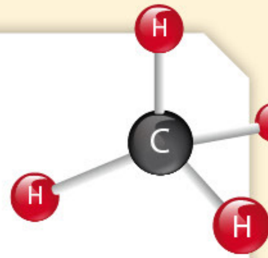
La distance entre le sommet S de la tour et les bornes A et B situées au sol sont $SA = 4{,}07$ hm et $SB = 3{,}84$ hm.

DOC 2 Position des bornes au sol

Les bornes A et B, distantes de 5 hm, sont placées sur un sol parfaitement horizontal et dans l'alignement d'un point situé au pied de la tour.

DOC 3 Forme de la construction

L'architecture de l'édifice ne permet pas une lecture directe de la « hauteur verticale » de la tour depuis le drone.



122 Déterminer la mesure d'un angle dans une molécule

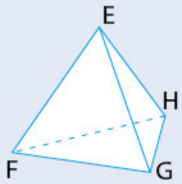
La situation problème

La molécule du gaz méthane CH_4 se compose d'un atome de carbone relié à quatre atomes d'hydrogène, suivant une structure qui peut être modélisée par un tétraèdre régulier dans lequel :
– les sommets sont les atomes d'hydrogène ;
– le centre constitue l'atome de carbone ;
– les segments de même longueur allant du centre au sommet représentent les liaisons chimiques.

Utiliser les différentes informations pour déterminer la mesure, en degré, de l'angle formé par deux liaisons C – H. *Arrondir au dixième.*

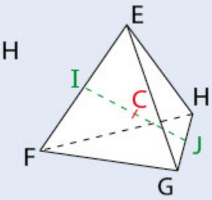
DOC 1 Tétraèdre régulier

Les quatre faces d'un tétraèdre régulier sont toutes des triangles équilatéraux identiques.



DOC 2 Propriétés du centre d'un tétraèdre régulier

• Le centre C d'un tétraèdre régulier EFGH est le milieu du segment [IJ] où I est le milieu de [EF] et J celui de [GH].
• $\widehat{ECF} = \widehat{FCG} = \widehat{GCH} = \widehat{HCE}$



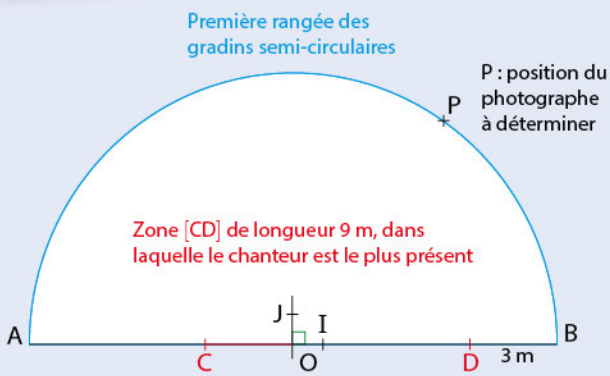
123 Profiter de la meilleure vue

La situation problème

• Le photographe professionnel attitré d'un célèbre chanteur doit assurer la couverture d'un concert dans une salle dont les gradins sont semi-circulaires. Le photographe sera positionné sur la première rangée, sa vision étant juste à la hauteur de la scène.
• Pour des raisons d'éclairage et aussi par habitude, le chanteur se déplace le plus souvent sur une partie de la scène.

Utiliser les différentes informations pour estimer l'endroit qui permettra au photographe d'optimiser son travail.

DOC 1 Schéma d'une partie de la salle



Scène [AB] de longueur 18 m
et de milieu O
(O; I, J) : repère orthonormé avec OI = OJ = 1 m

DOC 2 Meilleur angle de vision

Le photographe doit rechercher la mesure maximum de l'angle de vision de la zone [CD] depuis le point P.

DOC 3 Deux fonctions utiles

• La fonction f définie sur $[-9\,;9]$ par :

$$f(x) = \frac{-3x+63}{\sqrt{6x+90}\sqrt{-12x+117}}$$

admet un minimum, atteint une seule fois, pour $x = \frac{27}{7}$.

• La fonction cosinus est décroissante sur $[0\,;\pi]$.