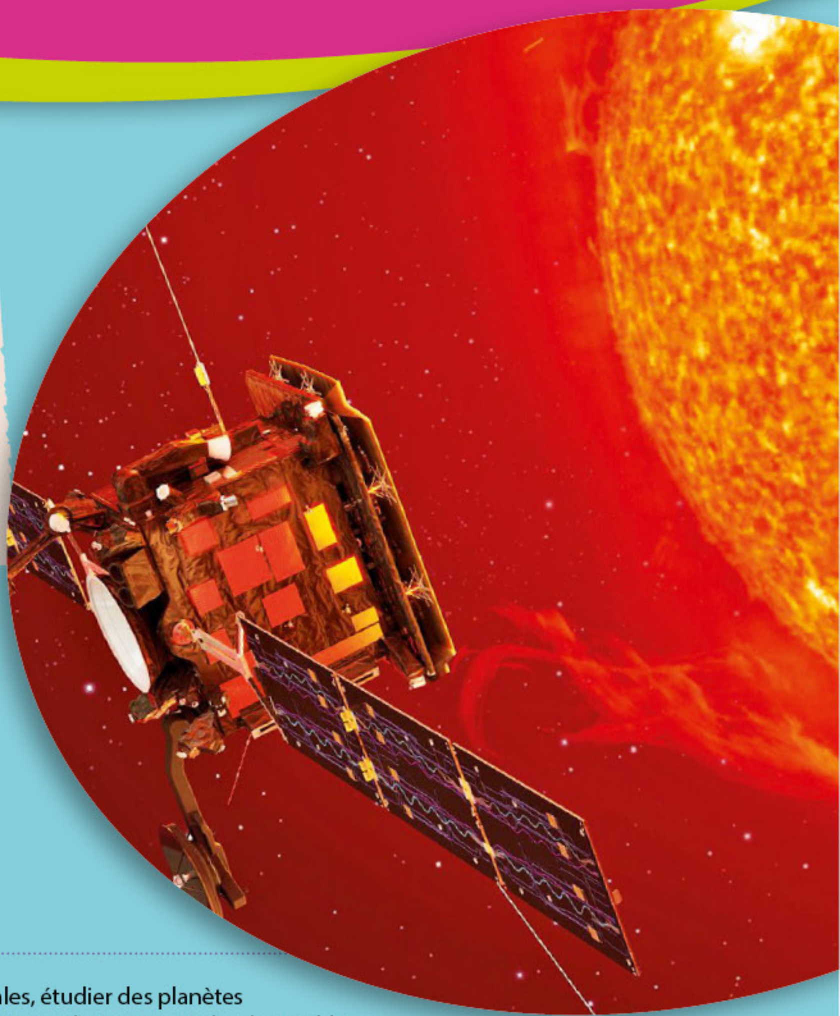
6 Configurations du plan

Avant

▶ Dès le 1er siècle après J.-C., le mathématicien grec Héron d'Alexandrie introduit, dans ses travaux sur l'optique, le principe du plus court chemin pris par un rayon lumineux réfléchi par une surface plane.



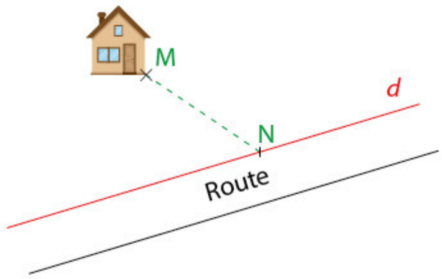
À présent

▶ Pour envoyer des sondes spatiales, étudier des planètes ou des astéroïdes, les astrophysiciens doivent résoudre des problèmes d'optimisation, notamment géométriques. Par exemple, le satellite Solar Orbiter, conçu par l'Agence Spatiale Européenne, sera envoyé en 2020 et commencera ses observations du Soleil en 2023.

Les capacités travaillées dans ce chapitre	Exercices
• Connaître et utiliser les configurations usuelles du plan.	1, 3, 10 à 22
• Connaître et utiliser les propriétés relatives au projeté orthogonal d'un point sur une droite.	2, 4, 23 à 33
• Utiliser la trigonométrie.	5 à 9, 34 à 49
• Calculer des longueurs, des angles, des aires et des volumes.	50 à 54
• Traiter des problèmes d'optimisation.	83 à 86

1 Projeté orthogonal

Une entreprise doit raccorder une nouvelle habitation (représentée par le point M) au réseau de distribution d'eau (représenté par la droite *d*) situé le long d'une route comme sur le schéma ci-dessous.
Afin de réduire les coûts, l'entreprise souhaite minimiser la longueur du tuyau de raccordement (représenté par le segment [MN]).

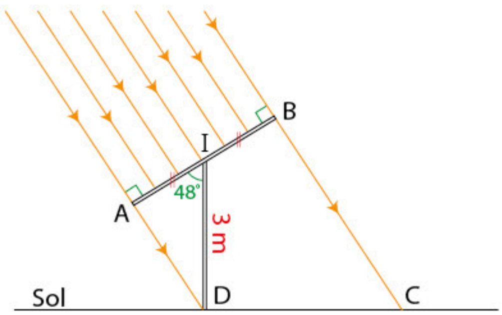


1 Réaliser une figure et conjecturer l'emplacement du point N sur la droite *d* pour que la longueur MN soit minimum.

2 On note H le point d'intersection de la droite *d* et de la perpendiculaire en M à la droite *d*.
a) Justifier que $MN^2 = MH^2 + HN^2$.
b) En déduire que H est le point de la droite *d* pour lequel la longueur du raccordement est minimum.
Le point H est appelé **projeté orthogonal** du point M sur la droite *d*.

2 Trigonométrie dans le triangle rectangle

Pour optimiser la production d'énergie, des panneaux solaires s'orientent automatiquement de sorte que des rayons de soleil (représentés en orange) soient perpendiculaires au panneau.
La situation est schématisée ci-dessous. À ce moment de la journée, l'angle $\widehat{AID}$ mesure 48°, un rayon de soleil passe par le point A et le pied D du panneau et un autre par les points B et C.



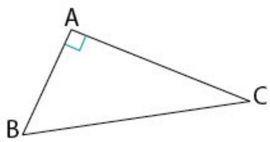
1 Déterminer la nature du quadrilatère ABCD puis celle du triangle IAD où I est le milieu du segment [AB].

2 Un panneau solaire est un rectangle de largeur AB et de longueur 6 m.
a) Calculer la largeur AB, en m, d'un panneau solaire. *Arrondir à l'unité.*
b) Ce champ de soixante panneaux solaires a une production annuelle de 140 kW par m^2 de panneau solaire.
Calculer la production annuelle de ce champ de panneaux solaires.

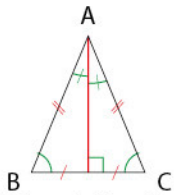
Cours

1 Configurations du plan

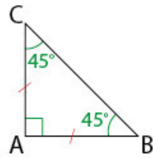
A Configurations usuelles



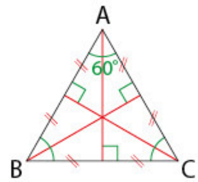
Triangle rectangle



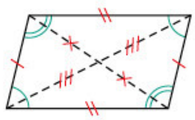
Triangle isocèle

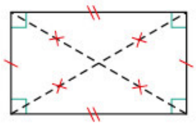


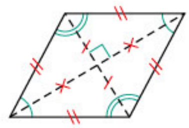
Triangle rectangle isocèle

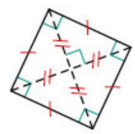


Triangle équilatéral


Parallélogramme


Rectangle

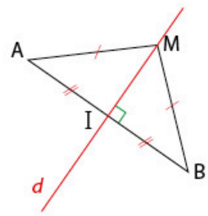

Losange


Carré

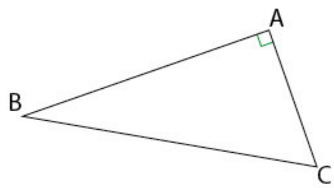
Définition - Propriété (rappels)

- La **médiatrice** d'un segment [AB] est la droite *d* perpendiculaire au segment [AB] en son milieu I.
- La médiatrice *d* d'un segment [AB] est **l'ensemble des points équidistants de A et de B**.

Autrement dit, un point M appartient à *d* si, et seulement si, MA = MB.



B Théorèmes de Pythagore et de Thalès



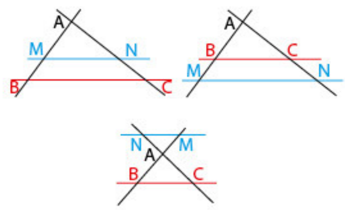
Théorème de Pythagore et sa réciproque

Un triangle ABC est rectangle en A si, et seulement si, $\mathbf{BC^2 = AB^2 + AC^2}$.

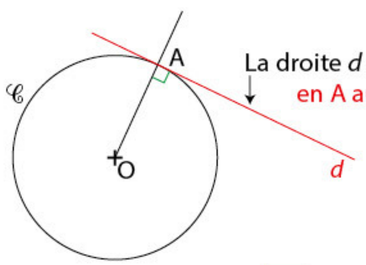
Théorème de Thalès et sa réciproque

(BM) et (CN) sont deux droites sécantes en un point A.

- Si les droites (MN) et (BC) sont parallèles, alors $\mathbf{\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}}$.
- Réciproquement, si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ et si les points A, M, B d'une part, A, N, C d'autre part sont **dans le même ordre**, alors les droites **(MN) et (BC) sont parallèles.**



C Tangente à un cercle



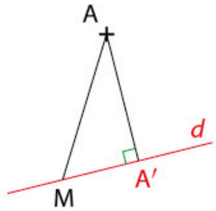
La droite *d* est la tangente en A au cercle 𝒞.

Définition

𝒞 est un cercle de centre O et A un point de ce cercle 𝒞.
La **tangente** au cercle 𝒞 en A est la droite **perpendiculaire** en A à la droite (OA).

Remarque : la tangente en A au cercle 𝒞 coupe ce cercle au seul point A (exercice 72 p. 154).

2 Projeté orthogonal



Définition

Le **projeté orthogonal** d'un point A sur une droite d est le point A' de d tel que les droites d et (AA') sont perpendiculaires.

Propriété - Définition

A' désigne le projeté orthogonal d'un point A sur une droite d.
Pour tout point M de d, distinct de A', $\mathbf{AA' < AM}$.
On dit que AA' est **la distance du point A à la droite *d***.

Démonstration

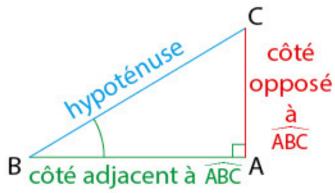
Dans le triangle AMA' rectangle en A', d'après le théorème de Pythagore, $AM^2 = AA'^2 + A'M^2$.
Or $A'M^2 > 0$, donc $AM^2 > AA'^2$. Ainsi, $AM > AA'$ (les longueurs AM et AA' sont positives).

Remarques :

- Le projeté orthogonal A' de A sur la droite d est le point de d qui est **le plus proche** du point A.
- Lorsqu'un point A appartient à une droite d, son projeté orthogonal sur d est le point A lui-même.

3 Trigonométrie dans le triangle rectangle

A Cosinus, sinus et tangente d'un angle aigu



Définitions (rappels)

Dans un triangle ABC rectangle en A,

- $\cos(\widehat{ABC}) = \dfrac{AB}{BC}$
- $\sin(\widehat{ABC}) = \dfrac{AC}{BC}$
- $\tan(\widehat{ABC}) = \dfrac{AC}{AB}$

B Premières propriétés

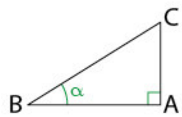
Propriétés

ABC est un triangle rectangle en A et on note α la mesure, en degré, d'un angle aigu de ce triangle.

- $\mathbf{0 < \cos(\alpha) < 1}$
- $\mathbf{0 < \sin(\alpha) < 1}$
- $\mathbf{\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1}$

La notation $\cos^2(\alpha)$ (resp. $\sin^2(\alpha)$) signifie $(\cos(\alpha))^2$ (resp. $(\sin(\alpha))^2$).

Démonstrations



- Avec les notations de la figure ci-contre, $\cos(\alpha) = \dfrac{AB}{BC}$.
Or, d'une part, $AB > 0$ et $BC > 0$, donc $\cos(\alpha) > 0$ et, d'autre part, $AB < BC$ (car A est le projeté orthogonal de B sur la droite (AC)) donc $\cos(\alpha) < 1$.
- On procède de même pour montrer que $0 < \sin(\alpha) < 1$.
- D'après le théorème de Pythagore, $AB^2 + AC^2 = BC^2$. Or, $AB = BC \times \cos(\alpha)$ et $AC = BC \times \sin(\alpha)$, d'où $(BC \times \cos(\alpha))^2 + (BC \times \sin(\alpha))^2 = BC^2$, c'est-à-dire $BC^2 \times (\cos(\alpha))^2 + BC^2 \times (\sin(\alpha))^2 = BC^2$.
Ainsi, $(\cos(\alpha))^2 + (\sin(\alpha))^2 = 1$.

Acquérir des automatismes

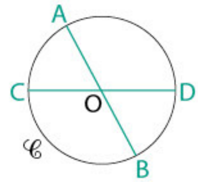
EXERCICES RÉSOLUS

1 Résoudre un problème de géométrie → Cours 1

[AB] et [CD] sont deux diamètres d'un cercle $\mathscr{C}$ de centre O.

a) Quelle est la nature du quadrilatère ACBD ?

b) Que peut-on dire de plus pour ce quadrilatère lorsque les diamètres [AB] et [CD] sont perpendiculaires ?

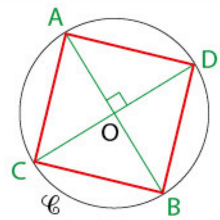


Solution

a) Les diagonales [AB] et [CD] du quadrilatère ACBD se coupent en leur milieu O.
Donc ACBD est un parallélogramme.
Or, de plus, $AB = CD$, donc les diagonales de ACBD ont la même longueur.
Par conséquent ACBD est un rectangle.

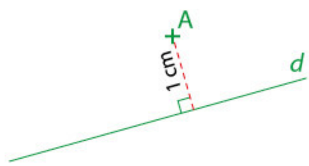
b) ACBD est un rectangle dont les diagonales [AB] et [CD] sont perpendiculaires.
Donc ACBD est un carré.

Un parallélogramme est un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu.
Un rectangle est un parallélogramme dont les diagonales ont la même longueur.



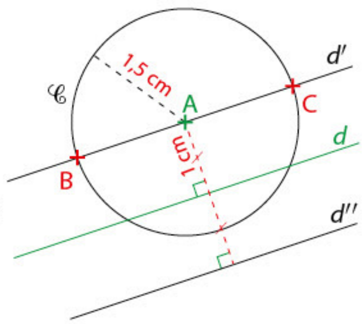
2 Utiliser le projeté orthogonal → Cours 2

Une maison A est située à 10 m du bord rectiligne d d'une route.
Sur la figure, 1 cm représente 10 m.
Déterminer les points situés à 10 m de la route et à 15 m de la maison.



Solution

On trace les droites d' et d'' parallèles à la droite d et situées à 1 cm de d.
On trace le cercle $\mathscr{C}$ de centre A et de rayon 1,5 cm.
Les points cherchés sont les points B et C.



Les points situés à même distance d'une droite d appartiennent à deux droites d' et d'' parallèles à d.
Les points situés à une même distance d'un point A appartiennent à un cercle de centre A.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 1

3 ABC est un triangle rectangle en B.
On note A' (resp. C') le symétrique de A (resp. de C) par rapport à B.

a) Construire une figure.

b) Quelle est la nature du quadrilatère $ACA'C'$?

c) Que peut-on dire de plus pour ce quadrilatère lorsque $BA = BC$?

Sur le modèle de l'exercice résolu 2

4 Un point M est situé à 5 cm d'une droite d.

a) Construire une figure.

b) Déterminer les points situés à 8 cm du point M et à 3,5 cm de la droite d.

EXERCICES RÉSOLUS

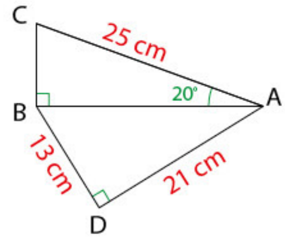
5 Déterminer une longueur, un angle

→ Cours 3. A

ABC et ABD sont les triangles rectangles représentés ci-contre.

a) Calculer la longueur BC en cm.
Arrondir au dixième.

b) Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{ABD}$.
Arrondir à l'unité.



Solution

a) Dans le triangle ABC rectangle en B,
$\sin(\widehat{BAC}) = \dfrac{BC}{AC}$, c'est-à-dire $BC = AC \times \sin(\widehat{BAC})$.
Ainsi, $BC = 25 \times \sin(20°)$.
Avec la calculatrice, on obtient $BC \approx 8{,}6$ cm.

b) Dans le triangle ABD rectangle en D,
$\tan(\widehat{ABD}) = \dfrac{AD}{BD}$, c'est-à-dire $\tan(\widehat{ABD}) = \dfrac{21}{13}$.
Avec la calculatrice, on obtient $\widehat{ABD} \approx 58°$.

Avec la calculatrice en mode « Degré », on obtient :

```
25sin (20)
            8.550503583
```

et

```
tan⁻¹ (21÷13)
            58.24051992
```

6 Utiliser une formule de trigonométrie

→ Cours 3. B

ABC est un triangle rectangle en A tel que $\sin(\widehat{ABC}) = 0{,}6$.
Déterminer la valeur exacte de $\cos(\widehat{ABC})$.

Solution

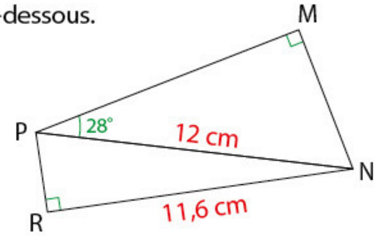
$\cos^2(\widehat{ABC}) + \sin^2(\widehat{ABC}) = 1$, c'est-à-dire
$\cos^2(\widehat{ABC}) = 1 - \sin^2(\widehat{ABC})$.
Ainsi, $\cos^2(\widehat{ABC}) = 1 - 0{,}6^2 = 1 - 0{,}36 = 0{,}64$.
Or, $\cos(\widehat{ABC}) > 0$ donc
$\cos(\widehat{ABC}) = \sqrt{0{,}64} = 0{,}8$.

Attention, l'équation $x^2 = 0{,}64$ possède deux solutions :
$x = -\sqrt{0{,}64} = -0{,}8$ et $x = \sqrt{0{,}64} = 0{,}8$.
Mais ici, le cosinus d'angle aigu est positif.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 5

7 MNP et NRP sont les triangles rectangles représentés ci-dessous.



a) Calculer la longueur PM en cm. *Arrondir au dixième.*

b) Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{PNR}$.
Arrondir à l'unité.

Sur le modèle de l'exercice résolu 6

8 ABC est un triangle rectangle en A tel que :
$$\cos(\widehat{ABC}) = 0{,}4$$
Déterminer la valeur exacte de $\sin(\widehat{ABC})$ puis son arrondi au dixième.

9 EFG est un triangle rectangle en F tel que :
$$\sin(\widehat{FEG}) = 0{,}1$$
Déterminer la valeur exacte de $\cos(\widehat{FEG})$ puis son arrondi au centième.

Calcul mental → Exercez-vous sur la plateforme Hyperbole
⊕ de détails page 4

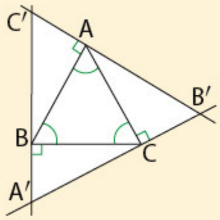
Configurations du plan

→ Cours 1

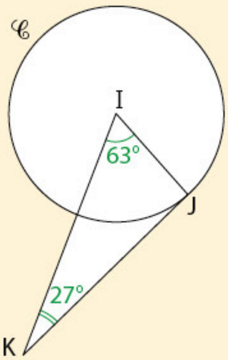
Questions Flash

10 Utiliser les codages de la figure pour donner oralement la mesure de chacun des angles :

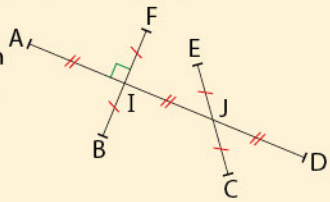
- $\widehat{BAC}$ • $\widehat{CAB'}$ • $\widehat{CB'A}$
- $\widehat{BCB'}$ • $\widehat{BC'A}$ • $\widehat{CA'B}$



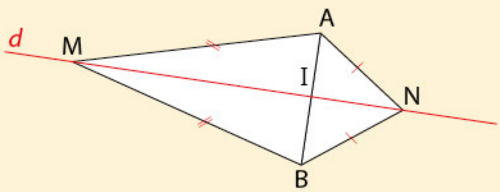
11 $\mathscr{C}$ est le cercle de centre I et de rayon IJ représenté ci-contre.
Dans chaque cas, dire si l'affirmation est vraie ou fausse.
a) Le triangle IJK est rectangle.
b) La droite (JK) coupe le cercle $\mathscr{C}$ en deux points distincts.



12 Sur cette figure, les points A, I, J, D sont alignés. D'après les codages, que peut-on dire du quadrilatère :
• ICDE ? • ABJF ?



13 Les affirmations ci-dessous se rapportent à cette figure, où les points M, I, N appartiennent à la droite d.



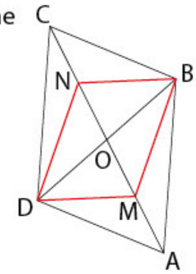
Parmi ces affirmations, lesquelles sont vraies ?
(1) La droite d est la médiatrice du segment [AB].
(2) Le triangle BIN n'est pas rectangle.
(3) Le point I est le milieu du segment [AB].
(4) Les droites (AB) et (MN) sont perpendiculaires.

14 MNPQ est un rectangle tel que MN = 12 cm et MQ = 5 cm.
Calculer la longueur MP, en cm.

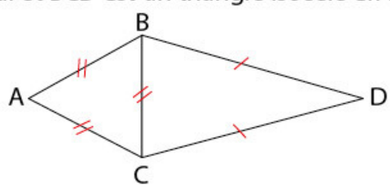
15 ABCD est un carré tel que AC = 10 cm.
Calculer la longueur AB.

16 ABC est un triangle tel que :
AB = 7,5 cm, BC = 6 cm, AC = 4,5 cm.
Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier.

17 ABCD est un parallélogramme de centre O.
M est le milieu du segment [OA].
N est le milieu du segment [OC].
a) Expliquer pourquoi OM = ON.
b) En déduire que le quadrilatère MBND est un parallélogramme.

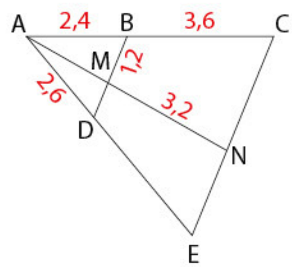


18 Sur la figure ci-dessous, ABC est un triangle équilatéral et BCD est un triangle isocèle en D.



Les médiatrices des côtés [AB] et [BD] se coupent en I et les médiatrices des côtés [AC] et [CD] se coupent en J.
a) Construire une figure.
b) Justifier que :
• IA = ID • JA = JD • IA = JA
c) En déduire la nature du quadrilatère AIDJ.

19 Les droites (BC), (MN) et (DE) se coupent en A.
Les points D, M, B d'une part et E, N, C d'autre part sont alignés.
Les droites (BD) et (CE) sont parallèles.
Calculer les longueurs DE, AM, CN.



20 $\mathscr{C}$ est un cercle de centre A et de rayon 2 cm.
M est un point de $\mathscr{C}$ et T est la tangente en M au cercle $\mathscr{C}$.
N est un point de la droite T tel que MN = 3 cm.
a) Construire une figure.
b) Calculer la longueur AN, en cm.
Arrondir au dixième.

21 $\mathscr{C}$ est un cercle de diamètre [EF].
d et d' sont les tangentes en E et F au cercle $\mathscr{C}$.
a) Construire une figure.
b) Montrer que les droites d et d' sont parallèles.

 Nathan live!

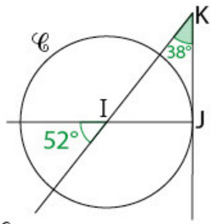
22 $\mathscr{C}$ est un cercle de centre I et de rayon IJ.

a) Justifier que la droite (JK) est tangente au cercle $\mathscr{C}$.

b) On donne $IK = 10$ cm et $JK = 7{,}5$ cm.

Calculer le rayon, en cm, du cercle $\mathscr{C}$.

Arrondir au dixième



Projeté orthogonal

→ Cours 2

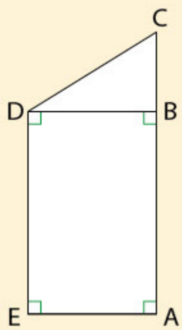
Questions flash

23 Dans chaque cas, une proposition est exacte à propos de cette figure. Laquelle ?

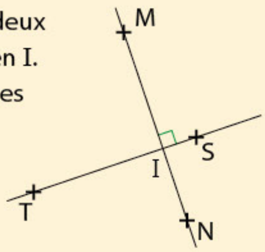
a) Le projeté orthogonal de C sur la droite (AE) est le point :
(1) A **(2)** B **(3)** C

b) B est le projeté orthogonal du point :
(1) A sur (CD) **(2)** C sur (BC)
(3) D sur (AC)

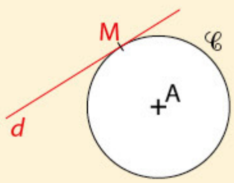
c) E est le projeté orthogonal du point :
(1) A sur (AD) **(2)** D sur (AE) **(3)** B sur (AE)



24 (MN) et (ST) sont deux droites perpendiculaires en I. Faire oralement des phrases en utilisant l'expression « projeté orthogonal. »



25 Sur cette figure, la droite *d* est tangente en M au cercle $\mathscr{C}$ de centre A.
Sofia : « A est le projeté orthogonal de M sur *d*. »
A-t-elle raison ?



26 A est un point situé à 3 cm d'une droite *d*.

a) Construire une figure.

b) Construire et décrire l'ensemble des points situés à 3 cm du point A.

c) Construire et décrire l'ensemble des points situés à 3 cm de la droite *d*.

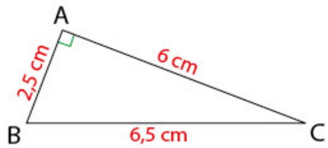
27 **a)** Tracer une droite *d*.

b) Construire l'ensemble des points situés à 2 cm de la droite *d*.

28 **a)** Tracer une droite *d* et placer un point A à 5 cm de *d*.

b) Construire des points M et N tels que :
- M, N, A sont alignés ;
- M et N sont situés à 3 cm de la droite *d*.

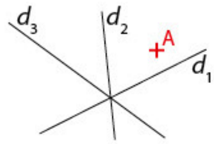
29 **a)** Construire un tel triangle rectangle ABC.



b) On note H le pied de la hauteur issue de A dans ce triangle. Construire ce point H.

c) H est le projeté orthogonal de trois points de la figure. Préciser lesquels et sur quelles droites.

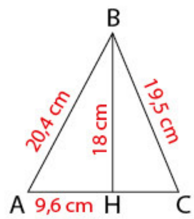
30 Réaliser une telle figure et construire le projeté orthogonal du point A sur chacune de ces droites.



31 ABH et BCH sont les triangles ci-contre.
Les points A, H, C sont alignés.

a) Justifier que H est le projeté orthogonal de B sur la droite (AC).

b) Calculer la distance de C à (BH).



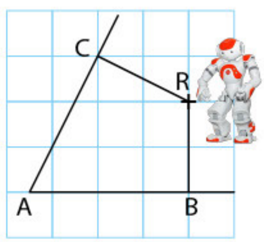
32 *d* et *d'* sont deux droites perpendiculaires en O.

a) Construire une figure.

b) Placer des points M, N, P, Q situés à 4 cm de la droite *d* et à 3 cm de la droite *d'*.

c) Calculer OM.

33 Un robot R se déplace sur un quadrillage à mailles carrées.
Voici la copie d'un écran.
Les points B et C sont les projetés orthogonaux de R sur les droites respectives (AB) et (AC).
Le robot se trouve-t-il à même distance des droites (AB) et (AC) ?
Justifier.

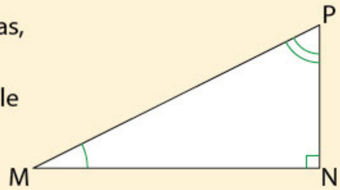


Trigonométrie

→ Cours 3

Questions Flash

34 Dans chaque cas, une proposition concernant ce triangle est exacte. Laquelle ?



a) $\cos(\widehat{NMP})$ est égal à :

(1) $\dfrac{MN}{MP}$ **(2)** $\dfrac{MN}{NP}$ **(3)** $\dfrac{NP}{MP}$

b) $\sin(\widehat{NPM})$ est égal à :

(1) $\dfrac{MN}{PN}$ **(2)** $\dfrac{NP}{MP}$ **(3)** $\dfrac{MN}{PM}$

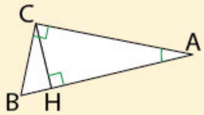
c) $\tan(\widehat{NMP})$ est égal à :

(1) $\dfrac{MN}{MP}$ **(2)** $\dfrac{PN}{MN}$ **(3)** $\dfrac{NP}{PM}$

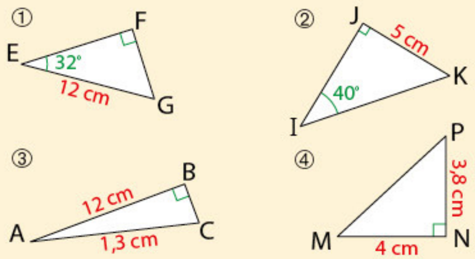
35 Écrire dans deux triangles rectangles différents l'expression de :

a) $\cos(\widehat{BAC})$ **b)** $\sin(\widehat{BAC})$

c) $\tan(\widehat{BAC})$



36 Dans chaque cas, une proposition à propos de ces figures est exacte. Laquelle ?



a) Pour calculer FG sur la figure ①, on utilise :

(1) $\cos(\widehat{FEG})$ **(2)** $\sin(\widehat{FEG})$ **(3)** $\tan(\widehat{FEG})$

b) Pour calculer IK sur la figure ②, on utilise :

(1) $\cos(\widehat{JIK})$ **(2)** $\sin(\widehat{JIK})$ **(3)** $\tan(\widehat{JIK})$

c) Pour déterminer la mesure de $\widehat{BAC}$ sur la figure ③, on utilise :

(1) $\cos(\widehat{BAC})$ **(2)** $\sin(\widehat{BAC})$ **(3)** $\tan(\widehat{BAC})$

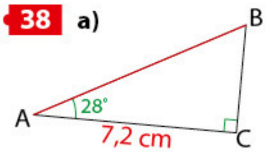
d) Pour déterminer la mesure de $\widehat{MPN}$ sur la figure ④, on utilise :

(1) $\cos(\widehat{MPN})$ **(2)** $\sin(\widehat{MPN})$ **(3)** $\tan(\widehat{MPN})$

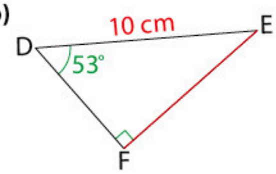
37 α est la mesure, en degré, d'un angle aigu tel que $\cos(\alpha) = 0{,}6$.
Calculer mentalement $\sin(\alpha)$.

Pour les exercices 38 et 39, calculer la longueur, en cm, du segment rouge. *Arrondir au dixième.*

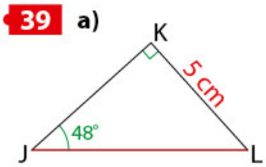
38 **a)**



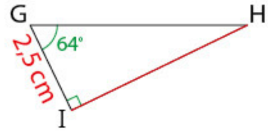
b)



39 **a)**



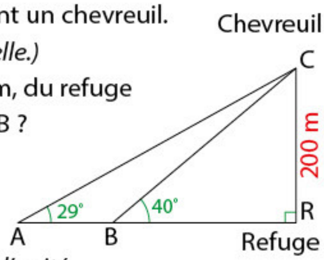
b)



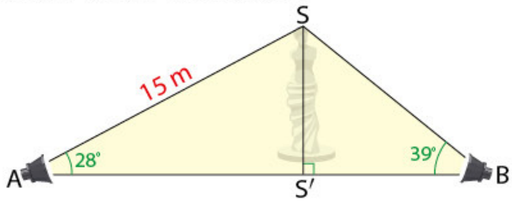
40 Arrêtés le long d'un sentier rectiligne, deux randonneurs A et B observent un chevreuil.
(La figure n'est pas à l'échelle.)

a) À quelle distance, en m, du refuge se trouve le randonneur B ? *Arrondir à l'unité.*

b) Quelle distance, en m, sépare les deux randonneurs ? *Arrondir à l'unité.*



41 Placés sur le sol, deux projecteurs A et B éclairent une sculpture. *(La figure n'est pas à l'échelle.)*
Les points A, S′, B sont alignés.



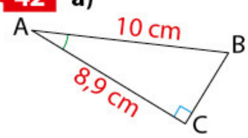
Arrondir les résultats au dixième.

a) Calculer la hauteur, en m, de la sculpture.

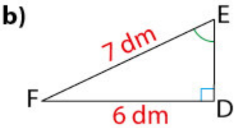
b) Calculer la distance AB, en m.

Pour les exercices 42 et 43, déterminer la mesure de l'angle marqué en vert. *Arrondir à l'unité.*

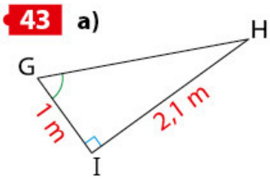
42 **a)**



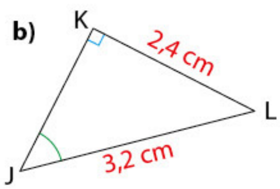
b)



43 **a)**



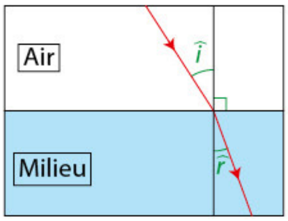
b)



44 Dans chaque cas, construire un triangle rectangle ABC dont l'angle $\widehat{ABC}$ vérifie :

a) $\cos(\widehat{ABC}) = \dfrac{3}{4}$ **b)** $\sin(\widehat{ABC}) = \dfrac{4}{5}$ **c)** $\tan(\widehat{ABC}) = 3$

45 Lorsqu'un rayon lumineux traverse une surface délimitant un milieu, les angles d'incidence $\widehat{i}$ et de réfraction $\widehat{r}$ vérifient la relation :



$$\frac{\sin(\widehat{i})}{\sin(\widehat{r})} = \mathrm{I},$$

où I est appelé indice de réfraction.

Voici les indices de réfraction de quelques milieux :

- $\mathrm{I}_{\text{eau}} = \dfrac{4}{3}$
- $\mathrm{I}_{\text{verre}} = 1{,}46$
- $\mathrm{I}_{\text{diamant}} = 2{,}42$

Dans chaque cas, déterminer la mesure de l'angle $\widehat{r}$, sachant que $\widehat{i} = 34°$.

Arrondir à l'unité.

46 **1.** α est la mesure, en degré, d'un angle aigu tel que $\cos(\alpha) = 0{,}7$.

Déterminer la valeur exacte, puis son arrondi au centième, de :

a) $\sin(\alpha)$ **b)** $\tan(\alpha)$

2. α est la mesure, en degré, d'un angle aigu tel que $\sin(\alpha) = 0{,}3$.

Déterminer la valeur exacte, puis son arrondi au centième, de :

a) $\cos(\alpha)$ **b)** $\tan(\alpha)$

47 Répondre aux questions sans utiliser la calculatrice.

a) On donne $\cos(60°) = \dfrac{1}{2}$. Déterminer $\sin(60°)$.

b) On donne $\sin(45°) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Déterminer $\cos(45°)$.

48 On donne $\sin(54°) = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$.

Sans utiliser la calculatrice, déterminer la valeur exacte de $\cos(54°)$.

49 α est la mesure, en degré, d'un angle aigu d'un triangle rectangle tel que :

$$\tan(\alpha) = \frac{35}{12} \text{ et } \cos(\alpha) = \frac{12}{37}.$$

Déterminer la valeur exacte de $\sin(\alpha)$ de deux façons différentes.

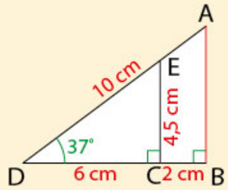
Longueurs, angles, aires, volumes

→ Cours 1, 2, 3

Questions flash

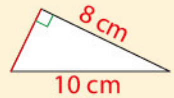
50 Parmi les outils mathématiques ci-dessous, indiquer celui ou ceux qui permettent de calculer la longueur AB.

- Théorème de Pythagore
- Théorème de Thalès
- Trigonométrie

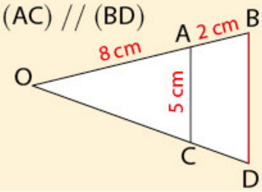


51 Dans chaque cas, calculer mentalement la longueur du segment en rouge.

a)



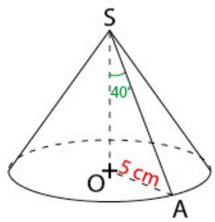
b) (AC) // (BD)



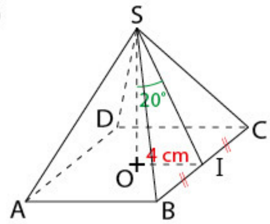
52 Voici un cône de révolution et une pyramide régulière à base carrée.

Arrondir les réponses à l'unité.

①



②



Pour chaque solide, calculer :

a) sa hauteur, en cm ; **b)** son volume, en cm^3.

53 JKL est un triangle isocèle en J tel que :

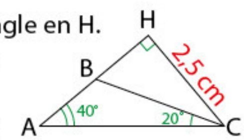
$$\text{JK} = 6 \text{ cm} \quad \text{et} \quad \widehat{\text{JKL}} = 70°$$

a) Construire une figure.

b) Calculer l'aire, en cm^2, du triangle JKL.

Arrondir à l'unité.

54 AHC est un triangle rectangle en H.



a) Calculer la mesure de chacun des angles :

- $\widehat{ABC}$
- $\widehat{CBH}$
- $\widehat{HCB}$

b) Calculer chaque longueur, en cm.

Arrondir au dixième.

- BH
- BC
- AC

c) Calculer l'aire, en cm^2, du triangle ABC.

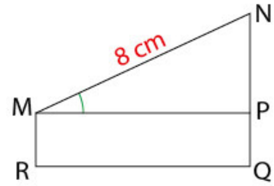
Arrondir à l'unité.

QCM interactifs

Pour se tester

55 Dans chaque cas, donner la réponse exacte sans justifier.

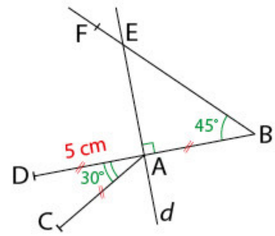
La figure ci-contre est constituée :
- d'un rectangle MPQR ;
- d'un triangle rectangle MNP.



		A	B	C	D
1	La droite (NQ) est tangente au cercle …	de centre P et de diamètre $[NQ]$	de centre M et de rayon $[MN]$	de centre M et de rayon $[MP]$	de centre M et de rayon $[MQ]$
2	Le projeté orthogonal de P sur la droite (RQ) est …	N	Q	M	R
3	On donne $\cos(\widehat{NMP}) = 0{,}9$. On en déduit que …	$\sin(\widehat{NMP}) = \sqrt{0{,}1}$	$\sin(\widehat{NMP}) = 0{,}1^2$	$\sin(\widehat{NMP}) = \sqrt{0{,}19}$	$\sin(\widehat{NMP}) = 0{,}19$
4	RQ est égal à …	7,2 cm	environ 6,9 cm	7,25 cm	$\dfrac{8\text{ cm}}{\cos(\widehat{MNP})}$

56 Dans chaque cas, donner la (ou les) réponse(s) exacte(s) sans justifier.

Sur la figure ci-contre, les points A, B, D sont alignés.
E est le point d'intersection de la demi-droite $[BF)$ et de la médiatrice d du segment $[BD]$.



		A	B	C	D
1	Le projeté orthogonal …	de E sur (BD) est A	de B sur d est A	de A sur (CD) est D	de D sur (AE) est A
2	On peut affirmer que …	$\widehat{AEB} = 45°$	$\widehat{BED} = 90°$	$\widehat{BDC} = 75°$	$\widehat{ACB} = 15°$
3	L'aire du triangle BDE est égale à …	25 cm^2	$12{,}5\text{ cm}^2$	50 cm^2	12 cm^2

57 Dans chaque cas, dire si l'affirmation est vraie ou fausse en justifiant.

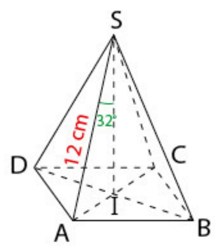
SABCD est la pyramide régulière à base carrée ci-contre.

Affirmations :

1 $\tan(\widehat{ISA}) = \dfrac{IS}{IA}$ 2 $IA \approx 6{,}36$ cm

3 L'aire de la base ABCD est environ égale à 81 cm^2.

4 Le volume de cette pyramide est environ égal à $91{,}5\text{ cm}^3$.



Vérifiez vos réponses : p. 346

58 Construire des points

a) Tracer une droite d et placer un point A à 3 cm de d.
b) Construire le point B de la droite d pour lequel la longueur AB est minimum.
c) Construire les points C et D de la droite d situés à 4 cm du point A.

AIDE
Penser à bien choisir les instruments : équerre ou compas.

59 Étudier la nature d'un quadrilatère

a) Construire un triangle ABC isocèle en A tel que :

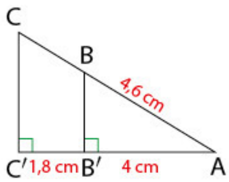
$$AB = 5 \text{ cm} \text{ et } BC = 3 \text{ cm}.$$

b) Construire la droite d parallèle à (AB) passant par C et la droite d' parallèle à (AC) passant par B. Les droites d et d' se coupent en M.
c) Expliquer pourquoi le quadrilatère ABMC est un losange.

AIDE
Un losange est un parallélogramme ayant deux côtés consécutifs de même longueur.

60 Utiliser le théorème de Thalès

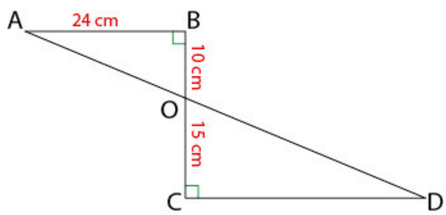
Sur cette figure, les points A, B, C d'une part et A', B', C' d'autre part sont alignés.
Utiliser les codages de la figure pour calculer la longueur BC.



AIDE
Pour pouvoir appliquer le théorème de Thalès aux triangles ABB' et ACC', il faut justifier d'abord que les droites (BB') et (CC') sont parallèles.

61 Calculer des longueurs

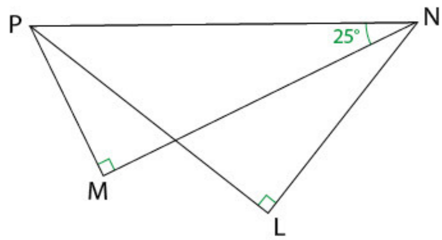
Sur la figure ci-contre, ABO et OCD sont deux triangles rectangles.
a) Calculer la longueur OA.
b) Calculer la longueur CD.
c) Calculer la longueur OD de deux façons différentes.



AIDE
Utiliser les théorèmes de Pythagore et de Thalès.

62 Utiliser la trigonométrie

Sur la figure ci-dessous, les triangles MNP et LNP sont rectangles, tels que $PL = 4$ cm et $MN = 4{,}6$ cm.
a) Calculer la longueur PN, en cm. *Arrondir au dixième.*
b) Calculer la mesure, en degré, de l'angle $\widehat{NPL}$. *Arrondir à l'unité.*
En déduire la mesure, en degré, de l'angle $\widehat{PNL}$.



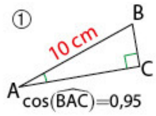
AIDE
Dans chaque triangle rectangle, il faut repérer les informations connues (angles, longueurs) et décider s'il est préférable d'utiliser un cosinus, un sinus, ….

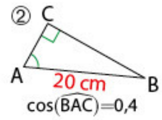
EXERCICE RÉSOLU

63 Automatiser les calculs dans un triangle rectangle

1. Pour chaque figure ci-contre :

- déterminer $\sin(\widehat{BAC})$. *Arrondir au centième.*
- déterminer AC et BC, en cm. *Arrondir au dixième.*





2. Voici un programme écrit en langage Python.

a) Le paramètre cos de la fonction Sin prend pour valeur le cosinus d'un angle aigu.
Quel est le résultat renvoyé par Sin(cos) ?

b) Expliquer le rôle de ce programme.

c) Saisir et tester le programme en particulier avec les situations de la question **1. a)**.

```python
from math import *

def Sin(cos):
    y=1-cos**2
    s=sqrt(y)
    return s

def Adj(c,h):
    ad=h*c
    return ad

def Opp(c,h):
    op=h*Sin(c)
    return op

C=float(input("cos A="))
H=float(input("hypoténuse="))
print("Côté adjacent =",Adj(C,H),"Côté opposé =",Opp(C,H))
```

Solution

1. $\cos^2(\widehat{BAC})+\sin^2(\widehat{BAC})=1$

donc $\sin(\widehat{BAC})=\sqrt{1-\cos^2(\widehat{BAC})}$

$\cos(\widehat{BAC})=\dfrac{AC}{AB}$ donc $AC=AB\times\cos(\widehat{BAC})$

$\sin(\widehat{BAC})=\dfrac{BC}{AB}$ donc $BC=AB\times\sin(\widehat{BAC})$

On obtient :

① $\sin(\widehat{BAC})\approx 0{,}31$; $AC=9{,}5$ cm ; $BC\approx 3{,}1$ cm. ② $\sin(\widehat{BAC})\approx 0{,}92$; $AC=8$ cm ; $BC\approx 18{,}3$ cm.

2. a) Pour une valeur cos du cosinus d'un angle aigu, Sin(cos) renvoie le sinus de cet angle.

b) Le programme saisit une valeur c de $\cos\widehat{A}$ et une valeur h de l'hypoténuse puis calcule et affiche la longueur du côté adjacent à l'angle $\widehat{A}$ et la longueur du côté opposé.

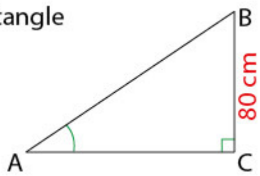
c) On vérifie les résultats obtenus à la question **1.**

À VOTRE TOUR

64

ABC est le triangle rectangle en C représenté ci-contre.

On donne $\sin(\widehat{BAC})=0{,}56$.



a) Calculer AB, en cm.
Arrondir au dixième.

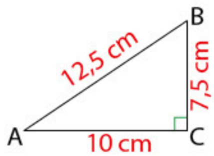
b) Que représente la valeur renvoyée par la fonction H lorsque $s=\sin(\widehat{BAC})$ et $o=BC$?

```python
def H(s,o):
    h=o/s
    return h
```

c) Saisir cette fonction.
La tester avec le triangle ABC.

65

ABC est le triangle rectangle en C représenté ci-contre.



a) Que représente chacune des valeurs c, s, t renvoyées par la fonction T lorsque $a=AC$, $o=BC$ et $h=AB$?

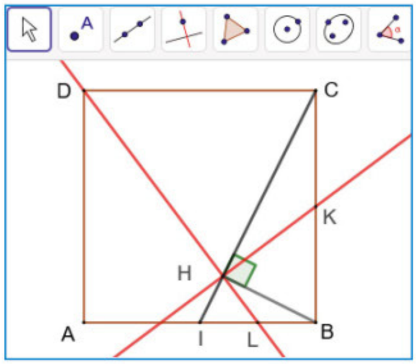
```python
def T(a,o,h):
    c=a/h
    s=o/h
    t=o/a
    return c,s,t
```

b) Saisir cette fonction et la tester avec le triangle ABC.

EXERCICE RÉSOLU

66 Démontrer une conjecture

ABCD est un carré. Les points I, L, K sont les milieux respectifs de $[AB]$, $[IB]$ et $[BC]$.
H est le projeté orthogonal de B sur la droite (IC).

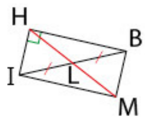


1. a) Réaliser cette figure avec un logiciel de géométrie.
b) Déplacer l'un des sommets du carré afin de conjecturer la mesure de l'angle $\widehat{KHL}$.
2. a) Démontrer que les triangles HLB et HBK sont isocèles.
b) En déduire un angle de même mesure que :
- $\widehat{LBH}$
- $\widehat{KBH}$

c) Démontrer alors la conjecture émise à la question **1. b)**.

Solution

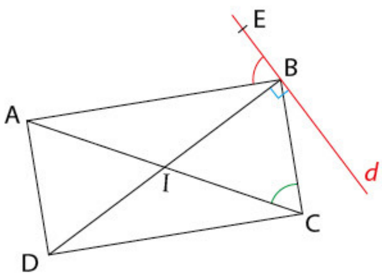
1. b) On conjecture que l'angle $\widehat{KHL}$ mesure $90°$.
2. a) Le triangle HIB est rectangle en H.
On construit le symétrique M de H par rapport à L.
Le quadrilatère HBMI est un parallélogramme car ses diagonales se coupent en leur milieu L. Or, ce parallélogramme a un angle droit, donc c'est un rectangle et les diagonales ont même longueur.



En particulier, $LH = LB$.
Donc le triangle HLB est isocèle en L.
On procède de même pour le triangle HBK isocèle en K.
b) Les angles à la base d'un triangle isocèle ont la même mesure, donc $\widehat{LBH} = \widehat{BHL}$ et $\widehat{KBH} = \widehat{KHB}$.
c) L'angle $\widehat{LBK}$ est droit donc $\widehat{LBH} + \widehat{KBH} = 90°$.
D'après la question **b)** on en déduit que $\widehat{BHL} + \widehat{KHB} = 90°$, c'est-à-dire $\widehat{KHL} = 90°$.

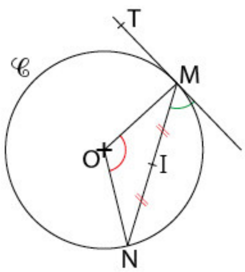
À VOTRE TOUR

67 ABCD est un rectangle de centre I.
d est la droite perpendiculaire en B à (BD) et E est un point de *d*.



1. Réaliser cette figure avec un logiciel de géométrie et conjecturer une relation entre les mesures des angles vert et rouge.
2. a) Citer deux triangles isocèles de la figure.
b) Démontrer la conjecture émise à la question **1**.

68 La droite (MT) est tangente en M au cercle $\mathscr{C}$ de centre O.
N est un point de $\mathscr{C}$ et I est le milieu du segment $[MN]$.



1. Réaliser cette figure avec un logiciel de géométrie.
Conjecturer une relation entre les mesures des angles rouge et vert.
2. a) On note O' le point d'intersection des droites (OI) et (MT).
Démontrer que :
- (OI) est la médiatrice du segment $[MN]$;
- $\widehat{MO'I} + \widehat{MOI} = \widehat{O'MI} + \widehat{MO'I} = 90°$.

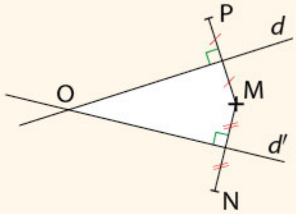
b) Démontrer la conjecture émise à la question **1**.

Démontrer et raisonner

69 Reconnaître des points cocycliques

Méthode
Pour démontrer que des points appartiennent à un même cercle, on peut montrer qu'ils sont à égale distance du centre du cercle.

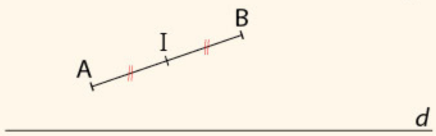
Démontrer que les points P, M, N ci-contre sont cocycliques, c'est-à-dire qu'ils appartiennent à un même cercle.



70 Démontrer une propriété de la projection orthogonale

Méthode
Parfois, il est nécessaire d'effectuer un tracé supplémentaire sur la figure, par exemple pour faire apparaître des triangles en configuration de Thalès.

Sur la figure ci-dessous, I est le milieu de $[AB]$.



A' et B' sont les projetés orthogonaux respectifs des points A et B sur la droite *d*.
Démontrer que le projeté orthogonal I' de I sur la droite *d* est le milieu du segment $[A'B']$.

71 Raisonner avant de construire

Méthode
Pour un triangle d'aire donnée, la formule de l'aire permet quelquefois de connaître un côté ou une hauteur.

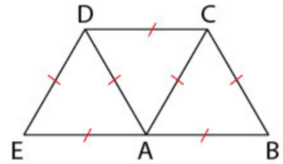
a) Tracer un segment $[AB]$ de longueur 8 cm.
b) Construire l'ensemble des points M tels que l'aire du triangle AMB soit 30 cm^2.

72 Raisonner par l'absurde

Utiliser un raisonnement par l'absurde pour démontrer que la tangente à un cercle coupe ce cercle en un seul point.

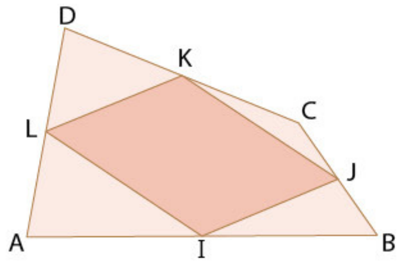
Étudier des configurations du plan

73 La figure ci-dessous est constituée de trois triangles équilatéraux.



Démontrer que le triangle BCE est rectangle.

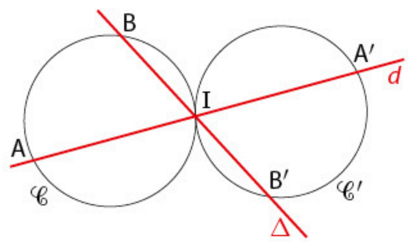
74 ABCD est un quadrilatère. I, J, K, L sont les milieux respectifs des côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$.



1. a) Démontrer que les droites (IJ) et (KL) sont parallèles, puis que les droites (IL) et (JK) sont parallèles.
b) En déduire la nature du quadrilatère IJKL.
2. On suppose que ABCD est un rectangle.
Quelle est alors la nature du quadrilatère IJKL ?
Justifier.
3. On suppose que ABCD est un losange.
Quelle est alors la nature du quadrilatère IJKL ?
Justifier.
Le quadrilatère IJKL est dit de Varignon

Pierre Varignon (1654-1722) se destinait initialement à une carrière religieuse mais la lecture des *Éléments* d'Euclide a changé sa vie. Il deviendra un célèbre mathématicien.

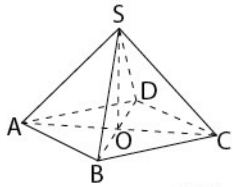
75 Ces deux cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ ont même rayon et sont en contact au seul point I.
Deux droites *d* et Δ sécantes en I recoupent respectivement $\mathscr{C}$ en A et B, et $\mathscr{C}'$ en A' et B'.



En utilisant la symétrie de centre I, démontrer que le quadrilatère $ABA'B'$ est un parallélogramme.

Calculer une longueur, un angle, une aire, un volume

76 La pyramide du Louvre est une pyramide régulière à base carrée de 35,4 m de côté et de 21,6 m de hauteur. Elle est représentée ci-dessous par la pyramide SABCD.



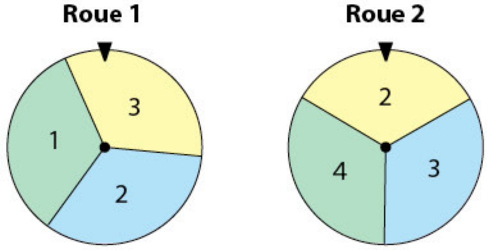
a) Calculer la longueur BD, en m. *Arrondir au dixième.*
b) Déterminer la mesure, en degré, de l'angle $\widehat{SBO}$. *Arrondir à l'unité.*
c) En déduire la mesure, en degré, de l'angle $\widehat{BSD}$. *Arrondir à l'unité.*

77 ABC est un triangle tel que :
$AB = 8$ cm, $AC = 10$ cm et $BC = 6$ cm.
H est le projeté orthogonal de B sur (AC).
Calculer l'aire du triangle ABC. En déduire BH.

78 a, b, c désignent des nombres entiers naturels non nuls tels que :
• a et b sont des nombres premiers inférieurs ou égaux à 13 ;
• $a^2 = b^2 + c^2$.
a) Trouver deux triplets $(a\,;b\,;c)$ qui répondent à ces conditions.
b) ABC est un triangle tel que :
$AB = c$, $AC = b$ et $BC = a$.
Construire les deux triangles ABC avec les triplets obtenus à la question **a)**.

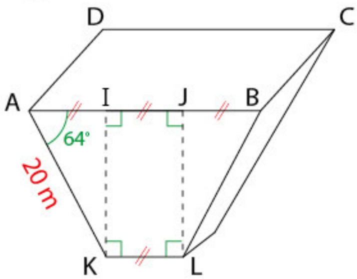
79 Dans un repère orthonormé, MNP est un triangle rectangle en N tel que $M(-6\,;-1)$, $N(3\,;2)$, $P(4\,;-1)$.
a) Déterminer les coordonnées du point Q tel que MNPQ soit un rectangle.
b) Calculer la mesure de l'angle $\widehat{NMP}$. *Arrondir à l'unité.*
c) Déterminer les coordonnées du milieu I du segment $[MP]$ et vérifier que I est le centre d'un cercle qui passe par les points M, N, P, Q.

80 Les roues ci-dessous sont équilibrées et découpées en trois secteurs identiques. On fait tourner chacune de ces roues et on note a le résultat obtenu à la roue 1 et b celui obtenu à la roue 2.



On considère alors le triangle ABC rectangle en A tel que $AB = a$ et $AC = b$.
Calculer la probabilité que la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$ soit inférieure ou égale à $45°$. *Penser à utiliser* $\tan(\widehat{ABC})$.

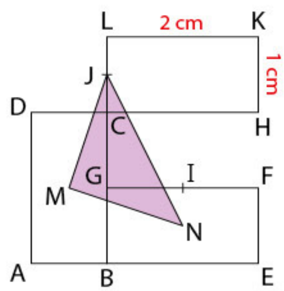
81 Voici le schéma d'un bâtiment ayant la forme d'un tronc de pyramide à base carrée renversée.



a) Calculer AI, en m. *Arrondir au centième.*
b) En déduire l'aire, en m^2, du plafond ABCD de ce bâtiment. *Arrondir au centième.*

Situé à Bratislava, en Slovaquie, ce bâtiment abrite les locaux d'une radio internationale, dont certaines émissions sont diffusées en français.

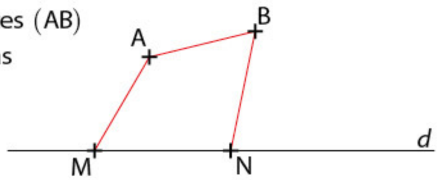
82 La figure ci-contre représente trois rectangles identiques de côtés 1 cm et 2 cm.
M et N sont les centres des rectangles ABCD et BEFG.
I et J sont les milieux des segments $[GF]$ et $[CL]$.
Les points B, G, C, L sont alignés.



a) Déterminer les coordonnées des points de cette figure dans le repère orthonormé $(G\,;I,C)$.
b) Démontrer que le triangle JMN est rectangle isocèle.
c) Calculer l'aire et le périmètre exacts de ce triangle.

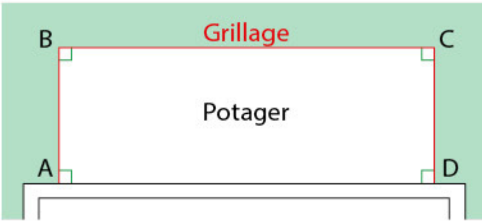
Résoudre des problèmes d'optimisation

83 Les droites (AB) et d ne sont pas parallèles.
M et N sont deux points variables de d.



Où faut-il placer les points M et N pour que le trajet en rouge soit le plus court possible ?

84 Monsieur Herbert souhaite installer un potager de forme rectangulaire accolé au mur de sa maison. Afin que ses chiens ne viennent pas le piétiner, il a acheté 20 m de grillage pour le clôturer.



Il souhaite utiliser la totalité de son grillage et que l'aire de son potager soit maximum.

1. On note $AB = x$, en m, avec $0 \leqslant x \leqslant 10$.

a) Exprimer BC en fonction de x.

b) Exprimer l'aire $\mathscr{A}(x)$, en m^2, du potager en fonction de x.

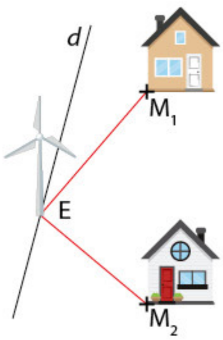
2. a) Avec la calculatrice, conjecturer une réponse au problème.

b) Vérifier que pour tout x de l'intervalle $[0\,;10]$:

$$\mathscr{A}(x) = 50 - 2(x-5)^2$$

c) Démontrer alors la conjecture émise à la question **2. a)**.

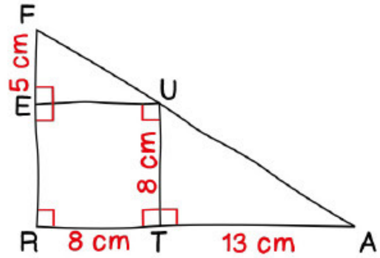
85 Une éolienne (notée E) doit alimenter en électricité deux maisons (notées M_1 et M_2). L'éolienne doit être posée en bordure d'un chemin schématisé par la droite d. Afin de minimiser le coût des câbles électriques (en rouge sur le schéma), on souhaite trouver l'emplacement de l'éolienne sur d qui rend la longueur $M_1E + EM_2$ minimum.



a) Réaliser une telle figure puis construire le symétrique de M_1 par rapport à d.

b) Répondre au problème posé.

86 En utilisant les données portées sur cette figure à main levée, indiquer si le trajet F-U-A est le plus court chemin pour aller du point F au point A.



S'entraîner à la logique → p. XXI

87 **Quantificateurs universel et existentiel**

Justifier que chacune des affirmations ci-dessous est vraie.

a) Pour tout angle aigu $\widehat{BAC}$:

$$\cos^2(\widehat{BAC}) = 1 - \sin^2(\widehat{BAC})$$

b) Il existe un angle aigu $\widehat{BAC}$ tel que :

$$\cos(\widehat{BAC}) = \sin(\widehat{BAC})$$

c) Pour tout triangle ABC rectangle en A :

$$\cos(\widehat{ABC}) = \sin(\widehat{ACB}) \text{ et } \sin(\widehat{ABC}) = \cos(\widehat{ACB})$$

d) H est le projeté orthogonal d'un point A sur une droite d et A n'appartient pas à d.
Il existe deux points M et N de d tels que :

$$AM = AN = 2AH$$

88 **Contraposée**

1. Le théorème de Pythagore affirme :
« Si ABC est un triangle rectangle en A, alors

$$AB^2 + AC^2 = BC^2. »$$

a) Énoncer la contraposée de ce théorème.

b) Que démontre-t-on lorsqu'on utilise cette contraposée ?

2. Deux droites (BM) et (CN) sont sécantes en A.
Le théorème de Thalès affirme :
« Si les droites (BC) et (MN) sont parallèles, alors :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} »$$

a) Énoncer la contraposée de ce théorème.

b) Que démontre-t-on lorsqu'on utilise cette contraposée ?

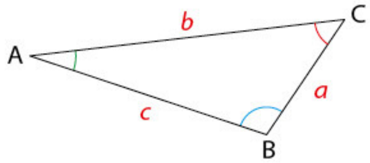
89 Relier aire d'un triangle et sinus

Chercher Raisonner Calculer

1. a, b, c désignent des nombres réels strictement positifs. ABC est un triangle tel que :

$$AB = c,\ AC = b,\ BC = a$$

On note $\mathscr{A}$ l'aire du triangle ABC.



a) Démontrer que $\mathscr{A} = \frac{1}{2} bc \sin(\widehat{BAC})$.

b) Proposer deux autres expressions de l'aire $\mathscr{A}$.

c) En déduire l'égalité $\frac{a}{\sin(\widehat{BAC})} = \frac{b}{\sin(\widehat{ABC})} = \frac{c}{\sin(\widehat{BCA})}$.

2. Application

ABC est un triangle tel que :

$$BC = 12 \text{ cm},\quad \widehat{BAC} = 40° \quad \text{et} \quad \widehat{ABC} = 32°.$$

Calculer le périmètre, en cm, et l'aire, en cm^2, de ce triangle. *Arrondir au dixième.*

90 Démontrer la concourance des médiatrices

Chercher Représenter Raisonner

1. a) Tracer un triangle ABC quelconque.

b) Tracer la droite Δ_1 médiatrice du segment $[AB]$ et la droite Δ_2 médiatrice du segment $[AC]$.

On note O le point d'intersection de Δ_1 et Δ_2.

2. Démontrer que le point O est équidistant des trois sommets du triangle ABC.

3. En déduire que les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes en le centre du cercle circonscrit à ce triangle, c'est-à-dire passant par les trois sommets de ce triangle.

91 Étudier un cas particulier

? Problème ouvert

Chercher Représenter Raisonner

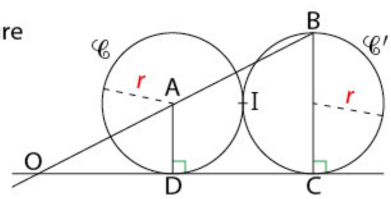
À l'exercice 90, on a montré que les médiatrices d'un triangle sont concourantes.

Démontrer que les trois médiatrices d'un triangle rectangle sont concourantes en le milieu de son hypoténuse.

92 Comprendre une figure

Raisonner Communiquer

Observer cette figure et exprimer la longueur OD en fonction de r.

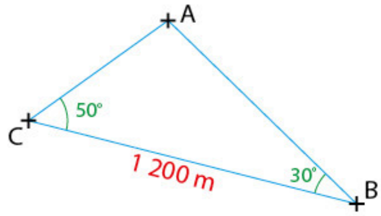


93 Prendre des initiatives

Chercher Raisonner Communiquer

Une association humanitaire souhaite creuser un forage qui sera utilisé par trois villages A, B, C.

Sur le schéma ci-dessous, les côtés du triangle ABC symbolisent les routes entre les villages.



1. a) Représenter cette situation en prenant 1 cm pour 100 m.

b) Le forage doit être situé à égale distance de chacun des villages.

Construire l'emplacement F du forage.

2. On note A' (resp. B', resp. C') le projeté orthogonal de F sur la route $[BC]$ (resp. $[CA]$, resp. $[AB]$).

On note $a = \widehat{FAB'}$, $b = \widehat{FAC'}$ et $c = \widehat{FBA'}$.

a) Déterminer les valeurs de a, b, c.

b) Calculer la distance, en m, du forage à chacune des routes.

Arrondir à l'unité.

94 Démontrer la concourance des hauteurs

Chercher Représenter Raisonner

1. a) Tracer un triangle ABC quelconque.

b) Tracer la droite d_1 (resp. d_2, resp. d_3) parallèle à (BC) (resp. à (AC), resp. à (AB)) passant par A (resp. par B, resp. par C).

On note M le point d'intersection de d_1 et d_2, N le point d'intersection de d_2 et d_3 et P le point d'intersection de d_1 et d_3.

2. a) Quelle est la nature des quadrilatères APCB et ACBM ?

Justifier.

b) Que peut-on en déduire pour le point A ?

c) On note H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.

Que représente la droite (AH) pour le triangle MNP ? Justifier.

d) Déduire des questions précédentes que les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes.

Le point d'intersection des trois hauteurs d'un triangle est appelé **orthocentre** du triangle.

95 Histoire des maths — Démontrer une formule d'Al-Kashi

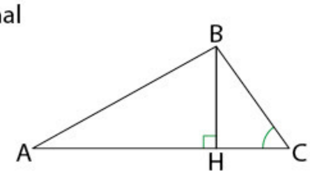
Chercher **Raisonner** **Calculer**

1. a, b, c désignent des nombres réels strictement positifs.

ABC est un triangle tel que :

$$AB = c,\ \ AC = b,\ \ BC = a.$$

H est le projeté orthogonal de B sur la droite (AC).



a) Exprimer CH et BH en fonction de a et de l'angle $\widehat{ACB}$.

b) En déduire AH en fonction de b, de a et de l'angle $\widehat{ACB}$.

c) Justifier que :

$$c^2 = (b - a\ \cos(\widehat{ACB}))^2 + (a\ \sin(\widehat{ACB}))^2$$

puis que :

$$c^2 = b^2 - 2ab\ \cos(\widehat{ACB}) + a^2(\cos^2(\widehat{ACB}) + \sin^2(\widehat{ACB}))$$

d) En déduire que $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ \cos\widehat{ACB}$.

2. Application

ABC est un triangle tel que :

$$AB = 3\text{ cm},\quad AC = 5\text{ cm}\quad \text{et}\quad \widehat{BAC} = 42°.$$

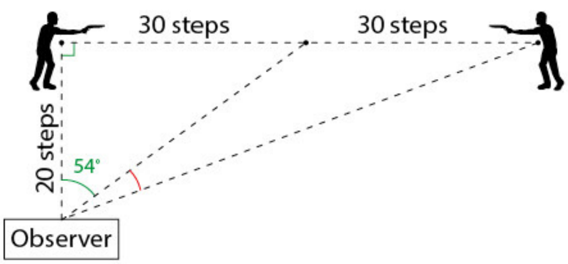
Calculer BC, en cm. *Arrondir au dixième.*

Né en 1380 en Iran, Al-Kashi est un illustre mathématicien et astronome perse.
Depuis les années 1990, son nom est rattaché à cette formule dite « des cosinus ».

96 Fight in a duel

Raisonner **Communiquer**

In the late nineteenth century, it was customary to settle arguments by fighting pistol duels. The diagram below shows two duellers and an observer.



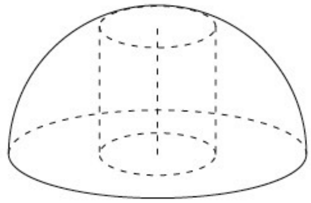
Find the measure of the red angle.
Round to the nearest degree.

97 Tice — Optimiser un volume — Narration de recherche

Chercher **Modéliser** **Communiquer**

Rédiger les différentes étapes de la recherche, sans omettre les fausses pistes et les changements de méthode.

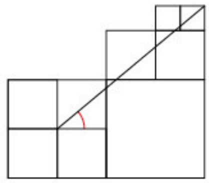
Problème Un cylindre est contenu dans une demi-sphère de rayon 5 cm. Quel doit être le rayon du cylindre pour que son volume soit maximum ?



98 Imaginer une stratégie

Chercher **Modéliser** **Calculer**

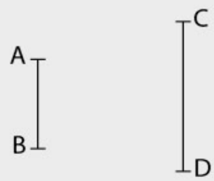
La figure ci-contre est constituée d'un assemblage de carrés.
Déterminer la mesure de l'angle rouge.
Arrondir à l'unité.



Des Défis

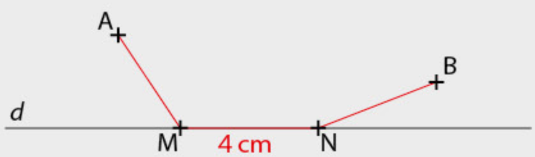
99 Rechercher un ensemble de points

[AB] et [CD] sont les deux segments parallèles ci-contre.
Déterminer l'ensemble de tous les milieux des segments d'extrémités un point du segment [AB] et un point du segment [CD].



100 Utiliser deux transformations

A et B sont deux points donnés. M et N sont deux points variables de la droite d, tels que MN = 4 cm.



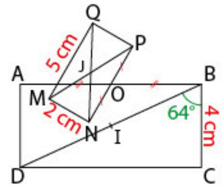
Déterminer l'emplacement des points M et N pour que le trajet en rouge soit le plus court possible.

QCM Bilan

QCM interactifs

101 Dans chaque cas, donner la réponse exacte en justifiant.

Pour les questions **1** à **4**, ABCD et MNPQ sont les rectangles de centres respectifs I et J représentés ci-contre.
Les côtés $[AB]$ et $[PN]$ de ces rectangles se coupent en leur milieu O.

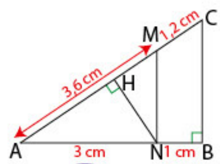


		A	B	C	D
1	Alors …	O appartient à la médiatrice du segment $[BD]$	la droite (JO) est la médiatrice du côté $[PN]$	O est le projeté orthogonal de N sur la droite (AB)	I est le projeté orthogonal de C sur la droite (BD)
2	Alors …	le projeté orthogonal de I sur la droite (PN) est O	le projeté orthogonal de O sur la droite (PM) est J	O et M ont le même projeté orthogonal sur la droite (AD)	ANBP est un parallélogramme
3	Alors …	$\cos(\widehat{MPN}) = 0{,}4$	$\tan(\widehat{MPN}) = 2{,}5$	$\widehat{MPN} \approx 22°$	$\widehat{JNM} \approx 58°$
4	Alors …	$AC \approx 8{,}2$ cm	$AB \approx 9{,}1$ cm	$\sin(64°) = \cos(26°)$	$IB \approx 3$ cm

Pour les questions **5** à **7**, EFG est un triangle rectangle en E tel que $FG = a$, avec $a > 0$ et $\cos(\widehat{EFG}) = 0{,}3$.

		A	B	C	D
5	Alors $\sin(\widehat{EFG})$ est égal à …	$0{,}7$	$\sqrt{0{,}7}$	$0{,}91$	$\sqrt{0{,}91}$
6	Alors $\tan(\widehat{EFG})$ est égal à …	$\dfrac{\sqrt{91}}{3}$	$\dfrac{3}{\sqrt{91}}$	$\dfrac{3}{\sqrt{0{,}91}}$	$\dfrac{\sqrt{9{,}1}}{3}$
7	On peut affirmer que …	$EG = 0{,}7a$	$EF = 0{,}3a$	$EF = \dfrac{a}{\tan(\widehat{EFG})}$	$EF^2 = a^2 + EG^2$

Pour les questions **8** à **10**, ABC est un triangle rectangle en B.
M et N sont des points des segments $[AC]$ et $[AB]$.
H est le projeté orthogonal de N sur la droite (AC).



		A	B	C	D
8	Alors …	$AN = \dfrac{1}{3}AB$	le triangle AMN est rectangle	M et H ont le même projeté orthogonal sur la droite (AB)	A est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB)
9	Alors …	$\widehat{BAC} \approx 34{,}5°$	$\widehat{ANH} \approx 55{,}5°$	$\widehat{HNM} \approx 33{,}6°$	$\widehat{CMN} \approx 125°$
10	Alors …	$BC \approx 2{,}5$ cm	$MN \approx 2$ cm	$HN \approx 1{,}4$ cm	$HM \approx 0{,}9$ cm

Vérifiez vos réponses p. 346 pour avoir votre note (considérez 1 point par réponse juste).

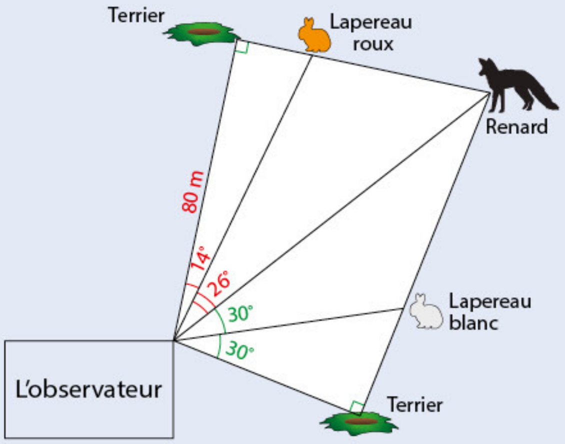
Exploiter ses compétences

102 Calculer une durée

La situation problème

À l'abri d'un affût, un observateur a repéré un renard, deux lapereaux et leurs terriers.
Utiliser les différentes informations pour déterminer si le renard a intérêt à chasser l'un des deux lapereaux.

DOC 1 La situation



DOC 2 Les données

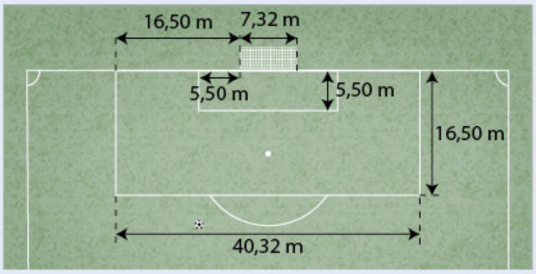
- Le renard peut courir à la vitesse de $14\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.
- Les lapereaux peuvent courir à la vitesse de $5{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.
- Les lapereaux déclenchent leur fuite une demi-seconde après que le renard ait lancé sa course pour les chasser.

103 Tirer un coup-franc

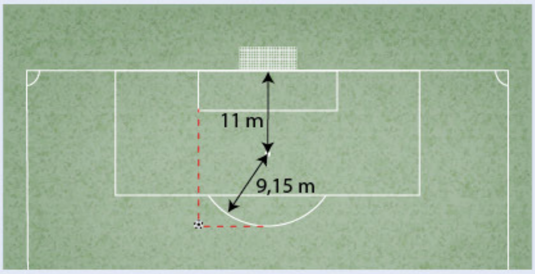
La situation problème

Le 18 novembre 1981, Michel Platini a marqué un célèbre coup-franc pour l'équipe de France de football lors du match France-Pays-Bas au Parc des Princes à Paris.
Un commentateur, avant le tir, disait :
« Michel Platini voit le but néerlandais sous un angle de moins de 20°. »
Utiliser les différentes informations pour savoir s'il avait raison.

DOC 1 Des dimensions d'un terrain de football



DOC 2 L'emplacement du ballon lors du coup-franc

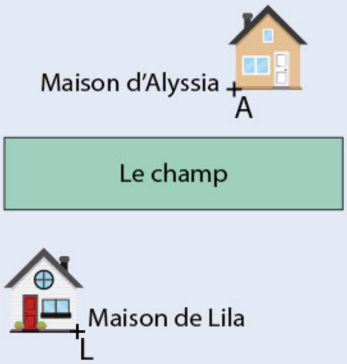


104 Optimiser un temps de trajet

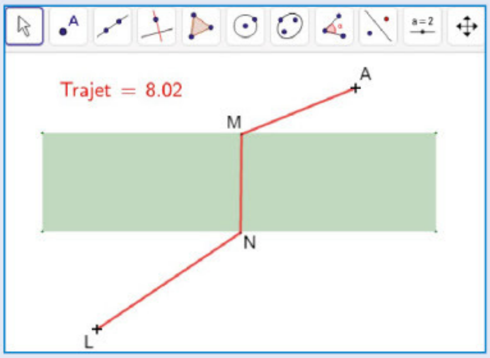
La situation problème

Pour se rendre chez son amie Alyssia, Lila prend son vélo. Sur le trajet, elle passe par un champ rectangulaire qu'elle traverse perpendiculairement aux bords du champ. Utiliser les différentes informations pour déterminer le trajet le plus court possible que Lila doit emprunter pour se rendre chez Alyssia.

DOC 1 Schéma de la situation



DOC 2 Conjecturer avec un logiciel

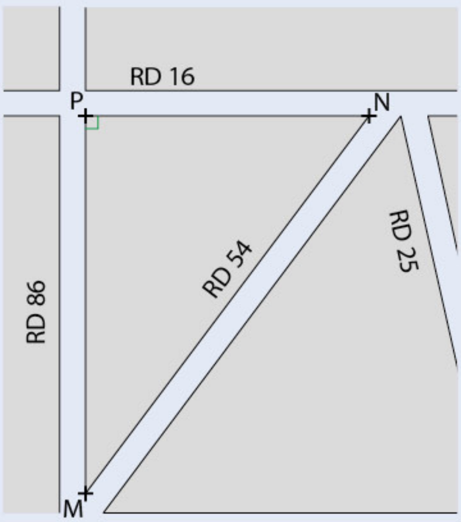


105 Localiser des emplacements

La situation problème

Le SAMU vient d'être appelé pour une intervention urgente.
L'hélicoptère est prêt à décoller.
Utiliser les différentes informations pour connaître la position actuelle de l'hélicoptère, ainsi que la durée du trajet jusqu'au lieu d'intervention.

DOC 1 Le schéma



DOC 2 Les données du plan

- Sur la route départementale 86, les points M et P sont distants de 8 km.
- Sur la route départementale 54, les points M et N sont distants de 10 km.
- Sur la route départementale 16, les points P et N sont distants de 6 km.
- Les routes départementales 54 et 25 forment un angle de 50°.
- Le lieu de l'intervention est situé sur la route départementale 25 à plus de 3 km de N.

DOC 3 L'hélicoptère

- Actuellement, l'hélicoptère se situe à la même distance de M, de N, de P et du lieu d'intervention.
- L'hélicoptère a une vitesse moyenne de 250 km$\cdot$h^{-1}.