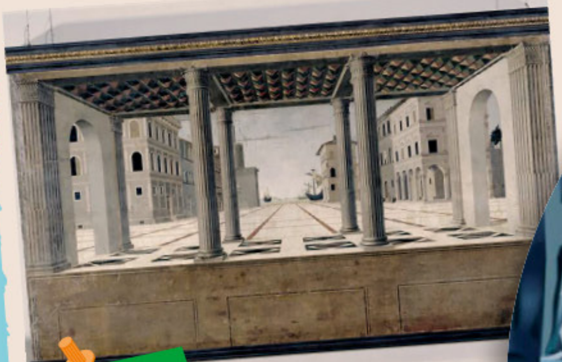
2 Comportement d'une suite



Avant

▶ À partir du 15e siècle, pour donner de la profondeur, les peintres utilisent les règles de la perspective. Toutes les lignes, qui dans la réalité sont parallèles, se rejoignent en un même point qu'on appelle le point de fuite et qui se situe sur la ligne d'horizon qu'on pourrait appeler ligne de l'infini.

À présent

▶ L'art fractal permet de réaliser des tableaux à l'aide d'outils informatiques en démultipliant une figure, ici une silhouette, dans des perspectives qui s'entrecroisent et se répètent à l'infini.

Les capacités travaillées dans ce chapitre

	Exercices
• Étudier les variations d'une suite.	1 à 4, 9 à 54
• Conjecturer une limite finie de suite.	6, 8, 55 à 62
• Conjecturer une limite infinie de suite.	5, 7, 63 à 71
• Déterminer un seuil.	77 à 82, 86, 93, 94

1 Sens de variation d'une suite

On se propose d'étudier l'évolution d'une population de lions dans une réserve.
On envisage pour cela des modèles théoriques de développement. Voici trois exemples appliqués à cette population.
On note p_n la population de cette réserve l'année n et on prend $p_0 = 500$ pour population initiale.

Modèle A	**Modèle B**	**Modèle C**
Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$: $p_{n+1} = 1{,}035p_n$	Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$: $p_{n+1} = 0{,}8p_n + 50$	Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$: $p_{n+1} = 3{,}4p_n(1 - 0{,}001p_n)$

1 **a)** Avec la calculatrice, tabuler chacune de ces suites et afficher la représentation graphique de ses 20 premiers termes.
b) Attribuer à chacun de ces modèles, l'une des appellations suivantes :
(1) Population décroissante avec apport annuel constant.
(2) Population oscillante (ni croissante ni décroissante).
(3) Population croissante à taux d'évolution constant.

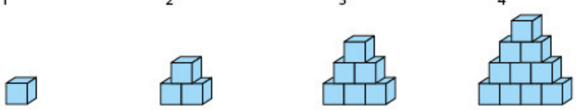
2 Le modèle A paraît-il durablement réaliste ? Expliquer.

3 On considère la suite (p_n) du modèle A.
a) Exprimer la différence $p_{n+1} - p_n$ en fonction de p_n. Quel est le signe de cette différence ?
b) Calculer $\dfrac{p_{n+1}}{p_n}$. Comparer ce nombre à 1.
c) Quel résultat sur l'évolution de la population de lions les réponses aux questions **a)** et **b)** permettent-elles de prouver ?

2 Notion de limite infinie d'une suite

On considère les constructions suivantes réalisées avec des cubes identiques.
Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, avec $n \geqslant 1$, on note c_n le nombre de cubes de la construction à l'étape n.

Étape 1	**Étape 2**	**Étape 3**	**Étape 4**
$c_1 = 1$	$c_2 = 3$	$c_3 = 6$	$c_4 = 10$



1 **a)** Calculer c_5 puis c_6.
b) Exprimer $c_n = 1 + 2 + \ldots + n$ en fonction de n. Calculer alors c_{50}.

2 **a)** Tabuler la suite (c_n) avec la calculatrice et conjecturer le comportement de ses termes lorsque n prend de grandes valeurs.
b) Avec la calculatrice, déterminer un nombre n de $\mathbb{N}$ tel que :
- $c_n > 10000$
- $c_n > 10^6$

1 Étude du sens de variation d'une suite

A Sens de variation d'une suite numérique

Définitions

(u_n) est une suite définie sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des nombres entiers naturels.

- Dire que la suite (u_n) est **croissante** signifie que, pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $\boldsymbol{u_{n+1} \geqslant u_n}$.
- Dire que la suite (u_n) est **décroissante** signifie que, pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $\boldsymbol{u_{n+1} \leqslant u_n}$.

Remarque : lorsque la suite (u_n) est définie à partir d'un rang n_0, on compare u_n et u_{n+1} pour tout nombre n de $\mathbb{N}$ tel que $n \geqslant n_0$.

Exemples

- (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 3n + 2$.
Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3(n+1) + 2 = 3n + 5$ donc $u_{n+1} \geqslant u_n$. La suite (u_n) est croissante.
- (v_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_{n+1} = v_n - 2n^2$ avec $v_0 = 1$.
Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $-2n^2 \leqslant 0$ donc $v_{n+1} \leqslant v_n$. La suite (v_n) est décroissante.
- (w_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = (-1)^n$.
$w_0 = 1$, $w_1 = -1$, $w_2 = 1$, $w_3 = -1$, … La suite (w_n) n'est ni croissante, ni décroissante.

B Étude du signe de la différence $u_{n+1} - u_n$

Propriétés

(u_n) est une suite définie sur $\mathbb{N}$.

(1) Si, pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $\boldsymbol{u_{n+1} - u_n \geqslant 0}$, alors la suite (u_n) est **croissante**.

(2) Si, pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $\boldsymbol{u_{n+1} - u_n \leqslant 0}$, alors la suite (u_n) est **décroissante**.

Démonstrations

(1) Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ équivaut à $u_{n+1} \geqslant u_n$ donc la suite (u_n) est croissante.

(2) Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ équivaut à $u_{n+1} \leqslant u_n$ donc la suite (u_n) est décroissante.

Remarque : dans le cas où tous les termes de la suite (u_n) sont strictement positifs, on peut comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 pour étudier le sens de variation de la suite (voir exercice résolu 2, p. 46).

C Suites du type $u_n = f(n)$

Propriétés

f est une fonction définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ et, pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $u_n = f(n)$.

(1) Si la fonction f est **croissante** sur $[0\,;+\infty[$, alors la suite (u_n) est **croissante**.

(2) Si la fonction f est **décroissante** sur $[0\,;+\infty[$, alors la suite (u_n) est **décroissante**.

Démonstration

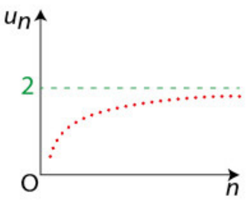
(1) f est croissante sur $[0\,;+\infty[$, donc pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $n+1 \geqslant n$ implique $f(n+1) \geqslant f(n)$.
Ainsi, $u_{n+1} \geqslant u_n$ et la suite (u_n) est croissante.

(2) On procède de façon analogue dans le cas où f est décroissante sur $[0\,;+\infty[$.

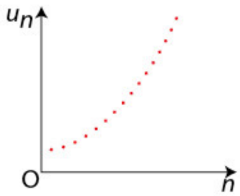
2 Notion de limite d'une suite

A Différentes situations

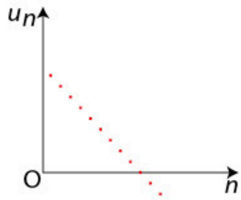
On se propose d'observer le comportement des termes u_n d'une suite lorsque n prend des valeurs de plus en plus grandes. Plusieurs situations peuvent se présenter.



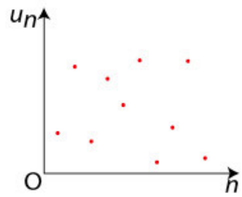
- Les termes u_n sont de plus en plus proches de 2.



- Les termes u_n sont de plus en plus grands.



- Les nombres $-u_n$ sont de plus en plus grands.



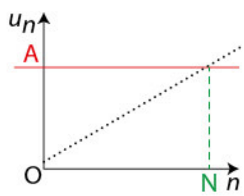
- Les termes u_n semblent se disperser.

B Suite de limite $+\infty$

Exemple

(u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 3n + 1$.

u_n est supérieur ou égal à …	10	100	1 000	10 000
à partir du rang N égal à …	3	33	333	3 333



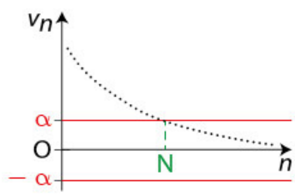
A désigne un nombre réel avec $A > 0$.
On peut démontrer que la suite (u_n) dépasse **définitivement** n'importe quel nombre A aussi grand soit-il à partir d'un certain rang N.
Pour traduire cette propriété, on dit que **la suite (u_n) a pour limite** $+\infty$ et on note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

C Suite de limite 0

Exemple

(v_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n = \dfrac{1}{n}$.

v_n appartient à l'intervalle …	$]-0{,}1\,;0{,}1[$	$]-0{,}05\,;0{,}05[$	$]-0{,}01\,;0{,}01[$
à partir du rang N égal à …	11	21	101



α désigne un nombre réel avec $\alpha > 0$.
On peut démontrer que les termes de la suite (v_n) appartiennent **définitivement** à tout intervalle $]-\alpha\,;\alpha[$, aussi petite que soit son amplitude, à partir d'un certain rang N.
Pour traduire cette propriété, on dit que **la suite (v_n) a pour limite 0** et on note $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.

Remarque : une suite peut avoir aussi pour limite un nombre réel autre que 0 ou avoir pour limite $-\infty$ (voir exercice résolu 5 p. 47) ou enfin ne pas avoir de limite.

Acquérir des automatismes

EXERCICES RÉSOLUS

1 Étudier le sens de variation d'une suite

→ Cours 1. B et C

Étudier le sens de variation de la suite :

a) (u_n) définie par $u_0 = -1$ et pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - n - 3$;

b) (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = 2n^2 - 8n + 11$.

Solution

a) Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = -n - 3$.
Or $n \geqslant 0$ donc $-n - 3 < 0$ et la suite (u_n) est décroissante.

b) Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $v_n = f(n)$ où f est la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = 2x^2 - 8x + 11$.
Pour tout nombre réel x, $f'(x) = 4x - 8$.
D'où le tableau de variations de la fonction f.

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	11	↘	3	↗	

La fonction f est croissante sur l'intervalle $[2\,;+\infty[$ donc la suite (v_n) est croissante à partir du rang $n = 2$.

Pour étudier le sens de variation d'une suite, on peut :
- déterminer le signe de $u_{n+1} - u_n$;
- remarquer que $v_n = f(n)$ et obtenir le sens de variation de la fonction f sur $[0\,;+\infty[$ à l'aide d'un calcul de dérivée.

Au **b)**, on aurait pu aussi étudier le signe de $v_{n+1} - v_n$.

2 Étudier le sens de variation d'une suite géométrique

→ Cours 1

Dans une région du monde où la sécheresse s'est durablement installée, on constate que le débit d'un ruisseau diminue de 5 % par jour. Aujourd'hui, le débit de ce ruisseau est de 300 m^3 par jour.
On note d_n le débit du ruisseau, en m^3 par jour, n jours plus tard. Ainsi $d_0 = 300$.
Démontrer que la suite (d_n) est décroissante.

Solution

Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $d_{n+1} = \left(1 - \frac{5}{100}\right)d_n = 0{,}95d_n$.
$d_0 = 300$ et on obtient les termes successifs de cette suite géométrique en multipliant par le nombre positif 0,95.
Donc pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $d_n > 0$.
$\frac{d_{n+1}}{d_n} = 0{,}95$ donc $\frac{d_{n+1}}{d_n} < 1$ c'est-à-dire $d_{n+1} < d_n$.
Donc la suite (d_n) est décroissante.

Pour une suite (u_n) à termes **strictement positifs** :
- si $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, alors $u_{n+1} < u_n$ et la suite (u_n) est décroissante ;
- si $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, alors $u_{n+1} > u_n$ et la suite (u_n) est croissante.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 1

3 Étudier le sens de variation de la suite :

a) (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 2n - 9$;

b) (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = -3n^2 - 3n + 1$.

Sur le modèle de l'exercice résolu 2

4 Étudier le sens de variation de la suite géométrique :

a) (u_n) de raison 0,5 et telle que $u_0 = 100$;

b) (v_n) de raison 3 et telle que $v_0 = 0{,}25$.

EXERCICES RÉSOLUS

5 Conjecturer une limite infinie de suite

→ Cours 2. B

(u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = -n^2$.

a) Représenter graphiquement cette suite à l'écran d'une calculatrice (*fenêtre* : $0 \leqslant X \leqslant 100$, pas 10 et $-10\,000 \leqslant Y \leqslant 10\,000$, pas 1 000) et la commenter.

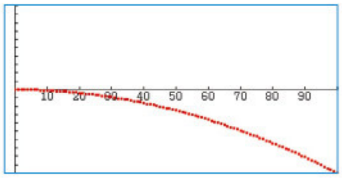
b) Interpréter pour la suite (u_n) l'affichage obtenu avec ce logiciel de calcul formel. Conjecturer la limite de la suite (u_n).

1 Résoudre$(\{-n^2 < -10^{20}, n \geq 0\}, n)$

→ $\{n > 10000000000\}$

Solution

a) Lorsque n augmente de 0 à 100, la suite (u_n) prend des valeurs négatives qui diminuent de 0 à -10000.



b) D'après l'écran de calcul formel, la suite (u_n) prend des valeurs plus petites que -10^{20} lorsque n est plus grand que 10^{10}.

Il semble que la suite (u_n) a pour limite $-\infty$.

On peut démontrer que pour tout nombre négatif B, $u_n < B$ à partir d'un certain rang N.

6 Conjecturer une limite finie de suite

→ Cours 2. C

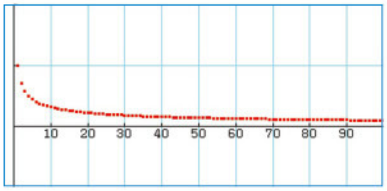
(u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

a) Représenter graphiquement cette suite à l'écran d'une calculatrice (*fenêtre* : $1 \leqslant X \leqslant 100$, pas 10 et $-1 \leqslant Y \leqslant 2$, pas 1) et la commenter.

b) Déterminer les valeurs de n pour lesquelles $0 < u_n < 10^{-10}$. Conjecturer la limite de la suite (u_n).

Solution

a) Lorsque n augmente de 1 à 100, la suite (u_n) prend des valeurs qui diminuent de 1 à 0,1.



b) • Pour tout $n \geqslant 1$, $\dfrac{1}{\sqrt{n}} > 0$.

• $\dfrac{1}{\sqrt{n}} < 10^{-10}$ équivaut à $\dfrac{1}{n} < 10^{-20}$ (car la fonction carré est croissante sur $[0\,;+\infty[$) soit $n > 10^{20}$ (car la fonction inverse est décroissante sur $]0\,;+\infty[$).

• Donc $0 < u_n < 10^{-10}$ si, et seulement si, $n > 10^{20}$. Il semble que la suite (u_n) a pour limite 0.

On peut démontrer que pour tout nombre $\alpha > 0$, $0 < u_n < \alpha$ à partir d'un certain rang N.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 5

7 Pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_n = 4 - 3n$.

a) Tabuler la suite (v_n) avec la calculatrice.

b) Déterminer les valeurs de n pour lesquelles :

• $v_n < -10^3$ • $v_n < -10^6$

c) Conjecturer la limite de la suite (v_n).

Sur le modèle de l'exercice résolu 6

8 Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $w_n = 2 + \dfrac{1}{n}$.

a) Tabuler la suite (w_n) avec la calculatrice.

b) Déterminer les valeurs de n telles que :

• $2 < w_n < 2{,}01$ • $2 < w_n < 2{,}0001$

c) Conjecturer la limite de la suite (w_n).

Sens de variation d'une suite et signe de $u_{n+1} - u_n$

→ Cours 1. A et B

Questions flash

9 Dans la feuille de calcul ci-dessous, on a affiché les premiers termes de trois suites (u_n), (v_n) et (w_n).
Conjecturer le sens de variation de chaque suite.

	A	B	C	D
1	n	u_n	v_n	w_n
2	0	1,0	1	0
3	1	1,1	0,8	-1
4	2	1,21	0,64	0
5	3	1,33	0,51	3
6	4	1,46	0,41	8
7	5	1,61	0,33	15
8	6	1,77	0,26	24
9	7	1,95	0,21	35
10	8	2,14	0,17	48
11	9	2,36	0,13	63
12	10	2,59	0,11	80

10 Julia affirme : « (u_n) est une suite arithmétique de raison 5, donc elle est décroissante. »
Que peut-on en penser ?

11 Paolo affirme : « (v_n) est la suite définie par $v_0 = -100$ et pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n - 2$. Donc cette suite est croissante. »
Que peut-on en penser ?

12 Dans chaque cas, (u_n) est une suite définie sur $\mathbb{N}$. Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ et conclure sur le sens de variation de la suite (u_n).

a) $u_n = -3n + 1$ **b)** $u_n = \dfrac{n+2}{5}$

c) $u_n = n^2 - 3$ **d)** $u_n = -n^2 + 2n$

13 Dans chaque cas, (v_n) est une suite définie sur $\mathbb{N}$. Étudier le signe de $v_{n+1} - v_n$ et conclure sur le sens de variation de la suite (v_n).

a) $v_0 = 5$ et $v_{n+1} = v_n + n + 4$;

b) $v_0 = -3$ et $v_{n+1} = v_n - 2n^2$.

14 (w_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = \dfrac{1}{n+1}$.

a) Démontrer que pour tout nombre n de $\mathbb{N}$:

$$w_{n+1} - w_n = \frac{-1}{(n+1)(n+2)}$$

b) En déduire le sens de variation de la suite (w_n).

15 (t_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$t_n = 1 - \frac{2}{n+3}$$

a) Démontrer que pour tout nombre n de $\mathbb{N}$:

$$t_{n+1} - t_n = \frac{2}{(n+3)(n+4)}$$

b) En déduire le sens de variation de la suite (t_n).

16 (v_n) est la suite définie par $v_0 = -1$ et pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n(1 - 2v_n)$.
Étudier le sens de variation de la suite (v_n).

17 Déterminer le sens de variation de la suite (t_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $t_n = \dfrac{n}{2n+1}$.

18 (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = 4 - (n+1)^2$$

a) Exprimer $u_{n+1} - u_n$ en fonction de n.

b) En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

19 (S_n) est la suite définie, pour tout nombre n de $\mathbb{N}$ avec $n \geqslant 1$, par $S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$.

a) Exprimer $S_{n+1} - S_n$ en fonction de n.

b) Quel est le sens de variation de la suite (S_n) ?

20 (u_n) est une suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + n^2 - 10$.
À partir de quel rang cette suite est-elle croissante ?

21 Du fait de son expansion et de ses efforts pour réduire son empreinte carbone, une entreprise a modélisé ses émissions, en tonne de CO_2, l'année $2019 + n$ (avec $n \in \mathbb{N}$) par $e_n = 40\,000 \times 0{,}89^n + 13\,000$.

a) Exprimer $e_{n+1} - e_n$ en fonction de n.

b) En déduire le sens de variation de la suite (e_n). Interpréter le résultat pour cette situation.

22 Marc a tabulé les termes d'indices pairs de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 3 + (-2)^n$.
Marc affirme : « Je conjecture que la suite (u_n) est croissante. »
Expliquer pourquoi en fait la suite (u_n) n'est ni croissante ni décroissante.

n	u(n)
0	4
2	7
4	19
6	67
8	259
10	1027

Étude de suites du type $u_n = f(n)$

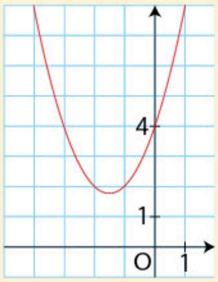
→ Cours 1. C

Questions Flash

23 Dans le repère ci-contre, la courbe représente la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 + 3x + 4$$

Décrire le sens de variation de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^2 + 3n + 4$.



24 (u_n) est une suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = f(n)$ où f est une fonction définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ dont voici le tableau de variations.

x	0		1		2		$+\infty$
$f(x)$	1	↗	4	↘	3	↗	

Décrire le sens de variation de la suite (u_n) à l'aide d'une phrase du type :

« (u_n) est … à partir …. »

25 **a)** Dresser le tableau de variations de la fonction carré sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
b) En déduire le sens de variation de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^2$.

26 **a)** Dresser le tableau de variations de la fonction inverse sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
b) En déduire le sens de variation de la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n = \dfrac{1}{n}$.

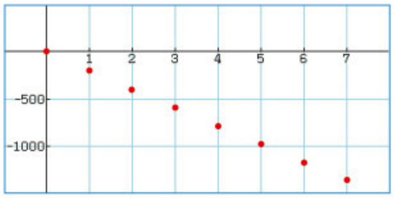
27 (a_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $a_n = 2 - 3n$.
a) Préciser une fonction f telle que pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $a_n = f(n)$.
b) Quel est le sens de variation de f sur $[0\,;+\infty[$? En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

28 (b_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $b_n = 2 - n^2$.
a) Préciser une fonction f telle que pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $b_n = f(n)$.
b) Dresser le tableau de variations de f sur $[0\,;+\infty[$. En déduire le sens de variation de la suite (b_n).

29 Imaginer une suite du type $u_n = f(n)$ qui soit :
a) croissante ; **b)** décroissante.

30 Dans chaque cas, (u_n) est une suite du type $u_n = f(n)$.
Préciser une telle fonction f, dresser son tableau de variations sur $[0\,;+\infty[$ et donner le sens de variation de la suite (u_n).
a) Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $u_n = (n+1)^2$.
b) Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $u_n = 2 - \dfrac{10}{n+1}$.

31 Laura a affiché à l'écran de sa calculatrice les premiers points de la représentation graphique de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^2 - 200n$.



Laura affirme : « La suite (u_n) est décroissante. »
Écrire u_n sous la forme $f(n)$ en précisant une telle fonction f, et prouver que Laura se trompe.

32 (w_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$w_n = 1 + \frac{2n}{n+1}$$

Exprimer w_n sous la forme $f(n)$ en précisant une telle fonction f, étudier les variations de f sur $[0\,;+\infty[$ et en déduire le sens de variation de la suite (w_n).

33 (v_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$v_n = 0{,}2n^2 + n - 3$$

Étudier le sens de variation de la suite (v_n).

34 (w_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$w_n = 2 + \frac{1}{n+3}$$

a) Avec la calculatrice, afficher les premiers termes de la suite (w_n) et les premiers points de sa représentation graphique.
b) Démontrer que la suite (w_n) est décroissante.

35 Chaque heure, entre 2 h et 13 h, la hauteur, en m, de la marée a été modélisée par la suite (h_n) définie pour tout nombre n de $\mathbb{N}$ avec $2 \leqslant n \leqslant 13$, par :

$$h_n = -0{,}2n^2 + 2{,}5n - 1{,}6$$

a) Déterminer le sens de variation de la suite (h_n).
b) À 8 h, est-on en marée montante ou descendante ?

Comparaison de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1

→ Cours 1

Questions flash

36 Avec cette feuille de calcul, conjecturer la nature de la suite (u_n) et son sens de variation.

	A	B	C
1	n	u_n	u_{n+1}/u_n
2	0	8	
3	1	6	0,75
4	2	4,5	0,75
5	3	3,375	0,75
6	4	2,53125	0,75
7	5	1,8984375	0,75
8	6	1,42382813	0,75
9	7	1,06787109	0,75

37 Rayan affirme : « (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$ avec $v_0 = 3$, donc la suite (v_n) est décroissante. » Que peut-on en penser ?

38 Dans chaque cas, (u_n) est une suite définie sur $\mathbb{N}$ à termes strictement positifs.
Déterminer mentalement son sens de variation.
a) Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n$.
b) Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}u_n$.
c) Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = (\sqrt{2} - 1)u_n$.

39 (v_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = 5 \times 2^n$.
a) Pourquoi les termes de cette suite sont-ils strictement positifs ?
b) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique. Préciser son premier terme et sa raison.
c) En déduire le sens de variation de cette suite.

40 (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = \frac{2^n}{7^{n+1}}$$

a) Afficher à l'écran de la calculatrice les premiers points de la représentation graphique de la suite (u_n) et conjecturer son sens de variation.
b) Démontrer que pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2}{7}$.
c) Prouver alors la conjecture émise à la question **a)**.

41 (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \frac{9^{n+1}}{7^n}$.
Étudier son sens de variation.

42 (v_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = \frac{3^n}{n+2}$$

a) Expliquer pourquoi tous les termes de cette suite sont strictement positifs.
b) Utiliser cet écran de calcul formel pour étudier le sens de variation de la suite (v_n).

1	$v(n) := \frac{3^n}{n+2}$
	$\rightarrow \mathbf{v(n)} := \frac{3^n}{n+2}$
2	Simplifier$\left(\frac{v(n+1)}{v(n)} - 1\right)$
	$\rightarrow \frac{2n+3}{n+3}$

43 (u_n) est la suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$ telle que $u_0 = 130$.
a) Exprimer u_n en fonction de n.
b) Lisa affirme : « La suite (u_n) est décroissante. » Expliquer pourquoi Lisa a raison. Justifier.

44 Une ville est victime d'une épidémie. Le nombre de malades au jour n d'observation est modélisé par la suite (m_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$m_n = 2 + 0{,}35^n$$

a) Étudier le sens de variation de la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = 0{,}35^n$.
b) En déduire le sens de variation de la suite (m_n).

45 Deux étudiantes, après expérimentation, ont modélisé l'évolution de la masse d'une culture de levure.

Elles notent ainsi m_n la masse, en gramme, de la culture après n heures d'observation et posent, pour tout nombre entier naturel n :
$m_n = m_0 \times 1{,}22^n$
où $m_0 = 0{,}6$ g est la masse au départ.
1. a) Afficher, à la calculatrice ou dans une feuille de calcul, la masse de la culture toutes les heures pendant une journée.
b) Étudier le sens de variation de la suite (m_n).
2. a) Quelle est la masse, en kg, de la culture de levure au bout de 24 h ? de 48 h ?
Arrondir au centième.
b) Au bout de combien de temps la masse de la culture dépasse-t-elle 20 kg ?
3. Critiquer le modèle proposé par les étudiantes.

Choix d'une méthode pour étudier le sens de variation d'une suite

→ Cours 1

Questions Flash

46 (u_n), (v_n), (w_n) sont des suites définies sur $\mathbb{N}$ par :

$u_n = -2 + 5n$; $v_n = 7\left(\frac{1}{4}\right)^n$; $w_n = \frac{n-1}{n^2+1}$.

Associer chaque suite à celle(s) des méthodes ci-dessous qui paraît (ou paraissent) bien adaptées pour étudier son sens de variation.

Méthode 1
Si pour tout n, $a_n = f(n)$, on étudie le sens de variation de la fonction f sur $[0\,;+\infty[$.

Méthode 2
Si pour tout n, $a_n > 0$, on compare $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ à 1.

Méthode 3
On étudie le signe de la différence $a_{n+1} - a_n$.

47 (u_n) est la suite définie pour tout nombre n de $\mathbb{N}$ avec $n \geqslant 1$, par $u_n = \frac{2^n}{n}$.

a) Avec la calculatrice, tabuler la suite (u_n) et conjecturer son sens de variation.

b) Démontrer cette conjecture.

Pour comparer un nombre k à 1, on peut étudier le signe de la différence $k-1$.

48 (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = 8 - 3 \times 0{,}7^n$$

a) Étudier le sens de variation de la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = 3 \times 0{,}7^n$.

b) En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

49 Algo L'algorithme ci-dessous affiche le terme u_n d'une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$.

```
U ← 6
Pour k allant de 1 à n
  | U ← U − 3 + k
Fin Pour
```

a) Donner u_0. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.

b) Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

c) Quel est le sens de variation de la suite (u_n) ?

50 (a_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$a_n = \frac{3n-1}{4n+5}$$

a) Avec la calculatrice, tabuler la suite (a_n) et conjecturer son sens de variation.

b) Démontrer cette conjecture.

51 (S_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n}$$

a) Démontrer que la suite (S_n) est croissante.

b) Exprimer S_n explicitement en fonction de n.

c) En déduire que pour tout nombre n de $\mathbb{N}$:

$$0 < S_n < 1$$

52 (u_n) est la suite définie par $u_0 = 3$ et pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n - 1$.

a) (v_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 1$. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison 2 dont on précisera le premier terme v_0.

b) Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

c) Étudier le sens de variation de la suite (u_n).

53 (u_n) est la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n + 2$.

a) On admet qu'il existe deux nombres réels A et B tels que pour tout nombre n de $\mathbb{N}$:

$$u_n = A \times 3^n + B$$

Déterminer A et B.

b) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

54 Lors de son ouverture, une chaîne de télévision locale comptait 500 abonnés. Chaque année, elle garde 90 % des abonnés de l'année précédente et en gagne 200. On note u_n le nombre d'abonnés la n-ième année. Ainsi, $u_0 = 500$.

a) Calculer u_1 et u_2.

b) Justifier que pour tout nombre n de $\mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = 0{,}9u_n + 200$$

c) Démontrer que la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 2\,000$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

d) Étudier le sens de variation de la suite (u_n).

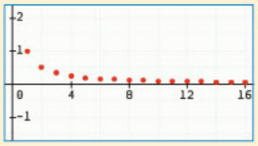
La chaîne locale peut-elle se féliciter de ses résultats ?

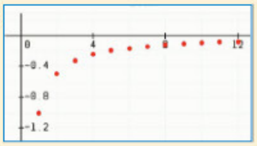
Notion de limite finie d'une suite

→ Cours 2. C

Questions Flash

55 Dans chaque cas, conjecturer la limite de la suite dont les premiers termes sont représentés à l'écran d'une calculatrice.

❶


❷


56 Dans chaque cas, conjecturer la limite de la suite dont certains termes sont calculés dans la feuille de calcul.

a)

	A	B
1	n	u(n)
2	1	0
3	2	-0,66667
4	3	-1
5	4	-1,2
6		
22	20	-1,80952
23	21	-1,81818
24	22	-1,82609
25	23	-1,83333
26		
656	653	-1,99388
657	654	-1,99389
658	655	-1,9939
659	656	-1,99391

b)

	A	B
1	n	u(n)
2	1	6
3	2	5,5
4	3	5,33333
5	4	5,25
6		
22	20	5,05
23	21	5,04762
24	22	5,04545
25	23	5,04348
26		
100	97	5,01031
101	98	5,0102
102	99	5,0101
103	100	5,01

57 Avec la calculatrice, conjecturer la limite de chacune des suites définies sur $\mathbb{N}$ par :

a) $u_n = 2 - \dfrac{1}{n^2+1}$ **b)** $v_n = 5 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ **c)** $w_n = 5 - \dfrac{3}{4^n}$

58 (v_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$v_n = 3 \times 0{,}4^n$$

a) Calculer les cinq premiers termes de cette suite.

b) Tabuler cette suite avec la calculatrice et déterminer les valeurs de n telles que :

- $0 < v_n < 10^{-3}$
- $0 < v_n < 10^{-6}$

c) Conjecturer la limite de la suite (v_n).

59 (u_n) est la suite définie pour tout nombre n de $\mathbb{N}$ avec $n \geqslant 1$, par $u_n = \dfrac{1}{n^2}$.

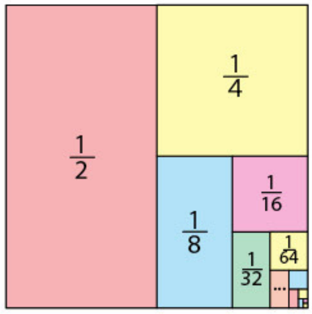
a) Calculer les cinq premiers termes de la suite.

b) Tabuler cette suite avec la calculatrice et déterminer les valeurs de n telles que :

- $0 < u_n < 10^{-2}$
- $0 < u_n < 10^{-4}$

c) Conjecturer la limite de la suite (u_n).

60 Voici un carré de côté 1.



a) Expliquer la signification de la fraction inscrite dans chacun des rectangles colorés.

b) Utiliser cette figure, pour conjecturer la limite de la somme $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \ldots + \dfrac{1}{2^n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

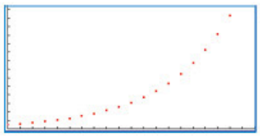
61 Des entomologistes estiment à 15 000 individus une population d'insectes.

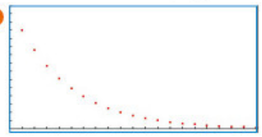
Malheureusement, un virus décime cette population qui diminue de 20 % par an.

1. a) Expliquer pourquoi on peut modéliser cette situation par la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = 15000 \times 0{,}8^n$$

b) Lequel des deux écrans affiche les premiers points de la représentation graphique de la suite (u_n) ?

❶


❷


2. a) Avec la calculatrice, déterminer au bout de combien d'années, le nombre d'insectes sera inférieur à :

- 5 000
- 1 000
- 100

b) Conjecturer la limite de la suite (u_n).

Interpréter ce résultat.

62 Un zoologue a constaté que, dans une réserve, le nombre de gazelles diminue chaque année d'environ 9 %.

En 2016, il en dénombrait 1 250.

a) Justifier que l'on peut modéliser cette situation par la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = 1250 \times 0{,}91^n$.

b) Selon ce modèle, quel sera le nombre de gazelles en 2020 ? *Arrondir à l'unité.*

c) Avec la calculatrice, déterminer en quelle année la population de gazelles sera inférieure à 100 individus.

d) Conjecturer la limite de cette suite.

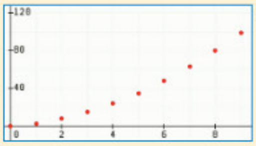
Interpréter ce résultat.

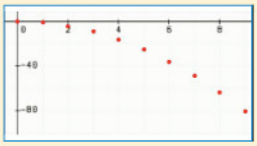
Notion de limite infinie d'une suite

→ Cours 2. B

Questions Flash

63 Dans chaque cas, conjecturer la limite de la suite dont les premiers termes sont représentés à l'écran d'une calculatrice.

1


2


64 Dans chaque cas, conjecturer la limite de la suite dont certains termes sont calculés dans la feuille de calcul.

a)

	A	B
1	n	u(n)
2	1	6
3	2	8
4	3	12
5	4	20
6	5	36
7	6	68
8	7	132
9	8	260
10	9	516
11	10	1028
12	11	2052
13	12	4100
14	13	8196
15	14	16388
16	15	32772

b)

	A	B
1	n	u(n)
2	0	-47
3	1	-71
4	2	-106
5	3	-159
6	4	-238
7	5	-357
8	6	-535
9	7	-803
10	8	-1 205
11	9	-1 807
12	10	-2 710
13	11	-4 065
14	12	-6 098
15	13	-9 147
16	14	-13 721
17	15	-20 581

65 Avec la calculatrice, conjecturer la limite de chacune des suites définies sur $\mathbb{N}$ par :

a) $u_n = 3^n$ **b)** $v_n = 5 + \left(\frac{3}{2}\right)^n$ **c)** $w_n = -\left(\frac{5}{4}\right)^n$

66 (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = -n^2 + 2n + 3$$

a) Avec la calculatrice, afficher la représentation graphique de la suite (u_n) et tabuler cette suite.

b) Déterminer les valeurs de n telles que :

- $u_n < -100$
- $u_n < -1000$

c) Conjecturer la limite de la suite (u_n).

67 (v_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$v_n = 5n^2 - 10n - 1$$

a) Tabuler la suite (v_n) avec la calculatrice.

b) Déterminer les valeurs de n telles que :

- $v_n > 500$
- $v_n > 5000$

c) Conjecturer la limite de la suite (v_n).

68 (u_n) est la suite arithmétique de raison 3,5 telle que $u_0 = 1$.

a) Exprimer u_n en fonction de n.

b) Déterminer algébriquement les valeurs de n telles que :

- $u_n > 1000$
- $u_n > 10^6$

c) Conjecturer la limite de la suite (u_n).

69 (v_n) est la suite géométrique de raison $\frac{3}{2}$ telle que $v_0 = 0{,}1$.

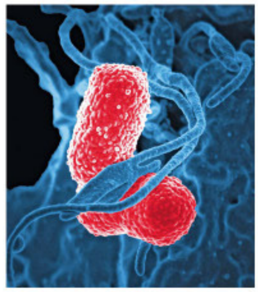
a) Exprimer v_n en fonction de n.

b) Tabuler la suite (v_n) avec la calculatrice et déterminer les valeurs de n telles que :

- $v_n > 1000$
- $v_n > 10^6$

c) Conjecturer la limite de la suite (v_n).

70 Des biologistes étudient le développement de la bactérie *Neisseira meningitidis*, responsable de certaines méningites. In vitro, on a constaté que le nombre de bactéries augmente de 25 % chaque heure.



On place au début de l'expérience 10 bactéries dans une éprouvette.

a) Modéliser cette situation à l'aide d'une suite géométrique (u_n).

b) Avec la calculatrice, afficher le nombre de bactéries présentes dans l'éprouvette toutes les heures pendant 50 h.

c) Au bout de combien de temps le nombre de bactéries est-il supérieur à 100 000 ?

d) Conjecturer la limite de la suite (u_n).

71 Des relevés statistiques ont permis d'estimer que la population d'une ville croît de 5 % par an. Au début de l'année 2019, cette ville compte 150 000 habitants.

a) Modéliser par une suite géométrique (p_n) la population de la ville pour les prochaines années.

b) Avec la calculatrice, afficher les vingt premiers termes de cette suite.

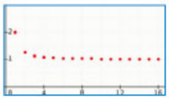
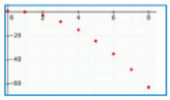
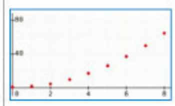
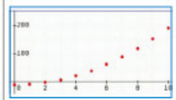
c) Conjecturer la limite de la suite (p_n).

Interpréter ce résultat pour cette situation.

QCM interactifs

Pour se tester

72 Dans chaque cas, donner la réponse exacte sans justifier.

		A	B	C	D
1	(u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = n^2 + 1$ Une représentation graphique de la suite (u_n) est …				
2	(v_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = n^2 - 4n + 25$ Alors …	(v_n) est croissante	(v_n) est décroissante	(v_n) est croissante à partir de 1	(v_n) est croissante à partir de 2
3	(w_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = n^2 - 1$. Alors $w_n > 10000$ pour tout n supérieur ou égal à …	50	99	100	101
4	(t_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $t_n = \frac{2}{n} + 3$. Alors $3 < t_n < 3{,}01$ pour tout n supérieur ou égal à …	100	199	200	201

73 Dans chaque cas, donner la (ou les) réponse(s) exacte(s) sans justifier.

		A	B	C	D
1	(u_n) est la suite arithmétique de raison 1,5 telle que $u_0 = 5$. Avec la calculatrice, on conjecture que la suite (u_n) a pour limite …	0	-5	$+\infty$	$-\infty$
2	(v_n) est la suite géométrique de raison 0,5 telle que $v_0 = -5$. Avec la calculatrice, on conjecture que la suite (v_n) a pour limite …	0	-5	$+\infty$	$-\infty$
3	Une suite (w_n) définie sur $\mathbb{N}$ peut …	ne pas avoir de limite	avoir pour limite $+\infty$	avoir pour limite $-\infty$	avoir pour limite 0 et 1

74 Dans chaque cas, dire si l'affirmation est vraie ou fausse en justifiant.

(u_n) est la suite définie pour tout nombre n de $\mathbb{N}$ avec $n \geqslant 1$, par $u_n = 2 + \frac{1}{n^2}$.

Affirmations :

1. Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$ avec $n \geqslant 1$, $u_n < 2$.
2. Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$ avec $n \geqslant 1$, $u_n < 3$.
3. La suite (u_n) est croissante.
4. Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$ avec $n \geqslant 1000$, $2 < u_n \leqslant 2 + 10^{-6}$.
5. La suite (u_n) a pour limite 1,999 9.

Vérifiez vos réponses : p. 340

Nathan live!

75 Conjecturer puis prouver le sens de variation d'une suite

(u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^2 - 4n + 6$.

1. a) Entrer dans le menu Récurrence ou Suites de la calculatrice ou bien dans Mode, mettre SUITE en surbrillance. Saisir ensuite l'expression de u_n.

b) Effectuer les réglages (SET ou déf table ou Régler l'intervalle) et afficher le tableau des valeurs de u_n.

c) Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n).

2. On note f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = x^2 - 4x + 6$.

a) Déterminer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f sur $[0\,;+\infty[$.

b) En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

AIDE

Pour saisir n sur une calculatrice, soit on clique sur F1 pour certaines, soit on clique sur la touche X,T,θ,n ou x,n,t pour d'autres.

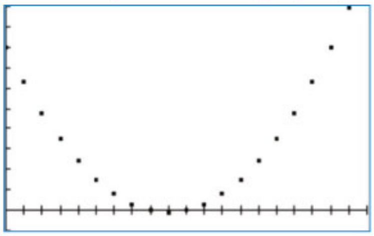
76 Conjecturer la limite d'une suite

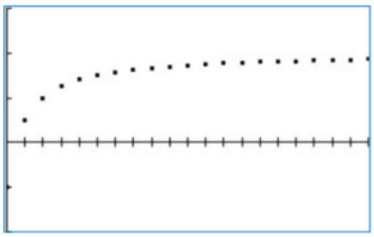
(u_n), (v_n), (w_n) sont les suites définies sur $\mathbb{N}$ par :

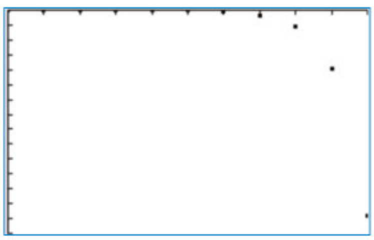
- $u_n = n^2 - 10n + 80$
- $v_n = \dfrac{2n-1}{n+1}$
- $w_n = -5 \times \left(\dfrac{7}{2}\right)^n$

1. Associer chaque suite à sa table de valeurs et à sa représentation graphique.

n	❶	❷	❸
0	-5	80	-1
1	-17.5	71	0.5
2	-61.25	64	1
3	-214.4	59	1.25
4	-750.3	56	1.4
5	-2626	55	1.5
6	-9191	56	1.5714
7	-32170	59	1.625
8	-1.1E5	64	1.6667
9	-3.9E5	71	1.7
10	-1.4E6	80	1.7273

❶


❷


❸


2. Pour laquelle de ces suites a-t-on à partir d'un certain rang (à préciser par lecture de la table) :

a) $1{,}99 < \square_n < 2$?

b) $\square_n < -10^{10}$?

c) $\square_n > 10^6$?

3. Conjecturer la limite de chacune de ces trois suites.

AIDE

2. Il est nécessaire de parcourir la table de chaque suite pour de grandes valeurs de n.

EXERCICE RÉSOLU

77 Déterminer un seuil avec un algorithme

(u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 300 + 3^n$.
On se propose de déterminer à partir de quel rang les termes de cette suite dépassent 5 000.
Pour cela on utilise la fonction Seuil ci-contre écrite en langage Python.

```
1 def Seuil(s):
2     i=0
3     u=301
4     while u<=s:
5         i=i+1
6         u=300+3**i
7     return i
```

a) Expliquer le rôle des lignes 2 et 3 ?
b) Compléter le tableau de suivi des variables pour déterminer Seuil(5000).
Quelle valeur de i est obtenue à la fin de l'algorithme ?

$u \leqslant s$										
i										
u										

c) Quel est le rôle de cette fonction Seuil ?
d) Saisir cette fonction et l'exécuter pour déterminer Seuil(10^6).
Interpréter le résultat pour la suite (u_n).

Solution

a) $u_0 = 300 + 3^0 = 301$; aux lignes 2 et 3 on initialise la variable i à 0 et la variable u à 301 (valeur de u_0).
b)

$u \leqslant s$		Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Faux
i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	
u	301	303	309	327	381	543	1 029	2 487	6 861	

La valeur obtenue à la fin de l'algorithme est 8 et $u_8 = 300 + 3^8 = 6\,861$.
c) Cette fonction renvoie la plus petite valeur de n telle que u_n dépasse la valeur s du paramètre (autrement dit $u > s$).
d) Voici l'affichage obtenu dans la console Python.

```
>>> Seuil(1E6)
13
```

Cela signifie que la plus petite valeur de n telle que $u_n > 10^6$ est 13 et $u_{13} = 300 + 3^{13} = 1\,594\,623$.

On dit que s est un seuil et qu'il s'agit d'un algorithme de seuil.

À VOTRE TOUR

78 (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = -2 + 1{,}2^n$$

a) Adapter la fonction Seuil de l'exercice 77 à cette suite.
b) Saisir la fonction et l'exécuter pour déterminer :
- Seuil(500)
- Seuil(10^6)
- Seuil(10^{10})

Interpréter les résultats pour la suite (u_n).

79 (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = 2n^2 - 4n + 5$$

a) Adapter la fonction Seuil de l'exercice 77 à cette suite.
b) Saisir la fonction et l'exécuter pour déterminer :
- Seuil(100)
- Seuil(1000)
- Seuil(10^6)

Interpréter les résultats pour la suite (u_n).

EXERCICE RÉSOLU

80 Déterminer un seuil avec le tableur

Un modèle considère que le nombre de bactéries d'une population double chaque quart d'heure.
On suppose que le nombre de bactéries présentes à l'instant 0 sur un aliment est égal à 100.
On note b_n leur nombre à l'instant n, où n est le nombre de quarts d'heure écoulés.

a) Exprimer b_n en fonction de n.

b) Avec le tableur, réaliser la feuille de calcul ci-contre.

	A	B	C	D
1	n	b(n)	Seuil	Seuil dépassé ?
2	0	100		
3	1	200		
4	2	400		
5	3	800		

c) Saisir 10 000 dans la cellule C2.
Dans la cellule D2, saisir la formule =SI(B2>C2;"Vrai";"Faux") et la recopier vers le bas jusqu'à lire « Vrai ».
Interpréter ce résultat pour la population de bactéries.

d) Les biologistes estiment l'aliment impropre à la consommation lorsque le nombre de bactéries dépasse 500 000. Après combien d'heures, cela se produit-il ?

Solution

a) (b_n) est la suite géométrique de raison 2 telle que $b_0 = 100$.
Donc, pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $b_n = 100 \times 2^n$.

b) c) On obtient la feuille de calcul ci-dessous à gauche.
On lit que le nombre de bactéries dépasse 10 000 pour la 1re fois lors du 7e quart d'heure $(b_7 = 12800)$.

	A	B	C	D
1	n	b(n)	Seuil	Seuil dépassé ?
2	0	100	10 000	Faux
3	1	200		Faux
4	2	400		Faux
5	3	800		Faux
6	4	1 600		Faux
7	5	3 200		Faux
8	6	6 400		Faux
9	7	12 800		Vrai

	A	B	C	D
1	n	b(n)	Seuil	Seuil dépassé ?
2	0	100	500 000	Faux
3	1	200		Faux
4				
15	12	409 600		Faux
16	13	819 200		Vrai

d) On saisit 500 000 en cellule C2. On obtient la feuille de calcul ci-dessus à droite. On dit que l'aliment devient impropre à la consommation lors du 13e quart d'heure, c'est-à-dire au bout de 3 h 15 min.

À VOTRE TOUR

81 Des scientifiques ont observé qu'une population de pies bavardes augmente chaque année de 10 %. À l'instant 0, il y avait 270 pies.
On note p_n le nombre de pies après n jours.

a) Exprimer p_n en fonction de n.

b) Adapter la feuille de calcul de l'exercice 80 pour déterminer dans combien d'années les scientifiques estiment qu'il y aura plus de 10 000 pies dans cette population.

82 (t_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$t_n = 3{,}1n^2 + 0{,}7n - 98{,}5$$

a) Adapter la feuille de calcul de l'exercice 80 à cette suite.

b) Déterminer le plus petit nombre entier naturel n tel que :

- $t_n > 100$
- $t_n > 1000$
- $t_n > 10000$
- $t_n > 10^6$

c) Conjecturer la limite de la suite (t_n).

Démontrer et raisonner

83 Étudier le sens de variation d'une suite arithmétique

Méthode
Une suite arithmétique (u_n) est une suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = f(n)$ où f est une fonction affine.
Pour étudier le sens de variation de la suite (u_n) on peut étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

1. (u_n) est une suite arithmétique de raison r.
a) Exprimer u_n en fonction de n, r et u_0.
b) Pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = f(n)$ où f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$.
Préciser les nombres réels a et b.
c) En observant le signe de a, donner le sens de variation de la fonction f sur $[0\,;+\infty[$ puis de la suite (u_n).
2. Dans chaque cas, donner le sens de variation de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :
a) $u_n = \dfrac{5}{2}n - 1$ **b)** $u_n = (1-\sqrt{2})n + 7$

84 Étudier le sens de variation d'une suite (q^n) avec q nombre réel tel que $q > 0$

Méthode
Pour étudier le sens de variation d'une suite géométrique (u_n) à termes strictement positifs, on compare $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.

1. (u_n) est la suite géométrique définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$u_n = q^n$$
Étudier le sens de variation de la suite (u_n) selon les valeurs de q.
2. (v_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$v_n = v_0 q^n$$
Démontrer que les suites (v_n) et (q^n) ont :
a) le même sens de variation lorsque $v_0 > 0$;
b) des sens de variation contraires lorsque $v_0 < 0$.
3. Dans chaque cas, donner le sens de variation de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :
a) $u_n = 2 \times 3^n$ **b)** $u_n = -5 \times 0{,}75^n$
c) $u_n = 6 \times 0{,}5^n$ **d)** $u_n = -3 \times 4{,}5^n$

Étudier le sens de variation d'une suite

85 Le club de judo d'une ville compte 150 adhérents au 1er janvier 2019. Le trésorier constate que, chaque année, 80 % des adhérents renouvellent leur adhésion, et que de plus il y a 20 nouveaux adhérents.
On note u_n le nombre d'adhérents de l'année $2019 + n$.
Ainsi, $u_0 = 150$.
a) Montrer que, pour tout nombre n de $\mathbb{N}$:
$$u_{n+1} = 0{,}8u_n + 20$$
b) On note (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 100$.
Démontrer que (v_n) est une suite géométrique.
Préciser sa raison et son premier terme.
c) Quel est le sens de variation de la suite (v_n) ?
En déduire le sens de variation du nombre d'adhérents du club de judo.

86 Algo Un jeu consiste à tirer au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes.
Le joueur est déclaré gagnant lorsqu'il tire un 10.
1. a) Quelle est la probabilité de gagner à ce jeu en une partie ?
b) Montrer que la probabilité de gagner à ce jeu au moins une fois en n parties indépendantes $(n > 1)$ est :
$$p_n = 1 - \left(\frac{7}{8}\right)^n$$
c) Déterminer le sens de variation de la suite (p_n).
2. Cet algorithme détermine le nombre n de parties minimum à effectuer afin que la probabilité de gagner au jeu au moins une fois soit strictement supérieure à 0,95.

$n \leftarrow 1$
$p \leftarrow \dfrac{7}{8}$
Tant que $1 - p$ $\square$ 0,95
  $n \leftarrow n + 1$
  $p \leftarrow$ $\square$
Fin Tant que

a) Recopier et compléter cet algorithme.
b) Coder cet algorithme par une fonction écrite en langage Python. Saisir et exécuter cette fonction pour déterminer n.

87 (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par :
$$u_n = \frac{2^n}{n^2}$$
a) Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n) avec la calculatrice.
b) Démontrer cette conjecture.

88 Tice (u_n) et (v_n) sont les suites définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 2$ et pour tout nombre n de $\mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}.$$

1. Conjecturer à l'aide du tableur le sens de variation de chacune des suites (u_n) et (v_n).

2. (w_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = v_n - u_n$.

a) Démontrer que la suite (w_n) est géométrique de raison $\frac{1}{12}$.

b) Exprimer w_n en fonction de n.

3. (t_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $t_n = 3u_n + 8v_n$. Démontrer que la suite (t_n) est constante.

4. a) Déduire des questions **2. b)** et **3** que pour tout nombre n de $\mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{19}{11} - \frac{8}{11}\left(\frac{1}{12}\right)^n \text{ et } v_n = \frac{19}{11} + \frac{3}{11}\left(\frac{1}{12}\right)^n.$$

b) Démontrer alors les conjectures émises à la question **1**.

89 Une population de gerridés (appelés aussi araignées d'eau) évolue sur un lac.

On modélise le développement de cette population en notant $p_0 = 500$ le nombre, en millier, d'individus une semaine fixée, puis p_n ce nombre n semaines après le début de l'observation.

Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $p_{n+1} = (1+r)p_n + \mu$ où r et μ sont des constantes liées au milieu.

On a évalué $p_1 = 670$ et $p_2 = 874$.

a) Déterminer les constantes r et μ.

b) (v_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = p_n + 350$. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.

c) Exprimer v_n puis p_n en fonction de n. Que peut-on en déduire pour le sens de variation de la suite (p_n) ?

90 (u_n) est la suite définie par $u_1 = 0$ et pour tout nombre n de $\mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \frac{nu_n + 4}{n+1}$.

(v_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n = nu_n$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique.

b) Exprimer v_n en fonction de n.

Exprimer alors u_n en fonction de n.

c) Étudier le sens de variation de la suite (u_n).

Conjecturer une limite finie de suite

91 Des glaciologues étudient les variations du niveau de la mer depuis la fin de la dernière ère glaciaire (environ −13 000 ans).

n milliers d'années après cette date, ils notent u_n la variation, en m, du niveau de la mer et posent :

$$u_n = \frac{280}{2 + 68 \times 0{,}6^n}$$

a) Avec la calculatrice, tabuler la suite (u_n).

Conjecturer la limite de cette suite.

b) Déterminer un rang à partir duquel :

- $139 < u_n < 140$
- $139{,}99 < u_n < 140$

c) Conjecturer la limite de la suite (u_n).

Interpréter le résultat pour cette situation.

92 (v_n) et (b_n) sont les suites définies par $v_0 = 3$ et, pour tout nombre n de $\mathbb{N}$:

$$v_{n+1} = 0{,}5v_n + 4 \text{ et } b_n = v_n - 8.$$

a) Montrer que (b_n) est une suite géométrique de raison 1,4.

b) Exprimer b_n en fonction de n.

c) Avec la calculatrice, afficher la représentation graphique de la suite (b_n) (*fenêtre* : $0 \leqslant X \leqslant 100$, pas 10 et $-5 \leqslant Y \leqslant 1$, pas 1).

On admet que la suite (b_n) a pour limite 0.

d) Exprimer v_n en fonction de n et conjecturer la limite de la suite (v_n).

93 Algo (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = 2 + \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

Voici un algorithme.

```
n ← 0
u ← 3
Tant que u > A
    n ← n + 1
    u ← 2 + 0,25^n
Fin Tant que
```

a) Compléter un tableau de suivi des variables lorsqu'on prend A = 2,001. Quelles valeurs de n et de u sont obtenues à la fin de l'algorithme ?

b) Coder cet algorithme en langage Python.

Saisir ce programme et l'exécuter pour déterminer un rang à partir duquel :

- $2 < u_n < 2{,}001$
- $2 < u_n < 2{,}000001$

c) Conjecturer la limite de la suite (u_n).

Conjecturer une limite infinie de suite

94 Algo (u_n) est la suite définie par $u_0 = -3$ et pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = -u_n^2$.

a) Tabuler cette suite avec la calculatrice.
Conjecturer la limite de la suite (u_n).

b) Voici un algorithme qui détermine la plus petite valeur de n pour laquelle $u_n < A$.

```
n ← 0
u ← −3
Tant que u ⩾ A
    n ← n + 1
    u ← −u²
Fin Tant que
```

Quel type de valeurs de A considère-t-on ici, compte tenu de la conjecture du **a)** ?

c) Coder cet algorithme en langage Python.
Saisir ce programme et l'exécuter lorsque :

- $A = -10^4$
- $A = -10^{50}$

Interpréter les résultats. Cela confirme-t-il la conjecture émise au **a)** ?

95 Algo Une entreprise A propose un salaire annuel de 15 000 € avec une augmentation de 1,5 % chaque année.

a) Modéliser l'évolution annuelle du salaire à l'aide d'une suite en précisant sa nature.
Conjecturer sa limite.

b) Écrire un algorithme qui détermine le nombre d'années au bout duquel le salaire annuel dépassera un nombre S donné.

c) Coder cet algorithme en langage Python.
Le saisir et l'exécuter lorsque $S = 18\,000$.
Interpréter le résultat obtenu.

96 Algo Une entreprise B propose un salaire annuel de 16 000 € avec une augmentation de 145 € chaque année.

a) Modéliser l'évolution annuelle du salaire à l'aide d'une suite en précisant sa nature.
Conjecturer sa limite.

b) Écrire un algorithme qui détermine le nombre d'années au bout duquel le salaire annuel dépassera un nombre S donné.

c) Coder cet algorithme en langage Python.
Le saisir et l'exécuter lorsque $S = 18\,000$.
Interpréter le résultat obtenu.

97 (u_n) est la suite géométrique de raison 1,5 telle que $u_0 = 1$.

a) Avec la calculatrice, conjecturer la limite de cette suite.

b) (S_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$$

Exprimer S_n en fonction de n.

c) Utiliser la question **a)** pour conjecturer la limite de la suite (S_n).

S'entraîner à la logique → p. 336

98 Quantificateurs universel et existentiel

(u_n) est la suite définie par $u_0 = 500$ et, pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0{,}5u_n$.
Dans chaque cas, dire si la proposition est vraie ou fausse. Justifier la réponse.

a) Il existe un nombre n de $\mathbb{N}$ tel que $u_n < 100$.
b) Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $u_n < 100$.
c) Il existe un nombre n de $\mathbb{N}$ tel que $u_n = 0$.
d) Il existe un nombre p de $\mathbb{N}$ tel que, pour tout nombre n de $\mathbb{N}$ avec $n \geqslant p$, $u_n < 5$.
e) Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $u_n \leqslant 500$.
f) Il existe un nombre n de $\mathbb{N}$ tel que $u_n > 500$.

99 Vrai ou faux

(u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^3 + 5$.
Dans chaque cas, dire si la proposition est vraie ou fausse. Justifier la réponse.

a) Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $u_n \leqslant 10^5$.
b) Il existe un nombre n de $\mathbb{N}$ tel que :

$$u_n > 10^{10}$$

c) Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $u_n \geqslant 5$.
d) Il existe un nombre n de $\mathbb{N}$ tel que :

$$u_{n+1} < u_n$$

e) Il existe un rang à partir duquel $u_n > 10^6$.

100 Négation d'une proposition

(u_n) est une suite définie sur $\mathbb{N}$.
Écrire la négation de chacune des propositions suivantes.

a) Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1}$.
b) Il existe un nombre n de $\mathbb{N}$ tel que :

$$u_n > 100$$

c) Pour tout nombre réel A, il existe un nombre n de $\mathbb{N}$ tel que $u_n > A$.

Organiser son raisonnement

101 Imaginer une stratégie

Modéliser **Raisonner** **Calculer**

Un jeu en ligne est retiré du site qui l'héberge s'il y a moins de 1 000 joueurs par semaine.
Ce jeu, qui compte actuellement 7 500 joueurs hebdomadaires, perd 20 % de joueurs par semaine mais il en gagne 300 dans le même temps.
Le nombre de joueurs diminue-t-il ou augmente-t-il ?
Dans combien de semaines sera-t-il retiré du site ?

102 Modéliser une situation

Modéliser **Raisonner** **Calculer**

En 2019, un pays prend des mesures pour supprimer progressivement l'utilisation des sacs en plastique à usage unique.
Il est prévu que la quantité annuelle de sacs utilisés soit modélisée par une suite géométrique de raison $\frac{3}{4}$.

a) Justifier que cette suite est décroissante.

b) En 2019, ce pays a utilisé 16 milliards de sacs.
On note u_n le nombre de sacs utilisés l'année $2019+n$ (avec n nombre de $\mathbb{N}$) si l'évolution suit bien la prévision.
Les sacs en plastique seront totalement interdits lorsque leur nombre sera inférieur à un million.
En quelle année cela se produira-t-il ?

103 Étudier les suites d'un sinistre

Modéliser **Raisonner** **Calculer**

En 2015, Monsieur Durand a acheté un four à micro-ondes qu'il a payé 450 €.
En 2019, suite à une surtension, son four est hors d'usage. Son assurance applique un coefficient de vétusté de 0,8, c'est-à-dire que la valeur de remboursement du four est modélisée par une suite géométrique (p_n), de raison 0,8 où p_n est le prix remboursé en $2015+n$.

a) Justifier que la suite (p_n) est décroissante.

b) Quel montant son assurance lui remboursera-t-elle ?

c) Déterminer en quelle année son remboursement sera inférieur à 80 €.

104 Comparer des populations

Modéliser **Calculer** **Communiquer**

Des relevés statistiques ont permis d'estimer que la population d'une ville A décroît de 1,3 % par an, tandis que celle d'une ville B croît de 1,5 % par an.
Au début de l'année 2015, la ville A compte 200 000 habitants et la ville B compte 150 000 habitants.

1. a) Modéliser par une suite (u_n) (resp. (v_n)) la population de la ville A (resp. B) pour les prochaines années.

b) Avec la calculatrice, afficher les vingt premiers termes de chacune des suites (u_n) et (v_n).

c) Conjecturer l'évolution à long terme de la population de chacune des villes.

2. En quelle année la population de la ville B dépassera-t-elle celle de la ville A ?

105 Algo Étudier les conséquences de l'altitude

Modéliser **Communiquer**

La pression atmosphérique diminue approximativement de 1 % chaque fois que l'altitude augmente de 100 m.
Lors d'un relevé hebdomadaire, la pression mesurée au niveau de la mer est 1 000 millibars (mbar).

1. Modéliser cette situation à l'aide d'une suite (p_n) où p_n donne ce jour la pression à l'altitude $n \times 100$ mètres avec n nombre de $\mathbb{N}$.

2. Voici un algorithme incomplet qui se propose de déterminer l'altitude d'un observateur connaissant la pression atmosphérique A de l'endroit où il se trouve.

$n \leftarrow 0$
$p \leftarrow 1000$
Tant que $\square > \text{A}$
  $n \leftarrow \square$
  $p \leftarrow \square$
Fin Tant que

a) Compléter cet algorithme.
Exprimer l'altitude obtenue en fonction de n.

b) Coder cet algorithme par une fonction de paramètre A écrite en langage Python.
Saisir cette fonction.

3. a) À quelle altitude approximative, la pression atmosphérique est-elle égale à :
- 800 mbar ?
- 700 mbar ?
- 500 mbar ?

b) Conjecturer la limite de la suite (p_n).

106 Étudier une suite décimale

Narration de recherche

Modéliser Raisonner Communiquer

Rédiger les différentes étapes de la recherche, sans omettre les fausses pistes et les changements de méthode.

Problème (S_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$S_n = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \ldots + \frac{1}{10^n}$$

a) Calculer S_0, S_1, S_2, S_3, S_4.

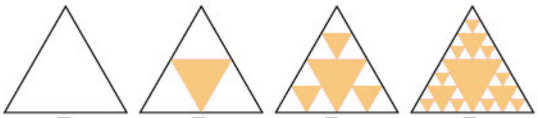
b) Cette suite a pour limite un nombre réel. Déterminer son écriture fractionnaire irréductible.

107 Déterminer une limite

Chercher Modéliser

Les triangles de Sierpinsky sont obtenus de la façon suivante :

- on part d'un triangle équilatéral T_0 ;
- T_1 est obtenu à partir de T_0 en coloriant le triangle dont les sommets sont les milieux des côtés de T_0 ;
- et ainsi de suite comme indiqué ci-dessous.



a) À partir de quel domaine T_n aura-t-on colorié plus de 99 % du triangle T_0 ?

b) Conjecturer la limite de l'aire du domaine T_n.

108 Étudier un chiffre d'affaires

Modéliser Communiquer

Une société propose la livraison hebdomadaire d'un panier de fruits et légumes bio. En juillet 2017, 65 particuliers ont souscrit un abonnement mensuel de 52 € pour recevoir un panier chaque semaine. Les responsables de la société font les hypothèses suivantes :

- d'un mois à l'autre, environ 20 % des abonnements sont résiliés ;
- chaque mois, 18 particuliers supplémentaires souscrivent à l'abonnement.

a) Modéliser par une suite le nombre d'abonnés au panier bio le n-ième mois qui suit le mois de juillet 2017.

b) Selon ce modèle, la recette mensuelle de la société va-t-elle dépasser 4 420 € durant l'année 2018 ?

c) Selon ce modèle, conjecturer vers quelle valeur tend la recette mensuelle de la société.

109 Tice Prendre des initiatives

Chercher Modéliser

Après avoir observé les flux de population entre trois zones géographiques : une ville V, une zone périphérique B et une zone de campagne C, un cabinet d'étude en démographie fait les hypothèses suivantes :

- la population totale des trois zones reste constante ;
- chaque année la ville V perd 10 % de sa population, mais accueille 10 % de la population de la zone B et 1 % de la population de la zone C ;
- chaque année la zone B perd 10 % de sa population, mais accueille 10 % de la population de la ville V et 1 % de la population de la zone C ;
- chaque année la zone C perd 2 % de sa population.

Au 1er janvier 2018, la ville V comptait 50 000 habitants, la zone B en comptait 20 000 et la zone C en comptait 40 000.

On désigne par v_n, b_n et c_n les nombres d'habitants respectifs des zones V, B et C au 1er janvier de l'année 2018+n.

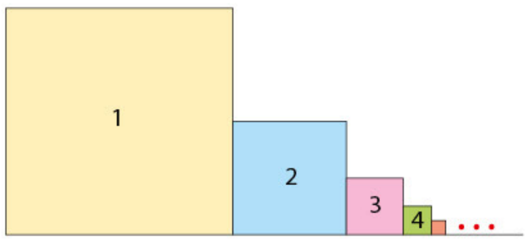
On admet que les nombres réels v_n, b_n et c_n peuvent ne pas être des entiers.

Conjecturer la limite de chacune des trois populations définies ci-dessus.

110 Modéliser une évolution

Chercher Modéliser

Une suite de carrés numérotés est disposée comme le montre la figure ci-dessous.



Le premier carré a pour côté 3, puis le côté de chaque carré est égal à la moitié du côté du carré précédent.

Pour tout nombre $n \geqslant 1$ de $\mathbb{N}$, on note a_n l'aire du n-ième carré (ainsi $a_1 = 9$) et on pose :

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

a) Exprimer S_n en fonction de n.

b) Déterminer un rang à partir duquel :

$$11{,}999 < S_n < 12$$

c) Conjecturer la limite de la suite (S_n).

111 Choose a value and conjecture

Chercher **Communiquer**

(u_n) is the series defined by its first term u_1 and for any number n of $\mathbb{N}^*$:

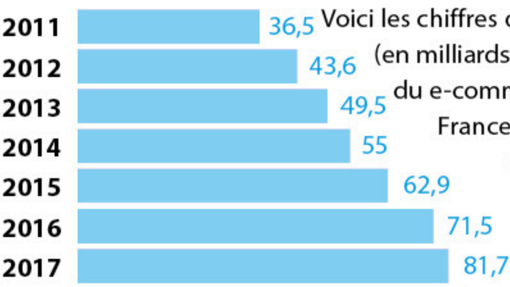
$$u_{n+1} = \frac{u_n}{n} + 1$$

Conjecture the direction of variation of the series (u_n) according to the value given to u_1.

112 Étudier l'évolution du e-commerce

Problème ouvert

Modéliser **Communiquer**



Voici les chiffres d'affaires (en milliards d'euros) du e-commerce en France, publiés en 2017.

(*source* : FEVAD)

Modéliser par une suite pour conjecturer la limite du chiffre d'affaires.

Que peut-on penser ?

Des Défis

113 Calculer des différences

(u_n) et (v_n) sont les suites définies sur $\mathbb{N}$ par :

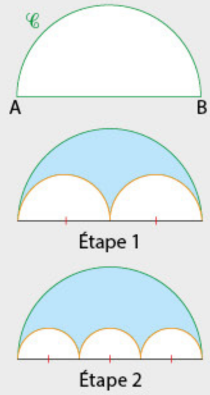
$$u_n = \sqrt{n} \text{ et } v_n = \sqrt{n+1}$$

La différence $v_n - u_n$ peut-elle devenir aussi proche de 0 que l'on veut ?

114 Étudier une suite d'aires

$\mathscr{C}$ est un demi-cercle de diamètre $AB = 10$ cm. On partage $[AB]$ successivement en 2, 3, 4… segments de même longueur. À chaque étape, sur les segments obtenus, on construit des demi-cercles comme indiqué ci-contre. On note a_n l'aire, en cm^2, du domaine coloré en bleu à l'étape n.

Conjecturer la limite de la suite (a_n).



OBJECTIF BAC

115 Algo Organiser une course à pied ⏱ 35 min

D'après Bac 2017, Pondichéry

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 150$ et pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0{,}8u_n + 45$.

1. Calculer u_1 et u_2.

2. Voici deux propositions d'algorithme.

①
```
N ← 0
U ← 150
Tant que U ⩾ 220
  | N ← N + 1
  | U ← 0,8 × U + 45
Fin Tant que
```

②
```
N ← 0
U ← 150
Tant que U < 220
  | N ← N + 1
  | U ← 0,8 × U + 45
Fin Tant que
```

a) Un seul de ces algorithmes permet de déterminer le plus petit nombre n de $\mathbb{N}$ tel que $u_n \geqslant 220$. Préciser lequel en justifiant pourquoi l'autre algorithme ne le permet pas.

b) Qu'obtient-on à la fin de l'algorithme choisi à la question précédente ?

3. Une petite ville de province organise chaque année une course à pied dans les rues de son centre. En 2015, le nombre de participants à cette course était de 150.

On fait l'hypothèse que d'une année sur l'autre :

- 20 % des participants ne reviennent pas l'année suivante ;
- 45 nouveaux participants s'inscrivent à la course.

La petite taille des ruelles du centre historique de la ville oblige les organisateurs à limiter le nombre de participants à 250.

Avec la calculatrice, conjecturer si les organisateurs vont devoir refuser des inscriptions dans les années à venir.

Exploiter ses compétences

116 Estimer la durée de vie d'une tornade

La situation problème

Une tornade a ravagé la ville de Joplin (États-Unis) en mai 2011.
Utiliser les différentes informations pour décrire les principaux dégâts occasionnés et estimer sa durée de vie après avoir atteint sa vitesse maximum.

DOC 1 Échelle de Fujita

L'échelle de Fujita sert à classer les tornades par ordre de gravité.

Échelle de Fujita		
Classe	Vents	Dégâts constatés
F0	de 64 à 116 $km{\cdot}h^{-1}$	**DÉGÂTS LÉGERS :** signalisation et antennes arrachées...
F1	De 117 à 180 $km{\cdot}h^{-1}$	**DÉGÂTS MODÉRÉS :** tuiles arrachées, arbres déracinés...
F2	De 181 à 252 $km{\cdot}h^{-1}$	**DÉGÂTS IMPORTANTS :** toitures arrachées, arbres renversés...
F3	De 253 à 330 $km{\cdot}h^{-1}$	**DÉGÂTS CONSIDÉRABLES :** murs et forêt abattus...
F4	De 331 à 417 $km{\cdot}h^{-1}$	**DÉGÂTS DÉVASTATEURS :** bâtiments détruits, envol d'objets...
F5	De 418 à 509 $km{\cdot}h^{-1}$	**DÉGÂTS INCROYABLES :** tout ce qui est au sol s'envole...
> F5	>509 $km{\cdot}h^{-1}$	**DÉGÂTS INCOMMENSURABLES**

DOC 2 Durée de vie

La durée de vie d'une tornade est le temps nécessaire, depuis sa formation, pour que la vitesse des vents devienne inférieure à 120 $km{\cdot}h^{-1}$.
Les météorologues considèrent que la vitesse des vents dans les tornades diminue de 15 % toutes les cinq minutes.

DOC 3 Un article de presse

Une gigantesque tornade a touché la ville de Joplin dans l'État du Missouri. Les vents, qui ont été mesurés à 318 $km{\cdot}h^{-1}$, ont rasé dimanche la partie sud de la ville sur plus de 10 km laissant derrière eux des décombres et 158 morts.

117 Étudier l'évolution d'une forêt

La situation problème

Utiliser les différentes informations pour estimer le nombre d'arbres présents dans cette forêt à long terme, si la politique de gestion de la forêt perdure.

DOC 1 Gestion de la forêt

- Exploitation : abattage annuel de 5 % des arbres existants.
- Reforestation : plantation chaque année de 3 000 jeunes arbres.

DOC 2 État des lieux de la forêt

Année	Nombre d'arbres
2016	48 900
2017	environ 49 500
2018	environ 50 000

118 Modéliser la teneur d'un médicament dans le sang

La situation problème

On administre à un patient un médicament par injection intraveineuse.
Utiliser les différentes informations pour estimer au bout de combien d'heures la quantité de médicament dans le sang sera stabilisée et quelle sera la quantité de médicament présente dans le sang.

DOC 1 Posologie

- À l'instant $t = 0$ (en h), on injecte 10 mL de médicament ; on suppose que l'effet est instantané.
- Chaque heure suivante, on injecte 1 mL de médicament.

DOC 2 Résorption

On estime que 20 % de la quantité de médicament présente dans le sang est éliminée chaque heure.

119 Tice Étudier l'effectif d'un lycée

La situation problème

Utiliser les différentes informations pour estimer à combien d'élèves l'effectif du lycée se stabilisera et dans combien d'années.

DOC 1 Tableau des effectifs en 2017

Classe	Nombre	Effectif moyen
Seconde	16	35
Première générale	10	35
Première technologique	7	33
Terminale générale	11	36
Terminale technologique	8	33

DOC 2 La classe de Seconde

Chaque année :
- 500 nouveaux élèves entrent en Seconde ;
- 70 % des élèves de Seconde passent en Première générale et 30 % en Première technologique.

DOC 3 Évolution des effectifs

- Taux de réussite au Baccalauréat 2017
  Terminales générales : 85 %
  Terminales technologiques : 80 %.
- Taux de passage de Seconde en Première et de Première en Terminale : 100 %.
- On suppose que cette évolution se poursuit ainsi les années suivantes.