4 Dérivation

Avant

▶ Un des principes de la mécanique classique, dont Isaac Newton (1642-1727) est le fondateur, énonce la proportionnalité entre l'accélération d'un corps et la résultante des forces qu'il subit.

À présent

▶ Accéléromètres, gyromètres, magnétomètres sont des capteurs de mouvements de nos smartphones. La notion de dérivation est à la base du fonctionnement de ces capteurs.

Les capacités travaillées dans ce chapitre

	Exercices
• Calculer un taux de variation, la pente d'une sécante.	14, 24
• Calculer un nombre dérivé à partir de la définition.	1, 3, 13, 19 à 23
• Interpréter le nombre dérivé en contexte.	15, 17, 25, 26
• Déterminer graphiquement un nombre dérivé.	2, 4, 16, 27, 28
• Déterminer une équation d'une tangente.	5, 7, 18, 32 à 34, 87, 88
• Construire une tangente.	6, 8, 29 à 31
• Déterminer la dérivée d'une fonction usuelle.	35 à 43
• Déterminer la dérivée d'une fonction.	9 à 12, 44 à 59, 79 à 82

1 Vitesse moyenne et vitesse instantanée

On lâche une bille au sommet d'une tour et on étudie sa chute.
On établit en physique que la distance, en m, parcourue par la bille en fonction du temps, en s, écoulé depuis le lâcher est donnée par $d(t) = 4{,}9t^2$.

1 **a)** Calculer la vitesse moyenne, en $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$, de la bille entre les instants :

- $t = 1$ et $t = 1{,}2$
- $t = 0{,}9$ et $t = 1$

b) De façon plus générale, expliquer pourquoi la **vitesse moyenne** de la bille, entre les instants $t = 1$ et $t = 1 + h$ (avec $1 + h \geqslant 0$ et $h \neq 0$) est donnée par $\dfrac{d(1+h) - d(1)}{h}$.
Envisager les cas $h > 0$ et $h < 0$.

Ce rapport est appelé **taux de variation de la fonction d entre 1 et $1 + h$.**

c) Établir que $\dfrac{d(1+h) - d(1)}{h} = 4{,}9(2 + h)$.

2 Lorsqu'on donne à h des valeurs de plus en plus proches de 0, $\dfrac{d(1+h) - d(1)}{h}$ se rapproche d'un nombre. Lequel ?
On dit que ce nombre est la limite de $\dfrac{d(1+h) - d(1)}{h}$ lorsque h tend vers 0 et on définit ainsi la **vitesse instantanée de la bille à l'instant $t = 1$.**

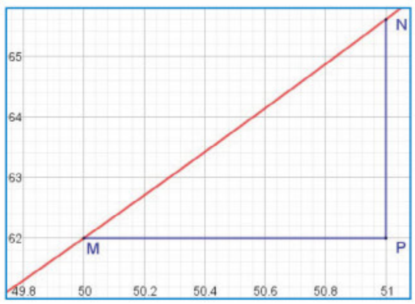
2 Tice Un coût marginal

Une entreprise produit de l'huile d'olive.
Le coût total de production est modélisé par la fonction C définie dans l'écran de calcul formel ci-dessous. À q litres d'huile produites, elle associe le coût $\mathrm{C}(q)$ en euro.
Lorsque l'entreprise produit q litres, le directeur s'intéresse au coût induit par la production d'un litre supplémentaire, il s'agit du coût marginal noté $\mathrm{C}_m(q)$.

1	$\mathrm{C(q)} := \frac{1}{1000}\mathrm{q}^3 - \frac{1}{20}\mathrm{q}^2 + \mathrm{q} + 12$
	$\rightarrow\ \mathbf{C(q) := \frac{1}{1000}\,q^3 - \frac{1}{20}\,q^2 + q + 12}$
2	$\mathrm{C(q+1) - C(q)}$
	$\rightarrow\ \mathbf{\frac{3}{1000}\,q^2 - \frac{97}{1000}\,q + \frac{951}{1000}}$

1 **a)** Justifier que $\mathrm{C}_m(q) = \mathrm{C}(q+1) - \mathrm{C}(q)$.
b) Compléter : « Le coût marginal $\mathrm{C}_m(q)$ est le taux de variation de la fonction … entre … et …. »
c) À l'aide de l'écran de calcul formel, calculer $\mathrm{C}_m(50)$.
Interpréter la valeur obtenue.

2 Voici, dans un repère, une partie de la courbe représentative de la fonction C.
Donner une interprétation géométrique du coût marginal $\mathrm{C}_m(50)$.



Cours

1 Nombre dérivé et tangente

f est une fonction définie sur un intervalle I, a et $a+h$ désignent deux nombres réels de I avec $h \neq 0$.

A Taux de variation

Définition

Le **taux de variation** de la fonction f entre a et $a+h$ (avec $h \neq 0$) est le rapport $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Exemple

g est la fonction carré $x \mapsto x^2$. Le taux de variation de g entre 1 et $1+h$ (avec $h \neq 0$) est :

$$\frac{g(1+h)-g(1)}{h} = \frac{(1+h)^2-1^2}{h} = \frac{2h+h^2}{h} = \frac{h(2+h)}{h} = 2+h$$

B Nombre dérivé d'une fonction en un point

Définitions

- Dire que la fonction ***f* est dérivable en *a*** signifie que le taux de variation de f entre a et $a+h$ a pour limite un nombre réel lorsque h tend vers 0.
- Ce nombre réel, lorsqu'il existe, est appelé **nombre dérivé de *f* en *a*** et est noté $f'(a)$.

Exemple

On reprend l'exemple du paragraphe A.
Le taux de variation $2+h$ a pour limite 2 lorsque h tend vers 0.
Ainsi, la fonction carré g est dérivable en 1 et $g'(1)=2$.

Notation : en physique, lorsque $y=f(x)$, le taux de variation est noté $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ et le nombre dérivé $f'(x)$ est noté $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

C Tangente à la courbe représentative d'une fonction

Définition - Propriété

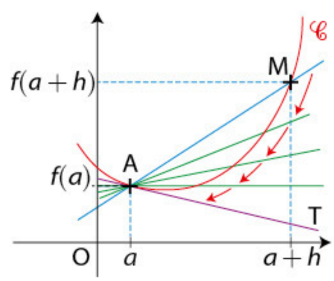
On suppose que la fonction f est dérivable en a. Dans un repère orthonormé :

- **la tangente T à la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction *f* au point A** d'abscisse a est la droite qui passe par A et de pente $f'(a)$;
- la tangente T a pour équation $\boldsymbol{y = f'(a)(x-a)+f(a)}$.

Démonstration

A et M sont les points de $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives a et $a+h$ avec $h \neq 0$, la pente de la droite (AM) est $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$. Si f est dérivable en a, alors $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ a pour limite $f'(a)$ lorsque h tend vers 0.
Graphiquement, la sécante (AM) a pour « position limite » la droite T qui passe par A et de pente $f'(a)$. Cette droite est la tangente à $\mathscr{C}$ en A.
Les coordonnées de A sont $(a\,;f(a))$, donc une équation de T est :

$$y-f(a)=f'(a)(x-a), \text{ soit } y=f'(a)(x-a)+f(a).$$



2 Dérivées des fonctions usuelles

Définitions

f est une fonction définie sur un intervalle I.
Dire que **f est dérivable sur I** signifie que f est dérivable en tout nombre réel x de I.
La fonction qui à tout nombre réel x de I associe $f'(x)$ est appelée **fonction dérivée de f** et est notée f'.

Propriétés

La fonction …	définie par …	est dérivable sur …	a pour dérivée …
Constante	$f(x)=k$ avec k nombre réel	$\mathbb{R}$	$\boldsymbol{f'(x)=0}$
Identité	$f(x)=x$	$\mathbb{R}$	$\boldsymbol{f'(x)=1}$
Carré	$f(x)=x^2$	$\mathbb{R}$	$\boldsymbol{f'(x)=2x}$
Cube	$f(x)=x^3$	$\mathbb{R}$	$\boldsymbol{f'(x)=3x^2}$
Inverse	$f(x)=\dfrac{1}{x}$	$]-\infty\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$	$\boldsymbol{f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}}$
Puissance	$f(x)=x^n$ avec n nombre entier relatif ($n\neq 0$ et $n\neq 1$)	• $\mathbb{R}$ si $n\geqslant 2$ • $]-\infty\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$ si $n\leqslant -1$	$\boldsymbol{f'(x)=nx^{n-1}}$
Racine carrée	$f(x)=\sqrt{x}$	$]0\,;+\infty[$	$\boldsymbol{f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}$

Démonstrations

a et h désignent deux nombres réels avec $h\neq 0$.

- **Fonction carré :** $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\dfrac{(a+h)^2-a^2}{h}=\dfrac{2ah+h^2}{h}=\dfrac{h(2a+h)}{h}=2a+h$.

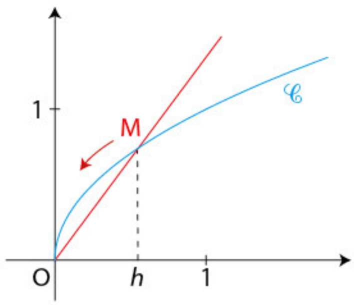
$2a+h$ a pour limite $2a$ lorsque h tend vers 0, donc $f'(a)=2a$.

- **Fonction inverse :** Pour $a\neq 0$ et $a+h\neq 0$, $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\dfrac{\dfrac{1}{a+h}-\dfrac{1}{a}}{h}=\dfrac{a-(a+h)}{ha(a+h)}$,

donc $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\dfrac{-1}{a(a+h)}$ qui a pour limite $-\dfrac{1}{a^2}$ lorsque h tend vers 0.

- On admet les autres résultats.

Remarque : la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.
En effet, $\mathscr{C}$ est la courbe représentative dans un repère orthonormé d'origine O de la fonction f : $x\mapsto\sqrt{x}$.
M est le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse h avec $h>0$, la pente de la sécante (OM) est $\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\dfrac{\sqrt{h}}{h}=\dfrac{1}{\sqrt{h}}$.



Lorsqu'on donne à h des valeurs de plus en plus proches de 0 alors $\dfrac{1}{\sqrt{h}}$ prend des valeurs de plus en plus grandes.
Ainsi, le taux de variation $\dfrac{f(h)-f(0)}{h}$ n'a pas pour limite un nombre réel lorsque h tend vers 0 et la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.
Graphiquement, la sécante (OM) a pour « position limite » l'axe des ordonnées lorsque h tend vers 0.

3 Opérations sur les fonctions dérivables

Propriétés

u et v sont des fonctions dérivables sur un intervalle I.

La fonction …	notée …	est dérivable sur I et …
$x \mapsto u(x)+v(x)$	$u+v$	$\boldsymbol{(u+v)'=u'+v'}$
$x \mapsto u(x)v(x)$	uv	$\boldsymbol{(uv)'=u'v+uv'}$
$x \mapsto ku(x)$ avec k nombre réel	ku	$\boldsymbol{(ku)'=ku'}$
$x \mapsto (u(x))^2$	u^2	$\boldsymbol{(u^2)'=2uu'}$

Si de plus, pour tout nombre réel x de I, $v(x) \neq 0$:

$x \mapsto \dfrac{1}{v(x)}$	$\dfrac{1}{v}$	$\boldsymbol{\left(\dfrac{1}{v}\right)'=-\dfrac{v'}{v^2}}$
$x \mapsto \dfrac{u(x)}{v(x)}$	$\dfrac{u}{v}$	$\boldsymbol{\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}}$

Démonstrations

a et $a+h$ désignent deux nombres réels de I avec $h \neq 0$.

- **Fonction *uv* :** $\dfrac{(uv)(a+h)-(uv)(a)}{h}=\dfrac{u(a+h)-u(a)}{h}v(a+h)+\dfrac{v(a+h)-v(a)}{h}u(a).$

Lorsque h tend vers 0, on admet que $v(a+h)$ tend vers $v(a)$ donc le taux de variation de uv entre a et $a+h$ a pour limite $u'(a)v(a)+v'(a)u(a)$.

- **Fonction $\boldsymbol{\dfrac{1}{v}}$:** $\dfrac{\dfrac{1}{v}(a+h)-\dfrac{1}{v}(a)}{h}=\dfrac{v(a)-v(a+h)}{hv(a)v(a+h)}=-\dfrac{v(a+h)-v(a)}{h}\times\dfrac{1}{v(a)v(a+h)}.$

Lorsque h tend vers 0, $v(a+h)$ tend vers $v(a)$ et le taux de variation de $\dfrac{1}{v}$ entre a et $a+h$ a pour limite $-v'(a)\times\dfrac{1}{(v(a))^2}$, soit $-\dfrac{v'(a)}{v^2(a)}$.

- **Fonction $\boldsymbol{\dfrac{u}{v}}$:** $\dfrac{u}{v}=u\times\dfrac{1}{v}$ donc $\dfrac{u}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=u'\times\dfrac{1}{v}+u\times\left(-\dfrac{v'}{v^2}\right)=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}.$
- On admet les autres résultats.

Propriété (admise)

a et b désignent des nombres réels avec $a \neq 0$.
Si g est une fonction dérivable sur un intervalle J, alors la fonction f : $x \mapsto g(ax+b)$ est dérivable sur l'intervalle I formé des nombres réels x tels que $ax+b$ appartient à J et $\boldsymbol{f'(x)=ag'(ax+b)}$.

Exemple

f est la fonction définie sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$ par $f(x)=\sqrt{2x-1}$.

Ainsi $f(x)=g(2x-1)$ où g est la fonction racine carrée. La fonction g est dérivable sur $J=]0\,;\,+\infty[$.
$f : x \mapsto g(2x-1)$ est dérivable en tout nombre réel x tel que $2x-1 \in J$, c'est-à-dire $2x-1>0$, soit $x>\dfrac{1}{2}$ et sa dérivée est $f'(x)=2g'(2x-1)$.

Ainsi, f est dérivable sur $I=\left]\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$ et $f'(x)=2\times\dfrac{1}{2\sqrt{2x-1}}=\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}$.

EXERCICES RÉSOLUS

1 Calculer un nombre dérivé avec la définition

→ Cours 1. B

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + x$.

a) Calculer le taux de variation de f entre 1 et $1+h$ avec $h \neq 0$.

b) Dans un repère orthonormé, donner une interprétation graphique de ce taux de variation.

c) Démontrer que la fonction f est dérivable en 1 et donner son nombre dérivé en 1.

Solution

a) Pour tout nombre réel $h \neq 0$,

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2+(1+h)-(1^2+1)}{h}$$

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{3h+h^2}{h} = \frac{h(3+h)}{h} = 3+h$$

On effectue des transformations d'écriture du taux de variation afin de le simplifier le plus possible.

b) Dans un repère orthonormé, $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de f, A et M sont les points de $\mathscr{C}$ d'abscisses 1 et $1+h$ avec $h \neq 0$. Alors $\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ est la pente de la sécante (AM).

c) Le taux de variation $3+h$ a pour limite 3 lorsque h tend vers 0 donc la fonction f est dérivable en 1 et $f'(1) = 3$.

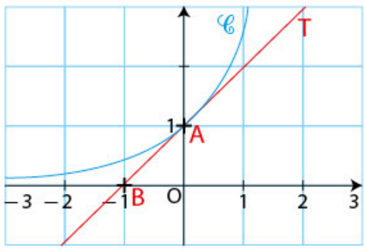
2 Déterminer graphiquement un nombre dérivé

→ Cours 1. C

f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
Dans un repère orthonormé, on a tracé sa courbe représentative $\mathscr{C}$ et la tangente T à $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 0.

a) Déterminer graphiquement la pente de la tangente T.

b) En déduire le nombre dérivé de la fonction f en 0.



Solution

a) La droite T passe par les points $A(0\,;1)$ et $B(-1\,;0)$ donc sa pente est $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0-1}{(-1)-0} = 1$.

b) Le nombre dérivé de f en 0 est la pente de la tangente T, ainsi $f'(0) = 1$.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 1

3 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x^2 + 3$$

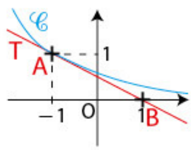
a) Calculer le taux de variation de f entre 2 et $2+h$ avec $h \neq 0$.

b) Dans un repère orthonormé, donner une interprétation graphique de ce taux de variation.

c) Démontrer que la fonction f est dérivable en 2 et donner son nombre dérivé en 2.

Sur le modèle de l'exercice résolu 2

4 Dans un repère orthonormé, on a tracé la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et sa tangente T au point A d'abscisse -1.



a) Déterminer graphiquement la pente de la tangente T.

b) En déduire le nombre dérivé de f en -1.

EXERCICES RÉSOLUS

5 Déterminer une équation de tangente

→ Cours 1. C et 2

f est la fonction définie sur $]-\infty\,;0[\ \cup\ ]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x}$.
Dans un repère orthonormé, $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction f.
Déterminer une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 2.

Solution

La fonction f est dérivable en tout nombre réel $x \neq 0$ et $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$ donc $f'(2)=-\dfrac{1}{4}$. D'autre part $f(2)=\dfrac{1}{2}$.
Une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A est :
$y=f'(2)(x-2)+f(2)$, soit $y=-\dfrac{1}{4}(x-2)+\dfrac{1}{2}$, c'est-à-dire
$y=-\dfrac{1}{4}x+1$.

Pour obtenir une équation de la tangente au point A d'abscisse a, on calcule $f(a)$ et $f'(a)$, puis on écrit l'équation générale de la tangente, on remplace et on réduit.

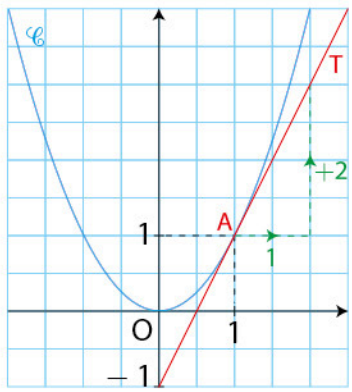
6 Tracer une tangente

→ Cours 1. C et 2

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2$.
Dans un repère orthonormé, $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction f et T est la tangente à $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 1.
Tracer la courbe $\mathscr{C}$ et sa tangente T.

Solution

La courbe $\mathscr{C}$ est la parabole ci-contre.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=2x$.
$f(1)=1$ et $f'(1)=2$, donc on trace la droite T qui passe par A(1 ; 1) et de pente 2.
On peut aussi déterminer une équation de T :
$y=2(x-1)+1$
$y=2x-1$
et on choisit deux points de cette droite A(1 ; 1) et par exemple B(0 ; − 1).



EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 5

7 g est la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par :
$$g(x)=\sqrt{x}$$
Dans un repère orthonormé, $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction g.
Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 4.

Sur le modèle de l'exercice résolu 6

8 g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$g(x)=x^3$$
Dans un repère orthonormé, $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de g et T est la tangente à $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 1.
Tracer la courbe $\mathscr{C}$ et sa tangente T.

EXERCICES RÉSOLUS

9 Déterminer la dérivée d'un polynôme, d'un produit

→ Cours 2. et 3

Déterminer la dérivée de chacune des fonctions.

a) f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^2+1}{3}$.

b) g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x^3 - 5x + 3$.

c) h est définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (x+3)(x^2 - 5x + 1)$.

Solution

a) Pour tout nombre réel x, $f(x) = ku(x)$ avec $k = \dfrac{1}{3}$ et $u(x) = x^2 + 1$.
u est dérivable sur $\mathbb{R}$ (somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$) donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout nombre réel x, $f'(x) = ku'(x) = \dfrac{1}{3}(2x) = \dfrac{2}{3}x$.

> Pour tout nombre réel a, $\dfrac{a}{3} = \dfrac{1}{3}a$.

b) g est dérivable sur $\mathbb{R}$ (somme des fonctions $x \mapsto 2x^3$, $x \mapsto -5x$, $x \mapsto 3$ dérivables sur $\mathbb{R}$) et pour tout nombre réel x, $g'(x) = 2(3x^2) - 5 = 6x^2 - 5$.

c) h est le produit des fonctions $u : x \mapsto x + 3$ et $v : x \mapsto x^2 - 5x + 1$ dérivables sur $\mathbb{R}$ donc h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout nombre réel x :

$u(x) = x + 3$ $\quad u'(x) = 1$

$v(x) = x^2 - 5x + 1$ $\quad v'(x) = 2x - 5$

Ainsi $h'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = 1(x^2 - 5x + 1) + (x+3)(2x-5)$

$h'(x) = x^2 - 5x + 1 + 2x^2 - 5x + 6x - 15 = 3x^2 - 4x - 14$.

> Bien distinguer la formule du cours que l'on applique, repérer les fonctions u, v et déterminer leurs dérivées u' et v'.

10 Déterminer la dérivée d'un quotient

→ Cours 2 et 3

g est la fonction définie sur $]-\infty\,;2[\ \cup\ ]2\,;+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{3x+1}{x-2}$.
Déterminer la dérivée de la fonction g.

Solution

g est le quotient de deux fonctions $u : x \mapsto 3x+1$ et $v : x \mapsto x - 2$ dérivables sur $]-\infty\,;2[$ et $]2\,;+\infty[$ donc g est dérivable sur chacun de ces intervalles.

Pour tout nombre réel $x \neq 2$, $\quad u(x) = 3x + 1$ $\quad u'(x) = 3$

$v(x) = x - 2$ $\quad v'(x) = 1$

Ainsi $g'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} = \dfrac{3(x-2) - (3x+1)}{(x-2)^2} = \dfrac{-7}{(x-2)^2}$.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 9

11 Déterminer la dérivée de chacune des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

a) $g(x) = -4x^3 + x^2 - 7$ $\qquad$ **b)** $f(x) = \dfrac{2x^2 - x}{5}$

c) $h(x) = (2x-5)(x^2 - 2x + 2)$

Sur le modèle de l'exercice résolu 10

12 g est la fonction définie sur $]-\infty\,;4[\ \cup\ ]4\,;+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{-2x+5}{x-4}$.
Déterminer la dérivée de la fonction g.

Nombre dérivé et tangente

→ Cours 1

Questions Flash

13 Le taux de variation d'une fonction f entre 1 et $1+h$ avec $h \neq 0$ est égal à $3h-11$.
Donner mentalement le nombre dérivé de f en 1.

14 g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 7x^2 - 12x + 9$$

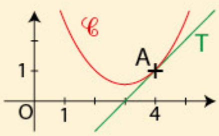
Voici un écran de calcul formel.

1	$g(x) := 7x^2 - 12x + 9$
	→ $\mathbf{g(x) := 7\,x^2 - 12\,x + 9}$
2	$\dfrac{g(3+h) - g(3)}{h}$
	→ $\mathbf{7\,h + 30}$

Expliquer le calcul effectué à la ligne 2.

15 f est la fonction carré.
Louise a calculé le nombre dérivé de f en -1 et obtenu $f'(-1) = -2$.
Elle affirme : « Dans un repère orthonormé, la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point $A(-1\,;1)$ a pour pente 2. »
Critiquer cette affirmation.

16 Dans le repère ci-contre la droite T est la tangente à la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f au point A d'abscisse 4.



Quelle est la valeur du nombre dérivé $f'(4)$?

17 Dans un repère orthonormé, $\mathscr{C}$ est la courbe représentative d'une fonction g dérivable en 0.
Une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 est $y = \dfrac{1}{2}x + 1$.
Quelle est la valeur du nombre dérivé $g'(0)$?

18 f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$f(1) = 2 \quad \text{et} \quad f'(1) = -3.$$

Dans un repère orthonormé, T est la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1.
Laquelle de ces équations est une équation de T ?
(1) $y = 2x - 3$
(2) $y = -3x + 5$
(3) $y = -3x + 2$

19 f est la fonction carré.
a) Vérifier que pour tout nombre réel $h \neq 0$,

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = h + 4$$

b) En déduire le nombre dérivé de f en 2.

20 g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = -x^2 + 3x - 1$$

a) Vérifier que pour tout nombre réel $h \neq 0$,

$$\frac{g(1+h) - g(1)}{h} = -h + 1$$

b) En déduire que g est dérivable en 1 et donner $g'(1)$.

21 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \frac{4}{x}$$

a) Vérifier que pour tout nombre réel h avec $h > -1$ et $h \neq 0$,

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{-4}{1+h}$$

b) En déduire que f est dérivable en 1 et donner $f'(1)$.

22 g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(t) = t^2 + 7$$

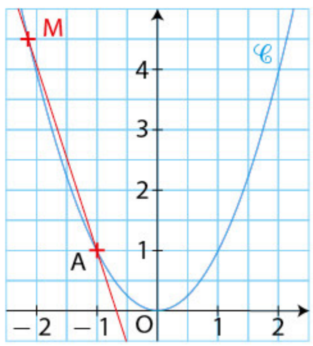
a) Calculer le taux de variation de g entre 4 et $4+h$ avec $h \neq 0$.
b) En déduire le nombre dérivé de g en 4.

23 f est la fonction définie pour tout nombre réel $x \neq -1$ par :

$$f(x) = \frac{-2}{x+1}$$

a) Calculer le taux de variation de f entre 0 et h avec $h > -1$ et $h \neq 0$.
b) En déduire que f est dérivable en 0 et donner $f'(0)$.

24 Dans un repère orthonormé, $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction carré.
A et M sont les points de $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives -1 et $-1+h$ avec $h \neq 0$.
a) Démontrer que la pente de la sécante (AM) est égale à $h-2$.
b) En déduire la valeur de la pente de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point A.
c) Quel est le nombre dérivé de la fonction carré en -1 ?



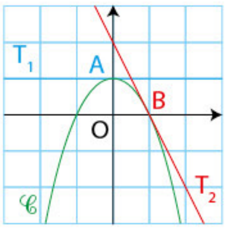
25 On étudie la chute libre d'une bille.
Sa vitesse moyenne, en $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$, entre les instants $t = 2$ et $t = 2 + h$, en s, avec $h \neq 0$ est donnée par $4{,}9h + 19{,}6$.
a) Calculer la vitesse moyenne de la bille entre les instants :
• $t = 1{,}9$ et $t = 2$; • $t = 2$ et $t = 2{,}1$.
b) Quelle est la vitesse instantanée de la bille à l'instant $t = 2$?

26 Une entreprise fabrique des appareils électroniques. Le coût de production de q appareils, en euro, est donné par $\mathrm{C}(q) = \frac{1}{500}q^3 + 100$ avec $0 \leqslant q \leqslant 200$.
a) À l'aide du résultat obtenu à l'écran de calcul formel ci-dessous, calculer $\mathrm{C}(q+1)$.

1	$(q+1)^3$
	Développer: $\mathbf{q^3 + 3\,q^2 + 3\,q + 1}$

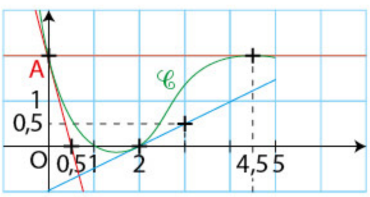
b) Déterminer alors le coût marginal $\mathrm{C}(q+1) - \mathrm{C}(q)$ en fonction de q.

27 h est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$h(x) = 1 - x^2$$
Dans un repère orthonormé, $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction h, T_1 et T_2 sont les tangentes respectives à $\mathscr{C}$ aux points A d'abscisse 0 et B d'abscisse 1.



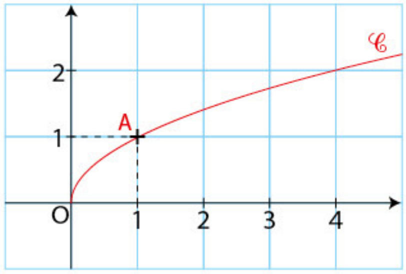
Lire sur le graphique le nombre dérivé de h :
a) en 0 ; **b)** en 1.

28 Dans le repère orthonormé ci-dessous, $\mathscr{C}$ est la courbe représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;5]$.
On a tracé les tangentes à la courbe $\mathscr{C}$ aux points d'abscisses 0 ; 2 et 4,5.



Déterminer graphiquement :
a) $f(0)$, $f(2)$, $f(4{,}5)$ **b)** $f'(0)$, $f'(2)$, $f'(4{,}5)$

29 f est la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par :
$$f(x) = \sqrt{x}$$
Dans un repère orthonormé, $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction f et A est le point d'abscisse 1.
a) Reproduire le graphique ci-dessous.



b) Voici un écran de calculatrice.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sqrt{x})\Big|_{x=1} \qquad 0.5$$

Quel résultat peut-on lire sur cet écran ?
c) Quelle est la pente de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point A ? Tracer cette droite sur le graphique.

30 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.
Dans un repère orthonormé, $\mathscr{C}$ est la courbe de la fonction f et A est le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse -1.
a) Voici un écran de calculatrice.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^3)\Big|_{x=-1} \qquad 3$$

Donner la valeur de $f'(-1)$. En déduire la pente de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point A.
b) Tracer la courbe $\mathscr{C}$ et la tangente T.

31 f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que :
• $f(0) = 1$ • $f(2) = -2$ • $f(4) = -3$ • $f(6) = -2$
• $f'(0) = -2$ • $f'(2) = -1$ • $f'(4) = 0$ • $f'(6) = 1$
$\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.
a) Placer les points A, B, C et D de $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives 0 ; 2 ; 4 et 6.
b) Tracer les tangentes à la courbe $\mathscr{C}$ aux points A, B, C et D.
c) Tracer une allure possible de la courbe $\mathscr{C}$.

32 Dans un repère orthonormé, $\mathscr{C}$ est la courbe représentative d'une fonction f dérivable en 0.
Dans chaque cas, déterminer une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A.
a) $\mathrm{A}(0\,;0)$ et $f'(0) = 1$ **b)** $\mathrm{A}(0\,;0)$ et $f'(0) = 3$
c) $\mathrm{A}(0\,;2)$ et $f'(0) = 0$ **d)** $\mathrm{A}(0\,;1)$ et $f'(0) = -5$

33 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2$.
Dans un repère orthonormé, $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction f.
a) On admet que $f'(-2) = 4$.
Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse -2.
b) Tracer la courbe $\mathscr{C}$ et tracer la tangente T.

34 g est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$g(x) = \frac{1}{x} + 1$$

Paul a obtenu à l'écran de sa calculatrice le résultat suivant.

$$\frac{d}{dx}(1 \div x + 1)\Big|_{x=1} \qquad -1$$

a) Dans un repère orthonormé, déterminer une équation de la tangente T à la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction g au point d'abscisse 1.
b) Tracer la courbe $\mathscr{C}$ puis la tangente T à l'aide de deux de ses points.

Dérivées des fonctions usuelles

→ Cours 2

Questions flash

35 Donner la fonction dérivée de chacune des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :
a) $f(x) = 0$ **b)** $g(x) = -7$ **c)** $h(x) = x$

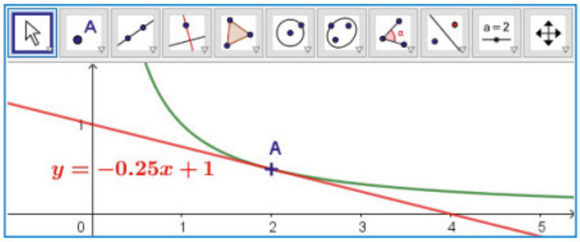
36 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.
Laquelle de ces expressions est celle de $f'(x)$?
(1) $3x^3$ **(2)** x^2 **(3)** $3x^2$

37 g est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \frac{1}{x}$.
Déterminer mentalement la valeur de :
a) $g'(1)$ **b)** $g'(2)$ **c)** $g'(-2)$ **d)** $g'\left(\frac{1}{2}\right)$

38 f est la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$. Chacune des égalités suivantes est-elle vraie ou fausse ?
a) $f'(1) = \frac{1}{2}$ **b)** $f'(4) = \frac{1}{8}$ **c)** $f'\left(\frac{1}{4}\right) = 1$

39 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$. $\mathscr{C}$ est sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
a) Déterminer $f'(2)$.
b) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2.
c) Tracer la courbe $\mathscr{C}$ et la tangente T.

40 On a utilisé un logiciel de géométrie pour tracer la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ et la tangente à cette courbe au point d'abscisse 2.



Justifier l'équation de la tangente donnée par le logiciel.

41 Dans un même repère orthonormé, $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont les courbes représentatives des fonctions :
- f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$;
- g définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(x) = \sqrt{x}$.

1. a) Déterminer $f'\left(\frac{1}{4}\right)$.
b) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ et la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $\frac{1}{4}$.
2. a) Déterminer $g'(1)$.
b) Tracer la courbe $\mathscr{C}_g$ et la tangente T′ à $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse 1.
3. a) Que remarque-t-on pour les droites T et T′ ?
b) Justifier cette propriété.

42 f est la fonction carré, g la fonction inverse et h la fonction racine carrée.
Manon a déterminé, dans un repère orthonormé, les équations des tangentes à chacune des courbes représentatives de ces fonctions au point d'abscisse 1.

$T_1 : y = -x + 2$
$T_2 : y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$
$T_3 : y = 2x - 1$

Associer à chaque tangente la fonction qui lui correspond.

43 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(t) = \frac{1}{t^3}$$

a) Quelle est la valeur du nombre n de $\mathbb{Z}$ telle que pour t de $\mathbb{R}^*$, $f(t) = t^n$?
b) Déterminer la fonction dérivée de f.
c) Vérifier que pour tout nombre réel t non nul :

$$f'(t) = \frac{-3}{t^4}$$

Opérations sur les fonctions dérivables

→ Cours 3

Questions Flash

44 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 + x^2 + 1$$

Laquelle de ces expressions est celle de $f'(x)$?

(1) $x^2 + x$ **(2)** $3x^2 + 2x$ **(3)** $3x^2 + 2x + 1$

45 Déterminer mentalement la fonction dérivée de chaque fonction définie sur $\mathbb{R}$.

a) $f(x) = 4x^3$ **b)** $g(x) = \frac{1}{3}x^3$ **c)** $h(x) = -7x^3$

46 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = -\frac{1}{x}$.

Tom affirme « Pour tout nombre réel x, $f'(x) > 0$. »

A-t-il raison ?

47 Déterminer la dérivée de chaque fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$.

a) $f(x) = x^2 + 3x - 2$ **b)** $g(x) = 2x^3 - 3x^2 + x + 1$

c) $h(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^3 + 7x + 5$

48 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x^2 + 5)(3x - 1)$$

f est le produit des fonctions $u : x \mapsto x^2 + 5$ et $v : x \mapsto 3x - 1$.

a) Déterminer la dérivée de chacune des fonctions u et v.

b) En déduire la dérivée de la fonction f.

49 Déterminer la dérivée de chaque fonction définie sur $\mathbb{R}$.

a) $f(x) = (x + 1)(x^2 + x + 2)$

b) $g(t) = (t^3 - t)(2t - 1)$

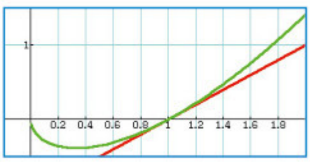
50 f est la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = x\sqrt{x}$$

Démontrer que pour tout nombre réel x de $]0\,;+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

51 On a tracé à l'écran de la calculatrice la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par :



$$f(x) = (x - 1)\sqrt{x}$$

et la droite d d'équation $y = x - 1$.

Justifier que d est la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.

52 g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = (5x + 7)^2$$

Pour tout nombre réel x, on écrit $g(x) = (u(x))^2$ avec $u(x) = 5x + 7$.

a) Déterminer la dérivée de la fonction u.

b) En déduire la dérivée de la fonction g.

53 Déterminer la dérivée de chaque fonction définie sur $\mathbb{R}$.

a) $f(x) = (-3x + 5)^2$ **b)** $g(x) = \left(x^2 + 4x - \frac{1}{2}\right)^2$

54 g est la fonction définie sur $\left]-\infty\,;\frac{1}{5}\right[\cup \left]\frac{1}{5}\,;+\infty\right[$ par $g(x) = \frac{1}{5x - 1}$.

Pour tout nombre réel $x \neq \frac{1}{5}$, on écrit $g(x) = \frac{1}{v(x)}$ avec $v(x) = 5x - 1$.

a) Déterminer la dérivée de la fonction v.

b) En déduire la dérivée de la fonction g.

55 Déterminer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \frac{1}{t^2 + t + 1}$.

56 f est la fonction définie sur $\left]-\infty\,;\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$ par $f(x) = \frac{2x - 1}{3} + \frac{3}{2x - 1}$.

Utiliser le fait que $f(x) = \frac{1}{3}(2x - 1) + 3 \times \frac{1}{2x - 1}$ pour déterminer la dérivée de la fonction f.

57 g est la fonction définie sur $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{4}\right\}$ par :

$$g(x) = \frac{7x + 5}{4x - 1}$$

g est le quotient des fonctions $u : x \mapsto 7x + 5$ et $v : x \mapsto 4x - 1$.

a) Déterminer les dérivées des fonctions u et v.

b) En déduire la dérivée de la fonction g.

58 Déterminer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par $f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x - 1}$.

59 f est la fonction définie sur $\left[-\frac{4}{3}\,;+\infty\right[$ par :

$$f(x) = \sqrt{3x + 4}$$

Pour tout nombre réel $x \geqslant -\frac{4}{3}$, $f(x) = g(3x + 4)$.

a) Préciser la fonction g, son intervalle de dérivabilité et sa dérivée.

b) En déduire l'intervalle de dérivabilité de f et sa dérivée.

QCM interactifs

Pour se tester

60 Dans chaque cas, donner la réponse exacte sans justifier.

		A	B	C	D
1	f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 5$. Le taux de variation de f entre 2 et $2+h$ avec $h \neq 0$ est égal à …	$h^2 + 4h$	$h + 4$	$2h - 5$	$2h$
2	Dans un repère orthonormé, $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction racine carrée. La tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 4 a pour pente …	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
3	g est la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par $g(x) = \frac{x+3}{x-1}$. Alors $g'(2)$ est égal à …	-4	4	5	1

61 Dans chaque cas, donner la (ou les) réponse(s) exacte(s) sans justifier.

		A	B	C	D
1	Dans un repère orthonormé, $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$. La tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2 a pour équation …	$y = -\frac{1}{4}(x-2) + \frac{1}{2}$	$y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$	$y = -\frac{1}{4}x + 1$	$y = -\frac{1}{4}(x-4)$
2	f est la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par : $f(x) = 2x - \frac{1}{x-1}$ Pour tout réel $x \neq 1$, $f'(x)$ est égal à …	$2 - \frac{1}{(x-1)^2}$	$2 + \frac{1}{(x-1)^2}$	$\frac{2x^2+1}{(x-1)^2}$	$\frac{2x^2-4x+3}{(x-1)^2}$
3	g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (3x+1)^2$. Alors …	$g'(0) = 6$	$g'(-1) = -12$	$g'(1) = 8$	$g'(2) = 42$
4	h est la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $h(x) = (2x-1)\sqrt{x}$. La fonction dérivée h' s'annule en …	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	1

62 Dans chaque cas, dire si l'affirmation est vraie ou fausse en justifiant.

1. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x^{-4}$.

Affirmation : pour tout nombre réel $x \neq 0$, $f'(x) = -\frac{4}{x^5}$.

2. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$.

Affirmation : dans un repère orthonormé, les tangentes à la courbe représentative de f aux points d'abscisses -2 et 1 sont parallèles à l'axe des abscisses.

3. g est la fonction définie sur $\left[\frac{1}{4}\,;+\infty\right[$ par $g(x) = \sqrt{4x-1}$.

Affirmation : pour tout nombre réel $x > \frac{1}{4}$, $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{4x-1}}$.

Vérifiez vos réponses : p. 340

Soutien

Fiches de remédiation

63 Connaître la définition du nombre dérivé

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2$.

a) *h* désigne un nombre réel avec $h \neq 0$.
Développer et réduire l'expression $f(1+h) = 3(1+h)^2$.

b) Le taux de variation de *f* entre 1 et $1+h$ est $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$.
Démontrer que ce taux de variation est égal à $3(h+2)$.

c) En déduire que *f* est dérivable en 1 et déterminer $f'(1)$.

AIDE

a) Respecter les priorités opératoires : développer d'abord le carré, puis multiplier le résultat par 3.
b) Après avoir réduit, penser à mettre *h* en facteur et à simplifier.

64 Interpréter graphiquement un nombre dérivé

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Dans un repère orthonormé, $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction *f* et *d* est la droite d'équation $y = -4x$.

Démontrer que la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse $\dfrac{1}{2}$ est parallèle à *d*.

AIDE

Dans un repère orthonormé, deux droites sont parallèles si, et seulement si, elles ont la même pente.
On connaît la pente de la droite *d*, il faut déterminer celle de la tangente T.

65 Déterminer une équation de tangente

g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 + 1$.
$\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction *g* dans un repère orthonormé.

a) Démontrer que $g'(1) = 3$.

b) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.

AIDE

a) Avant de calculer $g'(1)$, il faut déterminer $g'(x)$.
b) Une équation de la tangente T est :
$$y = g'(1)(x-1) + g(1)$$
On connaît $g'(1)$ d'après **a)**, calculer $g(1)$.
Remplacer dans l'équation et simplifier.

66 Déterminer la dérivée d'une fonction

f est la fonction définie sur $]-\infty\,;5[\cup]5\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{-2x+3}{x-5}$.

On se propose de déterminer la dérivée de la fonction *f*.

a) *f* est de la forme $\dfrac{u}{v}$.
Quelles sont les fonctions *u* et *v* ?

b) Déterminer la dérivée de chacune des fonctions *u* et *v*.

c) Démontrer alors, que pour tout nombre réel $x \neq 5$:
$$f'(x) = \frac{7}{(x-5)^2}$$

AIDE

b) Recopier et compléter :
Pour tout nombre réel *x*,
$u(x) = \dots$ $\qquad u'(x) = \dots$
$v(x) = \dots$ $\qquad v'(x) = \dots$

c) Appliquer la formule du cours qui donne $\left(\dfrac{u}{v}\right)'$.

EXERCICE RÉSOLU

67 Afficher la liste des pentes des sécantes

f est la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;1]$ par $f(x)=\frac{1}{2}x^3+x$.

$\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé d'origine O.

À tout nombre réel h avec $0<h\leqslant 1$, on associe le point M de $\mathscr{C}$ d'abscisse h et la sécante (OM).

1. Exprimer la pente c de la sécante (OM) en fonction de h.

2. a) On applique l'algorithme ci-contre avec pas $=0{,}1$.

Recopier et compléter le tableau en ajoutant des colonnes :

h	1	0,9	…
c	1,5	1,405	…

```
h ← 1
Tant que h > 0
    c ← (1/2)h² + 1
    Afficher c
    h ← h − pas
Fin Tant que
```

b) Expliquer le rôle de cet algorithme.

3. a) Quelle est la droite T « position limite » des sécantes lorsque h tend vers 0 ?

Donner une équation de T.

b) Donner le nombre dérivé de la fonction f en 0.

Solution

1. Pour $0<h\leqslant 1$, la pente de la sécante (OM) est :

$$c=\frac{f(h)-f(0)}{h}=\frac{\frac{1}{2}h^3+h}{h}=\frac{h\left(\frac{1}{2}h^2+1\right)}{h}=\frac{1}{2}h^2+1.$$

2. a)

h	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1
c	1,5	1,405	1,32	1,245	1,18	1,125	1,08	1,045	1,02	1,005

b) L'algorithme calcule et affiche les pentes successives des sécantes (OM) pour des valeurs de h de plus en plus proches de 0.

La valeur de h initialisée à 1 diminue de la valeur pas à chaque passage dans la boucle.

3. a) La « position limite » des sécantes lorsque h tend vers 0 est la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point O.

La limite de la pente c lorsque h tend vers 0 est égale à 1 donc une équation de T est $y=x$.

b) Le nombre dérivé de f en 0 est égal à la pente de T, soit $f'(0)=1$.

À VOTRE TOUR

68 g est la fonction définie sur $[0\,;1]$ par :

$$g(x)=x^2+2x$$

On reprend les données de l'énoncé de l'exercice résolu **67** et on l'adapte à la fonction g.

1. a) Apporter les modifications nécessaires à l'algorithme.

b) Appliquer cet algorithme avec pas $=0{,}1$.

2. a) Quelle est la droite T « position limite » des sécantes (OM) lorsque h tend vers 0 ?

b) Donner le nombre dérivé de la fonction g en 0.

69 f est la fonction définie sur $[1\,;2]$ par :

$$f(x)=\frac{1}{x}$$

a) Déterminer le taux de variation de la fonction f entre 1 et $1+h$ avec $1<1+h\leqslant 2$.

b) Voici un programme écrit en langage Python. Expliquer son rôle.

```python
pas=float(input())
h=1
while h>0:
    c=-1/(1+h)
    print("c=",c)
    h=h-pas
```

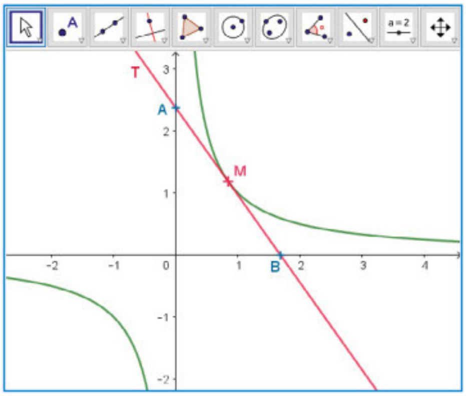
c) Saisir et exécuter ce programme avec pas $=0{,}01$.

EXERCICE RÉSOLU

70 Conjecturer puis démontrer

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

$\mathscr{C}$ est sa courbe représentative dans un repère orthonormé. Sur cette figure réalisée avec un logiciel de géométrie, M est un point libre de la courbe $\mathscr{C}$ et la tangente T en M à la courbe $\mathscr{C}$ coupe les axes du repère en A et B.



1. a) Réaliser cette figure et afficher la fenêtre Algèbre.

b) Déplacer le point M sur la courbe $\mathscr{C}$ et conjecturer la position du point M par rapport aux points A et B.

2. On note a l'abscisse du point M avec $(a \neq 0)$.

a) Montrer qu'une équation de T est $y = -\dfrac{1}{a^2}x + \dfrac{2}{a}$.

b) En déduire les coordonnées des points A et B en fonction de a.

c) Démontrer alors la conjecture émise à la question **1. b)**.

Solution

1. On lit dans la fenêtre Algèbre du logiciel les coordonnées des points A, B et M.
On conjecture que le point M est le milieu du segment $[AB]$.

2. a) Pour tout nombre réel $a \neq 0$, $f(a) = \dfrac{1}{a}$ et $f'(a) = -\dfrac{1}{a^2}$.

Une équation de T est $y = -\dfrac{1}{a^2}(x - a) + \dfrac{1}{a}$, soit $y = -\dfrac{1}{a^2}x + \dfrac{2}{a}$.

b) $\begin{cases} x = 0 \\ y = -\dfrac{1}{a^2}x + \dfrac{2}{a} \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{2}{a} \end{cases}$ donc les coordonnées du point A sont $\left(0\,;\dfrac{2}{a}\right)$.

$\begin{cases} y = 0 \\ y = -\dfrac{1}{a^2}x + \dfrac{2}{a} \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} y = 0 \\ \dfrac{1}{a^2}x = \dfrac{2}{a} \end{cases}$, soit $\begin{cases} y = 0 \\ x = 2a \end{cases}$ donc les coordonnées du point B sont $(2a\,;0)$.

c) $\dfrac{0 + 2a}{2} = a$ et $\dfrac{\frac{2}{a} + 0}{2} = \dfrac{1}{a}$ donc le point M $\left(a\,;\dfrac{1}{a}\right)$ est le milieu du segment $[AB]$.

À VOTRE TOUR

71 On reprend les données et la figure de l'exercice **70**. On note O l'origine du repère.

a) Déplacer le point M sur la courbe $\mathscr{C}$ et émettre une conjecture pour l'aire du triangle OAB.

b) Démontrer cette conjecture.

Distinguer les cas $a > 0$ et $a < 0$ où a désigne l'abscisse de M.

72 On reprend les données et la figure de l'exercice **70**. On note O l'origine du repère.

a) Construire les projetés orthogonaux P et Q du point M sur les axes.

b) Déplacer le point M et émettre une conjecture pour l'aire du rectangle OPMQ.

c) Démontrer cette conjecture.

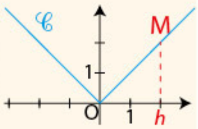
Distinguer les cas $a > 0$ et $a < 0$ où a désigne l'abscisse de M.

Démontrer et raisonner

73 Démontrer qu'une fonction n'est pas dérivable en un point

Méthode
Pour démontrer qu'une fonction f n'est pas dérivable en un point x_0 de son ensemble de définition, on démontre que le taux de variation $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ n'a pas de limite réelle lorsque h tend vers 0.

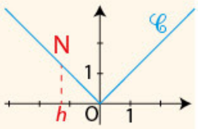
f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=|x|$.
$\mathscr{C}$ est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé d'origine O.



1. À un nombre réel $h>0$, on associe le point M de $\mathscr{C}$ d'abscisse h.

a) Quelle est la pente de la sécante (OM) ?

b) Quelle est la limite du taux de variation de f entre 0 et h lorsque h tend vers 0 en étant strictement positif ?



2. À un nombre réel $h<0$, on associe le point N de $\mathscr{C}$ d'abscisse h.

a) Quelle est la pente de la sécante (ON) ?

b) Quelle est la limite du taux de variation de f entre 0 et h lorsque h tend vers 0 en étant strictement négatif ?

3. Peut-on dire que le taux $\dfrac{f(h)-f(0)}{h}$ a une limite lorsque h tend vers 0 ? Que conclure ?

74 Établir une approximation affine

f est la fonction racine carrée. On se propose de déterminer une fonction affine $x \mapsto ax+b$ telle que la fonction $h \mapsto f(1+h)-(ah+b)$ ait pour limite 0 lorsque h tend vers 0.

On dit alors que cette fonction affine est **une approximation affine** de f au voisinage de 1.

a) Déterminer $f'(1)$.

b) Justifier que pour h proche de 0 avec $h \neq 0$:
$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} \approx \frac{1}{2}$$

c) En déduire l'approximation affine :
$$\sqrt{1+h} \approx 1+\frac{1}{2}h \text{ pour } h \text{ proche de } 0.$$

d) À l'aide de cette approximation, donner sans la calculatrice une valeur approchée de :
- $\sqrt{1{,}02}$
- $\sqrt{0{,}996}$

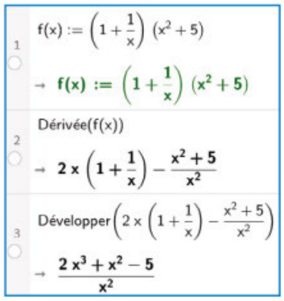
Déterminer des dérivées

75 Déterminer la dérivée de chacune des fonctions.

a) f est définie sur $]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$ par :
$$f(x)=2x^3+\frac{1}{x}-5$$

b) g est définie sur $]0\,;+\infty[$ par :
$$g(t)=t-2\sqrt{t}+4$$

76 Voici une copie d'écran d'un logiciel de calcul formel.



a) Justifier l'expression de $f'(x)$ obtenu à la ligne 2.

b) Vérifier le résultat affiché à la ligne 3.

77 f et g sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}-\{2\}$ par :
$$f(x)=\frac{1}{x-2} \quad \text{et} \quad g(x)=\frac{4x-7}{x-2}.$$

a) Pour tout nombre réel $x \neq 2$, déterminer $f'(x)$ et $g'(x)$. Que remarque-t-on ?

b) Pour tout nombre réel $x \neq 2$, déterminer $f(x)-g(x)$. Retrouver alors la propriété remarquée en **a)**.

78 À l'écran d'une calculatrice, on a tracé les courbes représentatives des fonctions f et g définies sur $]-2\,;+\infty[$ par :
$$f(x)=\frac{3x}{x+2} \quad \text{et} \quad g(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x.$$

Il semble que ces deux courbes aient la même tangente T en l'origine du repère. Démontrer cette conjecture.

79 f est la fonction définie sur $]-\infty\,;3[\cup]3\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{(2x+1)^2}{x-3}$.

Déterminer la fonction dérivée de f.

80 g est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$g(x)=\frac{\sqrt{x}}{x+1}$$

Démontrer que pour tout nombre réel $x>0$:

$$g'(x)=\frac{(1-x)\sqrt{x}}{2x(x+1)^2}$$

81 f est la fonction définie sur $]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$$

Démontrer que pour tout nombre réel $x\neq 0$:

$$f'(x)=2\frac{x^4-1}{x^3}$$

82 Déterminer la dérivée de chacune des fonctions.

a) f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(2x-5)^3$.

b) g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=(7-3x)^4$.

c) h est définie sur $\left]-\infty\,;-\frac{1}{2}\right[\cup\left]-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$ par :

$$h(x)=(2x+1)^{-3}$$

83 f est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{x}$.

a) Déterminer $f'(1)$.

b) Justifier que pour h proche de 0 avec $h\neq 0$:

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\approx -1$$

c) En déduire l'approximation affine :

$$\frac{1}{1+h}\approx 1-h \text{ pour } h \text{ proche de 0.}$$

d) À l'aide de cette approximation, donner sans la calculatrice une valeur approchée de :

- $\frac{1}{1{,}003}$
- $\frac{1}{0{,}9992}$

84 Un coureur court en ligne droite.

La distance parcourue, en m, par ce coureur à l'instant t, en s, est donnée par :

$$d(t)=10t-\frac{1}{20}t^2$$

1. Peut-on affirmer que la vitesse du coureur diminue proportionnellement au temps de course ?

2. a) Calculer l'instant t_1 auquel la vitesse du coureur s'annule.

b) Quelle est alors la distance parcourue par le coureur ?

3. a) Déterminer la vitesse moyenne du coureur pendant cette course.

b) Vérifier que cette vitesse moyenne est égale à la vitesse du coureur à l'instant $\frac{t_1}{2}$.

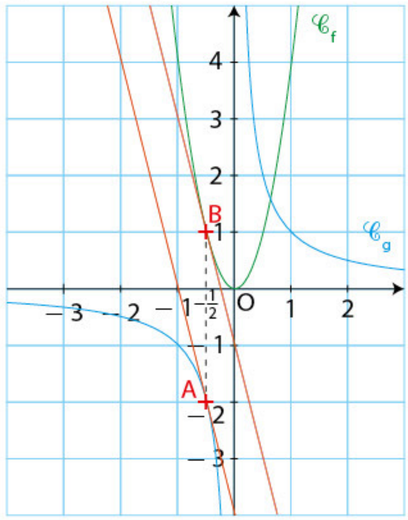
Déterminer l'équation d'une tangente à une courbe

85 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=4x^2$.

g est la fonction définie sur $]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$ par :

$$g(x)=\frac{1}{x}$$

$\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthonormé.

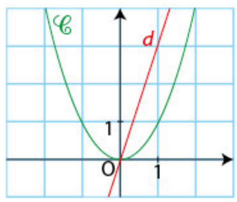


a) Démontrer que les tangentes à $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ en leurs points d'abscisse $-\frac{1}{2}$ sont parallèles.

b) Existe-t-il un autre nombre réel non nul a tel que $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ aient des tangentes parallèles en leurs points d'abscisse a ?

86 Dans un repère orthonormé :

- $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction $x\mapsto x^2$;
- d est la droite d'équation $y=3x$.



En quel point la courbe $\mathscr{C}$ admet-elle une tangente parallèle à la droite d ?

87 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2$.

$\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

Démontrer que la droite d d'équation $y=10x-25$ est tangente à la courbe $\mathscr{C}$.

Préciser en quel point.

88 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x^2 - 3x + 2$$

$\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

1. a) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2.

b) Tracer la courbe $\mathscr{C}$ et la tangente T à l'écran de la calculatrice et conjecturer la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à T.

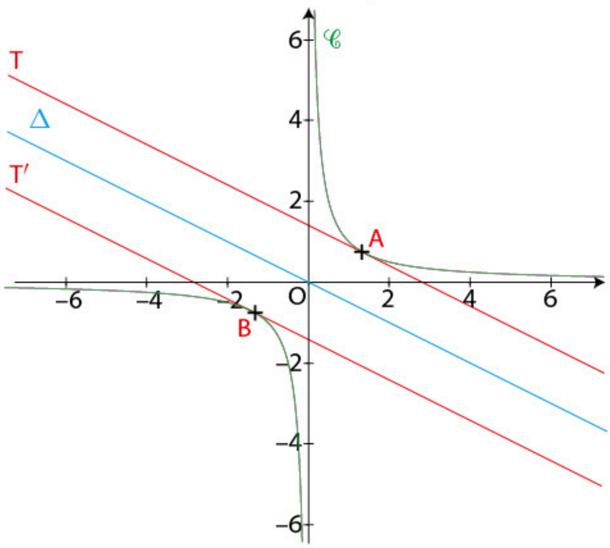
2. a) Démontrer que pour tout nombre réel x :

$$f(x) - (5x - 6) = 2(x - 2)^2$$

b) Démontrer la conjecture énoncée à la question **1. b)**.

89 Dans un repère orthonormé, $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$, Δ est la droite d'équation $y = -\frac{1}{2}x$, T et T′ sont les tangentes à $\mathscr{C}$ en deux points A et B.

On sait que ces tangentes sont parallèles à Δ, déterminer alors les coordonnées des points A et B.



90 Dans un repère orthonormé, $\mathscr{P}$ est la parabole d'équation $y = x^2$ et A est le point de coordonnées $(1\,;-2)$.

Yolanda conjecture qu'il existe deux tangentes à $\mathscr{P}$ passant par A.

On se propose de démontrer cette conjecture.

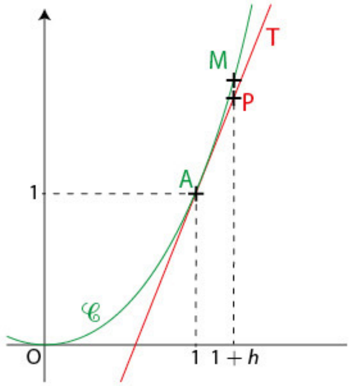
a) a désigne un nombre réel. Écrire une équation de la tangente T_a à $\mathscr{P}$ au point d'abscisse a.

b) Pour quels nombres réels a le point A appartient-il à la tangente T_a ?

c) Déterminer les équations des deux tangentes à $\mathscr{P}$ qui passent par A.

91 Sur le graphique ci-dessous, $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction $x \mapsto x^2$.

On note A le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse 1 et T la tangente à $\mathscr{C}$ au point A.



1. Déterminer une équation de T.

2. a) M et P sont les points respectifs de $\mathscr{C}$ et T qui ont pour abscisse $1 + h$ avec $h \neq 0$.

Déterminer leurs ordonnées y_M et y_P en fonction de h.

b) Pour h proche de 0, $y_M \approx y_P$.

En déduire une approximation affine de $(1 + h)^2$.

3. Avec cette approximation, donner sans la calculatrice une valeur approchée de :

- $(1{,}001)^2$
- $(0{,}995)^2$

S'ENTRAÎNER À LA LOGIQUE

→ p. 336

92 Quantificateurs

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

Dans chaque cas, dire si la proposition est vraie ou fausse. Justifier la réponse.

a) Pour tout nombre réel $x \neq 0$, $f'(x) < 0$.

b) Il existe un nombre réel $x \neq 0$ tel que $f'(x) = -1$.

c) Pour tout nombre réel $x \neq 0$, $f'(x) \geqslant -1$.

93 Implications

f et g sont deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

Pour chaque implication, dire si elle est vraie ou fausse. Justifier la réponse.

a) Si les fonctions f et g sont égales, alors elles ont la même fonction dérivée.

b) Si les fonctions f et g ont la même fonction dérivée, alors elles sont égales.

c) Si pour tout nombre réel x, $f(x) - g(x) = 1$, alors les fonctions f et g ont la même fonction dérivée.

94 Imaginer une stratégie

Chercher | Raisonner

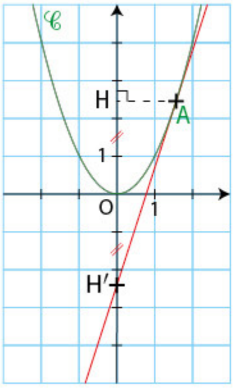
Dans un repère orthonormé, $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction carré.

A est un point quelconque de $\mathscr{C}$; on note a son abscisse.

H est le point de l'axe des ordonnées qui a même ordonnée que A.

H′ est le point symétrique du point H par rapport à l'origine O du repère.

Démontrer que la droite (AH′) est tangente en A à la courbe $\mathscr{C}$.



95 Déterminer une production

Chercher | Calculer

Dans une entreprise, le coût total de fabrication d'un produit, en euro, est exprimé par :

$$C(x) = x^3 - 100x^2 + 3000x + 200$$

où x désigne la quantité de produits fabriqués, en tonne, comprise entre 0 et 60.

Le prix de vente d'une tonne du produit est de 600 €.

a) Déterminer le coût marginal de fabrication, que l'on assimile à la dérivée du coût total.

b) La production de l'entreprise doit être telle que le coût marginal de fabrication soit inférieur au prix de vente. En déduire les quantités, en tonne, que peut produire l'entreprise.

96 Observer et démontrer

Raisonner | Calculer

À l'écran de sa calculatrice, Antoine a tracé les courbes représentatives des fonctions :

$$x \mapsto x^2 + 2x \quad \text{et} \quad x \mapsto -x^2 + 6x - 2.$$

a) Démontrer que ces deux courbes ont un unique point commun A.

b) Démontrer que les deux courbes ont une tangente commune en A.

97 Algo Étudier et exécuter un programme

Représenter | Communiquer

Voici un programme écrit en langage Python.

```
def f(x):
    y=x**2
    return y

def Taux(a,h):
    t=(f(a+h)-f(a))/h
    return t
```

a) Expliquer le rôle de la fonction Taux.

b) Saisir ce programme et exécuter la fonction Taux avec différentes valeurs de a et h.

c) Modifier la définition de la fonction f et réaliser d'autres essais.

98 Prendre des initiatives

Chercher | Calculer

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 - 4x + 5$$

$\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

En quels points de $\mathscr{C}$ peut-on mener une tangente passant par l'origine du repère ?

99 Interpréter une dérivée

Représenter | Calculer

Une voiture effectue des essais de freinage sur un circuit. Entre l'instant $t = 0$, début du freinage et l'instant $t = 5$ où elle s'arrête, la distance parcourue, en m, est donnée par :

$$d(t) = -4t^2 + 40t$$

où t est exprimé en seconde.

1. À l'écran de la calculatrice, afficher la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction d sur l'intervalle $[0\,;5]$.

2. À l'instant t de l'intervalle $[0\,;5]$, la vitesse instantanée de la voiture est donnée par $v(t) = d'(t)$.

Calculer la vitesse instantanée aux instants :

- $t = 0$
- $t = 2$
- $t = 4$
- $t = 5$

3. a) Sur l'écran précédent, afficher la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0. Interpréter sa pente.

b) Quelle distance aurait parcourue cette voiture pendant la durée de 5 s si elle n'avait pas freiné ?

Où peut-on lire cette distance sur le graphique ?

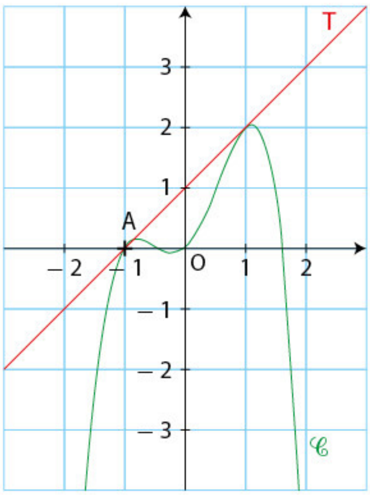
100 Étudier une tangente particulière

Chercher **Raisonner**

Dans un repère orthonormé, $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -x^4 + 2x^2 + x$$

Démontrer que la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse -1 est aussi tangente à $\mathscr{C}$ en un autre point à préciser.



101 Déterminer des tangentes communes

Narration de recherche

Chercher **Calculer**

Rédiger les différentes étapes de la recherche, sans omettre les fausses pistes et les changements de méthode.

Problème f et g sont deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = x^2 + 1 \quad \text{et} \quad g(x) = -x^2 - 1.$$

$\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sont les courbes représentatives de f et g dans un repère orthonormé.

Déterminer les tangentes communes aux deux courbes. Préciser pour chacune d'elles le point de contact avec chaque courbe.

102 Étudier une famille de courbes

Problème ouvert

Raisonner **Calculer**

Pour tout nombre réel non nul a, on note $\mathscr{P}_a$ la courbe représentative, dans un repère orthonormé, de la fonction :

$$x \mapsto ax^2 + (1 - 2a)x + a$$

Démontrer que toutes les courbes $\mathscr{P}_a$ passent par un même point E et qu'elles ont une tangente commune en ce point.

103 Imaginer une stratégie

Raisonner **Calculer**

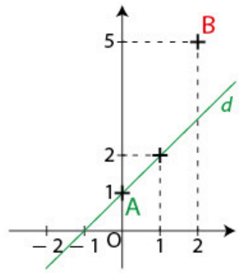
f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

où a, b et c désignent des nombres réels.

$\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

La droite d est tangente à $\mathscr{C}$ au point A(0 ; 1) et $\mathscr{C}$ passe par le point B(2 ; 5).



Déterminer alors l'expression de $f(x)$.

104 Find a function

Raisonner **Calculer**

g is the function defined on $\mathbb{R}$ by :

$$g(x) = px^3 + qx^2 \text{ with } p, q \text{ real numbers.}$$

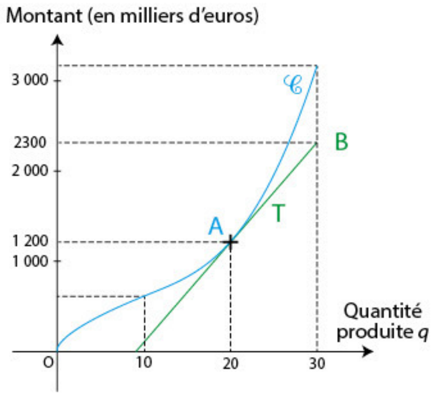
Determine p and q given that the curve of g has a tangent at the point $(1 ; -1)$ parallel to the $x-$axis.

105 Déterminer un coût marginal

Représenter **Calculer**

Dans un laboratoire pharmaceutique, le coût total de production, en milliers d'euros, de q tonnes d'un médicament, avec $0 \leqslant q \leqslant 30$, est modélisé par une fonction $q \mapsto \mathrm{C}(q)$.

Voici sa courbe représentative $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormé.



La tangente T à $\mathscr{C}$ au point A est la droite (AB) où A(20 ; 1200) et B(30 ; 2300).

a) Calculer la pente de la tangente T.

b) Estimer le coût marginal de production de la 21^e^ tonne de médicament.

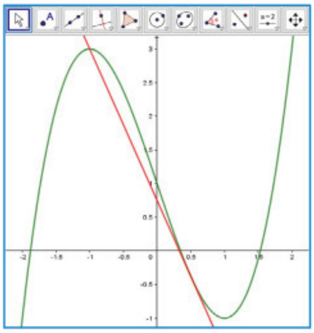
106 Situer une courbe par rapport à une tangente

Chercher **Calculer**

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 3x + 1$$

Avec un logiciel de géométrie, on a tracé ci-contre, dans un repère orthonormé, la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f et la tangente à cette courbe au point A d'abscisse $\frac{1}{2}$.



a) Démontrer qu'une équation de T est $y = -\frac{9}{4}x + \frac{3}{4}$.

b) À l'aide de l'écran de calcul formel ci-contre, étudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la tangente T.

1 $f(x) := x^3 - 3x + 1$

→ $f(x) := x^3 - 3x + 1$

2 Factoriser$\left(f(x) - \left(-\frac{9}{4}x + \frac{3}{4}\right)\right)$

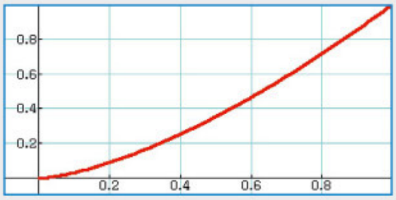
→ $(x+1) \cdot \frac{(2x-1)^2}{4}$

Des Défis

107 Démontrer une conjecture

Pour tout nombre réel $x \geqslant 0$, $f(x) = x\sqrt{x}$.

Claire a tracé à l'écran de sa calculatrice la courbe représentative de la fonction f.



Elle conjecture que f est dérivable en 0.

Démontrer cette conjecture.

108 S'intéresser à la parité

f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

a) Démontrer que si f est paire, alors sa fonction dérivée f' est impaire.

b) Démontrer que si f est impaire, alors sa fonction dérivée f' est paire.

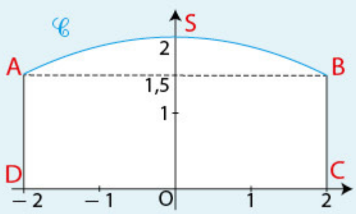
OBJECTIF BAC

109 Étudier le coût d'un portail

45 min

D'après Bac 2017, Amérique du Nord

Un fabricant doit réaliser un portail en bois plein sur mesure selon le schéma ci-dessous.



L'unité du repère représente 1 mètre.

$\mathscr{C}$ est la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[-2 ; 2]$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a, b, c nombres réels et $a \neq 0$.

1. a) La tangente à $\mathscr{C}$ au point S d'abscisse 0 est parallèle à l'axe des abscisses.

Justifier que $f'(0) = 0$ et en déduire la valeur de b.

b) À l'aide des informations $f(0) = 2$ et $f(2) = 1{,}5$, déterminer les valeurs de a et c.

En déduire que pour tout x de l'intervalle $[-2 ; 2]$:

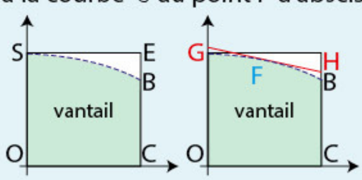
$$f(x) = -0{,}125x^2 + 2$$

2. a) Vérifier que f est une fonction paire.

b) Interpréter cette propriété.

3. Pour découper les vantaux du portail, le fabricant découpe des planches. Il a le choix entre deux formes de planches prédécoupées : soit un carré OCES, soit un trapèze OCHG comme dans les schémas ci-dessous.

Dans la deuxième méthode, la droite (GH) est la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point F d'abscisse 1.



Quelle est la forme la plus économique ?

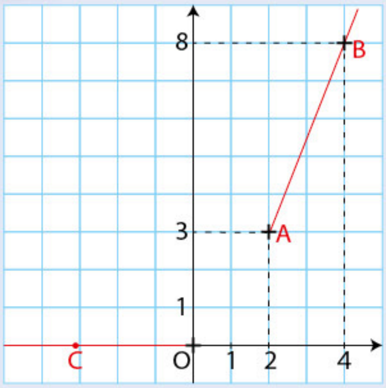
110 Déterminer une courbe

La situation problème

Un projet envisage de raccorder les deux tronçons rectilignes d'une autoroute par une courbe.
Les tronçons sont représentés par les demi-droites [AB) et [OC).
Utiliser les différentes informations pour déterminer une fonction f dont la courbe représentative modélise le raccordement.

DOC 1 Modélisation

L'unité du repère représente la distance de 1 km sur le terrain.



DOC 2 Informations sur le raccordement

La fonction f est définie sur l'intervalle [0 ; 2].
Son expression est de la forme :

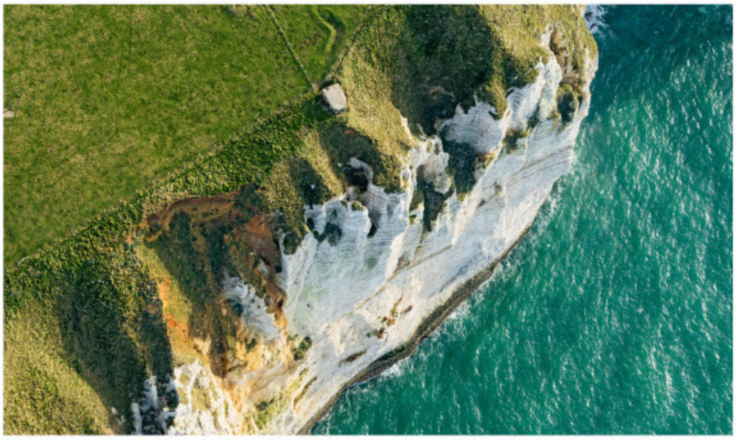
$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

avec a, b, c, d nombres réels.
Les deux tronçons rectilignes doivent être tangents au raccordement.

111 Étudier la chute d'un objet

La situation problème

Un caillou est lâché du sommet d'une falaise qui surplombe la mer.
La falaise a une hauteur de 40 m.
Utiliser les différentes informations pour calculer la durée de la chute et la vitesse du caillou lorsqu'il atteint la surface de l'eau.



DOC 1 La formule de l'altitude

On établit, en physique, que l'altitude du caillou en mètre après t secondes de chute est donnée par :

$$h(t) = 40 - 4{,}9t^2$$

DOC 2 La vitesse du caillou

La vitesse instantanée du caillou à l'instant t est la dérivée de la fonction qui mesure la distance parcourue par le caillou à cet instant.

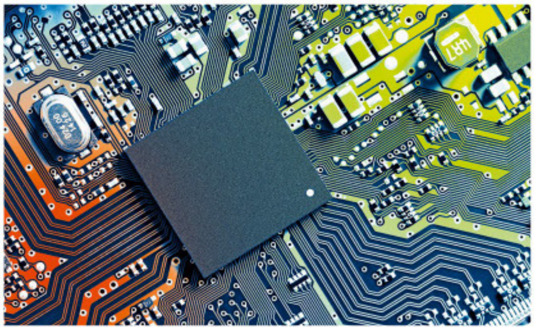
112 Évaluer une production

La situation problème

Une entreprise fabrique des composants électroniques. Le prix de vente de chaque composant s'élève à 8 €.

Pour une production donnée, le directeur souhaite que ce prix de vente soit supérieur au coût moyen et au coût marginal.

Utiliser les différentes informations pour déterminer les quantités à produire souhaitées.



DOC 1 Le coût de production

C est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $C(x) = \frac{1}{3000}x^3 + 200$. Le coût total de production de q composants, avec $q \in \mathbb{N}$ et $0 \leqslant q \leqslant 200$ est donné par $C(q)$.

DOC 2 Coût moyen et coût marginal

Pour une production de q composants, le coût moyen est $\frac{C(q)}{q}$. Le coût marginal $C(q+1) - C(q)$ est assimilé au nombre dérivé $C'(q)$.

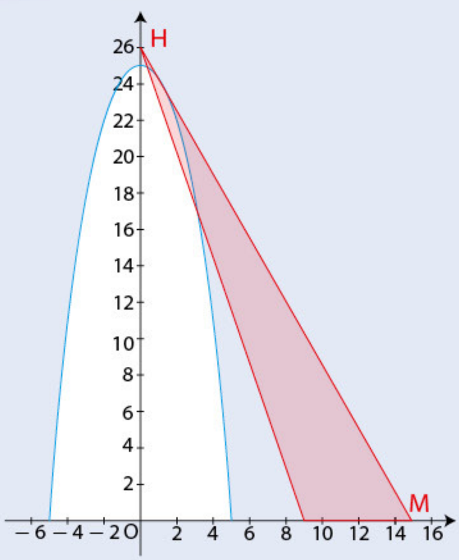
113 Situer un observateur

La situation problème

Au sommet d'un terril de 25 m de haut est planté un bâton de 1 m de haut.

Utiliser les différentes informations pour déterminer à quelle distance minimale du pied du terril un observateur doit se placer pour apercevoir l'extrémité du bâton.

DOC 1 Modélisation



DOC 2 Dans un repère

Dans le repère orthonormé ci-contre (*unité* : 1 m), le profil du terril est représenté par une portion de la parabole d'équation :

$$y = -x^2 + 25$$

L'extrémité du bâton est le point $H(0\,;26)$.

Le point M représente l'observateur.