2 Combinatoire et dénombrement

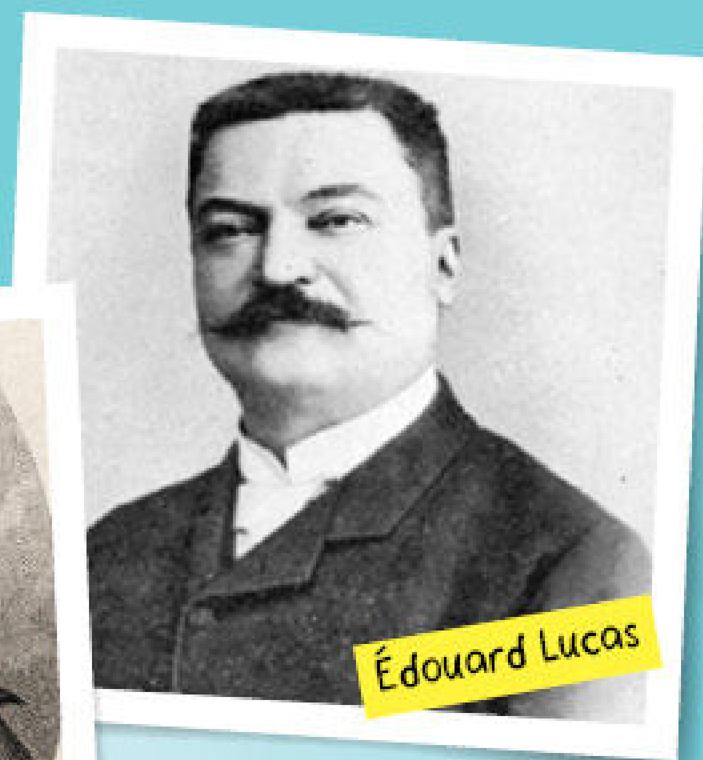
HISTOIRE DES MATHS

La combinatoire étudie le nombre de façons différentes de choisir des éléments dans une collection. Dès le 3e siècle, une formule du nombre de façons de choisir deux éléments distincts parmi n est attestée.

En 1150, le mathématicien indien **Bhaskara** connaît la formule générale des combinaisons (choix de p éléments distincts parmi n).

Au début du 14e siècle, le philosophe **Levi ben Ghersom**, qui a vécu dans le sud de la France, connaît les arrangements (nombre de choix de p éléments ordonnés pris parmi n).

Au 17e siècle, **Blaise Pascal** et **Pierre de Fermat** retrouvent la formule des combinaisons. Les notations « à la française » C_n^p pour les combinaisons et A_n^p pour les arrangements apparaissent en 1904 dans *L'Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées* publiée par **Jules Molk**.



Édouard Lucas

Blaise Pascal

► **Blaise Pascal** (1623-1662) est un mathématicien et philosophe français. En 1654, dans le *Traité du triangle arithmétique*, il présente un procédé de calcul des combinaisons de proche en proche ; ce procédé semble connu des Arabes dès le 11e siècle et des Chinois au 13e siècle.

► **Édouard Lucas** (1842-1891) est un mathématicien français. Il enseigne dans plusieurs lycées. En 1882, il publie les *Récréations mathématiques* dont la combinatoire est un objet de prédilection.

1150 Bhaskara donne plusieurs formules de combinatoire dans son ouvrage *Lilavati*.

1321 Levi ben Ghersom présente un travail de pionnier en combinatoire et utilise la preuve par induction.

1654 Pascal réactive le procédé désormais nommé triangle de Pascal.

1808 Christian Kramp, mathématicien français, introduit la notation n ! (factorielle) dans *Éléments d'arithmétique universelle*.

1271 Marco Polo part vers la Chine

1492 Premier voyage de Christophe Colomb

1610 Louis XIII est sacré roi

1776 Déclaration d'indépendance américaine

1990 Premier navigateur web

1200 — 1400 — 1600 — 1800 — 2000

Pascal's Triangle, Agnes Denes, 1973

Les résultats et les méthodes de combinatoire ont inspiré de nombreux artistes contemporains. Ces derniers en ont tiré des œuvres littéraires, plastiques et même audiovisuelles !

Les contenus et capacités travaillés dans ce chapitre

	Savoir-faire	Exercices
• Nombre de *k*-uplets d'éléments distincts d'un ensemble à *n* éléments.	1, 3, 4	18 à 26
• Factorielle et permutations d'un ensemble à *n* éléments.	2, 5, 6, 15, 17	28 à 33
• Combinaisons de *k* éléments d'un ensemble à *n* éléments. Représentation en termes de mots ou de chemins.	7 à 9, 14, 16	34 à 43, 45 à 48
• Relation et triangle de Pascal. Symétrie.	10 à 13	49 à 54
• Utiliser une représentation adaptée et reconnaître les éléments à dénombrer.		60 à 66
• Effectuer des dénombrements simples dans divers domaines scientifiques.		27, 44, 67

Bien démarrer

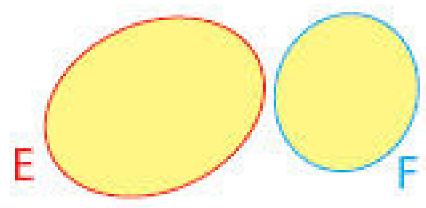
Calcul mental

Rappels utiles

E et F sont des ensembles finis qui contiennent respectivement n et m éléments.

• Principe additif

Si E et F sont **disjoints** ($E \cap F = \varnothing$), alors le nombre d'éléments de leur réunion $E \cup F$ est $n + m$.



• Principe multiplicatif

Le **produit cartésien** de E et F, noté $\mathbf{E \times F}$, est l'ensemble des couples $(a\,;b)$ où $a \in E$ et $b \in F$.
Le nombre d'éléments du produit cartésien $E \times F$ est $\boldsymbol{n \times m}$.

• Produit cartésien de trois ensembles ou plus

On définit de même le produit cartésien de trois ensembles ou plus. Le nombre d'éléments d'un produit cartésien de plusieurs ensembles est le produit des nombres d'éléments de ces ensembles.

• Nombre de k-uplets d'un ensemble

k désigne un nombre entier naturel, $k \geqslant 1$.
Un **k-uplet** (ou k-liste) d'éléments de E est une liste ordonnée $(a_1\,;a_2\,;\ldots\,;a_k)$ de k éléments de E, distincts ou confondus.
On note $\mathbf{E}^{\boldsymbol{k}}$ l'ensemble de tous les k-uplets de E.
Le nombre d'éléments de E^k est $\boldsymbol{n^k}$.

• Couples d'éléments de E

E^2 est l'ensemble des 2-uplets de E, c'est-à-dire des **couples** $(a_1\,;a_2)$ d'éléments de E.
Le nombre d'éléments de E^2 est n^2.

• Triplets d'éléments de E

E^3 est l'ensemble des 3-uplets de E, c'est-à-dire des **triplets** $(a_1\,;a_2\,;a_3)$ d'éléments de E.
Le nombre d'éléments de E^3 est n^3.

À l'oral — Questions-Tests

Pour chaque question, il y a une seule réponse exacte.

1 $E = \{1\,;2\,;3\,;4\}$ et $F = \{5\,;6\,;7\,;8\,;9\,;10\}$.
a) (1) $E \cap F = \{1\,;10\}$ (2) $E \cap F = \varnothing$
(3) $E \cap F = \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\,;7\,;8\,;9\,;10\}$
b) Le nombre d'éléments de $E \cup F$ est :
(1) 0 (2) 10 (3) 24

2 $E = \{a\,;b\,;c\}$ et $F = \{0\,;1\,;2\,;3\,;4\}$.
a) Un élément de $E \times F$ est :
(1) $(4\,;b)$ (2) $(1\,;1)$ (3) $(b\,;2)$
b) Le nombre d'éléments de $E \times F$ est :
(1) 8 (2) 15 (3) 3^5

3 Pour son repas au self, Étienne doit choisir une entrée parmi 3, puis un plat de résistance parmi 3 et enfin un dessert parmi 5.
a) Étienne a le choix entre :
(1) 45 repas (2) 11 repas (3) 30 repas
b) À la fin du repas, Étienne a le choix entre un expresso, un café allongé, un thé ou ne rien prendre.
Au total, Étienne a le choix entre :
(1) 49 repas (2) 135 repas (3) 180 repas

4 $E = \{a\,;b\,;c\,;d\,;e\,;f\,;g\}$
a) Un 5-uplet d'éléments de E est :
(1) $(a\,;a\,;b\,;b\,;c)$ (2) $(c\,;a\,;b\,;g\,;e\,;f)$
(3) $(a\,;b\,;c\,;d)$
b) Le nombre d'éléments de E^5 est :
(1) 35 (2) 78 125 (3) 16 807

5 $E = \{0\,;1\,;2\,;3\,;4\,;5\}$
Dans un repère du plan, on considère l'ensemble G des points de coordonnées $(x\,;y)$ avec $x \in E$ et $y \in E$.
Le nombre de points dans l'ensemble G est :
(1) 25 (2) 10 (3) 36

6 Un digicode d'entrée dans un immeuble est un triplet de chiffres de 0 à 9.
a) Un digicode qui **n'est pas possible** est :
(1) 000 (2) 1234 (3) 025
b) Le nombre de digicodes possibles est :
(1) 30 (2) 100 (3) 1 000
c) Le nombre de digicodes possibles commençant par 5 est :
(1) 30 (2) 100 (3) 1 000

1 Permutations d'un ensemble fini

Maya (M), Lenka (L) et Gabriel (G) veulent s'asseoir sur un banc. On se propose de déterminer de combien de façons différentes ils peuvent s'asseoir côte à côte sur ce banc.
Pour modéliser le situation :
– on représente chaque place par une case ;
– on note LMG la disposition représentée ci-contre.

Place 1	Place 2	Place 3
L	M	G

1 Écrire le plus grand nombre possible de dispositions de ces personnes sur le banc.

2 **a)** Combien y a-t-il de choix possibles pour la place 1 ?
b) Pour chacun de ces choix, combien de personnes différentes peuvent être positionnées à la place 2 ?
En déduire le nombre de façons de compléter les places 1 et 2.
c) Pour chacun de ces choix, combien reste-t-il de façons de compléter la place 3 ?
d) En déduire le nombre total de dispositions différentes de ces trois personnes sur le banc.
Chacune de ces dispositions est **une permutation** de l'ensemble $E = \{L ; M ; G\}$.

L'expression « pour chacun de ces choix » indique qu'il faut utiliser le principe multiplicatif, qui a été vu au chapitre 1.

3 On imagine qu'une quatrième personne, Anaïs, souhaite aussi s'asseoir sur ce banc.
Déterminer le nombre total de dispositions différentes de ces quatre personnes sur le banc.

2 Combinaisons d'éléments d'un ensemble fini

Pour s'occuper pendant un long trajet en train, Mélina décide de charger des films sur son téléphone. Elle a le choix parmi cinq films. L'espace libre sur son téléphone l'oblige à en choisir seulement trois, ce qui revient à cocher trois des cinq cases représentées ci-contre.

1 **a)** Combien y a-t-il de choix possibles pour le premier film, c'est-à-dire de façons différentes de cocher l'une des cinq cases ci-dessus ?
b) Pour chacun de ces choix, combien y a-t-il de façons possibles de choisir le deuxième film ?
c) Les deux premiers films ayant été choisis, combien reste-t-il de choix pour le troisième et dernier film ?
d) En déduire le nombre total de façons de choisir ces trois films, en tenant compte de l'ordre dans lequel ils sont choisis.

2 Finalement, l'ordre dans lequel Mélina a choisi les trois films n'a pas d'importance, car elle ne les regardera pas forcément dans cet ordre.
a) Lister tous les choix de la question **1** pour lesquels les films 1, 3 et 5 ont été choisis. Combien y en a-t-il ?
b) De manière générale, combien de choix de la question **1** donnent le même ensemble de trois films ?
c) En déduire le nombre total de façons de choisir ces trois films.
Ce nombre est appelé **nombre de combinaisons de trois éléments parmi cinq** et noté $\binom{5}{3}$ (lire « 3 parmi 5 »).

Exercices
- 1 à 6 (ci-contre)
- 18 à 33

1 k-uplets d'éléments distincts. Permutations

n désigne un nombre entier naturel avec $n \geqslant 1$.

A Nombre de k-uplets d'éléments distincts d'un ensemble E

Propriété

k désigne un nombre entier naturel tel que $1 \leqslant k \leqslant n$.
Le nombre de k-uplets d'éléments distincts d'un ensemble E à n éléments est :

$$\boldsymbol{n \times (n-1) \times \ldots \times (n-k+1)}.$$

Démonstration

Choisir un k-uplet revient à remplir k cases avec des éléments distincts de E.

- Il y a n choix pour la 1re case.
- Un choix étant fait, il y a $n-1$ choix possibles pour la 2e case.

Il y a donc $n(n-1)$ choix pour remplir les cases 1 et 2.

- Ainsi de suite, les cases 1, 2, …, $k-1$ étant complétées, il reste $n-(k-1)$ choix possibles pour la case k.

Case 1	Case 2		Case k
n choix	$n-1$ choix	…	$n-k+1$ choix

Le nombre de k-uplets est donc $n \times (n-1) \times \ldots \times (n-k+1)$.

On écrit k facteurs à partir de n en enlevant 1 à chaque fois.

Exemple

Le nombre de 5-uplets d'éléments distincts d'un ensemble à 8 éléments est 6 720. En effet :

$$8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 6\,720.$$

B Permutations des éléments d'un ensemble E

Définition

E est un ensemble fini à n éléments.
Une **permutation** des éléments de E est un n-uplet d'éléments distincts de E.

Remarque : lister toutes les permutations de E, c'est écrire les éléments de E dans tous les ordres possibles.
La propriété énoncée au § A, appliquée avec $k = n$, permet d'énoncer la propriété suivante.

Propriété – Définition

Le nombre de permutations d'un ensemble fini à n éléments est :

$$\boldsymbol{n \times (n-1) \times \ldots \times 2 \times 1}.$$

On note ce nombre $\boldsymbol{n\,!}$ (lire « factorielle n »).

Remarque : par convention, $\boldsymbol{0\,! = 1}$.

Exemple

Le nombre de permutations de l'ensemble $\{A\,;B\,;C\}$ est 6. En effet, $3\,! = 3 \times 2 \times 1 = 6$.

Conséquence

Le nombre de k-uplets d'éléments distincts d'un ensemble à n éléments s'écrit aussi $\dfrac{\boldsymbol{n\,!}}{\boldsymbol{(n-k)\,!}}$.

En effet, $\dfrac{n\,!}{(n-k)\,!} = \dfrac{n(n-1)\ldots(n-(k-1)) \times (n-k)\,!}{(n-k)\,!} = n(n-1)\ldots(n-k+1)$.

EXERCICES RÉSOLUS

1 Reconnaître et dénombrer des *k*-uplets d'éléments distincts

Sur son piano, Hugo joue avec sept notes : Do, Ré, Mi, Fa, Sol, La, Si.
Combien de mélodies différentes peut-il obtenir avec cinq notes distinctes de cet ensemble ?

Solution

Dans une mélodie, l'ordre des notes est important. De plus, la contrainte de l'énoncé impose de ne pas utiliser deux fois la même note. Une telle mélodie est donc un 5-uplet de notes distinctes parmi les sept notes.

$$7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 2\,520$$

Donc, Hugo peut obtenir 2 520 mélodies différentes de cinq notes distinctes prises parmi les sept notes.

On commence par modéliser une mélodie à l'aide d'un outil de combinatoire, ici un 5-uplet.
En effet, **les notes ne peuvent pas être répétées** et **leur ordre dans la mélodie est important**.

Remarque : une mélodie de cinq notes peut aussi être représentée par une succession de 5 cases comme ci-contre.

Note 1	Note 2		Note 5
7 choix	6 choix	…	3 choix

2 Reconnaître et dénombrer des permutations

8 athlètes s'élancent au départ d'une course de 100 m.
Combien y a-t-il d'ordres d'arrivée possibles en supposant qu'il n'y a ni abandon ni ex-aequo ?

Solution

Il s'agit d'ordonner les 8 athlètes, c'est-à-dire de déterminer le nombre de permutations d'un ensemble à 8 éléments.

$$8\,! = 8 \times 7 \times \ldots \times 2 \times 1 = 40320$$

Donc, le nombre d'ordres d'arrivée possibles est 40 320.

On peut calculer 8! à l'aide de la calculatrice.
TI : 8 math ▶▶▶ (PROB)4(!) entrer
Casio : 8 OPTN F6 (▷) F3 (PROB) F1 (x!) EXE
NumWorks : 8 alpha . (!) EXE

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 1

3 Les élèves de Valérie, professeure en classe de CE1, ont dix objets distincts posés sur leur table.
Ils doivent en choisir cinq et les ranger par ordre de préférence.
Combien de rangements différents peuvent-ils effectuer ?

4 75 chansons différentes sont enregistrées dans une playlist. Léo écoute dix chansons distinctes de cette playlist, rangées aléatoirement.
Déterminer le nombre de listes de dix chansons possibles. *Donner la notation scientifique.*

Sur le modèle de l'exercice résolu 2

5 Zofia a cinq devoirs à faire dans cinq matières différentes.
Déterminer le nombre d'organisations différentes qu'elle peut adopter pour faire ces cinq devoirs.

6 Dans la langue française, un des mots les plus longs, sans répétition de lettres, est le mot contemporain :

DIVULGACHERONS.

Sans tenir compte de la signification, combien y a-t-il d'anagrammes de ce mot, c'est-à-dire de façons différentes d'en ordonner les lettres ?

Exercices
- 7 à 9 (ci-contre)
- 34 à 48

2 Combinaisons

A Combinaisons de k éléments parmi n

Définition

E est un ensemble à n éléments (avec $n \in \mathbb{N}$) et k un nombre entier naturel avec $0 \leqslant k \leqslant n$.
Une **combinaison** de k éléments de l'ensemble E est une **partie** (ou sous-ensemble) de k éléments de E.
Le nombre de combinaisons de k éléments parmi les n éléments de E est noté $\binom{n}{k}$ (lire « k parmi n »).

Remarques : l'ordre n'intervient pas : $\{a\,;b\} = \{b\,;a\}$. Il n'y a pas de répétitions : $\{a\,;a\} = \{a\}$.

Exemple

$\{2\,;3\}$ est une combinaison de deux éléments de l'ensemble $E = \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\,;7\,;8\}$.

Cas particuliers :
- $\binom{n}{n} = 1$ car la seule partie de E à n éléments est E lui-même.
- $\binom{n}{0} = 1$ car l'ensemble vide est la seule partie de E qui n'a pas d'élément.
- $\binom{n}{1} = n$ car il y a n parties de E à un seul élément.

B Nombre de combinaisons

Propriété

Pour tous entiers naturels n et k,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ si } 0 \leqslant k \leqslant n \text{ soit } \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} \text{ si } 1 \leqslant k \leqslant n.$$

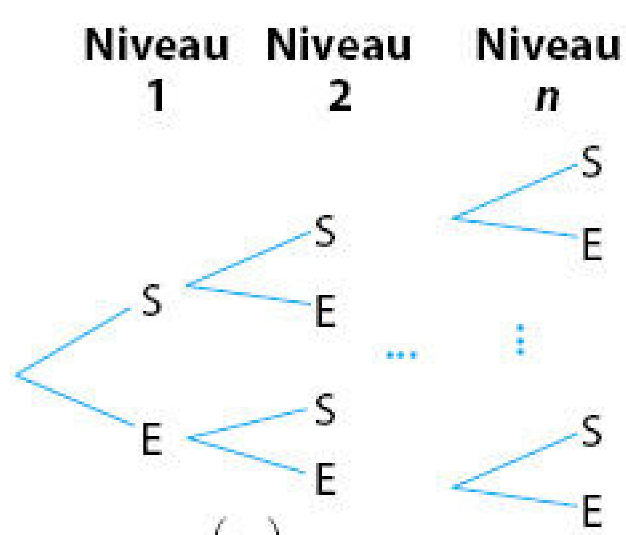
Démonstration

- Si $1 \leqslant k \leqslant n$, à une combinaison $F = \{a_1\,;a_2\,;\ldots\,;a_k\}$ de k éléments de E, on associe $k!$ permutations de F ; on obtient les k-uplets d'éléments distincts de F.
En faisant de même pour toutes les autres combinaisons de k éléments de E, on obtient tous les k-uplets d'éléments distincts de E.
Ainsi, $\binom{n}{k} \times k! = n(n-1)\ldots(n-k+1)$ soit $\binom{n}{k} = \dfrac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$.
D'après la conséquence établie au § B p. 58, $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$.
- Si $n \geqslant 1$ et $k = 0$, on a vu ci-dessus que $\binom{n}{0} = 1$. Or, $\dfrac{n!}{0!(n-0)!} = 1$.
- Si $n = k = 0$, $E = \varnothing$ et sa seule partie est $\varnothing$, $\binom{0}{0} = 1$. Or, $\dfrac{0!}{0!0!} = 1$.

Représentation en termes de chemins dans un arbre

De chaque nœud de cet arbre partent deux branches : S (succès) et E (échec).
Un chemin peut être représenté par une succession de n cases où l'on inscrit S ou E.

$\square \quad \square \quad \cdots \quad \square$



Le nombre de chemins avec k succès ($0 \leqslant k \leqslant n$) est le nombre de choix de k cases parmi n où l'on inscrit la lettre S. Ces choix sont les combinaisons de k positions parmi n (pas de répétition et pas d'ordre).

Dans un arbre « succès-échec » à n niveaux, le nombre de chemins avec k succès est $\binom{n}{k}$.

EXERCICE RÉSOLU

7 Reconnaître et dénombrer des combinaisons

Olivia a installé 10 jeux sur sa console : 5 jeux d'aventure, 3 jeux de course de voitures et 2 jeux sportifs. On s'intéresse ici aux groupes de 5 jeux différents qu'Olivia choisit chaque week-end.

a) Parmi combien de groupes de 5 jeux effectue-t-elle son choix chaque week-end ?

b) Combien de ces groupes comportent exactement 2 jeux de course de voitures ?

c) Combien de ces groupes comportent au moins un jeu d'aventure ?

Solution

a) Dans un groupe de 5 jeux, les jeux sont différents et l'ordre n'intervient pas. On modélise donc un groupe de 5 jeux par une combinaison de 5 jeux parmi les 10 d'Olivia.

$$\binom{10}{5} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{5\,!} = \frac{2 \times 5 \times 9 \times 2 \times 4 \times 7 \times 6}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 9 \times 4 \times 7 = 252.$$

Donc Olivia a le choix parmi 252 groupes de 5 jeux.

> Il est judicieux de simplifier la fraction autant que possible avant d'effectuer le calcul.

b) Le nombre de choix de 2 jeux parmi les 3 jeux de course est $\binom{3}{2} = 3$.

Pour chacun de ces choix, on complète le groupe en choisissant 3 jeux parmi les 7 qui ne sont pas des jeux de course.

Le nombre de façons d'effectuer ce choix est : $\binom{7}{3} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3\,!} = 35$.

Or, $\binom{3}{2} \times \binom{7}{3} = 3 \times 35 = 105$ donc il y a 105 groupes de 5 jeux dont 2 jeux de course de voitures.

> Pour répondre à une telle question, on « idéalise » la situation : on veut 2 jeux de course, on commence par les choisir parmi les jeux de course, puis on complète par des jeux autres que de course.

c) Le contraire de « au moins un jeu d'aventure » est « aucun jeu d'aventure », c'est-à-dire « 5 jeux autres que d'aventure ».

Le nombre de groupes de 5 jeux autres que d'aventure est : $\binom{5}{5} = 1$.

$\binom{10}{5} - \binom{5}{5} = 252 - 1 = 251$ donc il y a 251 groupes de 5 jeux avec au moins un jeu d'aventure.

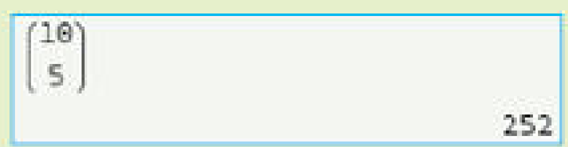
> On aurait pu dénombrer les groupes avec 1, 2, 3, 4 ou 5 jeux d'aventure, mais c'était plus long.

On peut utiliser la calculatrice pour calculer un nombre de combinaisons, par exemple $\binom{10}{5}$.

TI : 10 math ▶▶▶ (PROB) 3 (Combinaison) 5 entrer

Casio : 10 OPTN F6 (▷) F3 (PROB) F3 (nCr) 5 EXE

NumWorks : Dénombrement ▷ binomial(n,k) k parmi n EXE 10 ▽ 5 EXE.



EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 7

8 Une urne contient 6 boules vertes, 4 boules rouges et 2 boules bleues. On tire au hasard simultanément 6 de ces boules. Combien y a-t-il de tirages :

a) au total ? **b)** avec exactement 3 boules rouges ?

c) avec au moins une boule rouge ?

9 Raphaël choisit au hasard un groupe de 4 livres parmi 4 romans de fantasy, 3 livres scientifiques et 3 biographies.

Combien de choix a-t-il :

a) au total ?

b) avec exactement 2 romans de fantasy ?

c) avec au moins une biographie ?

Exercices
- 10 à 13 (ci-contre)
- 49 à 54

3 Propriétés des nombres de combinaisons

A Symétrie des nombres de combinaisons

Propriété

Pour tous entiers naturels n et k tels que à $0 \leqslant k \leqslant n$, $\dbinom{n}{k} = \dbinom{n}{n-k}$.

Démonstration

Dans un arbre « succès-échec » à n niveaux, il y a autant de chemins qui réalisent k succès que de chemins qui réalisent k échecs, c'est-à-dire qui réalisent $n - k$ succès.

B La relation de Pascal

Propriété

Pour tous entiers naturels n et k tels que $1 \leqslant k \leqslant n - 1$, $\dbinom{n}{k} = \dbinom{n-1}{k-1} + \dbinom{n-1}{k}$.

Démonstration

Dans un arbre « succès-échec » à n niveaux, le nombre de chemins réalisant k succès est $\dbinom{n}{k}$. Parmi ces chemins, on peut distinguer ceux qui commencent par :

- un succès ; il faut donc ensuite $k - 1$ succès en $n - 1$ épreuves. Leur nombre est $\dbinom{n-1}{k-1}$;
- un échec ; il faut donc ensuite k succès en $n - 1$ épreuves. Leur nombre est $\dbinom{n-1}{k}$.

Donc $\dbinom{n}{k} = \dbinom{n-1}{k-1} + \dbinom{n-1}{k}$.

Vidéo
JAICOMPRIS.COM
Cette démonstration est présentée en vidéo

Remarque : une autre démonstration, par le calcul, est proposée à l'exercice 58 p. 70.

C Le triangle de Pascal

On peut calculer les $\dbinom{n}{k}$ de proche en proche, à l'aide du tableau ci-contre. Pour cela :

- on convient que $\dbinom{0}{0} = 1$;
- on place des 1 sur la colonne « $k = 0$ » du fait que $\dbinom{n}{0} = 1$;
- on place des 1 sur la diagonale du fait que $\dbinom{n}{n} = 1$;
- on obtient un autre nombre du tableau en additionnant le nombre juste au-dessus et celui situé à gauche sur la ligne précédente d'après la relation de Pascal.

$$\begin{array}{cc} \dbinom{n}{k} + \dbinom{n}{k+1} & \\ & \dbinom{n+1}{k+1} \end{array}$$

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

EXERCICES RÉSOLUS

10 Utiliser les propriétés des nombres de combinaisons

On sait que $\binom{7}{1} = 7$ et $\binom{7}{2} = 21$. En déduire la valeur de : **a)** $\binom{8}{2}$ **b)** $\binom{8}{6}$.

Solution

a) D'après la relation de Pascal :

$$\binom{8}{2} = \binom{8-1}{2-1} + \binom{8-1}{2} = \binom{7}{1} + \binom{7}{2} = 7 + 21 = 28.$$

b) Par symétrie des nombres de combinaisons : $\binom{8}{6} = \binom{8}{8-6} = \binom{8}{2} = 28.$

Ces propriétés des nombres de combinaisons ont un intérêt surtout théorique. En effet, de nos jours, la calculatrice permet de **calculer aisément ces coefficients**.

11 Algo python Générer la liste des coefficients $\binom{n}{k}$ à l'aide de la relation de Pascal

Voici un algorithme qui pour un entier naturel n donné, $n \geqslant 2$, génère les coefficients $\binom{n}{k}$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$.

Au début, on affecte la liste [1, 1] à la variable L ainsi qu'à la variable M, et la variable n a une valeur donnée.

a) Dresser un tableau de suivi des variables lorsque $n = 3$.
Interpréter le résultat obtenu.

b) Coder cet algorithme en langage Python avec une fonction **Coefficients** de paramètre n.
Saisir ce programme et l'exécuter avec $n = 10$.

```
1 Pour i allant de 2 à n
2 |  M[i + 1] ← 1
3 |  Pour k allant de 1 à i − 1
4 |  |  M[k + 1] ← L[k + 1] + L[k]
5 |  Fin Pour
6 |  L ← M
7 Fin Pour
```

Solution

a)

i		2	2	2	3	3	3	3
k			1	1	1	1	2	2
L	[1, 1]	[1, 1]	[1, 1]	[1, 2, 1]	[1, 2, 1]	[1, 2, 1]	[1, 2, 1]	[1, 3, 3, 1]
M	[1, 1]	[1, 1, 1]	[1, 2, 1]	[1, 2, 1]	[1, 2, 1, 1]	[1, 3, 1, 1]	[1, 3, 3, 1]	[1, 3, 3, 1]

[1, 3, 3, 1] est la liste des coefficients $\binom{3}{k}$ pour $k \in \{0\,;1\,;2\,;3\}$.

b) Voici ci-contre la fonction **Coefficients** écrite en langage Python.
Pour $n = 10$, on obtient les coefficients de la ligne 10 du triangle de Pascal.

```python
def Coefficients(n):
    L=[1,1]
    M=L
    for i in range(2,n+1):
        M=M+[1]
        for k in range(i-1):
            M[k+1]=L[k+1]+L[k]
        L=M
    return L
```

```
>>> Coefficients(10)
[1, 10, 45, 120, 210, 252, 210, 120, 45, 10, 1]
```

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 10

12 On sait que $\binom{10}{1} = 10$ et $\binom{10}{2} = 45$.
En déduire la valeur de :
a) $\binom{11}{2}$ **b)** $\binom{11}{9}$

Sur le modèle de l'exercice résolu 11

13 Dans l'algorithme de l'exercice 11, on remplace les lignes 3 à 5 par celles-ci.
Quel est leur intérêt ?

```
Pour k allant de 1 à E(i/2)
|  M[k+1]←L[k+1]+L[k]
|  M[i–(k+1)]←M[k+1]
Fin Pour
```

EXERCICES RÉSOLUS

14 Générer les parties à deux éléments d'un ensemble fini

Cours 2. A

Cette fonction **Paires** en langage Python renvoie toutes les parties à deux éléments d'un ensemble à n éléments (avec $n \geqslant 2$), représenté par une liste L.

On rappelle que la fonction **len** renvoie la longueur (le nombre d'éléments) d'une liste.

a) Dresser un tableau de suivi de i, P[0], k et P lorsque L = [1, 2, 3, 4].

b) Saisir cette fonction et l'exécuter lorsque L = [1, 2, 3, 4].

```
def Paires(L):
    n=len(L)
    P=[0,0]
    for i in range(1,n):
        P[0]=L[i-1]
        for k in range(i+1,n+1):
            P[1]=L[k-1]
            print(P)
    return
```

Solution

a)

i	1	1	1	2	2	3
P[0]	1	1	1	2	2	3
k	2	3	4	3	4	4
P	[1, 2]	[1, 3]	[1, 4]	[2, 3]	[2, 4]	[3, 4]

b) Voici ci-contre un montage de l'affichage obtenu.

```
>>> L=[1,2,3,4,5]
>>> Paires(L)
[1, 2]   [2, 4]
[1, 3]   [2, 5]
[1, 4]   [3, 4]
[1, 5]   [3, 5]
[2, 3]   [4, 5]
```

15 Tirer aléatoirement une permutation d'un ensemble fini

Cours 1. B

Cette fonction **PermutAlea** en langage Python renvoie une permutation aléatoire d'un ensemble à n éléments (avec $n \geqslant 1$), représenté par une liste L.

L'instruction **P=[0]*n** signifie que la liste P contient n termes égaux à 0 et l'instruction **del L[k]** signifie que l'on supprime cet élément de la liste L.

Dresser un tableau de suivi des variables lorsque L = [1, 2, 3, 4] et indiquer la permutation renvoyée.

```
from random import*

def PermutAlea(L):
    n=len(L)
    m=n
    P=[0]*n
    for i in range(1,n+1):
        k=randint(0,m-1)
        P[i-1]=L[k]
        del L[k]
        m=m-1
    return P
```

Solution

m	4	3	2	1
i	1	2	3	4
k	2	1	2	1
L	[1, 2, 4]	[1, 4]	[1]	[ ]
P	[3, 0, 0, 0]	[3, 2, 0, 0]	[3, 2, 4, 0]	[3, 2, 4, 1]

Parmi les 4 ! (soit 24) permutations de $\{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$, la fonction a tiré au hasard la permutation $(3 ; 2 ; 4 ; 1)$.

On génère ci-contre un nombre entier aléatoire k à l'aide de la calculatrice : nbrAléatEnt(a,b) (TI), RandInt# (Casio), randint(a,b) (NumWorks).

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 14

16 Écrire une fonction qui génère les parties à 3 éléments d'un ensemble à n éléments avec $n \geqslant 3$.

Sur le modèle de l'exercice résolu 15

17 Saisir la fonction Python de l'exercice 15 et l'exécuter avec L = [1, 2, 3, 4, 5].

k-uplets et permutations

Cours 1

Questions flash — À l'oral

18 E est l'ensemble des lettres de l'alphabet, écrites en minuscules. Parmi les listes ci-dessous, dire oralement lesquelles sont des 4-uplets d'éléments distincts de E.

(1) (f ; t ; u) **(2)** (z ; a ; f ; p)
(3) (A ; B ; C ; D) **(4)** (a ; 1 ; b ; 2)
(5) (a ; b ; c ; d ; e) **(6)** (a ; b ; d ; c)
(7) (a ; a ; b ; c) **(8)** (a ; b ; c ; d)

19 E est l'ensemble $\{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5\}$.
a) Chaque couple d'éléments distincts de cet ensemble peut être écrit sous la forme d'un nombre à deux chiffres.
Donner oralement le plus petit et le plus grand de ces nombres.
b) On peut de même écrire les triplets d'éléments distincts sous forme de nombres à trois chiffres.
Donner oralement le plus petit et le plus grand de ces nombres.

20 E est l'ensemble des voyelles accentuées de la langue française :
$$E = \{é ; è ; ê ; ë ; à ; â ; ô ; î ; ï ; ù ; û ; ü\}.$$
Calculer mentalement le nombre de couples d'éléments distincts de cet ensemble.

21 Noam construit un train en accrochant deux wagons à une locomotive. Il possède en tout cinq wagons, qui sont de couleurs différentes.

a) Combien de trains différents peut-il construire ?
b) Il s'exclame : « Si je mettais un troisième wagon, j'aurais trois fois plus de possibilités ! ». A-t-il raison ?

22 Le jeu *Mario Kart 8 Deluxe* propose de concourir sur 48 circuits différents.
a) Victor décide de faire un championnat de quatre circuits différents, choisis aléatoirement.
Combien existe-t-il de tels championnats, en tenant compte de l'ordre d'apparition des circuits ?
b) Léah, quant à elle, choisit un championnat de huit circuits aléatoires.
Combien y a-t-il de possibilités différentes ?

23 Alexandra joue au Scrabble. Elle a devant elle un ensemble de sept lettres, toutes différentes.
Elle assemble certaines de ces lettres.
Sans tenir compte de la signification du mot constitué, déterminer le nombre de mots :
a) de trois lettres ; **b)** de cinq lettres.

24 Un algorithme de résolution du Rubik's cube consiste en une suite de mouvements. Il y a 18 mouvements différents possibles, par exemple :

U : tourner la face supérieure d'un quart de tour dans le sens des aiguilles d'une montre ;
R : tourner la face de droite d'un quart de tour dans le sens des aiguilles d'une montre ;
U′ et **R′** : mêmes mouvements que **U** et **R** mais dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.
a) Combien y a-t-il d'algorithmes différents constitués de deux mouvements distincts ?
b) Un des algorithmes les plus importants dans la résolution du cube est RUR′U′.
Combien y a-t-il d'algorithmes de même longueur que celui-ci constitués de mouvements distincts ?

25 Delphine doit choisir un code secret composé de cinq chiffres distincts compris entre 0 et 6.
a) Combien a-t-elle de choix possibles ?
b) Parmi tous les codes possibles, combien se terminent par le chiffre 0 ?

Vidéo
JaiCompris.com — Cet exercice est corrigé en vidéo

26 On dispose des cinq lettres du mot NIMES.
a) Combien de mots peut-on constituer avec trois lettres différentes de ce mot, sans tenir compte de leur signification éventuelle ?
b) Parmi ces mots de trois lettres, combien comportent la lettre M en deuxième position ?
c) Parmi ces mots de trois lettres, combien contiennent la lettre S ?

27 La séquence d'un brin d'ADN est la succession des nucléotides qui le constituent. Ces nucléotides sont notés A (adénine), C (cytosine), G (guanine) et T (thymine).
a) Combien y a-t-il de séquences de deux nucléotides différents possibles ?
b) Lister toutes ces séquences de deux nucléotides.
c) Donner le nombre de séquences de trois, puis de quatre, nucléotides différents.

28 E est l'ensemble $\{7\,;8\,;2\,;9\,;3\,;1\}$.
a) Les permutations de cet ensemble peuvent être écrites sous la forme de nombres entiers à six chiffres. Donner le plus petit et le plus grand de ces nombres.
b) Calculer le nombre total de permutations de E.

29 Le drapeau français est constitué de trois bandes verticales de couleur bleu, blanc, rouge, dans cet ordre.

a) Combien de drapeaux différents peut-on réaliser en changeant l'ordre de ces trois bandes verticales ?
b) Rechercher sur Internet lesquelles de ces permutations correspondent à des drapeaux existants, toujours avec trois bandes verticales.

30 Un sac contient quatre jetons de poker, marqués 5, 10, 50 et 100. On tire, successivement et sans remise, tous les jetons de ce sac.
a) Combien de tirages différents peut-on effectuer ?
b) Combien de tirages commencent par le jeton 50 ?
Conseil : « successivement » sous-entend que l'ordre intervient ; il y a un 1er jeton tiré, un 2^{e}, un 3^{e}, un 4^{e}.

31 On s'intéresse aux anagrammes du mot DIJON, sans tenir compte du fait qu'ils aient une signification ou non.
a) Combien y a-t-il de telles anagrammes ?
b) Combien de ces anagrammes commencent par la lettre D ?
c) Combien de ces anagrammes commencent par une consonne ?

32 Ruben doit trouver un code secret constitué de huit symboles distincts. Il connait les huit symboles utilisés, mais ne sait pas dans quel ordre il doit les placer.
1. Quel est le nombre de codes possibles ?
2. Deux des symboles sont ◆ et ∞.
a) Combien y-a-t-il de codes qui commencent par ◆ ?
b) Combien y a-t-il de codes qui commencent par ◆ et se terminent par ∞ ?

33 Une classe de 12 élèves rassemble 7 filles et 5 garçons. Un professeur range les copies de ces 12 élèves dans un ordre aléatoire.
a) Combien y a-t-il de façons de ranger ces copies ?
b) Combien y a-t-il de façons de ranger les copies en commençant par les copies des filles ?
c) Si on commence par les copies des garçons, cela modifie-t-il le nombre de façons de ranger les copies ?

Combinaisons

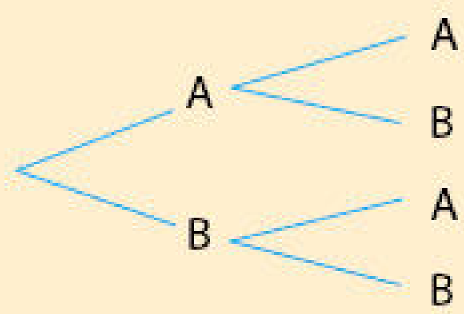
Cours 2

Questions flash — À l'oral

34 $E = \{$Cœur ; Pique ; Trèfle ; Carreau$\}$.
E est l'ensemble des quatre différentes familles de cartes d'un jeu de poker.
Parmi les ensembles ci-dessous, dire oralement lesquels sont des combinaisons de 2 éléments de l'ensemble E.
(1) $\{$Cœur ; Cœur$\}$ **(2)** $\{$Cœur ; Carreau$\}$
(3) $\{$Noir ; Rouge$\}$ **(4)** $\{$Cœur ; Pique ; Carreau$\}$

35 E est l'ensemble des chiffres de 0 à 9.
Pour toute combinaison de deux de ces chiffres, on peut effectuer leur somme.
Dans chaque cas, dire oralement si le nombre est l'une des sommes possibles.
a) 8 **b)** 18 **c)** 13 **d)** 1 **e)** 0 **f)** 4

36 L'arbre ci-contre présente toutes les possibilités quand on répète deux fois une expérience à deux issues, A et B.



En comptant le nombre de chemins, retrouver oralement la valeur de :
a) $\binom{2}{0}$ **b)** $\binom{2}{1}$ **c)** $\binom{2}{2}$

37 Pour partir en vacances, Valentina souhaite emporter cinq livres parmi huit qu'elle n'a pas encore lus.
a) Combien a-t-elle de façons de choisir ces 5 livres ?
b) Elle se rend finalement compte qu'elle a déjà lu l'un de ces livres.
Quel est alors le nombre de façons de choisir les cinq livres parmi ceux qu'elle n'a pas encore lus ?

38 Lorenz possède dix cartes de fidélité de différents magasins. Malheureusement, son portefeuille ne comporte que cinq emplacements pour les cartes.
a) Combien Lorenz a-t-il de façons de choisir les cinq cartes à glisser dans son portefeuille, sans se soucier de l'ordre dans lequel il les placera ?
b) Il se rend compte que l'un des emplacements doit être réservé pour sa carte de crédit.
Combien a-t-il de façons de choisir les cartes pour les emplacements restants ?

39 **Algo** python

La fonction écrite en langage Python ci-dessous compte le nombre d'entiers pairs dans une liste L de vingt nombres entiers naturels.

```
1 def Pairs(L):
2     m=0
3     for i in range(20):
4         if(L[i]%2)==0:
5             m=m+1
6     return m
```

a) Expliquer le rôle des lignes 4 et 5.

b) Si m vaut 2 en sortie, cela signifie qu'il y a deux nombres pairs parmi les 20 nombres.
Combien y a-t-il de possibilités pour les positions de ces deux nombres pairs dans la liste ?

c) Même question dans le cas où $m = 10$.

40 On lance 6 fois de suite une pièce de monnaie équilibrée et on observe si le côté visible est Pile ou Face.
On imagine représenter cette situation par un arbre.

1. a) Combien y aurait-il de chemins sur cet arbre ?

b) Dans cet arbre, combien y aurait-il de chemins contenant :

- six fois Pile ?
- six fois Face ?

c) Pour k allant de 1 à 5, calculer le nombre de chemins qui contiendraient k fois Pile.

2. Dans chaque cas, déterminer le nombre de chemins répondant à la contrainte indiquée.

a) On a obtenu Pile au 4^{e} lancer.

b) On a obtenu Pile au 2^{e} lancer et Face au 5^{e}.

41 Dans un lycée, les 36 délégués de classe doivent élire un comité de trois élèves.

1. On suppose que les trois élèves ont le même rôle.

a) Combien y a-t-il de comités différents possibles ?

b) On sait de plus que, parmi les délégués, 20 sont des filles et 16 sont des garçons.
Calculer le nombre de comités possibles dans lesquels il y a davantage de filles que de garçons.

2. On suppose que les trois élèves du comité peuvent être président, adjoint, secrétaire.
Reprendre alors les questions **a)** et **b)** de **1**.

42 La gamme de Do est constituée des sept notes Do, Ré, Mi, Fa, Sol, La, Si. Un accord est un ensemble de notes différentes jouées simultanément.

a) Combien existe-t-il d'accords :

- de deux notes ?
- de trois notes ?

b) Combien existe-t-il d'accords de trois notes qui contiennent la note Do ?

43 Un jeu de dominos classique comprend 28 pièces différentes. Chaque joueur en pioche une poignée de sept au début de la partie.

a) Combien y a-t-il de tirages de sept dominos possibles ?

b) Dans le cas de deux joueurs, combien y a-t-il de tirages possibles (un tirage est l'ensemble de toutes les pièces tirées par les joueurs) ?

44 En informatique, un raccourci clavier est un ensemble de touches que l'on actionne simultanément pour effectuer une certaine action. Un exemple classique est Ctrl+C qui permet de copier du texte ou une image.
On se limite dans cet exercice aux 26 touches des lettres et aux touches Ctrl, Alt et Shift.

a) Combien y a-t-il de raccourcis de deux touches ?

b) Combien y a-t-il de raccourcis de trois touches qui contiennent la touche Ctrl ?

c) Combien y a-t-il de raccourcis de trois touches ?

45 Au poker, on utilise un jeu de cinquante-deux cartes : treize valeurs (du 1 au 10 puis valet, dame, roi) en quatre familles (Cœur, Carreau, Pique, Trèfle).
Une main est un ensemble de 5 cartes différentes.

1. Combien de mains différentes peut recevoir un joueur ?

2. Une couleur est constituée de 5 cartes de la même famille.

a) Combien y a-t-il de mains de ce type en Cœur ?

b) Combien y a-t-il de mains de ce type en tout ?

3. Un carré est une main composée de 4 cartes de la même valeur et d'une cinquième carte quelconque.

a) En considérant la cinquième carte, déterminer combien de carrés présentent le numéro 10 répété quatre fois ?

b) Combien y a-t-il de carrés en tout ?

46 Un sac contient six boules noires, deux boules blanches et quatre boules rouges.

On tire au hasard simultanément trois boules du sac.

a) Combien y a-t-il de tirages possibles ?

b) Combien de tirages sont constitués de trois boules de couleurs différentes ?

c) Combien de tirages sont constitués de trois boules de la même couleur ?

47 Le Kinball est un sport dans lequel plusieurs équipes se passent un gros ballon. Le but du jeu est d'obliger une équipe adverse à laisser tomber le ballon au sol. Dans ce sport, tous les joueurs d'une équipe ont le même rôle.

Alice entraine un club de Kinball qui compte 42 adhérents. Avant un championnat, elle doit choisir 10 personnes qui y participeront.

1. Combien de choix possibles s'offrent à Alice pour cette sélection de 10 joueurs ?

2. Parmi les 42 adhérents, il y a 22 filles et 20 garçons. Combien Alice a-t-elle de choix possibles pour une équipe :

a) qui ne comporte que des filles ?

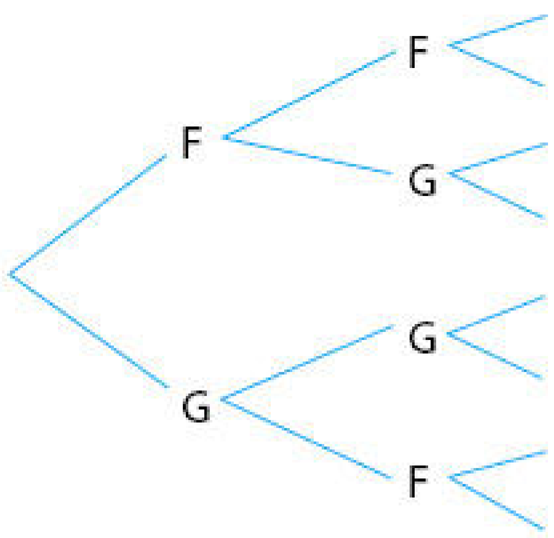
b) qui comporte un seul garçon ?

c) qui comporte autant de garçons que de filles ?

d) qui comporte deux garçons de plus que de filles ?

48 Dans une classe, il y a autant de garçons que de filles. Chaque semaine, pendant plusieurs semaines, on tire au sort un élève de la classe et on note s'il s'agit d'un garçon ou d'une fille. Chaque tirage est indépendant des précédents. Ainsi, un-e même élève peut être tiré-e au sort plusieurs fois.

On a représenté cette situation par un arbre, dont voici les premiers niveaux.



a) On sait qu'il y a 12 chemins qui contiennent exactement une fois la lettre G. En déduire le nombre de semaines, et donc de tirages, qui ont été effectués.

b) Calculer alors le nombre de chemins qui contiennent exactement autant de F que de G.

c) Calculer le nombre de tirages possibles dans lesquels il y a strictement plus de filles que de garçons.

Propriétés des nombres de combinaisons

Cours 3

Questions flash À l'oral

49 Donner oralement la valeur de :

a) $\binom{150}{0}$ **b)** $\binom{150}{1}$ **c)** $\binom{150}{149}$ **d)** $\binom{150}{150}$

50 On donne $\binom{12}{5} = 792$. En déduire $\binom{12}{7}$.

51 On donne $\binom{10}{3} = 120$ et $\binom{10}{4} = 210$.

En déduire, oralement, la valeur de $\binom{11}{4}$.

52 Voici une ligne du triangle de Pascal, qui donne les valeurs des nombres de combinaisons $\binom{n}{k}$ (avec $0 \leqslant k \leqslant n$) pour une certaine valeur de n. L'un des nombres a été effacé.

1 6 15 20 15 ... 1

a) Quelle est la valeur de n pour cette ligne ?

b) Donner la valeur du nombre manquant.

c) En déduire la ligne suivante du triangle de Pascal.

53 Voici trois lignes successives du triangle de Pascal, où l'on a caché certains nombres.

1 1

1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

1 1

Recopier et compléter :

a) la troisième ligne ; **b)** la première ligne.

54 **Déterminer $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$**

Asia additionne les coefficients de chaque ligne du triangle de Pascal.

1. a) Effectuer le calcul indiqué pour chacune des 5 premières lignes du triangle de Pascal.

b) Quelle conjecture Asia peut-elle émettre ?

2. On considère la ligne n du triangle de Pascal.

a) Quelle est la signification de chaque coefficient $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n}$ pour un ensemble E à n éléments ?

b) Quel est le nombre total de parties de E ?

c) Prouver alors la conjecture d'Asia.

Pour se tester

EXO Exercices interactifs

55 QCM **Dans chaque cas, donner la réponse exacte sans justifier.**

		A	B	C	D
1	E est l'ensemble $\{a\,;e\,;i\,;o\,;u\}$. Le nombre de permutations de cet ensemble est …	5	15	120	240
2	Dans une troupe de théâtre, il y a 3 rôles différents à distribuer parmi les 20 personnes de la troupe. Le nombre de distributions possibles est …	3	1 140	6 840	12^3
3	Le nombre de combinaisons de 4 éléments parmi 8 est égal à …	70	56	0,5	40 320
4	$\binom{100}{80}$ est égal à …	$\binom{10}{8}$	$\binom{100}{20}$	$\binom{5}{4}$	$\binom{180}{100}$
5	Le nombre de parties à deux éléments d'un ensemble à n éléments, $n \geqslant 1$, est …	$\frac{n(n-1)}{2}$	$\frac{n(n+1)}{2}$	$\frac{(n-1)(n+1)}{2}$	$n(n-1)$

56 QCM **Dans chaque cas, donner la (ou les) réponse(s) exacte(s) sans justifier.**

		A	B	C	D
1	Tous les coefficients d'une ligne du triangle de Pascal sont impairs lorsque …	$n=3$	$n=5$	$n=7$	$n=9$
2	$(1\,;2\,;3)$ est une permutation de l'ensemble …	$\{1\,;2\,;3\}$	$\{3\,;2\,;1\}$	$\{1\,;2\,;3\,;4\}$	$\{1\,;2\}$
3	Un ukulélé a 4 cordes. Le nombre de façons de les jouer l'une après l'autre est …	4	4!	$4+3+2+1$	24
4	4 des 14 lignes de métro d'une ville vont être modernisées. Le nombre de façons de les choisir, dans un ordre précis, est …	un multiple de 132	4!	24 024	36 036
5	$\frac{20!}{12!\,8!}$ est égal à …	125 975	$\binom{20}{12}$	$30 \times 19 \times 17 \times 13$	$\binom{20}{8}$

57 Vrai/Faux **Dans chaque cas, dire si l'affirmation est vraie ou fausse en justifiant.**

1. **Affirmation :** pour un ensemble à 8 éléments, il y a plus de 7-uplets d'éléments distincts que de permutations.

2. Un sac contient dix jetons numérotés de 1 à 10. On pioche ces dix jetons l'un après l'autre, sans remise, et on les aligne.
Affirmation : il y a 10 alignements différents possibles.

3. **Affirmation :** pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, $\binom{n+3}{n}$ est un multiple de 5.

4. Alina a reçu 20 messages mais n'a le temps de lire qu'un ensemble de 5 de ces messages.
Affirmation : le nombre de façons de les choisir est supérieur à dix-mille.

Vérifiez vos réponses : p. 529

58 Démontrer des propriétés du cours

Dans le cours, page 62, on a démontré deux propriétés des nombres de combinaisons en s'appuyant sur les nombres de chemins dans un arbre « succès-échec ». On peut aussi démontrer ces propriétés par le calcul.

1. La symétrie

On se propose de démontrer que pour tous entiers naturels n et k tels que $0 \leqslant k \leqslant n$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Rédiger la démonstration en suivant le guide ci-dessous.

(1) Exprimer $\binom{n}{k}$: $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{(\ldots - \ldots)!k!}$ **(2)** Exprimer $\binom{n}{n-k}$: $\binom{n}{n-k} = \dfrac{n!}{\ldots!\ldots!} = \dfrac{n!}{\ldots}$

(3) Conclure par une phrase.

2. La relation de Pascal

Pour tous entiers naturels n et k tels que $1 \leqslant k \leqslant n-1$,

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!k!}$$

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{k(n-1)!}{(n-k)!k!} + \frac{(n-k)(n-1)!}{(n-k)!k!}$$

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{k(n-1)! + (n-k)(n-1)!}{(n-k)!k!}$$

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$$

a) Expliquer la nécessité de la condition $1 \leqslant k \leqslant n-1$.

b) Expliquer chacune des expressions écrites en vert.

59 Éviter une erreur courante

Énoncé : Dans un jeu de 32 cartes, combien y a-t-il de mains de 5 cartes qui contiennent au moins un roi ?

Voici la réponse d'Ambra.

Il faut au moins un roi donc il y a 4 possibilités.

Puis, on tire 4 cartes parmi les 31 restantes. Il y a $\binom{31}{4}$ choix possibles.

Le nombre de tirages qui contiennent au moins un roi est donc $4 \times \binom{31}{4} = 125\,860$.

a) On considère la main : roi de Pique, roi de Trèfle, as de Cœur, valet de Carreau, 7 de Cœur.

Expliquer pourquoi Ambra a compté deux fois une telle main dans son dénombrement.

b) Réaliser ce schéma, colorier l'ensemble des mains avec au moins un roi.

c) Déterminer alors le nombre de mains avec au moins un roi.

Mains de 5 cartes

0 roi	1 roi	2 rois	3 rois	4 rois

Vidéo JAICOMPRIS.COM

Toutes les démonstrations au programme en vidéo

Liste des démonstrations :

- Démonstration par dénombrement de la relation : $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.
- Démonstration de la relation de Pascal.

Conseil

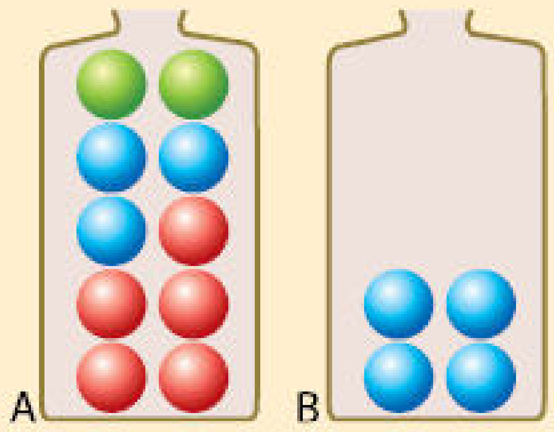
Pour traiter un « au moins », un schéma de ce type permet de choisir le procédé le plus efficace. Par exemple ici, vaut-il mieux calculer le nombre de mains contenant 1 roi ou 2 rois ou 3 rois ou 4 rois, ou bien vaut-il mieux calculer le nombre de mains contenant 0 roi ?

Reconnaître les objets à dénombrer

60 **PARCOURS DIFFÉRENCIÉS**

Parcours 1

On tire simultanément deux boules de l'urne A et on les place dans l'urne B.
Puis, on tire simultanément trois boules de l'urne B.



Quel est le nombre de tirages tricolores possibles ?

Parcours 2

Au Sénégal, des chercheurs ont mis des gerbilles en élevage : 4 mâles dont 2 de l'espèce gracilis, et 6 femelles dont 3 de l'espèce pygargus.
Ces animaux sont indiscernables à l'œil.
Les chercheurs sélectionnent un groupe de quatre de ces gerbilles.
On se propose de déterminer le nombre de choix possibles avec exactement un mâle gracilis et une femelle pygargus.

a) Combien y a-t-il de choix possibles :
- d'un mâle gracilis ?
- d'une femelle pygargus ?

b) Combien de gerbilles reste-t-il à choisir ? Parmi lesquelles ? Combien cela fait-il de choix ?

c) Conclure sur le nombre de choix possibles pour les chercheurs.

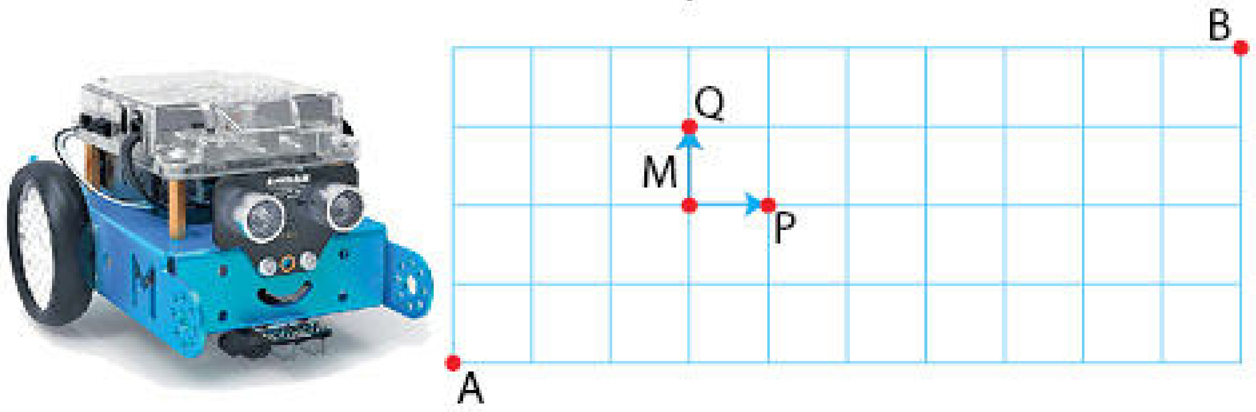
61 Pendant un cours d'EPS, les membres d'une même équipe doivent porter le même maillot.
Avant le match, ils prennent un maillot parmi les douze qui sont disponibles.

1. Dans un premier temps, on suppose que les maillots sont indiscernables les uns des autres.
Déterminer le nombre de façons de distribuer ces maillots lorsque l'équipe est constituée de :
a) cinq élèves ; **b)** douze élèves.

2. On suppose maintenant que les maillots sont numérotés de 1 à 12.
Déterminer le nombre de façons de distribuer ces maillots lorsque l'équipe est constituée de :
a) cinq élèves ; **b)** douze élèves.

3. Emma affirme : « Le nombre de façons de distribuer les maillots est différent s'ils sont numérotés ou non, dans tous les cas sauf si l'on ne prend qu'un maillot. »
Que peut-on penser de cette affirmation ?

62 Un robot se déplace le long du quadrillage ci-dessous, de côtés 10 et 4. Il ne peut se déplacer que vers la droite ou vers le haut. Ainsi, en partant du point M, il ne peut se rendre qu'en P ou en Q. On s'intéresse au nombre de chemins d'un point à un autre.



a) Quels points se trouvent à deux unités de A ?
Déterminer le nombre de chemins qui relient A à chacun de ces points.

b) Comparer les nombres de chemins qui relient A à M, A à P, A à Q.

c) Déterminer le nombre de chemins qui relient A à B.

Vidéo

JaiCompris.com — Cet exercice est corrigé en vidéo

63 Carla s'occupe du rayon Sciences d'une librairie. Elle doit mettre en avant 5 livres sur un présentoir. Pour cela, elle doit choisir 3 livres d'astronomie parmi 4 possibles, et 2 livres de mathématiques parmi 5 possibles.

a) Combien a-t-elle de façons de choisir les livres :
- d'astronomie ?
- de mathématiques ?

b) Après avoir choisi les livres qu'elle va présenter, elle doit ensuite décider de l'ordre dans lequel elle va les placer. Combien de dispositions peut-elle adopter ?

c) En déduire le nombre total de choix possibles pour organiser son présentoir.

64 **a)** Un musicien part en tournée. Il doit emporter 5 guitares parmi sa collection, qui en comporte 30 différentes. Combien a-t-il de choix possibles ?

b) Pour les quatre premières chansons qu'il joue lors d'un concert, il doit choisir quatre guitares différentes et dans quel ordre il va les utiliser.
Combien de choix différents peut-il effectuer ?

c) Il se rend compte que l'une de ses 4 guitares est plus appropriée pour jouer la première chanson. Il ne peut alors plus l'utiliser pendant les trois chansons suivantes. Combien a-t-il alors de façons de choisir les guitares pour les quatre premières chansons ?

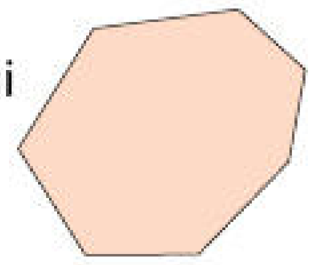
65 Un voyagiste organise une croisière touristique en 7 étapes.

- 3 étapes doivent avoir lieu dans des ports importants où le ravitaillement est possible. Il doit choisir ces ports parmi 6 possibilités.
- Les autres étapes doivent offrir des visites pittoresques, choisies parmi 10 possibilités.

Combien y a-t-il de façons de concevoir cette croisière ?

66 Dix personnes sont assises à une table ronde.
Dans chaque cas, de combien de façons différentes ces personnes peuvent-elles s'asseoir ?
a) Les chaises sont numérotées.
b) Les chaises ne sont pas numérotées.

67 Un polygone convexe (tel que celui ci-contre) a n côtés (avec n nombre entier naturel, $n \geqslant 3$).



Exprimer en fonction de n son nombre de diagonales.

Utiliser les formules

68 n désigne un nombre entier naturel, $n \geqslant 2$.
Dans chaque cas, exprimer le nombre en fonction de n sans utiliser la notation factorielle.

$$A = \frac{n!}{(n-2)!} \qquad B = \frac{(n-1)!}{(n+2)!} \qquad C = \frac{n!}{(n+1)!} - \frac{(n-1)!}{n!}$$

69 n désigne un nombre entier naturel.
Dans chaque cas, résoudre l'équation.

a) $\binom{n}{5} = 17\binom{n}{4}$ avec $n \geqslant 5$.

b) $\binom{2n}{1} + \binom{2n}{2} + \binom{2n}{3} = 387n$ avec $n \geqslant 2$.

70 n désigne un nombre entier naturel, $n \geqslant 1$.
Une urne contient n boules blanches et n boules rouges. On tire simultanément n boules de l'urne.
a) Exprimer en fonction de n le nombre de tirages possibles.
b) p désigne un nombre entier naturel tel que $0 \leqslant p \leqslant n$.
Démontrer que le nombre de tirages avec exactement p boules blanches est $\binom{n}{p}^2$.

c) En déduire la somme : $S = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \ldots + \binom{n}{n}^2$.

Utiliser le dénombrement en probabilités

71 **PARCOURS DIFFÉRENCIÉS**

Parcours 1

Une urne contient cinq boules vertes et trois boules bleues. On tire au hasard, simultanément, deux boules de cette urne.
X est la variable aléatoire qui compte le nombre de boules vertes obtenues.
Présenter dans un tableau la loi de probabilité de X.

Parcours 2

Une urne contient quatre boules numérotées 10, 20, 30, 40.
On tire au hasard, simultanément, deux boules de l'urne.
X est la variable aléatoire qui compte le nombre de boules dont le numéro est divisible par 4.
a) Combien y a-t-il de tirages différents possibles ?
b) Quelles sont les valeurs prises par X ?
c) Décrire par une phrase l'événement $\{X=0\}$, puis calculer sa probabilité.
d) De même, calculer la probabilité de chacun des événements $\{X=2\}$ et $\{X=1\}$.
e) En déduire la loi de probabilité de X.

72 Dans un lycée, une classe de 32 élèves (20 filles et 12 garçons) doit être dédoublée pour les cours de sciences.
On doit donc constituer un groupe de 16, que l'on appelle groupe A, l'autre groupe étant alors constitué des élèves restants.
Marina affirme : « Il y a une chance sur deux que le groupe A comporte autant de filles que de garçons ».
A-t-elle raison ? Justifier.

73 Mehdi a 1 an. Il joue avec des cubes alphabétiques en bois.
Il dispose d'un cube pour chaque lettre de l'alphabet et en prend cinq au hasard.

a) Quelle est la probabilité qu'il empile des cubes qui forment, de haut en bas, le mot PRIME ?
b) Quelle est la probabilité qu'il empile des cubes dont les lettres sont celles du mot CIBLE, éventuellement dans le désordre ?
c) Quelle est la probabilité qu'il empile cinq cubes dont les lettres appartiennent au mot ABDOMEN ?

74 Il y a dans un tiroir trois paires de chaussures de couleurs différentes.
On tire au hasard deux chaussures.
Calculer la probabilité de chaque événement.
A : « Elles appartiennent à la même paire. »
B : « Il y a un pied droit et un pied gauche. »

75 On lance 100 fois une pièce équilibrée et on note le côté obtenu (Pile, Face).
Calculer la probabilité d'obtenir cinq fois Pile.
Arrondir au centième.

76 On dispose de deux urnes :
- urne A : dix boules bleues et dix boules rouges ;
- urne B : cinq boules bleues et quinze boules rouges.

1. On tire au hasard, simultanément, trois boules de l'urne A.
a) Calculer le nombre de tirages possibles.
b) Quelle est la probabilité de tirer :
- trois boules bleues ?
- trois boules rouges ?

c) En déduire la probabilité de tirer trois boules de la même couleur.
2. On tire au hasard, simultanément, trois boules de l'urne B.
Calculer la probabilité de tirer trois boules de la même couleur.
3. On lance une pièce équilibrée. Si l'on obtient Pile, on tire, simultanément, trois boules de l'urne A, sinon, on les tire de l'urne B.
a) Représenter cette expérience aléatoire par un arbre pondéré de probabilités.
b) Déterminer la probabilité de tirer trois boules de la même couleur.

77 Youri utilise une application pour tirer au hasard, sans les ordonner, trois nombres entiers différents de l'ensemble $\{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4\}$.
X est la variable aléatoire qui donne la somme des nombres obtenus.
a) Combien y a-t-il de tirages possibles ?
b) L'un des nombres tirés au sort est 0.
Combien y a-t-il alors de façons de tirer au sort les deux autres nombres ?
c) Le 0 n'a pas été tiré au sort.
Combien y a-t-il de façons de tirer les trois nombres dans ce cas ?
d) En énumérant tous les tirages possibles, déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire X.
e) En déduire la loi de probabilité de X.

78 Carolina joue avec un bilboquet. À chaque tentative, la probabilité qu'elle gagne est 0,7. Elle effectue trois tentatives successives et X est la variable aléatoire qui compte le nombre de succès.
1. Représenter cette situation par un arbre pondéré de probabilités.
2. Calculer la probabilité qu'elle réussisse trois fois.
3. a) Quel est le nombre de chemins dans lesquels elle réussit une fois exactement ?
b) Calculer la probabilité le long d'un de ces chemins.
c) En déduire la probabilité qu'elle réussisse exactement une fois.
4. En s'inspirant de la méthode de la question **3.**, déterminer la probabilité que Carolina réussisse exactement deux fois.
5. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

Dans cette situation, on dit que la variable aléatoire X suit une **loi binomiale**. Ce type de situation sera étudié au chapitre 15.

S'entraîner à la logique → p. 525

79 **Implication**

Dans chaque cas, trouver une conclusion logique pour compléter l'implication, en utilisant la notion entre parenthèses.
a) (Nombre de permutations) Si un ensemble a huit éléments, alors …
b) (Nombre de triplets) Si n et n' sont deux nombres naturels avec $n \leqslant n'$, alors …
c) (Nombre de combinaisons) Si n et k sont deux nombre entiers naturels égaux, alors …
d) (Nombre de parties) Si n et m sont deux nombres entiers naturels tels que $n = 2m$ et si E et F sont des ensembles à n et m éléments respectivement, alors …

80 **Négation**

Pour chacune des affirmations ci-dessous, écrire sa négation, puis dire si celle-ci est vraie ou fausse.
a) Il existe des entiers naturels n et k tels que $0 \leqslant k \leqslant n$ et $\binom{n}{k} = 7$.
b) Pour tout entier naturel $n \geqslant 3$,
$$\binom{n}{1} + \binom{n}{2} = \binom{n}{3}.$$

81 CARRÉS MAGIQUES

Algo python

Objectif
Appliquer les méthodes de dénombrement aux carrés magiques d'ordre 3.

Un carré magique d'ordre 3 est un tableau carré de neuf nombres tel que les sommes des nombres de chaque ligne, de chaque colonne et de chaque diagonale soient toutes égales.

7	12	5
6	8	10
11	4	9

1. Carrés quelconques avec les nombres de 1 à 9
Dans cette première partie, on s'intéresse aux carrés contenant les nombres de 1 à 9, qu'ils soient magiques ou non.
a) Déterminer le nombre de carrés de ce type.
b) Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer le nombre de carrés qui vérifient la contrainte.
Contrainte 1 : le nombre 5 est au centre du carré ;
Contrainte 2 : les quatre nombres pairs sont aux quatre coins ;
Contrainte 3 : les quatre nombres impairs différents de 5 sont au milieu des quatre côtés du carré.
c) Calculer le nombre total de carrés différents qui vérifient les trois contraintes.

2. Carrés magiques avec les nombres de 1 à 9
On s'intéresse maintenant uniquement aux carrés magiques constitués des nombres de 1 à 9.
a) Calculer la somme des nombres de 1 à 9, et en déduire la « somme magique », c'est-à-dire la somme de chaque ligne (et donc chaque colonne et chaque diagonale).
b) On admet que pour construire un tel carré magique, il faut respecter les trois contraintes de la question **1. b)**. Utiliser les contraintes et la somme magique pour trouver tous les carrés magiques avec les nombres de 1 à 9.
c) Observer les propriétés de symétrie entre ces différents carrés. Que remarque-t-on ?

3. Somme de carrés magiques
a) Prouver que quand on additionne ou soustrait case par case deux carrés magiques d'ordre 3, on obtient toujours un carré magique.
La somme magique est-elle alors modifée ?
b) Dans chaque cas, calculer le nombre de carrés magiques que l'on peut ainsi obtenir :
- en additionnant deux des carrés magiques de 1 à 9 ;
- en additionnant trois de ces carrés magiques.

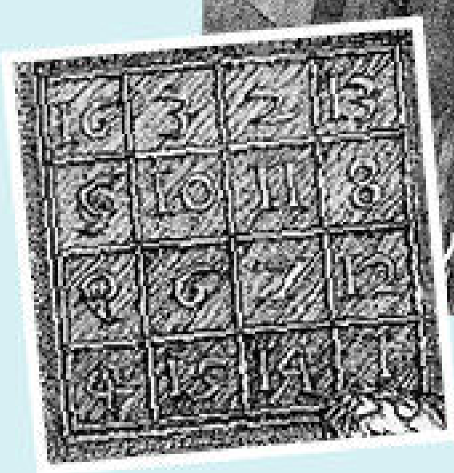
On admet qu'on obtient bien ainsi des carrés différents.

HISTOIRE DES MATHS

Les carrés magiques passionnent les amateurs de mathématiques depuis des millénaires. Le plus ancien carré magique connu, qui a été retrouvé en Chine, date de 2 200 avant notre ère.

Plusieurs mathématiciens de renom, comme Fermat, ont écrit des traités sur le sujet.

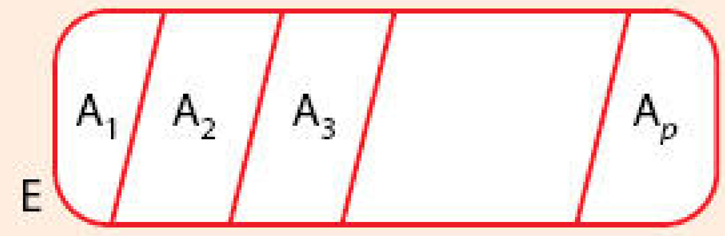
En 1514, dans sa gravure *Melancolia*, Albrecht Dürer a fait figurer un carré magique d'ordre 4.



82 PARTITIONS D'UN ENSEMBLE FINI

Algo python

Objectif
Dénombrer les différentes façons de partitionner un ensemble.



E est un ensemble fini à n éléments.
Une partition de E est la donnée de p parties non vides $A_1, A_2, \dots, A_p$ de E, qui vérifient les deux propriétés ci-dessous :

- ces parties sont disjointes deux à deux : pour tous entiers naturels i et j distincts et inférieurs ou égaux à p, $A_i \cap A_j = \varnothing$;
- $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_p = E$.

On se propose de déterminer le nombre de partitions de l'ensemble E.
Pour tout entier naturel p tel que $1 \leqslant p \leqslant n$, on note S_n^p le nombre de partitions de l'ensemble E en p parties.

1. Premiers exemples

a) E est un ensemble à deux éléments, par exemple $E = \{a\,;b\}$.
Déterminer les différentes partitions possibles de E et en déduire les valeurs de S_2^1 et S_2^2.

b) E est un ensemble à trois éléments, par exemple $E = \{a\,;b\,;c\}$.
Il y a trois partitions de E en deux parties. Quelles sont ces trois partitions ?

c) Préciser la valeur de S_3^p pour p allant de 1 à 3.

d) Déterminer pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, les valeurs de S_n^1 et S_n^n.

2. Conjecturer une relation

a) Que représente le nombre S_4^2 ? Déterminer la valeur de ce nombre en listant toutes les partitions correspondantes.

b) De même, déterminer les nombres S_4^3 et S_5^3.

c) Vérifier que $S_4^2 = S_3^1 + 2S_3^2$ et que $S_4^3 = S_3^2 + 3S_3^3$.

d) Conjecturer, puis vérifier une relation entre S_5^3, S_4^2 et S_4^3.

e) Pour tous entiers naturels n et p tels que $1 \leqslant p \leqslant n$, conjecturer une relation entre les nombres S_n^p, S_{n-1}^{p-1} et S_{n-1}^p.

3. Démontrer la relation

n et p sont des nombres entiers naturels tels que $1 \leqslant p \leqslant n$.
On se propose de démontrer la relation qui lie les nombres S_n^p, S_{n-1}^{p-1} et S_{n-1}^p.
On note x l'un des n éléments d'un ensemble E et on s'intéresse aux partitions de E en p parties.

a) Quel est le nombre de telles partitions de E dont une partie est $\{x\}$?

b) Quel est le nombre de telles partitions de E dont aucune des parties n'est $\{x\}$?

c) En déduire la relation cherchée.

d) Imaginer un procédé analogue au triangle de Pascal pour déterminer de proche en proche les valeurs de S_6^k pour $1 \leqslant k \leqslant 6$.

4. Utiliser un programme

Ariane a défini une fonction **Part** en langage Python qui renvoie le nombre de partitions en p parties d'un ensemble à n éléments.

```python
def Part(n,p):
    if p==1 or p==n:
        S=1
    else:
        S=Part(n-1,p-1)+Part(n-1,p)
    return S
```

a) Ce programme est-il correct ? Si non, le corriger.

b) Utiliser le programme pour vérifier les réponses à la question **3. d)**.

83 Ranger des livres

Narration de recherche

Raisonner | Calculer | Communiquer

Rédiger les différentes étapes de la recherche, sans omettre les fausses pistes et les changements de méthode.

Problème

Ainhoa range au hasard, sur une étagère :
- 5 livres différents de Mathématiques ;
- 3 livres différents de Physique-Chimie ;
- 4 livres différents de Sciences de la Vie et de la Terre.

Combien y a-t-il de rangements où les livres de chaque matière sont côte à côte ?

84 Prendre des initiatives

Chercher | Modéliser | Calculer

On appelle mot tout assemblage ordonné de lettres de l'alphabet français, qu'il ait un sens ou non. À l'aide uniquement des lettres du mot MOULINS, combien peut-on écrire de mots de quatre lettres distinctes dont l'une des lettres est N ?

85 Retrouver le triangle de Pascal

Modéliser | Raisonner

Une urne contient sept boules numérotées de 1 à 7. On tire simultanément trois boules de l'urne.

1. Combien y a-t-il de tirages où les trois boules :

a) portent un numéro inférieur ou égal à 3 ?

b) portent un numéro inférieur ou égal à 4 ?

2. k désigne un nombre entier naturel tel que $3 \leqslant k \leqslant 7$.

Exprimer avec une combinaison le nombre de tirages où figurent la boule n° k et deux boules de numéros inférieurs à k.

3. a) En déduire des nombres entiers naturels n et p tels que :

$$\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\binom{5}{2}+\binom{6}{2}=\binom{n}{p}.$$

b) Démontrer à nouveau cette formule avec la relation de Pascal.

86 Compter des nombres

Problème ouvert

Raisonner | Calculer

n désigne un nombre entier naturel, $n \geqslant 3$.

Combien peut-on écrire de nombres entiers naturels de n chiffres exactement dont deux chiffres 5 exactement ?

87 Imaginer une stratégie

Raisonner | Communiquer

Dans une version simplifiée du jeu Dobble, on joue avec des cartes rondes qui présentent chacune trois symboles différents parmi sept : ♥, ♣, 🎀, 💧, ♠, ☀, ✿.

Le jeu est basé sur une contrainte : deux cartes quelconques ont toujours exactement un symbole en commun.

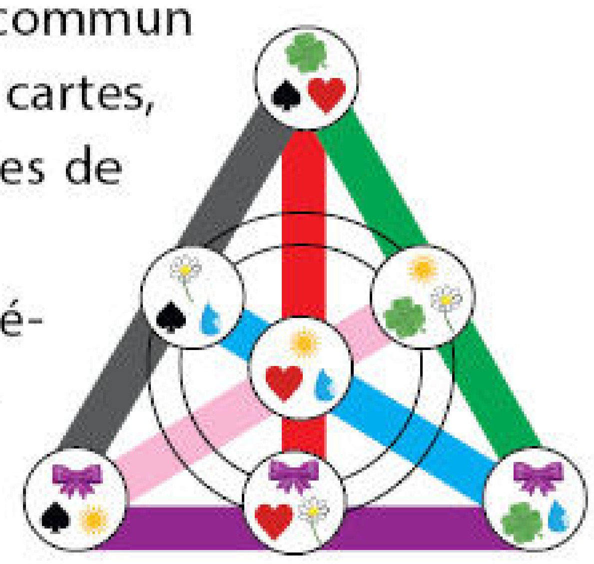
a) Sans tenir compte de cette contrainte, combien de cartes différentes pourrait-on réaliser ?

b) Déterminer le nombre de cartes qui ont exactement un symbole en commun avec la carte dessinée ci-contre.

c) La deuxième carte ci-contre a bien un unique symbole commun avec la 1re carte.

Déterminer le nombre de cartes qui ont exactement un symbole en commun avec chacune de ces deux cartes, puis le nombre total de cartes de ce jeu.

d) Les cartes du jeu sont présentées dans le schéma ci-contre. Expliquer comment est construit ce schéma.



88 Compare two numbers

Calculer | Communiquer

E is a set with n elements with $n \geqslant 2$.

Find the value(s) of n such that there are at least 15 000 more triplets in the set E^3 then there are couples of distinct elements of E.

89 Organiser des emplois du temps

Raisonner | Communiquer

En Première, chaque élève de la voie générale suit 16 h de cours du socle de culture commune et doit choisir trois spécialités à 4 h chacune parmi dix possibilités.

a) Si un établissement propose toutes les spécialités et n'impose aucune restriction sur les choix, combien y a-t-il de façons possibles de choisir les trois spécialités ?

b) Dans un grand lycée, la direction a décidé que chaque élève peut choisir deux spécialités comme il le souhaite, mais que la troisième est alors imposée. Dans ce cas, combien y a-t-il de façons possibles de choisir les spécialités ?

c) Dans les deux cas ci-dessus, les possibilités offertes imposent a priori qu'aucun cours de spécialité n'ait lieu en même temps qu'un autre. Cette organisation est-elle réalisable dans un emploi du temps hebdomadaire ?

90 Organiser des visites

45 min

D'après Bac, Centres étrangers 2019

Partie A : choisir des musées

Timothée passe quelques jours dans une capitale européenne. Il est intéressé par 11 musées différents dans cette capitale :

- 7 musées d'art et d'histoire ;
- 4 musées scientifiques ou technologiques.

Lors de ce séjour, il n'aura le temps de visiter que 5 musées différents.

1. Dans un premier temps, on s'intéresse aux différentes façons de choisir ces 5 musées, sans tenir compte de l'ordre dans lequel Timothée les visitera.

a) Calculer le nombre de façons que peut adopter Timothée pour choisir ces 5 musées.

b) Combien a-t-il de façons de choisir ces musées de sorte qu'il visite exactement 2 musées d'art et d'histoire ?

c) Combien a-t-il de façons de choisir ces musées de sorte qu'il visite au moins un musée scientifique ou technologique ?

2. On prend maintenant en considération l'ordre dans lequel Timothée visitera ces musées.

a) On suppose que Timothée a déjà choisi 5 musées.
Combien de façons a-t-il de les ordonner pour organiser les visites ?

b) Timothée a choisi les 5 musées et décide d'en visiter un par jour, sauf un jour au cours duquel il en visitera deux.
Combien a-t-il de façons d'organiser ces visites en respectant cette contrainte, sans préciser l'ordre des deux musées visités le même jour ?

Guide de résolution
Partie A – Pour chaque question, il faut tout d'abord identifier le type d'outil de dénombrement qui convient en se posant deux questions :
– peut-il y avoir des répétitions d'un même élément ?
– doit-on tenir compte de l'ordre ?

Partie B : étude de clientèle d'un musée

Dans l'un des musées visité par Timothée, chaque visiteur peut acheter son billet sur Internet avant sa visite ou l'acheter aux caisses du musée à son arrivée.

Pour l'instant, la location d'un audioguide pour la visite n'est possible qu'aux caisses du musée.
Le directeur s'interroge sur la pertinence de proposer la réservation des audioguides sur Internet.
Une étude est réalisée. Elle révèle que :

- 70 % des clients achètent leur billet sur Internet ;
- parmi les clients achetant leur billet sur Internet, 35 % choisissent à leur arrivée au musée une visite avec un audioguide ;
- parmi les clients achetant leur billet aux caisses du musée, 55 % choisissent une visite avec un audioguide.

On choisit au hasard un client du musée.

1. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.

2. Démontrer que la probabilité de l'événement : « Le client choisit une visite avec un audioguide » est égale à 0,41.

3. On s'intéresse aux clients qui visitent le musée avec un audioguide.
Si plus de la moitié d'entre eux ont acheté leur billet sur Internet, alors le directeur proposera à l'avenir la location de l'audioguide sur le site Internet du musée.
D'après les résultats de cette étude, que va décider le directeur ? Justifier.

Guide de résolution
1. Modéliser la situation en définissant des événements.
Par exemple, I : « Le client a acheté son billet sur Internet ».

Guide de résolution
2. Penser à la formule des probabilités totales.

Guide de résolution
3. On doit calculer une probabilité conditionnelle.

91 Assister à des matchs de football

40 min

D'après Bac, Asie 2019

Partie A : différentes équipes

Un club de football est composé d'équipes adultes masculines, d'équipes adultes féminines et d'équipes d'enfants.

Chaque week-end, la présidente Claire assiste au match d'une seule des équipes du club et elle suit :

- dans 10% des cas, le match d'une équipe adulte féminine ;
- dans 40% des cas, le match d'une équipe adulte masculine ;
- dans les autres cas, le match d'une équipe d'enfants.

Lorsqu'elle assiste au match d'une équipe adulte masculine, la probabilité que celle-ci gagne est 0,6.

Lorsqu'elle assiste au match d'une équipe d'enfants, la probabilité que celle-ci gagne est 0,54.

La probabilité que Claire voie l'équipe de son club gagner est 0,58.

On choisit un week-end au hasard. On note les évènements suivants :

- F : « Claire assiste au match d'une équipe adulte féminine » ;
- M : « Claire assiste au match d'une équipe adulte masculine » ;
- E : « Claire assiste au match d'une équipe d'enfants » ;
- G : « L'équipe du club de Claire gagne le match ».

1. Représenter la situation par un arbre de probabilités, en y indiquant uniquement les données de l'énoncé.

Cet arbre sera complété dans la suite de l'exercice.

2. Déterminer la probabilité $P(M \cap G)$.

3. a) Démontrer que $P(F \cap G) = 0{,}07$.

b) En déduire $P_F(G)$.

c) La probabilité que l'équipe adulte féminine gagne un match est 0,47.

La présence de Claire semble-t-elle favoriser la victoire de l'équipe adulte féminine ?

4. Claire annonce avoir assisté à la victoire d'une équipe du club.

Quelle est la probabilité qu'elle ait suivi le match d'une équipe adulte féminine ? *Arrondir au centième.*

Partie B : choisir les joueuses

Dans ce club, on compte 22 joueuses adultes, parmi lesquelles 6 ont plus de 21 ans.

Pour chaque match de l'équipe féminine, il faut choisir 14 joueuses : 11 titulaires et 3 remplaçantes.

On considère dans cet exercice que ce choix est fait au hasard.

1. Combien y a-t-il de façons de tirer au sort les 14 membres de l'équipe ?

2. Quelle est la probabilité que toutes les membres de l'équipe aient moins de 21 ans ?

3. Quelle est la probabilité qu'au moins 3 des membres de l'équipe aient plus de 21 ans ?

Guide de résolution
3. a) On connait $P(G)$ et $P(M \cap G)$, et on peut calculer $P(E \cap G)$. On peut donc déterminer $P(F \cap G)$ à l'aide de la formule des probabilités totales.

Guide de résolution
4. Penser à calculer une probabilité conditionnelle.

Guide de résolution
1. Ici, on ne tient pas compte du poste occupé par chaque membre de l'équipe, c'est-à-dire que l'on ne tient pas compte de l'ordre.

Guide de résolution
3. On peut considérer l'événement contraire : 2 membres de l'équipe ou moins ont plus de 21 ans.

92 Contrôler la qualité de rubans LED

30 min

D'après Bac, Amérique du Nord 2018

Un site Internet vend deux sortes de rubans LED flexibles : un premier modèle dit d'« intérieur » et un second modèle dit d'« extérieur ».
Le site dispose d'un grand stock de ces rubans LED.

1. On admet que :

- 20 % des rubans LED proposés à la vente sont d'extérieur ;
- 5 % des rubans LED d'extérieur sont défectueux ;
- 6,25 % des rubans LED d'intérieur sont défectueux.

On prélève au hasard un ruban LED dans le stock. On note :

- E l'évènement : « Le ruban LED est d'extérieur » ;
- D l'évènement : « Le ruban LED est défectueux ».

a) Déterminer la probabilité qu'un ruban soit défectueux.
b) Les événements E et D sont-ils indépendants ?

2. Pour décorer l'extérieur d'une salle des fêtes, Jara a commandé sur ce site un lot de 10 rubans LED d'extérieur, dont 2 sont défectueux.
Elle prend au hasard 5 rubans dans ce lot de 10.
X est la variable aléatoire qui compte le nombre de rubans défectueux.
a) Établir la loi de probabilité de X.
b) Quelle est la probabilité qu'au moins un des rubans choisis soit défectueux ?

Guide de résolution
1. b) Dire que deux événements A et B sont indépendants signifie que $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Guide de résolution
2. a) Il s'agit, pour chaque valeur a prise par la variable aléatoire X, de calculer $P(X = a)$.

Se préparer À L'ORAL

93 Présenter un exposé

a) Quelles sont les différentes façons de tirer des boules dans une urne opaque et les outils de dénombrement associés ?
b) Dans un exposé oral de 10 min, présenter ces notions et quelques exemples d'application.

94 Travailler l'oral en groupe

Résoudre cet exercice en petit groupe, puis présenter les résultats à l'oral.

Les aéroports du monde entier sont identifiés par un code à trois lettres, attribué par l'Association Internationale du Transport Aérien.
Par exemple, le code de l'aéroport de Paris-Charles de Gaulle est CDG.
a) Sachant qu'une même lettre peut être utilisée plusieurs fois dans ce code, calculer le nombre de codes différents possibles.
b) Quel serait ce nombre si on ne pouvait pas utiliser deux fois la même lettre dans un code ?

95 Présenter un exposé

▶ **ANTICIPER LES QUESTIONS DU JURY**

1. Préparation de la restitution orale (5 min)
Par groupe de 4, résoudre l'exercice ci-dessous, chaque élève travaillant sur l'une des quatre propositions.
2. Jeu de rôle (30 min)
Chaque élève présente son résultat à l'oral (2 min) pendant que les trois autres composent le jury.
Chaque juré pose une question au candidat (5 min).

Énoncé : E est l'ensemble $\{2\,;3\,;5\,;7\,;11\}$.
Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse. Justifier.
a) Il y a 120 façons d'ordonner ces cinq nombres de l'ensemble E.
b) En envisageant tous les produits de trois des nombres de E, on peut obtenir 60 résultats différents.
c) Si a et n sont deux nombres distincts de E, alors il y a 20 valeurs possibles de a^n.
d) En multipliant quatre des nombres de E, éventuellement égaux, on peut obtenir 120 nombres différents.

96 **Combinaisons avec répétitions**

E est un ensemble à n éléments, avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour tout entier naturel k, une **combinaison de k éléments de E avec répétitions** est un ensemble de k éléments de E, avec éventuellement un ou plusieurs éléments répétés plusieurs fois, sans que ces éléments soient ordonnés.

Partie A : exemples

1. E est l'ensemble de lettres $\{a ; b ; c\}$.

Une combinaison avec répétitions de trois éléments de cet ensemble est l'ensemble $\{a ; a ; b\}$, que l'on notera simplement aab, ou aba, ou encore baa, puisque l'ordre n'a pas d'importance.

Énumérer toutes les combinaisons avec répétitions de trois éléments de l'ensemble E.

2. F est l'ensemble de lettres $\{a ; b ; c ; d\}$.

Il y a 20 combinaisons avec répétitions de trois éléments de l'ensemble F. Énumérer ces combinaisons.

Partie B : nombre de combinaisons avec répétitions

Pour deux nombres entiers naturels n et k, avec $n \geqslant 1$, on note $\left(\binom{n}{k}\right)$ le nombre de combinaison avec répétitions de k éléments parmi n.

1. On peut représenter une combinaison avec répétitions de k éléments parmi n en indiquant combien de fois chaque élément de l'ensemble apparaît dans la combinaison, sous la forme d'une addition.

Par exemple, pour l'ensemble $E = \{a ; b ; c\}$, la combinaison aab peut être représentée par l'addition $2 + 1 + 0$.

Le 0 est important pour indiquer que l'élément c n'apparaît pas dans cette combinaison.

a) Donner les additions qui représentent les autres combinaisons avec répétitions de trois éléments de E (voir **A.1.**).

b) De même, donner les additions qui représentent les combinaisons avec répétitions de trois éléments de l'ensemble $F = \{a ; b ; c ; d\}$ (voir **A.2.**).

c) Ainsi, le nombre de combinaisons avec répétitions de k éléments parmi n est le nombre de façons d'écrire k comme l'addition de n nombres entiers naturels, éventuellement nuls, en prenant en compte l'ordre des nombres dans l'addition.

Utiliser cette méthode pour trouver la valeur du nombre $\left(\binom{3}{2}\right)$.

2. Une autre façon de représenter les combinaisons avec répétitions est connue sous le nom de **méthode des étoiles et barres**.

Les barres délimitent les différents éléments de l'ensemble E et on représente une combinaison en plaçant dans chaque « compartiment » autant d'étoiles qu'il y a d'apparitions de chaque élément dans cette combinaison.

Par exemple, avec $E = \{a ; b ; c\}$, la combinaison aab est représentée comme ci-dessous.

☆ ☆ | ☆ |

En effet, l'élément a apparait deux fois, l'élément b apparait une fois, et l'élément c n'apparait pas, ce qui explique qu'il n'y ait pas d'étoile à droite de la deuxième barre.

a) Représenter de cette façon les combinaisons avec répétitions de trois éléments de l'ensemble E (voir **A.1.**), puis celles de l'ensemble F (voir **A.2.**).

b) Pour dénombrer les combinaisons avec répétitions de k éléments parmi n, il faut donc compter le nombre de façons de placer les étoiles et les bâtons. En observant les exemples précédents, préciser le nombre d'étoiles à placer et le nombre total d'éléments (étoiles et bâtons).

c) Placer les étoiles, c'est choisir où elles seront parmi l'ensemble des éléments.

Justifier que $\left(\binom{n}{k}\right) = \binom{n+k-1}{k}$.

Partie C : applications de la formule

1. À la boulangerie, Margaux doit acheter quatre viennoiseries pour elle et ses amis. Elle a le choix entre 8 types de viennoiseries différentes, et peut choisir plusieurs fois le même type, sans restriction.

Combien a-t-elle de façons de faire ce choix ?

2. L'alphabet arabe comprend 29 lettres fondamentales. Combien y a-t-il de façons de choisir cinq de ces lettres, éventuellement les mêmes ?

3. On dispose d'un alphabet limité aux lettres A, B, C, D, E et on s'intéresse aux mots de dix lettres.

Combien y a-t-il de possibilités pour les lettres qui apparaissent dans ces mots, autorisant des répétitions mais sans tenir compte de l'ordre des lettres ?

97 **Notation des permutations**

On se propose de découvrir de nouvelles façons de noter les permutations de l'ensemble $E = \{a\,;b\,;c\,;d\}$.

1. On peut représenter chaque permutation de l'ensemble E par un tableau à deux lignes, qui indique la nouvelle position de chaque élément.

a) Quelle permutation σ_1 de E est représentée par la notation $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$?

b) Énumérer toutes les permutations de l'ensemble E et donner leurs notations sur le modèle précédent.

2. On remarque que la permutation σ_1 est en fait constituée de deux **cycles disjoints** de longueur 2 : 1 et 4 sont échangés entre eux, de même que 2 et 3.
On peut alors utiliser une nouvelle notation dite **forme canonique** : $\sigma_1 = (1\,4)(2\,3)$.

a) Écrire sous forme de tableau les permutations représentées par chacune des notations ci-dessous :
- $\sigma_2 = (1\,3)(2\,4)$
- $\sigma_3 = (1)(2\,3)(4)$
- $\sigma_4 = (1)(2)(3\,4)$
- $\sigma_5 = (1)(2)(3)(4)$

b) La permutation σ_5 est appelée identité.
Qu'a-t-elle de spécial ?

c) La forme canonique $(1\,2\,3)(4)$ représente la permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.
Les permutations $(1\,2\,3)(4)$ et $(1\,3\,2)(4)$ sont-elles les mêmes ?

d) Écrire toutes les permutations de l'ensemble E en utilisant la forme canonique.

e) Déterminer, pour l'ensemble E, le nombre :
- de cycles de longueur 2 ;
- de cycles de longueur 3 ;
- de cycles de longueur 4.

3. Composer la permutation $\sigma_1 = (1\,4)(2\,3)$ suivie de la permutation $\sigma_2 = (1\,3)(2\,4)$ c'est les appliquer l'une après l'autre.
Ainsi :

$$\begin{array}{cc} & 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \\ \sigma_1 & \downarrow \\ & 4 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \\ \sigma_2 & \downarrow \\ & 2 \quad 1 \quad 4 \quad 3 \end{array}$$

Autrement dit, $\sigma_2 \circ \sigma_1 = (1\,2)(3\,4)$.

a) Vérifier que $\sigma_2 \circ \sigma_1 = \sigma_1 \circ \sigma_2$.

b) Quelle est la permutation $\sigma_1 \circ \sigma_1$?

c) Comparer les permutations $\sigma_2 \circ \sigma_3$ et $\sigma_3 \circ \sigma_2$.

4. L'inverse de la permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, notée σ^{-1}, est la permutation $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ obtenue en lisant la permutation σ de bas en haut.
La permutation σ^{-1} est telle que :

$$\sigma^{-1} \circ \sigma = (1)(2)(3)(4).$$

a) Vérifier que $\sigma \circ \sigma^{-1} = (1)(2)(3)(4)$.

b) Déterminer l'inverse de chacune des permutations σ_2, σ_5 et $\sigma_6 = (1\,2\,3)(4)$.

c) Que peut-on dire de l'inverse d'un cycle de longueur 2 ?

d) Vérifier que chaque permutation de l'ensemble E admet un inverse.

> L'ensemble P des permutations d'un ensemble E admet plusieurs propriétés.
> - La composée de deux permutations de P est une permutation de P.
> - Il existe une permutation de P qui n'a aucun effet : l'identité.
> - Toute permutation de P admet un inverse qui est une autre permutation de P.
> - On peut vérifier que la composition des permutations est une opération associative, c'est-à-dire qu'on peut effectuer une série de composées en groupant les permutations de n'importe quelle façon, tant que l'ordre est respecté.
>
> On dit alors que P muni de la loi de composition est **le groupe** des permutations de E.

Des Défis

98 **Calculer une probabilité**

La playlist de Mike contient 20 chansons, dont 3 chansons des Beatles.
Calculer la probabilité que, en mode aléatoire, deux chansons des Beatles soient jouées l'une à la suite de l'autre.

99 **Trouver des formules**

m, *n* et *k* sont des nombres entiers naturels.
Trouver des formules, les plus simples possibles, pour le nombre de façons de ranger $m + n$ éléments en deux groupes de *m* et *n* objets respectivement.