8 Fonctions sinus et cosinus

Avant

De tout temps, on a éprouvé le besoin de minimiser la longueur des données, des informations.
Un des exemples les plus anciens est le passage des chiffres romains aux chiffres indiens afin de rendre les calculs plus efficaces.
Au 19^{e} siècle, le code Morse a réduit les messages à une succession de points et de tirets.

À présent

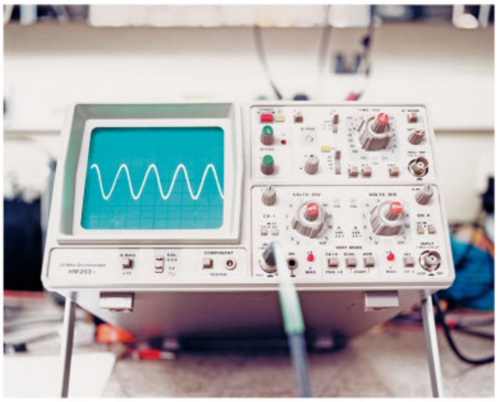
De nos jours, les techniques de compression des fichiers musicaux, vidéos, des images, … sont partout.
La théorie des ondelettes, où interviennent les fonctions sinus et cosinus, joue un rôle fondamental dans le traitement et la compression des images (par exemple le format JPEG 2000).

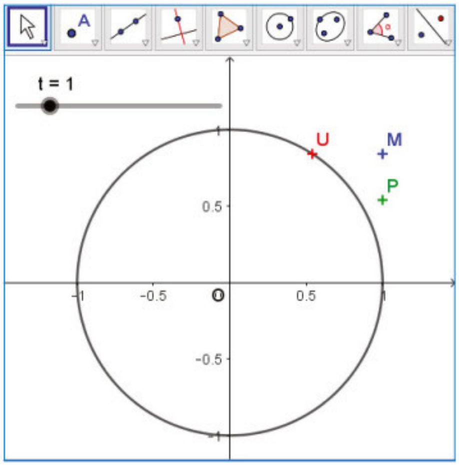
Les capacités travaillées dans ce chapitre

	Exercices
• Connaître les propriétés de la fonction sinus.	5, 6, 8, 11, 15, 17
• Connaître les propriétés de la foncion cosinus.	23, 24, 26, 29, 32, 33
• Étudier la parité d'une fonction trigonométrique.	1, 3, 7, 9, 12 à 14, 16, 25, 31
• Déterminer la périodicité d'une fonction trigonométrique.	2, 4, 10, 27, 28, 30
• Résoudre une équation trigonométrique.	18 à 20, 34, 35
• Étudier le sens de variation d'une fonction trigonométrique.	21, 22, 36, 37

1 Tice Les fonctions trigonométriques

$(\mathrm{O}\,;\mathrm{I},\mathrm{J})$ est un repère orthonormé direct.





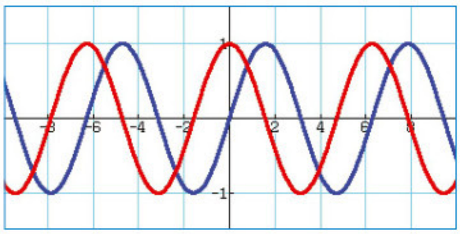
1 **a)** Avec un logiciel de géométrie, afficher le repère et créer le cercle trigonométrique de centre l'origine O du repère.
b) Créer un curseur t allant de 0 à 2π avec un incrément de 0,01 et le point U de coordonnées $(\cos(t)\,;\,\sin(t))$.
Que remarque-t-on pour le point U ? Expliquer pourquoi.

2 **a)** Créer le point M d'abscisse t et de même ordonnée que le point U.
b) Afficher la trace de M, déplacer le curseur.
De quelle fonction, définie sur $[0\,;\,2\pi]$, le point M décrit-il la courbe ?

3 **a)** Créer le point P d'abscisse t et dont l'ordonnée est l'abscisse du point U.
b) Afficher la trace du point P.
De quelle fonction, définie sur $[0\,;\,2\pi]$, le point P décrit-il la courbe ?

2 Parité et périodicité des fonctions cos et sin

On note sin (resp. cos) la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui à tout nombre réel x associe $\sin(x)$ (resp. $\cos(x)$).
Lilou a affiché à l'écran de sa calculatrice les courbes représentatives des fonctions sin et cos.



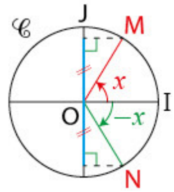
1 Quelle courbe représente la fonction cos ? la fonction sin ?

2 **a)** Conjecturer la parité de chacune des fonctions cos et sin.
b) Justifier, à l'aide d'un cercle trigonométrique, les conjectures émises.

3 Lilou affirme : « Les deux courbes se répètent toujours de la même façon. »
a) Exprimer, à l'aide d'un cercle trigonométrique, $\sin(x+2\pi)$ et $\cos(x+2\pi)$ en fonction de $\sin(x)$ et $\cos(x)$.
b) Interpréter graphiquement les résultats précédents.

1 Fonction sinus

A Définition et propriétés de la fonction sinus



Définition

La fonction $x \mapsto \sin(x)$ définie sur $\mathbb{R}$ est appelée **fonction sinus** et notée **sin**.

Propriété

La fonction sinus est **impaire** : pour tout nombre réel x, $\mathbf{sin(-x) = -sin(x)}$.

Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction sinus est **symétrique par rapport à l'origine O du repère**.

Propriété

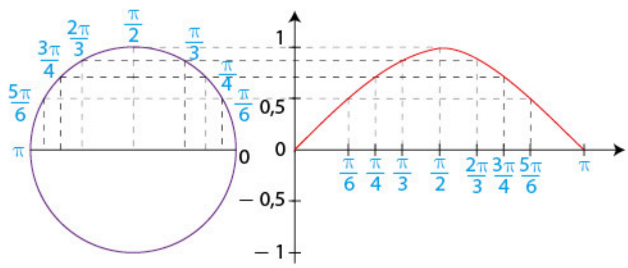
La fonction sinus est périodique de **période 2π** : pour tout nombre réel x, $\mathbf{sin(x + 2\pi) = sin(x)}$.

On peut déduire de proche en proche que, pour tout nombre réel x, $\sin(x + k2\pi) = \sin(x)$ où k est un nombre de $\mathbb{Z}$. Dans un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, la courbe représentative de la fonction sinus est **invariante par toute translation de vecteur $k2\pi\vec{i}$** où $k \in \mathbb{Z}$.

B Courbe représentative de la fonction sinus

- **Tracé de la courbe sur $[0\,;\pi]$**

On construit la courbe représentative de la fonction sinus sur l'intervalle $[0\,;\pi]$ à l'aide d'un cercle trigonométrique.

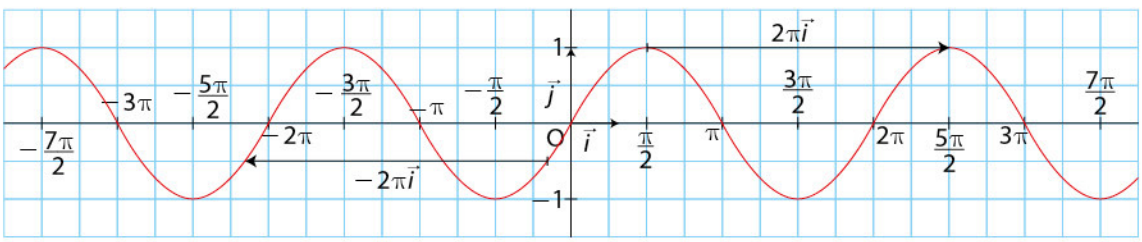


Propriété (admise)

La fonction sinus est croissante sur l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ et décroissante sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}\,;\pi\right]$.

- **Tracé de la courbe sur $\mathbb{R}$**

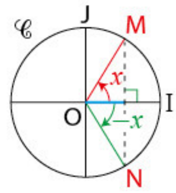
La parité de la fonction sinus permet de tracer la courbe sur l'intervalle $[-\pi\,;\pi]$ et par les translations de vecteurs $-2\pi\vec{i}$, $2\pi\vec{i}$, … on peut la tracer sur les intervalles $[-3\pi\,;-\pi]$, $[\pi\,;3\pi]$, …



La courbe de la fonction sinus est appelée **une sinusoïde**.

2 Fonction cosinus

A Définition et propriétés de la fonction cosinus



Définition

La fonction $x \mapsto \cos(x)$ définie sur $\mathbb{R}$ est appelée **fonction cosinus** et notée **cos**.

Propriété

La fonction cosinus est **paire** : pour tout nombre réel x, $\boldsymbol{\cos(-x) = \cos(x)}$.

Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction cosinus est **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées**.

Propriété

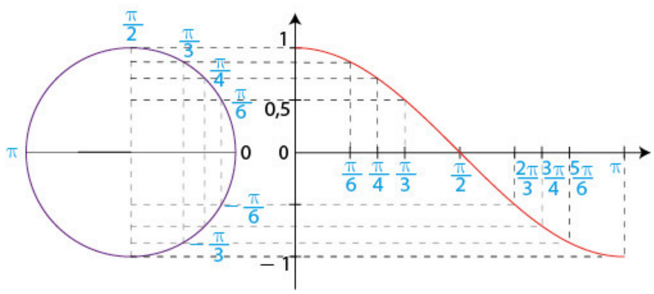
La fonction cosinus est périodique de **période $\boldsymbol{2\pi}$** : pour tout nombre réel x, $\boldsymbol{\cos(x + 2\pi) = \cos(x)}$.

On peut déduire de proche en proche que, pour tout nombre réel x, $\cos(x + k2\pi) = \cos(x)$ où k est un nombre de $\mathbb{Z}$. Dans un repère $(O\,;\ \vec{i}, \vec{j})$, la courbe représentative de la fonction cosinus est **invariante par toute translation de vecteur $\boldsymbol{k2\pi\vec{i}}$** où $k \in \mathbb{Z}$.

B Courbe représentative de la fonction cosinus

- **Tracé de la courbe sur $[0\,;\pi]$**

On construit la courbe représentative de la fonction cosinus sur l'intervalle $[0\,;\pi]$ à l'aide d'un cercle trigonométrique. On utilise le fait que pour tout nombre réel x, $\cos(x) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$.

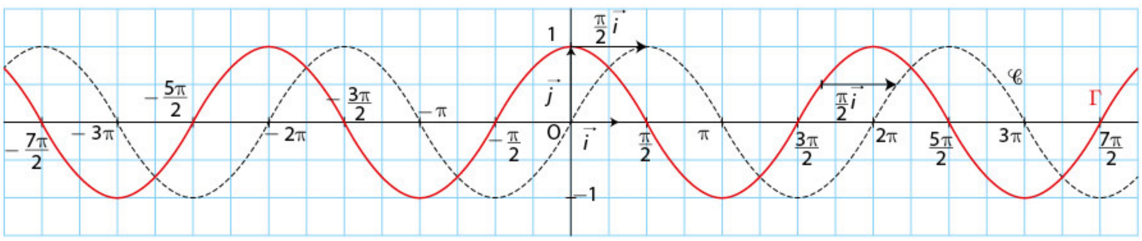


Propriété (admise)

La fonction cosinus est **décroissante** sur l'intervalle $[0\,;\pi]$.

- **Tracé de la courbe sur $\mathbb{R}$**

La parité de la fonction cosinus permet de tracer la courbe sur l'intervalle $[-\pi\,;\pi]$ et par les translations de vecteurs $-2\pi\vec{i}$, $2\pi\vec{i}$, … on peut la tracer sur les intervalles $[-3\pi\,;-\pi]$, $[\pi\,;3\pi]$, …



La courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction sinus se déduit de celle Γ de la fonction cosinus par la translation de vecteur $\dfrac{\pi}{2}\vec{i}$. C'est pour cela que la courbe de la fonction cosinus est aussi **une sinusoïde**.

Acquérir des automatismes

EXERCICES RÉSOLUS

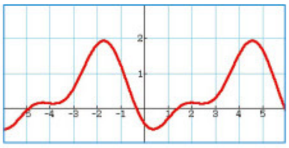
1 Étudier la parité d'une fonction trigonométrique

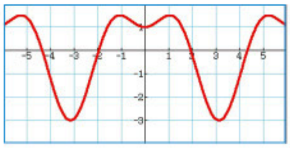
→ Cours 1. A

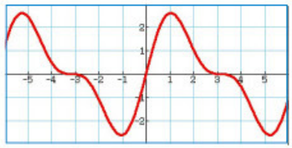
f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2\sin(x) + \sin(2x)$.

a) Étudier la parité de la fonction f.

b) La courbe de la fonction f est affichée sur l'un des écrans ci-dessous. Lequel ?

❶


❷


❸


Solution

a) Pour tout nombre réel x,

$f(-x) = 2\sin(-x) + \sin(-2x)$

$f(-x) = -2\sin(x) - \sin(2x) = -f(x)$

f est donc une fonction impaire.

> $\mathbb{R}$ est un ensemble symétrique par rapport à 0, donc pour étudier la parité de f, il suffit de déterminer $f(-x)$ et de comparer à $f(x)$ ou $-f(x)$.

b) f est une fonction impaire donc sa courbe représentative dans un repère est symétrique par rapport à l'origine du repère. Donc la courbe de f est affichée sur l'écran ❸.

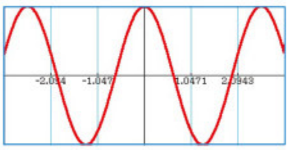
2 Déterminer la périodicité d'une fonction trigonométrique

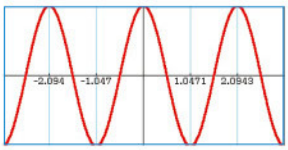
→ Cours 2. A

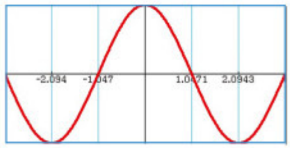
f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(3x)$.

a) Démontrer que f est périodique de période $\dfrac{2\pi}{3}$.

b) La courbe de f est affichée sur l'un des écrans ci-dessous (*fenêtre* : $-\pi \leqslant X \leqslant \pi$, pas $\dfrac{\pi}{3}$ et $-1 \leqslant Y \leqslant 1$, pas 1). Lequel ?

❶


❷


❸


Solution

a) Pour tout nombre réel x,

$$f\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(3\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)\right) = \cos\left(3x + 3 \times \frac{2\pi}{3}\right) = \cos(3x + 2\pi) = \cos(3x) = f(x)$$

Donc la fonction f est périodique de période $\dfrac{2\pi}{3}$.

b) Une graduation en abscisse représente $\dfrac{\pi}{3}$ donc la partie de la courbe qui se « répète » doit être tracée sur deux graduations, ce qui est le cas de l'écran ❷.

> On cherche deux points de la courbe qui ont la même ordonnée et qui ont leurs abscisses qui diffèrent de $\dfrac{2\pi}{3}$ donc de deux graduations.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 1

3 g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 2\cos(x) - \cos(2x)$$

a) Étudier la parité de la fonction g.

b) Sur l'un des trois écrans de l'exercice 1 est affichée la courbe de la fonction g. Lequel ?

Sur le modèle de l'exercice résolu 2

4 h est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = \cos(1{,}5x)$$

a) Démontrer que h est périodique de période $\dfrac{4\pi}{3}$.

b) Sur l'un des trois écrans de l'exercice 2 est affichée la courbe de la fonction h. Lequel ?

Fonction sinus

→ Cours 1

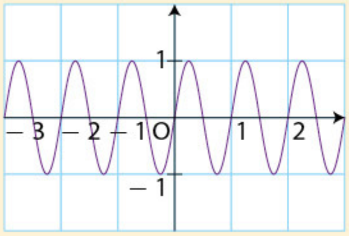
Questions Flash

5 Donner la valeur exacte de :

a) $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$ **b)** $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$ **c)** $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ **d)** $\sin(\pi)$

6 Julie affirme : « Pour tout nombre réel x, $\sin(x + 9\pi) = \sin(x)$. »
A-t-elle raison ?

7 Voici une sinusoïde représentant une fonction f.



Conjecturer la parité et la période de f.

8 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -\sin(x)$$

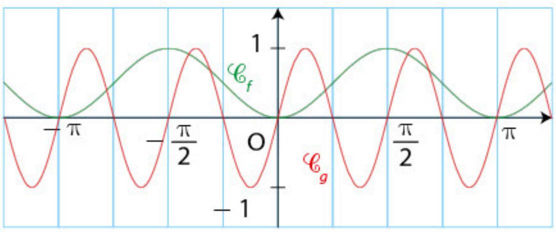
Laquelle de ces affirmations est exacte ?

(1) f est croissante sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

(2) f est décroissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}\,;0\right]$.

(3) f est croissante sur $\left[0\,;\frac{\pi}{4}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{3\pi}{2}\,;2\pi\right]$.

9 Voici, dans un repère, les courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ de deux fonctions f et g périodiques définies sur $\mathbb{R}$.



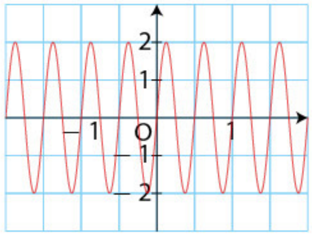
a) Préciser la parité de chacune des fonctions f et g.

b) Déterminer la période de chacune des fonctions f et g.

c) Dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ ci-dessus, donner une translation qui laisse invariante :

- la courbe $\mathscr{C}_f$;
- la courbe $\mathscr{C}_g$.

10 h est une fonction du type $x \mapsto \sin(ax)$ avec a nombre réel dont voici la courbe représentative dans un repère.



a) Déterminer graphiquement la période de h.

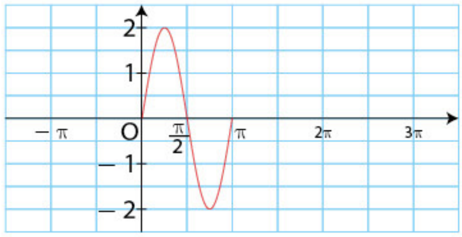
b) En déduire que pour tout nombre réel x :

$$h(x + 1) = h(x)$$

11 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2\sin(2x)$$

On admet que f est impaire et périodique de période π.
Voici sa courbe représentative sur l'intervalle $[0\,;2\pi]$ dans un repère.

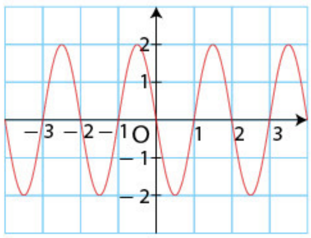


Recopier et compléter le graphique afin d'obtenir la courbe représentative de f sur l'intervalle $[-\pi\,;3\pi]$.

12 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -2\sin(\pi x)$$

Voici sa courbe représentative dans un repère.



a) Par lecture graphique, conjecturer la parité de f et sa période.

b) Démontrer ces conjectures.

13 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sin(2x)$$

a) Montrer que f est impaire.

b) Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f dans un repère ?

14 g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = x + \sin(x)$$

a) Quelle est la parité de g ?

b) Que peut-on en déduire pour sa courbe représentative dans un repère ?

15 h est la fonction sinus.

1. Tracer la courbe représentative $\mathscr{C}$ de h sur l'intervalle $[-4\pi ; 4\pi]$.

2. Déterminer un centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}$ de coordonnées $(a ; 0)$ lorsque a appartient à l'intervalle :

a) $I = [-\pi ; \pi]$ **b)** $I = [2\pi ; 4\pi]$ **c)** $I = \left[-\frac{5\pi}{2} ; -\frac{3\pi}{2}\right]$

16 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)$$

a) Vérifier que la fonction f est périodique de période 8.

b) Étudier la parité de la fonction f.

c) Quelles transformations permettent de tracer, dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, la courbe représentative de f sur l'intervalle $[-4 ; 12]$ à partir du tracé sur l'intervalle $[0 ; 4]$?

17 La concentration C d'un médicament (en ppm) dans le sang d'un patient peut être modélisée en fonction du temps, en heure, écoulé depuis la prise du médicament par :

$$C(t) = 250\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$

a) Vérifier que pour tout $t \geqslant 0$, $C(t+4) = C(t)$.

b) Que peut-on en déduire pour la concentration du médicament dans le sang du patient ?

Pour les exercices 18 à 20, en s'aidant de la courbe de la fonction sinus, résoudre l'équation dans :

a) $[0 ; \pi]$ **b)** $[-\pi ; \pi]$ **c)** $[\pi ; 3\pi]$ **d)** $\mathbb{R}$

18 $\sin(x) = 0{,}5$

19 $1 + 2\sin(x) = 0$

20 $-4\sin(t) + 2\sqrt{3} = 0$

21 f est la fonction sinus.

1. Rappeler le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; \pi]$.

2. a) Quelle propriété (parité ou périodicité) permet d'obtenir à partir de la question **1.** le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle :

• $[-\pi ; \pi]$? • $[2\pi ; 3\pi]$? • $\left[-2\pi ; -\frac{3\pi}{2}\right]$?

b) Dresser le tableau de variations de f sur chacun des intervalles précédents.

22 Voici le tableau de variations de la fonction sinus sur l'intervalle $[3\pi ; 4\pi]$.

x	3π	$\frac{7\pi}{2}$	4π
$\sin(x)$	0 ↘	1	↗ 0

1. Quelle propriété permet d'obtenir le tableau de variations de la fonction sinus sur l'intervalle :

a) $[-\pi ; 0]$? **b)** $[-\pi ; \pi]$? **c)** $[-4\pi ; -3\pi]$?

2. Dresser le tableau de variations de f sur chacun des intervalles précédents.

Fonction cosinus

→ Cours 2

Questions flash

23 Donner la valeur exacte de :

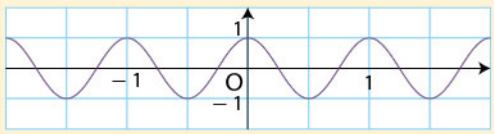
a) $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ **b)** $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ **c)** $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$ **d)** $\cos(\pi)$

24 Fiona affirme : « Pour tout nombre réel x,

$\cos(x + 10\pi) = \cos(x)$. »

Que peut-on en penser ?

25 Voici une sinusoïde représentant une fonction f.



Conjecturer la parité et la période de f.

26 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \cos(x)$$

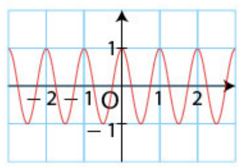
Laquelle de ces affirmations est exacte ?

(1) f est croissante sur $[0 ; \pi]$.

(2) f est décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2}\right]$.

(3) f est croissante sur $\left[-\pi ; -\frac{\pi}{2}\right]$ et sur $\left[\pi ; \frac{3\pi}{2}\right]$.

27 h est la fonction périodique définie sur $\mathbb{R}$ dont voici la courbe représentative dans un repère.

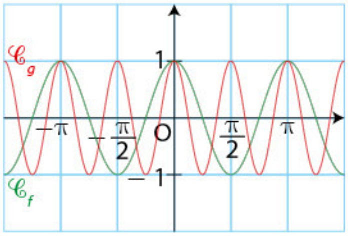


a) Déterminer graphiquement la période de h.

b) En déduire que pour tout nombre réel x :

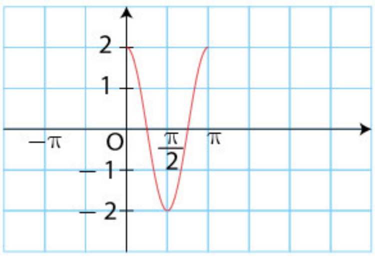
$$h(x+2) = h(x)$$

28 Voici, dans un repère, les courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ de deux fonctions f et g du type $x \mapsto \cos(ax)$ avec a nombre réel.



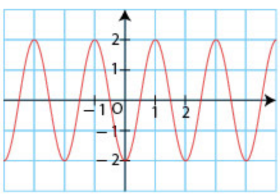
a) Préciser la parité de chacune des fonctions f et g.
b) Déterminer la période de chacune des fonctions f et g.

29 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = 2\cos(2x)$$
On admet que f est paire et périodique de période π.
Voici sa courbe représentative sur l'intervalle $[0\,;\pi]$ dans un repère orthogonal.



Recopier et compléter le graphique afin d'obtenir la courbe représentative de f sur l'intervalle $[-\pi\,;3\pi]$.

30 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = -2\cos(\pi x)$$
Voici sa courbe représentative dans un repère.



a) Par lecture graphique, conjecturer la parité de f et sa période.
b) Démontrer ces conjectures.

31 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \cos(2x)$$
a) Montrer que f est paire.
b) Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f dans un repère orthogonal ?

32 h est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$h(x) = \cos(x)$$
1. Tracer la courbe représentative $\mathscr{C}$ de h dans un repère orthogonal sur l'intervalle $[-4\pi\,;4\pi]$.
2. Déterminer un axe de symétrie de $\mathscr{C}$ d'équation $x = a$ lorsque a appartient à l'intervalle :
a) $[-\pi\,;\pi]$ **b)** $[2\pi\,;4\pi]$
c) $\left[-\frac{5\pi}{2}\,;-\frac{3\pi}{2}\right]$ **d)** $[\pi\,;3\pi]$

33 La pression P (en mm de mercure) contre les parois des vaisseaux sanguins d'une personne peut être modélisée par :
$$P(t) = 100 - 20\cos\left(\frac{8\pi}{3}t\right)$$
avec t en seconde.
a) Vérifier que pour tout $t \geqslant 0$, $P(t + 0{,}75) = P(t)$.
b) Si un cycle équivaut à un battement de cœur, quel est le pouls de la personne en battement de cœur par minute (bpm) ?

Pour les exercices 34 et 35, en s'aidant de la courbe de la fonction cosinus, résoudre l'équation dans :
a) $[0\,;\pi]$ **b)** $[-\pi\,;\pi]$ **c)** $[\pi\,;3\pi]$ **d)** $\mathbb{R}$

34 $\cos(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

35 $\sqrt{3} + 2\cos(x) = 0$

36 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \cos(x)$$
1. Rappeler le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;2\pi]$.
2. a) Quelle propriété (parité ou périodicité) permet d'obtenir à partir de la question **1.** le sens de variation de la fonction f sur les intervalles suivants :
• $[-2\pi\,;0]$? • $[6\pi\,;8\pi]$? • $[-4\pi\,;-3\pi]$?
b) Dresser le tableau de variations de f sur chacun des intervalles précédents.

37 Voici le tableau de variations de la fonction cosinus sur l'intervalle $[\pi\,;3\pi]$.

x	π	2π	3π
$\cos(x)$	-1 ↗	1 ↘	-1

1. Quelle propriété permet d'obtenir le tableau de variations de la fonction cosinus sur l'intervalle :
a) $[-\pi\,;\pi]$? **b)** $[-3\pi\,;-\pi]$? **c)** $[2\pi\,;4\pi]$?
2. Dresser le tableau de variations de f sur chacun des intervalles précédents.

QCM interactifs

Pour se tester

38 Dans chaque cas, donner la réponse exacte sans justifier.

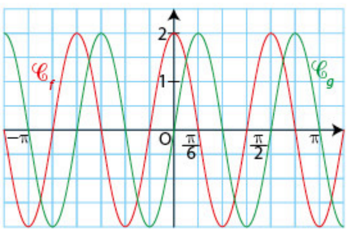
		A	B	C	D
1	La fonction sinus est …	paire	impaire	ni paire, ni impaire	paire et impaire
2	La fonction cosinus est périodique de période …	2	$-\pi$	π	2π
3	Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction sinus admet un axe de symétrie d'équation …	$x = -2\pi$	$x = -\pi$	$x = \dfrac{3\pi}{2}$	$x = 3\pi$
4	f est la fonction définie sur $\mathrm{I} = [0\,;\pi]$ par $f(x) = 3 - 2\cos(x)$. Alors f est …	croissante sur I	décroissante sur I	constante sur I	nulle sur I
5	Sur l'intervalle $[-\pi\,;\pi]$, les solutions de l'équation $\sin(x) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ sont …	$-\dfrac{3\pi}{4}$ et $\dfrac{3\pi}{4}$	$-\dfrac{3\pi}{4}$ et $-\dfrac{\pi}{4}$	$-\dfrac{\pi}{4}$ et $\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{4}$ et $\dfrac{3\pi}{4}$

39 Dans chaque cas, donner la (ou les) réponse(s) exacte(s) sans justifier.

		A	B	C	D
1	f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(x)$. Alors f est …	croissante sur $[0\,;\pi]$	croissante sur $[-\pi\,;0]$	décroissante sur $[2\pi\,;3\pi]$	décroissante sur $[-\pi\,;0]$
2	g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \cos(x)\sin(x)$ Alors g est périodique de période …	2π	$\dfrac{\pi}{2}$	π	3π
3	h est la fonction définie sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ par $h(x) = \cos(x) - \sin(x)$. Alors pour tout nombre réel x, …	$h(x) \geqslant 0$ sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{4}\right]$	$h(x) = 0$ pour $x = \dfrac{\pi}{4}$	$h(x) \leqslant 0$ sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$	$h(x) > 0$ sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{4}\right[$
4	Sur l'intervalle $[-\pi\,;\pi]$, les solutions de l'équation $2\cos(x) + \sqrt{3} = 0$ sont …	$-\dfrac{\pi}{6}$ et $\dfrac{5\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{6}$ et $\dfrac{5\pi}{6}$	$-\dfrac{5\pi}{3}$ et $\dfrac{5\pi}{3}$	$-\dfrac{5\pi}{6}$ et $\dfrac{5\pi}{6}$

40 Dans chaque cas, dire si l'affirmation est vraie ou fausse en justifiant.

f et g sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2\cos(3x)$ et $g(x) = 2\sin(3x)$. Voici ci-contre, dans un repère orthonormé, leurs courbes représentatives.



Affirmations :

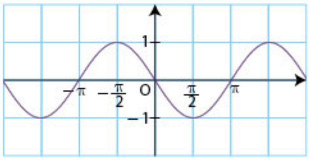
1. f et g ont la même parité.
2. f est périodique de période $\dfrac{\pi}{3}$.
3. Pour tout nombre réel x, $-2 \leqslant f(x) \leqslant 2$.
4. Pour tout nombre réel x, $g(x + 2\pi) = g(x)$.

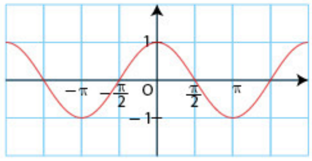
Vérifiez vos réponses : p. 340

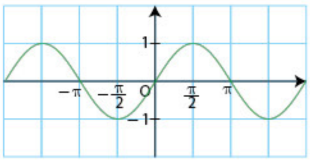
Nathan live!

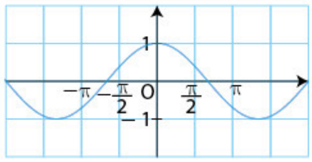
41 Reconnaître une courbe

Parmi ces courbes, laquelle représente sur $[-2\pi\,;2\pi]$: **a)** la fonction sinus ? **b)** la fonction cosinus ?

❶


❷


❸


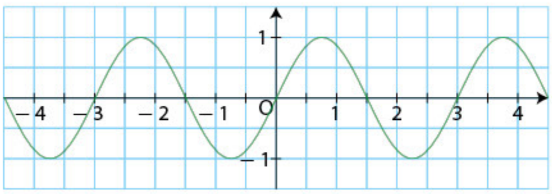
❹


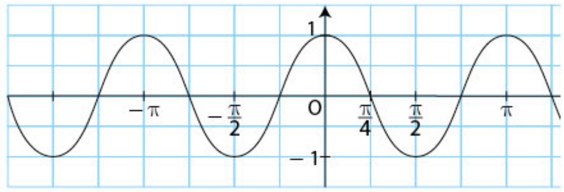
AIDE On peut utiliser la parité, la période, les symétries ou des valeurs remarquables.

42 Lire une période

Voici, dans un repère, deux courbes représentatives de fonctions trigonométriques.
Lire graphiquement la période de chacune d'elles.

AIDE On peut utiliser deux points ayant la même ordonnée.

a)


b)


43 Étudier la parité d'une fonction trigonométrique

f et g sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sin^2(x) - 3\cos(x) \text{ et } g(x) = \sin(x)\cos(x).$$

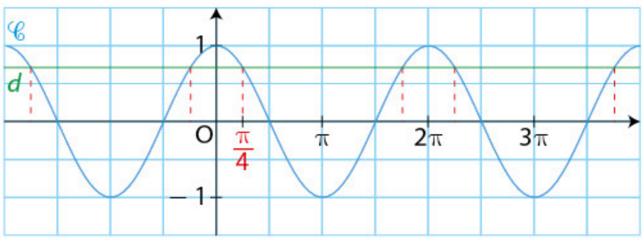
Étudier la parité de chacune des fonctions f et g.

AIDE Utiliser le fait que pour tout nombre réel x, $\cos(-x) = \cos(x)$ et $\sin(-x) = -\sin(x)$.

44 Résoudre une équation

Dans un repère, $\mathscr{C}$ est la courbe de la fonction cosinus sur $\mathrm{I} = [-2\pi\,;4\pi]$ et d la droite d'équation $y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Lire graphiquement les solutions dans I de l'équation $\cos(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.



AIDE Penser à utiliser le fait que la fonction cos est paire et de période 2π.

EXERCICE RÉSOLU

45 Comprendre et tester un programme

On considère le programme ci-contre écrit en langage Python.

a) Exécuter pas à pas ce programme, et compléter un tableau de suivi des variables a, b, m ; faire apparaître également dans ce tableau les valeurs de $b-a$ et $\cos(m)$.

Quelles valeurs affiche le programme en sortie ?

Arrondir au centième.

b) Expliquer le rôle de ce programme.

c) Saisir ce programme et l'exécuter.

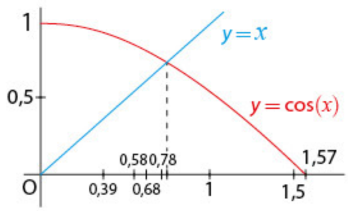
Interpréter le résultat obtenu.

```python
from math import *

a=0
b=pi/2
while b-a>0.1:
    m=(a+b)/2
    if cos(m)>m:
        a=m
    else:
        b=m
print("La valeur de a est :",a)
print("La valeur de b est :",b)
```

Solution

a) Voici les valeurs successives arrondies au centième prises par les variables a, b, m.

a	0	0	0,39	0,58	0,68
b	1,57	0,78	0,78	0,78	0,78
$b-a$	1,57	0,78	0,39	0,20	0,1
m	0,78	0,39	0,58	0,68	
$\cos(m)$	0,71	0,92	0,84	0,78	



À la sortie de la boucle, le programme affiche $a = 0{,}68$ et $b = 0{,}78$ (valeurs arrondies du tableau).

b) Le programme détermine un encadrement $a < u < b$ de la solution u de l'équation $\cos(x) = x$ dans l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

Cet encadrement est tel que $b - a \leqslant 0{,}1$.

Pour mieux comprendre l'algorithme, on peut tracer dans un repère les courbes d'équations $y = x$ et $y = \cos(x)$.
On indique alors les valeurs successives de a et b obtenues comme ci-dessus.

c) Voici l'affichage obtenu avec le programme.

```
>>>
La valeur de a est : 0.6872233929727672
La valeur de b est : 0.7853981633974483
```

La solution u de l'équation $\cos(x) = x$ dans $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ est telle que $0{,}687 < u < 0{,}786$.

À VOTRE TOUR

46 **a)** Modifier le programme de l'exercice 45 afin d'obtenir un encadrement $a < v < b$, avec $b - a \leqslant 0{,}01$, de la solution v de l'équation $\cos(x) = 0{,}4$ dans l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

b) Saisir le programme obtenu et l'exécuter.

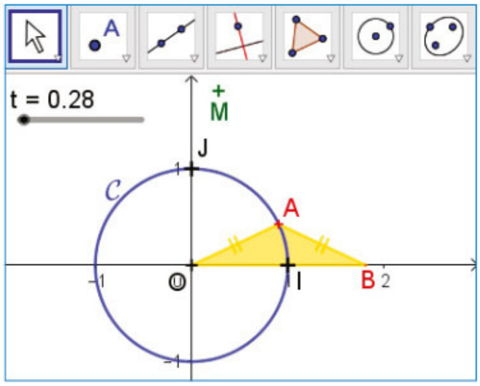
47 **a)** Modifier le programme de l'exercice 45 afin d'obtenir un encadrement $a < w < b$, avec $b - a \leqslant 0{,}01$, de la solution w de l'équation $\sin(x) = 0{,}75x$ dans l'intervalle $\left[\frac{\pi}{4}\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

b) Saisir le programme obtenu et l'exécuter.

EXERCICE RÉSOLU

48 Déterminer le mouvement d'un point

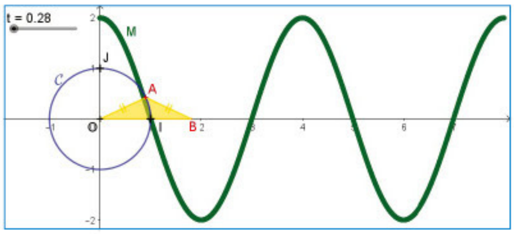
Dans un repère orthonormé (O ; I, J), $\mathscr{C}$ est le cercle de centre O et de rayon 1.
Un point mobile A se déplace sur $\mathscr{C}$ à la vitesse de $\frac{\pi}{2}$ rad par seconde pendant 8 s.
B est le point de l'axe (OI) tel que le triangle OAB est isocèle en A. On note M est le point d'abscisse *t* et d'ordonnée l'abscisse de B.



a) Réaliser cette figure avec un logiciel de géométrie. Créer un curseur *t* variant de 0 à 8 avec un incrément de 0,01.
Afficher la trace du point M et déplacer le curseur.
On obtient la courbe représentative d'une fonction *f*.
b) Émettre une conjecture quant à la forme de la courbe et la périodicité de la fonction *f*.
c) Exprimer $f(t)$ en fonction de *t*.

Solution

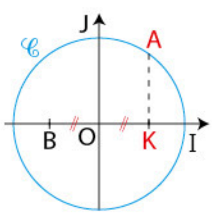
a) Lorsqu'on déplace le curseur de 0 à 8, le point M décrit la courbe ci-contre.



b) On peut conjecturer qu'on obtient une sinusoïde et que la fonction *f* a pour période 4.
c) Le point A se déplace sur $\mathscr{C}$ de $\frac{\pi}{2}$ rad en 1 s, donc en *t* s, il se déplacera de $\frac{\pi}{2}t$ rad.
Ses coordonnées sont donc $\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) ; \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right)$.
Le triangle OAB étant isocèle en A, son axe de symétrie permet d'affirmer que l'abscisse x_B du point B est le double de l'abscisse de A donc $x_B = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$.
Donc la fonction *f* qui à *t* associe l'abscisse de B est définie sur $[0 ; 8]$ par $f(t) = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$.

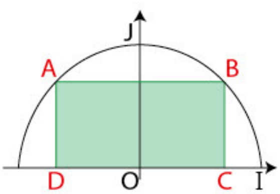
À VOTRE TOUR

49 Dans un repère orthonormé (O ; I, J), $\mathscr{C}$ est le cercle de centre O et de rayon 1.
Un point mobile A se déplace sur $\mathscr{C}$ à la vitesse de $\frac{\pi}{4}$ rad par seconde pendant 8 secondes.



K est le point de l'axe (OI) qui a la même abscisse que A et B est le symétrique de K par rapport à O.
a) Réaliser cette figure avec un logiciel de géométrie et tracer la courbe représentative de la fonction *f* qui à *t* de l'intervalle $[0 ; 8]$ associe l'abscisse x_B de B.
b) Émettre une conjecture quant à la forme de la courbe et la périodicité de la fonction *f*.

50 Dans un repère orthonormé (O ; I, J), $\mathscr{C}$ est ce demi-cercle de centre O et de rayon 1.
Un point mobile A décrit $\mathscr{C}$ à la vitesse de 1 rad par seconde pendant π secondes.



ABCD est le rectangle ci-dessus inscrit dans $\mathscr{C}$.
a) Réaliser cette figure avec un logiciel de géométrie et tracer la courbe représentative de la fonction *f* qui à *t* de l'intervalle $[0 ; \pi]$ associe l'aire du rectangle ABCD.
b) Émettre une conjecture quant à la forme de la courbe et la périodicité de la fonction *f*.

Démontrer et raisonner

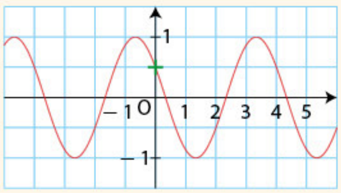
51 Déterminer une période

Méthode
Pour déterminer la période d'une fonction, définie sur $\mathbb{R}$, on cherche le plus petit nombre réel non nul T tel que $f(x + \mathrm{T}) = f(x)$.

a est un nombre de $\mathbb{R}^*$ et $0 < b \leqslant \frac{\pi}{2}$.

a) Déterminer la période de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(ax + b)$.

b) Voici la courbe représentative d'une fonction $g : x \mapsto \cos(ax + b)$.
Déterminer a et b graphiquement.



52 Étudier la position de deux courbes

Méthode
Parfois, pour étudier le signe d'une fonction h, il est utile d'écrire $h(x)$ sous la forme d'un produit de facteurs et d'étudier le signe de chaque facteur.

f et g sont les fonctions définies sur l'intervalle $[0\,;\pi]$ par $f(x) = \cos^2(x)$ et $g(x) = \cos(x)$.
$\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont leurs courbes représentatives dans un repère. Étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

53 Étudier une fonction trigonométrique

Méthode
Pour étudier les variations d'une fonction trigonométrique, on essaie de réduire l'intervalle d'étude en étudiant la parité de la fonction puis sa périodicité.

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3\cos(2x)$.

1. a) Étudier la parité de f.

b) En déduire que l'on peut restreindre l'intervalle d'étude de f à l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

2. a) Vérifier que f est périodique de période π.

b) À quel nouvel intervalle peut-on restreindre l'étude de f ?

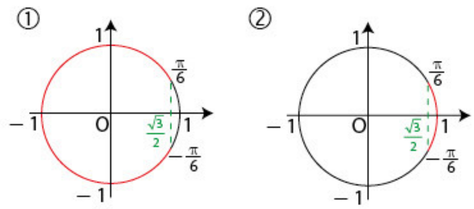
3. Déterminer les variations de f sur les intervalles $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ et $\left[\frac{\pi}{2}\,;\pi\right]$.

Étudier des propriétés de fonctions trigonométriques

54

a) Résoudre dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$ l'équation $2\cos(x) - \sqrt{3} = 0$.

b) On a tracé en rouge sur l'un des deux cercles trigonométriques ci-dessous l'ensemble des points M associés aux nombres réels x tels que $\cos(x) \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$. Duquel s'agit-il ?



c) En déduire l'ensemble des nombres réels x solutions de l'inéquation $2\cos(x) - \sqrt{3} \geqslant 0$.

55

On se propose de résoudre dans l'intervalle $[0\,;2\pi]$ l'inéquation (**E**) :

$$(-\sqrt{2} + 2\cos(x))\sin(x) < 0$$

1. En s'aidant d'un cercle trigonométrique, résoudre dans l'intervalle $[0\,;2\pi]$ chacune des inéquations suivantes :

a) $\sin(x) \geqslant 0$ **b)** $-\sqrt{2} + 2\cos(x) \geqslant 0$

2. a) En déduire, à l'aide d'un tableau de signes, le signe sur l'intervalle $[0\,;2\pi]$ du produit :

$$(-\sqrt{2} + 2\cos(x))\sin(x)$$

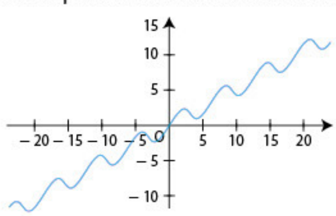
b) Conclure quant à l'ensemble des solutions de l'inéquation (**E**).

56

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x}{2} + \sin(x)$$

Voici sa courbe représentative $\mathscr{C}$ dans un repère :



1. Utiliser le fait que pour tout nombre réel x :

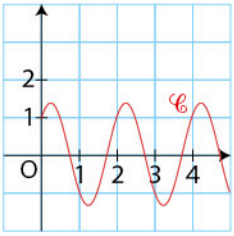
$$-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$$

pour donner un encadrement de $f(x)$.

2. a) Déduire de ce qui précède que $\mathscr{C}$ est située entre deux droites d_1 et d_2 dont on précisera les équations.

b) Vérifier que d_1 et d_2 sont parallèles et coupent $\mathscr{C}$ en une infinité de points.

57 Voici dans un repère la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.



On sait que $f(x)=\sqrt{2}\sin(ax+b)$ où a est un nombre de $\mathbb{R}^*$ et $0<b\leqslant\frac{\pi}{2}$.

a) Lire graphiquement $f(0)$ et la période T de f.

b) Montrer que a et b vérifient le système :

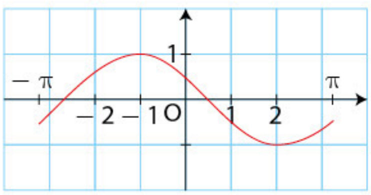
$$\begin{cases} a\mathrm{T}=2\pi \\ \sqrt{2}\sin(b)=1 \end{cases}$$

c) En déduire a et b.

58 g est la fonction définie sur $[-\pi\,;\pi]$ par :

$$g(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$$

Voici ci-dessous, dans un repère, la courbe représentative de la fonction g.

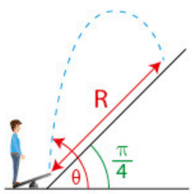


a) Conjecturer l'existence de deux extremums pour la fonction g.

b) Démontrer ces conjectures.

59 Un projectile est lancé sous un angle de θ radians à une vitesse de v m·s^{-1} $\left(\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$.

Si la résistance de l'air est ignorée, la distance R, en m, qu'il parcourt, indiquée ci-contre, est donnée par :



$$\mathrm{R}(\theta)=\frac{v^2}{16}\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right)$$

1. On prend $v=10$ m·s^{-1}.

a) Conjecturer le maximum de $\mathrm{R}(\theta)$.

b) Déterminer l'inclinaison θ pour laquelle $\mathrm{R}(\theta)$ est maximum.

2. La vitesse influence-t-elle la valeur de θ pour laquelle le maximum de $\mathrm{R}(\theta)$ est atteint ? Justifier.

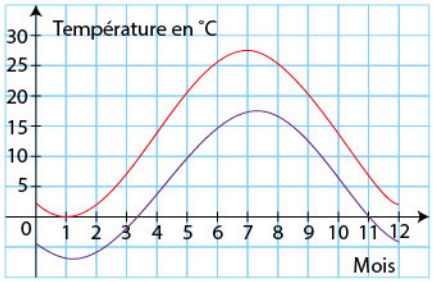
60 Algo Les hautes et basses températures (en °C) d'une région de Pennsylvanie sur une année peuvent être modélisées par les fonctions H et B définies sur l'intervalle $[0\,;12]$ par :

$$\mathrm{H}(t)=-6{,}4\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)-11{,}6\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)+13{,}9$$

$$\mathrm{B}(t)=-7{,}4\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)-9{,}5\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)+5{,}4$$

où t est exprimé en mois ($t=0$ correspond au 1$^{\text{er}}$ janvier).

Voici leurs courbes représentatives (en rouge pour H, en violet pour B).



1. Déterminer l'écart de températures au 1$^{\text{er}}$ janvier.

2. Voici un programme écrit en langage Python.

Il permet de déterminer le plus grand écart de température cette année-là.

```
1  from math import *
2
3  def H(x):
4      y=-6.4*sin(pi*x/6)-11.6*cos(pi*x/6)+13.9
5      return y
6
7  def B(x):
8      y=-7.4*sin(pi*x/6)-9.5*cos(pi*x/6)+5.4
9      return y
10
11 x=0
12 e=6.4
13 while x<=12:
14     d=H(x)-B(x)
15     if d>e:
16         e=d
17         m=x
18     x=x+0.1
19 print("e=",e)
20 print("m=",m)
```

a) Expliquer les valeurs initiales de x et de e choisies aux lignes 11 et 12.

b) Que représente chacune des variables x, e, m ?

c) Saisir ce programme et l'exécuter.

Quels affichages obtient-on ?

Interpréter ces résultats pour la situation.

3. Modifier ce programme de façon à obtenir le mois où l'écart de température est le plus petit ainsi que cet écart.

61 La vitesse du flux d'air, en $L \cdot s^{-1}$, au cours de la respiration chez une personne au repos peut être modélisée en fonction du temps, en s, par :

$$f(t) = 0{,}6\sin\left(\frac{2\pi}{5}t\right)$$

La vitesse du flux d'air est positive lorsque la personne inspire et négative lorsqu'elle expire.

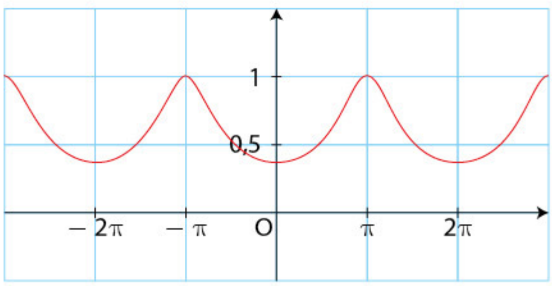
a) Vérifier que la période d'un cycle respiratoire de cette personne (inspiration et expiration) est de 5 s.

b) À quels instants du cycle respiratoire, de 0 à 5 s, la personne inspire et expire-t-elle $0{,}3\ L \cdot s^{-1}$?

62 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2 + \cos(x)}$$

1. Voici la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthogonal.



a) Conjecturer la parité et la période de f.

b) Pour tout nombre réel x, exprimer $f(-x)$ et $f(x + 2\pi)$ en fonction de $f(x)$.
Ces résultats confirment-ils les conjectures émises à la question **a)** ?

c) Justifier que l'on peut étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\pi]$.

2. a) On admet que f est dérivable sur $[0\,;\pi]$.
Voici un écran de calcul formel.

1 Dérivée$\left(\dfrac{1}{2+\cos(x)}\right)$

$\rightarrow \dfrac{\sin(x)}{(\cos(x)+2)^2}$

Utiliser le résultat affiché pour étudier le signe de $f'(x)$ et déduire le sens de variation de f sur $[0\,;\pi]$.

b) Par quelles transformations obtient-on la courbe représentative de f sur $[-3\pi\,;3\pi]$ dans un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, à partir du tracé de la courbe sur l'intervalle $[0\,;\pi]$?

63 g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

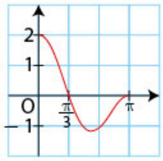
$$g(x) = (1 + \cos(x))\sin(x)$$

1. a) Vérifier que la fonction g est une fonction périodique de période 2π.

b) Étudier la parité de la fonction g.

c) En déduire que l'on peut étudier la fonction g sur l'intervalle $[0\,;\pi]$.

2. Voici la courbe représentative de la fonction dérivée g' de la fonction g sur l'intervalle $[0\,;\pi]$.



a) Déterminer graphiquement le signe de $g'(x)$.

b) En déduire le sens de variation de g sur $[0\,;\pi]$ et dresser le tableau de variations de g sur $[-2\pi\,;2\pi]$.

S'entraîner à la logique → p. 336

64 Quantificateurs universel et existentiel

Chacune des propositions suivantes est-elle vraie ou fausse ? Justifier la réponse.

a) Pour tout x de $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, $\sin(x) \geqslant x$.

b) Il existe un nombre réel x tel que :

$$\sin^2(x) - \cos^2(x) = 0$$

c) Pour tout nombre réel x :

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}(x+12)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}(x-24)\right)$$

65 Implications

x désigne un nombre réel.
On considère l'équation (**E**) : $\sin(x) = \dfrac{x}{2}$.

a) Démontrer que si x est solution de (**E**), alors x appartient à l'intervalle $[-2\,;2]$.

b) Démontrer que si x est solution de (**E**), alors $-x$ est solution de (**E**).

66 Contre-exemple

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x}{2} + \cos(x)$$

Dans chaque cas, utiliser un contre-exemple pour montrer que l'affirmation est fausse.

a) Pour tout nombre réel x, $f(x + 2\pi) = f(x)$.

b) Pour tout nombre réel x de $[0\,;1]$, $f(x) \leqslant 0$.

67 Déterminer une période

Raisonner **Communiquer**

f, g et h sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{5}x\right),\quad g(x)=\sin\left(\frac{\pi}{3}x\right)$$
$$\text{et } h(x)=f(x)+g(x).$$

a) Vérifier que f est de période $T_1=10$ et que g est de période $T_2=6$.

b) On admet que h est périodique.

Démontrer que si T est une période de h, alors il existe deux nombres entiers naturels a et b tels que $T=aT_2=bT_1$ et $\frac{a}{b}$ irréductible.

c) Déterminer T.

68 Imaginer une stratégie

Raisonner **Calculer**

1. On considère l'équation $(\mathbf{E})$:

$$2\sin^2(x)+\sin(x)-1=0$$

On se propose de résoudre cette équation dans $[0\,;2\pi[$.

a) On pose $X=\sin(x)$. Que devient l'équation ?

b) Résoudre l'équation d'inconnue X.

c) En déduire les solutions de $(\mathbf{E})$ dans $[0\,;2\pi[$.

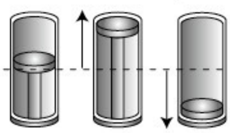
2. Utiliser un raisonnement analogue pour résoudre dans $[-\pi\,;\pi]$ l'équation $(\mathbf{F})$:

$$\cos^2(x)+2\sin^2(x)=2$$

69 Déterminer des vitesses

Modéliser **Raisonner** **Calculer**

Un piston dans un moteur oscille de haut en bas à partir d'une position de repos comme indiqué.



Le mouvement de ce piston peut être modélisé par la fonction h définie sur $\left[0\,;\frac{2\pi}{13}\right]$ par $h(t)=0{,}05\cos(13t)$ où t est le temps, en s, et $h(t)$ le déplacement, en m, de la tête de piston par rapport à la position de repos.

La vitesse de la tête du piston en fonction du temps est $v(t)=-0{,}65\sin(13t)$.

a) Déterminer les vitesses maximum et minimum du piston. Indiquer les instants où elles sont atteintes.

b) À quels instants la vitesse est-elle nulle ?

Donner les positions du piston correspondantes.

70 Study a predator-pray model

Chercher **Raisonner** **Communiquer**

The population of predators and prey in a closed ecology system tends to vary periodically over time.

In a certain system, the population of owls O can be represented by $O=150+30\sin\left(\frac{\pi}{10}t\right)$ where t is the time in years since january 1, 2001.

In that same system, the population of mice M can be represented by $M=600+300\sin\left(\frac{\pi}{10}t+\frac{\pi}{20}\right)$.

a) Find the maximum number of owls. After how many years does this occur?

b) What is the minimum number of mice? How long does it take for the population of mice to reach this level?

c) Why would the maximum owl population follow behind the population of mice?

71 Prendre des initiatives

Raisonner **Calculer**

a) Vérifier que pour tout nombre réel x de $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$:

$$2\cos^2(x)+\cos(x)-1=\left(\cos(x)-\frac{1}{2}\right)(2\cos(x)+2)$$

b) En s'aidant d'un cercle trigonométrique, résoudre dans l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ l'inéquation $2\cos^2(x)+\cos(x)-1\geqslant 0$.

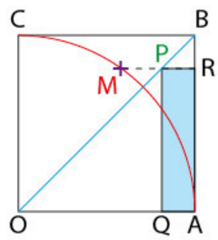
72 Établir une inégalité

Narration de recherche

Chercher **Communiquer**

Rédiger les différentes étapes de la recherche, sans omettre les fausses pistes et les changements de méthode.

Problème $(O\,;A,C)$ est un repère orthonormé, OABC est un carré de côté 1, $\mathscr{C}$ est le quart de cercle de centre O et de rayon 1 contenu dans ce carré. M est un point mobile de $\mathscr{C}$, P est le point du segment $[OB]$ ayant la même ordonnée que M, Q et R appartenant respectivement aux segments $[OA]$ et $[AB]$ sont tels que PQAR soit un rectangle.



Démontrer que, quelle que soit la position du point M, l'aire du rectangle PQAR est inférieure ou égale à 0,25.

73 Étudier le signe d'une fonction

Problème ouvert

Chercher Raisonner

f est la fonction définie sur $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$f(x) = \sin(x) - \sin^2(x)$$

Dans un repère, déterminer la position relative de la courbe représentative de f par rapport à l'axe des abscisses.

74 Calculer un biorythme

Chercher Représenter Raisonner

Dans la théorie des biorythmes, chaque individu possède trois potentiels qui évoluent cycliquement : physique, émotionnel et intellectuel. Chaque potentiel d'une personne est mesuré, en pourcentage, à l'instant t, en jour, depuis sa naissance, à l'aide d'une fonction du type $t \mapsto 50\sin(\omega t) + 50$ où ω est un nombre réel positif propre au potentiel.

a) Déterminer l'écriture de chacune des trois fonctions sachant que les potentiels physique, émotionnel et intellectuel ont respectivement pour période 23 jours, 28 jours et 33 jours.

b) Un individu peut-il avoir simultanément ses trois potentiels à 100 % ? (Il est alors au summum de sa forme).

c) Une personne a 20 ans aujourd'hui (7 305 jours).
Décrire ses différents potentiels dans les 30 jours qui suivent.

75 Construire des sinusoïdes

Représenter Raisonner

f, g et h sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = \sin(x)$, $g(x) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$ et $h(x) = 2\sin(x)$.

On note $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ les courbes représentatives des fonctions f, g et h dans un repère.

1. a) Afficher les courbes $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ à l'écran de la calculatrice.

b) Conjecturer la transformation géométrique qui permet de passer de $\mathscr{C}_f$ à $\mathscr{C}_g$.

c) Justifier que pour tout nombre réel x, les points M d'abscisse x de $\mathscr{C}_f$ et N d'abscisse $x - \frac{3\pi}{4}$ de $\mathscr{C}_g$ ont la même ordonnée.

d) En déduire une construction de la courbe $\mathscr{C}_g$ à partir de la courbe $\mathscr{C}_f$.

2. Comment peut-on construire la courbe $\mathscr{C}_h$ à partir de $\mathscr{C}_f$? Justifier.

3. Dans un repère orthogonal, construire les courbes $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ à partir de la courbe $\mathscr{C}_f$ sur $[-\pi ; \pi]$.

76 Déterminer une altitude maximum

Raisonner Calculer

L'altitude, en m, d'une certaine route au-dessus du niveau de la mer peut être modélisée en fonction du nombre x de kilomètres parcourus depuis un point de référence par :

$$A(x) = 500 + \cos\left(\frac{x}{4}\right) + \sqrt{3}\sin\left(\frac{x}{4}\right)$$

Si $x > 0$, cela signifie que l'on est à l'Est du point de référence, sinon cela signifie que l'on est à l'Ouest.

a) À quelle altitude est le point de référence ?

b) On admet que pour tous nombres réels a et b,

$$\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$$

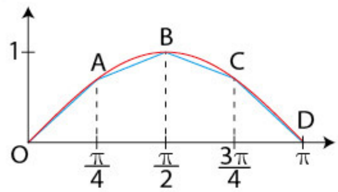
Vérifier que $A(x) = 500 + 2\sin\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{6}\right)$.

c) Une personne part de 25 km à l'Est du point de référence pour aller à 25 km à l'Ouest du point de référence. Combien de fois a-t-elle atteint l'altitude maximum ?

77 Calculer la longueur d'un arc de sinusoïde

Chercher Raisonner

Voici, dans un repère, la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction sinus sur l'intervalle $[0 ; \pi]$.



a) Calculer la longueur de la ligne brisée OABCD. *Arrondir au centième.*

b) Voici une fonction écrite en langage Python qui renvoie une valeur approchée de la longueur de la ligne brisée obtenue lorsqu'on subdivise l'intervalle $[0 ; \pi]$ en n intervalles de même longueur ($n \geqslant 4$).

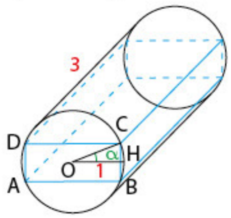
```python
from math import *

def Longueur(n):
    p=pi/n
    L=0
    for k in range(0,n):
        a=k*p
        b=a+p
        L=L+sqrt(p**2+(sin(b)-sin(a))**2)
    return L
```

Déterminer la plus petite valeur de n qui permet d'obtenir deux chiffres significatifs après la virgule de la longueur de l'arc de sinusoïde $\mathscr{C}$.

78 **Déterminer un volume maximum**

Chercher | Raisonner

Un parallélépipède rectangle est inscrit dans un cylindre de rayon 1 et de longueur 3. On note α la mesure, en radian, de l'angle $\widehat{HOC}$ avec $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$.



a) Justifier que le volume du parallélépipède rectangle est $V(\alpha) = 12\cos(\alpha)\sin(\alpha)$.

b) On admet que pour tout nombre réel a :

$$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$$

Déterminer α pour obtenir le volume maximum.

Des Défis

79 **Existence d'un point**

$\mathscr{C}$ est un demi-cercle de diamètre $[AB]$, de centre O et de rayon r.

M est un point de $\mathscr{C}$ $(M \neq A \text{ et } M \neq B)$ et P est le point de la tangente en B au demi-cercle $\mathscr{C}$ tel que (PM) soit perpendiculaire à cette tangente.

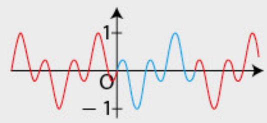
Existe-t-il un point M du demi-cercle $\mathscr{C}$ tel que $AM = 2MP$?

80 **Une curieuse période**

g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \sin(3x)\cos(6x)$$

Voici une partie de sa courbe représentative dans un repère orthogonal.



Combien de motifs bleus y a-t-il sur l'intervalle $[-2\,019 ; 2\,019]$?

OBJECTIF BAC

81 **Distance maximum entre deux courbes** 45 min

D'après Bac 2015, Polynésie

On admet que pour tout nombre réel θ :

$$\cos(\theta) + \sin(\theta) = \sqrt{2}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$$

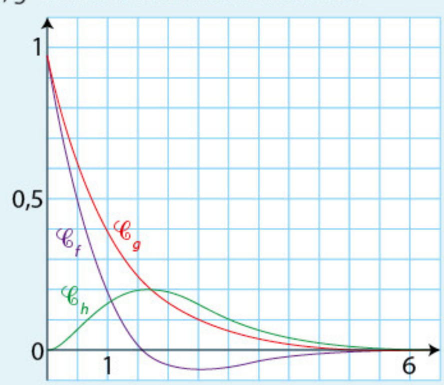
On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = e^{-x}\cos(x) \text{ et } g(x) = e^{-x}$$

On définit la fonction h sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$h(x) = g(x) - f(x)$$

Les courbes représentatives $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ des fonctions f, g et h sont données ci-dessous.



1. Conjecturer :

a) la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à $\mathscr{C}_g$;

b) la valeur de l'abscisse x pour laquelle l'écart entre les deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ est maximum.

2. Justifier que $\mathscr{C}_g$ est au-dessus de $\mathscr{C}_f$ sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

3. On admet que la fonction h est dérivable sur $[0 ; +\infty[$ et que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0 ; +\infty[$:

$$h'(x) = e^{-x}\left[\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1\right]$$

a) Justifier que sur l'intervalle $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$:

$$\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 \geqslant 0$$

et que sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2} ; 2\pi\right]$:

$$\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 \leqslant 0$$

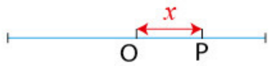
b) En déduire le tableau de variations de h sur l'intervalle $[0 ; 2\pi]$ et la valeur exacte de l'abscisse x pour laquelle l'écart entre les deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ est maximum.

Exploiter ses compétences

82 Calculer l'amplitude d'une oscillation

La situation problème

Un point P oscille sans frottement autour d'un point fixe O en ligne droite.
Utiliser les différentes informations pour déterminer l'amplitude de son mouvement.



DOC 1 Position et vitesse à l'instant t

- La position, en m, du point P est donnée à l'instant t, en s, par $x(t) = C\sin(nt + \alpha)$.
- Sa vitesse (en $m \cdot s^{-1}$) est donnée par :

$$v(t) = nC\cos(nt + \alpha)$$

DOC 2 Information sur les constantes

- $x(t)$ est la position de P par rapport au point O.
- C est l'amplitude du mouvement.
- n est une constante positive.
- α est une constante appelée constante de phase.

DOC 3 Informations concernant le point P

- La période du mouvement est de 16 secondes.
- P a une vitesse de 2π $m \cdot s^{-1}$ à l'instant $t = 4$ s.
- Le point P passe par O au bout de 2 s.

83 Étudier une régulation proie-prédateur

La situation problème

Dans un écosystème, une diminution du nombre de proies entraîne une diminution du nombre de prédateurs. Anna doit expliquer la régulation des populations de lapins et de coyotes dans une réserve que des biologistes ont étudiée.
Utiliser les différentes informations pour aider Anna à réaliser son travail.

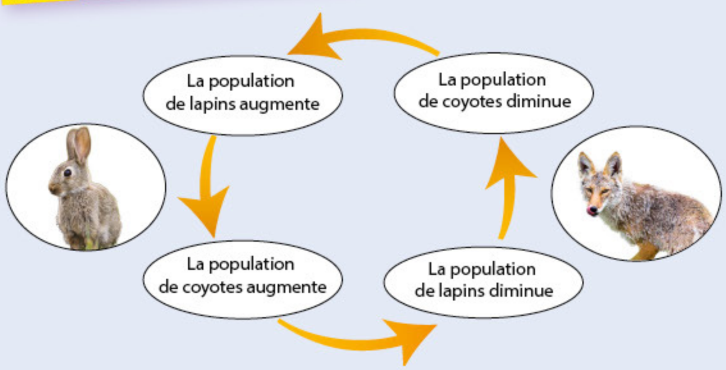
DOC 1 Effectifs

	Lapins	Coyotes
Année 2012	40 000	5 000
Année 2018	25 000	7 000

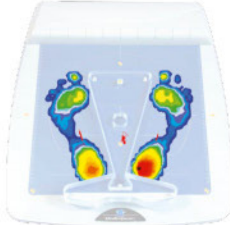
DOC 2 Modélisation

Les biologistes ont modélisé les effectifs des deux populations en fonction du temps t, en année, depuis 2012.
Lapins : $L(t) = a + b\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right)$ Coyotes : $C(t) = c + d\sin\left(\frac{\pi}{12}t\right)$
où a, b, c, d sont des nombres entiers.

DOC 3 Cycle lapins-coyotes



84 Déterminer un polygone de sustentation

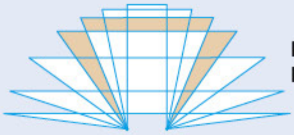


La situation problème

C'est en observant ses pieds que Flavie a constaté que lorsqu'ils ne sont pas parallèles, elle se sent plus stable mais il ne faut pas exagérer leur divergence.
Utiliser les différentes informations pour aider Flavie à comprendre ce phénomène.

DOC 1 Polygone de sustentation

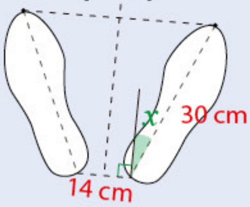
La stabilité d'une personne augmente en fonction de l'augmentation de la surface d'appui.
La plus grande surface d'appui détermine le polygone de sustentation.



Polygones de sustentation selon l'angle d'ouverture des pieds

DOC 2 Information concernant les pieds de Flavie

La mesure x, en radian, de l'angle indiqué sur la figure appartient à l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$.



DOC 3 Aide aux calculs

- 1 Simplifier(Dérivée(30(14+30sin(x))cos(x)))
  → 900 cos(2 x) − 420 sin(x)
- Pour tout nombre réel a :

$$\cos(2a) = -2\sin^2(a) + 1.$$

85 Tice Estimer une température

La situation problème

L'année de ses 16 ans, Alicia a skié à Fairbanks en Alaska au mois de décembre. Elle se souvient qu'il faisait froid.
Utiliser les différentes informations pour aider Alicia à estimer la température de ce mois de décembre.

DOC 1 Relevé de températures

Voici les températures quotidiennes moyennes des 11 premiers mois de l'année des 16 ans d'Alicia.

t (en mois)	T (en °C)
1	−23,4
2	−19,8
3	−11,7
4	−0,8
5	9,2
6	15,4
7	16,9
8	13,8
9	7,5
10	−3,8
11	−16,3

DOC 2 Modéliser et estimer

- On peut modéliser les températures quotidiennes par une fonction du type $t \mapsto a\sin(bt + c) + d$ où a, b, c, d désignent des nombres réels.
- Avec le tableur, on peut déterminer une courbe de tendance et on affiche son équation.
- On l'utilise pour estimer la température cherchée.