3 Divisibilité. Nombres premiers

Avant

▶ Pendant la Seconde Guerre mondiale, les Allemands utilisaient la machine Enigma pour coder leurs messages. En août 1939, les Anglais réunirent 12 000 scientifiques pour casser le code Enigma. L'un d'eux, Alan Turing, est considéré comme l'inventeur de l'informatique moderne.

À présent

▶ De nos jours, les navigateurs Internet utilisent le protocole de sécurité SSL, qui repose sur un procédé de cryptographie par clé publique : le RSA (Rivest - Shamir - Adleman).
Ce procédé demande de choisir deux nombres premiers de grande taille, de façon qu'il soit très difficile de factoriser leur produit.

Les capacités travaillées dans ce chapitre	Exercices
• Comprendre les notions de multiple, diviseur, divisibilité.	1, 3 à 5, 12 à 28
• Utiliser des écritures littérales de nombres.	2, 6, 7, 29 à 40
• Comprendre la notion de nombre premier.	41 à 51, 87 à 93
• Décomposer un nombre en produit de facteurs premiers.	8, 10, 52 à 68
• Présenter les résultats fractionnaires sous forme irréductible.	9, 11, 70 à 78
• Modéliser et résoudre des problèmes.	69, 99, 112, 136, 139

1 La somme des diviseurs d'un nombre

Dans le livre *La Formule préférée du professeur*, la japonaise Yôko Ogawa imagine la rencontre d'un ancien professeur de mathématiques et d'une aide-ménagère. Au dos de la montre du professeur est écrit « Prix du Président de l'Université n° 284 » et la date de naissance de son aide ménagère « 20 février ». Au Japon, pour écrire les dates, on note d'abord le mois puis le jour, donc cette date de naissance correspond au nombre 220.
Le professeur dit : « Vous ne trouvez pas que c'est beau ? »
Les questions suivantes vont permettre de comprendre ce que veut dire le professeur.

1 **a)** Écrire tous les diviseurs de 284.
b) Écrire tous les diviseurs de 220 (il y en a deux fois plus que pour 284).

2 **a)** Calculer la somme de tous les diviseurs de 284, autres que 284 lui-même.
b) Calculer la somme de tous les diviseurs de 220, autres que 220 lui-même.
c) Décrire par une phrase ce que l'on remarque.

En mathématiques, on dit que 284 et 220 sont des **nombres amicaux**. Aujourd'hui, les ordinateurs ont permis de découvrir plus de 2 000 000 de paires de nombres amicaux, mais les mathématiciens ne savent toujours pas s'il en existe une infinité de paires.

2 Nombres premiers et fractions irréductibles

1 **a)** Un nombre entier naturel est dit **premier** lorsqu'il admet exactement deux diviseurs. Rappeler lesquels.
b) Écrire la liste des nombres premiers inférieurs à 20.

2 Dans le parc de Marquenterre en Baie de Somme, des ornithologues ont organisé un comptage des oiseaux.
Ce jour-là, ils ont observé 442 oiseaux au total dont 117 aigrettes garzettes.
a) Exprimer la proportion p d'aigrettes parmi les oiseaux observés sous forme fractionnaire.
b) Sans effectuer de division, expliquer pourquoi le nombre 117 est divisible par 9.
En déduire l'écriture de 117 sous forme d'un produit de nombres premiers.
c) Poser la division de 442 par 13.
En déduire l'écriture de 442 sous forme d'un produit de nombres premiers.
d) Exprimer la proportion p de la question **a)** sous forme de fraction irréductible.

Cours

1 Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

A Multiples, diviseurs d'un nombre

Définition

a désigne un nombre de $\mathbb{Z}$ et b un nombre de $\mathbb{N}$ avec $b \neq 0$.
Dire que a est **un multiple** de b signifie qu'il existe un nombre k de $\mathbb{Z}$ tel que $\boldsymbol{a = k \times b}$.
On dit aussi que b est **un diviseur** de a ou que a est **divisible** par b.

Exemples

- 0 est multiple de tout nombre b de $\mathbb{N}$ $(0 = 0 \times b)$ et tout nombre a de $\mathbb{Z}$ est multiple de 1 $(a = a \times 1)$.
- -8 est un multiple de 4. En effet, $-8 = -2 \times 4$. Ainsi, -8 est divisible par 4 ou 4 est un diviseur de -8.
- -5 n'est pas un multiple de 2. En effet, $-5 = -2{,}5 \times 2$ mais $-2{,}5 \notin \mathbb{Z}$.

Propriété

b désigne un nombre de $\mathbb{N}$.
La **somme** de deux multiples du nombre b est un multiple de b.

Démonstration

On note a et a' deux multiples de b. Il existe donc des nombres k et k' de $\mathbb{Z}$ tels que $a = k \times b$ et $a' = k' \times b$. Alors $a + a' = k \times b + k' \times b = (k + k') \times b$.
Or, la somme de deux nombres entiers relatifs est un nombre entier relatif, donc $k + k' \in \mathbb{Z}$ et $a + a'$ est aussi un multiple de b.

B Nombres pairs, nombres impairs

Les nombres **pairs** sont les nombres n de $\mathbb{Z}$ qui peuvent s'écrire $\boldsymbol{n = 2k}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
Les nombres **impairs** sont les nombres n de $\mathbb{Z}$ qui peuvent s'écrire $\boldsymbol{n = 2k + 1}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Propriétés

(1) Le carré d'un nombre **pair** est un nombre **pair**.
(2) Le carré d'un nombre **impair** est un nombre **impair**.

Démonstrations

(1) n est un nombre pair, il s'écrit $n = 2k$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Alors $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2) = 2\text{K}$ avec $\text{K} = 2k^2$. Or, $\text{K} \in \mathbb{Z}$, donc n^2 est un nombre pair.
(2) n est un nombre impair, il s'écrit $n = 2k + 1$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Alors $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$ donc $n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2\text{K} + 1$ avec $\text{K} = 2k^2 + 2k$. Or, $\text{K} \in \mathbb{Z}$ donc n^2 est un nombre impair.

C Critères de divisibilité

Propriétés (rappels)

Un nombre entier relatif est divisible :
- par 2 lorsque son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8 ;
- par 5 lorsque son chiffre des unités est 0 ou 5 ;
- par 3 lorsque la somme de ses chiffres est divisible par 3 ;
- par 9 lorsque la somme de ses chiffres est divisible par 9.

2 Fractions irréductibles

A Nombres premiers dans $\mathbb{N}$

Définition

Un nombre **premier** est un nombre entier naturel qui a exactement deux diviseurs, 1 et lui-même.

Liste des nombres premiers inférieurs à 65

2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 53 59 61

Exemples

- 1 n'est pas un nombre premier car il n'a qu'un seul diviseur, 1.
- 0 n'est pas un nombre premier car il est divisible par n'importe quel nombre entier non nul.
- 8 n'est pas un nombre premier car il a quatre diviseurs : 1, 2, 4, 8.

B Décomposition en produit de facteurs premiers

Propriété (admise)

Tout nombre entier naturel supérieur ou égal à 2 se **décompose en produit de facteurs premiers** et cette décomposition est **unique** (à l'ordre près des facteurs).

Exemple

Comment décomposer 84 en produit de facteurs premiers ?

1^re^ méthode : on cherche ses diviseurs premiers dans l'ordre croissant.

- 84 est divisible par 2 : $84 = \mathbf{2} \times 42$
- 42 est divisible par 2 : $84 = \mathbf{2} \times \mathbf{2} \times 21$
- 21 est divisible par 3 : $84 = \mathbf{2} \times \mathbf{2} \times \mathbf{3} \times \mathbf{7}$
- 7 est un nombre premier, donc la décomposition cherchée est $84 = \mathbf{2^2} \times \mathbf{3} \times \mathbf{7}$.

84	2
42	2
21	3
7	7
1	

2^e^ méthode : on écrit d'abord un produit égal à 84.

$84 = 4 \times 21$ donc $84 = 2 \times 2 \times 3 \times 7$. Les facteurs sont bien premiers donc $84 = \mathbf{2^2} \times \mathbf{3} \times \mathbf{7}$.

C Fraction irréductible

Définition

Une fraction est dite **irréductible** lorsque son numérateur et son dénominateur n'ont pas de diviseur commun autre que 1.

Exemple

Comment rendre irréductible la fraction $\frac{84}{30}$?

1^re^ méthode : avec des décompositions en produits de facteurs premiers.

$$\frac{84}{30} = \frac{2^2 \times 3 \times 7}{2 \times 3 \times 5} = \frac{2 \times \mathbf{2} \times \mathbf{3} \times 7}{\mathbf{2} \times \mathbf{3} \times 5} = \frac{2 \times 7}{5} = \frac{14}{5}$$

2^e^ méthode : avec les critères de divisibilité.

$$\frac{84}{30} = \frac{\mathbf{2} \times 42}{\mathbf{2} \times 15} = \frac{42}{15} = \frac{\mathbf{3} \times 14}{\mathbf{3} \times 5} = \frac{14}{5}$$

Acquérir des automatismes

EXERCICES RÉSOLUS

1 Écrire la liste des diviseurs d'un nombre

→ Cours 1. A

Écrire la liste des diviseurs positifs du nombre 48.

Solution

48 est divisible par 1 : $48 = 1 \times 48$
48 est divisible par 2 : $48 = 2 \times 24$
48 est divisible par 3 : $48 = 3 \times 16$
48 est divisible par 4 : $48 = 4 \times 12$
48 n'est pas divisible par 5.
48 est divisible par 6 : $48 = 6 \times 8$
48 n'est pas divisible par 7.
Les diviseurs de 48 sont : **1**, **2**, **3**, **4**, **6**, **8**, **12**, **16**, **24**, **48**.

On obtient la liste des diviseurs d'un nombre en le divisant par les nombres entiers dans l'ordre croissant.

On s'arrête ici à la division par 7 parce qu'on sait que 8 est un diviseur.

2 Exprimer des nombres avec des lettres

→ Cours 1. B

n désigne un nombre de $\mathbb{Z}$.
On considère le nombre A tel que $A = 2n^2 + 3n - 1$.
Quelle est la parité du nombre A lorsque :
a) n est pair ?
b) n est impair ?

Solution

a) n est pair donc il existe un nombre k de $\mathbb{Z}$ tel que $n = 2k$.
Alors $A = 2(2k)^2 + 3(2k) - 1 = 2(4k^2) + 2(3k) - 1 = 2(4k^2 + 3k) - 1$.
Ainsi $A = 2K - 1$ avec $K = 4k^2 + 3k$.
Or, $K \in \mathbb{Z}$, donc A est un nombre impair.
b) n est impair donc il existe un nombre $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k + 1$.
Alors $A = 2(2k+1)^2 + 3(2k+1) - 1$
$A = 2(2k+1)^2 + 6k + 2 = 2[(2k+1)^2 + 3k + 1]$
Ainsi $A = 2K$ avec $K = (2k+1)^2 + 3k + 1$.
Or, $K \in \mathbb{Z}$, donc A est un nombre pair.

Un nombre impair peut aussi s'écrire $2k - 1$ (avec $k \in \mathbb{Z}$). En effet, il précède le nombre pair $2k$.

On peut noter qu'il n'a même pas été utile de développer $(2k+1)^2$.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 1

3 Écrire la liste des diviseurs du nombre 315.

4 Naomi affirme : « Le nombre 24 admet 8 diviseurs. »
Que peut-on en penser ?

5 Tom affirme : « Le nombre 18 a plus de diviseurs que le nombre 12. »
A-t-il raison ?

Sur le modèle de l'exercice résolu 2

6 n désigne un nombre de $\mathbb{Z}$.
On considère le nombre B tel que $B = n(2n - 3)$.
Quelle est la parité du nombre B lorsque :
a) n est pair ? **b)** n est impair ?

7 p désigne un nombre de $\mathbb{Z}$ et on considère le nombre C tel que $C = p^2 - 1$.
Quelle est la parité du nombre C lorsque :
a) p est pair ? **b)** p est impair ?

EXERCICES RÉSOLUS

8 Décomposer en produit de facteurs premiers

→ Cours 2. B

Dans chaque cas, décomposer le nombre en produit de facteurs premiers.

a) $A = 27 \times 24$ **b)** $B = 28^2$

Solution

a) $27 = 3 \times 9 = 3 \times 3^2 = 3^3$

$24 = 8 \times 3 = 2 \times 4 \times 3 = 2 \times 2^2 \times 3 = 2^3 \times 3$

Donc $27 \times 24 = 3^3 \times 2^3 \times 3$ et la décomposition en produit de facteurs premiers de A est $A = 2^3 \times 3^4$.

b) $28 = 4 \times 7 = 2^2 \times 7$. Donc $28^2 = (2^2 \times 7)^2 = (2^2)^2 \times 7^2$.

La décomposition en produit de facteurs premiers de B est $B = 2^4 \times 7^2$.

> Noter que l'on n'effectue pas 27×24 et 28^2 avant de décomposer.
> En fait, on décompose chaque facteur du produit.

9 Rendre irréductible une fraction

→ Cours 2. C

M est le nombre $\dfrac{45\,738}{6\,160}$.

a) Simplifier M et présenter le résultat avec une fraction irréductible.

b) Quelle est la nature de ce nombre M ?

Solution

a) On décompose 45 738 et 6 160 en produits de facteurs premiers.

45 738	2
22 869	3
7 623	3
2 541	3
847	7
121	11
11	11
1	

6 160	2
3 080	2
1 540	2
770	2
385	5
77	7
11	11
1	

> On divise successivement par les nombres premiers dans l'ordre croissant.
> On peut utiliser la calculatrice pour déterminer les quotients.

$45\,738 = 2 \times 3^3 \times 7 \times 11^2$ $\quad 6\,160 = 2^4 \times 5 \times 7 \times 11$

$$M = \frac{45\,738}{6\,160} = \frac{2 \times 3^3 \times 7 \times 11^2}{2^4 \times 5 \times 7 \times 11} = \frac{3^3 \times 11}{2^3 \times 5} = \frac{297}{40}$$

b) La décomposition en produit de facteurs premiers du dénominateur ne contient que des puissances de 2 et de 5, donc M est un nombre décimal $(M = 7{,}425)$.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 8

10 Dans chaque cas, décomposer le nombre en produit de facteurs premiers.

a) $A = 63 \times 23$ **b)** $B = 21^2 \times 35^4$

Sur le modèle de l'exercice résolu 9

11 M est le nombre $\dfrac{5\,096}{4\,004}$.
Simplifier M et présenter le résultat avec une fraction irréductible. Quelle est la nature de M ?

Multiples, diviseurs, critères de divisibilité

→ Cours 1. A et C

Questions flash

12 Citer un multiple de 7 compris entre 75 et 80.

13 Loris affirme : « -121 est un multiple de 11. » A-t-il raison ?

14 Laquelle de ces affirmations est exacte ?
(1) 81 est un diviseur de 3.
(2) 185 est divisible par 5.
(3) 253 est un multiple de 3.

15 Compléter oralement chaque phrase par « un diviseur de » ou « divisible par ».
a) -28 est … 4.
b) 9 est … 72.
c) 3 561 est … 3 car la somme de ses chiffres est … 3.
d) 0 est … tout nombre entier non nul.
e) 1 est … tous les nombres entiers.

16 Citer un nombre compris entre 100 et 160 qui est à la fois divisible par :
a) 10 et 3 **b)** 3 et 5 **c)** 2 et 9

17 Déterminer mentalement un diviseur commun, autre que 1, aux deux nombres donnés.
a) 18 et 63 **b)** 45 et 90 **c)** 110 et 77

18 Recopier et compléter chaque phrase.
a) $144 = 24 \times 6$ donc 24 est un … de 144.
b) $\frac{84}{7} = 12$ donc 84 est … par 7 et par ….
c) $295 = 59 \times 5$ donc 295 est un … de 59 et de ….

19 Traduire chaque affirmation par une égalité.
a) -132 est un multiple de 11.
b) 18 divise -270.
c) 32 058 est divisible par 9.
d) 29 est un diviseur de 406.

20 On sait que $216 = 24 \times 9$. Sans calcul, expliquer pourquoi 216 est un multiple de :
a) 2 **b)** 8 **c)** 18 **d)** 27 **e)** 72

21 **a)** Le nombre 56 est-il un diviseur commun à 280 et 448 ?
b) Le nombre 37 est-il un diviseur commun à 518 et 714 ?

22 Jade a un ticket gagnant d'une tombola.
Elle dit : « C'est le ticket ci-dessous qui porte un numéro multiple à la fois de 15 et de 19. »
Quel est le ticket de Jade ?

5 095 4 245 4 845 5 035

23 Quel est le plus petit nombre entier naturel non nul qui est à la fois divisible :
a) par 2 et par 9 ? **b)** par 4 et par 8 ?
c) par 6 et par 9 ? **d)** par 12 et par 16 ?

24 Parmi les nombres ci-dessous, quel est celui qui a le plus grand nombre de diviseurs ?

24 35 42 58 60 85

25 **a)** Écrire la liste de tous les multiples de 15 inférieurs à 200.
b) Écrire la liste de tous les multiples de 24 inférieurs à 200.
c) Quel est le plus petit multiple commun à 15 et 24 ?

26 **a)** Écrire la liste des diviseurs positifs de 72.
b) Écrire la liste des diviseurs positifs de 84.
c) Quel est le plus grand diviseur commun à 72 et 84 ?

27 **a)** Écrire la liste des diviseurs positifs de 135.
b) Écrire la liste des diviseurs positifs de 75.
c) En déduire la liste des diviseurs positifs communs à 75 et 135.

28 **Algo** a et b désignent deux nombres entiers naturels avec $b \neq 0$.
Voici un algorithme où $\mathrm{E}(m)$ renvoie la partie entière d'un nombre m.

```
q = E(a/b)
r = a − b * q
Si r = 0 alors
  | Afficher "a est un [        ] de b"
  | sinon
  | Afficher "[                ]"
Fin Si
```

a) Que représentent les variables q et r pour les nombres a et b ?
b) Recopier et compléter cet algorithme.
c) En langage Python, l'opérateur a%b renvoie le reste dans la division euclidienne de a par b.
Coder l'algorithme en langage Python, le saisir et le tester.

Nombres en écriture littérale

→ Cours 1. B

Questions flash

29 n désigne un nombre de $\mathbb{Z}$.
Lesquelles de ces écritures désignent un nombre pair ?
(1) $2n$ **(2)** $4n$ **(3)** $2n+3$ **(4)** $2n-2$

30 n désigne un nombre de $\mathbb{Z}$.
Lesquelles de ces écritures désignent un nombre impair ?
(1) $2n+1$ **(2)** $2n-1$ **(3)** $4n+3$ **(4)** $2n+4$

31 Voici des nombres, où k désigne un nombre de $\mathbb{Z}$.

$5(2k)$ $5k$ $5k-1$ $5k+1$

1. Parmi ces nombres, lequel désigne :
a) un multiple quelconque de 5 ?
b) le suivant d'un multiple de 5 ?
c) un multiple pair de 5 ?
2. Décrire oralement le nombre non utilisé.

32 Sam affirme : « La somme de trois nombres entiers consécutifs est toujours paire. »
Que peut-on en penser ?

33 a désigne un nombre de $\mathbb{Z}$.
Démontrer que :
a) la différence de deux multiples quelconques de a est un multiple de a ;
b) le produit de deux multiples quelconques de a est un multiple de a.

34 Mariam affirme : « Le quotient de deux multiples non nuls d'un même nombre est un multiple de ce nombre. »
Que peut-on en penser ?

35 n désigne un nombre de $\mathbb{Z}$.
a) Écrire alors le nombre précédent et celui suivant n.
b) Additionner ces trois nombres. De quel nombre la somme est-elle un multiple ?
c) Énoncer une propriété traduisant ce résultat.

36 n désigne un nombre de $\mathbb{Z}$.
a) Additionner n, les deux nombres qui précèdent n et les deux nombres qui le suivent.
b) De quel nombre cette somme est-elle un multiple ?

37 **a)** Donner des expressions de deux nombres pairs.
b) Multiplier ces deux nombres.
Quelle est la parité de ce produit ?
c) Énoncer une propriété traduisant ce résultat.

38 Démontrer que le produit de deux nombres impairs est un nombre impair.

39 n désigne un nombre de $\mathbb{Z}$.
Étudier la parité du nombre n^3.
On peut utiliser les propriétés énoncées au paragraphe 1. B *du cours.*

40 k désigne un nombre de $\mathbb{Z}$.
a) $2k+1$ est un nombre impair.
Exprimer en fonction de k le nombre impair qui suit $2k+1$.
b) Additionner ces deux nombres impairs.
De quel nombre la somme est-elle un multiple ?
c) Énoncer une propriété traduisant ce résultat.

Nombres premiers

→ Cours 2. A

Questions flash

41 Expliquer oralement pourquoi aucun de ces nombres n'est premier.
a) 39 **b)** 72 **c)** 145 **d)** 153

42 Claire affirme : « La somme de deux nombres premiers peut être un nombre premier. »
Que peut-on en penser ?

43 Luka affirme : « La somme de deux nombres impairs quelconques est un nombre premier. »
Que peut-on en penser ?

44 Laquelle de ces affirmations est exacte ?
(1) Tous les nombres premiers sont impairs.
(2) Le nombre premier le plus proche de 20 est 21.
(3) Il existe deux nombres premiers dont la somme est 30.

45 Dans chaque cas, dire si le nombre est premier.
a) 13 **b)** 24 **c)** 29 **d)** 92 **e)** 53

46 Dans chaque cas, dire si le nombre est premier.
a) 77 **b)** 31 **c)** 1 384 945 **d)** 41

47 Expliquer pourquoi chacun de ces nombres n'est pas premier.

a) $2 \times 9 \times 5 + 3$ **b)** $36 \times 5 \times 7 + 27$

48 **a)** Vérifier que chacun des nombres premiers autres que 2 de la liste donnée au paragraphe **2. A** du cours peut s'écrire $4n + 1$ ou $4n - 1$ (avec $n \in \mathbb{N}$).

b) Romain affirme : « Pour obtenir un nombre premier, il suffit de remplacer n par une valeur dans $4n + 1$ ou $4n - 1$. »

Expliquer à Romain pourquoi il se trompe.

49 Tice n désigne un nombre de $\mathbb{N}$, avec $n \geqslant 1$.

Mélanie affirme : « Les nombres de la forme $6n + 1$ sont des nombres premiers. »

Utiliser le tableur pour dire si Mélanie a raison ou non.

50 Priscilla affirme : « La somme de trois nombres impairs consécutifs n'est jamais un nombre premier. » Que peut-on en penser ?

51 Histoire des maths Algo **a)** Écrire les nombres entiers de 1 à 200 dans un tableau tel que celui commencé ci-dessous.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

b) Voici un algorithme.

> **1.** Barrer 1.
> **2.** Entourer 2 et barrer les multiples de 2.
> **3.** Entourer le plus petit des nombres non barrés et barrer tous ses multiples.
> **4.** Recommencer l'étape **3** jusqu'à ce que le plus petit nombre non barré soit supérieur à $\sqrt{200}$.

Exécuter cet algorithme. Les nombres non barrés sont les nombres premiers inférieurs à 200.

Ce procédé est appelé **crible d'Ératosthène** (3e siècle av. J.-C.) du nom d'un mathématicien grec. Ératosthène a été directeur de la fameuse bibliothèque d'Alexandrie.

c) Deux nombres premiers sont dits jumeaux lorsque leur différence est égale à 2. Quels sont les nombres premiers jumeaux inférieurs à 200 ?

À ce jour, on ne sait pas s'il y a une infinité de nombres premiers jumeaux.

Décomposition en produit de facteurs premiers

→ Cours 2. B

Questions flash

52 Lilian affirme : « La décomposition en produit de facteurs premiers de 1 024 est $2^6 \times 64$. » A-t-il raison ?

53 On sait que $132 = 12 \times 11$.

Donner oralement la décomposition en produit de facteurs premiers de 132.

54 Décomposer mentalement chaque nombre en produit de facteurs premiers.

a) 15 **b)** 8 **c)** 18 **d)** 25 **e)** 36

55 Laquelle de ces affirmations est fausse ?

La décomposition en produit de facteurs premiers :

(1) de 150 est $2 \times 3 \times 5^2$.

(2) de 1 455 est $2 \times 5 \times 97$.

(3) de 584 est $2^3 \times 73$.

56 Océane a écrit $224 = 7 \times 8 \times 4$ et il n'y a pas d'erreur.

Utiliser cette écriture pour obtenir la décomposition en produit de facteurs premiers de 224.

57 Décomposer chaque nombre en produit de facteurs premiers.

a) 54 **b)** 82 **c)** 72 **d)** 120 **e)** 48

58 Décomposer chaque nombre en produit de facteurs premiers.

a) 56 **b)** 93 **c)** 121 **d)** 256 **e)** 400

59 Décomposer chaque nombre en produit de facteurs premiers.

a) 660 **b)** 475 **c)** 1 000 **d)** 260 **e)** 5 967

60 Décomposer chaque nombre en produit de facteurs premiers.

a) 10^2 **b)** 10^3 **c)** 10^4 **d)** 10^7

61 Dans chaque cas, décomposer le nombre en produit de facteurs premiers.

a) 81×12 **b)** 38×14

c) 72×15 **d)** 64×56

e) $2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10$

62 Sachant que $792 = 2^3 \times 3^2 \times 11$, en déduire la décomposition en produit de facteurs premiers de 792^5.

63 Décomposer chaque nombre en produit de facteurs premiers.

a) $36^3 \times 38^2$ **b)** $(2 \times 15 \times 7^2)^2$ **c)** $(25 \times 24)^4$

64 Un seul nombre premier est un diviseur communs aux nombres 1 400 et 1 323.
Utiliser des décompositions en produits de facteurs premiers pour trouver ce nombre premier.

65 Rachid affirme : « 3 136 est le carré d'un nombre entier. »
a) Utiliser une décomposition en produit de facteurs premiers pour savoir si Rachid a raison.
b) Quel autre procédé aurait-on pu utiliser pour savoir si Rachid a raison ?

66 **a)** Décomposer 1728 en produit de facteurs premiers.
b) 1 728 est le cube d'un nombre. Lequel ?

67 **a)** Décomposer 252 en produit de facteurs premiers.
b) En déduire l'écriture de $\sqrt{252}$ sous la forme $a\sqrt{7}$ avec a nombre entier naturel.

68 Utiliser une décomposition en produit de facteurs premiers pour écrire chaque nombre sous la forme $a\sqrt{b}$ avec a et b deux nombres entiers naturels et b le plus petit possible.

a) $\sqrt{756}$ **b)** $\sqrt{5\,850}$

69 Inès est la costumière d'une troupe de spectacles. Elle dispose d'un nombre premier de chapeaux, d'un nombre premier de vestes, d'un nombre premier de pantalons et d'un nombre premier de chaussures.
Le plus grand de ces nombres est celui des chaussures.

Sachant qu'Inès pourrait ainsi former 1 482 costumes, quel est le nombre de chaussures à sa disposition ?

Présentation d'un résultat avec une fraction irréductible

→ Cours 2. C

70 Timéo affirme : « La fraction $\dfrac{228}{144}$ est irréductible. »
Que peut-on en penser ?

71 On donne $147 = 3 \times 7^2$ et $105 = 3 \times 5 \times 7$.
Expliquer oralement si la fraction $\dfrac{105}{147}$ est irréductible ou non.

72 $A = \dfrac{12}{5} - \dfrac{3}{5} \times \dfrac{7}{9}$

Calculer A et donner la réponse sous forme d'une fraction irréductible. Quelle est la nature du nombre A ?

73 $B = \dfrac{117}{63}$

Utiliser les critères de divisibilité pour rendre irréductible cette fraction. Quelle est la nature du nombre B ?

74 Réduire au même dénominateur puis calculer et présenter sous forme de fraction irréductible.

a) $\dfrac{3}{16} + \dfrac{7}{12}$ **b)** $\dfrac{4}{19} - \dfrac{7}{20}$ **c)** $\dfrac{3}{10} + \dfrac{11}{4}$

75 Rendre irréductible chaque fraction.

$C = \dfrac{2^3 \times 5 \times 11}{2 \times 3 \times 5^2}$ $D = \dfrac{2^2 \times 3^4 \times 5^2 \times 7}{2^4 \times 3^2 \times 5^2 \times 7^2}$

76 Utiliser des décompositions en produits de facteurs premiers pour rendre irréductible chaque fraction.

a) $\dfrac{224}{280}$ **b)** $\dfrac{420}{882}$ **c)** $\dfrac{8\,800}{3\,775}$ **d)** $\dfrac{1\,056}{1\,596}$

77 $a = \dfrac{1}{420}$ et $b = \dfrac{1}{294}$

a) Décomposer 420 et 294 en produits de facteurs premiers. En déduire un dénominateur commun aux fractions a et b.
b) Calculer $a - b$ et donner la réponse sous forme irréductible.

78 Un sac contient 186 jetons noirs et 264 jetons blancs.
Exprimer la proportion de jetons blancs dans le sac sous forme d'une fraction irréductible.

QCM interactifs

Pour se tester

79 Dans chaque cas, donner la réponse exacte sans justifier.

		A	B	C	D
1	1 214 est un multiple de …	39	87	139	607
2	Un diviseur commun à 69 et 161 est …	483	92	23	13
3	Un nombre divisible à la fois par 2 et par 3 est …	2 358	405	1 563	297
4	La somme d'un multiple de 3 et d'un multiple de 6 est toujours un multiple de …	18	6	3	12
5	Un nombre premier est …	1	2	27	95
6	La décomposition en produit de facteurs premiers de 24×90 est …	$2^3 \times 3^2 \times 5$	$16 \times 27 \times 5$	$2^4 \times 3^3 \times 5$	$2^5 \times 3^5 \times 5$

80 Dans chaque cas, donner la (ou les) réponse(s) exacte(s) sans justifier.

		A	B	C	D
1	La somme de quatre nombres impairs consécutifs …	est un nombre pair	est un nombre impair	n'a pas toujours la même parité	est un multiple de 8
2	Une fraction irréductible est …	$\frac{37}{25}$	$\frac{224}{620}$	$\frac{783}{546}$	$\frac{60}{187}$
3	Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, le nombre $n(n+1)$ est …	un nombre pair	un nombre impair	un nombre premier	égal à $(n+1)^2-(n+1)$
4	$\frac{6}{5}\times\frac{3}{7}-\frac{4}{3}\times\frac{3}{20}$ est égal à …	$\frac{17}{30}$	$\frac{11}{35}$	$\frac{44}{140}$	$\frac{132}{420}$
5	$n = 2^4 \times 3^6 \times 5^2$. Alors …	n est un carré parfait	n est un cube parfait	$\sqrt{n}$ est un nombre entier	n est un multiple de 30

81 Dans chaque cas, dire si l'affirmation est vraie ou fausse en justifiant.

1. **Affirmation :** le carré de 132 a pour décomposition en produit de facteurs premiers $2^4 \times 3^2 \times 11^2$.

2. $A = 2^2 \times 3^2 \times 7$

Affirmation : le nombre A admet 15 diviseurs.

3. $A = 3^2 \times 5^3$ et $B = 3^3 \times 5^2$

Affirmation : le nombre $3^3 \times 5^3 \times 11$ est un multiple commun à A et B.

4. $A = \frac{6\,125}{1925}$

Affirmation : A est un nombre décimal.

Vérifiez vos réponses : p. 346

Nathan live!

82 Écrire la liste des diviseurs d'un nombre

Jamel a commencé à écrire la liste des diviseurs positifs de 180. Recopier et compléter cette liste.

1		3	4					12								90	

AIDE

On écrit les diviseurs deux par deux. Par exemple, $180 = 1 \times 180$, donc on écrit 1 à gauche et 180 à droite. On recommence avec $180 = 2 \times 90$, …

83 Reconnaître un multiple d'un nombre

Dans chaque cas, recopier ceux des nombres proposés qui sont :

a) des multiples de 16 : 0 30 61 192 207 224 400 500

b) des multiples de 25 : 5 25 65 75 200 325 420 500

AIDE

Les multiples d'un nombre n sont tous les nombres obtenus en multipliant n par un nombre entier : $0 \times n ; 1 \times n ; 2 \times n ; 3 \times n ; \ldots$

84 Connaître les critères de divisibilité

Recopier et compléter chaque case de ce tableau par OUI ou NON.

AIDE

On calcule la somme des chiffres pour savoir si un nombre est divisible par 3 ou 9.

Nombre	Divisible par 2	Divisible par 3	Divisible par 5	Divisible par 9
37 245				
5 520				
7 631				
11 628				

85 Décomposer en produit de facteurs premiers

a) Écrire la liste des nombres premiers inférieurs à 15.

b) Léa a écrit : $12 = 4 \times 3 = 2 \times 2 \times 3$. Compléter la décomposition en facteurs premiers : $12 = \ldots^{\ldots} \times \ldots$

c) Utiliser l'égalité $48 = 8 \times 6$ pour décomposer 48 en produit de facteurs premiers.

d) Compléter la disposition ci-contre et écrire la décomposition en produit de facteurs premiers de 168.

168	2
…	…
…	…
21	…
…	…
1	

AIDE

Pour décomposer un nombre en produit de facteurs premiers, on essaie de le diviser par les nombres premiers successifs 2, 3, 5, ... jusqu'à aboutir à un diviseur.

86 Rendre une fraction irréductible

Utiliser les décompositions de 168 et 48 obtenues à l'exercice 85 pour rendre irréductible la fraction $\frac{168}{48}$.

AIDE

Pour simplifier cette fraction, on sera conduit à utiliser la propriété $\frac{2^n}{2^p} = \frac{1}{2^{p-n}}$.

EXERCICE RÉSOLU

87 Reconnaître un nombre premier

Ce programme, écrit en langage Python, définit une fonction `Premier`.

a) Exécuter pas à pas ce programme pour la valeur $n = 7$ du paramètre.

b) Quel est le rôle de la variable d ? Quelles valeurs prend la variable drap ?

c) Quel est le rôle de cette fonction ?

Saisir et tester ce programme pour $n = 12$.

d) Pour chaque nombre, dire s'il est premier ou non :

• 317 • 1 001 • 2 309 • 4 003 • 12 321

```python
def Premier(n):
    drap=0
    d=2
    while drap==0 and d<n:
        if n%d==0:
            drap=1
        d=d+1
    if drap==0:
        C="Ce nombre est premier"
    else:
        C="Ce nombre n'est pas premier"
    return C
```

Solution

a) On complète le tableau ci-contre de suivi des variables.

d < n		Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Faux
n%d		1	1	3	2	1	
drap	0	0	0	0	0	0	
d	2	3	4	5	6	7	

À la fin de la boucle, drap est égal à 0, donc la fonction renvoie `'Ce nombre est premier'`.

b) La variable d prend pour valeurs les nombres entiers naturels successifs à partir de 2.

La variable drap prend la valeur 1 si d divise n et 0 sinon.

Pour $n = 12$, on sort de la boucle au 1er passage car 2 divise 12.

c) Cette fonction permet de savoir si le nombre n est premier ou non. En saisissant Premier(12) dans la console, on obtient `"Ce nombre n'est pas premier"`.

d) Voici les affichages obtenus.

```
>>> Premier(317)
'Ce nombre est premier'
```

```
>>> Premier(1001)
"Ce nombre n'est pas premier"
```

```
>>> Premier(2309)
'Ce nombre est premier'
```

```
>>> Premier(4003)
'Ce nombre est premier'
```

```
>>> Premier(12321)
"Ce nombre n'est pas premier"
```

À VOTRE TOUR

88 Ce programme permet lui aussi de reconnaître si un nombre est premier ou non.

```python
def Premier(n):
    drap=0
    d=2
    while d<n:
        if n%d==0:
            drap=1
            print("d =",d)
        d=d+1
    if drap==0:
        C="Ce nombre est premier"
    else:
        C="Ce nombre n'est pas premier"
    return C
```

Que fait-il en plus du programme de l'exercice 87 ?

Le saisir et le tester avec $n = 1001$.

89 On reprend le programme de l'exercice 87 et on ajoute les lignes suivantes.

```python
n=int(input("n ="))
for i in range(2,n+1):
    print("i =", i,Premier(i))
```

a) Saisir le programme complet.

b) Tester ce programme en saisissant $n = 100$ en entrée.

Qu'affiche ce programme ?

c) Afficher la liste des nombres premiers inférieurs à 200.

d) Des nombres premiers sont dits jumeaux lorsque leur différence est égale à 2.

Écrire les paires de nombres jumeaux inférieurs à 1 000.

EXERCICE RÉSOLU

90 Utiliser un logiciel de calcul formel

Voici un écran obtenu avec un logiciel de calcul formel.

a) Que suggèrent les résultats obtenus aux lignes 1 et 2 ?

b) Quel semble être le rôle de l'instruction saisie à la ligne 3 ?

c) Présenter les résultats obtenus aux lignes 3 et 4 sous la forme habituelle.

d) Que peut-on dire de la fraction $\frac{9\,884}{5\,415}$?

e) Écrire la décomposition en produit de facteurs premiers du nombre $9884^2 \times 5415$.

1	EstPremier(353) → **true**
2	EstPremier(9884) → **false**
3	FacteursPremiers(9884) → $\{2, 2, 7, 353\}$
4	FacteursPremiers(5415) → $\{3, 5, 19, 19\}$

Solution

a) La commande EstPremier affiche « true » (vrai) ou « false » (faux) selon que le nombre est premier ou non.
On lit que 353 est un nombre premier mais que 9 884 n'est pas un nombre premier.

b) La commande FacteursPremiers(9884) affiche la liste des nombres premiers dont le produit est égal au nombre 9 884.

c) Les lignes 3 et 4 donnent donc les facteurs premiers qui figurent dans la décomposition du nombre. Ainsi :

$$9\,884 = 2^2 \times 7 \times 353 \quad \text{et} \quad 5\,415 = 3 \times 5 \times 19^2$$

d) D'après les décompositions en produit de facteurs premiers obtenues à la question **c)**, on sait que 9 884 et 5 415 n'ont pas de diviseurs premiers en commun.
La fraction $\frac{9\,884}{5\,415}$ est donc irréductible.

e) $9884^2 = (2^2 \times 7 \times 353)^2 = 2^4 \times 7^2 \times 353^2$
Donc la décomposition en produit de facteurs premiers de $9884^2 \times 5415$ est :

$$2^4 \times 3 \times 5 \times 7^2 \times 19^2 \times 353^2$$

On dispose donc de deux outils qui permettent de reconnaître rapidement un nombre premier : un logiciel de calcul formel et la fonction écrite en langage Python définie à l'exercice 87.

À VOTRE TOUR

91 Utiliser un logiciel de calcul formel pour reconnaître parmi ces nombres ceux qui sont premiers.
- 11 587
- 10 331
- 16 661
- 35 097

92 **a)** Utiliser un logiciel de calcul formel pour décomposer chaque nombre en produit de facteurs premiers.
- 2 730
- 5 236
- 10 604
- 20 240

b) Rendre irréductible chaque fraction.
- $\frac{2\,730}{5\,236}$
- $\frac{5\,236}{10\,604}$
- $\frac{20\,240}{10\,604}$

93 La commande PremierPrécédent(100) de ce logiciel de calcul formel retourne le plus grand nombre premier inférieur à 100.

1	PremierPrécédent(100) → **97**

a) Avec un tel logiciel, déterminer le plus grand nombre premier inférieur à 10 000.

b) Utiliser une autre commande pour déterminer le plus petit nombre premier supérieur à 100 000.

Démontrer et raisonner

94 Raisonner par disjonction de cas

Méthode
Pour résoudre un problème, on peut séparer l'étude en plusieurs cas, chacun d'eux étant plus facile à résoudre que le problème global.

n désigne un nombre de $\mathbb{N}$.
On note A le nombre tel que $A = 3n^2 + 2n + 1$.
Étudier la parité de A selon les valeurs de n.
Pour cela, on peut envisager le cas où n *est pair puis le cas où* n *est impair.*

95 Démontrer qu'un nombre n'est pas premier

Méthode
Pour démontrer qu'un nombre a de $\mathbb{N}$ n'est pas premier, il faut écrire a comme un produit de deux nombres entiers naturels différents de 1 et de a.

n désigne un nombre de $\mathbb{N}$.
A est le nombre tel que $A = (2n + 3)(n + 1)$.
Démontrer qu'il existe une seule valeur de n pour laquelle A est un nombre premier.

96 Utiliser une écriture astucieuse

Le nombre 361 361 est-il premier ?
Écrire 361 361 sous la forme $\ldots \times 1000 + \ldots$.

97 Démontrer qu'une affirmation est fausse

Dans son ouvrage intitulé *Inédits* (Éditions Pastorelli, 1992), l'écrivain français Marcel Pagnol affirme que « la somme de deux nombres impairs consécutifs et de leur produit est un nombre premier ».
a) On note $2n - 1$, avec $n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant 1$, un nombre impair.
Exprimer en fonction de n le nombre impair suivant.
b) Exprimer en fonction de n la somme citée par Marcel Pagnol. Vérifier que sa forme développée est $4n^2 + 4n - 1$.
c) Calculer ces nombres pour $n = 1$ jusqu'à $n = 6$.
Que peut-on dire alors de l'affirmation de Marcel Pagnol ?
On peut utiliser la fonction écrite en langage Python de l'exercice 87.

Utiliser multiples et diviseurs

98 **a)** En partant de 0, Léna compte de 5 en 5, Adam compte de 6 en 6 et Zoé compte de 7 en 7.
Pour la première fois, ils parviennent à un même nombre. Lequel ?
b) Ils recommencent, mais cette fois, Léna compte de 2 en 2, Adam de 9 en 9 et Zoé de 10 en 10.
Pour la première fois, ils parviennent à un même nombre. Lequel ?

99 Lilou possède 72 jetons qu'elle dispose en rangées parallèles contenant le même nombre de jetons.

Indiquer à Lilou toutes les dispositions possibles de ses jetons.

100 Combien y a-t-il de multiples de 53 entre -1027 et 1 112 ?

101 Combien y a-t-il de nombres entiers naturels inférieurs à 1 000 non divisibles par 37 ?

102 Proposer des nombres entiers naturels non nuls a, b, c tels que a divise bc mais ne divise ni b ni c.

103 Démontrer que la somme de sept nombres consécutifs de $\mathbb{Z}$ est un multiple de 7.

104 Un nombre parfait est un nombre de $\mathbb{N}$ qui est égal à la somme de ses diviseurs stricts (c'est-à-dire autres que lui-même).
Déterminer les nombres parfaits inférieurs à 30.

Il n'y a que trois nombres parfaits inférieurs à 1 000. Le 3e est 496.

105 n est un nombre de $\mathbb{N}$ tel que $n = 10a + b$, avec a et b nombres de $\mathbb{N}$.
a) Démontrer que si $a - 2b$ est divisible par 7, alors n est divisible par 7.
b) Réciproquement, démontrer que si n est divisible par 7, alors $a - 2b$ est divisible par 7.
c) Sans calculatrice, déterminer si le nombre 574 est divisible par 7.

106 Déterminer tous les nombres a et b de $\mathbb{Z}$ tels que $a \times b = 56$.

Utiliser des nombres premiers et des décompositions

107 **a)** Existe-t-il deux nombres impairs dont la somme est un nombre premier ?
b) Existe-t-il trois nombres impairs consécutifs dont la somme est un nombre premier ?

108 On considère le nombre $N = 456$.
1. Donner la décomposition en produit de facteurs premiers de N.
2. On note n un diviseur positif de N.
a) Expliquer pourquoi les seuls diviseurs premiers de n ne peuvent être que 2, 3 et 19.
b) La décomposition en produit de facteurs premiers de n est donc de la forme $2^a \times 3^b \times 19^c$, avec a, b, c nombres de $\mathbb{N}$.
Quelles sont les valeurs possibles de a, b et c ?
3. Recopier et compléter l'arbre suivant. En déduire la liste des diviseurs positif de N.

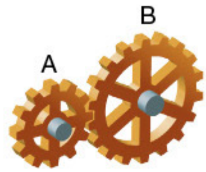
2^0	3^0	19^0	…	=	…
		19^1	$2^0\times3^0\times19^1$	=	19
	3^1	19^0	…	=	…
		19^1	…	=	…
2^1	3^0	…	…	=	…
		…	…	=	…
	3^1	…	…	=	…
		…	…	=	…
2^2	3^0	…	…	=	…
		…	…	=	…
	3^1	…	…	=	…
		…	…	=	…
2^3	3^0	…	…	=	…
		…	…	=	…
	3^1	…	…	=	…
		…	…	=	…

109 **1.** Décomposer 3388 en produit de facteurs premiers en remarquant que $3388 = 44 \times 77$.
2. En déduire, sans calcul, si chaque nombre est un diviseur de 3 388.
a) 6 **b)** 22 **c)** 28 **d)** $2 \times 7 \times 11$ **e)** 7×11^2 **f)** 22^2

110 **1.** Décomposer 126 puis 180 en produits de facteurs premiers.
2. Les nombres suivants sont-ils des diviseurs de 126 ? de 180 ?
a) 2×3^2 **b)** $3^3 \times 5$ **c)** $2^2 \times 11$ **d)** $2^2 \times 3$
3. Déduire de la question **1** le plus grand diviseur commun à 126 et 180.

111 **1.** Décomposer 220 puis 90 en produits de facteurs premiers.
2. Les nombres suivants sont-ils multiples de 220 ? de 90 ?
a) $2^3 \times 5 \times 11$ **b)** $2 \times 3^3 \times 5 \times 11$ **c)** $2^2 \times 11$
d) $2 \times 3 \times 5 \times 11 \times 13$ **e)** $2^2 \times 3^3 \times 5^2 \times 11^2$
3. Déduire de la question **1** le plus petit multiple commun à 220 et 90.

112 Une roue d'engrenage A a 18 dents. Elle est en contact avec une roue B de 24 dents.



a) Décomposer 18 et 24 en produits de facteurs premiers.
b) Au bout de combien de tours de chacune des roues seront-elles à nouveau, et pour la première fois, dans la même position ?

113 On dispose de plusieurs rectangles de dimensions 48 cm et 72 cm.
Déterminer le côté du plus petit carré que l'on peut former avec ces rectangles toujours dans la même position.

114 Utiliser une décomposition en produit de facteurs premiers pour dire si :
a) 324 est un carré parfait (c'est-à-dire de la forme n^2 avec n nombre de $\mathbb{N}$) ;
b) 216 est un cube parfait (c'est-à-dire de la forme n^3 avec n nombre de $\mathbb{N}$).

Utiliser des fractions irréductibles

115 Voici comment procède Dylan pour calculer :

$$A = \frac{8}{20} + \frac{3}{15}$$

$20 = 2^2 \times 5$ et $15 = 3 \times 5$.
Je prends pour dénominateur commun $2^2 \times 3 \times 5$.

a) Terminer le travail de Dylan et présenter le résultat sous forme irréductible.
b) Proposer une façon plus simple pour calculer A.

116 **a)** Décomposer 35 et 27 en produits de facteurs premiers.
b) Calculer et rendre irréductible $\frac{14}{35} + \frac{18}{27}$.

117 Voici comment procède Margot pour calculer :

$$B = \frac{1}{6} - \frac{1}{15}$$

Je prends pour dénominateur commun 6×15.
Ainsi, $B = \frac{1 \times 15}{6 \times 15} - \frac{1 \times 6}{15 \times 6}$.

1. Terminer le travail de Margot et présenter le résultat sous forme irréductible.

2. a) Écrire les décompositions en produits de facteurs premiers de 6 et de 15.

b) En déduire un multiple commun à 6 et 15 plus petit que celui choisi par Margot.

c) Calculer B avec ce dénominateur commun et présenter le résultat sous forme irréductible.

118 Calculer à la main et présenter le résultat sous forme irréductible.

$C = \frac{3}{12} - \frac{3}{16}$ $\quad D = \frac{8}{25} + \frac{1}{60}$ $\quad E = \frac{7}{21} + \frac{3}{56}$

119 Décomposer chaque dénominateur en produit de facteurs premiers puis calculer l'expression et présenter le résultat sous forme irréductible.

$F = \frac{3}{8} + \frac{2}{15} + \frac{7}{6}$ $\quad G = \frac{13}{15} - \frac{1}{18} + \frac{9}{10}$

120 Calculer à la main et présenter le résultat sous forme irréductible.

$$H = \frac{14}{30} - \frac{35}{126} + \frac{72}{320}$$

121 **1.** a désigne un nombre de $\mathbb{Z}$, n, p et q des nombres de $\mathbb{N}$.

a) Un nombre décimal s'écrit $\frac{a}{10^n}$.

Expliquer pourquoi il peut s'écrire $\frac{a}{2^p \times 5^q}$, où l'on précisera p et q.

b) Réciproquement, expliquer pourquoi un nombre de la forme $\frac{a}{2^p \times 5^q}$ est un nombre décimal, c'est-à-dire qu'il admet une écriture fractionnaire dont le dénominateur est une puissance de 10.

Envisager les cas $p < q$, $p = q$ et $p > q$.

2. Sans utiliser la touche ÷ de la calculatrice, dire lesquelles des fractions irréductibles ci-dessous sont des nombres décimaux.

a) $\frac{17}{75}$ **b)** $\frac{11}{150}$ **c)** $\frac{7}{20}$ **d)** $\frac{5}{12}$

e) $\frac{3}{25}$ **f)** $\frac{51}{80}$ **g)** $\frac{13}{256}$ **h)** $\frac{17}{350}$

122 **1.** Dans chaque cas, vérifier que le nombre est décimal.

a) $\frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ **b)** $\frac{7}{3} + \frac{1}{6}$ **c)** $\frac{1}{3} + \frac{7}{6}$

2. a et b désignent des nombres de $\mathbb{N}$.

Démontrer que $\frac{a}{3} + \frac{b}{6}$ est un nombre décimal si, et seulement si, $2a + b$ est un multiple de 3.

123 Déterminer une fraction égale à $\frac{15}{21}$ dont la somme du numérateur et du dénominateur est 132.

124 Déterminer une fraction égale à $\frac{15}{21}$ dont la différence entre le numérateur et le dénominateur est 30.

125 Existe-t-il une fraction égale à $\frac{40}{56}$ dont la somme du numérateur et du dénominateur est 125 ?

126 Déterminer une fraction égale à $\frac{168}{315}$ dont la somme du numérateur et du dénominateur est 8 303.

S'entraîner à la logique

→ p. XXI

127 **Démontrer par l'absurde**

Voici une propriété : « Si n est un nombre non premier, alors son plus petit diviseur positif p, autre que 1, est un nombre premier. »

Démontrer cette propriété en raisonnant par l'absurde, c'est-à-dire en supposant que le plus petit diviseur p de n n'est pas premier.

128 **Quantificateurs**

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse.

a) Il existe des nombres premiers consécutifs.

b) Tout nombre impair est premier.

c) Tout nombre premier est impair.

d) Il existe un nombre divisible par 4 et par 6 qui n'est pas divisible par 24.

129 **Réciproque**

a désigne un nombre de $\mathbb{N}$ différent de 0 et de 1.

On admet que la propriété suivante est vraie :

« Si, pour tout nombre n de $\mathbb{Z}$, a divise $5n + 4$ et $2n - 3$, alors a divise 23. »

Énoncer la réciproque et dire si elle est vraie.

130 Imaginer une stratégie

Chercher | Raisonner

a et b désignent des nombres de $\mathbb{N}$ avec $b \neq 0$.

Combien existe-t-il de fractions $\frac{a}{b}$ égales à $\frac{168}{315}$ avec $a < 168$ et $b < 315$?

Écrire ces fractions.

131 Tice Conjecturer puis démontrer

Chercher | Raisonner | Communiquer

Pour demain, Élouan doit traiter l'exercice suivant :

« Étudier la divisibilité par 6 du nombre a tel que $a = n(n+1)(2n+1)$ (avec $n \in \mathbb{N}$). »

Voici le début d'une feuille de calcul qu'il a réalisée avec le tableur.

Dans la cellule C2, il a saisi la formule $\boxed{\text{=MOD(B2;6)}}$.

	A	B	C
1	n	$a = n(n+1)(2n+1)$	Reste de la division de a par 6
2	0	0	0
3	1	6	0
4	2	30	0
5	3	84	0
6	4	180	0
7	5	330	0

1. Réaliser cette feuille de calcul et aider Élouan à émettre une conjecture.

2. a) Expliquer pourquoi, pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, le nombre a est divisible par 2.

b) Expliquer pourquoi tout nombre n de $\mathbb{N}$ s'écrit $n = 3k$ ou $n = 3k+1$ ou $n = 3k+2$ (avec $k \in \mathbb{N}$).
Dans chacun de ces trois cas, démontrer que le nombre a est divisible par 3.

c) Conclure sur la conjecture émise à la question **1**.

132 Utiliser une décomposition

Chercher | Calculer

1. a) Décomposer 7 744 et 17 424 en produits de facteurs premiers.

b) Expliquer pourquoi ces deux nombres sont divisibles par 44^2.

2. En déduire sans calculatrice :

a) la racine carrée de 7 744 ;

b) la racine carrée de 17 424 ;

c) la fraction irréductible égale à $\frac{7\,744}{17\,424}$.

133 Prendre des initiatives

Chercher | Raisonner

Déterminer le plus petit nombre entier naturel qui :

a) multiplié par 2 020, est un carré parfait ;

b) multiplié par 2 020, est un cube parfait.

134 Créer un caractère de divisibilité

Chercher | Raisonner | Communiquer

On peut décomposer l'écriture de tout nombre entier naturel à l'aide des puissances de 10 ; par exemple :

$$7\,235 = 7 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 3 \times 10 + 5$$

1. On considère un nombre entier naturel n à quatre chiffres et on note respectivement m, c, d, u ses chiffres des milliers, des centaines, des dizaines, des unités.

On note $n = \overline{mcdu}$.

Démontrer que n est divisible par 4 si, et seulement si, le nombre $\overline{du}$ est divisible par 4.

2. Pour chaque nombre, déterminer sans calculatrice s'il est divisible par 4.

a) 324 **b)** 546 **c)** 1 436 **d)** 548 752

135 Étudier un programme de calcul

Problème ouvert

Chercher | Raisonner

Voici un programme de calcul.

- Choisir un nombre premier différent de 2.
- Calculer le carré de ce nombre.
- Soustraire 1.

Démontrer que, quel que soit le nombre premier choisi au départ, le résultat de ce programme est un multiple de 4.

136 Résoudre un problème pratique

Chercher | Calculer | Communiquer

Un menuisier a deux poutres, l'une de 875 cm et l'autre de 1 375 cm. Pour satisfaire une commande, il doit les partager en morceaux égaux dont la longueur, en centimètre, doit être un nombre entier et être la plus grande possible.

Conseiller le menuisier.

137 Comprendre la division euclidienne

Chercher | Raisonner

On divise un nombre entier naturel par 5, par 7, par 10, par 15 et il reste toujours 1. Quels sont les nombres possibles, compris entre 1 200 et 1 700 ?

138 Algo Comprendre un programme

Calculer **Communiquer**

Voici un programme écrit en langage Python, où a et b désignent des nombres entiers naturels.

```
a=int(input("Entrer un nombre a"))
b=int(input("Entrer un nombre b"))
n=0
m=1
while m<=b:
    n=n+1
    m=a*n
print(n-1,"x",a,"=",m-a)
```

a) Exécuter ce programme pas à pas et compléter un tableau de suivi des variables lorsqu'on saisit en entrée $a = 7$ et $b = 50$.
Quel affichage obtient-on ?
b) Quel est le rôle de ce programme ?
Le saisir et le tester avec les valeurs de la question **a)**.
c) Déterminer le plus grand multiple de 54 inférieur à 1 000 000 avec le programme, puis sans.

139 Comprendre une situation

Narration de recherche

Raisonner **Communiquer**

Rédiger les différentes étapes de la recherche, sans omettre les fausses pistes et les changements de méthode.

Problème Un photographe doit réaliser une exposition de ses œuvres. Il a 224 photos de paysage et 288 portraits.
Il souhaite disposer ses photos sur des panneaux contenant chacun le même nombre de paysages et le même nombre de portraits.
Quel nombre maximum de panneaux doit-il prévoir ?

140 Modéliser une situation

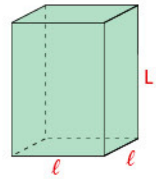
Modéliser **Raisonner**

Trois motards tournent sur une piste. Ils partent ensemble sur la ligne de départ.
Pour chaque tour, le 1er met 1 min 6 s, le 2^{e} met 1 min 10 s et le 3^{e} met 1 min 17 s.
Après combien de temps seront-ils à nouveau ensemble sur la ligne de départ ?

141 Fill a box

Chercher **Communiquer**

A box has the shape of a cuboid with a square base.



We want to fill this box with identical cubes, whose side a is an integer other than zero.
The cubes must completely fill the box with no empty space.
a) In this question, $\ell = 882$ and $L = 945$.
Give all possible values for a.
b) If the volume of the box is $V = 77\,760$ and we know that $a = 12$, what are the dimensions ℓ and L of the box?

Des Défis

142 Avec des pointillés

Déterminer la fraction irréductible égale au produit :

$$\left(1-\frac{4}{1^2}\right)\left(1-\frac{4}{3^2}\right)\ldots\left(1-\frac{4}{(2p+1)^2}\right)\ldots\left(1-\frac{4}{199^2}\right)$$

où p désigne un nombre entier naturel.

143 Nombre premier

n désigne un nombre de $\mathbb{N}$.
Combien existe-t-il de nombres premiers de la forme $n^4 + 4$? *Penser à écrire $n^4 + 4$ comme la différence de deux carrés :*

$$(n^2+2)^2 - \square^2$$

144 Avec quatre facteurs

M. Factorix demande à son ami Claude de factoriser $2\,021^4 + 64$ en un produit de quatre facteurs.
Avec sa calculatrice, Claude trouve :

$$2\,021^4 + 64 = 5 \times 37 \times 90\,176\,531\,257$$

Il conclut : « Tu te trompes, il n'y a que trois facteurs. »
En fait, M. Factorix ne se trompe pas.
Trouver les quatre facteurs.
Penser à écrire $2\,021^4 + 64$ sous la forme :

$$(2\,021^2+8)^2 - \square^2$$

QCM Bilan

QCM interactifs

145 **Dans chaque cas, donner la réponse exacte en justifiant.**

		A	B	C	D
1	Le nombre de diviseurs de 441 est inférieur au nombre de diviseurs de …	125	1 003	48	75
2	La différence des carrés de deux nombres impairs consécutifs est un multiple de …	3	5	6	8
3	La somme des carrés de trois nombres pairs consécutifs est divisible par …	4	6	8	12
4	Un nombre entier naturel est divisible par 25 si, et seulement si, …	son chiffre des unités est 5	son chiffre des unités est 0	il se termine par 00, 25, 50 ou 75	la somme de ses chiffres est divisible par 25
5	Raphaël choisit au hasard un nombre entre 1 et 100. La probabilité qu'il ait choisi un nombre premier est …	$\frac{6}{25}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{50}$	$\frac{23}{100}$
6	Un nombre qui est un cube parfait est …	$2^4 \times 3^3 \times 5$	$2^5 \times 7^3 \times 11^9$	$2^{12} \times 3^6$	$3^{15} \times 13^{23}$
7	Les deux nombres qui ont le plus grand diviseur commun sont …	12 et 124	28 et 94	35 et 60	48 et 72
8	Une fraction irréductible est …	$\frac{1584}{2079}$	$\frac{3927}{2431}$	$\frac{1624}{8712}$	$\frac{286}{6873}$
9	Deux bus quittent une station en même temps à 6 h.  L'un des bus revient à cette station toutes les 54 min et l'autre bus toutes les 1 h 12 min. Les deux bus seront à nouveau en même temps à cette station à …	8 h 24	9 h 36	12 h	10 h 32
10	Un nombre entier naturel n est parfait lorsque la somme de ses diviseurs positifs est égale à $2n$. Un nombre parfait est …	8	27	240	496

Vérifiez vos réponses p. 346 pour avoir votre note (considérez 1 point par réponse juste).

Exploiter ses compétences

146 Prévoir un événement

La situation problème

Un phare émet trois feux différents (un rouge, un vert et un blanc).
Ces trois feux sont émis à intervalles réguliers.
Utiliser les différentes informations pour savoir dans combien de temps ces trois feux seront à nouveau émis simultanément, et dans combien de jours cela se produira à nouveau à minuit.

DOC 1 Les intervalles réguliers des feux

Le feu rouge est émis toutes les 16 secondes.
Le feu vert est émis toutes les 45 secondes.
Le feu blanc est émis toutes les 2 minutes.

DOC 2 La simultanéité des feux

Aujourd'hui, à minuit, les trois feux ont été émis simultanément.

147 Tice Relier histoire et mathématiques

La situation problème

Le pavillon français d'une Exposition Universelle a présenté une lance, un boulet de canon et un carreau d'arbalète trouvés l'année précédente lors de fouilles sur un ancien champ de bataille dans une commune des Deux-Sèvres.
Utiliser les différentes informations pour trouver les dimensions des différents objets, le lieu et l'année de l'exposition, le lieu et l'année de la bataille, le mois et l'année de la découverte, ainsi que le nom et l'âge du vainqueur de cette bataille.

DOC 1 Le carreau d'arbalète

Le carreau d'arbalète est le projectile utilisé avec une arbalète.
Sa pointe est pyramidale avec une base carrée.

DOC 2 Un curieux fait

En multipliant la longueur de la lance (en pied) par la masse du boulet (en livre) puis par la longueur du carreau d'arbalète (en cm), par l'année de la bataille, par l'année de l'exposition et enfin par le nombre de jours du mois où la découverte a eu lieu, on trouve **198 490 572 007**.
Chaque facteur est un diviseur de ce très grand nombre.

DOC 3 Les outils

On peut utiliser un logiciel de calcul formel mais aussi Internet en ce qui concerne les informations historiques.

148 Préparer un projet

La situation problème

Un paysagiste doit réaliser un devis pour un particulier. Il doit planter des arbustes autour d'un terrain rectangulaire.

Utiliser les différentes informations pour aider ce paysagiste à déterminer combien d'arbustes il devra facturer.

DOC 1 Les intentions du paysagiste

- Les arbustes sont régulièrement espacés.
- La distance d'un arbuste au suivant est un nombre entier de centimètres compris entre 100 et 200.
- Un arbuste est planté à chaque coin du terrain.

DOC 2 Les dimensions du terrain

Le terrain rectangulaire mesure 14,84 m de long et 10,60 m de large.

149 Représenter des ensembles de points

La situation problème

Dans une classe de Seconde, le professeur demande à ses élèves de représenter, dans un repère orthonormé, le nombre $2^x \times 3^y$ (avec x et y nombres de $\mathbb{N}$), par le point de coordonnées $(x\,;y)$.

Reproduire ce repère, répondre aux différentes consignes proposées par des élèves de cette classe.

DOC 1 Consigne d'Anaïs

Colorer en rouge les points qui représentent les puissances de 2 et en bleu ceux qui représentent les puissances de 3.

DOC 2 Consigne de Clément

Colorer en vert les points qui représentent les multiples de 6.

DOC 3 Consigne d'Anyssia

Colorer en bleu les points qui représentent les multiples de 12.

DOC 4 Consigne de Léa

$M = 2^4 \times 3^2$

Colorer en noir les points qui représentent des diviseurs de M.

DOC 5 Consigne de Mathis

$N = 2^2 \times 3^3$

Colorer en orange les points qui représentent des diviseurs de N.

DOC 6 Consigne de Noémie

Entourer le point qui représente le plus grand diviseur commun à M et à N.