1 Dénombrement. Récurrence

HISTOIRE DES MATHS

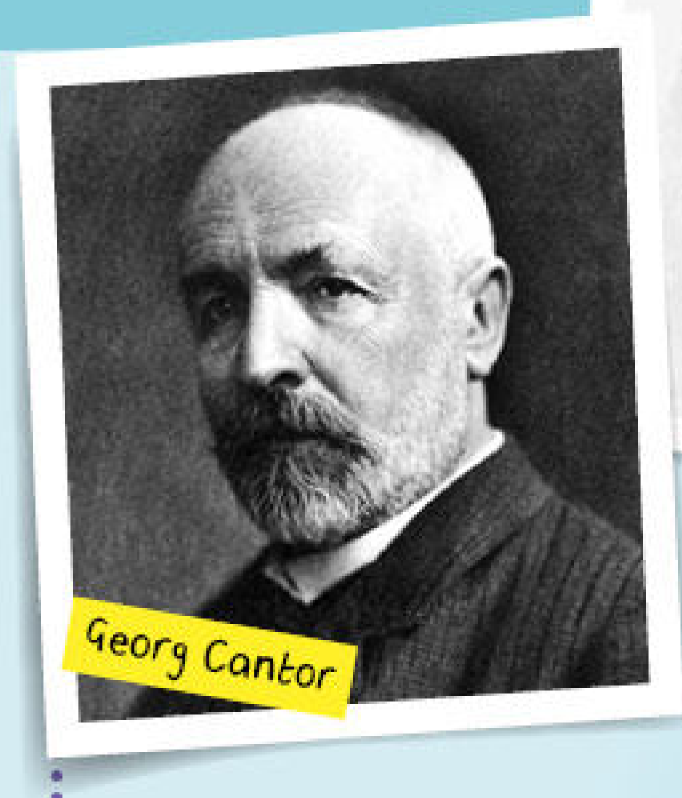
Vers 300 avant notre ère, **Euclide** démontre que l'ensemble des nombres premiers est arbitrairement grand.

La notion d'ensembles infinis divise les mathématiciens et mène à des paradoxes connus, tel que « à chaque nombre entier, on peut faire correspondre un nombre pair ; pourtant il y en a deux fois plus… »

Au Moyen-Âge, des mathématiciens utilisent un raisonnement par récurrence sans le dire. Ainsi, vers 1200, **Leonardo Fibonacci** établit un algorithme de décomposition d'un nombre rationnel en une somme de fractions distinctes de numérateur 1. En 1654, **Blaise Pascal** énonce le principe de récurrence dans son *Traité du triangle arithmétique*.

En 1874, **Georg Cantor** formalise la définition d'un ensemble : « Par ensemble, on entend un groupement en un tout, d'objets bien distincts de notre intuition ou de notre pensée. ».


Giuseppe Peano


Georg Cantor

▶ **Georg Cantor** (1845-1918), mathématicien allemand, est le père de la théorie des ensembles. Son théorème le plus célèbre montre l'infinité d'infinis.

▶ **Giuseppe Peano** (1898-1932) est un mathématicien italien. En 1889, dans un court traité, il a pour objectif de donner aux mathématiques une rigueur irréprochable. En particulier, il construit $\mathbb{N}$ axiomatiquement, le 5^{e} axiome étant le raisonnement par récurrence.

1596 Naissance de Descartes qui donne son nom au produit cartésien.

1654 Pascal est le premier à énoncer le principe de récurrence, dit alors principe d'induction.

1873 Cantor démontre qu'il existe autant de nombres rationnels que de nombres entiers naturels.

1881 John Venn introduit une représentation des ensembles.

1595 Invention du microscope par Janssen

1655 Invention du jeu de la roulette par Pascal

1715 Sacre de Louis XV

1815 Création de l'agence Reuters à Londres

1875 Ouverture de la 1re salle de cinéma à La Ciotat

1600 — 1675 — 1750 — 1825 — 1900

Deux hexagrammes du *Yi Jing*.

Apparu dès 1000 avant notre ère, le *Yi Jing* est le plus ancien des « classiques » chinois. Sa lecture fut imposée aux étudiants de l'empire pendant de nombreux siècles. Il s'agit d'un manuel de divination qui se fonde sur l'utilisation d'hexagrammes, composés de la superposition de six lignes dont chacune est continue ou discontinue. Les 2^6 possibilités sont présentées dans l'ouvrage.

Les contenus et capacités travaillés dans ce chapitre

	Savoir-faire	Exercices
• Utiliser le principe additif. Nombre d'éléments d'une réunion.	1, 3	17, 19, 20
• Définir le produit cartésien. Utiliser le principe multiplicatif.	2, 4	18, 21 à 26
• Déterminer le nombre de *k*-uplets d'un ensemble à *n* éléments.	6, 9, 10	27 à 33
• Démontrer par récurrence.	5, 7, 8, 15, 16	34 à 58
• Déterminer le nombre de parties d'un ensemble à *n* éléments.	11 à 14	59 à 71

Bien démarrer

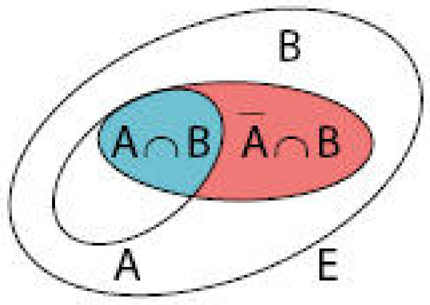
Calcul mental

Rappels utiles

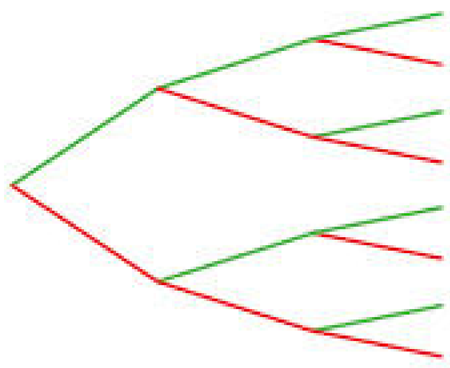
- **Dénombrer**

Dénombrer un ensemble revient à déterminer le nombre d'éléments qui le constituent. On peut pour cela s'aider de représentations graphiques :

- diagramme de Venn



- arbre



- tableau croisé

	1	2	3	4	…
a	$(a\,;1)$	$(a\,;2)$	…		
b	$(b\,;1)$	…			
…					

- **Suites**

Une suite (u_n) est une fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des nombres entiers naturels.
L'image de tout nombre n de $\mathbb{N}$ par cette suite est un nombre réel, noté u_n, appelé terme d'indice n de la suite.

- **Suites géométriques**

Dire qu'une suite (u_n) est géométrique de raison q signifie que pour tout entier naturel n, $\boldsymbol{u_{n+1} = q \times u_n}$.
Alors, pour tous entiers naturels n et p,

- $\boldsymbol{u_n = q^{n-p} \times u_p}$
- $\boldsymbol{u_n = q^n \times u_0}$

- **Somme de termes**

Pour tout entier naturel n et pour tout réel $q \neq 1$,

$$\boldsymbol{1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}}.$$

À l'oral — Questions-Tests

Pour chaque question, il y a une seule réponse exacte.

1 Une classe de 32 élèves se répartit comme suit :
- 15 élèves ont choisi l'option musique ;
- 17 élèves ont choisi l'option danse ;
- 3 élèves ont choisi les deux options.

a) Le nombre d'élèves qui ont choisi l'option musique mais pas l'option danse est :
(1) 3 (2) 14 (3) 12

b) Le nombre d'élèves qui ont choisi l'option danse mais pas l'option musique est :
(1) 3 (2) 14 (3) 12

c) Le nombre d'élèves qui n'ont choisi aucune de ces options :
(1) 3 (2) 29 (3) 26

2 On lance trois fois de suite une pièce.
Le nombre d'issues possibles est :
(1) 3 (2) 4 (3) 8

3 (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{7n}{n+1}$.
Pour tout entier naturel n, u_{n+1} est égal à :
(1) $\dfrac{7n}{n+1} + 1$ (2) $\dfrac{7n+1}{n+2}$ (3) $\dfrac{7n+7}{n+2}$

4 **a)** (v_n) est la suite définie par $v_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 2v_n - 4$. Alors :
(1) $v_1 = -4$ (2) $v_2 = -4$ (3) $v_3 = -4$

b) (w_n) est la suite définie par $w_0 = 0$ et pour tout entier naturel n,
$w_{n+1} = w_n^2 + 1$.
W est la fonction ci-contre écrite en langage Python.

```python
def W(n):
    w=0
    for i in range(n):
        w=w**2+1
    return w
```

W(10) renvoie pour résultat :
(1) le terme w_{10} de la suite ;
(2) le terme w_{11} de la suite ;
(3) le plus petit entier n tel que $w_n > 10$.

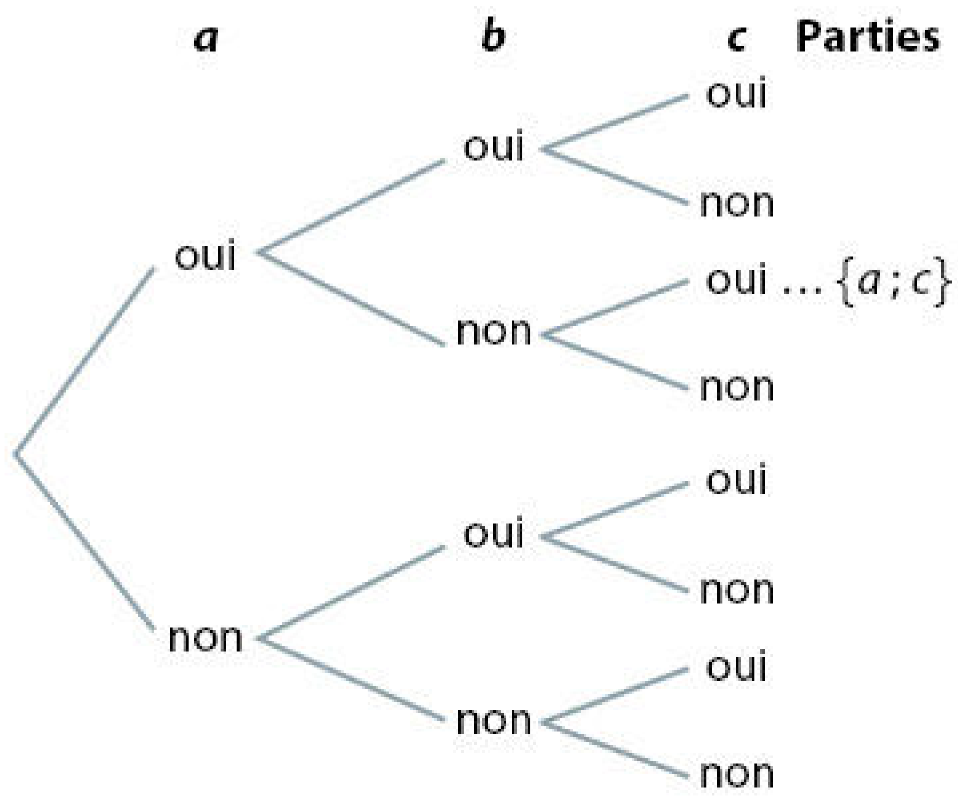
5 **a)** (v_n) est la suite géométrique de raison 2 telle que $v_0 = 5$. Pour tout entier naturel n, v_n est égal à :
(1) 2×5^n (2) $5 + 2n$ (3) 5×2^n

b) (w_n) est la suite géométrique de raison 0,5 telle que $w_0 = 2$. Alors w_3 est égal à :
(1) 0,5 (2) 0,25 (3) 0,125

6 La somme $1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{10}$ est égale à :
(1) 1 023 (2) 2 047 (3) $-$ 2 049

1 Nombre de parties d'un ensemble

E est l'ensemble à trois éléments $\{a\,;b\,;c\}$.
Une partie de l'ensemble E est un ensemble formé par certains éléments de E ou aucun. Par exemple, l'ensemble $\{a\,;c\}$ est une partie de E.
L'arbre ci-contre permet de dénombrer celles-ci.



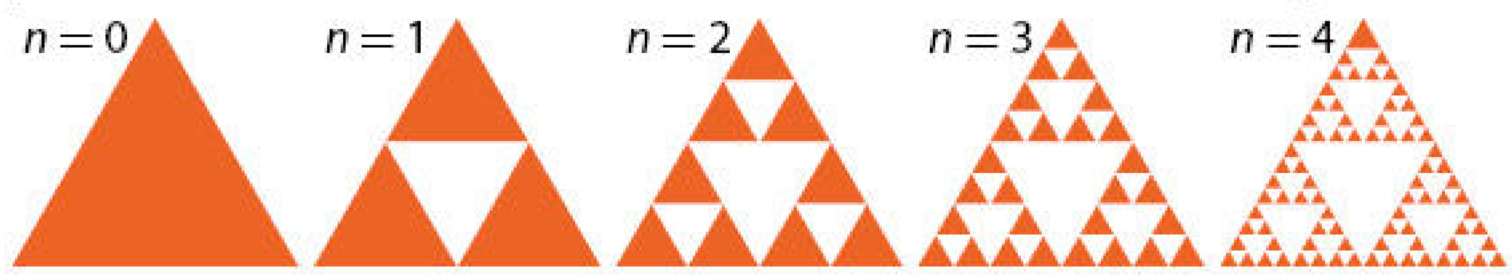
1 **a)** Recopier et compléter l'arbre afin de déterminer toutes les parties de l'ensemble E.
b) Combien de parties possède l'ensemble E ?

2 On considère l'ensemble $F = \{a\,;b\,;c\,;d\}$.
a) Comment modifier l'arbre pour déterminer l'ensemble des parties de F ?
b) Par quel nombre multiplie-t-on le nombre de parties de E pour obtenir le nombre de parties de F ? Combien de parties possède l'ensemble F ?

3 n désigne un nombre entier naturel.
Conjecturer une formule donnant le nombre de parties d'un ensemble à n éléments.

2 Raisonnement par récurrence

Le motif qui orne la coquille du *Cymbiola innexa*, un mollusque indonésien, intrigue les chercheurs car il s'apparente à une fractale appelée triangle de Sierpinski (du nom d'un mathématicien polonais).
On part d'un triangle équilatéral plein de côté 1.
À chaque étape, on partage chaque triangle plein en 4 triangles équilatéraux de même côté et on colorie en blanc le triangle central.



On note p_n le périmètre total des triangles blancs à la n-ième étape.

$p_0 = 0$ et on admet que pour tout entier naturel n, $\boldsymbol{p_{n+1} = p_n + \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}}$.

1 Déterminer p_1, puis p_2.

2 On se propose de démontrer que pour tout entier naturel n, la propriété $P(n)$: « $p_n = 3\left(\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1\right)$ » est vraie.
a) La propriété $P(0)$ est-elle vraie ?
b) On suppose que, pour un entier naturel k, la propriété $P(k)$ est vraie. Expliciter cette propriété $P(k)$.
c) Exprimer p_{k+1} en fonction de p_k et démontrer qu'alors la propriété $P(k+1)$ est vraie.
Ce raisonnement, appelé **raisonnement par récurrence**, permet de conclure que pour tout entier naturel n, la propriété $P(n)$ est vraie.

Si un ensemble E d'entiers naturels contient 0 et contient le successeur de chacun de ses éléments, alors $E = \mathbb{N}$.

Exercices
- 1 à 4 (ci-contre)
- 17 à 33

1 Ensembles finis

A Principe additif

Définition

Un **ensemble fini** est un ensemble qui possède un nombre fini d'éléments.

Principe additif

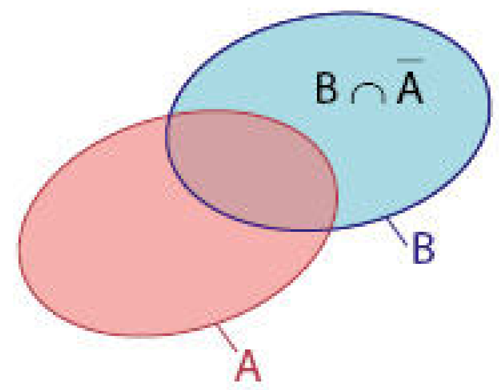
Si **A et B** sont **deux parties disjointes** d'un ensemble fini E, constituées respectivement de m et n éléments, alors le **nombre** d'éléments **de la réunion A ∪ B** est la **somme $m + n$**.

Notation et cas général : Card(A) (lire « cardinal de A ») désigne le nombre d'éléments d'une partie A d'un ensemble fini E. Pour toutes parties A et B de E :

$$\mathbf{Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B)}.$$

En effet, $A \cup B$ est la réunion des ensembles disjoints A et $B \cap \overline{A}$.

Ainsi $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B \cap \overline{A}) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$.



B Principe multiplicatif

Définition

Le **produit cartésien** de deux ensembles finis E et F, noté **E × F**, est l'ensemble des **couples** $(x\,;y)$ où x est un élément de E et y un élément de F.

Exemple

$E = \{a\,;b\}$ et $F = \{1\,;2\,;3\}$.

$E \times F = \{(a\,;1)\,;(a\,;2)\,;(a\,;3)\,;(b\,;1)\,;(b\,;2)\,;(b\,;3)\}$

On peut représenter cela grâce au tableau croisé ci-contre ou à un arbre.

E \ F	1	2	3
a	$(a\,;1)$	$(a\,;2)$	$(a\,;3)$
b	$(b\,;1)$	$(b\,;2)$	$(b\,;3)$

Principe multiplicatif

Si E et F sont deux ensembles finis constitués respectivement de m et n éléments, alors $E \times F$ est un ensemble fini dont le **nombre d'éléments** est le **produit mn**.

En effet, un tableau avec m lignes et n colonnes contient mn cases.

C Ensemble des k-uplets (ou k-listes) d'un ensemble fini E

Définition

E est un ensemble fini à n éléments, k est un nombre entier naturel non nul.

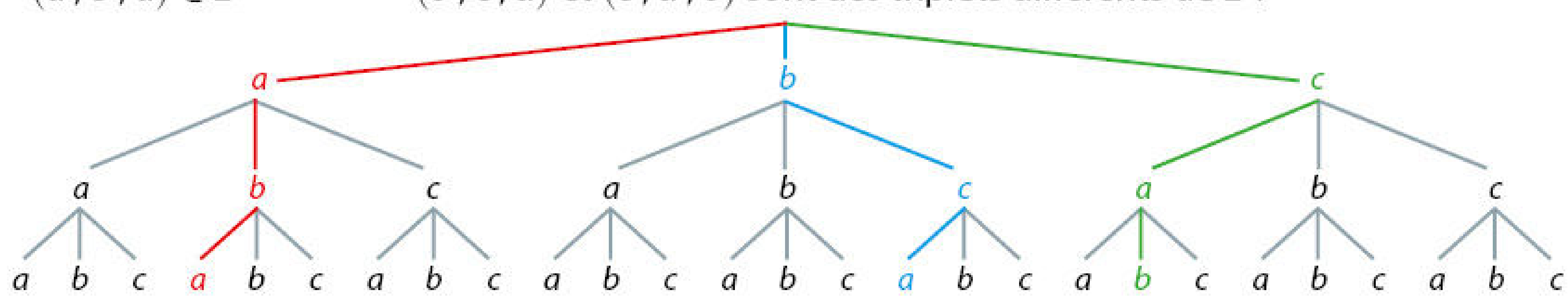
Un **k-uplet** d'éléments de E est une **liste ordonnée** de k éléments de E, distincts ou confondus.

L'ensemble de tous les k-uplets de E est l'ensemble $E \times E \times \ldots \times E$ (k fois) ; on le note $\mathbf{E^k}$.

Exemple

$E = \{a\,;b\,;c\}$. Cet arbre permet de lister les triplets de E^3.

- $(a\,;b\,;a) \in E^3$
- $(b\,;c\,;a)$ et $(c\,;a\,;b)$ sont des triplets différents de E^3.



EXERCICES RÉSOLUS

1 Utiliser le principe additif

Dans une classe de 25 élèves, 15 élèves s'inscrivent à l'atelier théâtre, 8 élèves s'inscrivent à l'atelier musique et 4 élèves s'inscrivent à ces deux ateliers.

a) Déterminer le nombre d'élèves s'inscrivant dans au moins l'un des deux ateliers.

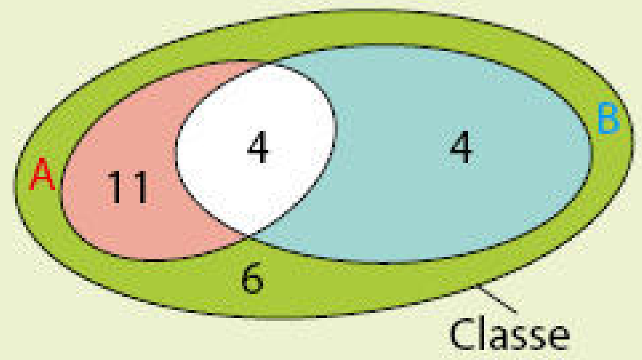
b) Combien d'élèves ne s'inscrivent ni à l'atelier théâtre ni à l'atelier musique ?

Solution

a) A est l'ensemble des élèves de la classe s'inscrivant à l'atelier théâtre.
B est l'ensemble des élèves de la classe s'inscrivant à l'atelier musique.
Ainsi, $\text{Card}(A) = 15$, $\text{Card}(B) = 8$ et $\text{Card}(A \cap B) = 4$.
$A \cup B$ est l'ensemble des élèves s'inscrivant à au moins l'un des deux ateliers.
$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$
$\text{Card}(A \cup B) = 15 + 8 - 4 = 19$
19 élèves de la classe s'inscrivent dans au moins l'un des deux ateliers.

b) $25 - 19 = 6$ donc 6 élèves ne s'inscrivent ni à l'atelier théâtre ni à l'atelier musique.

On peut schématiser la situation à l'aide d'un diagramme de Venn.



2 Utiliser le principe multiplicatif

On dispose d'un jeu de cartes habituel, composé des valeurs as, 2, 3, … , 9, 10, valet, dame, roi dans les quatre couleurs (cœur, carreau, trèfle et pique).

a) Déterminer deux ensembles E et F qui permettent de considérer chacune des cartes de ce jeu comme un élément du produit cartésien $E \times F$.

b) Déterminer le nombre de cartes de ce jeu.

Solution

a) E peut être l'ensemble des treize valeurs {as ; 2 ; … ; roi} et F l'ensemble des quatre couleurs {cœur ; carreau ; trèfle ; pique}.

b) L'ensemble E a 13 éléments et l'ensemble F en a 4.
$13 \times 4 = 52$ ainsi, il y a 52 cartes dans ce jeu.

Le cardinal du produit cartésien $E \times F$ est le produit des cardinaux des ensembles E et F.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 1

3 Dans un centre accueillant 120 personnes, 24 personnes pratiquent le football, 15 le handball, et 6 personnes pratiquent les deux sports.

a) Déterminer le nombre de personnes pratiquant au moins l'un des deux sports.

b) Combien de personnes ne pratiquent aucun des deux sports ?

c) Combien de personnes pratiquent un seul de ces deux sports ?

Sur le modèle de l'exercice résolu 2

4 Jeanne se rend dans un magasin pour acheter un ordinateur portable et un sac pour le protéger.
On lui propose le choix entre cinq ordinateurs portables de mêmes dimensions et entre dix sacs.

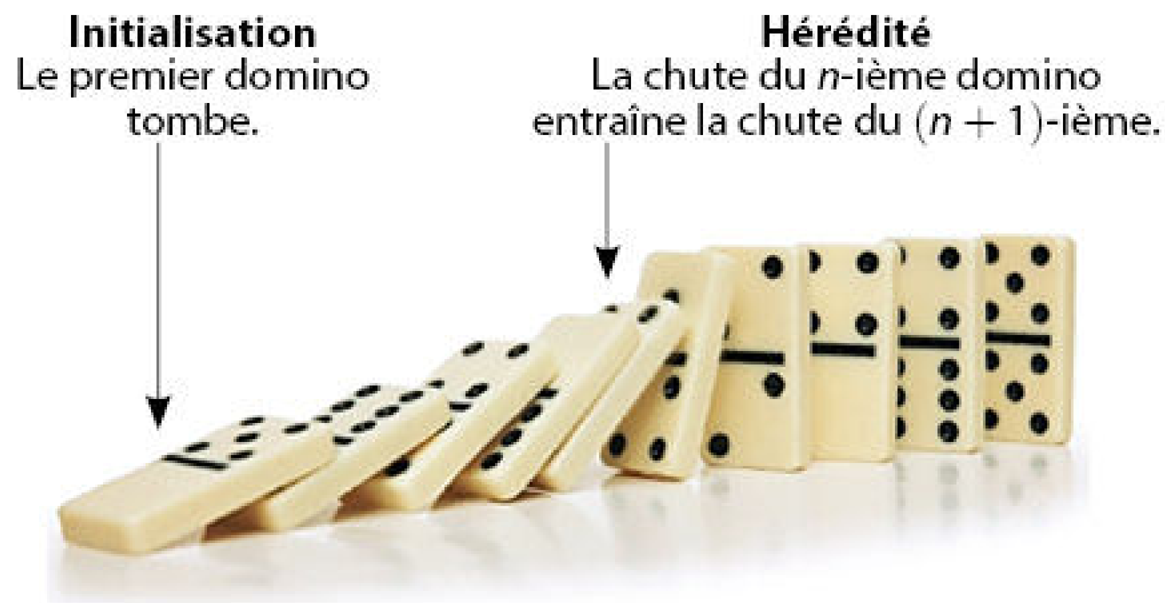
a) Déterminer deux ensembles E et F qui permettent de considérer chaque choix possible de Jeanne comme un élément d'un produit cartésien $E \times F$.

b) Combien de possibilités s'offrent à Jeanne ?

Exercices
- **5** à **10** (ci-contre)
- **34** à **58**

2 Le raisonnement par récurrence

A Illustration



Question : quelles sont les deux conditions pour que tous les dominos se renversent ?
Réponse : on renverse le premier domino et on s'assure que chaque domino renverse le suivant.

B Principe du raisonnement par récurrence

Axiome de récurrence

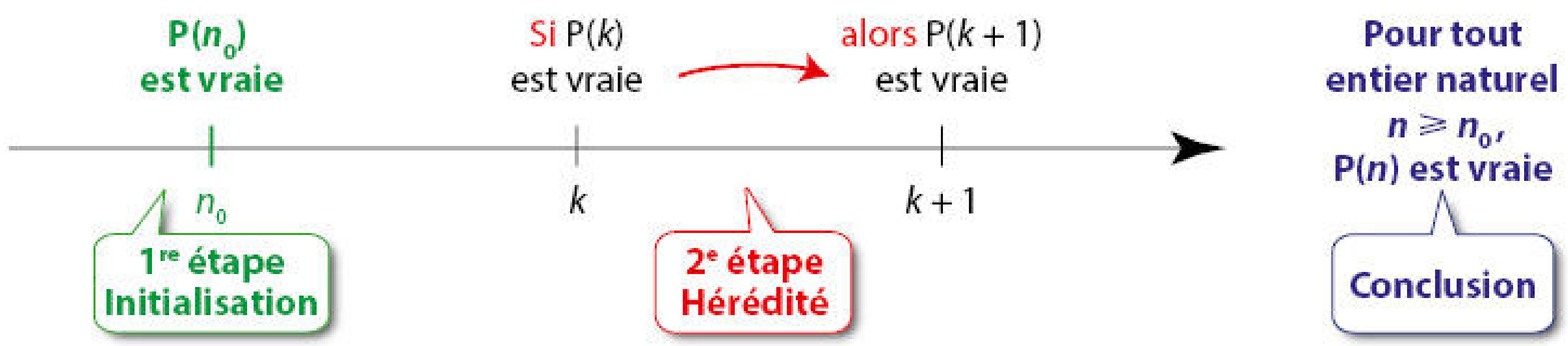
$\mathrm{P}(n)$ est une propriété qui dépend d'un nombre n de $\mathbb{N}$ et n_0 désigne un nombre de $\mathbb{N}$.
Si la propriété $\mathrm{P}(n)$ vérifie les deux conditions suivantes :
1 – Initialisation : $\mathrm{P}(n_0)$ est vraie ;
2 – Hérédité : si $\mathrm{P}(k)$ est vraie pour un nombre entier naturel $k \geqslant n_0$, alors $\mathrm{P}(k+1)$ est vraie ;
alors, **pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$**, $\mathrm{P}(n)$ est vraie.

Vidéo JAICOMPRIS.COM
Cette notion est présentée en vidéo

Remarques
- La propriété $\mathrm{P}(n)$ peut être une égalité, une inégalité, une propriété exprimée par une phrase, …
- La condition d'hérédité est une implication : on suppose que $\mathrm{P}(k)$ est vraie pour un nombre entier naturel k supérieur ou égal à n_0 (c'est **l'hypothèse de récurrence**) et on montre qu'alors $\mathrm{P}(k+1)$ est vraie elle aussi.

Une propriété $\mathrm{P}(n)$ qui vérifie cette deuxième condition est dite héréditaire à partir du rang n_0 ; en effet, elle se transmet du nombre entier k à son « successeur » $k+1$.

Résumé :



C Application : nombre d'éléments de E^k

Propriété

k est un nombre entier naturel, $k \geqslant 1$ et E un ensemble fini à n éléments ($n \in \mathbb{N}$).
Le nombre de k-uplets de E est n^k, c'est-à-dire $\mathbf{Card(E^{\mathit{k}}) = \mathit{n}^{\mathit{k}}}$.

Démonstration

On démontre par récurrence que pour tout entier naturel $k \geqslant 1$, la propriété $\mathrm{P}(k)$: « $\mathrm{Card}(\mathrm{E}^k) = n^k$ » est vraie.
- **Initialisation :** pour $k = 1$, $\mathrm{E}^1 = \mathrm{E}$. Son nombre d'éléments est n, c'est-à-dire n^1. La propriété $\mathrm{P}(1)$ est donc vraie.
- **Hérédité :** on suppose que pour un entier naturel $i \geqslant 1$, la propriété $\mathrm{P}(i)$ est vraie, c'est-à-dire que $\mathrm{Card}(\mathrm{E}^i) = n^i$ (hypothèse de récurrence). Or, E^{i+1} est le produit cartésien $\mathrm{E}^i \times \mathrm{E}$, donc $\mathrm{Card}(\mathrm{E}^{i+1}) = n^i \times n = n^{i+1}$.
La propriété $\mathrm{P}(i+1)$ est donc vraie.
- **Conclusion :** pour tout entier naturel $k \geqslant 1$, la propriété $\mathrm{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire $\mathrm{Card}(\mathrm{E}^k) = n^k$.

EXERCICES RÉSOLUS

5 Démontrer par récurrence

(u_n) est la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n + 1$.
Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n = 2^n - 1$.

Solution

Pour tout entier naturel n, on note $\mathrm{P}(n)$ la propriété : « $u_n = 2^n - 1$ ».

- **Initialisation :** pour $n = 0$, $u_0 = 0$ et $2^0 - 1 = 1 - 1 = 0$.
La propriété $\mathrm{P}(0)$ est donc vraie.
- **Hérédité :** on suppose que pour un entier naturel k, la propriété $\mathrm{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_k = 2^k - 1$ (hypothèse de récurrence).
On démontre qu'alors $\mathrm{P}(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_{k+1} = 2^{k+1} - 1$.
Or, $u_{k+1} = 2u_k + 1$. Ainsi, d'après l'hypothèse de récurrence, $u_{k+1} = 2(2^k - 1) + 1 = 2^{k+1} - 1$.
La propriété $\mathrm{P}(k+1)$ est donc vraie.
- **Conclusion :** pour tout entier naturel n, la propriété $\mathrm{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire, pour tout entier naturel n, $u_n = 2^n - 1$.

L'initialisation est essentielle. Certaines propriétés peuvent être héréditaires sans qu'elles ne soient vraies initialement.

Pour passer du rang k au rang $k+1$, on utilise la définition de la suite et l'hypothèse de récurrence.

6 Déterminer le nombre de k-uplets

E est l'ensemble des lettres de l'alphabet français (sans tenir compte de l'accentuation).
Un mot de cinq lettres est une succession de cinq lettres de l'alphabet ; les répétitions sont possibles.

a) Écrire un 5-uplet d'éléments de E.

b) Combien de mots de 5 lettres, ayant un sens ou non, peut-on écrire à partir de l'alphabet ?

Solution

a) $(a\,;a\,;t\,;z\,;b)$ est un 5-uplet d'éléments de E.

b) L'ensemble E contient 26 éléments.
Ainsi, le nombre d'éléments de E^5 est 26^5 soit 11 881 376.

Si E est un ensemble à n éléments, le nombre d'éléments de E^k est n^k. Ici, $n = 26$ et $k = 5$.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 5

7 (v_n) est la suite définie par $v_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = v_n + 2n + 2$.
Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $v_n = n(n+1)$.

8 (w_n) est la suite définie par $w_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $w_{n+1} = 2w_n - 3$.
Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $w_n = 3(1 - 2^n)$.

Sur le modèle de l'exercice résolu 6

9 E est l'ensemble des dix chiffres de 0 à 9.

a) Écrire un 4-uplet de E.

b) Combien de numéros de 4 chiffres (pouvant éventuellement commencer par 0) peut-on écrire ?

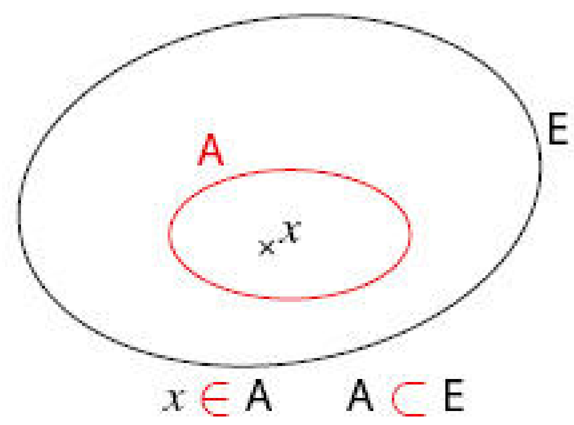
10 Un code secret comporte 6 symboles choisis parmi ★, #, ▲.
Combien de codes secrets différents peut-on composer ?

Cours

Exercices
- 11 à 14 (ci-contre)
- 59 à 71

3 Nombre de parties d'un ensemble

A Ensemble des parties d'un ensemble



- **Signe d'inclusion** : E et A sont deux ensembles.

La notation **A** $\subset$ **E** (lire « A est inclus dans E ») signifie que tout élément de A appartient à E.
Autrement dit, A est une **partie** (ou sous-ensemble) de E.

- On note $\mathcal{P}(\mathrm{E})$ l'ensemble des parties d'un ensemble E.

L'ensemble vide, noté $\varnothing$, **est une partie de tout ensemble**.

Exemple 1

Les parties de l'ensemble $\mathrm{E} = \{a\,;b\}$ ont :
- 0 élément : $\varnothing$
- 1 élément : $\{a\}$, $\{b\}$
- 2 éléments : $\{a\,;b\}$

Donc E a 4 parties et $\mathcal{P}(\mathrm{E}) = \{\varnothing\,;\{a\}\,;\{b\}\,;\{a\,;b\}\}$.

Exemples

L'ensemble vide $\mathrm{E} = \varnothing$ a une partie à 0 élément, $\varnothing$ lui-même, et $\mathcal{P}(\mathrm{E}) = \{\varnothing\}$.

B Nombre de parties d'un ensemble

Propriété

n désigne un nombre entier naturel.
Un ensemble fini E à n éléments possède $\mathbf{2^n}$ **parties**, c'est-à-dire **Card** $\mathcal{P}(\mathbf{E}) = \mathbf{2^n}$.

Démonstration

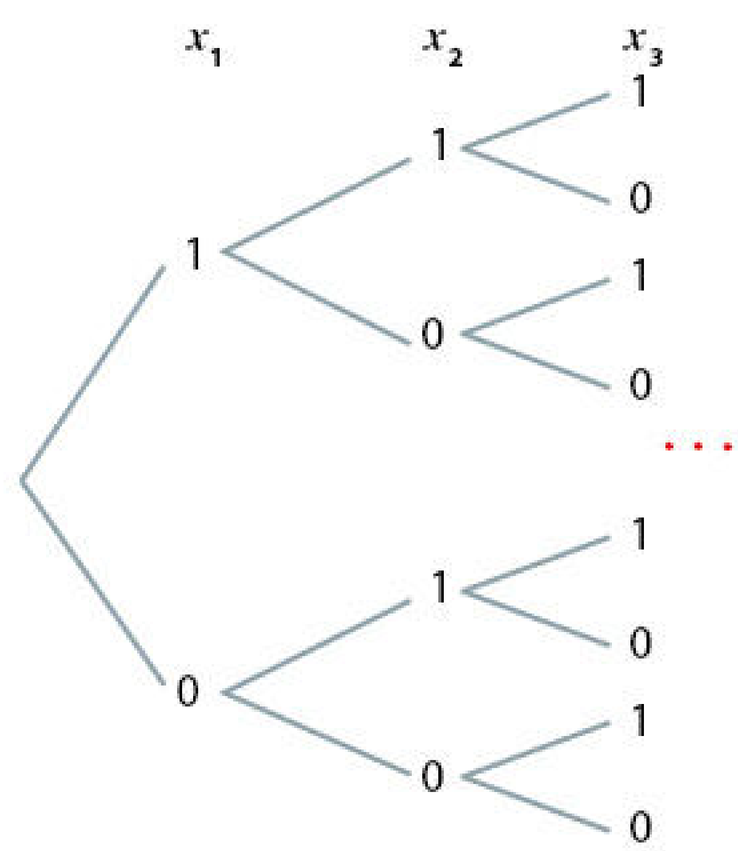
On raisonne par récurrence : pour tout n de $\mathbb{N}$, $\mathrm{P}(n)$ est : « Un ensemble à n éléments a 2^n parties ».

- **Initialisation :** pour $n = 0$, $\mathrm{E} = \varnothing$ donc $\mathrm{Card}\,\mathcal{P}(\mathrm{E}) = 1$. Or, $2^0 = 1$ donc $\mathrm{P}(0)$ est vraie.
- **Hérédité :** on suppose que pour un entier naturel k, $\mathrm{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire qu'un ensemble E à k éléments a 2^k parties (hypothèse de récurrence).

Alors $\mathrm{E}' = \mathrm{E} \cup \{x\}$, avec $x \notin \mathrm{E}$, a $k+1$ éléments. Il y a deux familles de parties de E' :
– celles qui ne contiennent pas x, c'est-à-dire les parties de l'ensemble E : il y en a 2^k ;
– celles qui contiennent x. Celles-ci sont obtenues en adjoignant x à chaque partie de E : il y en a 2^k également.
Ainsi, le nombre de parties de E' est égal à 2×2^k soit 2^{k+1}. La propriété $\mathrm{P}(k+1)$ est donc vraie.

- **Conclusion :** pour tout entier naturel n, la propriété $\mathrm{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire un ensemble à n éléments possède 2^n parties.

Liens entre parties d'un ensemble à n éléments, n-uplets de $\{0\,;1\}$, …



$\mathrm{E} = \{x_1\,;x_2\,;\ldots\,;x_n\}$ est un ensemble à n éléments, avec $n \in \mathbb{N}$.
À chaque partie de E correspond un unique n-uplet de $\{0\,;1\}$, et inversement. En effet :
- si x_1 appartient à la partie, on affecte 1 en 1re position du n-uplet et 0 sinon ;
- si x_2 appartient à la partie, on affecte 1 en 2e position du n-uplet et 0 sinon ;
- et ainsi de suite jusqu'à x_n et la n-ième position.

Par exemple, le n-uplet $(1\,;0\,;1\,;0\,;\ldots\,;0)$ correspond à la partie $\{x_1\,;x_3\}$;
le n-uplet $(0\,;0\,;0\,;\ldots\,;0)$ correspond à $\varnothing$, …
Ainsi, il y a autant de parties de l'ensemble E que de n-uplets de l'ensemble $\{0\,;1\}$, c'est-à-dire 2^n.

EXERCICES RÉSOLUS

11 Relier deux situations de dénombrement

Situation 1 : E $= \{x_1 ; x_2 ; x_3 ; x_4 ; x_5\}$. Combien cet ensemble a-t-il de parties ?
Situation 2 : On écrit des mots de 5 lettres prises dans l'alphabet $\{A ; B\}$. Combien de mots différents peut-on écrire ?

Expliquer pourquoi les réponses à ces deux questions sont identiques.

Solution

Situation 1 : le nombre de parties de E est 2^5 soit 32.
Situation 2 : chaque mot de 5 lettres prises dans $\{A ; B\}$ est un 5-uplet de $\{A ; B\}$.
On convient que la présence d'un A (resp. B) en i-ème position dans le 5-uplet, avec $1 \leqslant i \leqslant 5$, signifie la présence (resp. l'absence) de x_i dans la partie de E correspondante.
Par exemple : au mot $(A ; B ; B ; A ; B)$ correspond la partie $\{x_1 ; x_4\}$ et à la partie $\{x_2 ; x_4 ; x_5\}$ correspond le mot $(B ; A ; B ; A ; A)$.
Il y a donc autant de parties de E que de mots de 5 lettres prises dans l'alphabet $\{A ; B\}$.

Dans un tel mot, il y a des répétitions et l'ordre intervient. Donc on modélise un tel mot par un 5-uplet d'éléments de $\{A ; B\}$.

Pour dénombrer ces mots, on peut aussi utiliser un arbre.

12 Modéliser une situation de dénombrement

Un site propose dix produits à la vente. Le client peut mettre dans son panier au plus un article de chaque produit.
Déterminer le nombre de paniers différents que le client peut réaliser.

Solution

Réaliser un panier revient à se demander pour chaque produit si on le prend (1) ou si on ne le prend pas (0).
On modélise un panier par un 10-uplet d'éléments de $\{0 ; 1\}$.
On peut donc réaliser 2^{10} soit 1 024 paniers différents.

Un panier peut aussi être modélisé par une partie de l'ensemble E des 10 produits.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 11

13 **Situation 1 :** E $= \{x_1 ; x_2 ; \dots ; x_8\}$ est un ensemble à 8 éléments.
Combien cet ensemble a-t-il de parties ?
Situation 2 : Mia lance 8 fois une pièce de monnaie et observe si elle obtient Pile (P) ou Face (F).
Combien de résultats différents Mia peut-elle obtenir ?

Expliquer pourquoi les réponses à ces deux questions sont identiques.

Sur le modèle de l'exercice résolu 12

14 Dans une fête foraine, une machine contient cinq surprises différentes : le joueur peut en attraper aucune, une ou plus en une seule fois.
Combien de lots différents peut-on réaliser avec ces surprises ?

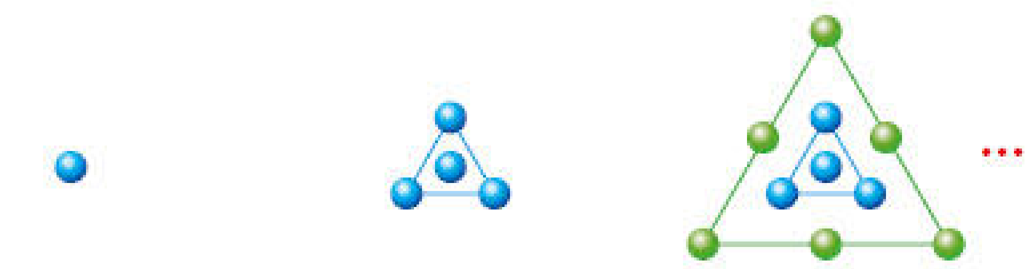
Vidéo JAICOMPRIS.COM
Un autre exercice Algo/python résolu en vidéo

EXERCICE RÉSOLU

15 Conjecturer avec Python, puis démontrer

Voici les premières étapes d'une construction.
On note u_n le nombre de points présents sur la figure à l'étape n. Ainsi $u_0 = 1$.

Étape 0 Étape 1 Étape 2



a) Démontrer que pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = u_n + 3(n+1).$$

b) Compléter la fonction **U** ci-contre écrite en langage Python de paramètre un nombre entier naturel n et qui affiche les n premiers termes de la suite (u_n).
La saisir et la tester pour $n = 100$.

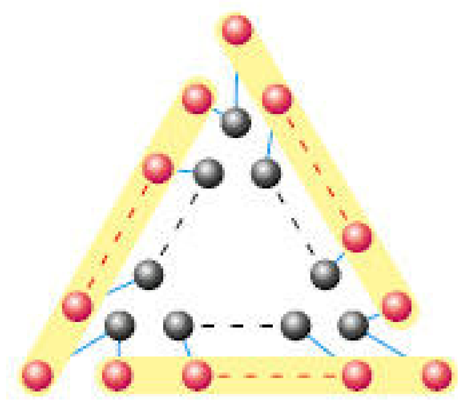
```
from pylab import *

def U(n):
    u=1
    plot(0,u,'r.')
    for i in range(n):
        u=
        plot(i+1,u,'r.')
    show()
    return
```

c) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n,

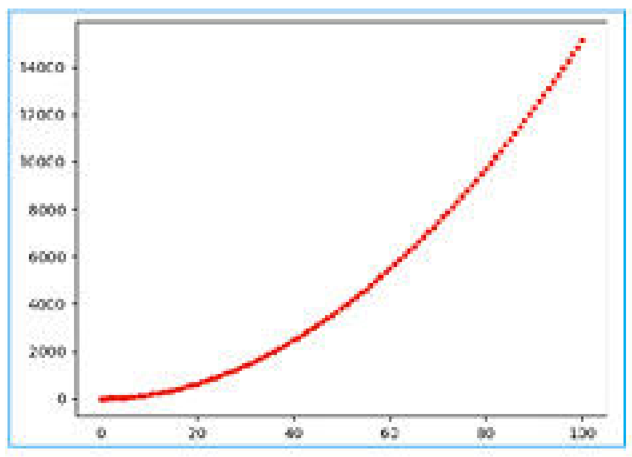
$$u_n = \frac{3}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 1.$$

Solution

a) À l'étape n, on a $n+1$ points sur chaque côté du triangle extérieur.
À l'étape $n+1$, on ajoute $3(n+1)$ points sur le nouveau triangle extérieur, comme illustré ci-contre.
Donc pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + 3(n+1)$.



b) Cadre rouge : $u+3*(i+1)$
On exécute **U(100)** et on obtient le graphique ci-contre.



c) Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note P(n) la propriété : « $u_n = \frac{3}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 1$ ».

Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 1$ et $\frac{3}{2} \times 0^2 + \frac{3}{2} \times 0 + 1 = 1$. P(0) est vraie.

Hérédité : on suppose que pour un entier naturel k, P(k) est vraie, c'est-à-dire que $u_k = \frac{3}{2}k^2 + \frac{3}{2}k + 1$.

- $u_{k+1} = u_k + 3(k+1) = \frac{3}{2}k^2 + \frac{3}{2}k + 1 + 3k + 3 = \frac{3}{2}k^2 + \frac{9}{2}k + 4$
- $\frac{3}{2}(k+1)^2 + \frac{3}{2}(k+1) + 1 = \frac{3}{2}k^2 + 3k + \frac{3}{2} + \frac{3}{2}k + \frac{3}{2} + 1 = \frac{3}{2}k^2 + \frac{9}{2}k + 4$

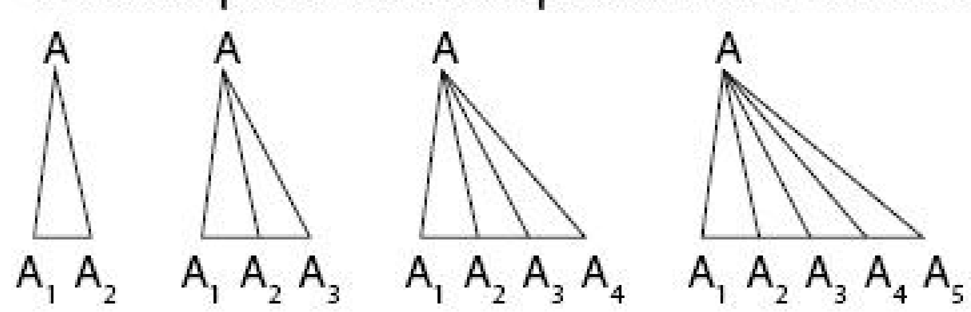
Donc la propriété P$(k+1)$ est vraie.
Conclusion : pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{3}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 1$.

L'allure de la courbe permet de conjecturer que u_n est de la forme $an^2 + bn + c$. On peut trouver a, b, c en utilisant les valeurs de u_0, u_1, u_2.

EXERCICE D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 15

16 Voici les premières étapes d'une construction.



a) Pour tout entier $n \geqslant 2$, u_n est le nombre de triangles pour n points de base. Ainsi $u_2 = 1$ et $u_3 = 3$.
Déterminer les deux termes suivants.

b) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$,

$$u_{n+1} = u_n + n.$$

c) Adapter à cette situation la fonction **U** écrite en langage Python de l'exercice 15.
La saisir et la tester pour $n = 100$.

d) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$,

$$u_n = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n.$$

Ensembles finis et *k*-uplets

Cours 1

Questions flash — À l'oral

17 $E = \{1 ; 2 ; 3\}$ et $F = \{3 ; 4\}$.
Le nombre d'éléments de l'ensemble $E \cup F$ est égal à :
(1) 4 **(2)** 1 **(3)** 5

18 Au restaurant, Luc a le choix entre 4 entrées, 5 plats de résistance et 7 desserts. Luc a le choix entre :
(1) 16 repas **(2)** 140 repas **(3)** 63 repas

19 On s'intéresse aux défauts de freinage et d'éclairage de 500 véhicules d'un réseau d'entreprises. Parmi eux, 65 ont un défaut de freinage, 150 un défaut d'éclairage et 50 présentent les deux défauts.
a) Représenter cette situation par un diagramme de Venn.
b) Déterminer le nombre de véhicules ne présentant aucun des deux défauts.

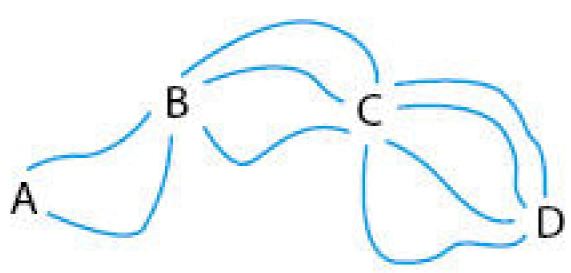
20 Un centre sportif compte 80 adhérents, 55 pratiquent la course à pied, 33 la natation, et 16 ne pratiquent aucun de ces deux sports.
a) Représenter cette situation par un diagramme de Venn.
b) Déterminer le nombre de personnes pratiquant les deux sports à la fois.

21 $E = \{a ; b\}$ et $F = \{1 ; 2 ; 3\}$.
a) Déterminer le nombre d'éléments de $E \times F$.
b) Déterminer ses éléments.

22 $E = \{0 ; 1 ; 2 ; 3\}$ et $F = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4\}$.
Dans un repère du plan, on considère l'ensemble G des points de coordonnées $(x ; y)$ avec $x \in E$ et $y \in F$.
a) Déterminer le nombre de points de l'ensemble G.
b) Représenter cet ensemble.

23 À la médiathèque de son village, Alix peut emprunter trois livres différents : un parmi 5 bandes dessinées, un parmi 3 romans policiers et un parmi 10 journaux.
Déterminer le nombre d'emprunts possibles qu'il peut effectuer.

24 Le plan ci-dessous représente les routes reliant quatre villes.



Déterminer le nombre de parcours permettant de relier la ville A à la ville D (sans retour en arrière).

25 La plaque d'immatriculation d'une voiture comporte :

- deux lettres distinctes de O, I, U pour éviter les confusions avec 0, 1, V ;
- trois chiffres entre 0 et 9 ;
- puis encore deux lettres distinctes de O, I, U.

Déterminer le nombre de plaques d'immatriculation différentes possibles.

26 Dans chaque cas, déterminer le nombre de codes possibles selon les contraintes données.
Les lettres et les chiffres peuvent être répétés.
a) Un code se compose de 4 lettres.
b) Un code se compose de 4 lettres suivies de 3 chiffres.
c) Un code se compose de 4 lettres suivies de 3 chiffres et se termine par 0.

27 E est l'ensemble $\{a ; b ; c ; d ; e ; f ; g\}$.
a) Déterminer un 6-uplet d'éléments de E.
b) Déterminer le nombre d'éléments de E^6.

28 E est l'ensemble $\{M ; A ; T ; H ; S\}$.
a) Déterminer un triplet d'éléments de E.
b) Combien de triplets peut-on former ?

29 E est l'ensemble {Fille ; Garçon}.
a) Déterminer à l'aide d'un arbre l'ensemble des triplets d'éléments de E.
b) En tenant compte de l'ordre d'arrivée des naissances, déterminer le nombre de compositions différentes des familles à trois enfants.

30 En informatique, un octet est un 8-uplet d'éléments de $E = \{0 ; 1\}$.
a) Donner un exemple d'octet.
b) Combien y a-t-il d'octets possibles ?

31 Le code d'un cadenas comporte trois chiffres (distincts ou non) de 0 à 9.
Déterminer le nombre de codes différents possibles.

32 On colorie en rouge, vert ou bleu chaque case d'un quadrillage en comportant 30.
Déterminer le nombre de coloriages différents possibles.

33 Un professeur construit la liste des identifiants pour le réseau informatique d'une école composée de 700 élèves. Chaque identifiant est composé de deux lettres : les initiales de l'élève.
Est-il possible que chaque élève ait un identifiant différent ?

Raisonnement par récurrence

Cours 2

Questions flash À l'oral

34 Pour tout entier naturel n, $P(n)$ est la propriété : « $n^2 + 3$ est divisible par 3 ».
Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse.
a) $P(0)$ est vraie.
b) $P(1)$ est vraie.
c) Pour tout entier naturel n, $P(n)$ est vraie.

35 (u_n) est la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n + 2$.
Pour tout entier naturel n, on note $P(n)$ la propriété : « $u_n = 2 \times 3^n - 1$ ».
On suppose que pour un nombre entier naturel k, la propriété $P(k)$ est vraie.
Laquelle de ces affirmations est exacte ?
(1) $P(k+1)$ est la propriété : « $u_{k+1} = 2 \times 3^k - 1$ ».
(2) $P(k+1)$ est vraie. **(3)** $P(k+1)$ est fausse.

36 (u_n) est la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$.
Pour tout entier naturel n, on note $P(n)$ la propriété : « $0 \leqslant u_n \leqslant 2$ ».
a) Vérifier que $P(0)$ est vraie.
b) On suppose la propriété vraie pour un nombre entier naturel k.
Démontrer qu'alors la propriété $P(k+1)$ est vraie.
c) Que peut-on conclure des questions précédentes ?

37 Pour tout entier naturel n, on note $P(n)$ la propriété : « $4^n + 1$ est un multiple de 3 ».
a) On suppose la propriété vraie pour un nombre entier naturel k.
Démontrer que la propriété $P(k+1)$ est vraie.
b) La propriété $P(0)$ est-elle vraie ?
c) Peut-on affirmer : « Pour tout entier naturel n, $4^n + 1$ est un multiple de 3 » ?

38 (u_n) est la suite définie par son premier terme u_0 et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + 6n$.
k désigne un nombre entier naturel.
a) Démontrer que si u_k est pair, alors u_{k+1} est pair.
b) Démontrer que si u_k est multiple de 3, alors u_{k+1} est multiple de 3.
c) À quelle condition les termes de la suite (u_n)
- sont-ils pairs ?
- sont-ils des multiples de 3 ?

39 (u_n) est la suite définie par $u_0 = 120$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1{,}14\, u_n - 7$.
Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n,
$$u_n = 70 \times 1{,}14^n + 50.$$

40 (v_n) est la suite définie par $v_0 = -1$ et pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = v_n + 2n + 2$.
Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n,
$$v_n = n^2 + n - 1.$$

Pour les exercices 41 à 45, démontrer la proposition par récurrence.

41 Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,
$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

42 Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

43 Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,
$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2.$$

44 Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,
$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{1}{3}n(4n^2 - 1).$$

45 Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$,
$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \times \ldots \times \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}.$$

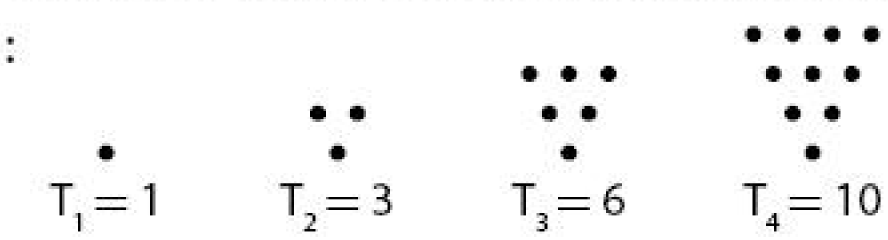
46 **a)** Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'inéquation $4n > 2(n+1)$.
b) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, $2^n > 2n$.

47 (w_n) est la suite définie par $w_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $w_{n+1} = \sqrt{7w_n}$.
a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant w_n \leqslant w_{n+1} \leqslant 7$.
b) En déduire le sens de variation de la suite (w_n).

Vidéo

JAICOMPRIS.COM Cet exercice est corrigé en vidéo

48 Voici les quatre premiers nombres triangulaires :



1. Représenter T_5 et T_6.
2. a) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, exprimer T_{n+1} en fonction de T_n.
b) Conjecturer l'expression de $2T_n$, puis de T_n en fonction de n.
c) Valider cette conjecture par récurrence.

Pour les exercices 49 à 51, démontrer la propriété par récurrence

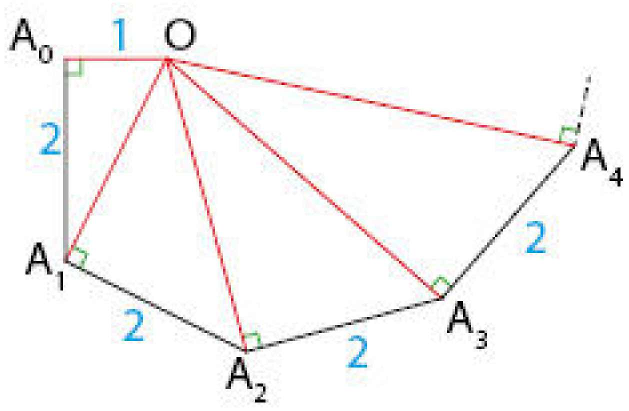
49 Pour tout entier naturel n, $4^n - 1$ est divisible par 3.

50 Pour tout entier naturel n, $4^n - 1 - 3n$ est divisible par 9.

51 Pour tout entier naturel n, $7 \times 3^{5n} + 4$ est divisible par 11.

52 (v_n) est la suite définie par $v_0 = 0{,}25$ et pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 5v_n - 1$.
Démontrer par récurrence que la suite (v_n) est constante.

53 Sur cette figure :
- $OA_0 = 1$;
- $A_0A_1 = A_1A_2 = \ldots = 2$;
- les triangles OA_0A_1, $OA_1A_2, \ldots$ sont rectangles.



Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $OA_n = \sqrt{4n+1}$.

54 À la fin du mois de janvier 2019, 280 voitures ont été louées dans une société de location. On modélise le nombre de voitures louées chaque mois par une suite (u_n), où pour tout entier naturel n, u_n représente le nombre de voitures louées le n-ième mois après le mois de janvier 2019. On admet que cette modélisation conduit à l'égalité $u_{n+1} = 0{,}9u_n + 42$.

a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n = -140 \times 0{,}9^n + 420$.

b) Déterminer le mois à partir duquel le nombre de voitures louées dépassera 400.

55 Algo python

(u_n) est la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\sqrt{u_n^2 + 1}}$.

Le programme suivant écrit en langage Python affiche les termes u_k et $\dfrac{1}{u_k^2}$ pour $k \in \{0 ; 1 ; 2 ; \ldots ; n\}$.

```
from math import *

n=int(input("n="))
u=1
print(0,u,1/u**2)
for i in range(1,n+1):
    u=u/sqrt(u**2+1)
    print(i,u,1/u**2)
```

a) Saisir et exécuter ce programme avec $n = 8$.

b) Conjecturer l'expression de $\dfrac{1}{u_n^2}$, puis de u_n en fonction de n.

c) Démontrer cette conjecture par récurrence.

56 (u_n) est la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n,
$$u_{n+1} = 4 + 5u_n.$$
Manon a réalisé la feuille de calcul ci-contre.

	A	B	C
1	n	u_n	u_n+1
2	0	0	1
3	1	4	5
4	2	24	25
5	3	124	125
6	4	624	625
7	5	3124	3125

a) Émettre une conjecture sur l'expression de u_n en fonction de n.

b) Démontrer cette conjecture par récurrence.

57 Algo python

Voici deux fonctions écrites en langage Python par des élèves.

Paul

```
def U(n):
    u=7
    for i in range(1,n+1):
        u=10*u-18
    return u
```

Pauline

```
def V(n):
    v=5*10**n+2
    return v
```

a) Décrire les suites (u_n) et (v_n) dont ces fonctions permettent de calculer les termes.

b) Les deux élèves remarquent que les valeurs affichées pour un même entier naturel n saisi sont identiques pour les deux programmes.
Émettre alors une conjecture et la démontrer.

58 Algo python

Le programme ci-dessous écrit en langage Python permet de comparer les premiers termes de deux suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

```
n=int(input("n="))
u=1/2
for i in range(1,n+1):
    u=(i+1)/(2*i)*u
    v=(1+i)/(2**(1+i))
    if u==v:
        print("Vrai")
    else:
        print("Faux")
```

a) Décrire les deux suites (u_n) et (v_n).

b) Saisir et exécuter ce programme pour $n = 15$.

c) Émettre alors une conjecture et la démontrer.

d) Comment expliquer les résultats obtenus pour $n = 30$?

Parties d'un ensemble

Cours 3

Questions flash À l'oral

59 E est l'ensemble $\{a\,;b\,;c\,;d\}$.
Une partie de E est :
(1) l'ensemble $\{a\,;a\}$;
(2) le quadruplet $(a\,;b\,;c\,;d)$;
(3) l'ensemble $\{a\,;c\,;d\}$.

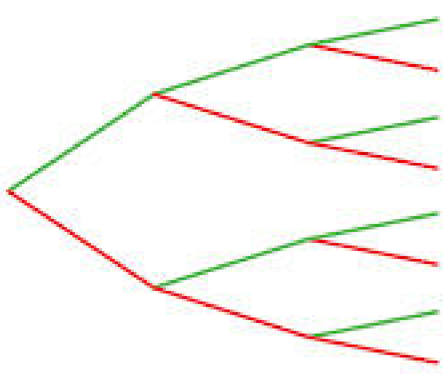
60 E est l'ensemble $\{0\,;1\,;2\,;3\,;4\}$.
Alice affirme : « E a 16 parties ».
A-t-elle raison ? Expliquer.

61 E est l'ensemble $\{0\,;1\}$.
a) Déterminer le nombre de parties de l'ensemble E.
b) Écrire toutes ces parties.

62 E est l'ensemble $\{a\,;b\,;c\,;d\}$.
a) Déterminer le nombre de parties de l'ensemble E.
b) Écrire toutes ces parties.

63 Dans un casino, à chaque manche d'un jeu, le gain peut être de -3 €, 1 € ou 5 €.
Un client joue entre 0 et 3 manches.
a) Déterminer le nombre de parties de l'ensemble $E=\{-3\,;1\,;5\}$.
b) Écrire ces parties.
c) En déduire les gains possibles du client.

64 Expliquer comment l'arbre ci-dessous permet de retrouver l'ensemble des parties de l'ensemble $E=\{a\,;b\,;c\}$.



65 E est l'ensemble $\{0\,;1\,;2\,;3\}$.
Recopier et compléter par $\in$, $\notin$, $\subset$ ou $\not\subset$.

a) $0 \ldots E$
b) $\{4\} \ldots E$
c) $\{0\} \ldots E$
d) $\{0\,;1\,;2\} \ldots E$
e) $4 \ldots E$
f) $\{0\,;1\,;5\} \ldots E$

66 On considère les ensembles $E=\{1\,;2\}$ et $F=\{0\}$.
a) Déterminer l'ensemble $G=E\times F$.
b) Déterminer le nombre de parties de l'ensemble G.
c) Déterminer l'ensemble $H=F\times E$.

67 E est l'ensemble $\{u\,;v\,;w\,;x\,;y\,;z\}$.
a) Déterminer le nombre de parties de E.
b) On fait correspondre chaque partie de E à un 6-uplet de l'ensemble $\{0\,;1\}$.
À quel 6-uplet correspond la partie $\{u\,;w\,;z\}$?
c) À quelle partie de E correspond le 6-uplet $(1\,;1\,;1\,;1\,;1\,;0)$?

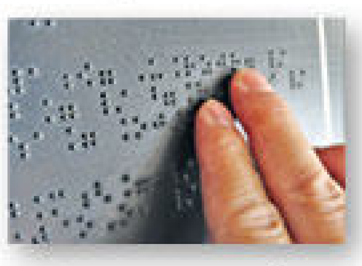
68 On donne $E=\{0\,;1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\,;7\,;8\,;9\}$.
a) Déterminer le nombre de parties de E.
b) À quelle partie de E correspond le 10-uplet de l'ensemble $\{0\,;1\}$ suivant : $(0\,;1\,;0\,;1\,;0\,;1\,;0\,;1\,;0\,;1)$?

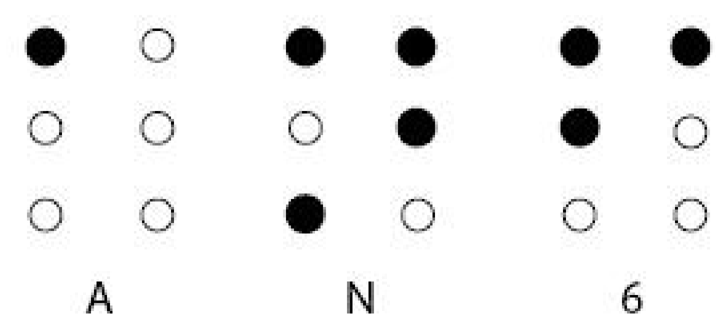
69 **Algo** python
E est un ensemble à n éléments avec $n\in\mathbb{N}$.
1. a) Déterminer le nombre de parties de E.
b) Justifier qu'ajouter un nouvel élément à l'ensemble E, distinct des autres, revient à multiplier le nombre de ses parties par 2.
2. Henri voudrait connaître le plus petit nombre N d'éléments d'un ensemble E afin qu'il ait au moins m parties, avec m entier naturel donné. Voici une fonction **Seuil** écrite en langage Python qui renvoie le nombre N cherché.

```
def Seuil(m):
    N=0
    nb_parties=1
    while nb_parties□m:
        nb_parties=□
        N=N+1
    return N
```

a) Saisir ce programme en complétant les cadres rouge et vert.
b) Exécuter cette fonction pour $m=10\,000$ puis pour $m=1\,000\,000$. Interpréter les résultats.

70 Le braille est un système d'écriture tactile à points saillants. On représente chaque caractère braille par une grille composée de 6 points (sur deux colonnes) saillants ou non. Sur les exemples ci-dessous, les points saillants sont noirs.
Une grille sans point saillant représente un espace et non pas un caractère.





Déterminer le nombre de caractères braille que l'on peut former.

71 Un enfant pioche dans un sac composé de 10 jetons de couleurs différentes.
Combien de poignées différentes, éventuellement vides, cet enfant peut-il extraire du sac ?

72 QCM **Dans chaque cas, donner la réponse exacte sans justifier.**

		A	B	C	D
1	$E = \{1\,;2\,;3\}$ et $F = \{3\,;4\}$. Le nombre d'éléments de $E \cup F$ est …	1	4	5	6
2	$E = \{1\,;2\}$ et $F = \{1\,;2\,;3\}$. Alors le nombre d'éléments de $E \times F$ est égal à …	5	6	1	2
3	Le nombre de parties de l'ensemble $E = \{R\,;V\,;B\}$ est égal à …	27	17 576	8	3
4	E est un ensemble à n éléments. Si $n \neq k$ alors le nombre d'éléments de E^k est égal à …	n^k	k^n	2^n	k
5	Pour tout entier naturel n, on note $P(n)$: « $10^n + 1$ est multiple de 9 ». Alors …	$P(0)$ est vraie	$P(1)$ est vraie	pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie	pour tout $k \in \mathbb{N}$, si $P(k)$ est vraie, alors $P(k+1)$ est vraie

73 QCM **Dans chaque cas, donner la (ou les) réponse(s) exacte(s) sans justifier.**

		A	B	C	D
1	Un quadruplet de l'ensemble $E = \{a\,;b\,;c\,;d\}$ est …	$\{b\,;a\,;c\,;d\}$	$(b\,;a\,;c\,;d)$	$(a\,;a\,;a\,;a)$	$(a\,;b)$
2	Un partie de l'ensemble $E = \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\}$ est …	$\varnothing$	$\{5\}$	$\{5\,;4\,;3\}$	$\{1\,;6\}$
3	La propriété $P(0)$ est vraie lorsque pour $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est …	« $2^n = n^2$ »	« 2^n est pair »	« 2^n est impair »	« $2^n \geqslant 2$ »
4	Pour $n \in \mathbb{N}$, la propriété $P(n)$ est héréditaire lorsque $P(n)$ est …	« $2^n = n^2$ »	« 2^n est pair »	« 2^n est impair »	« $2^n \geqslant 2$ »
5	Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, la propriété $P(n)$ est vraie lorsque $P(n)$ est …	« $2^n = n^2$ »	« 2^n est pair »	« 2^n est impair »	« $2^n \geqslant 2$ »

74 Vrai/Faux **Dans chaque cas, dire si l'affirmation est vraie ou fausse en justifiant.**

1 (u_n) est la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}5u_n + 1$.
Affirmation : pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 2$.

2 E est l'ensemble des nombres à quatre chiffres pris dans l'ensemble $\{1\,;2\,;3\,;4\}$.
Affirmation : le nombre d'éléments de E est 4 444.

3 E est un ensemble à n éléments, avec $n \in \mathbb{N}$, et F est l'ensemble $\{0\,;1\}$.
Affirmation : le nombre de parties de E est égal au nombre d'éléments de F^n.

Vérifiez vos réponses : p. 529

75 Démontrer avec une récurrence forte

Pour démontrer qu'une propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$, on doit quelquefois utiliser **une récurrence forte** :

Initialisation : on vérifie que $P(n_0)$ est vraie.
Hérédité : on suppose que $P(n_0), P(n_0+1), \ldots, P(k)$ avec $k \geqslant n_0$ sont vraies.
On démontre alors que $P(k+1)$ est vraie.
Conclusion : pour tout entier naturel n, $P(n)$ est vraie.

(u_n) est la suite définie par $u_1 = 1$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$u_{n+1} = \frac{1}{n}(u_1 + u_2 + \ldots + u_n).$$

On se propose de démontrer par récurrence forte que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, la propriété $P(n)$: « $u_n = 1$ » est vraie.

Rédiger la démonstration en suivant le guide ci-dessous.

(1) Initialisation : $u_1 = \ldots$ donc …
(2) Hérédité : on … que pour un entier naturel $k \geqslant 1$, $P(1), P(2), \ldots, P(k)$ sont vraies, c'est-à-dire que $u_1 = \ldots, u_2 = \ldots, \ldots, u_k = \ldots$.
On se propose de … que $P(\ldots)$ est vraie c'est-à-dire que $\ldots = \ldots$.

$$u_{k+1} = \frac{1}{k}(\ldots + \ldots + \ldots + \ldots) = \frac{1}{k} \times \ldots = \ldots .$$

(3) Conclusion : rédiger une phrase de conclusion.

Conseil
Penser à utiliser les hypothèses de récurrence ; ici, elles permettent de remplacer $u_1, \ldots, u_k$ par leurs valeurs dans l'expression de u_{k+1}.

76 Démontrer avec une récurrence double

Pour démontrer qu'une propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$, on doit quelquefois utiliser une récurrence double :

Initialisation : on vérifie que $P(n_0)$ et $P(n_0+1)$ sont vraies.
Hérédité : on suppose que pour un entier naturel $k \geqslant n_0$, $P(k)$ et $P(k+1)$ sont vraies.
On démontre alors que $P(k+2)$ est vraie.
Conclusion : pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$, $P(n)$ est vraie.

(u_n) est la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = -5$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n.$$

On se propose de démontrer par récurrence double que pour tout entier naturel n, la propriété $P(n)$: « $u_n = 4 \times 2^{n+1} - 7 \times 3^n$ » est vraie.

a) Vérifier que $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies.
b) Supposer que pour un entier naturel k, $P(k)$ et $P(k+1)$ sont vraies, et démontrer qu'alors $P(k+2)$ est vraie.
c) Conclure.

Conseil
Ici, il y a deux hypothèses de récurrence ; elles permettent de remplacer u_k et u_{k+1} par leurs expressions dans l'expression de u_{k+2}.

77 Démontrer de deux façons

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $2^n \geqslant n+1$.
2. E est un ensemble à n éléments.
a) Justifier que l'ensemble E possède au moins $n+1$ parties.
b) Déterminer le nombre de parties de l'ensemble E.
c) En déduire la propriété établie à la question **1**.

Manipuler et dénombrer des ensembles

78 **PARCOURS DIFFÉRENCIÉS**

Parcours 1

Un code secret est composé de 6 chiffres, distincts ou non, compris entre 0 et 9.
Déterminer le nombre de codes possibles.

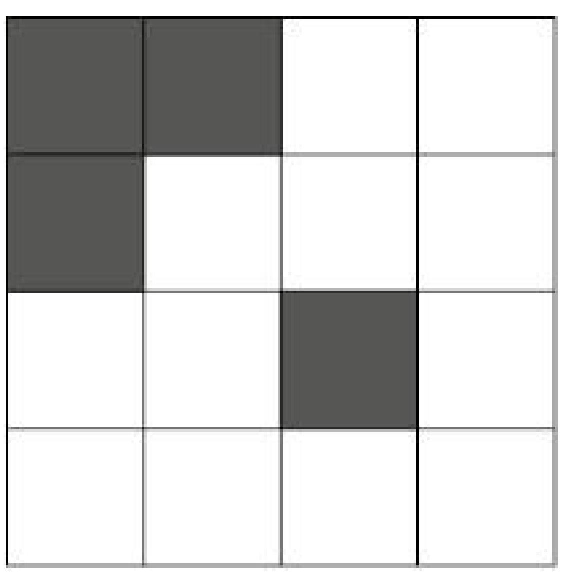
Parcours 2

Un mot est composé de 6 lettres, distinctes ou non, de l'alphabet.
a) Justifier qu'un de ces mots est un élément de E^6 où E est l'ensemble des lettres de l'alphabet.
b) Déterminer le nombre d'éléments de E^6.
c) En déduire le nombre de mots possibles.

79 **a)** Démontrer que si A, B et C sont trois parties d'un ensemble fini E, $\text{Card}(A \cup B \cup C)$ est égal à :
$$\text{Card}(A) + \text{Card}(B) + \text{Card}(C) - \text{Card}(A \cap B) - \text{Card}(A \cap C) - \text{Card}(B \cap C) + \text{Card}(A \cap B \cap C).$$
b) On note M la spécialité de Mathématiques, SP celle de Sciences Physiques et SVT celle de Sciences et Vie de la Terre. Les 36 élèves d'une classe de Seconde choisissent leurs spécialités de Première : 13 ont choisi M, 10 SP et 7 SVT. De plus, 6 ont choisi M et SP, 2 M et SVT, et 3 SP et SVT. Enfin, 2 ont pris ces 3 spécialités.
Combien d'élèves n'ont pris aucune de ces trois spécialités ?

80 $A = \{1\,;2\,;4\}$, $B = \{3\,;4\}$, $C = \{0\,;1\,;4\}$, $D = \{0\,;3\}$.
a) Déterminer $A \times B$, $C \times D$, puis $(A \times B) \cap (C \times D)$.
b) Déterminer $A \cap C$, $B \cap D$, puis $(A \cap C) \times (B \cap D)$.
c) Quel résultat peut-on conjecturer ?
d) On admet que cette conjecture est vraie.
Déterminer $(A \times B) \cap (C \times D)$ pour :
$A = \{2\,;3\,;\ldots\,;10\}$, $B = \{11\,;12\,;\ldots\,;100\}$, $C = \{0\,;1\,;2\}$ et $D = \{3\,;4\,;\ldots\,;11\}$.

81 On considère des grilles carrées de mots croisés de 16 cases noires ou blanches. On suppose que les grilles comportant 16 cases noires ou aucune case noire sont également des grilles de mots croisés.
Déterminer le nombre de ces grilles de mots croisés possibles.



82 En informatique, un caractère peut être une lettre minuscule ou majuscule, un chiffre, un espace, des guillemets … La norme ASCII est un système de codage associant chaque caractère à un 7-uplet d'éléments de l'ensemble $\{0\,;1\}$.
a) Le nombre de caractères utilisés par les anglophones est égal à 95. Ce codage est-il adapté ?
b) Les langues latines nécessitent 191 caractères. Déterminer la valeur minimum de k telle que chaque caractère puisse être associé à un k-uplet d'éléments de l'ensemble $\{0\,;1\}$. Un de ces k-uplets est appelé un octet et la norme de codage est appelée Latin-1.

83 Raymond Queneau a intitulé un de ses ouvrages *Cent mille milliards de poèmes*. Celui-ci est composé de 14 pages comprenant chacune 10 vers. Pour composer un poème, il suggère de choisir un vers dans chaque page : le vers choisi à la page 1 est le premier vers du poème, le vers choisi à la page 2 est le deuxième vers du poème, et ainsi de suite.
L'intitulé du livre est-il exact ?

84 Le morse est un système de codage utilisant deux signaux, le point • et le trait —.
Par exemple, — — • — — • • • • signifie MATH.
On dit que cette séquence est de longueur 9.
1. a) Déterminer le nombre de séquences de longueur n, avec n nombre entier naturel non nul.
b) Déterminer la valeur minimum de n de façon à pouvoir coder les vingt-six lettres de l'alphabet par des séquences de longueur n.
c) Pour cette valeur de n, combien y a-t-il de séquences inutilisées ?
2. On se propose donc d'optimiser le choix des séquences.
a) Démontrer que le nombre de séquences de longueur au plus n est égal à $2^{n+1} - 2$.
b) En déduire la valeur minimum de n de façon à pouvoir coder les vingt-six lettres de l'alphabet par des séquences de longueur au plus n.
c) Afin d'optimiser la taille des messages, on ne conserve que les plus courtes séquences. Déterminer le nombre de séquences de longueur 4 inutilisées.
3. Les dix chiffres sont codés par des séquences de longueur 5. Par exemple, — — — — — signifie 0.
a) Déterminer le nombre de séquences inutilisées.
b) Proposer un codage pour chacun des 10 chiffres.

Démontrer par récurrence

85 **PARCOURS DIFFÉRENCIÉS**

Parcours 1

(u_n) est la suite définie par $u_1 = 2$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = u_n - \dfrac{1}{n^2 + n}$.

Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,
$$u_n = \frac{n+1}{n}.$$

Parcours 2

(u_n) est la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{0{,}5u_n^2 + 8}$.

Pour tout entier naturel n, on note P(n) la propriété : « $0 \leqslant u_n \leqslant 8$ ».

a) Vérifier que la propriété P(0) est vraie.

b) On suppose que pour un entier naturel k, la propriété P(k) est vraie.
Démontrer qu'alors la propriété P$(k+1)$ est vraie.

c) Que peut-on conclure des questions précédentes ?

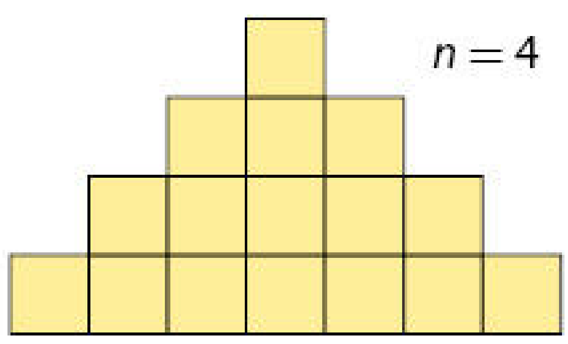
86 n est un nombre entier naturel. On considère n droites du plan sécantes deux à deux et trois quelconques d'entre elles ne sont pas concourantes.

a) Déterminer le nombre de points d'intersection entre ces droites lorsque : • $n = 2$, • $n = 3$, • $n = 4$.

b) On note u_n le nombre de points d'intersection entre n telles droites.
Justifier que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = u_n + n$.

c) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_n = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

87 Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, u_n est le nombre de carrés nécessaires à la construction d'une pyramide comme ci-contre à n étages. Ainsi, $u_1 = 1$.



1. a) Déterminer u_2, puis u_3.

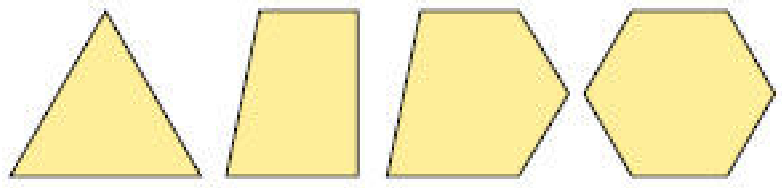
b) Justifier que les nombres de carrés à la base de la pyramide sont les termes d'une suite arithmétique.

c) En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,
$$u_{n+1} = u_n + 2n + 1.$$

d) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_n = n^2$.

2. Retrouver ce résultat à l'aide de la somme des termes d'une suite arithmétique.

88 Pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, d_n est le nombre de diagonales d'un polygone convexe à n sommets.



1. a) Pour chaque polygone convexe ci-dessus, déterminer son nombre de diagonales, puis compléter ce tableau.

n	3	4	5	6
d_n	0			

b) Dans un repère, quelle est l'allure du nuage de points représentant la suite (d_n) ?

c) On admet alors qu'il existe deux réels a et b tels que $d_n = an^2 + bn$. Déterminer a et b.

2. a) Combien de nouvelles diagonales sont créées lors de l'ajout d'un sommet au polygone convexe ?

b) En déduire, pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, l'expression de d_{n+1} en fonction de d_n.

c) Retrouver alors le résultat obtenu à la question **1. c)** par récurrence.

89 Pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, s_n est la somme des mesures des angles, en degré, d'un polygone convexe à n sommets.

a) En reprenant les figures de l'exercice précédent, compléter un tel tableau.

n	3	4	5	6
s_n	180			

b) Émettre une conjecture sur l'expression de s_n en fonction de n.

c) Démontrer cette conjecture par récurrence.

90 (s_n) est la suite définie par $s_0 = 0$ et pour tout entier naturel n,
$$s_{n+1} = s_n + \frac{1}{4(n+1)^2 - 1}.$$

On se propose de déterminer une expression explicite de s_n en fonction de n.

a) Déterminer s_1, s_2, s_3, s_4 sous forme de fractions irréductibles.

b) Émettre une conjecture pour une expression de s_n en fonction de n.
Vérifier si cette expression est cohérente avec les valeurs obtenues au **a)**.
Tester cette expression en déterminant s_5.

c) Démontrer cette conjecture par récurrence.

91 **a)** Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\ldots+\frac{1}{n\times(n+1)}=\frac{n}{n+1}.$$

b) Pour tout entier naturel $k \geqslant 1$, simplifier la différence $\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$. Retrouver alors le résultat précédent.

Vidéo

JaiCompris.com — Cet exercice est corrigé en vidéo

92 Un roi distribue des pièces d'or à ses ministres : au premier ministre, il donne cinq pièces ; au second ministre, il donne le double du premier moins deux pièces ; au troisième ministre, il donne le double du second moins trois pièces ; et ainsi de suite …

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note a_n le nombre de pièces d'or distribuées au n-ième ministre.

a) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, exprimer a_{n+1} en fonction de a_n.

b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $a_n = 2^n + n + 2$.

c) Combien de pièces d'or recevra le 10ᵉ ministre ?

93 Algo python

(u_n) est la suite définie par $u_0 = -1$, $u_1 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{u_n}{4}$.

1. Voici un programme écrit en langage Python qui calcule et affiche les n premiers termes de la suite (u_n).

```
n=int(input("n="))
uprecedent=-1
u=1
print(uprecedent)
print(u)
for i in range(2,n):
    temp=
    u=
    uprecedent=temp
    print(u)
```

a) Indiquer ce qui est caché sous chacun des deux cadres colorés.

b) Modifier le programme afin qu'il affiche également les n premiers termes de la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$v_n = 2^n \times u_n.$$

c) Le saisir et le tester pour $n = 10$.

Quelle conjecture peut-on émettre pour la suite (v_n) ?

d) Selon cette conjecture, exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

2. Démontrer ce résultat par récurrence double (voir exercice **76**).

94 (u_n) est la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = \frac{n(n^2+5)}{6}$.

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, u_n est un entier naturel.

95 (u_n) est la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 3u_n$.

a) Calculer u_2 et u_3.

b) Démontrer par récurrence double (voir exercice **76**) que pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{3^n - 1}{2}$.

96 (F_n) est la suite de Fibonacci définie par $F_0 = 1$, $F_1 = 1$ et pour tout entier naturel n, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

a) Calculer F_2 et F_3.

b) Démontrer par récurrence double que pour tout entier naturel n, $F_n \leqslant \left(\frac{5}{3}\right)^n$.

c) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n,

$$F_0^2 + F_1^2 + \ldots + F_n^2 = F_n \times F_{n+1}.$$

97 (u_n) est la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.

Démontrer par récurrence forte (voir exercice **75**) que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 2^n$.

S'entraîner à la logique → p. 525

98 **Utiliser un contre-exemple**

Chaque affirmation suivante est fausse. Le justifier à l'aide d'un contre-exemple.

E et F sont deux ensembles et on note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

a) L'ensemble $\mathcal{P}(E \cup F)$ est inclus dans l'ensemble $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$.

b) Si E possède deux fois plus d'éléments que F, alors $\mathcal{P}(E)$ possède deux fois plus d'éléments que $\mathcal{P}(F)$.

99 **Négation**

Pour chacune des affirmations ci-dessous, écrire sa négation, puis dire si celle-ci est vraie ou fausse.

a) Pour tout entier naturel n, la propriété $P(n)$: « $n^2 - 2$ est positif » est vraie.

b) Il existe un entier naturel n tel que la propriété $P(n)$: « $n^3 - n$ est un multiple de 3 » est fausse.

100 GÉNÉRATION DE L'ENSEMBLE DES PARTIES D'UN ENSEMBLE À 2 ÉLÉMENTS OU PLUS

Algo python

1. Passage au binaire

a) E est l'ensemble $\{a\,;b\,;c\,;d\,;e\}$.

L'écriture du nombre décimal 14 en binaire sur 5 chiffres est 01110 car $14 = 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$.

On associe ce code binaire au 5-uplet $(0\,;1\,;1\,;1\,;0)$ et donc à la partie $\{b\,;c\,;d\}$ de l'ensemble E.

Recopier et compléter le tableau ci-contre.

Entier	Entier en binaire	n-uplet associé	Partie associée
14	01110	$(0\,;1\,;1\,;1\,;0)$	$\{b\,;c\,;d\}$
25			
	01101		
			$\varnothing$
$2^5 - 1$			

b) Déterminer les nombres à convertir en binaire afin de leur associer l'ensemble des parties de E.

2. Codage en Python

a) La commande **bin(i)[2:].zfill(n)** retourne la conversion du nombre entier naturel i en binaire sur n chiffres sous forme d'une chaîne de caractères.

```
>>> bin(14)[2:].zfill(5)
'01110'
```

Vérifier les valeurs trouvées dans le tableau précédent.

b) Voici une fonction **Parties** qui a pour paramètre le nombre n d'éléments de E et qui retourne la liste des codes binaires associés aux parties de E en chaînes de caractères.

```
def Parties(n):
    P=[]
    for i in range(    ):
        code=
        P.append(code)
    return P
```

Que doit-on saisir dans les cadres colorés ?

c) La saisir et l'exécuter pour $n = 5$.

d) Il ne reste plus qu'à associer à chaque code sa partie.

Voici une fonction **Traduction** qui a pour paramètres un code binaire sous forme de chaîne de caractères et un ensemble E sous forme d'une liste et qui retourne la partie de E associée au code binaire.

```
def Traduction(code,E):
    partie=[]
    l=len(code)
    for i in range( ):
        if code[i]==  :
            partie.append(E[i])
    return partie
```

Que doit-on saisir dans les cadres colorés ?

e) Modifier la fonction **Parties** afin qu'elle ait pour paramètre l'ensemble E sous forme d'une liste et retourne la liste des parties de E.

f) Exécuter alors la fonction **Parties** pour E = [0, 1], puis E = [0, 1, 2].

3. Application : algorithme glouton

Alice a cinq livres de poids différents : 200 g, 250 g, 600 g, 1 250 g et 1 650 g.

Le poids des livres de son sac doit être de 2 100 g.

On considère alors l'ensemble $E = \{200\,;250\,;600\,;1\,250\,;1\,650\}$ à 5 éléments.

a) Afficher l'ensemble des parties de E.

b) Calculer le poids des livres correspondant à la partie $\{200\,;600\,;1\,250\}$.

c) Compléter la fonction **Poids** ci-contre qui a pour paramètre une partie de E sous forme de liste et retourne le poids des livres correspondant.

```
def Poids(partie):
    somme=0
    for poids in partie:
        somme=somme+
    return somme
```

Par exemple, **Poids([200,600,1250])** retourne 2 050.

d) Modifier la fonction **Parties** afin qu'elle retourne la liste de tous les poids possibles à partir des 5 livres.

e) Tester la commande **Parties([200,250,600,1250,1650])** et repérer le rang des poids égaux à 2 100 g. En déduire les parties de E correspondantes à l'aide du tableau de la question **1.**.

f) Quels livres Alice peut-elle mettre dans son sac ?

Ce type d'algorithme est appelé « algorithme glouton » car le but n'est pas de rechercher la solution de manière méthodique, mais plutôt de construire tous les cas possibles, puis de repérer une solution au problème.

101 ÉTUDE DE DEUX SUITES LIÉES

Algo python

(u_n) et (v_n) sont deux suites définies par $u_0 = 2$, $v_0 = 1$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_n}{2}.$$

1. Premiers calculs à la « main »

a) Calculer u_1, puis v_1.

b) Calculer $u_1 + 2v_1$, puis $u_1 - v_1$.

c) Recopier et compléter le tableau suivant.

n	0	1	2	3	4
u_n					
v_n					
$u_n + 2v_n$					
$u_n - v_n$					

2. Première conjecture sur les termes $u_n + 2v_n$

(t_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $t_n = u_n + 2v_n$.

Voici un programme écrit en langage Python qui calcule et qui affiche les n premiers termes de la suite (t_n).

```
n=int(input("n="))
u=2
v=1
for i in range(1,n+1):
    t=▭
    print(t)
    u=▭
    v=▭
```

a) Compléter les trois cadres colorés.

b) Saisir ce programme et l'exécuter pour $n = 10$.

c) Quelle conjecture peut-on émettre pour la suite (t_n) ?

d) Démontrer cette conjecture par récurrence.

3. Deuxième conjecture sur les termes $u_n - v_n$

(w_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = u_n - v_n$.

a) Modifier le programme afin qu'il affiche les n premiers termes de la suite (w_n).

b) Le saisir et l'exécuter pour $n = 10$.

c) Quelle conjecture peut-on émettre pour la suite (w_n) ?

d) Démontrer cette conjecture par récurrence.

4. Expressions de u_n et v_n en fonction de n

a) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système :

$$\begin{cases} a + 2b = 4 \\ a - b = \left(\dfrac{1}{4}\right)^n \end{cases} \quad (n \text{ entier naturel donné}).$$

b) En déduire, pour tout entier naturel n, les expressions de u_n et v_n en fonction de n.

102 Déterminer un minimum

Problème ouvert

Représenter **Raisonner**

Combien d'éléments peut contenir un ensemble E possédant au moins 1 000 parties et tel qu'il y ait moins de 250 000 cinq-uplets d'éléments de E ?

103 Use the golden number

Représenter **Calculer** **Communiquer**

The golden number is the irrational real number defined as $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

(b_n) is the sequence defined by $b_1 = \dfrac{1}{\varphi}$ and for any integer n, $b_{n+1} = b_n \times \varphi$.

a) Compute the first seven terms of the sequence (b_n) and give the answers in the form $\alpha + \beta\sqrt{5}$ where α and β are rational numbers.

b) Check, using the exact values, that for any integer n lower than 5, $b_n + b_{n+1} = b_{n+2}$.
Deduce the probable values of b_8, b_9 and b_{10}.

c) Check that $\dfrac{1}{\varphi} + 1 = \varphi$ and deduce that for any positive integer n, $\varphi^n + \varphi^{n+1} = \varphi^{n+2}$.

d) In a table, compare the approximate values of the sums $b_1 + b_2$, $b_1 + b_2 + b_3$, $b_1 + b_2 + b_3 + b_4$ with the values of φ^2, φ^3, φ^4.
Deduce from the previous question a possible formula for $b_1 + b_2 + \ldots + b_n$. Prove the formula.

104 Prendre des initiatives

Chercher **Raisonner**

(u_n) est la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n + 2n^2 - n$.
(v_n) est la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = u_n + 2n^2 + 3n + 8.$$

Déterminer une expression de (v_n), puis de (u_n) en fonction de n.

105 Comparer par récurrence

Narration de recherche

Raisonner **Communiquer**

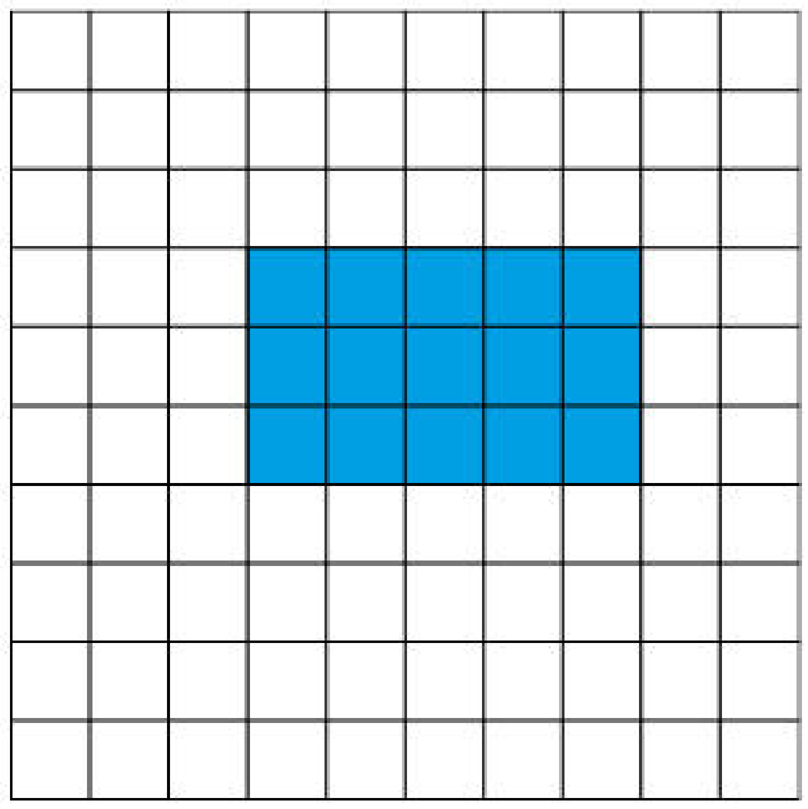
Rédiger les différentes étapes de la recherche, sans omettre les fausses pistes et les changements de méthode.

Problème
Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 4$, le nombre de parties d'un ensemble E à n éléments est supérieur ou égal au nombre d'éléments de E^2.

106 Imaginer une stratégie

Chercher **Représenter**

n désigne un nombre entier naturel non nul.
Dans une grille carrée de n^2 carrés, on considère les rectangles dont les côtés sont portés par les lignes du quadrillage comme sur la figure ci-dessous.



a) Démontrer que le nombre de tels rectangles est égal à $\left(\dfrac{1}{2}(n+1)n\right)^2$.

b) Comparer ce nombre à $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$.

107 Étudier un produit

Tice

Chercher **Représenter**

(u_n) est la suite définie par $u_1 = \dfrac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2 - u_n}$. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on se propose de déterminer l'expression du produit :

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} u_k = u_1 \times \ldots \times u_n$$

Partie A : exploration du problème

a) À l'aide du tableur, calculer les premiers termes des suites (u_n) et (P_n) et représenter les nuages de points associés.
Expliquer pourquoi les allures obtenues incitent à travailler sur les écritures fractionnaires de u_n et P_n.

b) Écrire un programme Python qui affiche les premiers termes des suites (u_n) et (P_n).

c) Émettre deux conjectures, l'une sur l'expression de u_n et l'autre sur l'expression de P_n en fonction de n.

Partie B : traitement mathématique

1. Démontrer par récurrence l'expression conjecturée pour u_n.

2. a) Exprimer P_{n+1} en fonction de P_n et de u_{n+1}.

b) Démontrer par récurrence l'expression conjecturée pour P_n.

108 Raisonner par récurrence avec des suites Algo

30 min

D'après Bac, Antilles-Guyane 2019

Les **parties A** *et* **B** *de cet exercice sont indépendantes.*

Partie A

Indiquer si l'affirmation suivante est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.

(V_n) est la suite définie par $V_0 = 0$ et pour tout entier naturel n,

$$V_{n+1} = \frac{1}{3}\sqrt{V_n^2 + 8}.$$

Affirmation : pour tout entier naturel n,

$$V_n = 1 - \frac{1}{9^n}.$$

Guide de résolution
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$ la propriété :

« $V_n = 1 - \frac{1}{9^n}$ ».

$P(n)$ est-elle vraie pour $n = 0$? $n = 1$?

Partie B

On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n,

$$U_{n+1} = \frac{2U_n}{1 + U_n}.$$

1. Calculer U_1 que l'on écrira sous la forme d'une fraction irréductible.

2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n,

$$U_n = \frac{2^n}{1 + 2^n}.$$

Guide de résolution
2. Rédiger chacune des étapes de la démonstration par récurrence : Initialisation, Hérédité et Conclusion.

3. On considère les trois algorithmes suivants dans lesquels les variables n, p et u sont du type nombre.

Pour un seul de ces trois algorithmes, la variable u ne contient pas le terme U_n en fin d'exécution.

Déterminer lequel en justifiant votre choix.

Algorithme 1 : au début, on affecte la valeur $\frac{1}{2}$ à la variable u et la valeur 0 à la variable i. On donne une valeur à n.

Tant que $i < n$
$\quad u \leftarrow \frac{2u}{u+1}$
$\quad i \leftarrow i + 1$
Fin Tant que

Algorithme 2 : au début, on affecte la valeur $\frac{1}{2}$ à la variable u.
On donne une valeur à n.

Pour i allant de 0 à n
$\quad u \leftarrow \frac{2u}{u+1}$
Fin Pour

Algorithme 3 : on donne une valeur à n.

$p \leftarrow 2^n$
$u \leftarrow \frac{p}{p+1}$

Guide de résolution
3. On peut par exemple tester chaque algorithme pour une valeur de n fixée.

109 Raisonner par récurrence en probabilités

30 min

D'après Bac, Liban 2003

Une urne contient quatre boules noires et deux boules blanches.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On répète n fois l'épreuve qui consiste à tirer au hasard une boule puis la remettre dans l'urne ; on suppose que toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées et que les tirages sont indépendants.

On note p_n la probabilité de tirer exactement une boule blanche lors des $n-1$ premiers tirages et une boule blanche lors du n-ième tirage.

1. Calculer les probabilités p_2, p_3 et p_4.

2. On considère les événements suivants :

B_n : « On tire une boule blanche lors du n-ième tirage »,

U_n : « On tire une boule blanche et une seule lors des $n-1$ premiers tirages ».

a) Calculer la probabilité de l'événement B_n.

b) Démontrer que la probabilité de l'événement U_n est égale à :

$$(n-1)\times\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}.$$

c) En déduire l'expression de p_n en fonction de n et vérifier l'égalité :

$$p_n=\frac{n-1}{4}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n}.$$

3. Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on pose $S_n = p_2 + p_3 + \ldots + p_n$.

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$,

$$S_n = 1-\left(\frac{n}{2}+1\right)\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n}.$$

> **Guide de résolution**
> **1.** Réaliser un arbre pondéré.

> **Guide de résolution**
> **2. b)** Sur $n-1$ épreuves, on peut obtenir une boule blanche à la première, ou à la deuxième, ou …, ou à la $(n-1)$-ième épreuve.

> **Guide de résolution**
> **3.** Attention, l'initialisation se fait pour $n = 2$.

110 Étudier une suite définie par récurrence — Algo

30 min

D'après Bac, Polynésie 2012

Partie A

On considère l'algorithme ci-contre.

Au début, on affecte la valeur 0 à la variable U et on donne une valeur à N. En fin d'exécution, l'algorithme renvoie la valeur de U.

Que renvoie l'algorithme pour N = 3 ?

```
Pour k allant de 0 à N − 1
  U ← 3U − 2k + 3
Fin Pour
```

Partie B

(u_n) est la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3.$$

1. Calculer u_1 et u_2.

2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n$.

3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n = 3^n + n - 1$.

4. p est un nombre entier naturel non nul.

On suppose qu'il existe au moins un entier n_0 tel que pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$,

$$u_n \geqslant 10^p.$$

a) Justifier que $n_0 \leqslant 3p$.

b) Déterminer à l'aide de la calculatrice cet entier n_0 pour la valeur $p = 3$.

c) Proposer un algorithme qui, pour une valeur de p donnée, renvoie la valeur du plus petit entier n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, on ait $u_n \geqslant 10^p$.

> **Guide de résolution**
> **4. a)** Démontrer que $u_{3p} \geqslant 27^p$, puis conclure.

111 Étudier deux suites imbriquées Algo

30 min

D'après Bac, Asie 2012

1. On considère l'algorithme ci-contre.
Les variables a, b et N ont des valeurs données. Au début, on affecte la valeur 0 à la variable n.
Reproduire et compléter le tableau suivant, en faisant fonctionner cet algorithme pour $a = 4$, $b = 9$ et $N = 2$. Les valeurs successives de u et v seront arrondies au millième.

```
Tant que n < N :
    n ← n + 1
    u ← (a + b)/2
    v ← √((a² + b²)/2)
    a ← u
    b ← v
Fin Tant que
```

n	u	v	a	b
0			4	9
1				
2				

Dans la suite, a et b sont deux réels tels que $0 < a < b$.

2. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = a$, $v_0 = b$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \text{ et } v_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n^2 + v_n^2}{2}}.$$

a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n,

$$u_n > 0 \text{ et } v_n > 0.$$

b) Démontrer que pour tout entier naturel n,

$$v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 = \left(\frac{u_n - v_n}{2}\right)^2.$$

c) En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant v_n$.

Guide de résolution
2. a) Ne faire qu'une seule démonstration par récurrence dans laquelle, pour un nombre entier naturel n, la propriété est $P(n)$: « $u_n > 0$ et $v_n > 0$ ».

Se préparer À L'ORAL

112 Présenter un exposé

a) Pour deux ensembles finis E et F, rappeler les définitions des ensembles $E \times F$ et E^k (avec $k \in \mathbb{N}$).
Proposer deux situations concrètes de dénombrement où interviennent ces ensembles.
b) Dans un exposé oral de 10 min, présenter son travail.

113 Travailler l'oral en groupe

Résoudre cet exercice en petit groupe, puis en présenter les résultats à l'oral.

(u_n) est la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$.
a) À l'aide de la calculatrice ou d'un algorithme, déterminer les dix premiers termes de la suite (u_n).
b) Conjecturer une expression de u_n en fonction de n.
c) Valider cette conjecture à l'aide d'une démonstration par récurrence.

114 Travailler les compétences orales

▶ **ANTICIPER LES QUESTIONS DU JURY**

1. Préparation de la restitution orale (5 min)
Par groupe de 4, résoudre l'exercice ci-dessous, chaque élève travaillant sur une des quatre propositions.
2. Jeu de rôle (30 min)
Chaque élève présente son résultat à l'oral (2 min), pendant que les trois autres composent le jury. Chaque juré pose une question au candidat (5 min).

Énoncé : E est l'ensemble $\{1 ; a ; 2 ; b ; 3\}$.
Répondre par Vrai ou Faux en justifiant.
a) $\{1 ; 2 ; 3\}$ est une partie de E.
b) Un élément de E^5 est une partie de E.
c) Le nombre de parties de E est égal à 2^5.
d) Pour ajouter 224 parties à l'ensemble des parties de E, il suffit d'ajouter 8 éléments à E.

115 **Par récurrence forte**

(u_n) est la suite de nombres réels positifs telle que $u_1 = 1$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 2$,

$$u_n^2 = u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}.$$

Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_n \geqslant \dfrac{n}{4}$ (voir exercice **75**).

116 **Par récurrence double**

(u_n) est la suite définie par $u_0 = u_1 = 1$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{2}{n+2}u_n.$$

Démontrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $1 \leqslant u_n \leqslant n^2$ (voir exercice **76**).

117 **Autour de la fonction cos**

(u_n) est la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

On donne la formule suivante : pour tout réel x,

$$1 + \cos(2x) = 2\cos^2(x).$$

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right)$.

Conseil : observer le signe de $\cos\left(\dfrac{\pi}{2^{n+2}}\right)$ pour tout entier naturel n.

118 **Suites extraites (1)**

(x_n) et (y_n) sont deux suites définies par $x_0 = 3, y_0 = 1$ et pour tout entier naturel n,

$$\begin{cases} x_{n+1} = 4 - 2y_n \\ y_{n+1} = x_n - 2 \end{cases}.$$

a) Représenter dans un repère orthonormé les points M_n de coordonnées $(x_n ; y_n)$ pour $0 \leqslant n \leqslant 3$.

b) On pose pour tout entier naturel n, $v_n = x_{2n}$.
Démontrer par récurrence que pour tout entier n,

$$v_n = \frac{1}{3}(-2)^n + \frac{8}{3}.$$

c) On pose pour tout entier naturel n, $w_n = x_{2n+1}$.
Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n,

$$w_n = -\frac{2}{3}(-2)^n + \frac{8}{3}.$$

d) Pour tout entier naturel n, en déduire les coordonnées des points M_{2n} et M_{2n+1} en fonction de n.

119 **Suites extraites (2)**

f est la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = 2 + \dfrac{1}{x}$.

(u_n) est la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. a) Représenter dans un repère orthonormé la courbe représentative de la fonction f ainsi que la droite d'équation $y = x$.

b) Représenter alors les quatre premiers termes de la suite (u_n) sur l'axe des abscisses sans effectuer de calcul.

c) Émettre une conjecture sur le sens de variation de la suite (u_{2n}), puis de la suite (u_{2n+1}).

2. a) Résoudre dans $]0 ; +\infty[$ l'équation $f(x) = x$.

b) Étudier les variations de la fonction $g : x \mapsto f(f(x))$ sur $]0 ; +\infty[$.

c) Démontrer que la suite (u_{2n}) est positive et croissante, puis que pour tout entier n, $u_{2n} \leqslant 1 + \sqrt{2}$.

d) Démontrer que la suite (u_{2n+1}) est positive et décroissante, puis que pour tout entier n, $u_{2n+1} \geqslant 1 + \sqrt{2}$.

120 **Algo** python

Une suite étrange

(u_n) est la suite définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par $u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n}$.

1. Calculer les cinq premiers termes de la suite (u_n).

2. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

3. Voici une fonction **L** écrite en langage Python qui a pour paramètre un nombre entier naturel $n \geqslant 2$ et qui renvoie le n-ième terme de la suite (u_n).

```
def L(n):
    u=1
    for i in range(    ):
        u=
    return u
```

a) Que doit-on saisir dans les cadres colorés ?

b) La saisir, puis l'exécuter pour $n = 10^8$ et $n = 1 + 10^8$.

c) Quelle conjecture peut-on émettre ?

4. a) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$u_{2n} - u_n \geqslant \frac{1}{2}.$$

b) Démontrer alors, par récurrence, que pour tout entier naturel k, $u_{2^k} \geqslant 1 + \dfrac{k}{2}$.

c) A désigne un nombre réel positif.
Démontrer qu'il existe un entier naturel p tel que $u_p \geqslant A$.

d) En déduire qu'il existe un entier naturel p tel que pour tout entier naturel $n \geqslant p$, $u_n \geqslant A$.

e) Ainsi, les termes (u_n) dépassent à partir d'un certain indice n'importe quel nombre réel positif donné A.
Que dire de la conjecture émise à la question **3.** ?

121 Algo python

Fonctions et suites

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ 1-\mathrm{e}^{-x} & \text{si } x\geqslant 0\end{cases}.$$

On considère la suite (u_n) définie par $u_1=1$ et pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, $u_{n+1}=f(u_n)$.

1. a) Étudier les variations de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\mathrm{e}^x-x-1$.

b) En déduire que pour tout réel x, $\mathrm{e}^x\geqslant x+1$ et que l'égalité a lieu si, et seulement si, $x=0$.

c) Démontrer que pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, $u_n>0$.

2. Voici une fonction **Trace** écrite en langage Python qui a pour paramètre un nombre entier naturel n non nul et qui représente les $n+1$ premiers termes de la suite (u_n).

```
from pylab import *
from math import *

def U(n):
    u=1
    plot(1,u,'r.')
    for i in range(1,n+1):
        u=
        plot(i,u,'r.')
    show()
    return
```

a) Que doit-on saisir dans le cadre rouge ?

b) La saisir et l'exécuter pour $n=100$.

c) Quelle conjecture émettre sur le sens de variation de la suite (u_n) ?

d) Démontrer cette conjecture.

3. a) Démontrer que pour tout entier naturel $n\geqslant 1$,

$$u_{n+1}\geqslant\frac{u_n}{1+u_n}.$$

b) En déduire que pour tout entier naturel $n\geqslant 1$,

$$\frac{1}{u_{n+1}}\leqslant 1+\frac{1}{u_n}.$$

c) Démontrer que pour tout entier naturel $n\geqslant 1$,

$$u_n\geqslant\frac{1}{n}.$$

d) Ajouter une ligne au programme précédent afin de visualiser ce résultat.

122 **Réciproque**

(u_n) est une suite définie sur $\mathbb{N}^*$ à termes non nuls.

a) Démontrer que si pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, $u_n=n$ alors $u_1^3+u_2^3+\ldots+u_n^3=(u_1+u_2+\ldots+u_n)^2$.

b) Énoncer la réciproque de cette implication et la démontrer.

123 **Rangs pairs et impairs**

f est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$.

(u_n) est la suite définie par $u_0=1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=f(u_n)$.

1. a) Déterminer le tableau de variations de f.

b) Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n>0$.

2. a) Établir les deux inégalités : $u_2>u_0$ et $u_3<u_1$.

b) En déduire les variations des suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}).

124 **Nombre de solutions entières**

n désigne un nombre entier naturel.

Les équations suivantes sont à inconnues dans $\mathbb{N}$.

a) Combien l'équation $x_0+x_1=n$ a-t-elle de couples solutions $(x_0\,;x_1)$ dans $\mathbb{N}^2$?

b) Combien l'équation $x_0+x_1+x_2=n$ a-t-elle de triplets solutions $(x_0\,;x_1\,;x_2)$ dans $\mathbb{N}^3$?

125 **Avec une relation de récurrence**

Relation de récurrence : pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1}=1+\frac{1}{u_n}.$$

Dans chaque cas, déterminer si l'on définit ou non une suite (u_n) en prenant :

a) $u_0=-\dfrac{3}{5}$ **b)** $u_0=2$

Des Défis

126 **Établir un résultat de Paul Erdös**

f est une fonction strictement croissante définie sur $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $f(2)=2$ et pour tous entiers naturels p et q, $f(pq)=f(p)\times f(q)$.

Démontrer que pour tout entier naturel n, $f(n)=n$.

HISTOIRE DES MATHS

Paul Erdös (1913-1996) est un mathématicien hongrois. Il s'agit d'un chercheur très prolifique (1 500 publications).

127 **Démontrer une inégalité**

(u_n) est une suite de nombres réels strictement positifs définie sur $\mathbb{N}^*$.

Démontrer que pour tout entier naturel $n\geqslant 1$,

$$(u_1+u_2+\ldots+u_n)\left(\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+\ldots+\frac{1}{u_n}\right)\geqslant n^2.$$