Nombres et calculs

L'actualité des maths

LES NOMBRES : OUTIL POUR LES ÉCHANGES INTERNET

D'abord réservée aux usages militaires et diplomatiques, la cryptologie fait partie intégrante de notre quotidien depuis l'avènement d'Internet et des téléphones portables.

L'algorithme de Luhn permet de vérifier des numéros de carte bancaire et des numéros administratifs en utilisant une clé de contrôle.

Un concours lancé en 1997 a permis la création d'un autre algorithme, l'AES (*Advanced Encryption Standard*), actuellement le plus sûr et le plus utilisé dans les échanges entre ordinateurs. Une compétition en cours porte sur le chiffrement authentifié, qui permettrait simultanément de chiffrer et d'authentifier un message.

La science du secret à l'ère d'internet

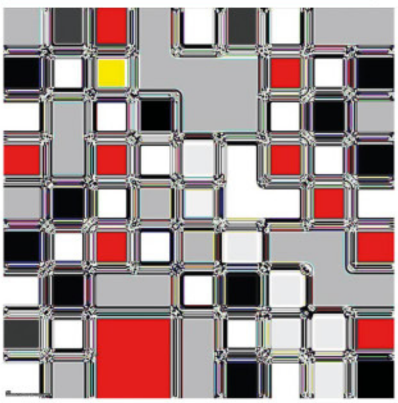
PRÈS DE VINGT-CINQ MILLIONS DE CHIFFRES !

C'est la taille du grand nombre premier découvert le 21 décembre 2018 par Patrick Laroche, George Woltman et Aaron Blosser, membres du projet GIMPS qui regroupe des milliers de volontaires.

Ce nombre, qui peut s'écrire simplement $2^{82\,589\,933} - 1$, est le 51^{e} nombre premier de Mersenne, c'est-à-dire un nombre premier de la forme $2^{p} - 1$.

En janvier 2019, c'est le plus grand nombre premier connu, mais grâce à Euclide, nous savons qu'il y en a de plus grands !

Maths et art



*En 1963, le mathématicien **Stanislas Ulam** eut l'idée de représenter les nombres entiers dans une spirale débutant à 1, orientée vers l'extérieur, et d'entourer les nombres premiers. À sa grande surprise, il vit apparaître certains alignements !*

*La spirale d'Ulam et les nombres premiers peuvent aujourd'hui être une source d'inspiration artistique, comme pour cette œuvre de **Jean-François Colonna**, intitulée **Variation artistique sur la spirale d'Ulam généralisée**.*

Histoire des maths

6e SIECLE AV. J.-C. LA CRISE DES IRRATIONNELS

La légende raconte qu'au 6e siècle av. J.-C., le mathématicien grec **Hippase de Métaponte** bouleversa la construction théorique des pythagoriciens en découvrant l'**irrationalité de $\sqrt{2}$**. Il aurait enfreint la règle de silence de l'école Pythagoricienne en divulguant sa découverte.

Il fut exclu de la communauté, et certains auteurs rapportent qu'il aurait même été jeté en mer par ses condisciples !

Gravure représentant Hippase de Métaponte

16e SIÈCLE NAISSANCE DE L'ALGÈBRE NOUVELLE

C'est à **François Viète** (1560-1603) qu'est due l'ingénieuse idée de désigner par des lettres les quantités que l'on veut soumettre au calcul, d'opérer sur ces lettres à l'aide de symboles particuliers et d'en déduire des formules.

Il a officialisé les **symboles d'opérations** : $+$, $-$, une barre horizontale pour la fraction et in pour la multiplication.

C'est vers 1630 que l'anglais **William Oughtred** introduit le symbole « $\times$ » de la multiplication.

19e SIECLE LA NOTATION DES ENSEMBLES DE NOMBRES

La théorie des ensembles naît à la fin du 19e siècle. En 1888, le mathématicien Richard Dedekind utilise la lettre $\mathbb{N}$ pour l'ensemble des **entiers naturels**, et la lettre $\mathbb{K}$ pour l'ensemble des **entiers relatifs**.

Nicolas Bourbaki (mathématicien imaginaire sous le nom duquel un groupe de mathématiciens français a publié de nombreux ouvrages à partir de 1935) popularisa ensuite l'usage de la lettre $\mathbb{Z}$ de l'allemand *Zahl* (nombre) pour l'ensemble des entiers relatifs.

En 1895, l'ensemble des **nombres rationnels** est noté $\mathbb{Q}$, comme *Quoziente* (quotient) par l'italien Giuseppe Peano.

La lettre $\mathbb{R}$ pour l'ensemble des **nombres réels** est probablement une idée de l'allemand Georg Cantor.

– 384 : Naissance d'Aristote

476 : Chute de l'Empire romain

1202 : Fibonacci introduit la numérotation indo-arabe en Europe

-500 Antiquité | 500 Moyen Âge 1000 | 1500 Renaissance

6e siècle av. J.-C : Découverte des irrationnels

1190 : Chrétien de Troyes écrit *Lancelot ou le Chevalier à la charette*

1591 : Publication de l'*Isagogue* de François Viète

Zoom sur un métier

À l'heure où les échanges de données se multiplient, le **cryptologue, expert en informatique**, a pour mission d'étudier la fiabilité du système d'information d'une entreprise et d'en assurer la sûreté (mots de passe, pare-feu, antivirus, cryptologie, etc.). Ses secteurs d'activité sont nombreux : industrie des cartes à puce, télécommunications, Défense Nationale, équipements réseaux, etc. Il est une sorte de « hacker » légal !

Parcours classique	
	1re et terminale : choix de spécialités scientifiques (mathématiques, …)
2 ans	Classe préparatoire
3 ans	Diplôme d'ingénieur en sécurité pour les systèmes informatiques et les communications
1 an	Master spécialisé en cyber-sécurité (attaque et défense des systèmes informatiques)

Métiers des maths

Installateur en télécoms
Contrôleur de gestion
Inspecteur des finances publiques
Assureur
Administrateur réseaux
Comptable
Consultant sécurité
Hot liner
Informaticien

Orientation ⊕ d'infos sur **secondes2018-2019.fr** onisep

1 Manipuler les nombres réels

Avant

Vers 250 avant J.-C., Archimède fut le premier à mettre en œuvre un algorithme de calculs afin de déterminer les deux premières décimales du nombre π : 3,14.

À présent

Depuis 2016, nous connaissons 22 400 milliards de décimales du nombre π, même si elles ne sont pas tout le temps utilisées. Par exemple, la NASA n'a besoin que des quinze premières décimales de π pour déterminer la trajectoire de ses fusées !
L'intérêt de cette course aux décimales de π est de développer des algorithmes de calculs ingénieux afin de tester la rapidité et la fiabilité des ordinateurs.

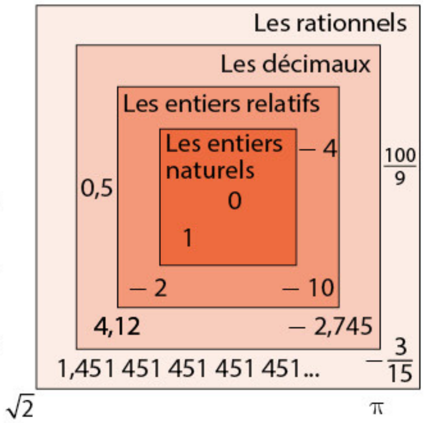
Les capacités travaillées dans ce chapitre	Exercices
• Déterminer la nature d'un nombre.	1 à 4, 13, 25 à 28, 35, 36, 38 à 40, 43
• Utiliser des nombres décimaux, rationnels.	14 à 24, 29, 30, 33, 41
• Utiliser des nombres irrationnels.	31, 32, 37, 42
• Écrire un encadrement décimal d'amplitude donnée d'un nombre réel et donner un arrondi d'un nombre réel en veillant aux chiffres significatifs.	5, 7, 34, 44 à 51
• Utiliser les intervalles.	6, 8, 52 à 62
• Utiliser la distance entre deux nombres réels et la notation valeur absolue.	9 à 12, 63 à 76

1 Les nombres réels

Un professeur dispose de cartes sur lesquelles sont inscrits différents nombres. En voici certaines :

$-\frac{1}{2}$	5	$\frac{1}{3}$	$3{,}14$	-1	$\sqrt{4}$	$-\frac{15}{7}$	$\sqrt{\frac{9}{4}}$	$\frac{1}{10}$

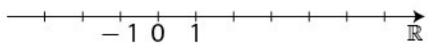
Les élèves doivent positionner correctement ces nombres sur le schéma ci-dessous.



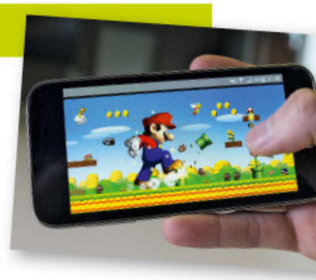
1 **a)** Louis affirme : « $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$ sont des nombres décimaux. »
Quelle erreur commet-il ?
b) Réaliser ce schéma et placer les nombres des neuf cartes.

2 Les nombres situés en dehors des carrés sont appelés **nombres irrationnels** car ils ne peuvent pas s'écrire sous forme fractionnaire.
a) Avec la calculatrice, remarquer la différence entre la partie décimale d'un nombre rationnel et d'un nombre irrationnel (π ou $\sqrt{2}$).
b) Construire un dernier carré regroupant tous les nombres. On dit qu'il s'agit des **nombres réels**.

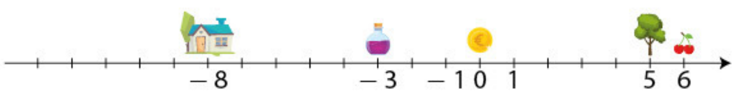
3 **a)** Réaliser la droite numérique ci-contre et placer les nombres des neuf cartes précédentes.
b) **L'intervalle** $[-1\,;\,3]$ est l'ensemble de tous les nombres réels compris entre -1 et 3 (-1 et 3 inclus).
Représenter cet intervalle en rouge sur la droite numérique précédente.
c) Donner un exemple d'intervalle auquel appartiennent les nombres des neuf cartes.



2 Distance entre deux nombres réels



Dans un jeu vidéo, un personnage se déplace le long d'un chemin rectiligne.
On a représenté sur la droite numérique ci-dessous quelques éléments de l'écran.



1 **a)** Quelle est la distance entre les cerises et la pièce d'or ? On dit qu'il s'agit de la distance entre 6 et 0.
b) Quelle est la distance entre -8 et 0 ?

2 On note x l'abscisse de la position du personnage sur cette droite.
a) Exprimer en fonction de x la distance entre x et 0 selon la position du personnage par rapport à la pièce d'or.
b) Interpréter la distance entre x et 5 pour cette situation.
Exprimer en fonction de x cette distance en envisageant deux cas.

3 À un moment donné, le personnage est à égale distance de -3 et de 5.
Quelle est la valeur de x dans ce cas ?

4 Le personnage est invincible lorsque sa distance à -8 est inférieure ou égale à 3.
a) Colorier cette zone d'invincibilité sur la droite numérique.
b) Décrire cette zone d'invicibilité à l'aide de x et d'un intervalle.

Cours

1 Nombres rationnels

A L'ensemble $\mathbb{Q}$

On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des nombres **entiers naturels** : $\mathbb{N} = \{0\,;1\,;2\,;\ldots\}$, et $\mathbb{Z}$ l'ensemble des nombres **entiers relatifs** : $\mathbb{Z} = \{\ldots\,;-3\,;-2\,;-1\,;0\,;1\,;2\,;3\,;\ldots\}$. Ainsi : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ (lire « $\mathbb{N}$ est **contenu dans** $\mathbb{Z}$ »).

Définition - Propriété (admise)

• Un nombre **rationnel** est un nombre qui peut s'écrire sous forme d'une fraction $\frac{a}{b}$ avec a et b deux nombres entiers relatifs, $b \neq 0$.
L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$.

• Tout nombre rationnel non nul admet **une seule** écriture fractionnaire **irréductible** $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ et $q \neq 0$ (dans ce cas, 1 est le seul diviseur commun à p et q).

Exemples

• $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$ • $\frac{14}{-21} \in \mathbb{Q}$ et $\frac{14}{-21} = -\frac{2}{3}$ • $\frac{2,5}{0,7} \in \mathbb{Q}$ car $\frac{2,5}{0,7} = \frac{25}{7}$

Conséquence : les nombres entiers relatifs sont des rationnels ($a = \frac{a}{1}$ avec $a \in \mathbb{Z}$). Ainsi, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Propriété (admise)

Un nombre rationnel admet un développement décimal périodique à partir d'un certain rang.

Exemples

• $\frac{1}{3} = 0,3333\ldots$ • $\frac{13\,193}{49\,950} = 0,264\,124\,124\,12\ldots$ • $2 = 2,000\ldots$ • $\frac{3}{4} = 0,750\,00\ldots$

B Un cas particulier : les nombres décimaux

Définition - Propriété (admise)

• Un nombre **décimal** est un nombre rationnel qui peut s'écrire $\frac{a}{10^n}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.
L'ensemble des nombres décimaux est noté $\mathbb{D}$.

• Un nombre est décimal **si, et seulement si**, il peut s'écrire $\frac{a}{2^m \times 5^p}$ avec $a \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$.

Remarque : cette propriété est démontrée à l'exercice 121 p. 82.

Exemples

• $\frac{1}{2} \in \mathbb{D}$ car $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$ • $-\frac{3}{25} \in \mathbb{D}$ car $-\frac{3}{25} = -\frac{3}{5^2}$ • $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$ (voir exercice résolu 1)

Conséquence : les nombres entiers relatifs sont des décimaux ($a = \frac{a}{10^0}$ avec $a \in \mathbb{Z}$). Ainsi, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.

Propriété (admise)

Un nombre décimal admet un développement décimal avec un nombre fini de chiffres.

Exemples

• $\frac{1}{2} = 0,5$ • $-\frac{3}{25} = -0,12$ • $\frac{217}{125} = 1,736$

2 Nombres réels

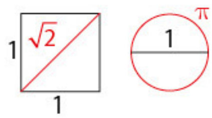
A Définition

Définition

Un **nombre réel** est un nombre qui peut s'écrire avec une partie entière et un nombre fini ou infini de décimales. L'ensemble des nombres réels est noté $\mathbb{R}$.

Exemples

Les nombres réels permettent d'attribuer une mesure à toute grandeur.
- $\sqrt{2} = 1{,}414\ 213\ 562\ 3\ldots$ est la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1.
- $\pi = 3{,}141\ 592\ 653\ 5\ldots$ est la longueur d'un cercle de diamètre 1.

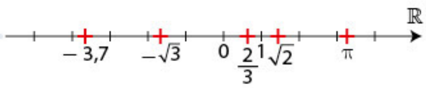


Notations : • On note $\mathbb{R}^*$ ou $\mathbb{R} - \{0\}$ l'ensemble des nombres réels **différents de 0**.
• On note $\mathbb{R} - \{1\,;\,2\}$ l'ensemble des nombres réels différents de 1 et 2.

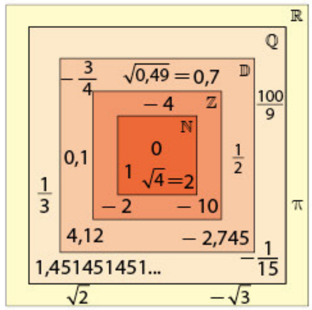
Propriétés (admises)

- À tout point d'une droite graduée est associé un unique nombre réel, son abscisse.
- Réciproquement, à tout nombre réel est associé un unique point d'une droite graduée.

On parle aussi de droite numérique



Conséquence : les nombres rationnels sont des nombres réels.
En effet, leur écriture décimale a un nombre fini ou infini de décimales.
Ainsi, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
Vocabulaire : les nombres réels qui ne sont pas rationnels sont dits **nombres irrationnels** (partie jaune ci-contre).
$\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel (voir exercice 93 p. 34), ainsi que π, …



B Encadrement par des nombres décimaux

Définitions

Un **encadrement décimal** d'un nombre réel x est une écriture $d_1 \leqslant x \leqslant d_2$ **avec d_1 et d_2 nombres décimaux**. La différence $d_2 - d_1$ est l'**amplitude** de l'encadrement.

Exemple

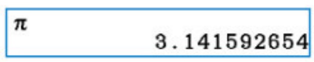
$1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$ est un encadrement décimal de $\sqrt{2}$ d'amplitude 10^{-1}.

Définition

Un nombre réel x est tel que $d_1 \leqslant x \leqslant d_2$ où d_1 et d_2 sont des nombres décimaux à n chiffres $(n \in \mathbb{N})$ après la virgule, avec $d_2 - d_1 = 10^{-n}$.
L'arrondi à 10^{-n} de x est celui de d_1 ou d_2 qui est le plus proche de x. Dans le cas où d_1 et d_2 sont à égale distance de x, l'arrondi à 10^{-n} de x est d_2.

Exemples

- 3,14 est l'arrondi à 10^{-2} (au centième) de π.
- 3,142 est l'arrondi à 10^{-3} (au millième) de π.
- 2,4 est l'arrondi à 10^{-1} de 2,35 (ici, 2,35 est équidistant de 2,3 et 2,4, donc on prend 2,4).



Cours

3 Intervalles. Distance entre nombres réels

A Les intervalles

Ensemble des nombres réels x	Représentation	Intervalle
$a \leqslant x \leqslant b$		$[a\,;b]$
$a \leqslant x < b$		$[a\,;b[$
$x < b$		$]-\infty\,;b[$
$x \geqslant a$		$[a\,;+\infty[$

En b le crochet est ouvert (dirigé vers l'extérieur). Cela signifie que b n'appartient pas à l'intervalle.

On définit de la même façon les intervalles $]a\,;b[$, $]a\,;b]$, $]a\,;+\infty[$ et $]-\infty\,;b]$.

Attention ! $-\infty$ et $+\infty$ ne désignent pas des nombres réels ; du côté de $-\infty$ et de $+\infty$, le crochet est toujours ouvert. Par exemple, on note : $\mathbb{R} =]-\infty\,;+\infty[$.

B Distance entre deux nombres réels

Définition

La **distance** entre deux nombres réels est la différence entre le plus grand et le plus petit.

Ainsi, la distance entre les réels x et a est égale à : $\begin{cases} \boldsymbol{x-a} & \text{lorsque } \boldsymbol{x \geqslant a} \\ \boldsymbol{a-x} & \text{lorsque } \boldsymbol{x \leqslant a} \end{cases}$

Notation : au lieu d'utiliser cette notation sur deux lignes, on utilise la notation condensée $|\boldsymbol{x-a}|$ (lire « **valeur absolue** de $x-a$ ») pour désigner la distance entre x et a.

Cas particulier : lorsque $a=0$, la distance entre x et 0 est $|x-0|$ c'est-à-dire $|x|$ (« valeur absolue de x »).

$|x| = \begin{cases} x & \text{lorsque } x \geqslant 0 \\ -x & \text{lorsque } x \leqslant 0 \end{cases}$

Interprétation géométrique :

Sur une droite graduée d'origine O, M et N sont les points d'abscisses respectives x et y.

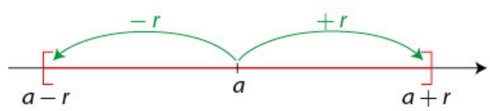
Alors : **MN** $= |x-y|$ et **OM** $= |x|$.

C Lien avec les intervalles

Propriété

a et r désignent deux nombres réels et $r > 0$.

$|\boldsymbol{x-a}| \leqslant \boldsymbol{r}$ équivaut à $\boldsymbol{x \in [a-r\,;a+r]}$.



Démonstration

$|x-a| \leqslant r$ signifie que la distance entre x et a est inférieure ou égale à r.

Ainsi $|x-a| \leqslant r$ équivaut à :

$x-a \leqslant r$ si $x \geqslant a$ ou $a-x \leqslant r$ si $x \leqslant a$

c'est-à-dire $x \leqslant a+r$ si $x \geqslant a$ ou $a-r \leqslant x$ si $x \leqslant a$

Ainsi, pour tout nombre réel x, $|x-a| \leqslant r$ équivaut à $a-r \leqslant x \leqslant a+r$, c'est-à-dire $x \in [a-r\,;a+r]$.

Vocabulaire : on dit que a est **le centre** et r **le rayon** de l'intervalle $[a-r\,;a+r]$.

EXERCICES RÉSOLUS

1 Démontrer qu'un nombre n'est pas décimal

→ Cours 1. B

On se propose de démontrer par l'absurde que $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

a) On suppose que $\frac{1}{3}$ est un nombre décimal. Comment peut-on traduire cette hypothèse ?

b) Pourquoi cela signifie-t-il qu'il existe un nombre n de $\mathbb{N}$ tel que 10^n soit un multiple de 3 ?

c) Trouver la contradiction et conclure.

Solution

a) Cette hypothèse signifie qu'il existe un nombre a de $\mathbb{N}$ et un nombre n de $\mathbb{N}$ tels que $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^n}$.

b) Cette égalité équivaut à $10^n = 3 \times a$.

Ainsi, il existe un nombre n de $\mathbb{N}$ tel que 10^n soit un multiple de 3.

c) L'écriture décimale de 10^n est 1 suivi de n zéros.

La somme des chiffres de 10^n est donc 1.

Ainsi, 10^n n'est pas un multiple de 3, ce qui contredit l'hypothèse faite à la réponse **a)**.

On en conclut que $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

> Pour démontrer par l'absurde, on prend comme hypothèse la négation de la proposition à démontrer et on en déduit une contradiction.

2 Déterminer la nature d'un nombre

→ Cours 1 et 2

Déterminer la nature de chaque nombre.

a) $-\frac{27}{36}$ **b)** $\pi^2 + 1$ **c)** $\frac{4}{3}$ **d)** $-\sqrt{9}$ **e)** $\frac{6\pi}{\pi}$

Solution

a) On écrit la fraction sous forme irréductible : $-\frac{27}{36} = -\frac{9 \times 3}{9 \times 4} = -\frac{3}{4}$.

Or, $-\frac{3}{4} = \frac{-3}{2^2}$. On en déduit que $-\frac{27}{36}$ est un nombre décimal.

b) π est un nombre irrationnel, il en est de même pour π^2 et pour $\pi^2 + 1$. Ainsi, $\pi^2 + 1$ est un nombre réel, irrationnel.

c) $-\frac{4}{3}$ est une fraction écrite sous forme irréductible et son dénominateur n'est pas de la forme $2^m \times 5^p$.

On en déduit que $-\frac{4}{3}$ est un nombre rationnel non décimal.

d) $-\sqrt{9} = -3$. On en déduit que $-\sqrt{9}$ est un nombre entier relatif.

e) $\frac{6\pi}{\pi} = 6$. On en déduit que $\frac{6\pi}{\pi}$ est un nombre entier naturel.

> Déterminer la nature d'un nombre, c'est déterminer le « plus petit » ensemble de nombres auquel il appartient.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 1

3 Démontrer par un raisonnement par l'absurde que le nombre $\frac{1}{9}$ n'est pas un nombre décimal.

Sur le modèle de l'exercice résolu 2

4 Déterminer la nature de chaque nombre.

a) $\frac{11}{50}$ **b)** $\frac{85}{1\,500}$ **c)** $\frac{\pi}{2}$ **d)** $1 - \sqrt{4}$ **e)** $1 - \sqrt{5}$

EXERCICES RÉSOLUS

5 Présenter une approximation

→ Cours 2. B

Des réflecteurs lasers posés sur la Lune permettent de renvoyer vers la Terre des faisceaux d'impulsion laser émis à partir de centres d'études. La durée mise par l'impulsion pour effectuer un aller-retour Terre-Lune est 2,57 s. La vitesse de la lumière dans le vide est environ égale à $c = 299{,}79 \times 10^3$ km·s^{-1}.
Estimer la distance Terre-Lune. *Arrondir en veillant aux chiffres significatifs.*

Solution

On note t la durée d'un aller du faisceau : $t = \dfrac{2{,}57}{2}\,\text{s} = 1{,}285$ s.

On note d la distance Terre-Lune :

$$c = \frac{d}{t}, \text{ c'est-à-dire } d = c \times t.$$

$d = 299{,}79 \times 10^3 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1} \times 1{,}285 \text{ s}$ soit $d \approx 385{,}230\,15 \times 10^3$ km.

Ainsi $d \approx 385{,}2 \times 10^3$ km (avec quatre chiffres significatifs).

Lorsqu'on multiplie deux grandeurs, le résultat ne peut contenir plus de chiffres significatifs que chacune des grandeurs elles-mêmes. Ici, le temps t en compte 4 et la vitesse c en a 5.
Le résultat est donc présenté avec quatre chiffres significatifs.

6 Traduire avec des intervalles

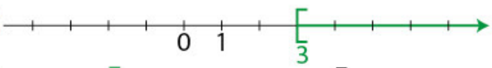
→ Cours 3. A

Dans chaque cas, représenter sur une droite graduée l'ensemble auquel appartient le nombre réel x puis écrire cet ensemble à l'aide d'intervalles.

a) $x \geqslant 3$ **b)** $-2 \leqslant x < 4$ **c)** $x \in \mathbb{R}^*$ **d)** $x \in \mathbb{R} - \{-1\,;\,1\}$.

Solution

a)

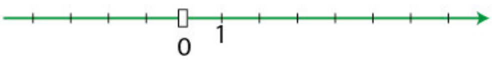


$E_1 = [3\,;+\infty[$

b)

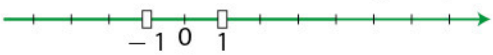
$E_2 = [-2\,;4[$

c) x appartient à l'ensemble $\mathbb{R}^*$ équivaut à $x < 0$ ou $x > 0$.



$E_3 =]-\infty\,;0[\ \cup\ ]0\,;+\infty[$

d) x appartient à l'ensemble $\mathbb{R} - \{-1\,;\,1\}$ équivaut à $x < -1$ ou $-1 < x < 1$ ou $x > 1$.



$E_4 =]-\infty\,;-1[\ \cup\ ]-1\,;1[\ \cup\ ]1\,;+\infty[$

Pour traduire la coordination « ou », on utilise le symbole $\cup$ (lire « union ») entre deux intervalles.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 5

7 On dispose d'un dipôle de puissance P égale à $0{,}25 \times 10^{-2}$ kW. L'énergie consommée E, en kWh, est égale à $P \times t$ où P est la puissance en kW et t le temps de fonctionnement en *h*.
Quelle est l'énergie consommée par ce dipôle durant 3 h 45 min ? *Arrondir en veillant aux chiffres significatifs. (Pour la grandeur P, on ne compte pas le 0 des unités comme chiffre significatif.)*

Sur le modèle de l'exercice résolu 6

8 Dans chaque cas, représenter sur une droite graduée l'ensemble auquel appartient le nombre réel x puis écrire cet ensemble à l'aide d'intervalles.

a) $x < -6$

b) $3 < x \leqslant 7$

c) $x < 0$ ou $x \geqslant 1$

d) $x \in \mathbb{R} - \{3\}$

e) $x \in \mathbb{R} - \{-10\,;0\,;10\}$

EXERCICES RÉSOLUS

9 Passer de la notation valeur absolue aux intervalles

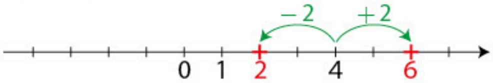
→ Cours 3. B et C

Dans chaque cas, représenter sur une droite graduée l'ensemble auquel appartient le nombre réel x, puis traduire sans la notation valeur absolue.

a) $|x-4|=2$ **b)** $|x+5|<3$ **c)** $|x+5|\geqslant 3$

Solution

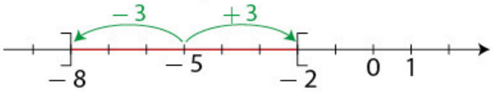
a) Dire que $|x-4|=2$ signifie que la distance entre x et 4 est égale à 2.



$E_1=\{2\,;6\}$

On fait le lien entre la valeur absolue et la distance entre deux nombres réels.

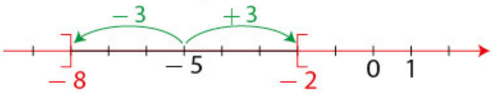
b) Dire que $|x+5|<3$ signifie que la distance entre x et -5 est strictement inférieure à 3.



$E_2=]-8\,;-2[$

$|x+5|=|x-(-5)|$ donc $|x+5|$ désigne la distance entre x et -5.

c) Dire que $|x+5|\geqslant 3$ signifie que la distance entre x et -5 est supérieure ou égale à 3.



$E_3=]-\infty\,;-8]\cup[-2\,;+\infty[$

10 Passer des intervalles à la notation valeur absolue

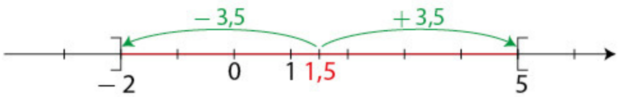
→ Cours 3. B et C

Utiliser la notation valeur absolue pour traduire l'appartenance du nombre réel x à l'ensemble donné :

a) $x\in]-2\,;5[$ **b)** $x\in]-\infty\,;-3]\cup[1\,;+\infty[$

Solution

a) On cherche le centre a de l'intervalle $]-2\,;5[$: $a=\dfrac{-2+5}{2}=1{,}5$. La distance entre -2 et 5 est 7, le rayon de cet intervalle est donc $r=\dfrac{7}{2}=3{,}5$. Ainsi, $x\in]-2\,;5[$ équivaut à $|x-1{,}5|<3{,}5$.

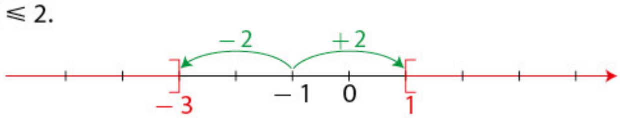


Pour traduire l'appartenance de x à un intervalle I par une valeur absolue, on cherche le centre et le rayon de I.

b) On cherche le centre a de l'intervalle $[-3\,;1]$: $a=\dfrac{-3+1}{2}=-1$.

La distance entre -3 et 1 est 4, le rayon de cet intervalle est donc $r=\dfrac{4}{2}=2$. Ainsi, $x\in[-3\,;1]$ équivaut à $|x+1|\leqslant 2$.

Autrement dit, $x\in]-\infty\,;-3]\cup[1\,;+\infty[$ équivaut à $|x+1|\geqslant 2$.



EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 9

11 Dans chaque cas, représenter sur une droite graduée l'ensemble auquel appartient le nombre réel x, puis traduire sans la notation valeur absolue.

a) $|x+3|=2$ **b)** $|x-4|\leqslant 3$ **c)** $|x+1{,}5|>5$

Sur le modèle de l'exercice résolu 10

12 Utiliser la notation valeur absolue pour traduire l'appartenance du nombre réel x à l'ensemble donné.

a) $x\in[-5\,;6]$ **b)** $x\in]-\infty\,;-5[\cup]0\,;+\infty[$

Calcul mental → Exercez-vous sur la plateforme Hyperbole
⊕ de détails page 4

Nombres rationnels

→ Cours 1

Questions Flash

13 Parmi les nombres rationnels ci-dessous, indiquer ceux qui sont des nombres décimaux.

- $\dfrac{2}{3}$
- $-0{,}33$
- $\dfrac{1}{10}$
- $-\dfrac{6}{3}$

14 Dans cette liste, quelles écritures désignent le nombre $\dfrac{1}{4}$?

- $0{,}25$
- $0{,}4$
- $\dfrac{25}{100}$
- $\dfrac{5}{20}$

15 L'un de ces nombres n'est pas un nombre décimal. Lequel ?

(1) $\dfrac{17}{20}$ **(2)** $\dfrac{3}{4}$ **(3)** $\dfrac{4}{3}$ **(4)** $\dfrac{32}{100}$

16 Sofian affirme : « Tous les nombres rationnels sont des nombres décimaux. » A-t-il raison ?

17 Louane affirme : « $\dfrac{1}{3}$ s'écrit 0,333…, donc j'en conclus que l'écriture de 0,777… sous forme de fraction est $\dfrac{1}{7}$. »
A-t-elle raison ?

18 Dans cette liste, quelle écriture ne désigne pas le même nombre rationnel que les autres ?

- $\dfrac{25}{45}$
- $\dfrac{5}{9}$
- $\dfrac{30}{36}$
- $\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{9}$
- $\dfrac{-10}{-18}$

19 Dans chaque cas, donner deux autres écritures fractionnaires du nombre rationnel.

a) $\dfrac{5}{6}$ **b)** $\dfrac{30}{54}$ **c)** $-\dfrac{5}{17}$

20 **a)** Donner le développement décimal de chacun de ces nombres rationnels.

- $\dfrac{1}{2}$
- $\dfrac{1}{4}$
- $\dfrac{3}{4}$
- $\dfrac{7}{5}$
- $\dfrac{36}{12}$
- $\dfrac{143}{110}$

b) Justifier que ces nombres sont des nombres décimaux.

21 **a)** Donner le développement décimal du nombre rationnel $\dfrac{k}{5}$ pour k prenant les valeurs 1, 2, 3 et 4.

b) Justifier que ces nombres sont des nombres décimaux.

22 Lesquels de ces nombres sont décimaux ?

- $0{,}526$
- $\dfrac{1}{2}$
- $-\dfrac{7}{3}$
- $-\dfrac{4}{5}$
- $\dfrac{16}{2}$
- $\dfrac{0{,}8}{0{,}6}$
- 2×10^{-3}
- $\sqrt{\dfrac{49}{25}}$

23 Lesquels de ces nombres sont décimaux ?

- $\dfrac{2}{3}$
- $\dfrac{16}{240}$
- $\dfrac{54}{31}$
- $\dfrac{156\,250}{1\,128}$
- $-\dfrac{31}{1\,700}$
- $\dfrac{13\,230}{14\,000}$
- $-\sqrt{81}$
- $\dfrac{123}{500}$

24 Lesquels de ces nombres sont des rationnels non décimaux ?

- $\dfrac{1{,}2}{1{,}5}$
- $-\dfrac{7}{3}$
- $0{,}1333$
- $\dfrac{76}{600}$
- $\dfrac{35}{7}$
- $\dfrac{14{,}7}{2}$
- 3×10^{-4}
- $\dfrac{36}{7}$

Pour les exercices 25 à 28, déterminer la nature de chaque nombre.

25 • $\dfrac{81}{4}$ • $\dfrac{4}{81}$ • $\dfrac{15}{5}$ • $\dfrac{7}{40}$

26 • $\dfrac{4+5}{2+5}$ • 10^{-5} • $1{,}78$ • $-\dfrac{1}{3}$

27 • $\dfrac{31}{3\,200}$ • $\dfrac{13}{11}$ • $-\dfrac{14}{3}$ • $-\dfrac{42}{6}$

28 • 3,65 • 3,656 5… • 0,345 243 • 0,345 45…

29 Voici deux listes de nombres.

Liste 1 : $-\dfrac{1}{5}$; $\dfrac{1001}{56}$; $\dfrac{178\,000}{9\,999}$; $\dfrac{1}{6}$; $-\dfrac{577}{50}$

Liste 2 : 0,166 6… ; 17,875 ; 0,08 ; –0,2 ; 17,814 214 2…

Indiquer les nombres de la liste 1 qui sont égaux à un nombre de la liste 2 et préciser pour chacun d'eux leur nature.

30 Adama affirme : « D'après cet écran de calculatrice, le nombre $\dfrac{101}{43}$ est décimal car sa partie décimale a un nombre fini de chiffres. »

```
101÷43
                2.348837209
```

Sa camarade Marine lui propose de soustraire la partie entière 2 et obtient ce nouvel écran :

```
101÷43−2
               0.3488372093
```

Que dire de l'affirmation d'Adama ?

Nombres réels

→ Cours 2

Questions Flash

31 Pour chacun de ces nombres réels, indiquer s'il est rationnel ou irrationnel.

- $2\sqrt{2}$
- $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}}$
- $-\dfrac{15}{7}$
- $\dfrac{3\pi}{4}$

32 Lina affirme : « Le nombre $\dfrac{\pi}{100}$ est rationnel puisque $100 = 10^2$. » A-t-elle raison ?

33 Emmanuel affirme : « 3,243 est un nombre décimal mais pas un nombre réel. » A-t-il raison ?

34 Voici un écran de calculatrice :

```
π
              3.141592654
```

Pour chaque question, indiquer la réponse exacte.

a) Les décimaux permettant un encadrement d'amplitude 10^{-2} de π sont :
(1) 3,14 et 3,15 **(2)** 3,141 et 3,142 **(3)** 3,1 et 3,2

b) L'arrondi au centième de π est :
(1) 3,14 **(2)** 3,15 **(3)** 3,1

c) L'arrondi au millionième de π est :
(1) 3,141 592 **(2)** 3,141 592 7 **(3)** 3,141 593

35 Sur une droite graduée (*unité* : 2 cm), représenter le plus précisément possible les nombres entiers en rouge, les nombres rationnels non entiers en vert et les nombres irrationnels en bleu.

- $-2{,}5$
- $\sqrt{2}$
- $\dfrac{1}{3}$
- $\dfrac{4}{2}$
- $-\dfrac{24}{7}$
- $-\pi$
- $-1{,}67$
- $\dfrac{24}{6}$
- 10^{-1}
- $\dfrac{11}{6}$

36 Recopier et compléter les pointillés par le symbole $\in$ ou $\notin$ qui convient.

- $-15{,}4 \ldots \mathbb{Q}$
- $\dfrac{1}{\pi} \ldots \mathbb{R}$
- $-\sqrt{4} \ldots \mathbb{Z}$
- $\dfrac{9}{11} \ldots \mathbb{D}$
- $\dfrac{12}{6} \ldots \mathbb{N}$
- $\dfrac{\pi}{2} \ldots \mathbb{Q}$

37 Rachel affirme : « $\pi = \dfrac{1980127}{630294}$ »

```
π
              3.141592654
1980127÷630294
              3.141592654
```

A-t-elle raison ?

Pour les exercices 38 à 40, indiquer la nature de chaque nombre.

38
- $\sqrt{2}$
- $-\dfrac{5}{4}$
- 5×10^4
- $\dfrac{8}{7}$
- $\dfrac{\pi}{4}$

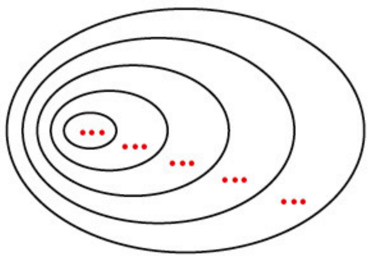
39
- $1{,}414$
- $\dfrac{7}{6}$
- $\sqrt{5} + 4$
- $\dfrac{5\pi}{8\pi}$
- $\sqrt{0{,}81}$

40
- $(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)$
- $3 - \sqrt{5}$
- $\sqrt{54{,}76}$

41 Dans chaque cas, expliquer pourquoi le nombre n'est pas irrationnel. Préciser alors sa nature.

a) $(3 - \sqrt{2})(3 + \sqrt{2})$ **b)** $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$

42 **1. a)** Recopier et compléter ce schéma par les lettres $\mathbb{D}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Z}$.



b) Colorer la partie qui représente les nombres irrationnels en rouge et celle des nombres rationnels non décimaux en vert.

2. Sur ce schéma, placer les nombres :

- $0{,}5$
- 0
- -5
- $\dfrac{8}{4}$
- $\dfrac{7}{3}$
- $-\sqrt{2}$

43 **a)** Recopier et compléter ce tableau dans lequel une croix indique que le nombre appartient à l'ensemble correspondant.

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
$-\dfrac{5}{2}$			X	X	X
$-\dfrac{6}{2}$					
$-\sqrt{121}$					
$\sqrt{7}$					
2π					
$4{,}5 \times 10^{-4}$					
$-\dfrac{7}{9}$					
$\dfrac{617}{8}$					

b) En déduire la nature de chaque nombre.

44 Pour chaque nombre, donner, à l'aide de la calculatrice, un encadrement décimal d'amplitude 10^{-3} puis donner l'arrondi au millième.

a) $\sqrt{7}$ **b)** $-\dfrac{7}{3}$ **c)** π^3

45 Pour chaque nombre, donner, à l'aide de la calculatrice, un encadrement décimal d'amplitude 10^{-2} puis donner l'arrondi au centième.

a) $4-\sqrt{2}$ **b)** $3\sqrt{15}+5\times\dfrac{\pi-1}{6}$ **c)** $\sqrt{\pi-3}$

46 Histoire des maths Vers 250 avant J.-C., le mathématicien grec Archimède démontre que $\dfrac{223}{71}<\pi<\dfrac{22}{7}$.

a) Est-ce un encadrement décimal ?

b) Déterminer l'amplitude de cet encadrement.

Arrondir au millième.

47 Histoire des maths **a)** En Inde, vers 380 av. J.-C., $3+\dfrac{177}{1\,250}$ est utilisé comme valeur approchée de π.

Recopier et compléter :

« Cette valeur est l'arrondi de π à $10^{-\cdots}$. »

b) En Chine, au 5e siècle, $\dfrac{355}{113}$ est utilisé comme valeur approchée de π.

Recopier et compléter : « Cette valeur permet de connaître l'arrondi de π jusqu'à $10^{-\cdots}$. »

48 Pour chaque nombre, donner l'arrondi à la précision demandée avec la calculatrice.

a) $\sqrt{3}-3$ au dixième **b)** $\sqrt{\pi}$ au centième

c) 3π au millième **d)** $4\sqrt{2}$ au centième

49 ABC est un triangle équilatéral de côté 2 cm.

a) Calculer la valeur exacte de sa hauteur AH, en cm, puis déterminer la nature de ce nombre.

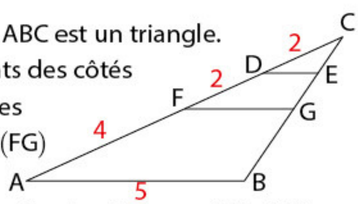
b) Donner son arrondi au dixième.

50 $\mathscr{C}$ est un cercle de rayon 3 cm.

a) Exprimer sa longueur, en cm, en fonction de π, puis déterminer la nature de ce nombre.

b) Donner son arrondi au centième.

51 Sur cette figure, ABC est un triangle. D, E, F, G sont des points des côtés [AC] et [BC] tels que les droites (AB), (ED) et (FG) sont parallèles.



Calculer les valeurs exactes des distances ED et FG, en cm, puis déterminer la nature de chaque nombre.

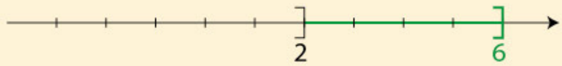
Intervalles

→ Cours 3. A

Questions flash

52 Lequel de ces intervalles est représenté ci-dessous ?

(1) $]2\,;+\infty[$ **(2)** $]2\,;6[$ **(3)** $]2\,;6]$



53 Dans chaque cas, indiquer l'intervalle auquel correspond chaque inégalité.

a) $x>4$:

(1) $[4\,;+\infty[$ **(2)** $]-\infty\,;4[$ **(3)** $]4\,;+\infty[$

b) $-1\leqslant x\leqslant 2$:

(1) $]-1\,;2]$ **(2)** $[-1\,;2]$ **(3)** $]-1\,;2[$

c) $x\leqslant -7$:

(1) $]-\infty\,;-7]$ **(2)** $[-7\,;+\infty[$ **(3)** $]-\infty\,;-7[$

d) $-8<x\leqslant 3$:

(1) $]-8\,;3]$ **(2)** $[-8\,;3]$ **(3)** $[-8\,;3[$

54 Indiquer si l'affirmation est vraie ou fausse.

a) $-3\in\,]-\infty\,;0]$ **b)** $\dfrac{1}{3}\in\,]1\,;+\infty[$

c) $-4\in\,]-\infty\,;-4]$ **d)** $2\in\,]2\,;8]$

Pour les exercices 55 et 56, traduire chaque information donnée par l'appartenance de x à un intervalle ou une réunion d'intervalles et représenter cet ensemble sur une droite graduée.

55 **a)** $3\leqslant x\leqslant 7$ **b)** $x<5$

c) $1<x\leqslant 8$ **d)** $x\leqslant 2$ ou $x\geqslant 3$

56 **a)** $-1\leqslant x<6$ **b)** $x>0{,}4$ **c)** $3{,}9<x$

d) $7{,}1<x<11{,}2$ **e)** $x\leqslant -\dfrac{2}{7}$ **f)** $x\geqslant 5$

Pour les exercices 57 à 59, représenter chaque information sur une droite graduée et la traduire par des inégalités.

57 **a)** $x\in[-2\,;6[$ **b)** $x\in\,]-\infty\,;3]$

c) $x\in[4\,;12]$ **d)** $x\in[5\,;+\infty[$

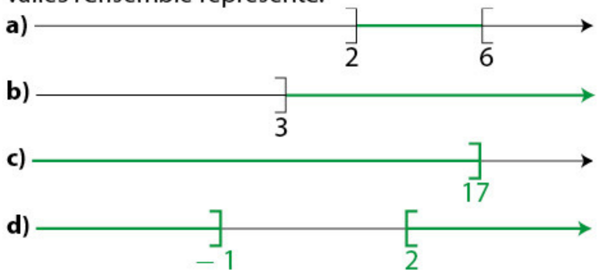
58 **a)** $x\in[-1\,;+\infty[$ **b)** $x\in\,]-5\,;8[$

c) $x\in\,]4\,;10{,}5]$ **d)** $x\in\,]-\infty\,;-2]$

59 **a)** $x\in\,]-\infty\,;0]\cup\,]2\,;+\infty[$ **b)** $x\in\mathbb{R}-\{5\}$

c) $]-\infty\,;-4[\,\cup\,]7\,;+\infty[$ **d)** $x\in\mathbb{R}^*-\{-2\}$

60 Dans chaque cas, désigner avec un ou des intervalles l'ensemble représenté.



61 Recopier et compléter par $\in$ ou $\notin$.

a) $-2{,}5$ ... $[-3\,;5]$
b) $\frac{\pi}{2}$ ... $[-3\,;3[$
c) -7 ... $]-6\,;-3[$
d) 1 ... $[1\,;6]$
e) 0 ... $]0\,;+\infty[$
f) 10^{-1} ... $]-\infty\,;0]$
g) $1{,}3$ ... $[-5\,;0[\,\cup\,]2\,;+\infty[$
h) -4 ... $[-3\,;+\infty[$

62 Dans chaque cas, écrire à l'aide d'un ou des intervalles l'ensemble des nombres réels :

a) supérieurs ou égaux à 8 ;
b) positifs ou nuls ;
c) strictement inférieurs à -4 ;
d) strictement compris entre $-\pi$ et 2π ;
e) strictement inférieurs à 5 ou strictement supérieurs à 10.

Distance entre deux nombres réels

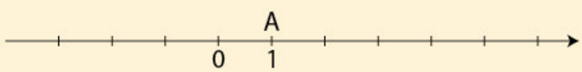
→ Cours 3. B et C

Questions Flash

63 M est un point d'une droite graduée d'origine O. Déterminer mentalement la distance OM lorsque M a pour abscisse :

a) 12 b) -2 c) $1-\sqrt{3}$

64 A est le point d'abscisse 1 d'une droite graduée.



Déterminer mentalement les abscisses possibles du point M lorsque :

a) $AM = 2$ b) $AM \leqslant 3$ c) $AM \geqslant 1$

65 Dans chaque cas, déterminer mentalement la distance entre les deux nombres réels donnés.

a) 6 et 8,3 b) $-0{,}25$ et $0{,}25$ c) -1 et $-3{,}7$

66 Maya affirme : « La distance entre $\sqrt{2}$ et -1 est égale à $\sqrt{2}-1$. » A-t-elle raison ?

67 Dans chaque cas, calculer la distance entre les nombres réels.

a) -5 et 10 b) $-2\sqrt{2}$ et $-\sqrt{12}$ c) $-\pi$ et 4π

68 x désigne un nombre réel. Dans chaque cas, interpréter en terme de distance entre nombres réels.

a) $|x-3|$ b) $|x+6|$ c) $|7-x|$ d) $|-9+x|$

69 Sur une droite graduée, A, B, C et D sont les points d'abscisses respectives -14, $-\frac{1}{2}$, 7 et $\frac{1}{3}$.

Calculer les distances AB, BD, BC et CD.

70 Dans chaque cas, écrire sans la notation valeur absolue.

a) $|2+\pi|$ b) $|1-\sqrt{3}|$ c) $|\pi-4|$

71 Dans chaque cas, représenter sur une droite graduée les points M d'abscisse x vérifiant l'inégalité.

a) $|x| \geqslant 3$ b) $|x-1| < 0{,}5$
c) $|x+4| \leqslant 2$ d) $|x-2| \geqslant 1$

Pour les exercices 72 à 74, représenter sur une droite graduée l'ensemble auquel appartient le nombre réel x puis écrire cet ensemble à l'aide d'intervalles si possible.

72 a) $|x-3| = 4{,}5$ b) $|x-5| \leqslant 4$
c) $|x+1| < 3$ d) $|x-6| \geqslant 2$

73 a) $|x+2| \leqslant 2{,}5$ b) $|x-3| = 9$
c) $|x-4{,}2| < 1{,}2$ d) $|x-\sqrt{2}| > \sqrt{2}$

74 a) $|x| \leqslant 1$ b) $|x| = 5$
c) $\left|x+\frac{2}{5}\right| \geqslant \frac{3}{4}$ d) $|x-\pi| \leqslant 3\pi$

75 Recopier et compléter.

a) $x \in\,]-2\,;4[$ signifie que $|x - ...| < ....$
b) $x \in [...\,;...]$ signifie que $|x-2| \leqslant 4$.
c) $x \in [-5\,;1]$ signifie que $|x...| \leqslant ....$
d) $x \in\,]...\,;...[$ signifie que $|x+3| < 6$.
e) $x \in\,]-\infty\,;0{,}5[\,\cup\,]2\,;+\infty[$ signifie que $|x...| > ....$
f) $x \in\,]-\infty\,;3]\,\cup\,[...\,;+\infty[$ signifie que $|x...| \geqslant 2$.

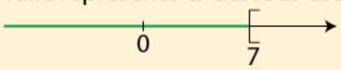
76 x désigne un nombre réel.
Dans chaque cas, utiliser la notation valeur absolue pour traduire l'appartenance de x à l'ensemble.

a) $x \in [-1\,;7]$ b) $x \in\,]-\infty\,;-3]\,\cup\,[1\,;+\infty[$
c) $x \in\,]-10\,;11[$ d) $x \in\,]-\infty\,;-10]\,\cup\,[-3\,;+\infty[$

QCM interactifs

Pour se tester

77 Dans chaque cas, donner la réponse exacte sans justifier.

		A	B	C	D
1	Le nombre $-\dfrac{1}{3}$ appartient à …	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{Q}$
2	Le nombre $\dfrac{48}{15}$ est égal à …	$\dfrac{50}{17}$	$\dfrac{16}{5}$	$\dfrac{40}{7}$	$\dfrac{15}{48}$
3	Le nombre π appartient à …	$]-1\,;3[$	$[4\,;+\infty[$	$[1\,;2] \cup]3\,;7[$	$\mathbb{R}-\{\pi\}$
4	L'intervalle représenté ci-dessous est … 	$]-\infty\,;7]$	$]7\,;+\infty[$	$]-\infty\,;7[$	$[4\,;7[$
5	L'arrondi au centième de $\sqrt{7}$ est …	2,646	2,645	2,65	2,64
6	La distance entre les nombres réels 1 et $\sqrt{2}$ est …	$1+\sqrt{2}$	$1-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}-1$	$-1-\sqrt{2}$
7	L'ensemble des nombres réels x tels que $\lvert x-1\rvert \leqslant 2$ est l'intervalle …	$[-3\,;1]$	$[-1\,;3]$	$]-\infty\,;3]$	$]-1\,;3[$

78 Dans chaque cas, donner la (ou les) réponse(s) exacte(s) sans justifier.

		A	B	C	D
1	Le nombre $\dfrac{319}{160}$ appartient à …	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{Q}$
2	Le nombre $\dfrac{2\pi}{3}$ est un nombre …	rationnel	réel	irrationnel	décimal
3	Le nombre $\dfrac{2}{3}$ a une partie décimale …	finie	illimitée	périodique	illimitée composée de 3
4	Sur une droite graduée, M et N sont les points d'abscisses respectives -4 et $-2{,}5$. La distance MN est …	$\lvert -4+2{,}5\rvert$	$-2{,}5+4$	1,5	$\lvert -2{,}5+4\rvert$

79 Dans chaque cas, dire si l'affirmation est vraie ou fausse en justifiant.

1 x est le nombre décimal 2,52.

Affirmation : une écriture sous forme fractionnaire de x est $\dfrac{63}{25}$.

2 x est le nombre irrationnel $\sqrt{13}$.

Affirmation : un encadrement décimal de x d'amplitude 10^{-2} est $3{,}60 < x < 3{,}62$.

3 E est l'ensemble des nombres réels x vérifiant $\lvert x\rvert \geqslant 4$.

Affirmation : E est l'intervalle $[4\,;+\infty[$.

4 E est l'ensemble des nombres réels x vérifiant $\lvert x+3\rvert = 2$.

Affirmation : E est l'ensemble $\{-5\,;-1\}$.

Vérifiez vos réponses : p. 346

80 Reconnaître un nombre décimal

Parmi les nombres suivants, indiquer ceux qui sont des nombres décimaux.

- $-16{,}75$
- $\dfrac{67}{10^3}$
- $\dfrac{1}{9}$
- $\dfrac{7}{40}$
- $-\pi$

AIDE

- Sous forme décimale, sa partie décimale est finie.
- Sous forme fractionnaire, il est de la forme $\dfrac{a}{10^n}$ ou $\dfrac{a}{2^m \times 5^p}$ avec $a \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$.

81 Reconnaître un nombre irrationnel

Parmi les nombres suivants, indiquer ceux qui sont des nombres irrationnels.

- $\sqrt{4}$
- $\dfrac{1}{3}$
- $\dfrac{\pi}{12}$
- $\sqrt{\dfrac{7}{25}}$
- $3{,}456456\ldots$

AIDE

- Sous forme décimale, sa partie décimale est illimitée et ne possède pas de période.
- Sinon, après simplification, il contient $\sqrt{2}$ ou $\sqrt{3}$ ou … ou le nombre π.

82 Encadrer un nombre réel par des décimaux

Avec la calculatrice, Steven a obtenu l'affichage suivant :

```
√13
              3.605551275
```

Recopier et compléter le tableau ci-dessous par des encadrements décimaux de $\sqrt{13}$ d'amplitudes données.

Amplitude	Encadrement
10^{-1}	$\ldots < \sqrt{13} < \ldots$
10^{-2}	$\ldots < \sqrt{13} < \ldots$
10^{-3}	$\ldots < \sqrt{13} < \ldots$

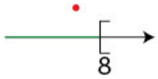
AIDE

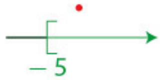
Il y a plusieurs façons pour compléter chaque ligne. Mais, pour une amplitude 10^{-n}, le plus simple est de compléter par deux nombres consécutifs qui ont n chiffres dans leurs parties décimales.

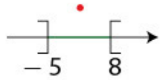
83 Représenter un intervalle

Recopier puis relier chacun des intervalles donnés à sa représentation sur une droite graduée.

$[-5\,;+\infty[$ $\qquad$ $]-5\,;8[$ $\qquad$ $]-\infty\,;8[$







AIDE

Les crochets ouverts correspondant à $-\infty$ et $+\infty$ n'apparaissent pas sur la représentation.

84 Traduire à l'aide de la notation valeur absolue

Recopier puis relier chaque description à sa traduction avec la notation valeur absolue.

- La distance entre x et 1 est égale à 3.
- La distance entre x et 1 est inférieure ou égale à 3.
- La distance entre x et 0 est inférieure ou égale à 3.
- La distance entre x et -1 est supérieure ou égale à 3.

- $|x+1| \geqslant 3$
- $|x-1| \leqslant 3$
- $|x| \leqslant 3$
- $|x-1| = 3$

AIDE

On peut s'aider d'une droite graduée.

EXERCICE RÉSOLU

85 Déterminer un encadrement de $\sqrt{2}$

Le nombre irrationnel $\sqrt{2}$ est la solution positive de l'équation :

$$x^2 - 2 = 0$$

Voici un algorithme dit de **balayage**.

$x \leftarrow 1$
Tant que $x^2 - 2 < 0$
  $x \leftarrow x + 0{,}1$
Fin Tant que
Afficher $x - 0{,}1$ et x

a) Compléter le tableau de suivi de la variable x lorsqu'on exécute pas à pas cet algorithme. Quels sont les nombres affichés en sortie ?

x	1	1,1	…	
$x^2 - 2$	-1	…		
Test $x^2 - 2 < 0$	Vrai	…		

b) Quel est le rôle de cet algorithme ?

c) Coder en langage Python un algorithme modifié de façon que l'utilisateur puisse choisir la valeur initiale donnée à la variable x et l'amplitude p de l'encadrement souhaité.

d) Saisir ce programme et l'exécuter avec $x = 1$ et $p = 10^{-7}$.
Quel affichage obtient-on ? L'interpréter pour $\sqrt{2}$.

Solution

a) Voici le tableau de suivi de la variable x lorsqu'on exécute pas à pas cet algorithme.

x	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
$x^2 - 2$	-1	$-0{,}79$	$-0{,}56$	$-0{,}31$	$-0{,}04$	0,25
Test $x^2 - 2 < 0$	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Faux

L'algorithme affiche 1,4 et 1,5.

b) Le rôle de l'algorithme est d'afficher deux nombres décimaux donnant un encadrement d'amplitude 10^{-1} de $\sqrt{2}$.

c) Voici le programme écrit en langage Python.

```
1 x=float(input("Saisir la valeur initiale du balayage:"))
2 p=float(input("Saisir l'amplitude de l'encadrement:"))
3 while x**2-2<0:
4     x=x+p
5 print(x-p,x)
```

Pour obtenir un encadrement d'amplitude 10^{-n} par des nombres décimaux à n chiffres après la virgule, il faut modifier le programme :
• on saisit au début
from decimal import* ;
• aux lignes 1 et 2, on remplace float par Decimal.
Avec $x = 1$ et $p = 10^{-7}$, on aurait obtenu l'affichage :

```
>>>
1.4142135 1.4142136
```

d) Avec $x = 1$ et $p = 10^{-7}$, on obtient l'affichage ci-dessous, il fournit un encadrement décimal de $\sqrt{2}$ d'amplitude 10^{-7}.

```
>>>
1.4142135002418457 1.4142136002418457
```

Pour 10^{-7}, il faut saisir 1E − 7 dans la boîte de dialogue.

À VOTRE TOUR

86 Le nombre $\sqrt{43}$ est irrationnel. On admet que :

$$6 < \sqrt{43} < 7$$

En vous aidant de l'algorithme de l'exercice 85, proposer un algorithme permettant de donner un encadrement d'amplitude 10^{-5} de $\sqrt{43}$.

87 Le nombre $\sqrt{79}$ est irrationnel. On admet que :

$$8 < \sqrt{79} < 9$$

En vous aidant de l'algorithme de l'exercice 85, proposer un algorithme permettant de donner un encadrement d'amplitude 10^{-6} de $\sqrt{79}$.

EXERCICE RÉSOLU

88 Obtenir le développement décimal d'un nombre rationnel

On effectue ci-contre la division posée de 10 par 7 :
- on divise d'abord 10 par 7 : quotient 1, reste 3 ;
- on met une virgule au quotient et on multiplie le reste par 10, puis on divise 30 par 7 : quotient 4, reste 2 ;
- on répète cette opération autant de fois que nécessaire.

10	7
30	1,428
20	
60	
4…	

On souhaite connaître le développement décimal du rationnel $p = \dfrac{411\,557\,987}{131\,002\,976}$.

1. Déterminer les premières décimales de p à la calculatrice.

2. Afin de déterminer autant de décimales que l'on souhaite de p, on utilise le tableur.

a) Réaliser cette feuille de calcul et saisir :
- en cellule C2, la formule `=ENT(A2/$B$2)` ;
- en cellule D2, la formule `=MOD(A2;$B$2)` ;
- en cellule A3, la formule `=10*D2`.

	A	B	C	D
1	Numérateur	Dénominateur	Quotient entier	Reste
2	411 557 987	131 002 976		

b) Compléter cette feuille de calcul afin d'obtenir les 20 premiers chiffres après la virgule de p.

Solution

1. La calculatrice affiche neuf chiffres après la virgule du nombre rationnel p. On ne peut pas être certain du dernier 4, il peut provenir d'un arrondi.

```
411557987÷131002976
            3.141592654
```

2. a) La feuille de calcul obtenue par recopie vers le bas est donnée ci-contre.

b) On en déduit les 20 premières décimales du développement décimal du nombre rationnel p :

$$\frac{411\,557\,987}{131\,002\,976} = 3{,}141\,592\,653\,589\,793\,257\,82\ldots$$

	A	B	C	D
1	Numérateur	Dénominateur	Quotient entier	Reste
2	411 557 987	131 002 976	3	18 549 059
3	185 490 590		1	54 487 614
4	544 876 140		4	20 864 236
5	208 642 360		1	77 639 384
6	776 393 840		5	121 378 960
7	1 213 789 600		9	34 762 816
8	347 628 160		2	85 622 208
9	856 222 080		6	70 204 224
10	702 042 240		5	47 027 360
11	470 273 600		3	77 264 672
12	772 646 720		5	117 631 840
13	1 176 318 400		8	128 294 592
14	1 282 945 920		9	103 919 136
15	1 039 191 360		7	122 170 528
16	1 221 705 280		9	42 678 496
17	426 784 960		3	33 776 032
18	337 760 320		2	75 754 368
19	757 543 680		5	102 528 800
20	1 025 288 000		7	108 267 168
21	1 082 671 680		8	34 647 872
22	346 478 720		2	84 472 768

À VOTRE TOUR

89 On sait que :

$$\pi = 3{,}141\,592\,653\,589\,793\,238\ldots$$

a) Comparer π avec le développement décimal du nombre p obtenu à l'exercice précédent.

b) Que peut-on en déduire en terme d'arrondi ?

Le record de décimales trouvées de π est détenu par Peter Trueb depuis 2016 avec 22 459 157 718 361 décimales.

90 **a)** Avec le tableur, déterminer les 15 premières décimales du nombre rationnel $\dfrac{18\,817}{10\,864}$.

b) Déterminer les premières décimales de $\sqrt{3}$ à l'aide de la calculatrice.

c) Que peut-on en déduire en terme d'arrondi ?

Cette approximation est due à un mathématicien et astronome indien du 7e siècle appelé Brahmagupta.

Démontrer et raisonner

91 Déterminer un ordre de grandeur

Méthode
Pour connaître un ordre de grandeur d'un nombre, il est parfois utile d'utiliser les approximations suivantes : $2^{10} \approx 10^3$; $2^{20} \approx 10^6$; $2^{30} \approx 10^9$.

Depuis décembre 2018, le plus grand nombre premier connu est $M = 2^{82589933} - 1$.
Donner un ordre de grandeur de ce nombre.

92 Étudier la longueur d'une période

Le principe des tiroirs de Dirichlet affirme que si l'on range m chaussettes dans p tiroirs avec $m > p$, alors au moins l'un des tiroirs contient deux chaussettes ou plus.

$\frac{a}{b}$ désigne un nombre rationnel non décimal avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$. Ce nombre admet un développement décimal périodique. Démontrer que la longueur maximum de sa période est $b - 1$.

93 Démontrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel

Méthode
Pour démontrer par l'absurde, on prend comme hypothèse la négation de la proposition à démontrer et on en déduit une contradiction.

On suppose que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel, c'est-à-dire qu'il s'écrit sous forme irréductible $\frac{p}{q}$ où p et q sont des nombres entiers naturels non nuls.

1. a) Justifier qu'alors $p^2 = 2q^2$.
b) En déduire la parité de p^2.
2. a) Compléter le tableau ci-dessous indiquant le dernier chiffre de p^2 en fonction de celui de p.

Dernier chiffre de p	0	1	2	…
Dernier chiffre de p^2	0	1	4	…

b) En déduire les derniers chiffres possibles de p^2.
3. Construire de même un tableau indiquant le dernier chiffre de $2q^2$ en fonction de celui de q.
4. a) Comme $p^2 = 2q^2$, déterminer le dernier chiffre de p et les derniers chiffres possibles de q.
b) $\frac{p}{q}$ est-il irréductible ? Conclure.

Connaître les nombres rationnels

94

1. La calculatrice effectue les calculs avec plus de chiffres que ceux qu'elle affiche.
À l'aide de l'écran ci-dessous, donner une valeur approchée du nombre rationnel $\frac{946\,758}{34\,621}$ avec 10 chiffres après la virgule.

```
946758÷34621
                27.34635048
Ans-27.34635048
                9.22×10^-10
```

2. a) Déterminer des valeurs approchées des nombres $\frac{8\,712\,870}{48\,506\,557}$ et $\frac{505\,149}{2\,812\,281}$ à l'aide de la calculatrice.
b) Peut-on conclure que les deux nombres sont égaux ?

95

Déterminer à la main le développement décimal illimité des nombres rationnels suivants.

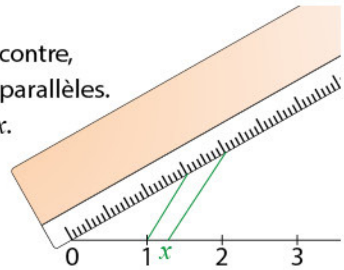
a) $\frac{15}{11}$ **b)** $\frac{22}{7}$ **c)** $\frac{155}{198}$

96

Le développement décimal d'un nombre rationnel A est 0,878 787…
a) Déterminer celui du nombre $100 \times A$.
b) En déduire que $100 \times A - 87 = A$.
c) Déterminer alors la forme fractionnaire irréductible du nombre rationnel A.
d) Vérifier le résultat à l'aide de la calculatrice.

97

a) Sur la figure ci-contre, les droites en vert sont parallèles. Déterminer le nombre x.



b) Tracer une droite graduée et placer de manière analogue les nombres suivants.

- $\frac{8}{3}$
- $\frac{13}{7}$
- $\frac{22}{5}$
- $\frac{37}{6}$

c) Indiquer la nature de chacun des nombres précédents.
d) Lequel des nombres précédents peut se placer de manière précise à l'aide uniquement de la règle graduée ?

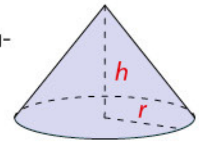
98

$A = 2 \times 10^3$, $B = 6 \times 10^{-5}$ et $C = -11 \times 10^{-2}$
Simplifier l'écriture de chaque nombre et en déduire sa nature.

a) $A \times B$ **b)** $\frac{A}{C}$ **c)** $\frac{A \times B}{C}$

Connaître les nombres réels

99 Le volume d'un cône de révolution est donné par la formule :



$$\mathcal{V} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

a) Calculer la valeur exacte du volume $\mathcal{V}$ lorsque $h = 2{,}45$ et $r = 1{,}74$.
b) Donner la nature du nombre $\mathcal{V}$.
c) En déduire son arrondi au dixième.

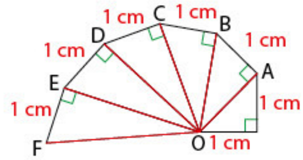
100 On considère un gâteau qui a la forme d'un disque de rayon $r = 13$ cm.
a) Calculer l'aire de ce disque en cm^2.
b) On partage ce gâteau en 6 parts égales.
Déterminer la valeur exacte de l'aire a, en cm^2, de chacune de ces parts.
c) Donner un encadrement de a par deux nombres entiers consécutifs.
d) Donner un encadrement décimal de a d'amplitude 10^{-1} puis d'amplitude 10^{-3}.
e) En déduire l'arrondi de a :
- à l'unité ;
- au dixième ;
- au centième.

101 Une plaque métallique rectangulaire a pour dimensions, en cm, $L \approx 4{,}5$ et $\ell \approx 2{,}3$.
1. Les mesures ayant été faites avec un pied à coulisse, elles sont données avec une erreur de plus ou moins 0,01 cm. En déduire un encadrement décimal d'amplitude 0,02 de L puis de ℓ.
2. a) Déterminer un encadrement décimal de l'aire S, en cm^2, de cette plaque métallique.
b) En déduire un encadrement décimal de S en choisissant un nombre de chiffres significatifs adapté.
Préciser son amplitude.

102 Un cheveu humain pousse à une vitesse d'environ 160×10^{-7} m $\cdot$ h^{-1}.
a) Un cheveu mesure 3,7 cm, quelle sera sa longueur L, en cm, dans 60 jours ?
b) En déduire un encadrement décimal de L en choisissant un nombre de chiffres significatifs adapté.

103 $\mathcal{D}_1$ est un disque de rayon 4 cm et $\mathcal{D}_2$ est un disque d'aire égale au triple de l'aire du disque $\mathcal{D}_1$.
a) Déterminer la valeur exacte du rayon, en cm, du disque $\mathcal{D}_2$, puis en donner un encadrement décimal d'amplitude 10^{-2}.
b) En déduire son arrondi au dixième.

104 **a)** Calculer la longueur exacte de chacun des segments rouges de la figure ci-contre.



b) Tracer une droite graduée (*unité* : 1 cm) puis construire au compas chacun des points d'abscisses données :
- $M(\sqrt{2})$
- $N(-\sqrt{3})$
- $P(4+\sqrt{5})$
- $Q(4\sqrt{2}-\sqrt{3})$

105 On considère l'équation $3x + 7 = 2$.
Résoudre cette équation lorsque x est un nombre :
a) réel ; **b)** rationnel ; **c)** décimal.

106 Dans chaque cas, trouver, si possible, un nombre entier naturel, un décimal non entier et un irrationnel strictement compris entre les deux nombres.
a) $\frac{99}{101}$ et $\frac{100}{101}$ **b)** $-\sqrt{17}$ et $-\sqrt{15}$

Relier intervalles et distances

107 Recopier et compléter le tableau suivant.

Inégalités	Ensembles	Valeur absolue
$3 \leqslant x \leqslant 7$		
	$]-\infty\,;1[\ \cup\ ]5\,;+\infty[$	
		$\lvert x+7 \rvert < 2$
$x \leqslant 2$ ou $x \geqslant 4$		

108 Voici une série de mesures indépendantes du diamètre D, en mm, d'un cheveu.
- $4{,}35 \times 10^{-2}$
- $4{,}00 \times 10^{-2}$
- $4{,}05 \times 10^{-2}$
- $4{,}30 \times 10^{-2}$
- $4{,}10 \times 10^{-2}$
- $4{,}10 \times 10^{-2}$

a) Calculer la moyenne $D_m = d \times 10^{-2}$ de ces mesures.
b) L'incertitude des mesures est de $0{,}5 \times 10^{-3}$ mm.
Cela signifie que $\lvert D - D_m \rvert \leqslant 0{,}5 \times 10^{-3}$. Traduire cette inégalité par l'appartenance de D à un intervalle.

109 **1.** A et B sont les points d'abscisses respectives -3 et 1 d'une droite graduée.
M est le point de cette droite graduée dont l'abscisse x est telle que $\lvert x+3 \rvert = \lvert x-1 \rvert$.
a) Interpréter cette égalité à l'aide de distances.
b) Préciser la position du point M sur le segment [AB].
c) Quelle est l'abscisse de M ?
2. De façon analogue, déterminer géométriquement le nombre réel x tel que :
a) $\lvert x \rvert = \lvert x+7 \rvert$ **b)** $\lvert x-1 \rvert = \lvert x+1 \rvert$

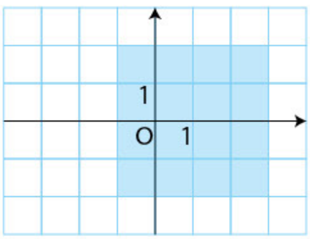
110 Dans la famille Muller, le père mesure 1,77 m.
Le plus jeune, Rafaël, mesure 1,40 m. L'aînée, Allison, mesure 1,81 m.

a) Quels sont les écarts de taille entre le père et chacun de ses deux enfants ?
b) On note x la taille, en m, de la mère.
On sait que $|x-1{,}81| = |x-1{,}4|$. Interpréter cette égalité en terme de distance et déterminer la taille de la mère.

111 **1.** A et B sont les points d'abscisses respectives -1 et 5 d'une droite graduée.
M est le point d'abscisse x de cette droite graduée.
a) À quelles distances correspondent les nombres réels $|x+1|$ et $|x-5|$?
b) Déterminer géométriquement l'ensemble des nombres réels x tels que la somme $|x+1|+|x-5|$ soit minimum.
2. De façon analogue, déterminer géométriquement l'ensemble des nombres réels x tels que :
a) $|x-2|-|x-4|=1$ **b)** $|x+4|-|x+7|=2$

112 **1. a)** Dans un repère, représenter en rouge l'ensemble des points $M(x\,;y)$ tels que $|x|=2$.
b) Dans ce même repère, représenter en bleu l'ensemble des points $M(x\,;y)$ tels que $|y|=3{,}5$.
c) Où sont situés les points $M(x\,;y)$ tels que $|x|=2$ **et** $|y|=3{,}5$?
2. Représenter dans des repères différents l'ensemble des points $M(x\,;y)$ tels que :
a) $|x|\leqslant 1$ et $|y|\leqslant 0{,}5$ **b)** $|x|\leqslant 2$ et $|y|\leqslant 1{,}5$

113 Dire à quelles conditions sur x et y un point $M(x\,;y)$ appartient à la partie colorée du repère, puis traduire ces conditions avec la notation valeur absolue.



114 Sur une droite graduée, A et B sont les points d'abscisses respectives -6 et 3.
a) On note x l'abscisse de M.
Traduire $MA < MB$ avec la notation valeur absolue.
b) Colorer l'ensemble des points M de cette droite tels que $MA < MB$.

115 À l'aide d'une droite graduée, déterminer, sous forme d'intervalles, l'ensemble des nombres réels x vérifiant chacune des inégalités suivantes.
a) $|x-3|\leqslant|x-1|$ **b)** $|-7-x|\leqslant|x+4|$

S'entraîner à la logique → p. XXI

116 **Réunions d'intervalles**

1. Au self du lycée, il est écrit « fromage ou yaourt ». Est-il possible de prendre une portion de fromage et un yaourt ?
2. a) Représenter sur une même droite graduée les intervalles $I_1 =]-\infty\,;1]$ et $I_2=[0\,;3]$.
b) Déterminer graphiquement l'ensemble des nombres réels qui appartiennent à I_1 ou à I_2.
On note cet ensemble $I_1 \cup I_2$ (lire « I_1 union I_2 ») : c'est la réunion des deux intervalles.
c) Meï a écrit : « $x \in I_1 \cup I_2$ c'est-à-dire $x \leqslant 3$. » A-t-elle raison ?
d) Comparer le sens du mot « ou » dans le langage courant et dans le langage des mathématiques.
3. Dans chaque cas, simplifier lorsque c'est possible l'ensemble $I_1 \cup I_2$.
a) $I_1=]-2\,;3[$ et $I_2=[-3\,;2[$
b) $I_1=]0\,;+\infty[$ et $I_2=]-2\,;4]$
c) $I_1=[-10\,;5]$ et $I_2=]5\,;8]$

117 **Intersections d'intervalles**

1. Représenter sur une même droite graduée les intervalles $I_1=[-5\,;+\infty[$ et $I_2=[-8\,;4]$.
2. Déterminer graphiquement l'ensemble des nombres réels qui appartiennent à I_1 et à I_2.
On note cet ensemble $I_1\cap I_2$ (lire « I_1 inter I_2 ») : c'est l'intersection des deux intervalles.
3. Dans chaque cas, déterminer l'ensemble $I_1 \cap I_2$.
a) $I_1=[-4\,;0[$ et $I_2=]-2\,;3]$
b) $I_1=]-2\,;8]$ et $I_2=[8\,;15]$
c) $I_1=[2\,;9]$ et $I_2=]-7\,;0[$

118 **Quantificateurs**

Pour chaque proposition, dire si elle est vraie ou fausse. Justifier la réponse.
a) Pour tous nombres a et b de $\mathbb{Q}$, $a+b$ est un nombre de $\mathbb{Q}$.
b) Il existe des nombres a et b de $\mathbb{D}$ tels que $a+b$ soit un nombre de $\mathbb{Z}$.

119 Imaginer une stratégie

Raisonner **Calculer**

c est le nombre rationnel de développement décimal :

$$c = 0{,}9999\ldots$$

Démontrer que $0{,}999\ldots = 1$.

Envisager le nombre 10c.

> L'égalité obtenue peut sembler étrange, pourtant la démonstration est rigoureuse.
> On peut même montrer que tout nombre décimal admet un développement décimal avec une infinité de 9 :
> $2{,}5 = 2{,}49999\ldots$; $7{,}53 = 7{,}529999\ldots$

120 Prendre des initiatives

Chercher **Raisonner**

Déterminer l'écriture fractionnaire du nombre rationnel de développement décimal $0{,}491\,9191\ldots$

121 Use absolute value

Représenter **Calculer**

a) x is a real number such that $3 \leqslant |x| \leqslant 7$.
y is a real number such that $1 \leqslant |y-1| \leqslant 3$.
Write each information with one or more intervals.

b) a is a real number such that $-2 \leqslant a \leqslant 3$.
Write an inequality using the absolute value.

122 Représenter un ensemble

Chercher **Représenter**

Dans un repère orthonormé, représenter l'ensemble des points $M(x\,;y)$ qui vérifient :

$$\begin{cases} x \in \mathbb{Z} \\ y \in \mathbb{N} \\ |x-2| \leqslant 3 \\ |y+0{,}5| > 2 \end{cases}$$

123 Étudier une somme de valeurs absolues

Représenter **Raisonner**

On souhaite déterminer les nombres réels x tels que :

$$|x-4| + |x+2| = 8$$

a) Sur une droite graduée, on considère les points A, B et M d'abscisses respectives 4, -2 et x.
Interpréter géométriquement l'égalité précédente.

b) Justifier que le point M ne peut pas appartenir au segment [AB].

c) Déterminer les valeurs de x qui vérifient l'égalité lorsque M appartient à la demi-droite :

- d'origine A ne contenant pas B ;
- d'origine B ne contenant pas A.

124 Algo Approcher $\sqrt{a}$ (avec $a > 0$)

Chercher **Représenter** **Calculer**

L'algorithme de Héron d'Alexandrie (mathématicien grec du 1er siècle) permet de calculer des valeurs approchées de $\sqrt{a}$ avec a nombre réel positif.

Voici la démarche :

- on choisit un nombre u strictement positif : $u = 1$ par exemple ;
- on calcule $\dfrac{u + \dfrac{a}{u}}{2}$;
- on réitère cette formule en remplaçant u par la valeur trouvée à l'étape précédente.

a) Compléter la fonction Racine ci-dessous écrite en langage Python de paramètres a et n et qui renvoie une valeur approchée de $\sqrt{a}$ après n étapes de la méthode de Héron.

```
def Racine(a,n):
    u=1
    for i in range(1,n+1):
        u=
    return u
```

b) Exécuter dans la console Racine(7,10).

c) On souhaite calculer les termes de l'algorithme tant que la distance entre deux termes successifs est supérieure ou égale à un nombre p donné.

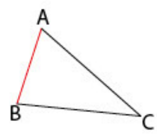
Écrire alors une nouvelle fonction Racine de paramètres a et p qui renvoie la valeur approchée de $\sqrt{a}$ ainsi calculée.

En langage Python, |x| s'écrit abs(x).
Penser à saisir au début : from math import.*

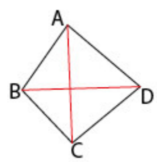
125 Démontrer une propriété

Représenter **Calculer**

On établit au collège que pour tous points A, B, C, $AB \leqslant AC + CB$.
Cette propriété est appelée inégalité triangulaire.



a) ABCD est un quadrilatère.
Comparer $AC + BD$ au périmètre du quadrilatère en appliquant l'inégalité triangulaire aux triangles ABC, ACD, ABD et BCD.



b) Sur une droite graduée d'origine O, les points M et N ont pour abscisses respectives x et $-y$.
Utiliser l'inégalité triangulaire pour démontrer que :

$$|x+y| \leqslant |x| + |y|$$

Cette inégalité est aussi appelée inégalité triangulaire.

126 Tracer un ensemble

Problème ouvert

Chercher **Représenter** **Raisonner**

Dans un repère orthonormé, représenter l'ensemble des points M $(x\ ;\ y)$ tels que $|x|+|y|=1$.

127 Utiliser la calculatrice

Narration de recherche

Chercher **Raisonner**

Rédiger les différentes étapes de la recherche, sans omettre les fausses pistes et les changements de méthode.

Problème Déterminer un encadrement décimal d'amplitude 10^{-9} du nombre irrationnel $\sqrt{351}$.

128 Chasser le trésor

Chercher **Représenter**

On vient de retrouver un parchemin attribué à Rackham le pirate. Sur ce parchemin figure le plan d'une île et le message suivant :

« 30 pas séparent le mât du drapeau et le cocotier. Sur la ligne qui les joint, j'ai caché un trésor. Deux fois la distance du trésor au mât, plus trois fois la distance du trésor au cocotier est égal à 65 pas. »

1. On assimile la ligne à une droite graduée d'origine M (le mât) d'unité 1 pas.

Le cocotier est au point C d'abscisse 30.

x est l'abscisse du point T représentant le trésor.

a) Exprimer en fonction de x la distance MT puis la distance CT.

b) Justifier alors que x vérifie :

$$2|x|+3|x-30|=65$$

2. Expliquer comment a été remplie la première ligne de ce tableau puis le recopier et le compléter.

	$\lvert x\rvert$	$\lvert x-30\rvert$	$2\lvert x\rvert+3\lvert x-30\rvert=65$
$x \leqslant 0$	$-x$	$30-x$	$2(-x)+3(30-x)=65$
$0 \leqslant x \leqslant 30$			
$30 \leqslant x$			

3. a) Résoudre pour $x \leqslant 0$, l'équation :

$$2(-x)+3(30-x)=65$$

b) En déduire que l'abscisse du trésor ne peut pas être négative.

4. Faire de même pour les cas $0 \leqslant x \leqslant 30$ et $30 \leqslant x$ afin de déterminer où peut se situer le trésor.

129 Illustrer

Chercher **Calculer**

Trouver un exemple pour illustrer chacune des propriétés célèbres suivantes des ensembles $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$.

a) $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$: entre deux nombres réels quelconques, il existe un nombre rationnel.

b) $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{Q}$: entre deux nombres rationnels quelconques, il existe un nombre réel.

c) $\mathbb{R}$ est archimédien : pour tout nombre réel y et pour tout nombre réel x strictement positif, il existe un nombre entier $n \geqslant 1$ tel que $n \times x > y$.

Des défis

130 Mesurer sans déplier

Un tapis d'un centimètre d'épaisseur est roulé de manière à former un cylindre d'un mètre de diamètre. Déterminer la longueur, en m, du tapis.

Arrondir à la dizaine.

(D'après Kangourou)

131 Chercher des nombres entiers

Voici l'affichage obtenu avec un logiciel de calcul formel.

Résoudre$\left(10 < \sqrt{x\cdot(x+1)} < 11\right)$

1 $\rightarrow \left\{\frac{-\sqrt{485}-1}{2} < x < \frac{-\sqrt{401}-1}{2}, \frac{\sqrt{401}-1}{2} < x < \frac{\sqrt{485}-1}{2}\right\}$

Combien de nombres entiers naturels x vérifient ces encadrements ?

132 En rouge et noir

Chaque nombre rationnel strictement positif est colorié en rouge ou noir, de telle sorte que :

- le nombre 1 est de couleur rouge ;
- les nombres x et $x+1$ sont de couleurs différentes ;
- les nombres x et $\frac{1}{x}$ sont de la même couleur.

Quelle est la couleur du nombre $\frac{2020}{2019}$?

(D'après Olympiades)

QCM Bilan

QCM interactifs

133 **Dans chaque cas, donner la réponse exacte en justifiant.**

		A	B	C	D
1	Le nombre : $\dfrac{2-5\times 8}{5+5\times 2}$ appartient à l'ensemble …	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{Q}$
2	Le nombre : $(\sqrt{3}-\sqrt{7})(\sqrt{3}+\sqrt{7})$ est un nombre …	entier naturel	entier relatif	décimal non entier	irrationnel
3	Le nombre π appartient à l'ensemble …	$\mathbb{Q}$	$[0\,;3{,}14]$	des nombres réels x tels que $\lvert x\rvert \leqslant 3{,}14$	$\left]\dfrac{223}{71}\,;+\infty\right[$
4	Le nombre réel x tel que $2\pi x + 5\pi = 0$ est …	un décimal	un rationnel non décimal	un irrationnel	-7π
5	Voici trois intervalles : $I=[-1\,;2]$, $J=]-4\,;0[$ et $K=]-0{,}5\,;8]$. Alors $(I\cap J)\cap K$ est l'intervalle …	$]-4\,;8]$	$]-0{,}5\,;0]$	$]-0{,}5\,;0[$	$[-0{,}5\,;0[$
6	Voici trois intervalles : $I=[-15\,;2]$, $J=]1\,;+\infty[$ et $K=]-\infty\,;8]$. Alors $(I\cap K)\cup J$ est l'intervalle …	$\mathbb{R}$	$[-15\,;2]$	$[-15\,;+\infty[$	$]-\infty\,;2]$
7	Les nombres réels x vérifiant : $\lvert x-1\rvert \geqslant 3$ appartiennent à …	l'intervalle $]-2\,;4[$	l'intervalle $]-\infty\,;-2]$ ou l'intervalle $[4\,;+\infty[$	l'intervalle $]-\infty\,;-4]$ ou l'intervalle $[2\,;+\infty[$	l'intervalle $[1\,;3[$
8	Dans un repère, l'ensemble des points $M(x\,;y)$ vérifiant : $\begin{cases}\lvert x\rvert \leqslant 2\\ \lvert y-2\rvert \leqslant 1\end{cases}$ est …	un cercle	un disque	un carré	un rectangle non carré
9	a désigne un nombre de développement décimal $0{,}238\,238\,238\ldots$ Alors …	a est un nombre décimal	a est un nombre irrationnel	$a=\dfrac{238}{1000}$	$a=\dfrac{238}{999}$
10	Un nombre réel x vérifie l'inégalité : $\lvert x+1\rvert \leqslant \lvert x-5\rvert$ Alors …	x peut être égal à 5	x appartient à $[0\,;+\infty[$	$x>-1$	x appartient à $]-\infty\,;2]$

Vérifiez vos réponses p. 346 pour avoir votre note (considérez 1 point par réponse juste).

Exploiter ses compétences

134 Expliquer un terme scientifique

La situation problème

Depuis plusieurs dizaines d'années, les hommes envoient autour de la Terre des satellites pour différentes activités (système de téléguidage (GPS), observations militaires, communications téléphoniques, observations météorologiques …).

Certains de ces satellites artificiels sont appelés satellites géostationnaires : ils restent constamment au-dessus d'un même point de l'équateur.

Utiliser les différentes informations pour montrer que, pendant que la Terre fait une rotation sur elle-même, les satellites géostationnaires font en effet un tour complet de la Terre.

DOC 1 Vitesse du satellite

Lorsqu'un satellite a une orbite circulaire autour de la Terre, le centre de cette orbite et le centre de la Terre sont confondus.

La vitesse v, en $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, du satellite est donnée par : $$v = \sqrt{G \times \frac{M}{r}}$$

où :

– $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ est la constante de gravitation ;

– $M = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg est la masse de la Terre ;

– r est le rayon, en m, de l'orbite du satellite.

DOC 2 Altitude du satellite

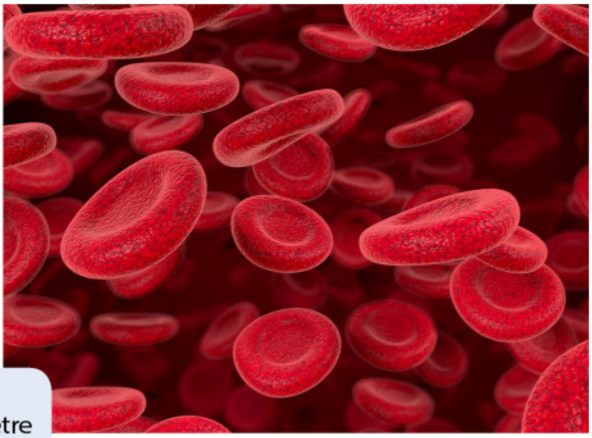
• Les satellites géostationnaires sont situés à 35 786 km d'altitude (par rapport au sol).

• Le diamètre moyen de la Terre est $1{,}275 \times 10^{4}$ km.

DOC 3 Période de rotation

La Terre, en plus de tourner autour du Soleil, tourne sur elle-même. Elle met 23 h 56 min 4 s pour effectuer une rotation sur elle-même.

135 Étudier l'infiniment petit



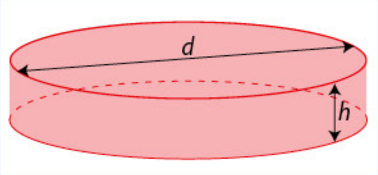
La situation problème

Les globules rouges transportent l'oxygène dans le corps humain. Ces échanges se font par l'intermédiaire de leur surface.

Utiliser les différentes informations pour déterminer l'aire totale, en m^2, de tous les globules rouges contenus dans le corps humain.

DOC 1 Dimension d'un globule

Un globule rouge a la forme d'un cylindre de diamètre $d = 7 \times 10^{-3}$ mm et de hauteur $h = 3 \times 10^{-3}$ mm.



DOC 2 Volume dans le corps

Dans 1 mm^3 de sang humain, il y a environ 4,5 millions de globules rouges.

Le corps humain contient environ 5,5 L de sang.

136 Contrôler la qualité

La situation problème

Le responsable qualité d'une usine d'embouteillage pratique un test sur un lot produit par son usine.
Il contrôle des bouteilles de jus de fruits de 200 mL destinées à l'alimentation des bébés.
Pour que le contrôle qualité soit positif, le lot doit respecter deux conditions.
Utiliser les différentes informations pour aider le contrôleur à réaliser son test et conclure.

DOC 1 Relevés réalisés sur le lot

Quantité de jus de fruits en mL	Effectif	Quantité de jus de fruits en mL	Effectif
195	2	200	45
196	5	200,5	10
197	7	201	16
197,5	7	201,5	10
198	16	202	6
198,5	10	202,5	4
199	18	203	6
199,5	35	204	3

DOC 2 Charte qualité

Condition 1 : L'écart entre la contenance souhaitée et la moyenne des contenances du lot doit être inférieure à 2 mL.

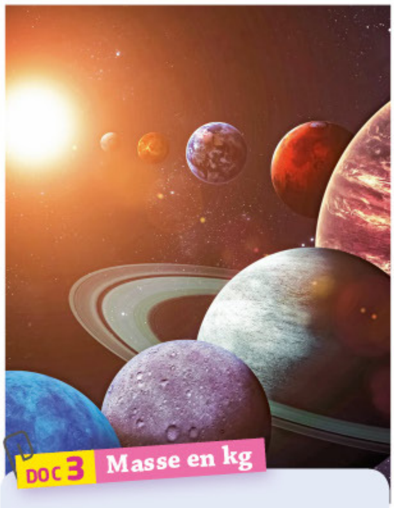
Condition 2 : Au moins 70 % des bouteilles du lot doivent vérifier $|v - 200| \leqslant 2$ où v est la contenance, en mL, de la bouteille contrôlée.

137 Résoudre une énigme

La situation problème

Aïcha a l'énigme suivante à résoudre :
« Quelle est la planète du système solaire dont :
- la distance moyenne d, en m, par rapport au Soleil vérifie $d \geqslant 5 \times 10^{11}$;
- le diamètre D, en km, vérifie $|D - 30000| \leqslant 2{,}5 \times 10^4$;
- la masse m, en kg, vérifie $m \leqslant 10^{26}$? »

Utiliser les différentes informations pour aider Aïcha à résoudre cette énigme.



DOC 1 Distance moyenne, en m, par rapport au Soleil

Jupiter	$0{,}000\,778\,3 \times 10^{15}$
Mars	2279400×10^5
Mercure	57910×10^6
Neptune	$4{,}505 \times 10^{12}$
Terre	$1{,}496 \times 10^{11}$
Saturne	$14{,}236 \times 10^{11}$
Uranus	28670×10^8
Vénus	$1{,}082 \times 10^{11}$

DOC 2 Diamètre en km

Jupiter	$14{,}3 \times 10^4$
Mars	$6{,}8 \times 10^3$
Mercure	$4{,}9 \times 10^3$
Neptune	49×10^3
Terre	$12{,}7 \times 10^3$
Saturne	12×10^4
Uranus	51×10^3
Vénus	$12{,}1 \times 10^3$

DOC 3 Masse en kg

Jupiter	$1\,898{,}6 \times 10^{24}$
Mars	$0{,}641\,8 \times 10^{24}$
Mercure	$0{,}330\,2 \times 10^{24}$
Neptune	$102{,}43 \times 10^{24}$
Terre	$5{,}973\,6 \times 10^{24}$
Saturne	$568{,}46 \times 10^{24}$
Uranus	$86{,}810 \times 10^{24}$
Vénus	$4{,}868\,5 \times 10^{24}$