1 Suites numériques

Avant

▶ En 1926, le mathématicien italien Vito Volterra propose un modèle où interviennent des suites pour décrire l'évolution de deux populations : les requins (les prédateurs) et les sardines (les proies).

À présent

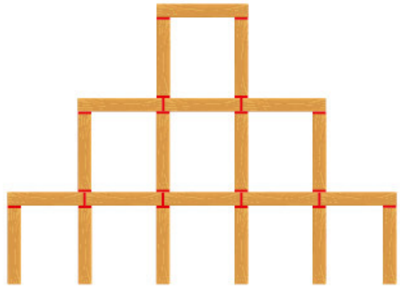
▶ Au 21e siècle, toujours en écologie, le réchauffement climatique est une question phare.

Les suites et d'autres outils mathématiques sont utilisés pour étudier des modèles d'évolution du climat.

Les capacités travaillées dans ce chapitre	Exercices
• Calculer un terme d'une suite (formule explicite, relation de récurrence, …).	1 à 7, 19 à 34
• Calculer un terme ou la raison d'une suite arithmétique.	8, 10, 11, 35, 37 à 48, 51
• Calculer une somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique.	14, 16, 52 à 60
• Calculer un terme ou la raison d'une suite géométrique.	9, 12, 13, 61, 63 à 73, 76
• Calculer une somme de termes consécutifs d'une suite géométrique.	15, 17, 18, 77 à 83
• Représenter graphiquement une suite arithmétique ou géométrique.	49, 50, 74, 75
• Reconnaître ou démontrer qu'une suite est arithmétique.	36, 98, 107 à 110
• Reconnaître ou démontrer qu'une suite est géométrique.	62, 99, 112, 114 à 116

1 Évolutions successives à accroissements constants

Timeo joue avec un tas de bâtonnets identiques. Il a commencé la construction ci-contre, il a disposé 3 bâtonnets sur la 1^re^ rangée, 7 sur la 2^e^ et ainsi de suite.



1 Recopier et compléter le tableau suivant :

Rangée	1	2	3	4	5
Nombre de bâtonnets sur la rangée	3	7			

2 On note n le numéro d'une rangée, u_n (lire « u indice n ») le nombre de bâtonnets sur la rangée n et u_{n+1} le nombre de bâtonnets sur la rangée $n+1$.

a) Lorsqu'on connaît le nombre u_n, comment obtient-on rapidement le nombre u_{n+1} ?

On dit que la suite (u_n) est une **suite arithmétique de raison 4**.

b) Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. Il s'agit d'une **relation de récurrence**.

c) D'après cette relation, comment pourrait-on connaître la valeur de u_{100} ?

3 **a)** Recopier et compléter le tableau ci-contre.

Conjecturer une formule explicite de u_n en fonction de n.

b) En admettant la conjecture précédente, combien Timeo devrait-il mettre de bâtonnets sur la 8^e^ rangée ?

n	1	2	3	4	5
$4n$					
u_n	3	7			

2 Évolutions successives à taux constant

Un artiste contemporain demande à un atelier de réaliser une sculpture monumentale en acier. Voici ses instructions.

Sur un carré de 8 m de côté, superposer, selon la disposition ci-contre, une suite de carrés. L'aire de chaque carré est diminuée de 75 % par rapport à l'aire du carré précédent.

1 Calculer l'aire, en m^2, des quatre premiers carrés représentés ci-contre.

2 On note a_0 l'aire, en m^2, du carré initial (ainsi $a_0 = 64$) et on note a_n l'aire, en m^2, du n-ième carré construit dans le carré initial.

a) Lorsqu'on connaît le nombre a_n, comment obtient-on rapidement le nombre a_{n+1} ?

On dit que la suite (a_n) est une **suite géométrique de raison 0,25**.

b) Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, écrire une relation de récurrence en exprimant a_{n+1} en fonction de a_n.

3 **a)** Combien de fois doit-on multiplier 64 par 0,25 pour obtenir a_2 ? a_3 ? Justifier que $a_4 = a_0 \times 0{,}25^4$.

b) Conjecturer une formule explicite de a_n en fonction de n. On admet cette expression.

c) L'artiste souhaite que sa sculpture soit formée de 10 carrés au total.

Quelle est l'aire, en m^2, du plus petit carré utilisé ? Exprimer cette aire en cm^2. *Arrondir à l'unité.*

1 Modes de génération d'une suite

A Notion de suite numérique

Définition

Une **suite** (u_n) est une fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des nombres entiers naturels. L'image de tout nombre n de $\mathbb{N}$ par cette suite est un nombre réel noté $\boldsymbol{u(n)}$ ou $\boldsymbol{u_n}$ et appelé **terme d'indice *n*** de la suite.

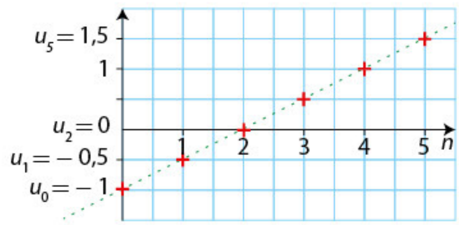
Vocabulaire

- Dans un repère, la **représentation graphique** d'une suite (u_n) est l'ensemble des points $M_n(n\,;u_n)$ pour tout nombre n de $\mathbb{N}$.
- La suite $\left(\frac{1}{n}\right)$ est définie pour tout nombre $n \geqslant 1$ de $\mathbb{N}$, on dit qu'elle est définie « à partir du **rang** 1 ».

B Différentes façons de définir une suite

Exemples

❶ Avec une formule explicite de la forme $u_n = f(n)$



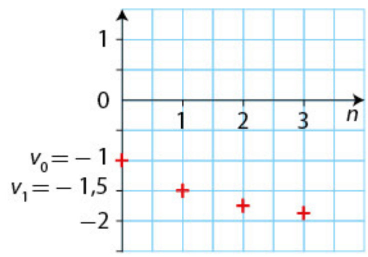
(u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \frac{1}{2}n - 1$.

Ici, $u_n = f(n)$ avec f fonction affine $x \mapsto \frac{1}{2}x - 1$.

Ainsi : $u_0 = f(0) = -1$; $u_1 = f(1) = -0{,}5$; $u_5 = f(5) = 1{,}5$.

Dans le repère ci-dessus, la courbe de la fonction f est la droite tracée en pointillés et la représentation graphique de la suite (u_n) est formée par tous les points rouges d'abscisses dans $\mathbb{N}$ de la courbe.

❷ Avec une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ et la donnée d'un terme



(v_n) est la suite définie par $v_0 = -1$ et pour tout nombre n de $\mathbb{N}$,

$$v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n - 1$$

Ici, $v_{n+1} = f(v_n)$ avec f fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$.

Ainsi : $v_1 = f(v_0) = f(-1) = -1{,}5$; $v_2 = f(v_1) = f(-1{,}5) = -1{,}75$.

On remarque que les points de la représentation graphique de la suite (v_n) n'appartiennent pas nécessairement à la courbe de f.

❸ Avec un programme

Le programme ci-contre calcule et affiche les termes $w_0, w_1, \ldots, w_n$ d'une suite (w_n) où n est la valeur de l'indice saisie en entrée.

Voici les termes de la suite (w_n) affichés par le programme lorsque $n = 6$.

i	0	1	2	3	4	5	6
w_i	10	8	6	4	2	0	–2

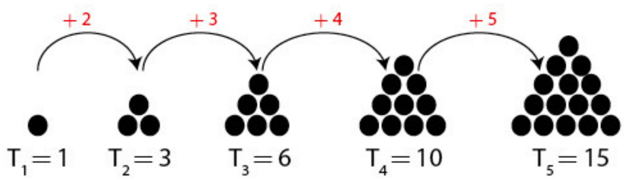
```
def W(k):
    w=10-2*k
    return w

n=int(input("n ="))
for i in range(0,n+1):
    print(W(i))
```

❹ Avec des motifs géométriques

En poursuivant le procédé illustré ci-contre, on obtient $T_6 = T_5 + 6 = 15 + 6 = 21$.

On dit que (T_n) est la suite des nombres triangulaires.



2 Suites arithmétiques

A Définition par une relation de récurrence

Définition

Dire qu'une suite (u_n) est **arithmétique** signifie qu'il existe un nombre réel $\boldsymbol{r}$, appelé la **raison**, tel que pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $\boldsymbol{u_{n+1} = u_n + r}$.

Exemple

(u_n) est la suite arithmétique de raison 2 telle que $u_0 = 1$.
Ainsi, $u_1 = u_0 + 2 = 3$; $u_2 = u_1 + 2 = 5$; $u_3 = u_2 + 2 = 7$; $u_4 = u_3 + 2 = 9$; $u_5 = u_4 + 2 = 11$.
On obtient la suite des nombre entiers naturels impairs.

Remarque : d'après la définition, pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = r$. Ainsi, une suite arithmétique de raison r modélise des **évolutions successives à accroissements constants égaux à r**.

B Formule explicite

Propriétés

Si (u_n) est une suite arithmétique de raison $\boldsymbol{r}$, alors pour tous nombres n et p de $\mathbb{N}$, $\boldsymbol{u_n = u_p + (n-p)r}$.
En particulier (cas où $p = 0$), pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $\boldsymbol{u_n = u_0 + nr}$.

Démonstration

- **Cas où $n \geqslant p$** : de u_p à u_n, on ajoute $n - p$ fois la raison, donc $u_n = u_p + (n-p)r$.
- **Cas où $n \leqslant p$** : avec le cas précédent, $u_p = u_n + (p-n)r$, c'est-à-dire aussi $u_n = u_p - (p-n)r = u_p + (n-p)r$.

$$u_p \xrightarrow[\text{1 fois}]{+r} u_{p+1} \xrightarrow[\text{2 fois}]{+r} u_{p+2} \ \dots \ u_{p+(n-p-1)} \xrightarrow[n-p \text{ fois}]{+r} u_{p+(n-p)}$$

Exemple

(u_n) est une suite arithmétique de raison 1,5 telle que $u_0 = -2$.
Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $u_n = -2 + 1{,}5n$ soit $u_n = f(n)$ où **f est la fonction affine** $x \mapsto 1{,}5x - 2$.
On dit que les suites arithmétiques correspondent à des **évolutions linéaires**.

C Somme des nombres entiers naturels de 1 à *n*

Propriété

Pour tout nombre $n \neq 0$ de $\mathbb{N}$, $\quad \boldsymbol{1 + 2 + \dots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}}$.

Démonstration

On pose : $S_n = 1 + 2 + \dots + (n-1) + n$
$\qquad\quad S_n = n + (n-1) + \dots + 2 + 1$
On additionne terme à terme les deux égalités : $2S_n = (1+n) + [2 + (n-1)] + \dots + [(n-1) + 2] + (n+1)$.

$$2S_n = \underbrace{(n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) + (n+1)}_{n \text{ fois la somme } (n+1)} = n(n+1). \text{ Donc } S_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Exemple

$1 + 2 + 3 + \dots + 100 = \dfrac{100(100+1)}{2} = 5\,050$

Cours

3 Suites géométriques

A Définition par une relation de récurrence

Définition

Dire qu'une suite (u_n) est **géométrique** signifie qu'il existe un nombre réel $\boldsymbol{q}$, appelé la **raison**, tel que pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $\boldsymbol{u_{n+1} = q \times u_n}$.

Exemple

(u_n) est la suite géométrique de raison 3 telle que $u_0 = 2$.
Ainsi, $u_1 = 3 \times u_0 = 6$; $u_2 = 3 \times u_1 = 18$; $u_3 = 3 \times u_2 = 54$; $u_4 = 3 \times u_3 = 162$; $u_5 = 3 \times u_4 = 486$; …

Remarque : (u_n) est une suite géométrique de raison q telle que pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $u_n \neq 0$.
Alors, d'après la définition, pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = q$, c'est-à-dire $\dfrac{u_{n+1} - u_n}{u_n} = \dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1 = q - 1$.
Ainsi, une suite géométrique de raison $\boldsymbol{q}$ modélise des **évolutions successives à taux de variation** (entre deux termes consécutifs) **constant égal à $\boldsymbol{q - 1}$.**

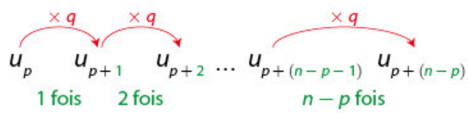
B Formule explicite

Propriétés

Si (u_n) est une suite géométrique de raison $\boldsymbol{q}$, alors pour tous nombres n et p de $\mathbb{N}$, $\boldsymbol{u_n = u_p \times q^{n-p}}$.
En particulier (cas où $p = 0$), pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $\boldsymbol{u_n = u_0 \times q^n}$.

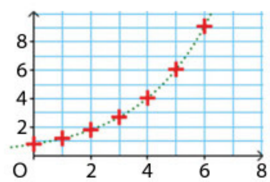
Démonstration

- **Cas où $\boldsymbol{n \geqslant p}$** : de u_p à u_n, on multiplie $n - p$ fois par la raison, donc $u_n = u_p \times q^{n-p}$.
- **Cas où $\boldsymbol{n \leqslant p}$** : avec le cas précédent, $u_p = u_n \times q^{p-n}$, donc $u_n = \dfrac{u_p}{q^{p-n}} = u_p \times q^{n-p}$.



Exemple

(u_n) est une suite géométrique de raison 1,5 telle que $u_0 = 0{,}8$.
Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $u_n = 0{,}8 \times 1{,}5^n$. On dit que les suites géométriques correspondent à des évolutions **exponentielles**.



C Somme des puissances successives d'un nombre réel q (avec $q \neq 1$)

Propriété

Si $q \neq 1$, alors pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $\quad \boldsymbol{1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}}$.

Démonstration

On pose : $S_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n$. Alors $qS_n = q + q^2 + \ldots + q^n + q^{n+1}$ et par différence :
$S_n - qS_n = 1 - q^{n+1}$, soit $(1 - q)S_n = 1 - q^{n+1}$. Or $q \neq 1$, donc $S_n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

Exemple

$1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{10} = \dfrac{1 - 2^{11}}{1 - 2} = 2^{11} - 1 = 2\,047$

EXERCICES RÉSOLUS

1 Calculer un terme d'une suite définie par une formule

→ Cours 1. B

(u_n) est la suite définie pour tout nombre n de $\mathbb{N}$ par $u_n = 3n^2 - 5$.
Calculer u_4.

Solution

$u_4 = 3 \times 4^2 - 5$
$u_4 = 3 \times 16 - 5$
$u_4 = 48 - 5$
$u_4 = 43$

Pour calculer u_4, on remplace n par 4 dans $3n^2 - 5$.
On effectue ensuite le calcul en respectant les priorités opératoires (carré puis multiplication et enfin soustraction).

2 Calculer un terme d'une suite définie par récurrence

→ Cours 1. B

(v_n) est la suite définie par $v_0 = 4$ et pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $v_{n+1} = -2v_n + 1$.
a) Calculer v_1. **b)** Calculer v_3.

Solution

a) $v_1 = -2v_0 + 1$
$v_1 = -2 \times 4 + 1$
$v_1 = -8 + 1$
$v_1 = -7$

Pour calculer v_1, on l'exprime en fonction du terme précédent, à savoir v_0, avec la formule de récurrence.

b) Avec la formule de récurrence, v_3 s'exprime en fonction du terme précédent v_2 et v_2 s'exprime en fonction de v_1. Or, on connaît v_1, donc on peut calculer v_2 puis v_3.

$v_2 = -2v_1 + 1$
$v_2 = -2 \times (-7) + 1$
$v_2 = 14 + 1$
$v_2 = 15$

$v_3 = -2v_2 + 1$
$v_3 = -2 \times 15 + 1$
$v_3 = -30 + 1$
$v_3 = -29$

Pour calculer un terme d'une suite définie par récurrence, il suffit de calculer tous les termes précédents.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 1

3 (b_n) est la suite définie pour tout nombre n de $\mathbb{N}$ par $b_n = 5n - 4$. Calculer b_5 et b_{100}.

4 (w_n) est la suite définie pour tout nombre n de $\mathbb{N}$ par $w_n = (2n-1)(2-n)$.
Calculer $w_0, w_1, w_2, \ldots, w_9, w_{10}$.

5 (t_n) est la suite définie pour tout nombre n de $\mathbb{N}$ par $t_n = 3n^2 - 33n + 72$. Comparer t_3 et t_8.

Sur le modèle de l'exercice résolu 2

6 (k_n) est la suite définie par $k_0 = -5$ et pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $k_{n+1} = 5k_n - 7$.
a) Calculer k_1. **b)** Calculer k_3.

7 (z_n) est la suite définie par $z_0 = 2$ et pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $z_{n+1} = z_n^2$.
Recopier et compléter le tableau ci-dessous.

n	0	1	2	3	4
z_n	2				

EXERCICES RÉSOLUS

8 Calculer un terme d'une suite arithmétique

→ Cours 2. B

(u_n) est la suite arithmétique de raison 3 telle que $u_1 = -5$.

a) Calculer u_{20}.

b) Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, exprimer u_n explicitement en fonction de n.

Solution

a) $u_{20} = u_1 + (20-1)r$

$u_{20} = -5 + (20-1) \times 3$

$u_{20} = -5 + 19 \times 3$

$u_{20} = -5 + 57$

$u_{20} = 52$

Pour calculer un terme d'une suite arithmétique, on utilise la formule explicite $\boldsymbol{u_n = u_p + (n-p)r}$.
Pour effectuer le calcul, on veille à respecter les priorités opératoires : calculs dans la parenthèse puis on effectue la multiplication.

b) Pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = u_1 + (n-1)r$, c'est-à-dire :

$u_n = -5 + 3(n-1)$

$u_n = -5 + 3n - 3$

$u_n = 3n - 8$

9 Calculer un terme d'une suite géométrique

→ Cours 3. B

(v_n) est la suite géométrique de raison 2 telle que $v_1 = 7$.

a) Calculer v_{10}.

b) Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, exprimer v_n explicitement en fonction de n.

Solution

a) $v_{10} = v_1 \times 2^{10-1}$

$v_{10} = 7 \times 2^9$

$v_{10} = 7 \times 512$

$v_{10} = 3\,584$

Pour calculer un terme d'une suite géométrique, on utilise la formule explicite $\boldsymbol{u_n = u_p \times q^{n-p}}$. Pour effectuer le calcul, on veille à respecter les priorités opératoires : on effectue d'abord la puissance.

b) Pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_n = v_1 \times 2^{n-1}$

c'est-à-dire $v_n = 7 \times 2^{n-1}$.

On sait que $2^{n-1} = \dfrac{2^n}{2}$ donc on a aussi $v_n = \dfrac{7}{2} \times 2^n$.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 8

10 (w_n) est la suite arithmétique de raison -2 telle que $w_0 = 1$.

a) Calculer w_{100}.

b) Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, exprimer w_n explicitement en fonction de n.

11 (k_n) est la suite arithmétique de raison 0,5 telle que $k_5 = -50$. Calculer k_{100}.

Sur le modèle de l'exercice résolu 9

12 (t_n) est la suite géométrique de raison 3 telle que $t_2 = -2{,}5$.

a) Calculer t_6.

b) Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, exprimer t_n explicitement en fonction de n.

13 (m_n) est la suite géométrique de raison 0,1 telle que $m_{15} = 7$. Calculer m_{10}.

EXERCICES RÉSOLUS

14 Calculer une somme de termes d'une suite arithmétique

→ Cours 2. C

(u_n) est la suite arithmétique de raison 4 telle que $u_2 = -5$.
Pour tout nombre $n \geqslant 2$ de $\mathbb{N}$, on pose $S_n = u_2 + u_3 + u_4 + \ldots + u_n$.

a) Exprimer S_n explicitement en fonction de n.

b) Tabuler la suite (S_n) avec la calculatrice et lire une valeur de n telle que $S_n = 99$.

Solution

a) Pour tout nombre $n \geqslant 2$, $S_n = u_2 + u_3 + u_4 + \ldots + u_n$.

$S_n = u_2 + (u_2 + 4) + (u_2 + 2 \times 4) + \ldots + (u_2 + (n-2) \times 4)$

$S_n = (n-1)u_2 + 4(1 + 2 + \ldots + (n-2))$

$S_n = -5(n-1) + 4\dfrac{(n-2)(n-1)}{2} = -5(n-1) + 2(n-2)(n-1)$

$S_n = (n-1)(-5 + 2(n-2))$

$S_n = (n-1)(2n-9)$

b) À l'écran de la calculatrice, on lit que la suite (S_n) prend la valeur 99 pour $n = 10$.

n	an
7	30
8	49
9	72
10	99

• Inutile de calculer chaque terme de S_n.
• On exprime $u_2, u_3, \ldots, u_n$ en fonction de u_2 à l'aide de :

$$\boldsymbol{u_n = u_2 + (n-2)r}$$

• Le nombre de termes de u_2 à u_n est $\boldsymbol{n - 2} + 1$ c'est-à-dire $\boldsymbol{n - 1}$.
• Enfin, on utilise la formule donnant $1 + 2 + \ldots + n$.
• En développant le produit, on obtient $S_n = 2n^2 - 11n + 9$.

15 Calculer une somme de termes d'une suite géométrique

→ Cours 3. C

(v_n) est la suite géométrique de raison 3 telle que $v_2 = 0{,}2$. Calculer $S = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_{10}$.

Solution

$S = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_{10}$

$S = v_0 + 3 \times v_0 + 3^2 \times v_0 + \ldots + 3^{10} \times v_0$

$S = v_0(1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^{10})$

$S = 0{,}2 \times \dfrac{1 - 3^{11}}{1 - 3} = 0{,}2 \times \dfrac{3^{11} - 1}{2}$

$S = 0{,}1(3^{11} - 1) = 17\,714{,}6$

• Inutile de calculer chaque terme de S.
• On exprime $v_1, v_2, \ldots, v_{10}$ en fonction de v_0 à l'aide de :

$$\boldsymbol{v_n = v_0 \times q^n}$$

• Enfin, on utilise la formule donnant $1 + q + q^2 + \ldots + q^n$.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 14

16 (u_n) est la suite arithmétique de raison $-1{,}5$ telle que $u_2 = 0{,}5$. Pour tout nombre $n \geqslant 2$ de $\mathbb{N}$, on pose $S_n = u_2 + u_3 + u_4 + \ldots + u_n$.

a) Exprimer S_n explicitement en fonction de n.

b) Tabuler la suite (S_n) avec la calculatrice et lire une valeur de n telle que $S_n = -77$.

Sur le modèle de l'exercice résolu 15

17 (v_n) est la suite géométrique de raison 2 telle que $v_1 = -1$.
Calculer $S = v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_8$.

18 (w_n) est la suite géométrique de raison 0,8 telle que $w_2 = 10$. Calculer $T = w_2 + w_3 + \ldots + w_7$.

Calcul mental → Exercez-vous sur la plateforme Hyperbole
+ de détails page 4

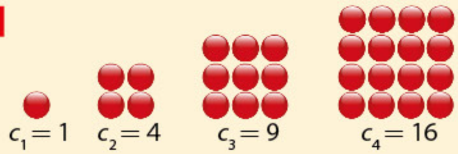
Modes de génération d'une suite

→ Cours 1. B

Questions Flash

19 (u_n) est la suite définie pour tout nombre n de $\mathbb{N}$ par $u_n = 2n + 1$.
Laquelle de ces affirmations est exacte ?
(1) (u_n) est la suite des nombres pairs.
(2) (u_n) est la suite des nombres impairs.
(3) (u_n) est la suite des carrés parfaits.

20



On poursuit le procédé illustré ci-dessus.
Définir la suite (c_n) par une formule explicite.

21 Définir par une formule explicite une suite (v_n) de son choix.

22 La suite (a_n) est définie par $a_0 = -1$ et pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $a_{n+1} = 2 - a_n$.
Calculer mentalement les premiers termes de cette suite et décrire ce que l'on remarque.

23 (u_n) est la suite définie pour tout nombre n de $\mathbb{N}$ par $u_n = 4n - 1$.
(v_n) est la suite définie par $v_0 = -1$ et pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $v_{n+1} = 4v_n - 1$.
Laquelle de ces affirmations est vraie ?
(1) $u_1 = v_1$
(2) $u_1 > v_1$
(3) $u_1 = -v_1$

24 Définir par récurrence une suite (u_n) de son choix.

Pour les exercices 25 à 27, calculer les cinq premiers termes de la suite (u_n).

25 Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{n-2}{n+1}$.

26 Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $u_n = \sqrt{2n+1}$.

27 Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{1}{3}n + \dfrac{1}{2}$.

28 (u_n) est la suite définie pour tout nombre n de $\mathbb{N}$ par $u_n = n^2 + 1$.
a) Calculer u_0, u_1, u_2, u_3.
b) Dans un repère orthonormé, représenter graphiquement ces quatre premiers termes de la suite (u_n).
c) Pour quelle valeur de n a-t-on $u_n = 50$?

29 (u_n) est la suite définie pour tout nombre n de $\mathbb{N}$ par :
$$u_n = -2n^2 + n - 3$$
À l'écran de la calculatrice :
a) tabuler la suite (u_n) ;
b) représenter graphiquement les dix premiers termes de la suite (u_n) en choisissant une fenêtre adaptée.

30 Algo Voici une fonction U en langage Python.

```
def U(n):
    u=4
    for i in range(1,n+1):
        u=u**2-2*u
    return u
```

a) Définir par récurrence la suite (u_n) dont cette fonction permet de calculer les termes.
b) Calculer u_1, u_2, u_3.
c) Saisir cette fonction et l'exécuter pour déterminer u_6.

31 Algo (v_n) est la suite définie par $v_0 = 2$ et pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $v_{n+1} = -\dfrac{1}{2}v_n + 1$.
a) Calculer v_1, v_2, v_3.
b) Écrire un algorithme qui calcule et affiche les termes de cette suite.
c) Coder cet algorithme en langage Python.
Saisir ce programme et l'exécuter pour déterminer v_{10}. *Arrondir au millième.*

32 (k_n) est la suite définie par $k_0 = 2$ et pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $k_{n+1} = \dfrac{1}{1+k_n}$.
Calculer k_1, k_2, k_3.

33 (u_n) est la suite définie par $u_2 = -4$ et pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = -3u_n + 1$.
Calculer u_3, u_1, u_0.

34 (z_n) est la suite définie par $z_0 = 1$ et pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $z_{n+1} = z_n(z_n + 0{,}02)$.
À l'écran de la calculatrice :
a) tabuler la suite (z_n) ;
b) représenter graphiquement les six premiers termes de la suite (z_n) en choisissant une fenêtre adaptée.

Suites arithmétiques

→ Cours 2. A et B

Questions Flash

35 (u_n) est la suite arithmétique de raison 6 telle que $u_1 = 4$.
Laquelle de ces affirmations est exacte ?
(1) Pour calculer u_0, on divise 4 par 6.
(2) Pour calculer u_0, on soustrait 4 à 6.
(3) Pour calculer u_0, on retranche 6 à 4.

36 Dans chaque cas, dire si les nombres peuvent être des termes consécutifs d'une suite arithmétique. Expliquer.
a) $-1; 2; 5; 8; 11$ **b)** $2; 4; 8; 16; 32$
c) $-10; -8; 0; 2; 4$ **d)** $7; 3; -1; -5; -9$

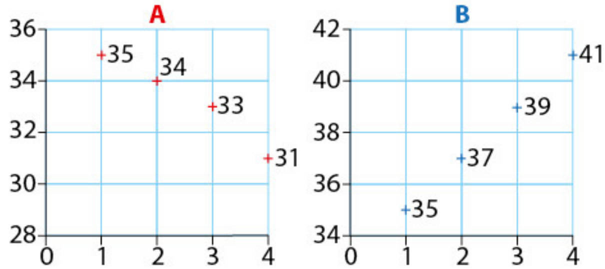
37 (v_n) est la suite arithmétique de raison 2,5 telle que $v_0 = 0{,}5$.
Calculer mentalement v_1, v_2, v_3, v_4.

38 (w_n) est la suite arithmétique de raison -10 telle que $w_0 = 0$.
Calculer mentalement w_1, w_2, w_3, w_4.

39 (t_n) est la suite arithmétique telle que $t_4 = 8$ et $t_5 = 20$.
Quelle est sa raison ?

40 (h_n) est la suite arithmétique telle que $h_4 = 8$ et $h_6 = 0$.
Quelle est sa raison ?

41 Ces graphiques représentent les chiffres d'affaires a_n et b_n, en milliers d'euros, de deux succursales A et B d'une chaîne, pendant quatre mois.



Dans chaque cas, préciser s'il est possible de modéliser les chiffres d'affaires par une suite arithmétique.
Si oui, et si l'évolution se poursuit ainsi, exprimer le terme général en fonction de n.

42 u_n, v_n et w_n représentent les prix, en euro, d'un timbre-poste dans trois pays A, B et C, l'année $2015 + n$.
Le tableau ci-dessous expose l'évolution des prix ces dernières années.

Année	2015	2016	2017	2018
Pays A	0,57	0,60	0,63	0,66
Pays B	0,51	0,53	0,57	0,59
Pays C	0,60	0,58	0,56	0,54

Pour chaque pays, préciser s'il est possible de modéliser ces prix par une suite arithmétique.
Si oui, et si l'évolution se poursuit ainsi, exprimer le terme général en fonction de n.

Pour les exercices 43 à 47, (u_n) est une suite arithmétique de raison r.

43 $u_0 = 1$ et $r = -10$. Calculer u_8.

44 $u_2 = 3$ et $r = 0{,}2$. Calculer u_{50}.

45 $u_2 = -4$ et $u_3 = 5$. Calculer r puis u_0.

46 $u_6 = 4$ et $u_8 = 12$. Calculer r puis u_5.

47 $u_2 = 7$ et $u_{10} = 1$. Calculer r puis u_0.

48 (b_n) est la suite arithmétique de raison $-\frac{1}{2}$ telle que $b_1 = \frac{3}{4}$.
Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, exprimer b_n en fonction de n. *Réduire l'expression.*

49 (a_n) est la suite arithmétique de raison -2 telle que $a_0 = 7$.
a) Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, exprimer a_n explicitement en fonction de n.
b) Dans un repère orthonormé, représenter graphiquement les quatre premiers termes de la suite (a_n).

50 (u_n) est la suite arithmétique de raison 5 telle que $u_0 = -7$.
À l'écran de la calculatrice, tabuler la suite (u_n) puis représenter graphiquement ses dix premiers termes en choisissant une fenêtre adaptée.

51 Algo (t_n) est la suite arithmétique de raison $-1{,}5$ telle que $t_0 = 3{,}2$.
a) Saisir un programme en langage Python qui calcule et affiche les termes $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_{14}, t_{15}$.
b) Exécuter ce programme, donner t_{10} et t_{15}.

Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique

→ Cours 2. C

Questions flash

52 Calculer mentalement la somme :
$$S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 14 + 15$$

53 Une horloge sonne toutes les heures. Combien émet-elle de sons en 24 h ?

54 $F = 3 + 6 + 9 + 12 + \ldots + 27 + 30$
Sans utiliser la calculatrice, dire laquelle de ces affirmations est exacte.
(1) $F = 135$ **(2)** $F = 165$ **(3)** $F = 198$

55 (u_n) est la suite arithmétique de raison 5 telle que $u_0 = 2$.
Calculer $S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_9 + u_{10}$.

56 (v_n) est la suite arithmétique de raison -3 telle que $v_0 = 7$.
Calculer $T = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_{29} + v_{30}$.

57 (w_n) est la suite arithmétique de raison $\frac{1}{2}$ telle que $w_0 = -1$. Émilie affirme :
« La somme $E = w_0 + w_1 + w_2 + \ldots + w_{14} + w_{15}$ est un nombre entier. » A-t-elle raison ? Justifier.

58 (a_n) est la suite arithmétique de raison 1,5 telle que $a_2 = -1$.
Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $S_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$.
Expliquer pourquoi $S_n = (n+1)(0{,}75n - 4)$.

59 (h_n) est la suite arithmétique de raison 5 telle que $h_2 = 3$.
a) Combien y a-t-il de nombres entiers naturels de 2 à 4 ? de 2 à 10 ? de 2 à 100 ?
b) Calculer $F = h_2 + h_3 + h_4 + \ldots + h_{99} + h_{100}$.

60 Une usine a produit 1 000 puces électroniques en 2019. Pour faire des prévisions, les dirigeants supposent que la production augmentera de 180 puces par an dans le futur.
On note p_n la production en $2019 + n$ ($n \in \mathbb{N}$).
a) Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n.
b) Combien l'usine prévoit-elle de fabriquer de puces de 2019 à 2025 ?

Suites géométriques

→ Cours 3. A et B

Questions flash

61 (u_n) est la suite géométrique de raison 4 telle que $u_1 = 5$.
Laquelle de ces affirmations est exacte ?
(1) Pour calculer u_0, on divise 5 par 4.
(2) Pour calculer u_0, on multiplie 5 par 4.
(3) Pour calculer u_0, on soustrait 4 à 5.

62 Dans chaque cas, dire si les nombres peuvent être des termes consécutifs d'une suite géométrique. Expliquer.
a) 4 ; 8 ; 16 ; 30 ; 60 ; 120 **b)** 100 ; 10 ; 1 ; 0,1 ; 0,01
c) -10 ; 0 ; 10 ; 20 ; 30 **d)** -2 ; 4 ; -8 ; 16 ; -32

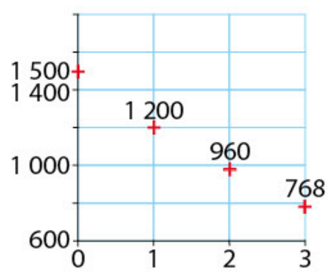
63 La taille d'un nénuphar double chaque jour. Au bout de 40 jours, il a recouvert tout un étang. Au bout de combien de jours avait-il recouvert la moitié de l'étang ?

64 (v_n) est la suite géométrique de raison 5 telle que $v_0 = 0{,}2$.
Calculer mentalement v_1, v_2, v_3, v_4.

65 (t_n) est la suite géométrique telle que $t_4 = 5$ et $t_5 = 7{,}5$.
Calculer sa raison.

66 (h_n) est la suite géométrique telle que $h_4 = 6$ et $h_6 = 54$.
Quelle peut être sa raison ?

67 Ce graphique représente l'évolution du niveau d'eau a_n, en mm, dans un puits le 1er du mois, de juin à septembre.



a) Calculer les trois taux d'évolution d'un mois au mois suivant. Que constate-t-on ?
b) En supposant que l'évolution se poursuive ainsi les mois suivants, modéliser cette situation par une suite géométrique dont on donnera la raison.
c) Estimer le niveau d'eau, en mm, dans ce puits au 1er juin de l'année suivante. *Arrondir à l'unité.*

Pour les exercices 68 à 70, (u_n) est une suite géométrique de raison q.

68 $u_0 = 16$ et $q = \frac{1}{2}$. Calculer u_8.

69 $u_6 = 9$ et $q = -3$. Calculer u_0.

70 $u_{10} = 18$ et $u_9 = -6$. Calculer q.

71 (v_n) est la suite géométrique telle que $v_4 = -4$ et $v_7 = -32$.

a) Calculer sa raison q.

b) Calculer v_{10}.

72 (k_n) est la suite géométrique de raison négative telle que $k_4 = 2\ 040$ et $k_6 = 510$.

a) Calculer sa raison q.

b) Exprimer k_n en fonction de n.

c) Calculer k_9.

73 Dans la colonne A de la feuille de calcul ci-contre, figurent les termes consécutifs d'une suite géométrique dont le premier terme se trouve dans la cellule A1.
Déterminer par le calcul, le contenu de chacune des cellules A8 et A15.

	A
21	3 145 728
22	6 291 456
23	12 582 912
24	25 165 824
25	50 331 648

74 (g_n) est la suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ telle que $g_0 = 10$.

a) Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, exprimer g_n explicitement en fonction de n.

b) Dans un repère orthonormé, représenter graphiquement les cinq premiers termes de la suite (g_n).

75 (u_n) est la suite géométrique de raison $-\frac{3}{4}$ telle que $u_0 = 50$.
À l'écran de la calculatrice, tabuler la suite (u_n) puis représenter graphiquement ses dix premiers termes en choisissant une fenêtre adaptée.

76 Algo **a)** Quel est le rôle de ce programme ?

```
U=-1000000
for i in range(1,11):
    U= U/2
    print(U)
```

b) Paul affirme : « Le dernier nombre affiché par le programme est – 1953,125. »
A-t-il raison ?

Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique

→ Cours 3. C

Questions flash

77 $S = 1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^7 + 3^8$
Sans utiliser de calculatrice, dire laquelle de ces affirmations est exacte.

(1) $S = \frac{3^9 - 1}{2}$ **(2)** $S = \frac{1 - 3^9}{2}$ **(3)** $S = \frac{1 + 3^9}{4}$

78 $F = 1 - 10 + 10^2 - 10^3 + 10^4 - 10^5$
Sans utiliser de calculatrice, dire laquelle de ces affirmations est exacte.

(1) $F = 111\ 111$ **(2)** $F = 90\ 901$ **(3)** $F = -90\ 901$

79 (u_n) est la suite géométrique de raison 4 telle que $u_0 = -2$.
Calculer $S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_9 + u_{10}$.

80 (v_n) est la suite géométrique de raison -3 telle que $v_5 = 1$.
Calculer $T = v_5 + v_6 + v_7 + \ldots + v_{19} + v_{20}$.

81 (w_n) est la suite géométrique de raison $\frac{3}{4}$ telle que $w_2 = 5$.
Calculer $M = w_0 + w_1 + w_2 + \ldots + w_6 + w_7$.

82 Algo

Voici un algorithme.

a) On exécute cet algorithme avec $n = 4$.

```
S ← 1
Pour k allant de 1 à n
   |S ← S + 1,5^k
Fin Pour
```

Compléter le tableau ci-dessous de suivi des variables k et S.

k		1	…
S	1	2,5	…

Quelle est la valeur de S obtenue en fin d'algorithme ?

b) Expliquer le rôle de cet algorithme.

c) Coder cet algorithme en langage Python, saisir la fonction obtenue.
Exécuter cette fonction avec $n = 4$ pour la tester puis avec $n = 10$.

83 Algo (u_n) est la suite géométrique de raison 2,5 telle que $u_0 = 3$.
Écrire un algorithme qui calcule :

$$S = u_0 + u_1 + \ldots + u_{10}$$

QCM interactifs

Pour se tester

84 **Dans chaque cas, donner la réponse exacte sans justifier.**

		A	B	C	D
1	(u_n) est la suite définie pour tout n de $\mathbb{N}$ par $u_n = 2n^2 - 4n$. Alors …	$u_{10} = 240$	$u_{15} = 390$	$u_{20} = 0$	$u_{100} = 1\,960$
2	(v_n) est la suite définie par $v_0 = 4$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_{n+1} = 2v_n - 3$. Alors …	$v_1 = 21$	$v_1 = 3$	$v_1 = 5$	$v_1 = 7$
3	(u_n) est la suite arithmétique de raison 10 telle que $u_2 = 5$. Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, …	$u_n = -5 + 5n$	$u_n = 10 - \frac{5}{2}n$	$u_n = 5 \times 10^{n-2}$	$u_n = 10n - 15$
4	$2 + 3 + 4 + \ldots + 79 + 80$ est égal à …	3 240	3 160	3 159	3 239
5	(u_n) est la suite géométrique de raison 10 telle que $u_0 = 3$. Pour tout n de $\mathbb{N}$, …	$u_n = 3 \times 10^n$	$u_n = 10 \times 3^n$	$u_n = 3 + 10n$	$u_n = 3 \times 10^{n-1}$
6	$5^2 + 5^3 + 5^4 + \ldots + 5^9 + 5^{10}$ est égal à …	$\frac{5^{11} - 1}{4}$	$\frac{1 - 5^{11}}{4}$	$\frac{5^{11} - 1}{4} - 6$	$\frac{5^{10} - 1}{4} - 6$

85 **Dans chaque cas, donner la (ou les) réponse(s) exacte(s) sans justifier.**

		A	B	C	D
1	(a_n) est la suite définie par $a_0 = 20$ et pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $a_{n+1} = 10a_n - 100$. Alors …	$a_2 = 100$	$a_3 = 8\,900$	$a_4 = 89\,000$	$a_5 = 888\,900$
2	(u_n) est la suite arithmétique telle que $u_5 = 4$ et $u_{15} = 19$. Alors …	$u_0 = -3$	$u_{10} = 11{,}5$	$u_{20} = 26{,}5$	$u_{30} = 40$
3	(v_n) est la suite géométrique telle que $v_9 = 0{,}5$ et $v_{12} = 4$. Alors …	$v_8 = 0{,}25$	$v_{10} = 2$	$v_{15} = 32$	$v_{20} = 512$
4	(t_n) est la suite géométrique de raison 4 telle que $t_3 = \frac{1}{4}$. Pour tout n de $\mathbb{N}$, …	$t_n = 4 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-3}$	$t_n = \frac{1}{4} \times 4^{n-3}$	$t_n = 4^{n-4}$	$t_n = \frac{1}{256} \times 4^n$

86 **Dans chaque cas, dire si l'affirmation est vraie ou fausse en justifiant.**

1 (u_n) est une suite arithmétique de raison r avec $r \neq 0$.
Affirmation : $u_{100} + u_{300} = 2 \times u_{200}$

2 (w_n) est une suite géométrique de raison q et à termes strictement positifs.
Affirmation : pour tout nombre n de $\mathbb{N}$ avec $n \geqslant 1$, $w_n = \sqrt{w_{n-1} \times w_{n+1}}$.

3 (h_n) est la suite géométrique de raison -2 telle que $h_1 = -4$.
Affirmation : il existe un nombre n de $\mathbb{N}$ tel que $h_n = -262\,144$.

Vérifiez vos réponses : p. 340

Nathan live!

87 Comprendre la définition par récurrence d'une suite

(v_n) est une suite telle que pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $v_{n+1} = 1{,}02v_n - 200$.

a) Quelle donnée manque-t-il pour pouvoir calculer les termes successifs de la suite ?

b) Par la suite, on prend $v_0 = 5000$.
Expliquer pourquoi $v_1 = 4\,900$.

c) Calculer v_2 puis v_3.
Vérifier avec la calculatrice.

AIDE
L'égalité $v_{n+1} = 1{,}02v_n - 200$ signifie que pour calculer un terme de la suite :
– on multiplie le terme **précédent** par 1,02 ;
– puis on retranche 200 au résultat obtenu.

88 Calculer la raison d'une suite arithmétique connaissant deux termes

(u_n) est la suite arithmétique telle que $u_3 = 15$ et $u_6 = 42$.
Calculer la raison r de la suite (u_n).

AIDE
Exprimer u_6 en fonction de u_3 à l'aide de la relation $u_n = u_p + (n-p)r$ puis chercher r.

89 Calculer la raison d'une suite géométrique connaissant deux termes

(k_n) est une suite géométrique de raison q.
Calculer les valeurs possibles de q dans chaque cas.

a) $k_5 = -0{,}5$ et $k_7 = -8$

b) $k_1 = 0{,}5$ et $k_4 = 108$

AIDE
a) Deux nombres ont pour carré 16.
b) Tabuler la fonction cube à l'écran de la calculatrice.

90 Algo Comprendre un algorithme

Parmi ces algorithmes, reconnaître ceux qui affichent des termes consécutifs d'une suite arithmétique ou géométrique. Expliquer.

Algorithme 1	Algorithme 2	Algorithme 3	Algorithme 4
U ← −2 Pour i allant de 1 à 10 | U ← −10 + U | Afficher U Fin Pour	U ← 1,5 Pour i allant de 1 à 6 | U ← U^2 | Afficher U Fin Pour	U ← 10 Pour i allant de 1 à 12 | U ← U/4 | Afficher U Fin Pour	U ← −3 Pour i allant de 1 à 100 | U ← 5 − U | Afficher U Fin Pour

AIDE
Diviser par un nombre non nul revient à multiplier par l'inverse de ce nombre.

91 Calculer une somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique ou géométrique

a) (v_n) est la suite arithmétique de raison 0,8 telle que $u_2 = 4$.
Calculer $S = u_2 + u_3 + u_4 + \ldots + u_9 + u_{10}$.

b) (v_n) est la suite géométrique de raison 0,8 telle que $v_2 = 4$.
Calculer $S = v_2 + v_3 + v_4 + \ldots + v_9 + v_{10}$.

AIDE
a) Écrire u_3 à u_{10} en fonction de u_2, compter le nombre de termes u_2 et repérer la somme $1 + 2 + \ldots + 8$.
b) Écrire v_3 à v_{10} en fonction de v_2, factoriser par v_2 et repérer la somme $1 + 0{,}8 + 0{,}8^2 + \ldots + 0{,}8^8$.

EXERCICE RÉSOLU

92 Modéliser une évolution

En 2016, année de sa création, un club de randonnée pédestre comptait 80 adhérents.
On a constaté chaque année qu'en moyenne :
- 10 % des adhérents ne renouvellent pas leur adhésion au club ;
- 20 nouvelles personnes s'inscrivent au club.

```
U ← 80
Pour i allant de 1 à N
  |U ← 0,9 U + 20
Fin Pour
U ← partie entière de U
```

a) Dans l'algorithme ci-contre, N désigne un nombre de $\mathbb{N}^*$.
Appliquer cet algorithme avec $N = 3$ et compléter un tableau de suivi des variables.
Que représente pour la situation la valeur de la variable U à la fin de l'algorithme ?
b) Définir la suite (v_n) qui modélise cette situation à l'aide d'une relation de récurrence.

Solution

a) Voici le tableau de suivi des valeurs des variables i et U lors de l'exécution de l'algorithme.

i		1	2	3	
U	80	92	102,8	112,52	112

La valeur de U à la fin de l'algorithme est 112.
Cette valeur indique le nombre d'adhérents à ce club en 2016 + 3 c'est-à-dire en 2019.
b) La suite v est définie par :
- $v_0 = 80$;
- pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $v_{n+1} = 0{,}9v_n + 20$.

L'affectation U ← partie entière de U permet d'obtenir un résultat entier.
Pour les calculs intermédiaires, on utilise les valeurs exactes.

C'est la boucle « Pour » de l'algorithme qui permet de calculer les termes successifs de la suite (v_n).
La variable U prend pour valeurs ces termes successifs.

À VOTRE TOUR

93 Au 1er janvier 2018, Pierre avait 2 000 € sur son compte.
Chaque mois, il dépense les trois quarts du solde, puis reçoit à la fin du mois un salaire de 1 700 €.
Voici un algorithme où N est un nombre de $\mathbb{N}^*$.

```
U ← 2 000
Pour i allant de 1 à N
  |U ← 0,25 U + 1 700
Fin Pour
```

a) Appliquer l'algorithme avec $N = 3$.
Que représente la valeur de U en fin d'algorithme ?
b) Définir la suite (v_n) qui modélise cette situation à l'aide d'une relation de récurrence.

94 Le club de judo d'une ville comptait 200 adhérents en 2015. Le trésorier a constaté qu'en moyenne, chaque année, 80 % des adhérents renouvellent leur adhésion, et que de plus il y a 30 nouveaux arrivants.
Voici un algorithme où N est un nombre de $\mathbb{N}^*$.

```
U ← 200
Pour i allant de 1 à N
  |U ← 0,8 U + 30
Fin Pour
```

a) Appliquer l'algorithme avec $N = 4$.
Que représente la valeur de U en fin d'algorithme ?
b) Définir la suite (v_n) qui modélise cette situation à l'aide d'une relation de récurrence.

EXERCICE RÉSOLU

95 Comparer deux évolutions

Ahmed et Barbara ont été embauchés en janvier 2018 par deux entreprises, au même salaire mensuel brut de 1 600 €. D'après leurs contrats, le salaire mensuel d'Ahmed est revalorisé au 1er janvier de chaque année de 35 € et celui de Barbara augmente de 2 %.
Lequel de ces deux contrats est le plus avantageux ?

Solution

• Mathématisation

On note a_n et b_n les montants respectifs des salaires d'Ahmed et de Barbara après n années.
Le salaire d'Ahmed augmente chaque année de 35 € donc la suite (a_n) est arithmétique de premier terme 1 600 et de raison 35.
Ainsi, pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $a_n = 1\,600 + 35n$.
Le salaire de Barbara est multiplié chaque année par **1,02** donc la suite (b_n) est géométrique de premier terme 1 600 et de raison 1,02.
Ainsi, pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $b_n = 1\,600 \times 1{,}02^n$.

Pour Barbara, une hausse de 2 % correspond à un coefficient multiplicateur de $1 + \dfrac{2}{100}$ c'est-à-dire de **1,02**.

• Résolution du problème

En tabulant les suites (a_n) et (b_n) avec la calculatrice, on constate que pour $n \leqslant 9$, $a_n \geqslant b_n$ et que pour $n = 10$, $a_{10} < b_{10}$.

n	an	bn
9	1915	1912.1
10	1950	1950.3
11	1985	1989.3
12	2020	2029.1

Le tableau obtenu permet de conjecturer qu'à partir de $n = 10$, $a_n < b_n$; ensuite il faut penser à le prouver comme ci-dessous.

À partir de $n = 10$, le salaire d'Ahmed augmente de 35 € par an, alors que celui de Barbara augmente d'au moins 39 € par an (car $1\,950{,}3 \times 2\ \% \approx 39$). Donc pour tout $n \geqslant 10$, $a_n < b_n$.

• Conclusion

Pendant les 10 premières années, c'est-à-dire jusqu'à fin 2027, le contrat d'Ahmed est le plus intéressant.
À partir du 1er janvier 2028, ce sera celui de Barbara.

À VOTRE TOUR

96 Gaylor a économisé 1 000 € et veut les placer sur un compte rémunéré.
Option 1 : 2 % par an à intérêts constants (les intérêts sont toujours calculés à partir du capital initial).
Option 2 : 1,8 % par an à intérêts composés (chaque année les intérêts sont calculés sur le capital et les intérêts de l'année précédente).
Quelle option est la plus intéressante ?

97 Yasmine et Carole ont décidé de vendre chacune leur collection de timbres.
Yasmine possédait 1 000 timbres et en vend 30 par mois.
Carole en possédait 1 000 et vend 3,5 % de sa collection chaque mois.
Comparer les évolutions de ces deux collections de timbres.

Démontrer et raisonner

98 Comment démontrer qu'une suite est arithmétique ?

Méthode
Pour démontrer qu'une suite (u_n) est arithmétique, on démontre que, pour tout n de $\mathbb{N}$, la différence $u_{n+1} - u_n$ est constante ; cette constante est la raison de la suite u.

(u_n) est la suite définie, pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, par $u_n = 0{,}8n - 5$.

a) Zoé affirme : « Avec cette feuille de calcul, je conjecture que la suite (u_n) est arithmétique. » Qu'a remarqué Zoé pour émettre cette conjecture ?

	A	B
1	n	u_n
2	0	-5
3	1	-4,2
4	2	-3,4
5	3	-2,6
6	4	-1,8
7	5	-1

b) Prouver la conjecture de Zoé.

99 Comment démontrer qu'une suite est géométrique ?

Méthode
Pour démontrer qu'une suite (u_n) est géométrique, on démontre que, pour tout n de $\mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = qu_n$$

Ce nombre q est la raison de la suite u.

(u_n) est la suite définie pour tout nombre n de $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{3^n}{2}$.

a) Avec la feuille de calcul ci-contre, expliquer pourquoi l'on peut conjecturer que la suite (u_n) est géométrique.

b) Prouver cette conjecture.

	A	B
1	n	u_n
2	0	0,5
3	1	1,5
4	2	4,5
5	3	13,5
6	4	40,5
7	5	121,5

100 Utiliser un contre-exemple

Démontrer que la suite (v_n) définie pour tout nombre n de $\mathbb{N}$ par $v_n = (n+1)\times 2^n$:

a) n'est pas arithmétique ;

b) n'est pas géométrique.

Générer des suites

101 (v_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$v_n = n^2 + 2n - 3$$

a) Déterminer une fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ telle que, pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $v_n = f(n)$.

b) Dans chaque cas, le point donné dans un repère appartient-il à la courbe représentative de f ? à la représentation graphique de (v_n) ?

A$(2;5)$ B$(5;32)$ C$(51;270)$
D$(70;3\,710)$ E$(-10;77)$ F$(4{,}6;27{,}36)$

102 Par la suite, on suppose que l'euro a une valeur constante au cours des ans.

Le 1er janvier 2000, Inès a ouvert un compte rémunéré au taux annuel de 1 % d'intérêts composés. Elle a déposé 1 200 €.

Depuis cette date elle verse 800 € sur son compte au 1er janvier de chaque année.

a) Vérifier qu'il y avait 2 012 € sur le compte d'Inès au 2 janvier 2001.

b) Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, on note S_n le montant, en euro, sur le compte d'Inès au 2 janvier 2000 + n. Exprimer S_{n+1} en fonction de S_n.

c) Avec la calculatrice ou le tableur, déterminer le montant, en euro, sur le compte d'Inès au 2 janvier 2020. *Arrondir à l'unité.*

103 Algo Les lignes 1 à 6 de ce programme en langage Python définissent la fonction `Factorielle`. L'image d'un nombre n de $\mathbb{N}$ par cette fonction est notée $n!$ (« factorielle n »).

```
1 def Factorielle(n):
2     if n<2:
3         r=1
4     else:
5         r=n*Factorielle(n-1)
6     return r
7
8 n=int(input("Entrer n="))
9 for i in range(0,n+1):
10    print(i,"!=",Factorielle(i))
```

a) Saisir ce programme et l'exécuter avec $n = 5$.
Recopier et compléter : • $0! = \dots$ • $1! = \dots$ • $2! = \dots$ • $3! = \dots$ • $4! = \dots$ • $5! = \dots$

b) (u_n) est la suite définie pour tout nombre n de $\mathbb{N}$ par $u_n = n!$. Définir cette suite (u_n) en utilisant une relation de récurrence.

c) Recopier et compléter la phrase : « Pour $n \geqslant 1$, $n!$ est le … des nombres entiers naturels de 1 à … ».

104 Dans chaque cas, on ne connaît que les cinq premiers termes de la suite (u_n).
Proposer une relation de récurrence exprimant u_{n+1} en fonction de u_n compatible avec ces données.

a) $u_0 = 0,\ u_1 = 1,\quad u_2 = 3,\quad u_3 = 7,\quad u_4 = 15$

b) $u_0 = 2,\ u_1 = 3,\quad u_2 = 8,\quad u_3 = 63,\quad u_4 = 3\,968$

105 Expliquer pourquoi les données de $u_0 = 0$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{1 - u_n}$ ne définissent pas une suite.

Étudier des suites arithmétiques

106 (v_n) est une suite arithmétique telle que $v_4 = 9$ et $v_1 + v_2 + \ldots + v_8 = 92$.
Calculer v_1 et la raison r de la suite.

107 (u_n) est la suite arithmétique de raison 6 telle que $u_0 = 7$.
(v_n) est la suite définie pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, par $v_n = 5u_n - 1$.
Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique.

108 (u_n) est la suite de nombres réels strictement positifs définie par $u_0 = 2$ et pour tout nombre n de $\mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 1}$$

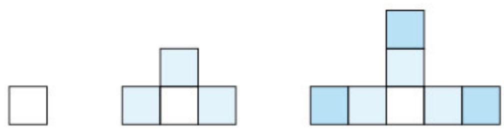
(v_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{1}{u_n}$.

a) Calculer u_1, u_2, u_3, u_4, puis v_1, v_2, v_3, v_4.

b) Démontrer que (v_n) est une suite arithmétique.

c) Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, exprimer :
- v_n en fonction de n ;
- u_n en fonction de n.

109 On construit une suite de motifs. La figure ci-dessous montre les trois premiers.



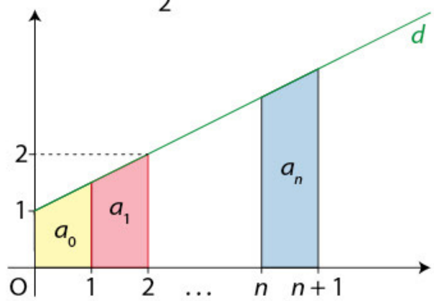
Motif n° 1 Motif n° 2 Motif n° 3

Pour tout nombre $n \geqslant 1$ de $\mathbb{N}$, on note C_n le nombre de carrés du motif numéro n.

a) Justifier que la suite (C_n) est arithmétique.
Quelle est sa raison ?

b) Calculer le nombre de carrés du motif n° 1 000.

110 Dans le repère orthonormé ci-dessous, d est la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}x + 1$.



Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, on note a_n l'aire du trapèze coloré en bleu sur la figure.

a) Calculer a_0, a_1 et a_2.

b) Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, exprimer a_n en fonction de n.

c) Démontrer que la suite (a_n) est arithmétique. Quelle est sa raison ?

d) Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, on note :

$$S_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

Exprimer S_n en fonction de n et interpréter géométriquement le résultat obtenu.

111 **1. a)** Calculer la somme des entiers pairs de 2 à 100.

b) Calculer la somme des entiers impairs de 1 à 99.

2. Calculer de deux façons différentes la somme des entiers de 1 à 100.

Étudier des suites géométriques

112 a et b désignent deux nombres réels avec $b \neq 0$. (u_n) est la suite définie pour tout nombre n de $\mathbb{N}$ par $u_n = a \times b^n$.
Démontrer que la suite (u_n) est géométrique.

113 La désintégration de l'atome de radium 226 donne de l'hélium et un autre élément radioactif, le radon 222. Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, la masse m_n, en gramme, de radon, n jours après la désintégration vérifie la relation $m_{n+1} - m_n = -0{,}165 m_n$.

a) Exprimer m_{n+1} en fonction de m_n.
En déduire la nature de la suite (m_n).

b) Exprimer m_n en fonction de n et de m_0.

c) Avec la calculatrice, déterminer au bout de combien de jours la masse de radon sera inférieure à la moitié de sa valeur initiale.
Ce nombre est la **demi-vie** du radon 222.

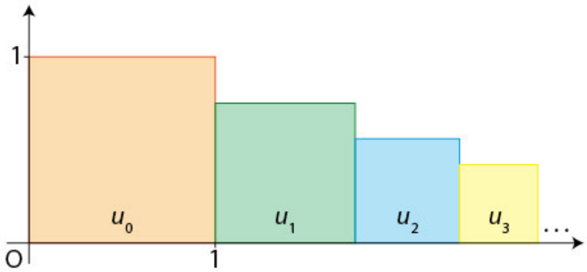
114 On s'intéresse au cours d'une expérience à la croissance d'une population de bactéries dont le nombre augmente de 50 % toutes les heures. À l'origine, la population, notée p_0, est de 1 200 bactéries. Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, on note p_n le nombre de bactéries au bout de n heures.

a) Calculer p_1 et p_2.

b) Quelle est la nature de la suite (p_n) ? Justifier.

c) Calculer le nombre de bactéries au bout d'une journée. *Arrondir à l'unité.*

115 Voici une suite de carrés construits dans un repère orthonormé.



À chaque étape, le côté du carré est multiplié par $\frac{3}{4}$.

Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, on note u_n l'aire (en unité d'aire) du carré construit à l'étape n.

a) Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Justifier.

b) Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, exprimer en fonction de n la somme :

$$S = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$$

116 Le contrat de location d'un bien immobilier fixe le loyer mensuel à 500 € la première année, réévalué de 2 % chaque année à la date anniversaire du contrat.

Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, on note ℓ_n le montant, en euro, du loyer mensuel la n-ième année après la signature du contrat. Ainsi $\ell_0 = 500$.

a) Calculer ℓ_1, ℓ_2.

b) Exprimer ℓ_{n+1} en fonction de ℓ_n.

c) En déduire la nature de la suite (ℓ_n).

d) Calculer le montant total des loyers durant neuf années de location. *Arrondir au centième.*

e) Avec la calculatrice, déterminer l'année à partir de laquelle le loyer mensuel dépassera 800 €.

117 Calculer chacune de ces sommes.

a) $R = 4 + 16 + 64 + \ldots + 1\,048\,576$

b) $S = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} + \frac{1}{128} - \frac{1}{256}$

c) $T = 10^{-1} + 10^{-2} + 10^{-3} + \ldots + 10^{-20}$

118 Pour tout nombre $n \geqslant 1$ de $\mathbb{N}$:

$$u_n = 0{,}\underbrace{99\ldots\ldots9}_{n \text{ fois}}$$

a) Justifier que $u_3 = \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3}$.

b) Démontrer que, pour tout nombre $n \geqslant 1$ de $\mathbb{N}$, u_n est la somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique.

c) Démontrer de deux façons différentes que, pour tout nombre $n \geqslant 1$ de $\mathbb{N}$, $u_n = 1 - \frac{1}{10^n}$.

119 Un jardinier dispose d'une citerne pouvant contenir 1 500 litres d'eau et remplie aux deux tiers. En période de sécheresse, cette citerne perd d'un jour à l'autre, 5 % du contenu qu'elle avait au début du jour.

Après 10 jours de sécheresse, le jardinier décide d'arroser ses 65 arbustes. Il a besoin pour cela de 10 litres d'eau par arbuste.

Sa réserve sera-t-elle alors suffisante ?

S'entraîner à la logique → p. 336

120 Quantificateurs

(u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^2 - 16$.

Pour chaque proposition, dire si elle est vraie ou fausse. Justifier.

P : « Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$. »

Q : « Il existe un nombre n de $\mathbb{N}$, pour lequel $u_n > 10\,000$. »

R : « Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $u_n \neq 425$. »

121 Deux quantificateurs consécutifs

(u_n) est une suite définie sur $\mathbb{N}$.

Voici deux propositions.

P : « Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, il existe un nombre réel q tel que $u_{n+1} = q \times u_n$. »

Q : « Il existe un nombre réel q tel que pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = q \times u_n$. »

L'une de ces deux propositions n'est pas la définition d'une suite géométrique.

Laquelle et pourquoi ?

122 Négation d'une proposition

Écrire la négation de chacune des propositions suivantes :

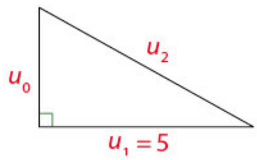
P : « Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 2$. »

Q : « Il existe un nombre n de $\mathbb{N}$ tel que $u_n = 0$. »

123 Imaginer une stratégie

Chercher | Raisonner

Les côtés d'un triangle rectangle ont pour longueur u_0, $u_1 = 5$ et u_2 (dans une unité de longueur) avec $u_0 < u_1 < u_2$.



Existe-t-il une suite arithmétique (u_n) de premiers termes u_0, u_1, u_2 ?

124 Tice Conjecturer puis démontrer

Chercher | Représenter

(u_n) est la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = -\frac{3}{2}u_n^2 + \frac{5}{2}u_n + 1$.

a) Avec le tableur ou la calculatrice, obtenir les vingt premiers termes de la suite (u_n).
Émettre une conjecture.

b) Démontrer cette conjecture.

c) Quelle est la valeur de u_{2020} ?

125 Algo Histoire des maths Étudier la suite de Syracuse

Calculer | Communiquer

Au début du 20e siècle, le mathématicien allemand Lothar Collatz a étudié une suite dite « suite de Syracuse » parce qu'elle a été présentée à l'université de Syracuse aux États-Unis.

Ce programme en langage Python permet de calculer et d'afficher ses termes successifs selon la valeur de N, nombre de $\mathbb{N}^*$.

```python
def Syracuse(n):
    if n%2==0:
        n=n/2
    else:
        n=3*n+1
    return n

N=int(input("Entrer N ="))
while N!=1:
    print(N)
    N=Syracuse(N)
print(1)
```

a) Exécuter ce programme pas à pas pour la valeur $N = 15$.

b) Saisir ce programme et l'exécuter avec différents nombres N de son choix.

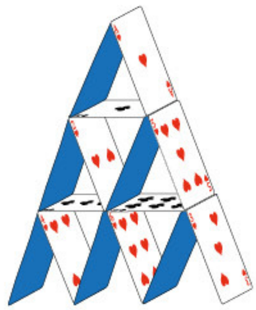
c) Collatz a émis une conjecture sur le dernier nombre affiché par ce programme.
Quelle est cette conjecture ?

> Cette conjecture n'a pas encore été démontrée : « Les mathématiques ne sont pas encore prêtes pour de tels problèmes » affirme le mathématicien hongrois Paul Erdős.

126 Modéliser une situation

Chercher | Modéliser

Raphaël s'amuse à construire des châteaux de cartes sur le modèle ci-contre.
Il souhaite en réaliser un en utilisant exactement toutes les cartes contenues dans cinq jeux de 52 cartes chacun.
Raphaël y parviendra-t-il ?
Si oui, combien le château de cartes aura-t-il d'étages ?



127 Tice Étudier un nouveau type de suite

Chercher | Modéliser

Aujourd'hui, les chardons ont colonisé 300 m^2 d'un jardin. Chaque semaine, la surface envahie augmente de 4 % par développement des racines auquel s'ajoutent 13 m^2 dus à la dissémination des graines.
On note u_n l'aire de la partie du jardin, en m^2, envahie par les chardons dans n semaines.

a) Indiquer la valeur de u_0 et justifier que pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1{,}04u_n + 13$.

b) (v_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n + 325$.
Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.
Préciser son premier terme et sa raison.

c) Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, exprimer :
- v_n en fonction de n ;
- u_n en fonction de n.

d) Avec le tableur ou la calculatrice, déterminer le nombre de semaines au bout duquel les chardons auront envahi au moins 600 m^2.

128 Comprendre une affirmation — ? Problème ouvert

Chercher | Raisonner

1. (v_n) est la suite définie par $v_0 = 5$ et, pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n + 2$.
Gemma affirme : « En retranchant un même nombre α à chaque terme de la suite, j'obtiens les termes d'une suite géométrique. »
Déterminer :

a) le nombre α mentionné par Gemma ;

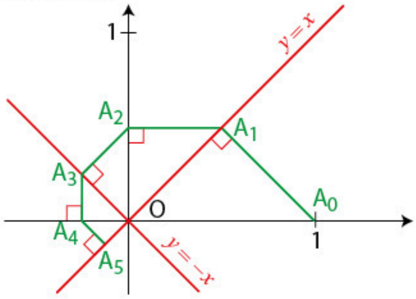
b) une expression de v_n explicitement en fonction de n.

2. (w_n) est la suite définie par $w_0 = -1$ et, pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $w_{n+1} = -3w_n + 2$.
Exprimer w_n en fonction de n.

129 Prendre des initiatives

Chercher **Raisonner**

Dans un repère orthonormé d'origine O, on construit une suite de points (A_n) (avec n nombre de $\mathbb{N}$) comme indiqué ci-dessous.



Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$ avec $n \geqslant 1$, exprimer la longueur de la ligne brisée $A_0A_1A_2 \ldots A_n$ en fonction de n.

130 Comprendre une situation

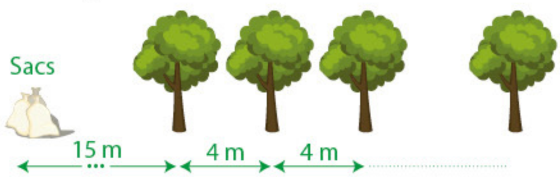
Narration de recherche

Chercher **Communiquer**

Rédiger les différentes étapes de la recherche, sans omettre les fausses pistes et les changements de méthode.

Problème Un jardinier doit déposer une brouette d'engrais au pied de chacun des vingt arbres qui bordent un côté d'une allée. Les arbres sont espacés de 4 m et les sacs d'engrais se trouvent 15 m avant le premier arbre.

Quelle distance aura-t-il parcourue après avoir achevé son travail et ramené la brouette près des sacs d'engrais ?

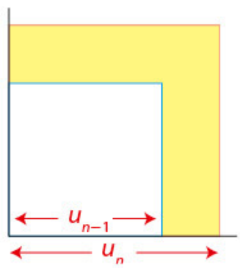


131 Calculer $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$

Chercher **Raisonner**

(u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 1 + 2 + \ldots + n$.

Démontrer que pour tout $n \geqslant 1$, l'aire du domaine jaune délimité par les deux carrés ci-contre est égale à n^3 puis en déduire que :



$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots n)^2$$

132 Study the Moore's law

Modéliser **Communiquer**

In 1970, the first microprocessor contained 2300 transistors.

Gordon Moore predicted that the numbers of transistors in new microprocessors would increase by 40% a year.

To create a quantum computer, each processor needs more than 15 billion transistors.

If Moore's law is accurate, when will scientists be able to build quantum computers?

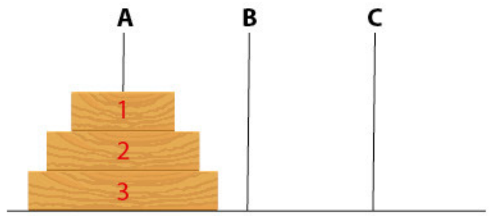
In fact, Moore's law is no longer valid since mid2017. The miniaturization of the components requires more time.

133 Histoire des maths — Analyser un jeu : les tours de Hanoï

Chercher **Représenter**

Les tours de Hanoi sont un casse-tête du mathématicien français Édouard Lucas (1892). Le jeu consiste à transporter trois disques 1, 2, 3 placés par taille décroissante du piquet A au piquet C en respectant les règles suivantes :

- on ne déplace qu'un disque à la fois ;
- on ne place un disque que sur un autre disque plus grand ou sur un piquet vide.



1. Résoudre ce casse-tête.

Cela peut être effectué en 7 déplacements.

2. On suppose maintenant que l'on dispose des piquets A, B, C mais avec cette fois n disques numérotés 1, 2, …, n (avec $n \geqslant 1$).

On note T_n le nombre **minimum** de coups pour transporter la tour de A en C.

a) Pour transporter les n disques de A en C, on transporte d'abord les $n-1$ disques les plus petits en B, puis le grand disque en C. En déduire une relation de récurrence entre T_n et T_{n-1} (avec $n \geqslant 1$).

b) Démontrer que la suite (u_n) définie pour tout nombre n de $\mathbb{N}$ avec $n \geqslant 1$ par $u_n = T_n + 1$ est géométrique.

c) Exprimer T_n en fonction de n.

d) Quel est le nombre minimum de coups pour transporter une tour de 10 disques de A en C ?

134 Algo Histoire des maths Étudier la suite de Fibonacci

Modéliser Représenter

1. La suite définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et, pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ est appelée **suite de Fibonacci** du nom d'un mathématicien italien.

a) Calculer F_2, F_3 et F_4.

b) Recopier et compléter cet algorithme afin qu'il affiche la liste des termes de la suite jusqu'à F_n pour un nombre $n \geqslant 2$ de $\mathbb{N}$.

```
X ← 0
Y ← 1
Afficher X, Y
Pour i allant de 2 à n
   | Z ← X + Y
   | X ← ...
   | Y ← ...
   | Afficher Z
Fin Pour
```

c) Coder cet algorithme en langage Python.

d) Exécuter le programme obtenu de façon à afficher les termes de la suite jusqu'à F_{20}.

2. En 1202, dans son livre *Liber abaci* (Livre du calcul), Fibonacci pose le problème suivant :

« Un homme met un couple de lapins dans un lieu isolé. Combien de couples obtient-on en un an si chaque couple engendre tous les mois un nouveau couple à compter du 3e mois de vie ? »

Résoudre ce problème. *On peut s'aider d'un arbre.*

Des Défis

135 Empiler des nombres

La suite des nombres entiers naturels non nuls est écrite dans cette pyramide.

Par exemple, 11 figure au 2e rang sur la 4e ligne.

À quelle ligne et à quel rang figure 2 020 ?

				1				
			2	3	4			
		5	6	7	8	9		
	10	11	12	13	14	15	16	
17	...							

136 De curieuses suites

Est-il possible que des nombres non nuls u_0, u_1, u_2 soient trois termes d'une suite (u_n) à la fois arithmétique et géométrique ?

137 Résoudre une équation

Quels sont tous les nombres réels différents de 1 tels que :

$$1+\left(\frac{x+1}{x-1}\right)+\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2+\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3=0\ ?$$

OBJECTIF BAC

138 Algo Utiliser un algorithme — 45 min

D'après Bac 2018, Antilles-Guyane

Le directeur d'une réserve marine a recensé 3 000 cétacés dans cette réserve au 1er juin 2017. Le classement de la zone en « réserve marine » ne sera pas reconduit si le nombre de cétacés devient inférieur à 2 000.

Une étude lui permet d'élaborer un modèle selon lequel, chaque année :

• entre le 1er juin et le 31 octobre, 80 cétacés arrivent dans la réserve ;

• entre le 1er novembre et le 31 mai, la réserve perd 5 % de son effectif par rapport à celui du 31 octobre qui précède.

Selon ce modèle, pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, u_n désigne le nombre de cétacés au 1er juin de l'année 2017 + n.

On a donc $u_0 = 3\,000$.

1. Justifier que $u_1 = 2\,926$.

2. Justifier que, pour tout nombre entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0{,}95u_n + 76$$

3. On désigne par (v_n) la suite définie, pour tout nombre entier naturel n, par $v_n = u_n - 1\,520$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,95 dont on précisera le premier terme.

b) En déduire que, pour tout nombre entier naturel n :

$$u_n = 1\,480 \times 0{,}95^n + 1\,520$$

4. Recopier et compléter l'algorithme suivant afin de déterminer l'année à partir de laquelle le nombre de cétacés dans la réserve sera inférieur à 2 000.

```
n ← 0
u ← 3 000
Tant que ...
   | n ← ...
   | u ← ...
Fin Tant que
```

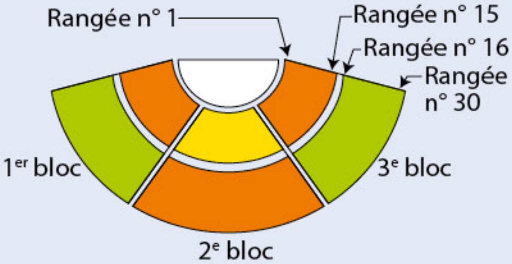
Exploiter ses compétences

139 Évaluer une recette

La situation problème

Un célèbre groupe musical donne un concert dans une salle de spectacle et elle affiche complet.
Utiliser les différentes informations pour calculer la recette du soir.

DOC 1 Le plan de la salle



DOC 2 Les tarifs

: 50 € : 40 € : 30 €

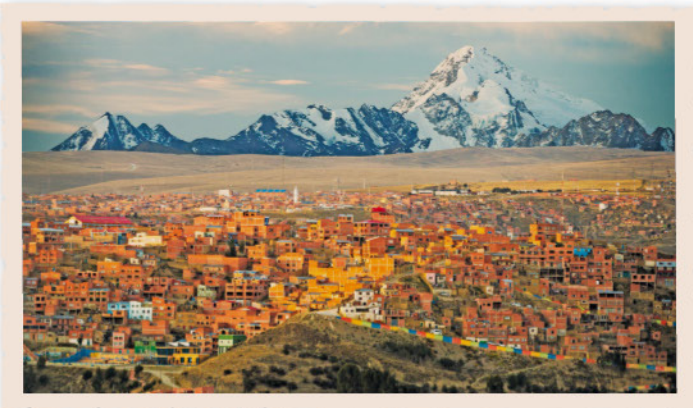
DOC 3 Les rangées de sièges

Dans chacun des trois blocs de sièges de la salle de concert, la rangée n° 1 compte 21 sièges et en s'éloignant de la scène, chaque rangée compte 3 sièges de plus que la rangée précédente.

140 Voyager en altitude

La situation problème

Lina est en voyage en Bolivie. Elle fait étape à El Alto, l'une des villes les plus hautes du monde, et elle est gênée par l'altitude.
Utiliser les différentes informations pour calculer le nombre d'inspirations par minute de Lina afin qu'elle inspire la même quantité d'oxygène que chez elle au repos.



DOC 1 La pression atmosphérique

- On considère qu'au niveau de la mer, la pression atmosphérique est de 1 013 hPa.
- La pression atmosphérique diminue de 1,25 % quand l'altitude s'élève de 100 m.

DOC 2 La respiration de Lina

- Lina habite à 100 m d'altitude et effectue 15 inspirations par minute au repos.
- À El Alto, elle loge à 4 100 m d'altitude.

DOC 3 Pression et inspirations

En altitude, la respiration s'intensifie afin d'apporter plus d'oxygène à l'organisme. On estime que, jusqu'à 8,5 km d'altitude, la pression atmosphérique P est inversement proportionnelle au nombre N d'inspirations (c'est-à-dire que le produit $P \times N$ est constant).

141 Estimer le prix d'un forage

La situation problème

Une compagnie pétrolière souhaite réaliser un forage en pleine mer.
Utiliser les différentes informations pour estimer la profondeur du forage prévu.

DOC 1 Les coûts de forage

- 100 000 € pour creuser les dix premiers mètres.
- 300 000 € pour creuser les dix mètres suivants.
- 500 000 € pour creuser les dix mètres suivants.
- Ainsi de suite, chaque dizaine de mètres supplémentaire coûte 200 000 € de plus que la dizaine de mètres précédente.

DOC 2 Le budget de la compagnie

Pour la partie forage, la compagnie pétrolière a prévu un budget de 14,4 millions d'euros.

142 Étudier une population de renards

La situation problème

Dans le Puy-de-Dôme, une population de 63 renards est étudiée par des chercheurs. Ils estiment que le milieu ne peut accommoder plus de 100 individus.
Les chercheurs étudient l'évolution de cette population à l'aide d'une suite logistique.
Utiliser les différentes informations pour analyser l'évolution de cette population selon la valeur du facteur r de ce modèle.

DOC 1 La suite logistique

La suite logistique (x_n) est définie par la donnée de x_0 et, pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$.

- x_n désigne le rapport de la population à la n-ième génération sur la population maximum ; ici, $x_0 = \frac{63}{100} = 0,63$.
- r désigne un nombre réel de l'intervalle $[0 ; 4]$ interprété comme le facteur de « croissance » de la population.

DOC 2 Un peu d'histoire

En 1976, le biologiste d'origine australienne Robert McCredie May a popularisé l'utilisation de la suite logistique pour modéliser la taille d'une population biologique au fil des générations.

DOC 3 Pression et inspirations

On peut programmer cette suite en langage Python ou utiliser la calculatrice, le tableur.
Par exemple, avec $r = 1$, on obtient $x_1 = 0,233\,1$; $x_2 \approx 0,178\,8$; $x_3 \approx 0,146\,8$; …