8 Limites des fonctions

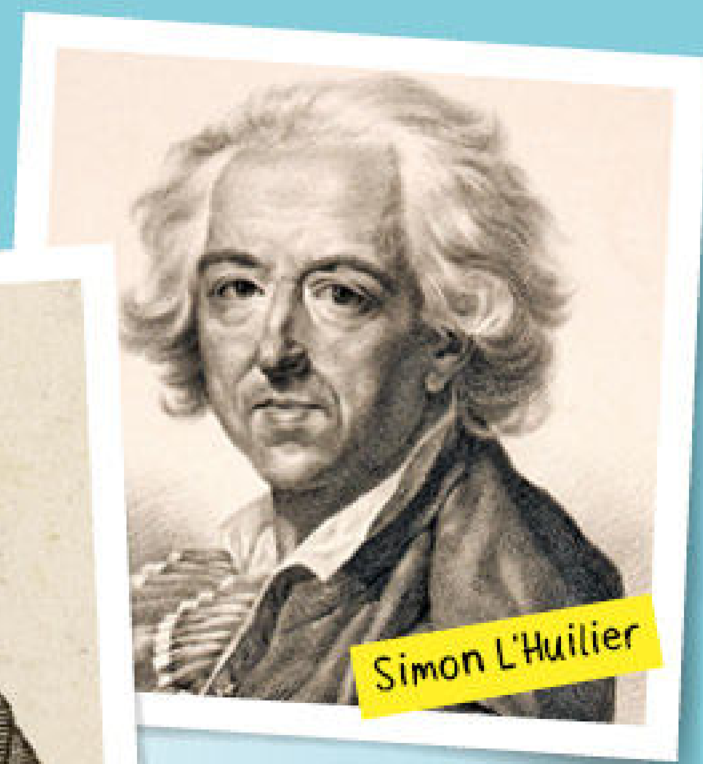
HISTOIRE DES MATHS

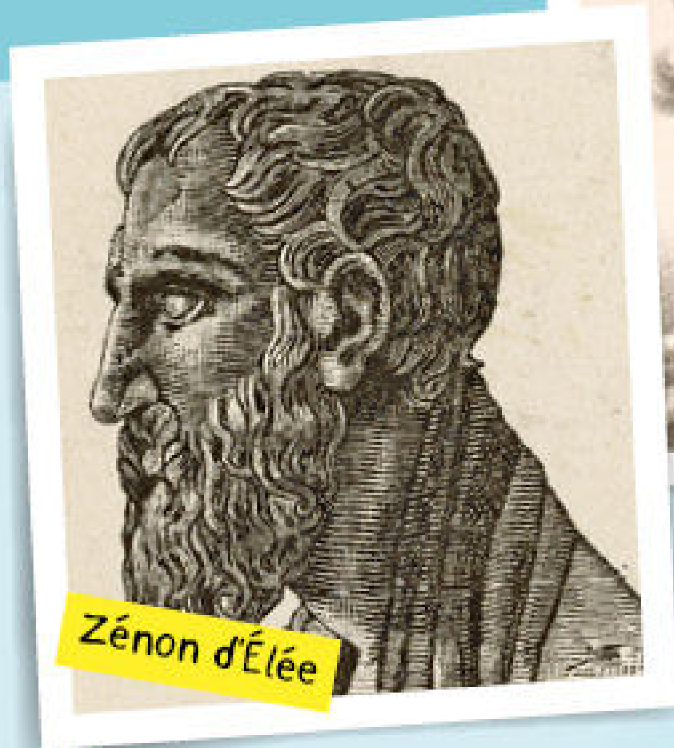
On peut considérer que le concept de limite est né avec le philosophe grec **Zénon d'Élée** au 4e siècle avant notre ère. Il est l'auteur de célèbres paradoxes dont celui d'Achille et la tortue.

Aux 17e et 18e siècles, les mathématiciens ont une intuition claire de la notion de limite. Par exemple, en 1682, le mathématicien allemand **Gottfried Leibniz**, utilise des écritures telles que :

$$\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \dots\right).$$

Au 19e siècle, le besoin de définir rigoureusement le concept de limite se fait sentir. Le mathématicien français **Augustin Cauchy** donne une place centrale à la notion de limite en analyse. Plus tard, le mathématicien allemand **Karl Weierstrass**, surnommé « le père de l'analyse moderne » en donne la première définition précise et introduit la notation $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ pour la limite d'une fonction f en x_0.


Simon L'Huilier


Zénon d'Élée

► **Zénon d'Élée** (vers – 490 ; – 430), fait reposer son paradoxe d'Achille et la tortue sur la remarque suivante : « À la course, la tortue ne sera jamais rattrapée par Achille, car Achille doit toujours commencer par atteindre le point d'où est partie la tortue, de sorte que la tortue a toujours quelque avance. »

► **Simon L'Huilier** (1750-1840), est un mathématicien suisse. On lui doit l'abréviation lim pour désigner la limite d'une fonction (sans la précision au-dessous du comportement de la variable, qui est introduit par Weierstrass vers 1850).

1780 L'Huilier développe le concept de limite d'une fonction.

1821 Dans son *Cours d'analyse*, Cauchy formalise la notion de limite et calcule des limites à l'aide d'encadrements.

1850 Weierstrass énonce la définition d'une limite avec des quantificateurs.

1872 Dans son *Nouveau précis d'analyse infinitésimale*, Méray précise le rôle et la place de la notion de limite en analyse.

1799 *Les Sabines* tableau de David

1804 Sacre de Napoléon 1er

1835 Balzac publie *La Fille aux yeux d'or*

1848 Abolition de l'esclavage en France

1857 Publication des *Fleurs du Mal* de Baudelaire

1880 *Liberté, Égalité, Fraternité* sur les frontons des institutions publiques

1800 1825 1850 1875 1900

Le Signal à Soulac-sur-Mer, en Gironde, en 1967 et en 2014

La résidence « Le Signal » fut construite en 1967 à 200 m du front de mer. Symbole de la montée des eaux, elle n'en est maintenant plus qu'à 10 m ! Du fait du réchauffement climatique le niveau des océans va certainement augmenter dans le futur. Les calculs de limites permettent de prévoir à long terme les possibles évolutions selon différents scénarios envisageables.

Les contenus et capacités travaillés dans ce chapitre

	Savoir-faire	Exercices
• Limite finie ou infinie en l'infini. Asymptotes parallèles à l'axe des abscisses.	1 à 4, 23, 24, 25	26 à 31
• Limite finie ou infinie en un point. Asymptotes parallèles à l'axe des ordonnées.	5 à 8	32 à 37
• Limites et comparaison.	9 à 14	38 à 47
• Opérations et limites. Lever des indéterminations.	15 à 18	48 à 63
• Limites en $+\infty$ et $-\infty$ de la fonction exponentielle. Croissance comparée de $x \mapsto x^n$ et exp en $+\infty$.	19 à 22	64 à 77

Bien démarrer

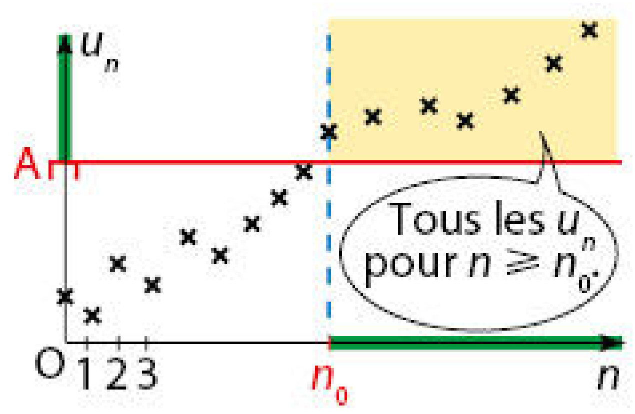
Calcul mental

Rappels utiles

• **Suite de limite infinie**

Dire qu'une suite (u_n) a pour limite $+\infty$ signifie que tout intervalle du type $]A\,;+\infty[$ (avec A nombre réel) contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.

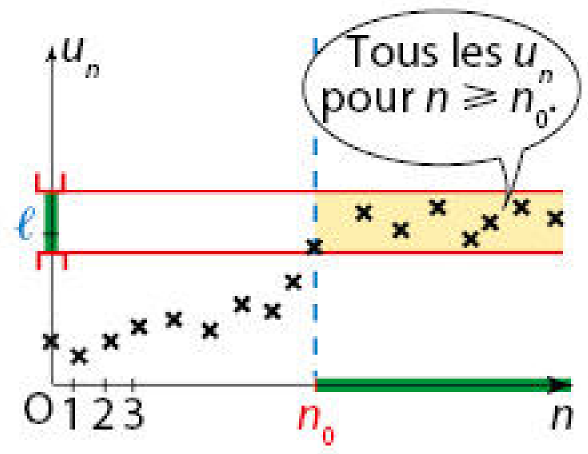
On note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.



• **Suite de limite finie**

Dire qu'une suite (u_n) a pour limite un nombre réel ℓ signifie que tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.

On note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$.



• **Fonction exponentielle**

Pour tous réels x et y, pour tout entier relatif n,

$$e^0 = 1 \qquad e^x > 0 \qquad e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

$$e^{x+y} = e^x \times e^y \qquad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y} \qquad (e^x)^n = e^{nx}$$

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$\exp'(x) = e^x.$$

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

• **Deux encadrements à connaître**

Pour tout réel x,

$$-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1 \quad \text{et} \quad -1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1.$$

• **Majorer, minorer**

f et g sont deux fonctions définies sur un intervalle I telles que pour tout réel x de I, $f(x) < g(x)$.

On dit que g **majore** f ou que f **minore** g.

À l'oral — Questions-Tests

Pour chaque question, il y a une seule réponse exacte.

1 (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^2$.

a) Le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geqslant 1\,000$ est :

(1) 30 **(2)** 31 **(3)** 32

b) À partir d'un certain rang, tous les termes de la suite (u_n) appartiennent à l'intervalle :

(1) $]-\infty\,;-100[$ **(2)** $]10^{100}\,;+\infty[$ **(3)** $]10^5\,;10^6[$

c) La limite de la suite (u_n) est :

(1) 2 **(2)** $+\infty$ **(3)** $-\infty$

2 (v_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n = 3 + \frac{1}{n}$.

a) Le plus petit entier n tel que $3 \leqslant u_n \leqslant 3{,}01$ est :

(1) 10 **(2)** 100 **(3)** 1 000

b) À partir d'un certain rang, tous les termes de la suite (u_n) appartiennent à l'intervalle :

(1) $]5\,;+\infty[$ **(2)** $]1\,;2[$ **(3)** $]3\,;3+10^{-6}[$

c) La limite de la suite (u_n) est :

(1) 1 **(2)** 3 **(3)** 4

3 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{3x}\left(\frac{1}{e^{-x}} - 2e^{-2x}\right).$$

Pour tout réel x, $f(x)$ est égal à :

(1) $e^3 - 2e^x$ **(2)** $e^{4x} - 2e^x$ **(3)** $e^{4x} - 2e^{-6x^2}$

4 g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = xe^x$.

Pour tout réel x, $g'(x)$ est égal à :

(1) xe^x **(2)** $1 + xe^x$ **(3)** $(x+1)e^x$

5 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{3 + \cos(x)}{x^2 + 1}.$$

a) Une fonction qui majore f sur $\mathbb{R}$ est :

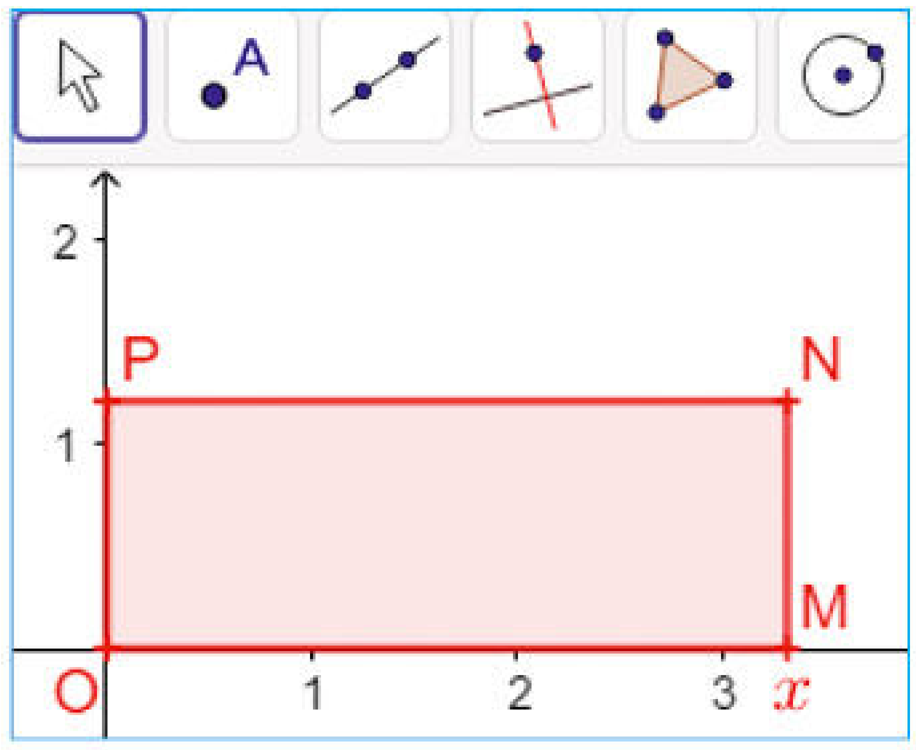
(1) $x \mapsto \frac{2}{x^2+1}$ **(2)** $x \mapsto \frac{3}{x^2+1}$ **(3)** $x \mapsto \frac{4}{x^2+1}$

b) Une fonction qui minore f sur $\mathbb{R}$ est :

(1) $x \mapsto \frac{2}{x^2+1}$ **(2)** $x \mapsto \frac{3}{x^2+1}$ **(3)** $x \mapsto \frac{4}{x^2+1}$

1 Tice Fonction de limite réelle en $+\infty$

Dans un repère orthonormé d'origine O, M est le point de coordonnées $(x\,;0)$ où x est un nombre réel strictement positif.
N et P sont les points ci-contre d'ordonnée positive tels que MNPO est un rectangle d'aire 4.



1 On note f la fonction qui au nombre réel $x > 0$ associe l'ordonnée du point N.
a) Donner l'expression de $f(x)$.
b) Réaliser cette figure avec un logiciel de géométrie et, en déplaçant le point M, conjecturer le comportement de $f(x)$ lorsque x prend de grandes valeurs.

2 **a)** Justifier l'écran de calcul formel ci-contre.

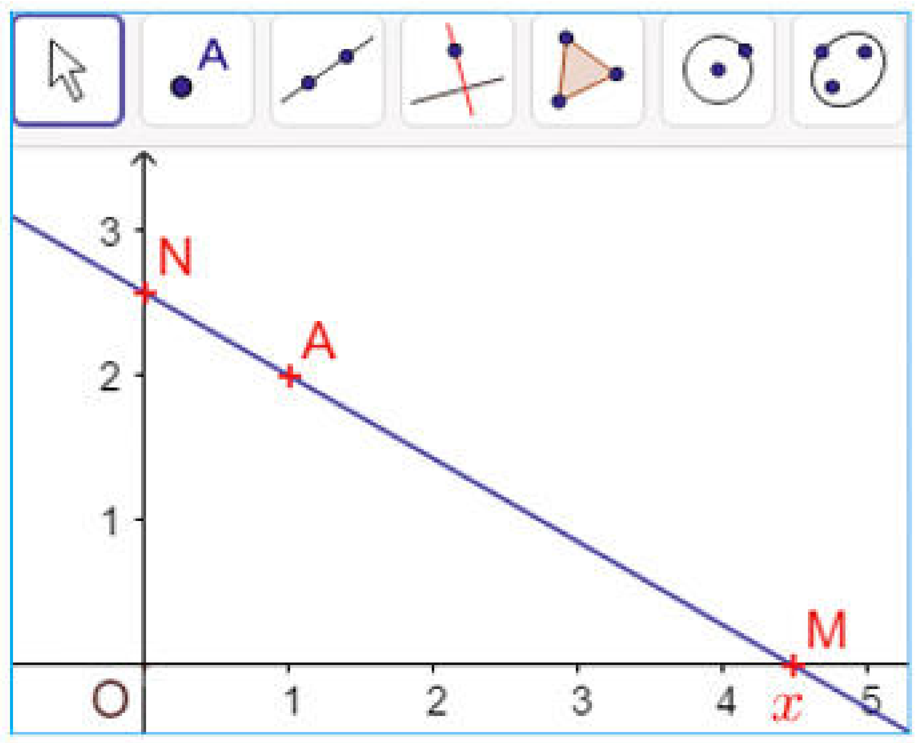
1 Résoudre$\left(0 < \frac{4}{x} < 0.01\right)$
→ $\{x > 400\}$

Ainsi, l'intervalle $]0\,;0{,}01[$ contient tous les $f(x)$ pour $x > 400$.
b) Dans chaque cas, est-il possible que tous les $f(x)$ appartiennent à l'intervalle I ? Si oui, pour quelles valeurs de x ?
• $\mathrm{I} =]0\,;0{,}001[$ • $\mathrm{I} =]0\,;0{,}000\,1[$ • $\mathrm{I} =]0\,;10^{-6}[$
c) a désigne un nombre réel strictement positif aussi proche de 0 qu'on le souhaite.
Montrer que l'intervalle $]0\,;a[$ contient tous les $f(x)$ pour x assez grand.

On dit que **la fonction f a pour limite 0 en** $+\infty$ et on note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

2 Tice Fonction de limite $+\infty$ en un réel

Dans un repère orthonormé, on considère les points A(1 ; 2) et M$(0\,;x)$ où x désigne un nombre réel tel que $x > 1$.
N est le point d'intersection de la droite (AM) et de l'axe des ordonnées.



1 On note g la fonction qui à un nombre réel $x > 1$, associe l'ordonnée du point N.
a) Justifier que pour tout réel $x > 1$, $g(x) = \dfrac{2x}{x-1}$.
b) Réaliser cette figure avec un logiciel de géométrie et, en déplaçant le point M, conjecturer le comportement de $g(x)$ lorsque x se rapproche de 1.

2 Dans chaque cas, tabuler la fonction g à l'aide de la calculatrice afin de dire s'il est possible que tous les $g(x)$ appartiennent à l'intervalle I. Si oui, pour quelles valeurs de x ?
a) $\mathrm{I} =]10\,;+\infty[$ **b)** $\mathrm{I} =]100\,;+\infty[$ **c)** $\mathrm{I} =]10^4\,;+\infty[$

Conseil : choisir un pas de tabulation de plus en plus fin.
On admet ici, que tout intervalle $]A\,;+\infty[$ (avec $A > 0$ nombre réel aussi grand soit-il), contient tous les $g(x)$ pour $x > 1$, assez proche de 1. On dit que **la fonction g a pour limite** $+\infty$ **en 1** et on note $\lim\limits_{x\to1} g(x) = +\infty$.

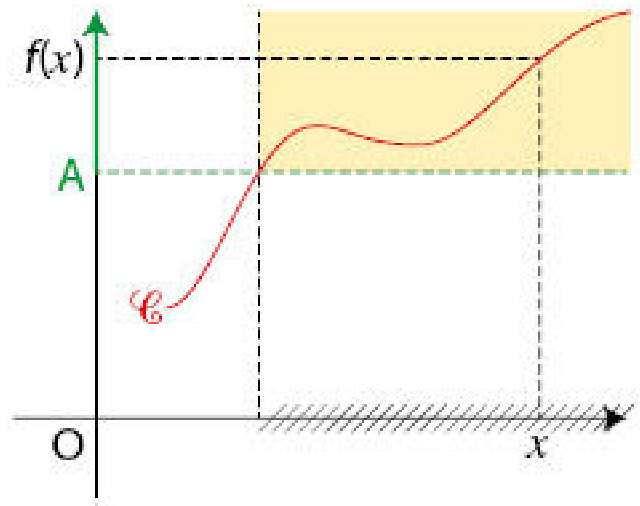
Exercices
- **1** à **4** (ci-contre)
- **26** à **31**

1 Limite finie ou infinie en l'infini

A Limite infinie en $+\infty$ ou en $-\infty$

Définition

Dire qu'une fonction f a pour **limite** $+\infty$ **en** $+\infty$ signifie que tout intervalle $]A\,;+\infty[$ (avec A nombre réel) contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand. On note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.



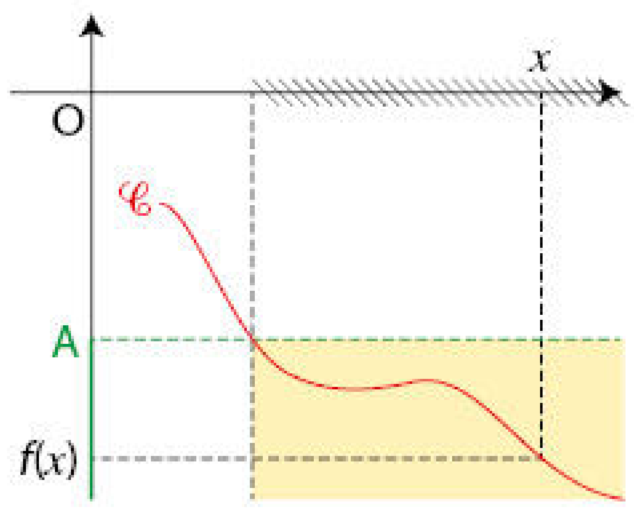
Exemples

Fonctions de référence de limite $+\infty$ en $+\infty$

$x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^n$ (avec $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$), $x \mapsto \sqrt{x}$ (voir exercice **1**).

Définition

Dire qu'une fonction f a pour **limite** $-\infty$ **en** $+\infty$ signifie que tout intervalle $]-\infty\,;A[$ (avec A nombre réel) contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand. On note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.



Exemples

Fonctions de référence de limite $-\infty$ en $+\infty$

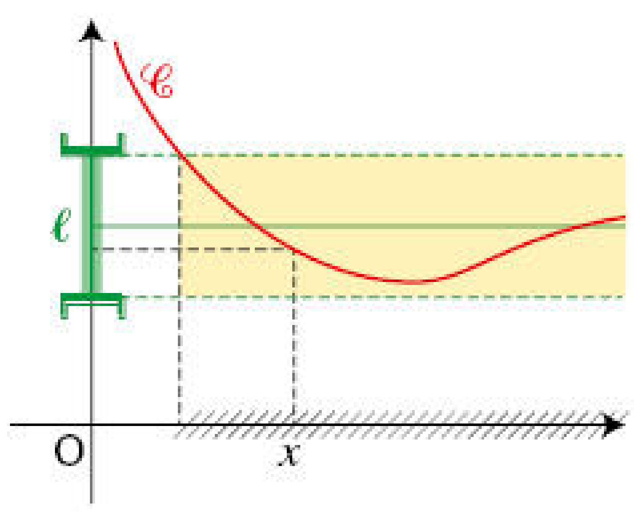
$x \mapsto -x$, $x \mapsto -x^2$, $x \mapsto -x^n$ (avec $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$), $x \mapsto -\sqrt{x}$.

Remarque : on définit de façon analogue les limites infinies en $-\infty$.
Par exemple, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$.

B Limite finie en $+\infty$ ou en $-\infty$

Définition

Dire qu'une fonction f a pour **limite le nombre réel ℓ en** $+\infty$ signifie que tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand. On note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$.



Exemples

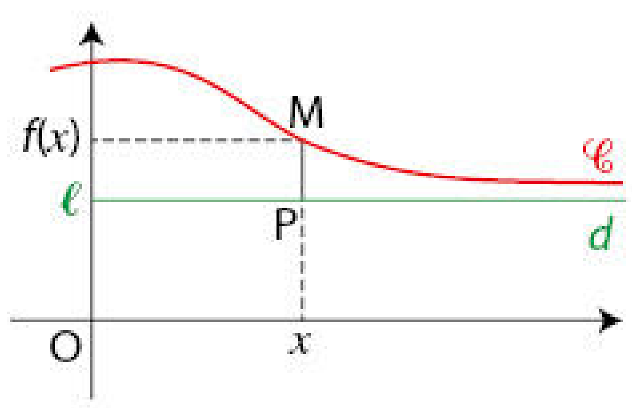
Fonctions de référence de limite 0 en $+\infty$

$x \mapsto \dfrac{1}{x}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ (voir exercice **2**), $x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$ (avec $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$), $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Remarque : on définit de façon analogue une limite réelle en $-\infty$.

Interprétation graphique

Lorsque $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$, on dit que, dans un repère orthonormé, la droite d d'équation $y = \ell$, est une **asymptote horizontale** en $+\infty$ à la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f.



Cela signifie qu'en notant $M(x\,;f(x))$ un point de $\mathscr{C}$ et $P(x\,;\ell)$ un point de d, la distance MP tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.
Remarque : on définit de même une asymptote horizontale en $-\infty$ lorsque $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$.

EXERCICES RÉSOLUS

1 Comprendre une limite infinie en $+\infty$

f est la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x}$.

a) Démontrer que pour tout réel $A \geqslant 0$, l'intervalle $]A\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand.

b) Que peut-on en déduire pour la fonction f ?

Solution

a) Pour tout réel $x \geqslant 0$, $f(x) \in\,]A\,;+\infty[$ équivaut à $\sqrt{x} > A$.

La fonction carré étant strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$, $\sqrt{x} > A$ équivaut à $x > A^2$.

Ainsi, l'intervalle $]A\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour tout réel $x > A^2$.

b) On en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Pour démontrer que l'intervalle $]A\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand, on résout dans $[0\,;+\infty[$, l'inéquation $f(x) > A$, c'est-à-dire $\sqrt{x} > A$.

2 Comprendre une limite finie en $+\infty$

g est la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{1}{x^2}$.

a) Démontrer que, pour tout nombre réel $\alpha > 0$, l'intervalle $]0\,;\alpha[$ contient toutes les valeurs $g(x)$ pour x assez grand.

b) En déduire la limite de la fonction g en $+\infty$.

c) Interpréter graphiquement cette limite pour la courbe représentative $\mathscr{C}$ de g dans un repère orthonormé.

Solution

a) Pour tout réel $x > 0$, $g(x) \in\,]0\,;\alpha[$ équivaut à $0 < \dfrac{1}{x^2} < \alpha$.

La fonction inverse étant strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$, $0 < \dfrac{1}{x^2} < \alpha$ équivaut à $x^2 > \dfrac{1}{\alpha}$.

Pour démontrer que l'intervalle $]0\,;\alpha[$ contient toutes les valeurs $g(x)$ pour x assez grand, on résout dans $]0\,;+\infty[$, l'inéquation $g(x) < \alpha$ c'est-à-dire $\dfrac{1}{x^2} < \alpha$.

La fonction racine étant strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$, $x^2 > \dfrac{1}{\alpha}$ équivaut à $x > \dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}$.

Ainsi, l'intervalle $]0\,;\alpha[$ contient toutes les valeurs $g(x)$ pour tout réel $x > \dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}$.

b) On en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$.

c) La droite d d'équation $y = 0$ (l'axe des abscisses) est une asymptote horizontale en $+\infty$ à $\mathscr{C}$.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 1

3 f est la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=\sqrt{x}+2.$$

a) Démontrer que $f(x) > 100$ pour x assez grand.

b) Démontrer que, pour tout réel $A > 2$, l'intervalle $]A\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand.

c) Que peut-on en déduire pour la fonction f ?

Sur le modèle de l'exercice résolu 2

4 g est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$g(x)=\frac{1}{x}+1.$$

a) Démontrer que, pour tout réel $\alpha > 1$, l'intervalle $]1\,;\alpha[$ contient toutes les valeurs $g(x)$ pour x assez grand.

b) En déduire la limite de la fonction g en $+\infty$.

c) Interpréter graphiquement cette limite pour la courbe $\mathscr{C}$ de g dans un repère orthonormé.

Exercices
- 5 à 8 (ci-contre)
- 32 à 37

2 Limite finie ou infinie en un réel

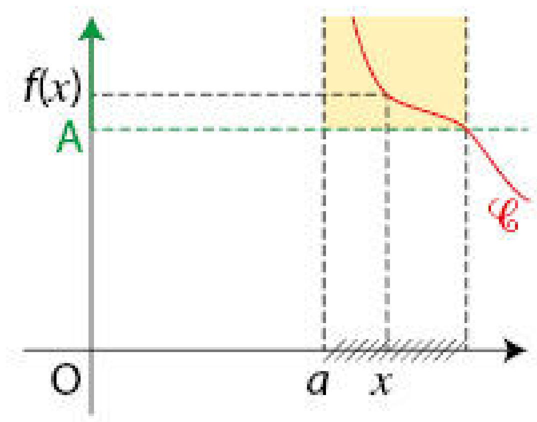
f est une fonction définie sur D (intervalle ou réunion d'intervalles). On étudie la limite de f en un nombre réel a que si $a \in$ D ou si $a \notin$ D lorsque a est une borne d'un intervalle de D.
Par exemple, on peut étudier la limite en 0 de :

- $x \mapsto x^2$ car $\mathrm{D} = \mathbb{R}$ et $0 \in \mathbb{R}$,
- $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ car 0 est une borne de $\mathrm{D} =]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$.

A Limite infinie en un nombre réel a

Définition

Dire qu'une fonction f a pour **limite $+\infty$ en a** signifie que tout intervalle $]\mathrm{A}\,;+\infty[$ (avec A nombre réel) contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez proche de a.
On note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.



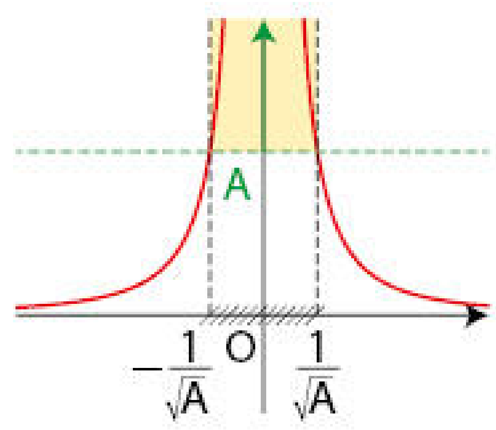
Remarque : on définit de façon analogue une limite $-\infty$ en a.

Exemple 1

f est la fonction définie sur $]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

Pour tout réel $\mathrm{A} > 0$, $\dfrac{1}{x^2} > \mathrm{A}$ équivaut à $0 < x^2 < \dfrac{1}{\mathrm{A}}$, soit $-\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{A}}} < x < \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{A}}}$ et $x \neq 0$.

Donc $]\mathrm{A}\,;+\infty[$ contient tous les $f(x)$ pour x assez proche de 0 et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$.

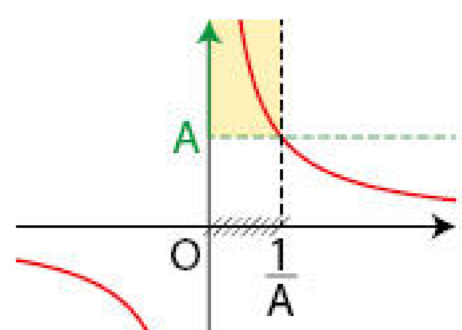


Exemple 2

g est la fonction définie sur $]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{1}{x}$.

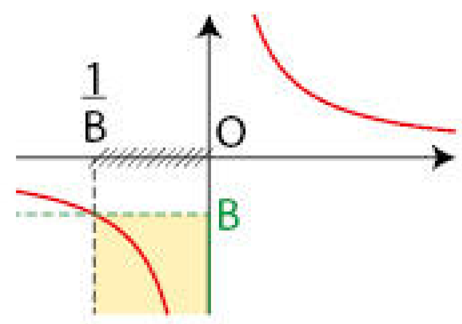
- Sur $]0\,;+\infty[$, on se donne un nombre réel $\mathrm{A} > 0$. $\dfrac{1}{x} > \mathrm{A}$ équivaut à $0 < x < \dfrac{1}{\mathrm{A}}$.

On dit que g a pour **limite $+\infty$ à droite en 0** et on note $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$.

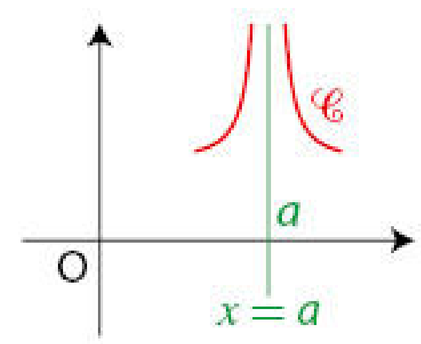


- Sur $]-\infty\,;0[$, on se donne un nombre réel $\mathrm{B} < 0$. $\dfrac{1}{x} < \mathrm{B}$ équivaut à $\dfrac{1}{\mathrm{B}} < x < 0$.

On dit que g a pour **limite $-\infty$ à gauche en 0** et on note $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \dfrac{1}{x} = -\infty$.



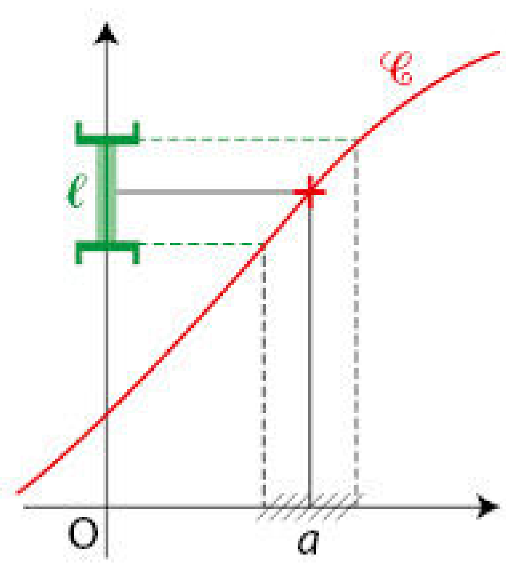
Interprétation graphique : lorsqu'une fonction f a pour limite $+\infty$ ou $-\infty$ en un nombre réel a (éventuellement à droite ou à gauche), on dit que, dans un repère orthonormé, la droite d d'équation $x = a$ est une **asymptote verticale** à la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f.
Le graphique ci-contre illustre le cas où $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.



B Limite finie en un nombre réel a

Définition

Dire qu'une fonction f a pour **limite un réel ℓ en a** signifie que tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez proche de a.
On note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$.



Remarque : si $a \in$ D et si f a une lmite ℓ en a, alors $\ell = f(a)$.
Le graphique ci-contre illustre le cas où $a \in$ D et a n'est pas une borne de D.

EXERCICES RÉSOLUS

5 Comprendre une limite infinie en *a*

f est la fonction définie sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$.

a) Utiliser cet écran de calcul formel pour justifier que la limite de f en -1 est $+\infty$.

1 Simplifier$\left(\text{Résoudre}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}>A, x, A>0\right)\right)$

$\rightarrow \left\{-1<x<-\dfrac{(A^2-1)}{A^2}\right\}$

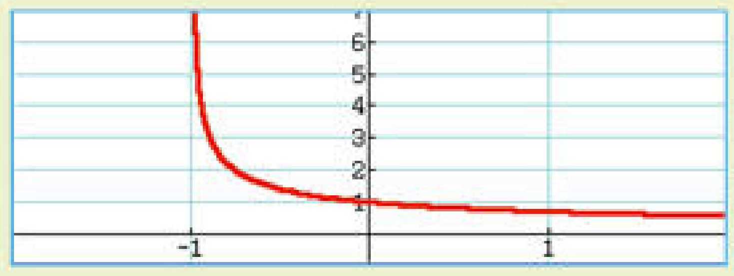
b) Interpréter graphiquement cette limite pour la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f dans un repère orthonormé.

Solution

a) On se donne un nombre réel $A>0$.
Pour tout réel $x>-1$, $f(x)>A$ équivaut à $-1<x<-\dfrac{A^2-1}{A^2}$, c'est-à-dire $-1<x<-1+\dfrac{1}{A^2}$.
Ainsi, l'intervalle $]A\,;+\infty[$ contient tous les $f(x)$ pour $x>-1$ et assez proche de -1. Donc $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=+\infty$.

b) Graphiquement, cela signifie que la droite d'équation $x=-1$ est asymptote verticale à $\mathscr{C}$.

Tabuler la fonction f pour des valeurs proches de -1 ou afficher sa courbe représentative permet de conjecturer sa limite en -1.

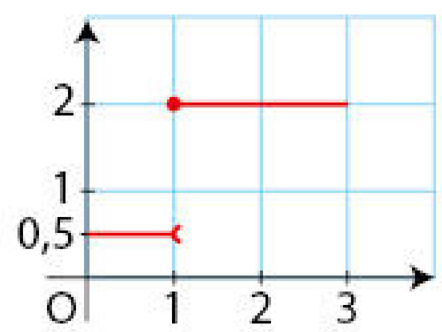


6 Comprendre le besoin d'envisager des limites à droite et à gauche

La fonction g représentée ci-contre est définie sur $[0\,;3]$.

a) Expliquer pourquoi la limite de g en 1 n'est pas 2.

b) Étudier graphiquement le comportement de g en 1.



Solution

a) L'intervalle $J=]1{,}5\,;2{,}5[$ contient 2 mais ne contient pas toutes les valeurs $g(x)$ lorsque x est proche de 1.
En effet, J ne contient pas l'image 0,5 des nombres proches de 1 mais strictement inférieurs à 1.

b) Graphiquement, on lit que :

$$\lim_{\substack{x\to1\\x<1}} g(x)=0{,}5 \quad\text{et}\quad \lim_{\substack{x\to1\\x>1}} g(x)=2.$$

Pour démontrer que g n'a pas pour limite **2** en **1**, il suffit de trouver un intervalle contenant **2**, sur l'axe des ordonnées, qui ne contient pas tous les $g(x)$ pour x proche de **1**.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 5

7 f est la fonction définie sur $]2\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{1}{x-2}.$$

Utiliser cet écran de calcul formel pour justifier que la limite de f en 2 est $+\infty$.

1 Simplifier$\left(\text{Résoudre}\left(\dfrac{1}{x-2}>A, x, A>0\right)\right)$

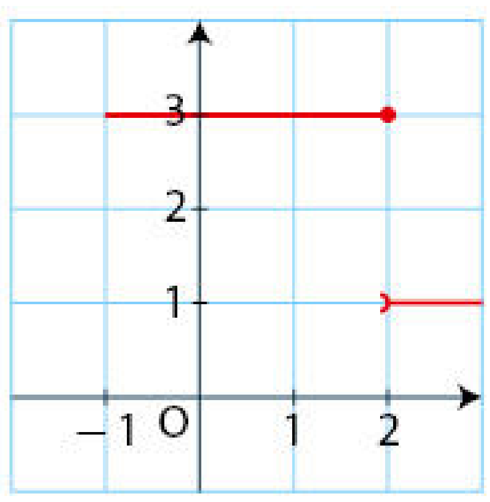
$\rightarrow \left\{2<x<\dfrac{2A+1}{A}\right\}$

Sur le modèle de l'exercice résolu 6

8 La fonction g représentée ci-contre est définie sur l'intervalle $[-1\,;3]$.

a) Expliquer pourquoi la limite de g en 2 n'est pas 3.

b) Décrire graphiquement le comportement de g en 2.



Exercices
- **9** à **14** (ci-contre)
- **38** à **47**

3 Limites et comparaison

Vidéo
JaiCompris.com
La démonstration est présentée en vidéo

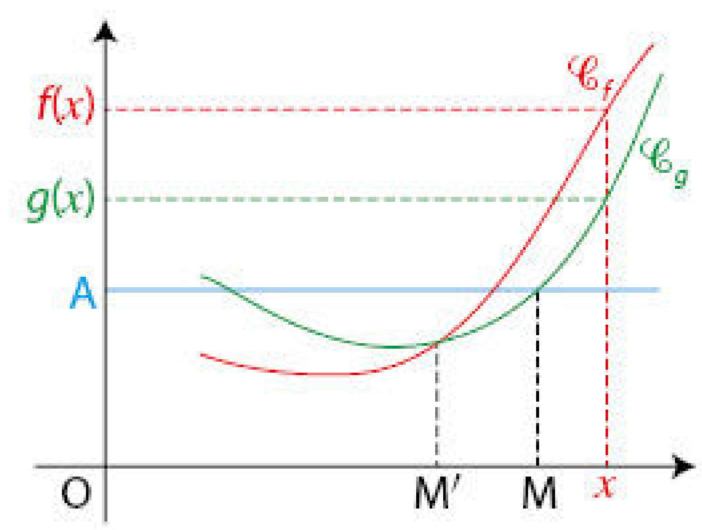
A Théorèmes de comparaison : limite infinie

Propriété

Si f et g sont deux fonctions telles que :
(1) pour x assez grand, $f(x) \geqslant g(x)$, **(2)** $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$,
alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Démonstration

- D'après **(2)**, tout intervalle $]\mathrm{A}\,;+\infty[$ (avec A nombre réel) contient tous les $g(x)$ pour x supérieur à un nombre réel M.
Ainsi, pour tout réel $x > \mathrm{M}$, $g(x) > \mathrm{A}$.
- D'après **(1)**, pour tout réel $x > \mathrm{M}'$, $f(x) \geqslant g(x)$ (avec M′ nombre réel).
- Donc, pour tout réel x supérieur à la fois à M et M′, $f(x) \geqslant g(x) > \mathrm{A}$.
Donc, tout intervalle $]\mathrm{A}\,;+\infty[$ contient tous les $f(x)$ pour x assez grand et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.



Propriété

Si f et g sont deux fonctions telles que :
(1) pour x assez grand, $f(x) \leqslant g(x)$, **(2)** $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$,
alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

La démonstration de cette propriété est analogue à celle de la propriété précédente.

Exemple

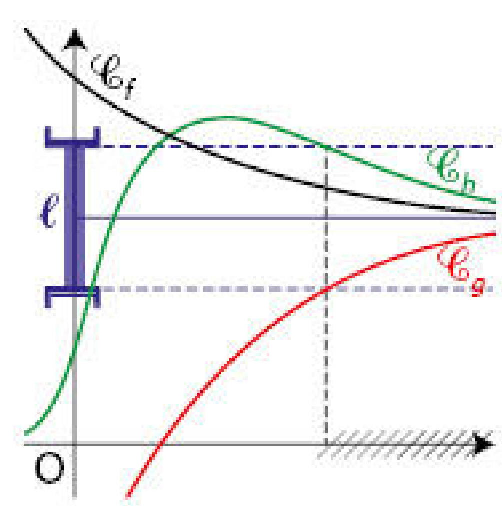
f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x + \sin(x)$.
Pour tout réel x, $\sin(x) \leqslant 1$, donc $f(x) \leqslant -2x + 1$. Or, $\lim\limits_{x \to +\infty} (-2x+1) = -\infty$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

Remarque : ces deux propriétés s'étendent aux cas des limites en $-\infty$ et en un point en changeant l'ensemble de validité de la condition **(1)**.

B Théorème des gendarmes : limite réelle

Théorème (admis)

Si f, g, h sont des fonctions et ℓ un nombre réel tels que :
(1) pour x assez grand, $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$, **(2)** $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \ell$,
alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$.



Exemple

f est la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$.
Pour tout réel x, $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$. Donc, pour tout réel $x > 0$, $-\dfrac{1}{x} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{x}$.
Or, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-\dfrac{1}{x}\right) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Remarque : ce théorème s'étend aux cas de limites en $-\infty$ et en un point en changeant l'ensemble de validité de la condition **(1)**.

EXERCICES RÉSOLUS

9 Déterminer une limite par comparaison

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - \sin(x)$.
Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.

Solution

Pour tout réel x, $-\sin(x) \geqslant -1$,
donc $f(x) \geqslant x^2 - 1$.
Or, $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 - 1) = +\infty$, donc d'après un théorème de comparaison : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

Pour déterminer une limite par comparaison, on majore ou on minore f par une fonction convenable et on applique un théorème de comparaison.

10 Déterminer une limite par encadrement

g est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{3 + \cos(x)}{x^2}$.

a) Démontrer que pour tout réel $x > 0$, $\dfrac{2}{x^2} \leqslant g(x) \leqslant \dfrac{4}{x^2}$.

b) En déduire la limite de la fonction g en $+\infty$.

Solution

a) Pour tout réel x, $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$,
donc $2 \leqslant 3 + \cos(x) \leqslant 4$.
Or, pour tout réel $x > 0$, $\dfrac{1}{x^2} \geqslant 0$
donc $\dfrac{2}{x^2} \leqslant g(x) \leqslant \dfrac{4}{x^2}$.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x^2} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4}{x^2} = 0$.
Donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$.

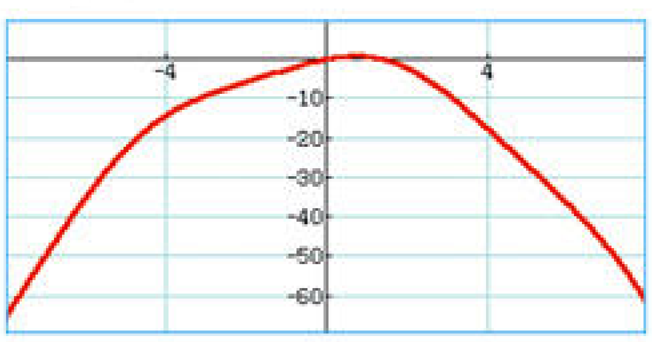
Pour déterminer une limite par encadrement, on encadre g par des fonctions convenables et on applique le théorème des gendarmes.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 9

11 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = 5x - 4\cos(x).$$
Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

12 h est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$h(x) = 2\sin(x) - x^2.$$
a) Utiliser la courbe de h affichée ci-contre pour conjecturer les limites de h en $+\infty$ et en $-\infty$.



b) Démontrer ces conjectures.

Sur le modèle de l'exercice résolu 10

13 g est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :
$$g(x) = \frac{\cos(x)}{x}.$$
a) Démontrer que pour tout réel $x > 0$,
$$-\frac{1}{x} \leqslant g(x) \leqslant \frac{1}{x}.$$
b) En déduire la limite de la fonction g en $+\infty$.

14 Une fonction h est telle que pour tout réel $x < -1$,
$$1 + \frac{1}{x} \leqslant 3 - 2h(x) \leqslant 1 - \frac{1}{x}.$$
Déterminer la limite de la fonction h en $-\infty$.

Cours

Exercices
- 15 à 18 (ci-contre)
- 48 à 63

4 Opérations et limites

Vidéo
JaiCompris.com
Ces notions sont présentées en vidéo

f et g sont deux fonctions définies sur le même ensemble de définition.
a désigne un nombre réel ou $+\infty$ ou $-\infty$ et ℓ, ℓ' désignent des nombres réels.

A Somme et produit de deux fonctions : règles admises

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \dots$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \dots$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim\limits_{x \to a} (f(x)+g(x)) = \dots$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	$-\infty$

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \dots$	ℓ	$\ell>0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \dots$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $\lim\limits_{x \to a} (f(x)\times g(x)) = \dots$	$\ell\times\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

Dans les cas notés FI (Forme indéterminée), on ne peut pas conclure immédiatement et tout résultat est possible. Dans un tel cas, il faut lever l'indétermination en changeant l'écriture.

Exemples : cas de FI « $\infty - \infty$ »

Dans chaque cas, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$,

- $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ et $g(x) = x$, mais $f(x) - g(x) = \dfrac{1}{x}$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - g(x)) = 0$.
- $f(x) = x$ et $g(x) = 2x$, mais $f(x) - g(x) = -x$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - g(x)) = -\infty$.
- $f(x) = 2x$ et $g(x) = x$, mais $f(x) - g(x) = x$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - g(x)) = +\infty$.

B Quotient de deux fonctions : règles admises

- Cas où $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \dots$	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \dots$	ℓ'	$+\infty$ ou $-\infty$	$\ell'>0$	$\ell'<0$	$\ell'>0$	$\ell'<0$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dots$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

- Cas où $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \dots$	$\ell>0$ ou $+\infty$	$\ell<0$ ou $-\infty$	$\ell>0$ ou $+\infty$	$\ell<0$ ou $-\infty$	0
et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \dots$	0 en restant positif	0 en restant positif	0 en restant négatif	0 en restant négatif	0
alors $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dots$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

Exemples : cas de FI « $\dfrac{\infty}{\infty}$ »

- $f(x) = x^2$ et $g(x) = x$: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, mais $\dfrac{f(x)}{g(x)} = x$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$.
- $f(x) = x$ et $g(x) = x^2$: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, mais $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{1}{x}$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

EXERCICES RÉSOLUS

15 Étudier la limite d'une somme, d'un produit

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 5x + 2$.

a) Vérifier que l'étude de la limite de la fonction f en $+\infty$, avec les règles opératoires, mène à une forme indéterminée.

b) Étudier la limite de la fonction f en $+\infty$.

Solution

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (-5x) = -\infty$, donc FI « $\infty - \infty$ ».

b) Pour tout réel $x \neq 0$, $f(x) = x^3\left(1 - \dfrac{5}{x^2} + \dfrac{2}{x^3}\right)$.

Or, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^3} = 0$ donc, d'après les règles opératoires, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \dfrac{5}{x^2} + \dfrac{2}{x^3}\right) = 1$.

D'autre part $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$, donc d'après la limite d'un produit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Pour déterminer la limite d'une **fonction polynôme en $+\infty$ ou en $-\infty$**, dans le cas d'une forme indéterminée, **on factorise par le terme de plus haut degré**, puis on applique les règles opératoires.

16 Étudier la limite d'un quotient

g est la fonction définie sur $]3\,;+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$.

Étudier la limite de la fonction g : **a)** en $+\infty$; **b)** en 3.

Solution

a) Pour tout réel $x > 3$,

$$g(x) = \frac{2x\left(1 + \dfrac{1}{2x}\right)}{x\left(1 - \dfrac{3}{x}\right)} = 2 \times \frac{1 + \dfrac{1}{2x}}{1 - \dfrac{3}{x}}.$$

D'après les règles opératoires $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1 + \dfrac{1}{2x}}{1 - \dfrac{3}{x}} = 1$,

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 2$.

b) $\lim\limits_{x \to 3} (2x+1) = 7$ et $\lim\limits_{x \to 3} (x-3) = 0$ avec $x - 3 > 0$ (car $x > 3$) donc $\lim\limits_{x \to 3} g(x) = +\infty$.

Pour déterminer la limite d'une **fonction rationnelle en $+\infty$ ou en $-\infty$**, dans le cas d'une forme indéterminée, **on factorise le numérateur et le dénominateur par leur terme de plus haut degré**, puis on simplifie et on applique les règles opératoires.

On est dans le cas de la colonne tramée en jaune du tableau du § **B**.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 15

17 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -x^4 + 3x + 1.$$

a) Vérifier que l'étude de la limite de la fonction f en $+\infty$, avec les règles opératoires, mène à une forme indéterminée.

b) Étudier la limite de la fonction f en $+\infty$.

Sur le modèle de l'exercice résolu 16

18 f est la fonction définie sur $]-1\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{4x+5}{x+1}.$$

Étudier la limite de la fonction f :

a) en $+\infty$; **b)** en -1.

Exercices
- 19 à 22 (ci-contre)
- 64 à 77

5 Fonction exponentielle et limites

Vidéo
JaiCompris.com
Les démonstrations sont présentées en vidéo

A Limites de la fonction exponentielle

Lemme

Pour tout réel x, $\mathbf{e}^{x} \geqslant x + 1$.

Pour une démonstration, voir l'exercice 19 p. 241.

Propriété

La fonction exponentielle a pour limite $+\infty$ en $+\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{x} = +\infty$.

Démonstration

A est un nombre réel, $A \geqslant 0$. D'après le lemme précédent, pour avoir $\mathrm{e}^{x} > A$, il suffit d'avoir $x + 1 > A$, c'est-à-dire $x > A - 1$. Donc $]A\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs de e^{x} pour tout réel $x > A - 1$.

Propriété

La fonction exponentielle a pour limite 0 en $-\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{x} = 0$.

Démonstration

On remarque que $\mathrm{e}^{x} = \mathrm{e}^{-(-x)} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{-x}}$.

Avec le schéma de décomposition ci-contre :

$$x \longmapsto \underbrace{-x}_{X} \longmapsto \mathrm{e}^{X} = \mathrm{e}^{-x}$$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (-x) = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \mathrm{e}^{X} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$.

Ainsi, $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{\mathrm{e}^{-x}} = 0$.

B Croissance comparée de $x \mapsto x^{n}$ et exp en $+\infty$

Propriété

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^{x}}{x} = +\infty$$

Pour une démonstration, voir l'exercice 19 p. 241.

Propriété

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{x^{n}} = +\infty$.

Démonstration

D'après le lemme du paragraphe A, $\mathrm{e}^{\frac{x}{n+1}} \geqslant \dfrac{x}{n+1} + 1$ et donc, $\mathrm{e}^{\frac{x}{n+1}} \geqslant \dfrac{x}{n+1}$.

Or, la fonction $f : x \mapsto x^{n}$ est croissante sur $[0\,;+\infty[$, donc, pour tout réel $x \geqslant 0$,

$\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{n+1}}\right)^{n+1} \geqslant \left(\dfrac{x}{n+1}\right)^{n+1}$ c'est-à-dire $\mathrm{e}^{x} \geqslant kx^{n+1}$ avec $k > 0$. On en déduit que pour tout $x > 0$, $\dfrac{\mathrm{e}^{x}}{x^{n}} \geqslant kx$.

Or, $\lim\limits_{x \to +\infty} kx = +\infty$ (car $k > 0$), donc d'après un théorème de comparaison, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{x^{n}} = +\infty$.

Conséquence (admise)

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{n}\mathrm{e}^{-x} = 0$.

Remarque : on énonce souvent ces résultats à l'aide de la règle opératoire « **en $+\infty$, l'exponentielle** (e^{x}) **l'emporte sur les puissances** (x^{n}) ».

EXERCICES RÉSOLUS

19 Démontrer des propriétés énoncées en cours

1. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - x - 1$.

a) Étudier les variations de f.

b) En déduire que pour tout réel x, $e^x \geqslant x + 1$.

2. g est la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(x) = e^x - \dfrac{1}{2}x^2$.

a) Déterminer la fonction dérivée de g. Déduire de la question **1.** que g est croissante sur $[0\,;+\infty[$.

b) En déduire la limite en $+\infty$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{e^x}{x}$.

Solution

1. a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = e^x - 1$.
Or, $e^x - 1 \geqslant 0$ équivaut à $e^x \geqslant 1$, c'est-à-dire $e^x \geqslant e^0$, soit $x \geqslant 0$.
Donc f est croissante sur $[0\,;+\infty[$ et décroissante sur $]-\infty\,;0]$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

b) $f(0) = 0$, donc d'après le tableau de variations ci-contre, pour tout réel x, $f(x) \geqslant 0$ c'est-à-dire $e^x \geqslant x + 1$.

2. a) g est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et pour tout réel $x \geqslant 0$, $g'(x) = e^x - x$.
D'après la question **1.**, pour tout réel $x \geqslant 0$, $e^x \geqslant x + 1$ et donc $e^x \geqslant x$.
Donc, pour tout réel $x \geqslant 0$, $g'(x) \geqslant 0$ et la fonction g est croissante sur $[0\,;+\infty[$.

b) $g(0) = 1$, donc d'après le tableau de variations ci-contre, pour tout réel $x \geqslant 0$, $g(x) \geqslant 0$, c'est-à-dire $e^x \geqslant \dfrac{1}{2}x^2$.

x	0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	1	$\nearrow$	

Donc pour tout réel $x > 0$, $\dfrac{e^x}{x} \geqslant \dfrac{1}{2}x$. Or, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{2}x = +\infty$, donc d'après un théorème de comparaison, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.

20 Utiliser la croissance comparée de $x \mapsto x^n$ et exp en $+\infty$

h est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = e^x - x^3$. Étudier la limite de la fonction h en $+\infty$.

Solution

Pour tout réel $x \neq 0$, $h(x) = x^3\left(\dfrac{e^x}{x^3} - 1\right)$.

On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^3} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{e^x}{x^3} - 1\right) = +\infty$.

D'autre part, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$ donc, d'après la limite d'un produit, $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$.

On est en présence d'une forme indéterminée « $\infty - \infty$ ». Mettre x^3 en facteur permet d'utiliser la croissance comparée de e^x et x^n en $+\infty$.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 19

21 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2 - x.$$

Étudier les variations de f. Déterminer $f(0)$ et en déduire le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Sur le modèle de l'exercice résolu 20

22 h est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = e^x - x^2 + 2x + 3.$$

Étudier la limite de la fonction h :

a) en $+\infty$; **b)** en $-\infty$.

Vidéo
JAICOMPRIS.COM
Un autre exercice Algo/python résolu en vidéo

EXERCICE RÉSOLU

23 Déterminer un seuil

Cours 1. et 2.

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x$.

1. Étudier les variations de la fonction f.

2. Au début de l'algorithme ci-contre, on affecte 0 à la variable x et on donne une valeur réelle positive à A.

Tant que $f(x) \leqslant$ A
 | $x \leftarrow x + 1$
Fin Tant que

a) Dresser un tableau de suivi des variables lorsque A $= 100$.
Interpréter la valeur numérique de la variable x obtenue en fin d'exécution.

b) Pourquoi est-on certain que cet algorithme se termine, quelle que soit la valeur positive saisie pour A ?

c) Coder cet algorithme en langage Python.
Exécuter le programme obtenu avec A $= 10\,000$ et interpréter le résultat renvoyé.

Solution

1. f est une fonction polynôme, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = 3x^2 + 1$.
Pour tout réel x, $f'(x) > 0$ donc f est croissante sur $\mathbb{R}$.

2. a)

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	0	2	10	30	68	130
$f(x) \leqslant$ A	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Faux

Le plus petit entier naturel n tel que $f(n) > 100$ est 5.
f est croissante sur $\mathbb{R}$, donc pour tout réel $x \geqslant 5$, $f(x) > 100$.

b) On est certain que l'algorithme se termine.
En effet, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, donc pour tout réel positif A, l'intervalle $]\text{A} ; +\infty[$ contient tous les nombres $f(x)$ pour x assez grand.

c) En exécutant **Seuil(10000)**, la fonction ci-contre renvoie 22.

```
>>> Seuil(10000)
22
```

```python
def f(x):
    y=x**3+x
    return y

def Seuil(A):
    x=0
    while f(x)<=A
        x=x+1
    return x
```

Ainsi, pour tout réel $x \geqslant 22$, $f(x) > 10\,000$.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 23

24 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 - e^x$.

1. Étudier les variations de la fonction f.

2. Au début de l'algorithme ci-contre, on affecte 0 à la variable x et on donne une valeur réelle négative à A.

Tant que $f(x) \geqslant$ A
 | $x \leftarrow x + 1$
Fin Tant que

a) Dresser un tableau de suivi des variables lorsque A $= -100$. Interpréter la valeur numérique de x obtenue en fin d'exécution.

b) Pourquoi est-on certain que cet algorithme se termine quelle que soit la valeur négative saisie de A ?

25 g est la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = 2 + \frac{1}{x^2}.$$

1. Étudier les variations de la fonction g.

2. Au début de l'algorithme ci-contre, on affecte 1 à la variable x et on donne une valeur réelle positive à A.

Tant que $g(x) \geqslant 2 +$ A
 | $x \leftarrow x + 1$
Fin Tant que

a) Dresser un tableau de suivi des variables lorsque A $= 0{,}1$. Interpréter la valeur numérique de x obtenue en fin d'exécution.

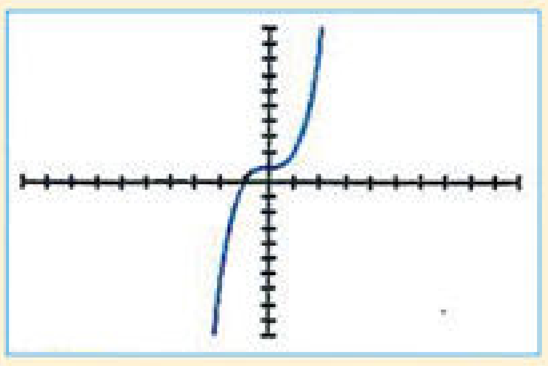
b) Pourquoi est-on certain que cet algorithme se termine quelle que soit la valeur positive saisie de A ?

Limite finie ou infinie en $+\infty$, en $-\infty$

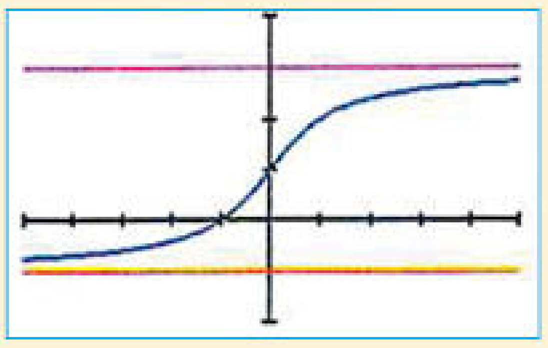
Cours 1

Questions flash — À l'oral

26 Voici la courbe représentative d'une fonction f affichée à l'écran d'une calculatrice.
Conjecturer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$ (*fenêtre* : $-10 \leqslant X \leqslant 10$, pas 1 et $-10 \leqslant Y \leqslant 10$, pas 1).



27 Voici, affichée à l'écran d'une calculatrice, la courbe représentative d'une fonction f.
Conjecturer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$ (*fenêtre* : $-5 \leqslant X \leqslant 5$, pas 1 et $-2 \leqslant Y \leqslant 4$, pas 1).



28 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = 3x^2 - 1.$$
a) Conjecturer la limite de f en $+\infty$ à l'aide de la calculatrice.
b) Justifier cette conjecture à l'aide de l'écran de calcul formel ci-dessous.

1 Résoudre$(3x^2 - 1 > A, x, A > 0)$
$\rightarrow \left\{x < -\sqrt{A+1}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}, x > \sqrt{A+1}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$

c) Dans chaque cas, en déduire les valeurs de $x > 0$ pour lesquelles :
- $f(x) > 1\,082$;
- $f(x) > 998\,786$.

29 g est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :
$$g(x) = \frac{2x+1}{x}.$$
a) Conjecturer la limite de g en $+\infty$ à l'aide de la calculatrice.
b) Justifier cette conjecture à l'aide de l'écran de calcul formel ci-dessous.

1 Résoudre$\left(2 < \frac{2x+1}{x} < 2 + A, x, A > 0\right)$
$\rightarrow \left\{x > \frac{1}{A}\right\}$

c) Pour quels réels $x > 0$, a-t-on $2 < g(x) < 2{,}001$?

30 Voici le tableau de variations d'une fonction f.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	2 ↘	0	↗ 1

a) Lire les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
b) Interpréter géométriquement ces limites pour la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f dans un repère orthonormé.
c) Tracer, à main levée, une courbe $\mathscr{C}$ susceptible de représenter la fonction f dans un repère.

31 Dans un repère orthonormé, $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction h définie sur $]-\infty\,;0[$ par :
$$h(x) = 3 + \frac{4}{x}.$$
a) Conjecturer la limite de h en $-\infty$ à l'aide de la calculatrice.
b) Justifier cette conjecture à l'aide de l'écran de calcul formel ci-dessous.

1 Résoudre$\left(3 + A < 3 + \frac{4}{x} < 3, x, A < 0\right)$
$\rightarrow \left\{x < \frac{4}{A}\right\}$

c) Interpréter géométriquement cette limite.

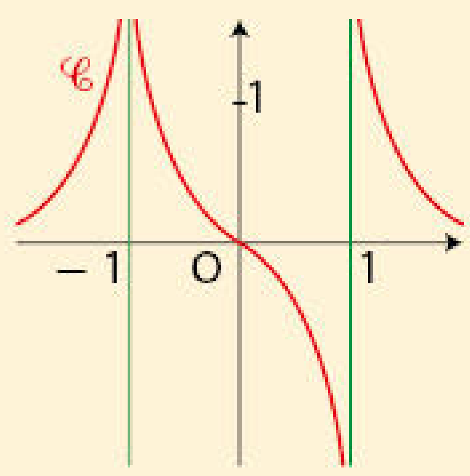
Limite finie ou infinie en un point

Cours 2

Questions flash — À l'oral

32 f est la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-1\,;1\}$ par :
$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}.$$
Indiquer oralement en quels points (un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$) l'on peut étudier les limites de f.

33 Dans le repère ci-contre, la courbe $\mathscr{C}$ représente une fonction f définie sur $]-\infty\,;-1[\cup]-1\,;1[\cup]1\,;+\infty[$.
$\mathscr{C}$ admet deux asymptotes verticales.



Lire sur le graphique :
a) la limite de f en -1 ;
b) la limite à droite et la limite à gauche de f en 1.

34 f est la fonction définie sur $]2\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-2}}.$$

a) Conjecturer la limite de f en 2 à l'aide de la calculatrice.

b) Justifier cette conjecture à l'aide de l'écran de calcul formel ci-dessous.

1	Simplifier$\left(\text{Résoudre}\left(\frac{1}{\sqrt{x-2}}>A, x, A>0\right)\right)$
	$\rightarrow \left\{2<x<\frac{2A^2+1}{A^2}\right\}$

c) En déduire les réels $x>2$ pour lesquels $f(x)>100\,000$.

35 g est la fonction définie sur $]3\,;+\infty[$ par :

$$g(x)=\frac{2}{3-x}.$$

a) Conjecturer la limite de g en 3 à l'aide de la calculatrice.

b) Justifier cette conjecture à l'aide de l'écran de calcul formel ci-dessous.

1	Simplifier$\left(\text{Résoudre}\left(\frac{2}{3-x}<A, x, A<0\right)\right)$
	$\rightarrow \left\{3<x<\frac{3A-2}{A}\right\}$

c) En déduire les réels $x>3$ pour lesquels :

$$g(x)<-10\,000.$$

36 Voici le tableau de variations d'une fonction f définie sur l'intervalle $]-1\,;3[$.

x	-1		3
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	0

a) Lire la limite de f en -1.

b) Interpréter géométriquement cette limite pour la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f dans un repère orthonormé.

c) Tracer, à main levée, l'allure de la courbe $\mathscr{C}$.

37 Voici le tableau de variations d'une fonction f définie sur $[-2\,;0[\,\cup\,]0\,;3]$.

x	-2		0		3
$f(x)$	1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	2

a) Lire la limite de f à gauche et à droite en 0.

b) Interpréter géométriquement cette limite pour la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f dans un repère orthonormé.

c) Tracer, à main levée, l'allure de la courbe $\mathscr{C}$.

Limites et comparaison

Cours 3

Questions flash — À l'oral

38 f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel $x \geqslant 3$, $f(x)\geqslant 2x+1$.
Déterminer mentalement la limite de f sur $+\infty$.

39 g est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x, $g(x)\leqslant 3x$.
Déterminer mentalement la limite de g en $-\infty$.

40 h est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel $x>0$, $1-\frac{1}{x^2}\leqslant h(x)\leqslant 1+\frac{1}{x^2}$.
Déterminer mentalement la limite de h en $+\infty$.

41 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=x^2-3\sin(x).$$

a) Démontrer que, pour tout réel x, $f(x)\geqslant x^2-3$.

b) En déduire la limite de f :
- en $+\infty$;
- en $-\infty$.

42 g est la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$g(x)=\sqrt{x^2+x}.$$

a) Démontrer que pour tout réel $x\geqslant 0$:

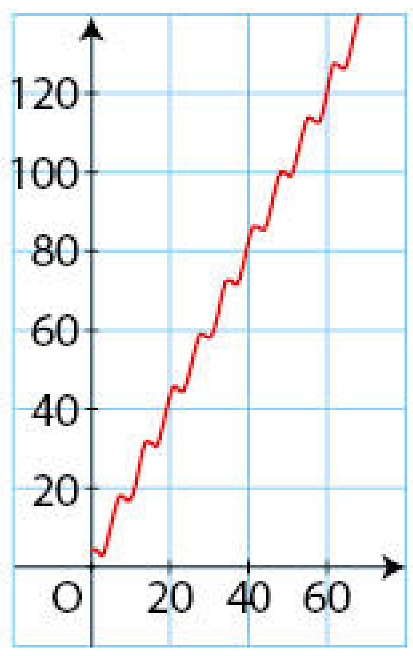
$$g(x)\geqslant\sqrt{x}.$$

b) En déduire la limite de la fonction g en $+\infty$.

43 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=2x+3\cos(x).$$

Voici sa courbe représentative dans un repère orthonormé.



a) Conjecturer la limite de la fonction f en $+\infty$.

b) Démontrer cette conjecture à l'aide d'un théorème de comparaison.

c) Majorer f pour étudier sa limite en $-\infty$.

44 g est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$g(x)=\frac{e^{-x}}{x}.$$

a) Démontrer que pour tout réel $x>0$:

$$0\leqslant g(x)\leqslant\frac{1}{x}.$$

b) En déduire la limite de la fonction g en $+\infty$.

45 h est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$h(x) = 4 + \frac{\cos(x)}{x^2}.$$

a) Démontrer que pour tout réel $x \neq 0$:

$$4 - \frac{1}{x^2} \leqslant h(x) \leqslant 4 + \frac{1}{x^2}.$$

b) En déduire la limite de la fonction h en $+\infty$, puis en $-\infty$.

46 f est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}.$$

a) Montrer que tout réel $x > 0$, $x^2 \leqslant x^2 + 1 \leqslant (x+1)^2$.

b) En déduire un encadrement de la fonction f.

c) Conclure alors sur la limite de la fonction f en $+\infty$.

47 g est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$g(x) = 2 + \frac{\cos^2(x)}{x}.$$

$\mathscr{C}$ est la courbe représentative de g dans un repère orthonormé.

Démontrer que la droite d'équation $y = 2$ est une asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

Opérations et limites

Cours 4

Questions flash

À l'oral

48 Dans chaque cas, donner mentalement la limite de la fonction en $+\infty$.

a) $f : x \mapsto x^2 + x$ **b)** $g : x \mapsto \frac{1}{x} - \sqrt{x}$

c) $h : x \mapsto x\sqrt{x}$ **d)** $i : x \mapsto \left(\frac{1}{x^2} - 2\right)(1 - 3x^2)$

49 Dans chaque cas, donner mentalement la limite de la fonction en $-\infty$.

a) $f : x \mapsto x^2\left(\frac{2}{x} - 1\right)$ **b)** $g : x \mapsto x^3\left(\frac{1}{x} + 3\right)$

50 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 - 5x + 2.$$

1. Étudier la limite de f en $-\infty$.

2. a) Vérifier que les règles opératoires ne permettent pas de conclure immédiatement pour la limite de f en $+\infty$.

b) Mettre x^2 en facteur dans l'écriture de $f(x)$, puis en déduire la limite de f en $+\infty$.

51 g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = x^3 - 100x^2 + 5.$$

a) À l'aide de la calculatrice, conjecturer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.

b) Justifier ces conjectures.

Vidéo

JAICOMPRIS.COM — Cet exercice est corrigé en vidéo

52 h est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = \frac{-x^3 + 3x - 1}{x^2 + 1}.$$

a) À l'aide de la calculatrice, conjecturer les limites de h en $+\infty$ et en $-\infty$.

b) Justifier ces conjectures en mettant en facteur le terme de plus haut degré au numérateur et au dénominateur.

Pour les exercices 53 à 56, étudier les limites en $-\infty$ et $+\infty$ de la fonction f définie sur D.

53 $f(x) = -2x^4 + 3x^2 + x$ $\quad$ $D = \mathbb{R}$

54 $f(x) = \frac{1}{4}x^3 + x^2 - 9x$ $\quad$ $D = \mathbb{R}$

55 $f(x) = \frac{x^2 + 5x - 9}{x - 3}$ $\quad$ $D =]-\infty\,;3[\,\cup\,]3\,;+\infty[$

56 $f(x) = \frac{3x - 5}{x^2 + 1}$ $\quad$ $D = \mathbb{R}$

57 f est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{3 + \frac{1}{x}}.$$

Utiliser le schéma de décomposition ci-contre pour étudier la limite de f en $+\infty$.

$$x \longmapsto \underbrace{3 + \frac{1}{x}}_{X \longmapsto \sqrt{X}}$$

58 g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \sqrt{x^2 + 3}.$$

Utiliser un schéma de décomposition pour étudier la limite de g en $+\infty$, puis en $-\infty$.

59 f est la fonction définie sur $]-\infty\,;2[\,\cup\,]2\,;+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{-3x + 1}{x - 2}.$$

On se propose d'étudier la limite de f en 2.

a) Recopier et compléter :

- $\lim\limits_{x \to 2}(-3x + 1) = \ldots$
- $\lim\limits_{x \to 2}(x - 2) = \ldots$

b) Dresser le tableau de signes de $x - 2$.

c) Recopier et compléter :

- $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} f(x) = \ldots$
- $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} f(x) = \ldots$

Pour les exercices 60 et 61, étudier la limite en *a* de la fonction *f* définie sur D.

60 $f(x) = \dfrac{2x}{x+5}$ $\quad$ $D = \mathbb{R} - \{-5\}$ $\quad$ $a = -5$

61 $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 2}{1 - x}$ $\quad$ $D = \mathbb{R} - \{1\}$ $\quad$ $a = 1$

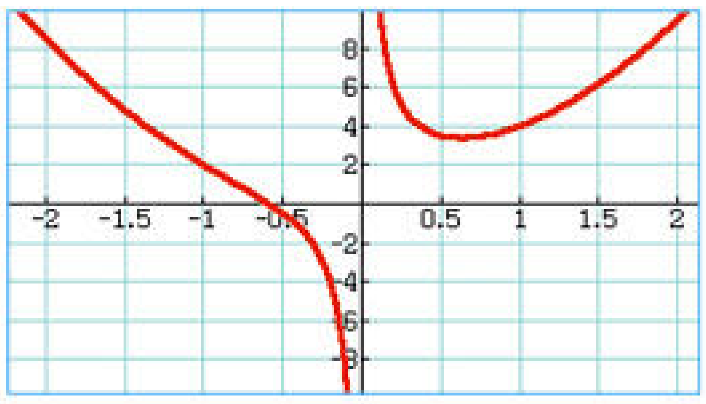
62 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{6x^2 + 3x - 5}{2x^2 + 7}.$$

Démontrer que, dans un repère orthonormé, la droite d'équation $y = 3$ est une asymptote horizontale à la courbe représentative de f.

63 f est la fonction définie sur $]-\infty\,;0[\,\cup\,]\,0\,;+\infty[$ par $f(x) = 2x^2 + 1 + \dfrac{1}{x}$.

Voici la courbe représentative de f obtenue à l'écran d'une calculatrice.



a) Conjecturer les limites de f en $+\infty$, en $-\infty$ et en 0.
b) Prouver ces conjectures.

Fonction exponentielle et limites

Cours 5

Questions flash — À l'oral

64 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 7 - e^x.$$

Déterminer mentalement la limite de f en $+\infty$, puis en $-\infty$.

65 Déterminer mentalement la limite de f en $+\infty$.

a) $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{3x}$ $\qquad$ **b)** $f : x \mapsto \dfrac{x}{e^x}$

66 Dans chaque cas, étudier la limite de la fonction définie sur $\mathbb{R}$, en $+\infty$, puis en $-\infty$.

a) $f(x) = e^x + e^{-x}$ $\qquad$ **Conseil :** utiliser $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$.
b) $g(x) = x(1 + e^{-x})$

67 h est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = x + 1 + \frac{4}{e^x + 1}.$$

Étudier la limite de h en $+\infty$, puis en $-\infty$.

68 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{3e^x - 5}{2e^x + 7}$.

a) Étudier la limite de f en $-\infty$.
b) Démontrer que pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{3 - 5e^{-x}}{2 + 7e^{-x}}$.
En déduire la limite de f en $+\infty$.
c) Interpréter graphiquement ces résultats.

69 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{2 + e^x}$.

a) Conjecturer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$ à l'aide de la calculatrice.
b) Étudier la limite de f en $-\infty$.
c) Étudier la limite de f en $+\infty$ après avoir mis e^x en facteur au dénominateur.
d) Interpréter graphiquement ces résultats.

70 g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{2x+1}$.

Déterminer la limite de f en $+\infty$, puis en $-\infty$ en utilisant ce schéma de décomposition.

$$x \longmapsto \underbrace{2x+1}_{X} \longmapsto e^X$$

71 h est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$h(x) = e^{\frac{1}{x}}.$$

Utiliser un schéma de décomposition pour étudier la limite de h en : • $+\infty$; • $-\infty$; • 0.

Conseil : étudier les limites à droite et à gauche en 0.

72 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - x$.

1. Étudier la limite de f en $-\infty$.
2. a) Vérifier que pour tout réel $x \neq 0$,

$$f(x) = x\left(\frac{e^x}{x} - 1\right).$$

b) En déduire la limite de f en $+\infty$.

73 g est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$g(x) = \frac{e^{2x}}{x}.$$

1. Étudier la limite de g en $-\infty$.
2. a) Recopier et compléter pour tout réel $x \neq 0$,

$$g(x) = \ldots \frac{e^{2x}}{2x}.$$

b) À l'aide d'un schéma de décomposition, déterminer la limite de g en $+\infty$.

Pour les exercices 74 à 77, étudier la limite de la fonction en $+\infty$.

74 $f(x) = x + 2 - e^x$ $\qquad$ **75** $g(x) = xe^{-x}$

76 $h(x) = \dfrac{e^x}{\sqrt{x}}$ $\qquad$ **77** $k(x) = e^{2x} - xe^x$

78 QCM **Dans chaque cas, donner la réponse exacte sans justifier.**

		A	B	C	D
1	f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 4x + 5$. La limite de f en $+\infty$ est …	0	2	$+\infty$	$-\infty$
2	g est la fonction définie sur $]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{2x-5}{x}$. La limite de g en $+\infty$ est …	0	2	$+\infty$	$-\infty$
3	g est la fonction définie ci-dessus. La limite à droite de g en 0 est …	0	2	$+\infty$	$-\infty$
4	f est une fonction telle que pour tout réel x, $-\dfrac{3}{e^x} \leqslant f(x) \leqslant 2e^{-x}$. Alors la limite de f en $+\infty$ est …	0	2	$+\infty$	$-\infty$

79 QCM **Dans chaque cas, donner la (ou les) réponse(s) exacte(s) sans justifier.**

		A	B	C	D
1	g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 4 - e^{3x+1}$. Alors g a pour limite …	$+\infty$ en $+\infty$	$-\infty$ en $+\infty$	4 en $-\infty$	$-\infty$ est $-\infty$
2	Dans un repère orthonormé, la courbe représentative de la fonction h définie sur $\mathbb{R}^*$ par $h(x) = \dfrac{2e^x + 3}{e^x - 1}$ admet pour asymptote …	l'axe des ordonnées	la droite d'équation $x = -3$	la droite d'équation $y = -3$	la droite d'équation $y = 2$
3	h est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = e^x - 5x$. La fonction h a pour limite …	$+\infty$ en $+\infty$	$-\infty$ en $+\infty$	$+\infty$ en $-\infty$	$-\infty$ en $-\infty$

80 Vrai/Faux **Dans chaque cas, dire si l'affirmation est vraie ou fausse en justifiant.**

Voici le tableau de variation d'une fonction f définie sur l'ensemble $]-\infty\,;1[\,\cup\,]1\,;+\infty[$.
$\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction f dans un repère.

x	$-\infty$	0	1		3	$+\infty$
$f(x)$	2 ↘	-3 ↗	$+\infty$ ‖	$+\infty$ ↘	0 ↗	$+\infty$

1 **Affirmation :** la droite d'équation $y = 2$ est asymptote à $\mathscr{C}$.

2 **Affirmation :** la droite d'équation $y = 1$ est asymptote à $\mathscr{C}$.

3 **Affirmation :** $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$

4 **Affirmation :** $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} e^{f(x)} = +\infty$

Vérifiez vos réponses : p. 529

81 Déterminer la position relative d'une courbe par rapport à une asymptote horizontale

Dans un repère orthonormé, $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}.$$

a) Déterminer la limite en $-\infty$, puis en $+\infty$ de la fonction f.
En déduire les équations des asymptotes à la courbe $\mathscr{C}$.

b) On se propose d'étudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite d'équation $y = 1$.
Lire et expliquer les passages en vert.

> $$f(x) - 1 = \frac{-2}{e^x + 1}.$$
> Donc pour tout réel x, $f(x) - 1 < 0$.
> Ce qui signifie que la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessous de la droite d'équation $y = 1$.

c) Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite d'équation $y = -1$.

Vidéo JAICOMPRIS.COM
Toutes les démonstrations au programme en vidéo

Liste des démonstrations :
- Croissance comparée de $x \mapsto x^n$ et exp en $+\infty$.

Conseil
Pour étudier la position relative de la courbe représentative d'une fonction et d'une asymptote horizontale d'équation $y = b$, on étudie le signe de $f(x) - b$.

82 Déterminer une limite à l'aide du nombre dérivé

On se propose d'étudier la limite en 0 de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$.

1. a) Expliquer pourquoi les règles opératoires mènent à une forme indéterminée.

b) Utiliser la calculatrice pour conjecturer la limite de la fonction f en 0.

2. Rédiger la démonstration de cette conjecture en suivant le guide.

(1) Étudier la dérivabilité de la fonction exponentielle exp : la fonction exp est dérivable sur … donc en particulier en 0.

(2) Utiliser le nombre dérivé de exp en 0 : exp est dérivable en 0 donc

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{0+x} - e^{\cdots}}{x} = \exp'(\ldots).$$

(3) Tirer des conséquences : $\exp'(0) = \ldots$ donc $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \ldots$

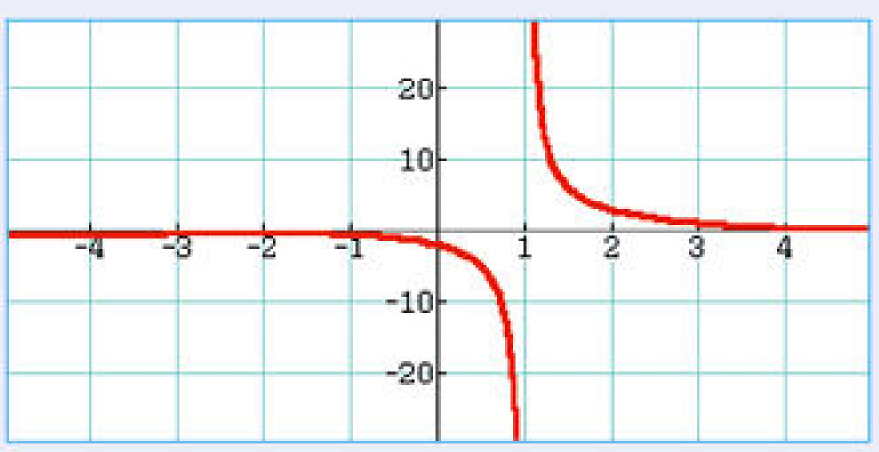
(4) Conclure : rédiger une phrase de conclusion.

Conseil
Dire qu'une fonction f définie sur un intervalle I est dérivable en $a \in \mathrm{I}$ signifie que la fonction $h \mapsto \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ admet une limite réelle en 0 ; cette limite est $f'(a)$.

83 Choisir l'information utile

f est la fonction définie sur $]-\infty\,;1[\,\cup\,]1\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2 + \sin(x)}{x - 1}$.

1. Voici la courbe représentative de la fonction f affichée à l'écran d'une calculatrice.
Conjecturer les limites de la fonction f en $-\infty$, en $+\infty$, en 1.



2. a) Démontrer que pour tout réel $x > 1$,

$$\frac{1}{x-1} \leqslant f(x) \leqslant \frac{3}{x-1}.$$

b) Démontrer que pour tout réel $x < 1$, $\dfrac{3}{x-1} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{x-1}$.

3. À l'aide de ces inégalités et des théorèmes de comparaison justifier les conjectures émises à la question **1.**

Étudier des limites de fonctions

84 **PARCOURS DIFFÉRENCIÉS**

Parcours 1

Dans un repère orthonormé, $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{5\}$ par :

$$f(x) = 6 + \frac{1}{x-5}.$$

Déterminer les équations des asymptotes à la courbe $\mathscr{C}$.

Parcours 2

g est la fonction définie sur $]-\infty\,;1[\,\cup\,]1\,;+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{x+1}{x-1}.$$

$\mathscr{C}$ est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1. a) Étudier les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$ après avoir mis x en facteur au numérateur et au dénominateur.

b) En déduire l'équation d'une asymptote horizontale à $\mathscr{C}$.

2. a) Étudier la limite en 1 de $x \mapsto x+1$, puis de $x \mapsto x-1$.

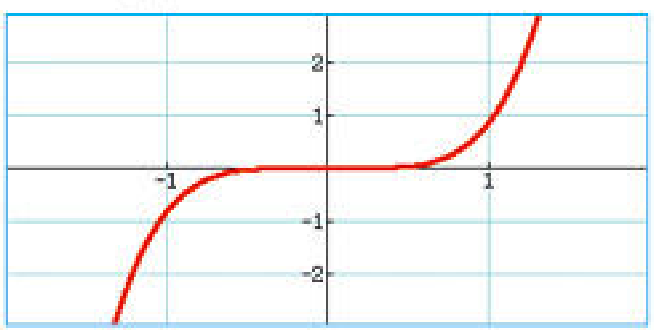
b) Dresser le tableau de signes de $x-1$ et conclure sur les limites à droite et à gauche de la fonction g en 1.

c) Interpréter graphiquement ces résultats.

85 g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = x^4 \sin(x).$$

Louise a affiché la courbe représentative de g à l'écran de sa calculatrice.



Elle conjecture : « La fonction g a pour limite $+\infty$ en $+\infty$. »

a) k désigne un nombre entier naturel.
Calculer $g(k\pi)$.

b) Expliquer alors pourquoi Louise se trompe.

86 h est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = \sqrt{x^2+5} - x^2.$$

a) Utiliser la calculatrice pour conjecturer la limite de h en $+\infty$.

b) Expliquer pourquoi pour tout réel $x > 0$,

$$h(x) = x\left(\sqrt{1+\frac{5}{x^2}} - x\right).$$

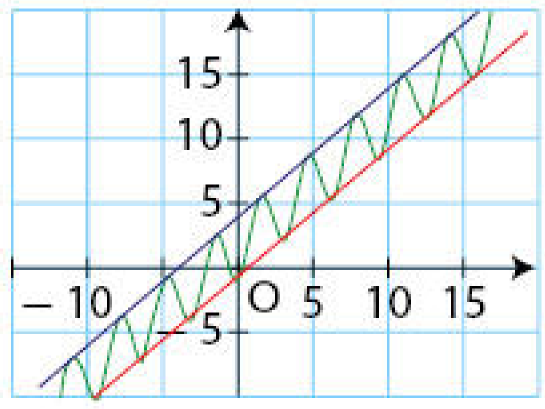
c) En déduire la limite de h en $+\infty$.

87 Voici dans un repère orthonormé la courbe représentative de la fonction f :

$$x \mapsto x - 1 + 5\sin^2(x)$$

et les droites d'équations

$$y = x - 1 \text{ et } y = x + 4.$$



Étudier les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.

88 a est un nombre réel et f est une fonction définie sur $]-\infty, a[\,\cup\,]a\,;+\infty[$.

Dans un repère orthonormé, $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de f.

Juliette affirme : « Si la fonction f est définie sur $]-\infty, a[\,\cup\,]a\,;+\infty[$, alors la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à la courbe $\mathscr{C}$ ».

En étudiant la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2 - a^2}{x - a}$, montrer que l'affirmation de Juliette est fausse.

89 On se propose de déterminer la limite en 2 de la fonction f est la fonction définie sur $]-\infty\,;2[\,\cup\,]2\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2 - 7x + 10}{x - 2}$.

a) Expliquer pourquoi les règles opératoires mènent à une forme indéterminée.

b) Déterminer les racines du polynôme $x^2 - 7x + 10$, puis le factoriser.

c) Simplifier alors l'expression de $f(x)$ pour tout réel $x \neq 2$ et en déduire la limite de f en 2.

90 Dans un repère orthonormé, $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction f définie sur $]-2\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = x - \frac{x^2 - 6x + 5}{x + 2}.$$

1. Démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote verticale d.

2. a) Déterminer l'équation de l'asymptote horizontale d' à la courbe $\mathscr{C}$.

b) Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite d'.

91 g est la fonction définie sur $]3\,;+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{x^3 - 9x}{x^2 - 5x + 6}.$$

a) Factoriser le plus possible le numérateur.

b) Vérifier que 3 est une racine du polynôme $x^2 - 5x + 6$ et en déduire une factorisation.

c) Simplifier alors l'expression de $g(x)$ pour tout réel $x \neq 3$ et en déduire la limite de g en 3.

92 f et g sont les fonctions définies sur l'intervalle $]-2\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{x^3-3x-6}{2(x+2)} \text{ et } g(x)=\frac{1}{2}(x-1)^2.$$

1. Étudier la limite en $+\infty$ de la fonction f, puis de la fonction g.

2. a) Afficher dans une même fenêtre de la calculatrice, les courbes représentatives des fonctions f et g.

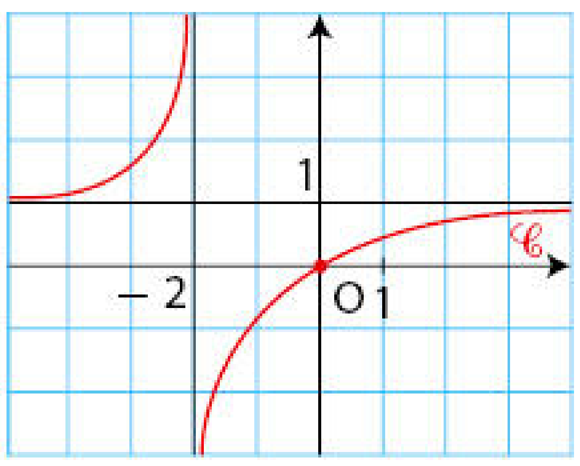
b) Qu'observe-t-on pour les grandes valeurs de x ?

3. a) Justifier que pour tout réel $x>-2$,

$$f(x)-g(x)=\frac{-4}{x+2}.$$

b) En déduire la limite de la fonction $f-g$ en $+\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat.

93 Voici la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie sur $]-\infty\,;-2[\cup]-2\,;+\infty[$.



1. Lire sur le graphique, les limites de la fonction f en $-\infty$, en $+\infty$, à droite et à gauche en -2.

2. g est la fonction définie pour x différent de -2 et de 0 par $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$.

Déterminer la limite de la fonction g en :

a) $-\infty$ **b)** $+\infty$ **c)** -2

d) à droite et à gauche en 0.

3. h est la fonction définie sur $]-\infty\,;-2[\cup]0\,;+\infty[$ par $h(x)=\sqrt{f(x)}$.

Déterminer la limite de la fonction h en :

a) $-\infty$ **b)** $+\infty$ **c)** -2 **d)** 0

94 **1.** g est la fonction définie sur $\mathbb{R}-\{-3\}$ par :

$$g(x)=\frac{2x-1}{x+3}.$$

a) Déterminer l'ensemble D des nombres réels $x\neq-3$ tels que $g(x)\geqslant 0$.

b) Étudier la limite de la fonction g en $-\infty$, puis en $+\infty$.

c) Étudier les limites de g à droite et à gauche en -3.

2. f est la fonction définie sur D par :

$$f(x)=\sqrt{\frac{2x-1}{x+3}}.$$

a) Étudier la limite de la fonction f en $-\infty$, puis en $+\infty$.

b) Étudier la limite de la fonction f en -3.

95 g est la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$g(x)=\frac{2x-1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

a) Montrer que pour tout $x>0$,

$$g(x)=\frac{2-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}.$$

b) Déterminer l'équation de l'asymptote à la courbe représentative de g dans un repère orthonormé.

96 ABC est un triangle rectangle en A d'aire 1 cm^2. On note x la longueur AB, en cm et $f(x)$ la longueur BC, en cm.

a) Donner l'expression de $f(x)$.

b) Étudier la limite en 0, puis en $+\infty$ de la fonction f.

97 Une automobiliste a parcouru la première moitié de son trajet à la vitesse moyenne de 30 km.h^{-1}. On note, en km $\cdot$ h^{-1}, v la vitesse moyenne de cette automobiliste sur la seconde moitié du trajet et V sa vitesse moyenne sur la totalité du trajet.

a) Exprimer V en fonction de v.

b) Étudier la limite de V quand v tend vers $+\infty$.

c) Interpréter ce résultat pour l'automobiliste.

Utiliser les limites de la fonction exp

98 **PARCOURS DIFFÉRENCIÉS**

Parcours 1

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=e^{2x}-(2x+1)e^x.$$

Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

Parcours 2

g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x)=3xe^x-e^{2x}.$$

a) Justifier que pour tout réel x,

$$g(x)=e^{2x}(3xe^{-x}-1).$$

b) Rappeler la limite en $+\infty$ de la fonction $x\mapsto xe^{-x}$. En déduire la limite de g en $+\infty$.

99 La vitesse instantanée verticale, en m.s^{-1}, d'une goutte en fonction de la durée de chute t, en s, peut-être estimée par la fonction v définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$v(t)=15\left(1-e^{-\frac{1{,}3}{2}t}\right).$$

Déterminer la limite de v en $+\infty$.

100 Une usine fabrique des puces destinées aux appareils électroniques.

Le coût total de fabrication, en millier d'euros, est modélisé par la fonction C définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :

$$\mathrm{C}(q)=\frac{8}{1+\mathrm{e}^{-q}}.$$

1. a) Afficher la courbe représentative de la fonction C à l'écran de la calculatrice.

b) Étudier la limite de la fonction C en $+\infty$.

2. On note $\mathrm{C_M}(q)$ le coût moyen de fabrication d'une puce lorsqu'on en fabrique q (avec $q>0$).

a) Exprimer $\mathrm{C_M}(q)$ en fonction de q.

b) Afficher la courbe représentative de la fonction $\mathrm{C_M}$ à l'écran de la calculatrice.

c) Étudier la limite de la fonction $\mathrm{C_M}$ en $+\infty$.

Interpréter le résultat obtenu en termes économiques.

101 Algo python

On injecte, par piqûre intraveineuse, une dose de médicament dans le sang, à l'instant $t=0$.

On note $\mathrm{Q}(t)$ la quantité de médicament, dans une unité adaptée, présente dans le sang à l'instant t, en heure.

On admet que :

$$\mathrm{Q}(t)=1{,}8\mathrm{e}^{-1{,}2t}.$$

1. Étudier le sens de variation de la fonction Q sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

2. a) Étudier la limite de la fonction Q en $+\infty$.

b) Interpréter la limite obtenue.

3. Au début de l'algorithme ci-contre, on affecte la valeur 0 à la variable t et on donne une valeur strictement positive à R.

```
Tant que Q(t) ⩾ R
    t ← t + 0,01
Fin Tant que
```

En fin d'exécution, l'algorithme renvoie la valeur de t.

a) Pourquoi est-on certain que cet algorithme se termine, quelle que soit la valeur saisie pour R ?

b) Coder et saisir cet algorithme en langage Python.

c) Quelle valeur de t le programme renvoie-t-il pour chacune des valeurs suivantes de R ?

- $\mathrm{R}=0{,}9$
- $\mathrm{R}=0{,}1$
- $\mathrm{R}=0{,}01$

102 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\frac{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-2x}}.$$

1. Déterminer la limite de la fonction f :

a) en $+\infty$; **b)** en $-\infty$.

2. Déterminer la limite de la fonction f :

a) à gauche en 0 ; **b)** à droite en 0.

3. En déduire les équations des asymptotes à la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

103 g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x)=\mathrm{e}^{-x}\sin(x).$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormé.

1. a) Utiliser un encadrement de $g(x)$ pour étudier la limite de g en $+\infty$.

b) En déduire une asymptote d à la courbe $\mathscr{C}$.

c) Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ coupe une infinité de fois son asymptote d.

2. Numa affirme : « La limite de la fonction g en $-\infty$ est $+\infty$ ».

Expliquer pourquoi Numa se trompe.

104 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\mathrm{e}^{x}+2\mathrm{e}^{-x}+x.$$

a) Étudier la limite de la fonction f en $+\infty$.

b) Démontrer que pour tout réel x,

$$f(x)=\mathrm{e}^{-x}(\mathrm{e}^{2x}+2+x\mathrm{e}^{x}).$$

c) Déterminer alors la limite de f en $-\infty$.

105 g est la fonction définie sur $]2\,;+\infty[$ par :

$$g(x)=\frac{1}{(2-x)\mathrm{e}^{-x}}.$$

$\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormé.

1. Étudier la limite de la fonction g :

a) en 2 ; **b)** en $+\infty$.

2. Interpréter les résultats pour la courbe $\mathscr{C}$.

106 **1.** h est la fonction définie $[0\,;+\infty[$ par :

$$h(x)=\frac{\mathrm{e}^{2x}}{x+\mathrm{e}^{x}}.$$

Voici la courbe représentative de la fonction h à l'écran d'une calculatrice.

a) Conjecturer la limite de la fonction h en $+\infty$.

b) Démontrer cette conjecture.

Conseil : mettre e^{x} en facteur au dénominateur.

2. k est la fonction définie sur $]-\infty\,;-1]$ par :

$$k(x)=\frac{\mathrm{e}^{2x}}{x+\mathrm{e}^{x}}.$$

a) Afficher la courbe représentative de k à l'écran de la calculatrice et conjecturer la limite de k en $-\infty$.

b) Prouver cette conjecture.

107 Pour tout réel a, on note h_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h_a(x) = \dfrac{ax + \frac{1}{2}}{e^x}$.

1. a) Déterminer la limite de la fonction h_a en $+\infty$.

b) Suivant les valeurs du nombre réel a, déterminer la limite de la fonction h_a en $-\infty$.

2. a) Démontrer que pour tout réel x :

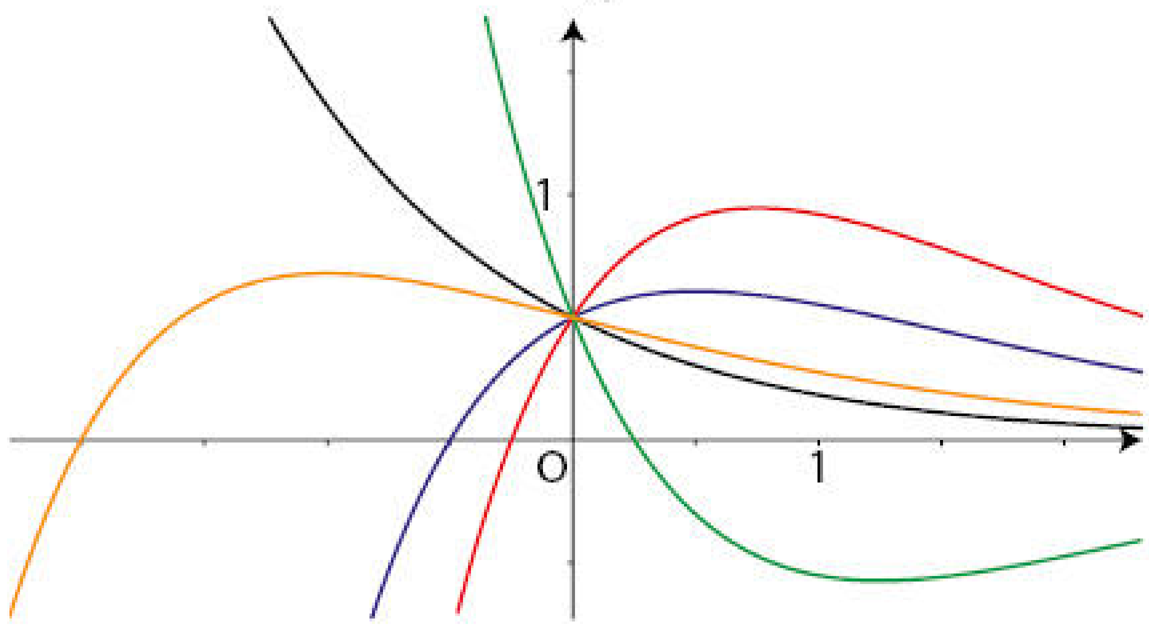
$$h_a'(x) = \frac{-ax + a - \frac{1}{2}}{e^x}.$$

b) Démontrer que pour tout réel $a \neq 0$, la fonction h_a admet un extremum pour une valeur de x que l'on exprimera en fonction de a.

3. Dans un repère orthonormé, on note $\mathscr{C}_a$ la courbe représentative de la fonction h_a.

Voici les courbes $\mathscr{C}_a$ pour cinq valeurs de a :

$$-2\,;0\,;\frac{1}{4}\,;1\,;2.$$

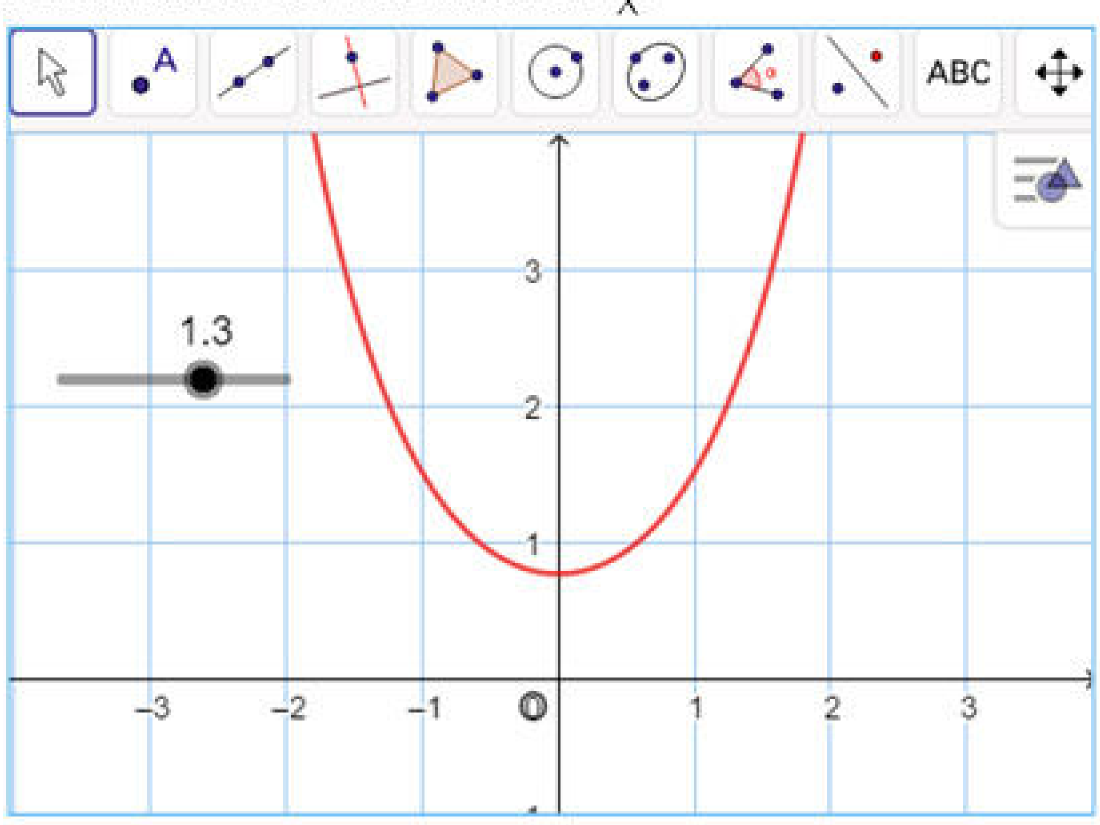


Déterminer, pour chacune des courbes $\mathscr{C}_a$ tracées, la valeur de a correspondante, en justifiant les réponses.

108 **Tice** Pour tout réel non nul λ, on désigne par f_λ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_\lambda(x) = \frac{e^{\lambda x} + e^{-\lambda x}}{2\lambda}.$$

1. a) Tracer, à l'aide d'un logiciel de géométrie, la courbe représentative de la fonction f_λ.



b) Conjecturer, suivant les valeurs de λ, les limites de la fonction f_λ en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. Démontrer les conjectures précédentes.

Vidéo

JaiCompris.com — Cet exercice est corrigé en vidéo

109 f est la fonction définie sur $]1\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)e^x}.$$

On note Γ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

1. a) Étudier la limite de la fonction f en $+\infty$, puis en 1.

b) Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2. a) Démontrer que pour tout réel $x > 1$:

$$f'(x) = \frac{x}{(1-x)^2 e^x}.$$

b) Étudier les variations de f.

c) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

3. Construire la courbe Γ et ses asymptotes.

S'entraîner à la logique

→ p. 525

110 Infirmer avec un contre-exemple

Voici des propositions relevées dans des copies d'élèves. Elles sont fausses. Infirmer chacune d'elles à l'aide d'un contre-exemple.

a) f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, donc f est croissante sur $\mathbb{R}$.

b) f est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

c) f est une fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ telle que $f(0) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, donc f est positive sur $\mathbb{R}$.

111 Des affirmations vraies ou fausses

Dans chaque cas, dire si l'affirmation est vraie ou fausse. Justifier.

a) f est une fonction définie sur $]0\,;+\infty[$.

Si pour tout réel $x > 0$, $0 \leqslant f(x) \leqslant \sqrt{x}$, alors

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

b) f est une fonction définie sur $]0\,;+\infty[$.

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 2$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

112 ÉTUDE D'UNE SUITE DE FONCTIONS

Tice

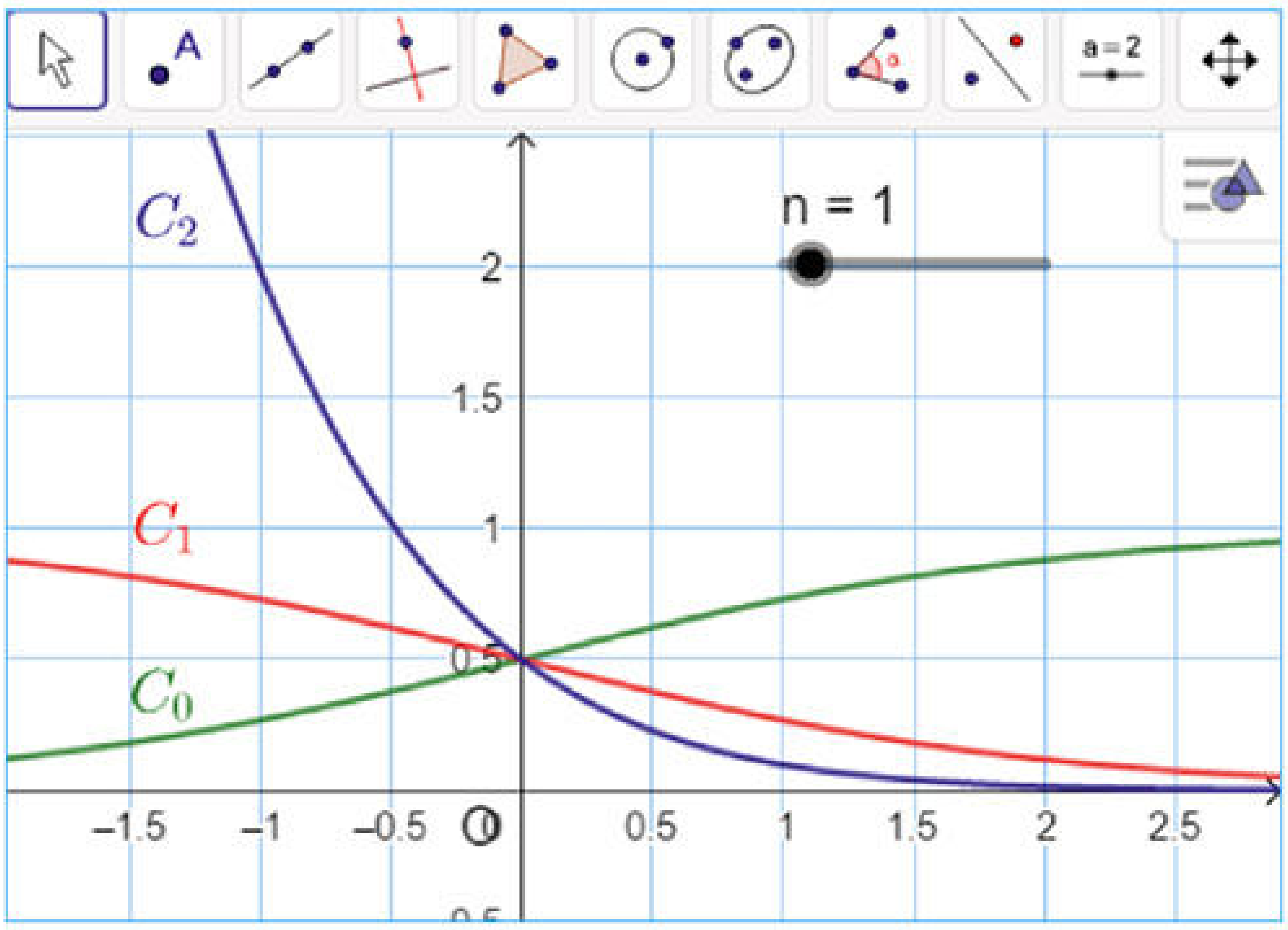
Objectif
Étudier une suite de fonctions f_n avec $n \in \mathbb{N}$.

n désigne un nombre entier naturel. On note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}.$$

On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé.

1. a) Avec un logiciel de géométrie dynamique, afficher les courbes $\mathscr{C}_0$, $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.
b) Créer un curseur n allant de 0 à 10 avec un incrément de 1 et créer la courbe $\mathscr{C}_n$.



c) Déplacer le curseur et conjecturer :
- l'existence d'un point commun aux courbes $\mathscr{C}_n$;
- les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de la fonction f_n ainsi que son sens de variation.

2. Étude d'un point commun
Démontrer que pour tout entier naturel n, les courbes $\mathscr{C}_n$ ont un point A en commun. Préciser ses coordonnées.

On utilise les coordonnées du point A conjecturées à la question 1 et on vérifie que pour tout n, $y_A = f_n(x_A)$.

3. Étude de la fonction f_0
a) Étudier le sens de variation de la fonction f_0.
b) Préciser la limite de la fonction f_0 en $-\infty$, puis en $+\infty$.
Interpréter graphiquement ces limites.
c) Dresser le tableau de variations de la fonction f_0 sur $\mathbb{R}$.

4. Étude de la fonction f_1
a) Démontrer que, pour tout réel x, $f_0(x) = f_1(-x)$.
b) En déduire la limite de la fonction f_1 en $-\infty$, puis en $+\infty$.
c) Donner une interprétation géométrique de la question **4. a)** pour les courbes $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_1$.

5. Étude de la fonction f_n pour $n \geqslant 2$
a) Vérifier que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$ et pour tout nombre réel x :

$$f_n(x) = \frac{1}{e^{nx} + e^{(n-1)x}}.$$

b) Étudier la limite de la fonction f_n en $-\infty$, puis en $+\infty$.
c) Démontrer que la fonction f_n est décroissante sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variations.

113 Étudier un tableau de variations

Raisonner **Calculer** **Communiquer**

Voici le tableau de variations d'une fonction f définie sur $]-\infty\,;1[\cup]1\,;+\infty[$.

$\mathscr{C}$ est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
$f(x)$	2	↘	-3	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

Indiquer pour chaque question la réponse exacte par **(1)**, **(2)** ou **(3)** sans justification.

a) (1) La droite d'équation $x = 2$ est asymptote à $\mathscr{C}$.
(2) La droite d'équation $x = 1$ est asymptote à $\mathscr{C}$.
(3) La droite d'équation $y = -3$ est asymptote à $\mathscr{C}$.

b) (1) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{f(x)} = -\infty$ **(2)** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{f(x)} = 0$

(3) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{1}{f(x)} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{f(x)}$ est égale à : **(1)** 0 **(2)** $-\infty$ **(3)** e^2

114 Relier limites et courbes

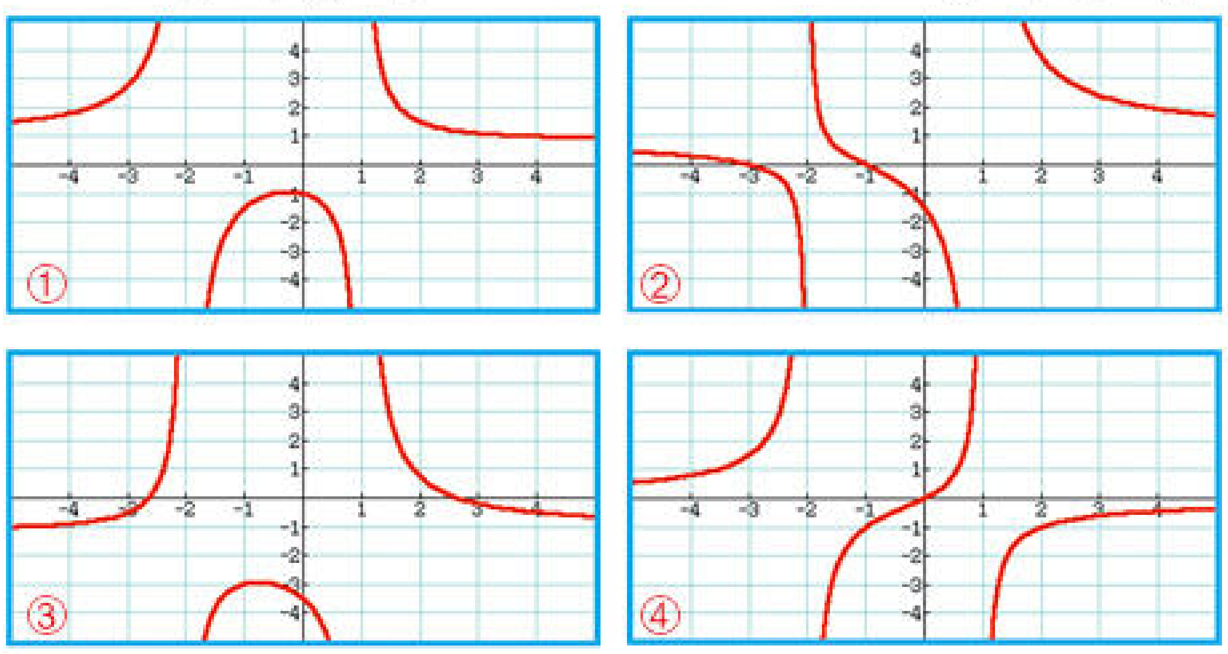
Raisonner **Calculer**

L'emploi de la calculatrice est interdit.

Associer à chacune des fonctions suivantes définies sur $]-\infty\,;-2[\cup]-2\,;1[\cup]1\,;+\infty[$, l'écran sur lequel apparait sa courbe représentative.

$f_1 : x \mapsto \dfrac{x^2+4x+3}{x^2+x-2}$ $f_2 : x \mapsto \dfrac{-2x}{x^2+x-2}$

$f_3 : x \mapsto \dfrac{-x^2+7}{x^2+x-2}$ $f_4 : x \mapsto \dfrac{x^2+2}{x^2+x-2}$



115 Calculate limits

Raisonner **Calculer** **Communiquer**

Find each of the following limits, giving the left and right limits if needed.

a) $f(x) = \dfrac{x-2}{4-x^2}$ in 2 **b)** $g(x) = \dfrac{x-2}{x+1}$ in -1

116 Étudier des conditions de validité

Chercher **Raisonner**

En quels points, peut-on étudier la limite de la fonction
$f : x \mapsto \sqrt{x(x-2)} - \sqrt{x(x+2)}$?

117 Vérifier des conditions

Narration de recherche

Raisonner **Calculer**

Rédiger les différentes étapes de la recherche, sans omettre les fausses pistes et les changements de méthode.

Problème

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{ae^{-x}+bx}{e^{-x}+2x} \text{ avec } a \text{ et } b \text{ nombres réels.}$$

$\mathscr{C}$ est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

$\mathscr{C}$ admet pour asymptote la droite d'équation $y = 3$ en $-\infty$ et la droite d'équation $y = 4$ en $+\infty$.

Déterminer les nombres réels a et b.

118 Imaginer une stratégie

Chercher **Raisonner**

f est la fonction définie sur $]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{e^{2x}+4e^x-5}{e^{2x}-1}.$$

Étudier la limite de la fonction f en 0.

119 Étudier une limite en 0

Problème ouvert

Chercher **Raisonner**

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

La fonction f a-t-elle une limite en 0 ?

120 Prendre des initiatives

Chercher **Raisonner**

f est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$.

Déterminer une fonction affine g telle que :

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - g(x)) = 0.$$

121 Lever une indétermination

Chercher **Raisonner**

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2+4} - x$.

Étudier la limite de f en $-\infty$, puis en $+\infty$.

Conseil : se souvenir que $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.

122 Étudier une proportion Algo

40 min

D'après Bac, Antilles-Guyane 2019

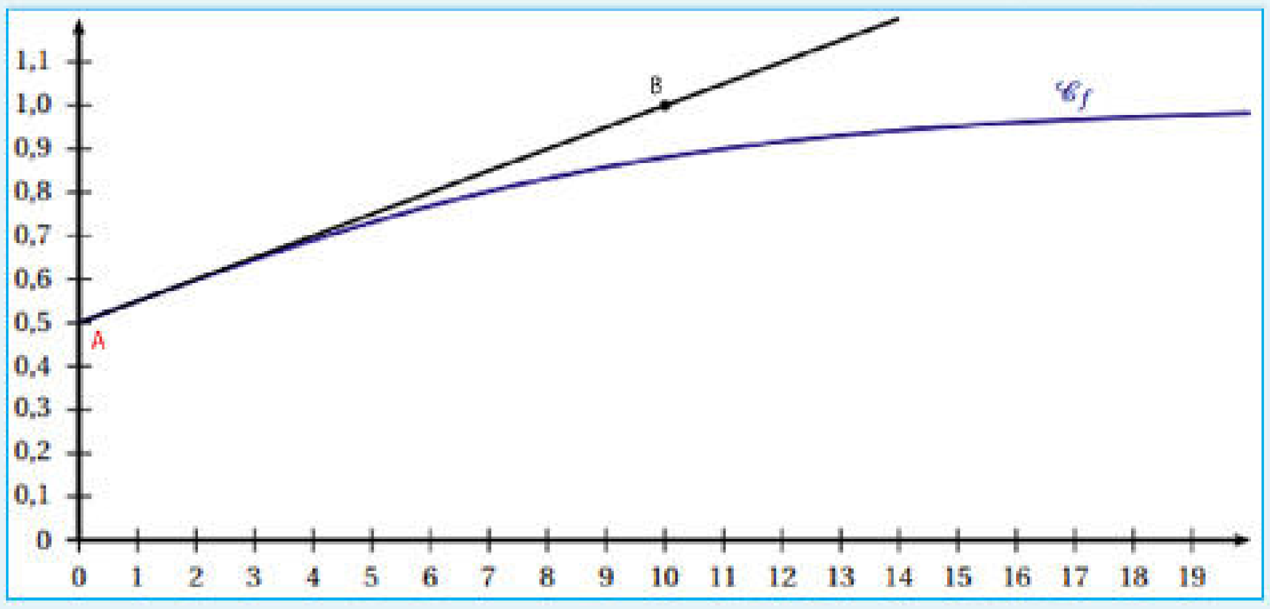
Soit a et b des nombres réels. On considère une fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{a}{1+\mathrm{e}^{-bx}}.$$

La courbe $\mathscr{C}_f$ représentant la fonction f dans un repère orthogonal est donnée ci-dessous.

La courbe $\mathscr{C}_f$ passe par le point A$(0\,;0{,}5)$.

La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A passe par le point B$(10\,;1)$.



Partie A

1. Justifier que $a=1$.

On obtient alors, pour tout réel $x\geqslant 0$, $f(x)=\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-bx}}$.

2. On admet que la fonction f est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

Vérifier que pour tout réel $x\geqslant 0$, $f'(x)=\dfrac{b\mathrm{e}^{-bx}}{(1+\mathrm{e}^{-bx})^2}$.

3. En utilisant les données de l'énoncé, déterminer b.

Partie B

La proportion d'individus qui possèdent un certain type d'équipement dans une population est modélisée par la fonction p définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$p(x)=\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-0{,}2x}}.$$

Le réel x représente le temps écoulé, en année, depuis le 1er janvier 2000.

Le nombre $p(x)$ modélise la proportion d'individus équipés après x années.

Ainsi, pour ce modèle, $p(0)$ est la proportion d'individus équipés au 1er janvier 2000 et $p(3{,}5)$ est la proportion d'individus équipés au milieu de l'année 2003.

1. Quelle est, pour ce modèle, la proportion d'individus équipés au 1er janvier 2010 ? *On en donnera une valeur arrondie au centième.*

2. a) Déterminer le sens de variation de la fonction p sur $[0\,;+\infty[$.

b) Calculer la limite de la fonction p en $+\infty$.

c) Interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.

3. On considère que, lorsque la proportion d'individus équipés dépasse 95 %, le marché est saturé.

Pour déterminer l'année au cours de laquelle cela se produit, on utilise cet algorithme au début duquel on affecte la valeur 0 à la variable A.

```
Tant que ...
  | A ← A + 1
Fin Tant que
```

a) Recopier et compléter cet algorithme.

b) Dresser un tableau de suivi des variables.

En quelle année le marché sera-t-il saturé ?

Guide de résolution
1. Calculer $f(0)$.

Guide de résolution
3. Écrire l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en A et utiliser le fait que cette tangente passe par B.

Guide de résolution
2. a) Utiliser l'expression donnée à la question **2.** de la **partie A**.

Guide de résolution
3. b) On peut s'aider de la calculatrice pour compléter ce tableau.

123 Étudier une simulation

45 min

D'après Bac, Asie 2017

Un protocole de traitement d'une maladie, chez l'enfant, comporte une perfusion longue durée d'un médicament adapté. La concentration dans le sang du médicament au cours du temps est modélisée par la fonction C définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $C(t)=\dfrac{d}{a}\left(1-e^{-\frac{a}{80}t}\right)$ où :

- C désigne la concentration du médicament dans le sang, exprimée en micromole par litre,
- t le temps écoulé depuis le début de la perfusion, exprimé en heure,
- d le débit de la perfusion, exprimé en micromole par heure,
- a un paramètre réel strictement positif, appelé clairance, exprimé en litre par heure.

Le paramètre a est spécifique à chaque patient.
En médecine, on appelle « plateau » la limite en $+\infty$ de la fonction C.

Partie A : étude d'un cas particulier

La clairance a d'un certain patient vaut 7, et on choisit un débit d égal à 84.
Dans cette partie, la fonction C est donc définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$C(t)=12\left(1-e^{-\frac{7}{80}t}\right).$$

1. Étudier le sens de variation de la fonction C sur $[0\,;+\infty[$.
2. Pour être efficace, le plateau doit être égal à 15. Le traitement est-il efficace ?

Partie B : étude de fonctions

1. Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{105}{x}\left(1-e^{-\frac{3}{40}x}\right)$.

Démontrer que pour tout réel x de $]0\,;+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{105g(x)}{x^2}$ où g est la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{3x}{40}e^{-\frac{3}{40}x}+e^{-\frac{3}{40}x}-1$.

2. Voici le tableau de variations de la fonction g.
En déduire le sens de variation de la fonction f.
On ne demande pas les limites de f.

x	0	$+\infty$
$g(x)$	0 ↘	-1

3. On admet que l'équation $f(x)=5{,}9$ admet une unique solution dans $[1\,;80]$.
En déduire que l'équation admet une unique solution α sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-1} de α à l'aide de la calculatrice.

Partie C : détermination d'un traitement adéquat

On se propose de déterminer, pour un patient donné, la valeur du débit de la perfusion qui permet au traitement d'être efficace. Pour cela, on règle provisoirement le débit d à 105, avant de calculer le débit qui rend le traitement efficace.

1. On cherche à déterminer la clairance a d'un patient.
Le débit est provisoirement réglé à 105.
a) Exprimer en fonction de a la concentration du médicament 6 heures après le début de la perfusion.
b) Au bout de 6 heures, des analyses permettent de connaître la concentration du médicament dans le sang ; elle est égale à 5,9 micromoles par litre.
Déterminer une valeur approchée, au dixième de litre par heure, de la clairance.
2. Déterminer la valeur du débit d de la perfusion garantissant l'efficacité du traitement.

Guide de résolution
A. 2. Calculer la limite de C en $+\infty$.

Guide de résolution
C. 1. Utiliser les résultats de la **partie B.**

Guide de résolution
2. Utiliser $\lim\limits_{x\to+\infty} C(t)=105$.

124 Utiliser une fonction auxiliaire

35 min

D'après Bac, Nouvelle-Calédonie 2018

Partie A

g est la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -2x^3 + x^2 - 1$.

1. Étudier les variations de la fonction g. Étudier les limites de g en $+\infty$ et $-\infty$.

2. On admet que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$, notée α, et que α appartient à $[-1\,;0]$. En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.

Partie B

f est la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1 + x + x^2 + x^3)e^{-2x+1}$.

1. a) Démontrer que pour tout réel $x > 1$, $\quad 1 < x < x^2 < x^3$.

b) En déduire que pour tout réel $x > 1$, $\quad 0 < f(x) < 4x^3e^{-2x+1}$. Vérifier que, pour tout réel x, $4x^3e^{-2x+1} = \frac{e}{2}(2x)^3e^{-2x}$, puis montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} 4x^3e^{-2x+1} = 0$.

c) On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$. En utilisant la question précédente, déterminer la limite de f en $+\infty$ et en donner une interprétation graphique.

2. Démontrer que pour tout réel x, $f'(x) = (-2x^3 + x^2 - 1)e^{-2x+1}$.

3. À l'aide des résultats de la partie **A**, déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$.

> **Guide de résolution**
> **1.** Pour étudier la limite en $+\infty$, mettre x^3 en facteur.

> **Guide de résolution**
> **1. b)** Utiliser le schéma de décomposition
> $x \longmapsto \underbrace{2x}_{X} \longmapsto X^3e^{-X}$
> et le théorème des gendarmes.

Se préparer À L'ORAL

125 Présenter un exposé

a) Rappeler les théorèmes à connaître sur la croissance comparée des fonctions exp et $x \mapsto x^n$ en $+\infty$.

b) Dans un exposé oral de 10 min, présenter ces théorèmes et proposer une application de chacun d'eux.

126 Travailler l'oral en groupe

Résoudre cet exercice en petit groupe, puis en présenter les résultats à l'oral.

Dans un repère orthonormé, $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction f définie sur $]-\infty\,;1[\,\cup\,]1\,;8[\,\cup\,]8\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 10x + 16}{x^2 - 9x + 8}.$$

a) Étudier les limites de la fonction f aux bornes de son intervalle de définition.

b) En déduire les asymptotes à la courbe $\mathscr{C}$.

127 Travailler les compétences orales

▶ **ANTICIPER LES QUESTIONS DU JURY**

1. Préparation de la restitution orale (5 min)
Par groupe de 4, chaque élève traite une des propositions.

2. Jeu de rôle (30 min)
Chaque élève présente son résultat à l'oral (2 min), pendant que les trois autres composent le jury.
Chaque juré pose une question au candidat (5 min).

Énoncé : répondre par Vrai ou Faux en justifiant.
f est la définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-2x}$ et g est la fonction définie sur $]-\infty\,;-1[$ par $g(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$.

(1) La limite en $-\infty$ de la fonction f est $+\infty$.

(2) Dans un repère orthonormé, la courbe représentative de f admet une asymptote horizontale en $+\infty$.

(3) La limite en $-\infty$ de la fonction g est 1.

(4) Dans un repère orthonormé, la courbe représentative de g admet une unique asymptote.

128 Étude des branches infinies

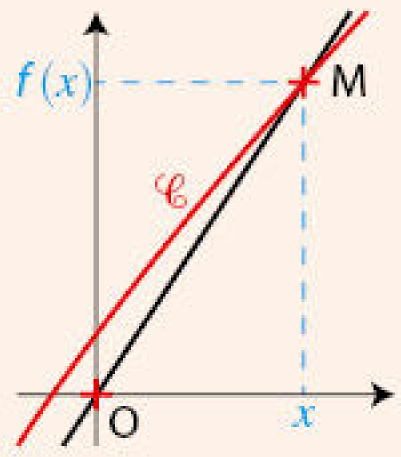
Problème

f est une fonction telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Dans un repère orthonormé, $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de f.

On se propose d'étudier le comportement de $f(x)$ et donc de $\mathscr{C}$ quand x tend vers $+\infty$.

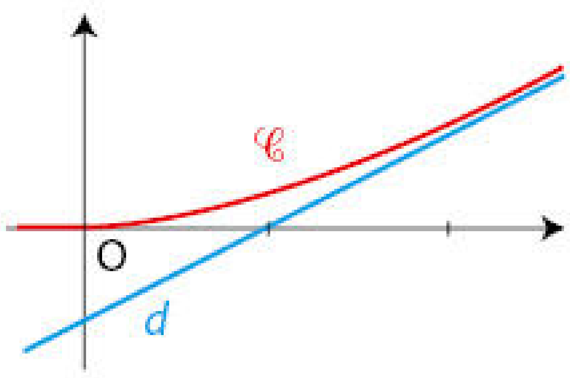
Ce comportement dépend de $\dfrac{f(x)}{x}$ qui représente le coefficient directeur de la droite (OM) où M est le point de coordonnées $(x\,;f(x))$.



Partie A : asymptotes obliques

Définition

Lorsque $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ où a est un nombre réel différent de 0 et $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - ax) = b$ où b est un nombre réel, on dit que $\mathscr{C}$ admet en $+\infty$ une **asymptote oblique** d'équation $y = ax + b$.



1. f est la fonction définie sur $]-\infty\,;4[\cup]4\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{x-4}.$$

a) Afficher la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f à l'écran de la calculatrice, puis conjecturer le comportement de la courbe en $+\infty$.

b) Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction $x \mapsto f(x) - (2x-1)$.

c) En déduire l'équation d'une asymptote oblique d à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

d) Démontrer que d est aussi une asymptote oblique à $\mathscr{C}$ en $-\infty$.

e) Étudier les positions relatives de $\mathscr{C}$ et de d.

2. Dans un repère, la droite Δ d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction g en $+\infty$.

a) Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x} = a$.

b) Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} (g(x) - ax) = b$.

3. h est la fonction définie sur $]-\infty\,;-2[\cup]-2\,;+\infty[$ par $h(x) = \dfrac{3x^2+5x+1}{x+2}$.

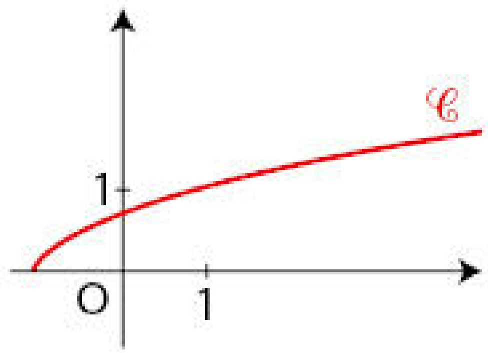
a) Étudier la limite en $+\infty$ de $x \mapsto \dfrac{h(x)}{x}$.

b) En déduire l'équation d'une asymptote oblique à la courbe représentative $\mathscr{C}$ de h en $+\infty$.

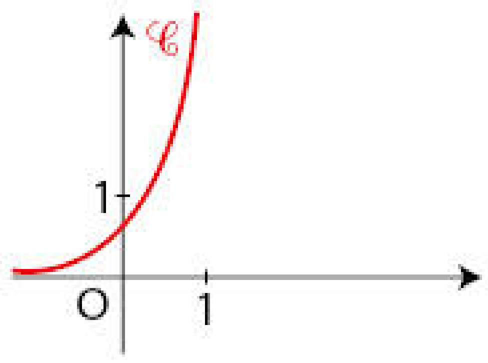
Partie B : branches paraboliques

Définitions

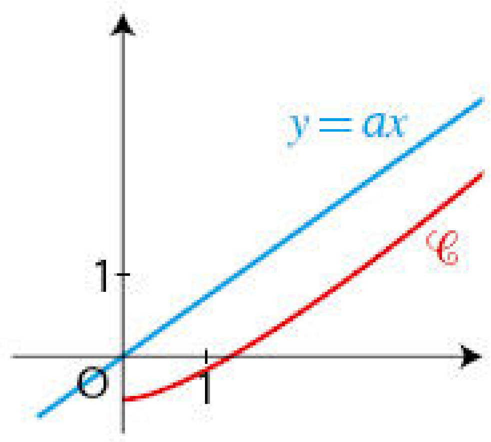
- Lorsque $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, on dit que $\mathscr{C}$ admet en $+\infty$ une **branche parabolique d'axe (Ox)**.



- Lorsque $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$, on dit que $\mathscr{C}$ admet en $+\infty$ une **branche parabolique d'axe (Oy)**.

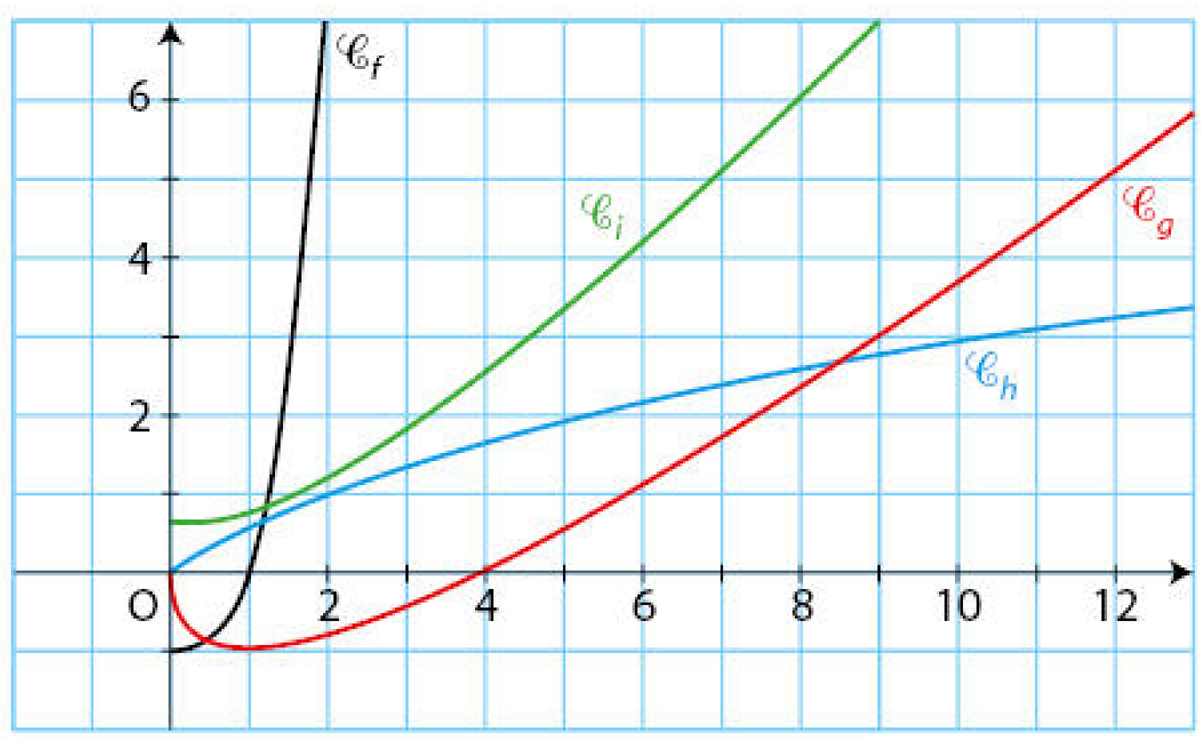


- Lorsque $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - ax) = +\infty$ (ou $-\infty$), on dit que $\mathscr{C}$ admet en $+\infty$ une **branche parabolique de direction $y = ax$**.



Voici dans un repère orthonormé les courbes représentatives des fonctions f, g, h et i définies sur $[0\,;+\infty[$ par :

- $f(x) = x^3 - 1$
- $g(x) = x - 2\sqrt{x}$
- $h(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x+2}}$
- $i(x) = \dfrac{x^2+2}{x+3}$



a) Conjecturer les branches infinies en $+\infty$ de ces fonctions.

b) Prouver ces conjectures.

129 Équivalents au voisinage de l'infini et de 0

Définition
f et g sont deux fonctions et a est un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$.
Dire que les fonctions f et g sont équivalentes au voisinage de a signifie que $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.
On note $f \underset{a}{\sim} g$.

1. Dans chaque cas déterminer si les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ sont équivalentes en $+\infty$.

a) $f(x) = 7x^2 + 2x + 4$ et $g(x) = 7x^2$.

b) $f(x) = 5x$ et $g(x) = \dfrac{x^3 + 3x - 2}{x^2 + 3}$.

c) $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$ et $g(x) = \mathrm{e}^{2x-1}$.

2. Dans chaque cas déterminer une fonction du type $x \mapsto ax^n$ (avec $a \in \mathbb{R}^*$, $n \in \mathbb{N}$) équivalente à la fonction f en $+\infty$.

a) $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 3$ **b)** $f(x) = \dfrac{3x^2 + x + 5}{x + 3}$.

3. Dans chaque cas, déterminer si les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ sont équivalentes en 0.

a) $f(x) = \mathrm{e}^x - 1$ et $g(x) = x$.

b) $f(x) = 5x$ et $g(x) = \dfrac{5x^3 + 3x - 2}{x^2 + 3}$.

130 Tice Une fonction catastrophe

f est la fonction définie sur $]-\infty\,; 0[\cup]0\,; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{(x^{20} + 100)^2 - 10\,000}{x^{20}}.$$

a) À l'aide d'un logiciel de calcul formel, déterminer une valeur approchée de $f(x)$ pour des valeurs de x proches de 0, par exemple : 0,5 ; 0,4 ; 0,3 ; 0,2 ; 0,1 ; 0,05 ; 0,01.

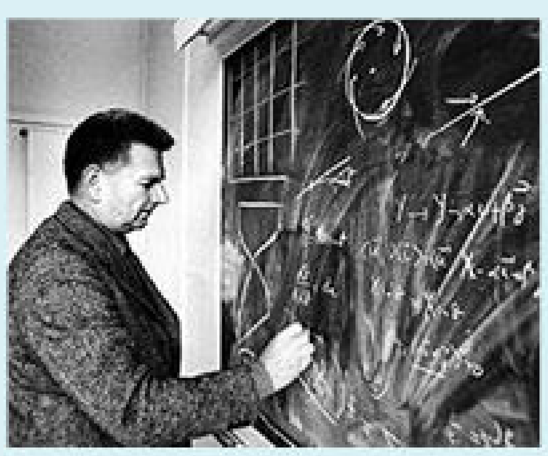
On dit que f est une « fonction catastrophe » car une petite variation de x peut donner une variation considérable de $f(x)$.

b) Développer $(x^{20} + 100)^2$ et obtenir pour $x \neq 0$, une expression simplifiée de $f(x)$.

c) Déterminer alors la limite de la fonction f en 0.

HISTOIRE DES MATHS

Le mathématicien français René Thom (1923-2002) a développé la Théorie des catastrophes. Pour ces travaux, il obtint en 1958 la médaille Fields.



131 Tice La fonction de Gompertz

f est la fonction définie sur $[0\,; +\infty[$ par :

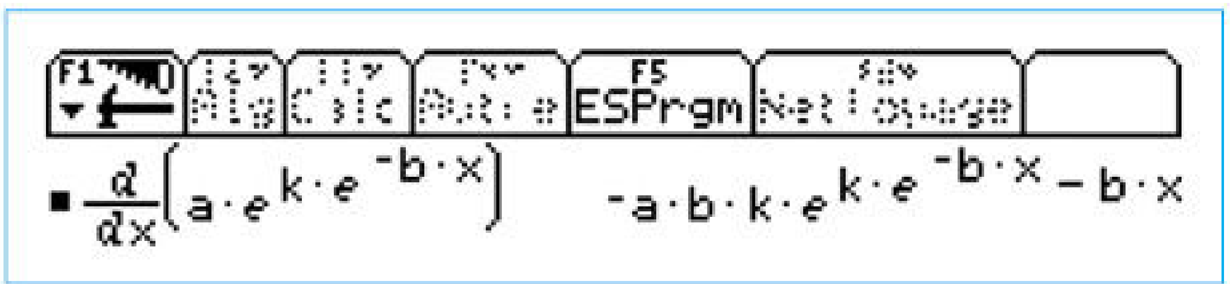
$$f(x) = a \exp\left(k\mathrm{e}^{-bx}\right)$$

où a, b, k sont des constantes avec $a > 0$, $b \neq 0$ et $k \neq 0$.

1. Avec un logiciel de géométrie, créer trois curseurs a (entre 0 et 10), b (entre -5 et 5), k (entre -5 et 5), avec pour incrément 0,1.

Tracer la courbe représentative de f et observer certaines de ses propriétés en déplaçant les curseurs.

2. Voici la dérivée $f'(x)$ obtenue avec une calculatrice formelle. Expliquer pourquoi $f'(x)$ est du signe contraire de $b \times k$.



3. Dans chaque cas, étudier la limite de f en $+\infty$ et dresser le tableau de variations de f.

a) $b > 0$, $k > 0$ **b)** $b > 0$, $k < 0$

c) $b < 0$, $k > 0$ **d)** $b < 0$, $k < 0$

HISTOIRE DES MATHS

Cette fonction introduite par le mathématicien britannique Benjamin Gompertz en 1925, sert parfois de modèle en médecine, en écologie, en biologie pour décrire la croissance de certaines espèces.

Des Défis

132 Lever une indétermination

f est la fonction définie sur l'intervalle $]1\,; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x\sqrt{x} - 1 + (x-1)\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Étudier la limite de f en $+\infty$, puis en 1.

133 Étudier une fonction périodique

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ de la façon suivante :

- si $x \in [0\,; 2]$, $f(x) = x^2(2 - x)$;
- pour tout réel x, $f(x + 2) = f(x)$.

La fonction f a-t-elle une limite en $+\infty$?