4 Équations polynomiales dans $\mathbb{C}$

HISTOIRE DES MATHS

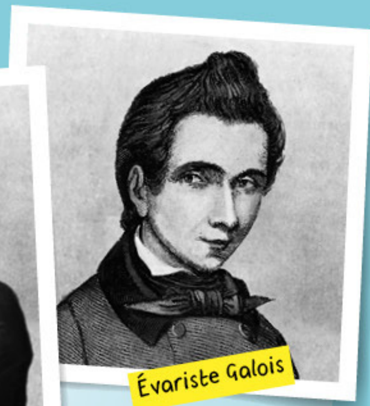
Dès l'Antiquité, on rencontre des exemples de résolution d'équations du premier et du second degré à l'occasion de problèmes concrets. Jusqu'au 19^{e} siècle, cette question constitue le sujet d'étude essentiel des algébristes, en lien avec les extensions successives de la notion de nombres : négatifs, rationnels et surtout complexes.

Au 16^{e} siècle, les mathématiciens italiens, Cardan puis Bombelli considèrent pour la première fois les nombres imaginaires pour résoudre l'équation du 3^{e} degré.

En 1743, **D'Alembert** énonce le théorème fondamental de l'algèbre où il perçoit l'existence de n racines complexes pour tout polynôme de degré n à coefficients complexes.

Gauss démontre ce théorème en 1799.


Jean Le Rond D'Alembert


Évariste Galois

▶ **Jean Le Rond d'Alembert** (1717-1783) est un homme de sciences et de lettres français, l'un des principaux contributeurs, avec Diderot, de *l'Encyclopédie*. En 1743, il publie un *Traité de dynamique*, où il énonce la relation entre le degré d'un polynôme P et le nombre de solutions de l'équation $P(z) = 0$.

▶ **Évariste Galois** (1811-1832) est un mathématicien français. Ses travaux portent sur la résolution d'équations algébriques et sont à l'origine de l'algèbre moderne. Il meurt à 21 ans à l'issue d'un duel.

1545 Cardan et Tartaglia résolvent l'équation du 3^{e} degré.

1560 Bombelli résout des équations de 3^{e} degré aux solutions imaginaires.

1743 D'Alembert énonce le théorème fondamental de l'algèbre.

1799 Gauss démontre le théorème de D'Alembert.

1813 Les travaux de Cauchy sur les équations sont à l'origine de la théorie des groupes.

1830 Galois étudie la résolubilité des équations algébriques.

15^{e} siècle La Renaissance en Italie, puis en Europe

1519/1522 Magellan fait le tour du monde

1609 *Hamlet* de Shakespeare

1721 *Les Lettres persanes* de Montesquieu

1776 Indépendance des États-Unis

1825 Premier meeting d'athlétisme moderne

1500 1600 1700 1800 1900

Trafic dense sur un rond-point.

La résolution d'équations polynomiales reste un domaine très actif de la recherche mathématique. Ses applications sont multiples, par exemple le contrôle du trafic et la gestion des feux de signalisation.

Les contenus et capacités travaillés dans ce chapitre

	Savoir-faire	Exercices
• Solutions complexes d'une équation du second degré à coefficients réels.	1 à 8	18 à 37
• Factorisation de $z^n - a^n$ par $z - a$.	9, 11 à 13	38 à 50
• Si P est un polynôme et $P(a) = 0$, factorisation de $P(z)$ par $z - a$.	10, 14, 15	51 à 60
• Un polynôme de degré n a au plus n racines.		63 à 72
• Résoudre une équation de degré 3 à coefficients réels dont une racine est connue.		61, 62
• Factoriser un polynôme dont une racine est connue.		93 à 95, 98

Calcul mental

Rappels utiles

f est une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{ avec } a \neq 0.$$

• Résolution dans $\mathbb{R}$ de $ax^2 + bx + c = 0$

Le discriminant de f est le nombre réel :

$$\Delta = \boldsymbol{b^2 - 4ac}.$$

Le nombre de solutions réelles de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ (avec $a \neq 0$) dépend du signe de Δ :

– Si $\Delta > 0$, alors l'équation a deux solutions réelles,

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

– Si $\Delta = 0$, alors l'équation a une unique solution réelle,

$$x_0 = -\frac{b}{2a}.$$

– Si $\Delta < 0$, alors l'équation n'a pas de solution réelle.

Les solutions sont aussi appelées **racines** de f.

• Factorisation de $f(x) = ax^2 + bx + c$

Si $\Delta > \mathbf{0}$, alors pour tout réel x,

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2).$$

où x_1 et x_2 sont les racines de f.

Si $\Delta = \mathbf{0}$, alors pour tout réel x,

$$f(x) = a(x - x_0)^2.$$

où x_0 est l'unique racine de f.

• Somme et produit des racines

Si l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) admet deux solutions x_1 et x_2, alors :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ et } x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}.$$

À l'oral — Questions-Tests

Pour chaque question, il y a une seule réponse exacte.

1 **a)** Les solutions de $(x+2)(2x-3) = 0$ sont :

(1) 2 et 3 (2) -2 et $\frac{3}{2}$ (3) -2 et $\frac{2}{3}$

b) Les solutions de $x^2 - 9 = 0$ sont :

(1) 3 (2) -9 et 9 (3) -3 et 3

c) Les solutions de $x^2 + 7x = 0$ sont :

(1) 0 et -7 (2) -7 (3) 1 et -7

2 Le nombre de solutions de l'équation :

a) $x^2 + 5 = 0$ est : (1) 0 (2) 1 (3) 2

b) $x^2 - 18x + 81 = 0$ est : (1) 0 (2) 1 (3) 2

3 **a)** L'équation $2x^2 - x - 1 = 0$ dont le discriminant est $\Delta = 9$ a pour solutions :

(1) -1 et $\frac{1}{2}$ (2) 1 et $-\frac{1}{2}$ (3) 1 et -2

b) L'équation $12x^2 - 2\sqrt{2}x - 4 = 0$ dont le discriminant est $\Delta = 200$ a pour solutions :

(1) $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{3}$ (2) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (3) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $-\frac{\sqrt{2}}{3}$

4 Les racines de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + 5x + 2$ sont $-\frac{1}{2}$ et -2.

Pour tout réel x, $f(x)$ est égal à :

(1) $2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-2)$ (2) $\left(x + \frac{1}{2}\right)(x+2)$

(3) $(2x+1)(x+2)$

5 La seule racine de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{9}{4}x^2 - 6x + 4$ est $\frac{4}{3}$. Pour tout réel x, $g(x)$ est égal à :

(1) $\left(\frac{3}{2}x + 2\right)^2$ (2) $\left(\frac{3}{2}x - 2\right)\left(\frac{3}{2}x + 2\right)$ (3) $\frac{9}{4}\left(x - \frac{4}{3}\right)^2$

6 L'équation $5x^2 - 10x + 1 = 0$ a deux solutions x_1 et x_2.

a) $x_1 + x_2$ est égal à : (1) 1 (2) -1 (3) 2

b) $x_1 \times x_2$ est égal à : (1) $\frac{1}{10}$ (2) $\frac{1}{5}$ (3) $-\frac{1}{10}$

7 2 est une solution de l'équation $7x^2 - 4x - 20 = 0$.

Son autre solution est :

(1) $-\frac{10}{7}$ (2) $\frac{5}{2}$ (3) 7

1 Solutions complexes d'une équation du second degré

On rappelle que *i* est un nombre complexe dont le carré est égal à -1.

1 Simplifier autant que possible chaque expression :
a) $2i^2$ **b)** $(2i)^2$ **c)** $(1+i)^2$

2 (**E**) est l'équation $z^2+4=0$, d'inconnue le nombre complexe z.
a) Déterminer le nombre de solutions réelles de l'équation (**E**).
b) À l'aide de la question **1**, trouver une solution complexe de (**E**).
c) Trouver une autre solution complexe de (**E**).

3 Sur le modèle de la question **2**, trouver deux solutions complexes de l'équation (**F**) : $z^2+9=0$.

4 (**G**) est l'équation $z^2-2z+2=0$, d'inconnue le nombre complexe z.
a) Déterminer le nombre de solutions réelles de l'équation (**G**).
b) À l'aide de la question **1**, trouver une solution complexe de (**G**)
c) Julia affirme : « Le conjugué de la solution trouvée est aussi solution de l'équation (**G**) ».
A-t-elle raison ?

2 Factoriser un polynôme par $z-a$

On considère les polynômes définis sur $\mathbb{C}$ par :

$$\mathrm{P}(z)=z-3\,;\ \mathrm{Q}(z)=z^2-9\,;\ \mathrm{R}(z)=z^2-6z+9\,;\ \mathrm{S}(z)=z^3-2z^2-5z+6 \text{ et } \mathrm{T}(z)=z^3-3z^2+z-3.$$

1 Vérifier que 3 est racine de chacun de ces polynômes.

2 Donner une forme factorisée des polynômes Q et R.

3 On admet qu'il existe un polynôme $z\mapsto az^2+bz+c$ tel que pour tout complexe z,
$$\mathrm{S}(z)=(z-3)\left(az^2+bz+c\right).$$
a) Développer et ordonner le produit $(z-3)\left(az^2+bz+c\right)$.
b) En identifiant les coefficients du polynôme S avec ceux de l'expression obtenue à la question précédente, écrire un système d'équations d'inconnues *a*, *b* et *c*.
c) Résoudre ce système et en déduire une factorisation du polynôme S.

4 Factoriser le polynôme T en utilisant la même méthode que pour le polynôme S.

5 À la lumière des exemples précédents, conjecturer une condition nécessaire pour que 3 soit racine d'un polynôme.

6 On considère maintenant le polynôme U défini sur $\mathbb{C}$ par $\mathrm{U}(z)=z^2-3z+4$.
a) Le nombre 3 est-il une racine de ce polynôme ? Justifier.
b) Peut-on factoriser le polynôme U par $z-3$?
c) Que peut-on alors conjecturer pour la condition trouvée à la question **5** ?

Cours

Exercices
- 1 à 8 (ci-contre)
- 18 à 37

1 Équations du second degré dans ℂ

A Racines carrées d'un nombre réel dans ℂ

Définition

a désigne un nombre réel.
Les solutions dans ℂ de l'équation $z^2 = a$ sont appelées **racines carrées de a dans** ℂ.

Propriété

Tout nombre réel non nul a admet **deux racines carrées dans** ℂ.
- Si $a > 0$, ce sont les nombres réels $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.
- Si $a < 0$, ce sont les nombres complexes $i\sqrt{-a}$ et $-i\sqrt{-a}$.

Démonstration

- Si $a > 0$, $z^2 = a$ équivaut à $\left(z-\sqrt{a}\right)\left(z+\sqrt{a}\right) = 0$. D'où la conclusion.
- Si $a < 0$, $z^2 = a$ équivaut à $z^2 - i^2(-a) = 0$, c'est-à-dire $\left(z-i\sqrt{-a}\right)\left(z+i\sqrt{-a}\right) = 0$. D'où la conclusion.

Exemples

Les racines carrées dans ℂ :
- de 2 sont $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$,
- de -3 sont $i\sqrt{3}$ et $-i\sqrt{3}$.

B Équation $az^2 + bz + c = 0$ avec a, b, c nombres réels, $a \neq 0$

Propriété

L'équation $az^2 + bz + c = 0$ (avec a, b, c nombres réels, $a \neq 0$) de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ admet :
- si $\Delta = 0$, une unique solution réelle $-\dfrac{b}{2a}$;
- si $\Delta > 0$, deux solutions réelles : $\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$;
- si $\Delta < 0$, deux solutions complexes conjuguées : $\dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Démonstration

Pour tout complexe z, $az^2 + bz + c = a\left(z^2 + \dfrac{b}{a}z + \dfrac{c}{a}\right) = a\left(\left(z + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right)$, avec $\Delta = b^2 - 4ac$.

Résoudre l'équation $az^2 + bz + c = 0$ revient à résoudre l'équation $\left(z + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = \dfrac{\Delta}{4a^2}$ car $a \neq 0$.
- Si $\Delta = 0$, $\left(z + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = 0$ équivaut à $z = -\dfrac{b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$, $z + \dfrac{b}{2a} = \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $z + \dfrac{b}{2a} = -\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}$, soit $z = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $z = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$, alors d'après la propriété du paragraphe A, $z + \dfrac{b}{2a} = \dfrac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ ou $z + \dfrac{b}{2a} = -\dfrac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

soit $z = \dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ ou $z = \dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Remarque : si l'on note z_1 et z_2 les solutions de l'équation (avec éventuellement $z_1 = z_2$), alors pour tout nombre complexe z, $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$.

Exemple

$z^2 + z + 1 = 0$ a pour discriminant $\Delta = -3$, donc les solutions dans ℂ de cette équation sont les nombres complexes conjugués $-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $-\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

EXERCICES RÉSOLUS

1 Résoudre des équations du second degré dans $\mathbb{C}$ sans utiliser Δ

Dans chaque cas, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation du second degré, sans utiliser le discriminant.

a) $z^2+4=0$ **b)** $5z^2+2=0$ **c)** $3z^2+7z=0$

Solution

a) Pour tout complexe z, $z^2+4=0$ équivaut à $z^2=-4$.
Les solutions sont donc les racines carrées de -4 dans $\mathbb{C}$, c'est-à-dire :

$$z_1=2i \text{ et } z_2=-2i.$$

b) Pour tout complexe z, $5z^2+2=0$ équivaut à $z^2=-\frac{2}{5}$.
Les solutions sont donc les racines carrées de $-\frac{2}{5}$ dans $\mathbb{C}$, c'est-à-dire $z_1=i\sqrt{\frac{2}{5}}$ et $z_2=-i\sqrt{\frac{2}{5}}$.

c) Pour tout complexe z, $3z^2+7z=0$ équivaut à $z(3z+7)=0$.
Les solutions sont donc $z_1=0$ et $z_2=-\frac{7}{3}$.

Aux **a)** et **b)**, on se ramène à la détermination des racines carrées d'un nombre réel négatif dans $\mathbb{C}$.

2 Résoudre des équations du second degré dans $\mathbb{C}$ à l'aide de Δ

Dans chaque cas, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation du second degré.

a) $z^2-5z+4=0$ **b)** $z^2-z+1=0$ **c)** $\frac{4}{9}z^2-\frac{4}{3}z+1=0$

Solution

a) $\Delta=(-5)^2-4\times1\times4=9$
$\Delta>0$ donc l'équation admet deux solutions réelles :

$$z_1=\frac{5+\sqrt{9}}{2}=4 \text{ et } z_2=\frac{5-\sqrt{9}}{2}=1.$$

b) $\Delta=(-1)^2-4\times1\times1=-3$
$\Delta<0$ donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } z_2=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

c) $\Delta=\left(-\frac{4}{3}\right)^2-4\times\frac{4}{9}\times1=0$
$\Delta=0$ donc l'équation a pour unique solution le réel $z_0=\frac{\frac{4}{3}}{2\times\frac{4}{9}}=\frac{3}{2}$.

Le nombre de solutions, réelles ou complexes, dépend du signe de Δ.
- Si $\Delta>0$, l'équation a deux solutions réelles.
- Si $\Delta=0$, l'équation a une unique solution, qui est réelle.
- Si $\Delta<0$, l'équation a deux solutions complexes conjuguées.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 1

Pour les exercices 3 à 5, résoudre dans $\mathbb{C}$ chaque équation, sans utiliser le discriminant.

3 **a)** $z^2+16=0$ **b)** $3z^2+2=0$ **c)** $5z^2+2z=0$

4 **a)** $z^2-9=0$ **b)** $4z^2+3=0$ **c)** $7z^2-z=0$

5 **a)** $z^2-2z=0$ **b)** $z^2+25=0$ **c)** $z^2+2z+1=0$

Sur le modèle de l'exercice résolu 2

Pour les exercices 6 à 8, résoudre dans $\mathbb{C}$ chaque équation.

6 **a)** $2z^2+3z-5=0$ **b)** $2z^2+3z+5=0$ **c)** $\frac{1}{8}z^2+z+2=0$

7 **a)** $z^2-4z+9=0$ **b)** $z^2+9z+15=0$

8 **a)** $3z^2+6z+4=0$ **b)** $\frac{1}{3}z^2+\frac{1}{6}z+1=0$

Exercices
- 9 à 15 (ci-contre)
- 38 à 72

2 Polynômes de degré *n*

A Polynômes à coefficients réels

Définition

Un polynôme non nul P à coefficients réels de la variable complexe z est défini par une expression de la forme $\mathrm{P}(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$ où les coefficients $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ sont des nombres réels avec $a_n \neq 0$. Le nombre entier naturel n est **le degré** du polynôme.

Exemple

P défini sur $\mathbb{C}$ par $\mathrm{P}(z) = 5z^3 - 4z^2 + \frac{1}{2}z$ est un polynôme de degré 3 à coefficients réels.

Remarque : on peut étendre cette définition et considérer les polynômes à coefficients complexes de la variable complexe z. Les résultats suivants sont énoncés dans ce cadre.

B Factorisation par $z - a$

Propriété

a désigne un nombre complexe. Pour tout complexe z, $\boldsymbol{z^n - a^n = (z-a)\left(z^{n-1} + az^{n-2} + \ldots + a^{n-2}z + a^{n-1}\right)}$.

Démonstration

Pour tout complexe z, on développe $\mathrm{R}(z) = (z-a)\left(z^{n-1} + az^{n-2} + \ldots + a^{n-2}z + a^{n-1}\right)$; on obtient $\mathrm{R}(z) = z^n + az^{n-1} + \ldots + a^{n-1}z - az^{n-1} - \ldots - a^{n-1}z - a^n$ et en simplifiant, $\mathrm{R}(z) = z^n - a^n$.

Théorème

a est un nombre complexe. Si P est un polynôme tel que $\mathbf{P}(\boldsymbol{a}) = \mathbf{0}$, alors on peut factoriser P(z) par $z - a$, c'est-à-dire qu'il existe un polynôme Q tel que, pour tout complexe z, $\mathbf{P}(z) = (z - \boldsymbol{a})\mathbf{Q}(z)$.

Exemple

On considère le polynôme P défini par $\mathrm{P}(z) = z^3 + z^2 + z + 1$.
$\mathrm{P}(i) = 0$ donc il existe un polynôme Q tel que pour tout complexe z, $\mathrm{P}(z) = (z - i)\mathrm{Q}(z)$.

Démonstration à l'exercice 76 p. 108

C Nombre de racines d'un polynôme de degré *n*

Théorème

n désigne un nombre entier naturel non nul. Un polynôme de degré n admet **au plus *n* racines**.

Démonstration

Initialisation : pour $n = 1$, le polynôme est défini par $\mathrm{P}(z) = az + b$ avec a et b nombres réels, a non nul.
Il admet exactement une racine $z = \frac{-b}{a}$. La propriété est donc vraie dans ce cas.
Hérédité : on suppose que pour un entier naturel $k \geqslant 1$, on a prouvé que tout polynôme de degré k admet au plus k racines. On considère alors un polynôme P de degré $k + 1$.
Si P n'admet aucune racine, alors la propriété est vraie pour ce polynôme, car $0 < k + 1$.
Si P admet une racine a, alors d'après le théorème précédent, il existe un polynôme Q tel que, pour tout complexe z, $\mathrm{P}(z) = (z - a)\mathrm{Q}(z)$. On admet que Q est de degré k. Ainsi, d'après l'hypothèse de récurrence, Q admet au plus k racines. Par conséquent, le polynôme P, qui admet éventuellement la racine supplémentaire a (qui peut être déjà une racine de Q), admet au plus $k + 1$ racines.
On a ainsi prouvé que la propriété est vraie pour tout polynôme de degré $k + 1$.
Conclusion : tout polynôme de degré $n \geqslant 1$ admet au plus n racines.

EXERCICES RÉSOLUS

9 Factoriser un polynôme de la forme $z^n - a^n$

Dans chaque cas, reconnaître un polynôme de la forme $z^n - a^n$ et factoriser ce polynôme par $z - a$.

a) $z^3 - 27$ **b)** $z^3 + i$

Solution

a) Pour tout complexe z, $P(z) = z^3 - 27 = z^3 - 3^3$.
Donc $P(z) = (z-3)(z^2 + 3z + 3^2) = (z-3)(z^2 + 3z + 9)$.

b) Pour tout complexe z, $Q(z) = z^3 + i = z^3 - i^3$.
Donc $Q(z) = (z-i)(z^2 + iz + i^2) = (z-i)(z^2 + iz - 1)$.

On reconnaît la forme $z^n - a^n$, puis on applique la formule de la factorisation du cours.

10 Factoriser un polynôme tel que $P(a) = 0$

Dans chaque cas, vérifier que a est une racine du polynôme, puis le factoriser par $z - a$.

a) $P(z) = z^3 - 6z^2 + 13z - 10$ et $a = 2$ **b)** $Q(z) = z^3 - 3z^2 + z - 3$ et $a = -i$

Solution

a) $P(2) = 2^3 - 6 \times 2^2 + 13 \times 2 - 10 = 0$ donc 2 est une racine du polynôme P.
Donc, il existe un polynôme S tel que, pour tout complexe z, $P(z) = (z-2)S(z)$.
S est de degré 2, donc pour tout complexe z, $S(z) = az^2 + bz + c$ avec $a \neq 0$.
Ainsi, pour tout complexe, $P(z) = (z-2)(az^2 + bz + c) = az^3 + bz^2 + cz - 2az^2 - 2bz - 2c$,
c'est-à-dire $P(z) = az^3 + (b - 2a)z^2 + (c - 2b)z - 2c$.

En identifiant avec $z^3 - 6z^2 + 13z - 10$, on obtient le système $\begin{cases} a = 1 \\ b - 2a = -6 \\ c - 2b = 13 \\ -2c = -10 \end{cases}$, soit $\begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 5 \end{cases}$.

Alors, pour tout complexe z, $P(z) = (z-2)(z^2 - 4z + 5)$.

b) $Q(-i) = (-i)^3 - 3 \times (-i)^2 + (-i) - 3 = 0$ donc $-i$ est une racine du polynôme Q.
Donc, il existe un polynôme S tel que, pour tout complexe z, $Q(z) = (z+i)S(z)$.

En utilisant la méthode du **a)**, on obtient le système $\begin{cases} a = 1 \\ b + ia = -3 \\ c + ib = 1 \\ ic = -3 \end{cases}$, soit $\begin{cases} a = 1 \\ b = -3 - i \\ c = 3i \end{cases}$.

Alors, pour tout complexe z, $Q(z) = (z+i)(z^2 + (-3-i)z + 3i)$.

α est une racine d'un polynôme P si, et seulement si, $P(\alpha) = 0$.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 9

Pour les exercices 11 à 13, dans chaque cas, reconnaître un polynôme de la forme $z^n - a^n$ et factoriser ce polynôme par $z - a$.

11 **a)** $P(z) = z^3 - 1$ **b)** $Q(z) = z^3 + 8i$

12 **a)** $P(z) = z^6 - 1$ **b)** $Q(z) = z^5 - i$

13 **a)** $P(z) = z^3 - 1000$ **b)** $Q(z) = z^6 + 729$

Sur le modèle de l'exercice résolu 10

Pour les exercices 14 et 15, vérifier que a est une racine du polynôme, puis le factoriser par $z - a$.

14 **a)** $P(z) = z^3 + 5z^2 - 12z + 6$ et $a = 1$
b) $R(z) = z^3 + z^2 + 4z + 4$ et $a = 2i$

15 **a)** $P(z) = z^3 + \frac{3}{2}z^2 + z - 1$ et $a = \frac{1}{2}$
b) $Q(z) = z^3 - 4z^2 + 6z - 4$ et $a = 1 + i$

EXERCICE RÉSOLU

16 Appliquer l'algorithme de Horner

Cours 2. A

P est le polynôme à coefficients réels défini sur $\mathbb{C}$ par $P(z) = a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0$.

1. a) Combien de multiplications et d'additions faut-il effectuer pour calculer $P(\alpha)$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$?

b) En 1819, le mathématicien britannique William Horner utilisait l'écriture :

$$P(z) = z(z(z \times a_3 + a_2) + a_1) + a_0.$$

Vérifier la validité de cette écriture.

Déterminer le nombre de multiplications et d'additions à effectuer pour calculer $P(\alpha)$ avec cette écriture.

2. a) Horner présentait le calcul de $P(\alpha)$ dans le tableau ci-contre.

Déterminer b_3, b_2, b_1 et vérifier que $b_0 = P(\alpha)$.

b) Utiliser un tel tableau pour calculer l'image de i par le polynôme défini sur $\mathbb{C}$ par $P(z) = 2z^3 - 5z^2 + 4z - 8$.

	a_3	a_2	a_1	a_0
		+	+	+
α		αb_3	αb_2	αb_1
	b_3	b_2	b_1	b_0

3. Cette méthode est appelée **algorithme de Horner**.

On note L la liste des coefficients d'un polynôme P de degré n et a un nombre complexe.

Écrire une fonction **H** en langage Python, de paramètres L et a, qui renvoie pour résultat $P(a)$.

Tester cette fonction.

Solution

1. a) $P(\alpha) = a_3 \times \alpha \times \alpha \times \alpha + a_2 \times \alpha \times \alpha + a_1 \times \alpha + a_0$ donc ce calcul nécessite 6 multiplications et 3 additions.

b) Pour $z \in \mathbb{C}$, $z \times (z \times (z \times a_3 + a_2) + a_1) + a_0 = z\left(z^2a_3 + za_2 + a_1\right) + a_0 = a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0 = P(z)$.

Le calcul de $P(\alpha)$ nécessite alors 3 multiplications et 3 additions.

2. a) $b_3 = a_3$, $b_2 = a_2 + \alpha b_3$, $b_1 = a_1 + \alpha b_2$ et $b_0 = a_0 + \alpha b_1 = a_0 + \alpha(a_1 + \alpha(a_2 + \alpha a_3))$, soit $b_0 = P(\alpha)$.

b)

	2	−5	4	−8
i		$2i$	$-2-5i$	$5+2i$
	2	$-5+2i$	$2-5i$	$-3+2i$

Donc $P(i) = -3 + 2i$.

On peut montrer que cet algorithme est celui qui nécessite le moins d'opérations pour calculer $P(\alpha)$. C'est pourquoi il est souvent utilisé en programmation.

3. Voici une fonction **H** écrite en langage Python :

```python
from cmath import *

def H(L,a):
    n=len(L)
    b=L[0]
    for i in range(1,n):
        b=b*a+L[i]
    return b
```

Par exemple :

```
>>> H([2,-5,4,-8],1j)
(-3+2j)
```

On importe le module cmath afin d'effectuer des calculs avec les nombres complexes.
En langage Python, un nombre complexe se note : $-3+2j$, $1j$, $-1+0j$, …

EXERCICE D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 16

17 Dans chaque cas, utiliser l'algorithme de Horner pour calculer $P(\alpha)$, puis vérifier avec la fonction **H** ci-dessus.

a) $P(z) = z^3 + 3z^2 - 6z + 4$, $\quad \alpha = 1 + i$

b) $P(z) = -2z^4 + 3z^3 + 7z^2 - 5$, $\quad \alpha = 2 - 3i$

c) $P(z) = z^4 - z^3 + z^2 + 2$, $\quad \alpha = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Racines carrées dans $\mathbb{C}$

Cours 1. A

Questions flash — À l'oral

18 Donner mentalement le carré de chaque nombre complexe.
• $2i$ • $-i$ • $i\sqrt{5}$ • $-3i$ • -7 • $-i\sqrt{2}$

19 Iker affirme : « Le carré d'un nombre complexe est forcément négatif ». A-t-il raison ?

20 Julie devait trouver les racines carrées de -1 dans $\mathbb{C}$. Elle n'a trouvé que le nombre complexe i. Que peut-on penser de sa réponse ?

21 Donner mentalement les racines carrées de chaque nombre dans $\mathbb{C}$.
• 25 • -81 • 3 • -5

22 Laetitia affirme : « Il existe un unique nombre qui n'a qu'une seule racine carrée dans $\mathbb{C}$ ». A-t-elle raison ? Si oui, quel est ce nombre ?

23 Dans chaque cas, résoudre l'équation dans $\mathbb{C}$.
a) $z^2 = 4$ **b)** $z^2 = -4$ **c)** $z^2 = 19$ **d)** $z^2 = -19$

24 Hippolyte a utilisé sa calculatrice pour résoudre l'équation $z^2 + 9 = 0$. Justifier que les résultats affichés sont corrects.

z1	-3i
z2	3i
Δ=b²-4ac	-36

25 Résoudre dans $\mathbb{C}$ chaque équation.
a) $z^2 + 1 = 0$ **b)** $z^2 - 25 = 0$
c) $z^2 + 7 = 0$ **d)** $z^2 - 53 = 0$

26 **Algo** Voici un algorithme où a désigne un nombre réel non nul.

```
Si ... alors
    u = √a et v = −√a
sinon
    u = ... et v = ...
Fin Si
```

a) Quel est le rôle de cet algorithme ?
b) Recopier et compléter l'algorithme.

27 Dans chaque cas, résoudre l'équation dans $\mathbb{C}$.
a) $3z^2 - 3 = 0$ **b)** $-2z^2 - 8 = 0$
c) $5z^2 + 45 = 0$ **d)** $6z^2 - 24 = 0$

28 Dans chaque cas, résoudre l'équation dans $\mathbb{C}$.
a) $\frac{1}{2}z^2 - 5 = 0$ **b)** $\frac{1}{2}z^2 + 3 = 0$
c) $\frac{1}{3}z^2 + \frac{1}{2} = 0$ **d)** $-\frac{1}{5}z^2 - 3 = 0$

29 Dans chaque cas, résoudre l'équation dans $\mathbb{C}$ et donner les solutions sous la forme $ai\sqrt{b}$, où a et b sont des entiers différents de 1.
a) $z^2 + 12 = 0$ **b)** $z^2 + 45 = 0$
c) $3z^2 + 60 = 0$ **d)** $-2z^2 - 126 = 0$

Équations $az^2 + bz + c = 0$

Cours 1. B

Questions flash — À l'oral

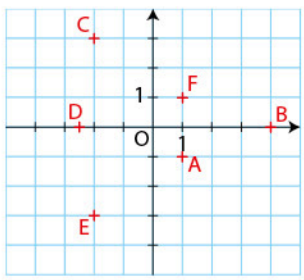
30 Dans chaque cas, calculer mentalement le discriminant, puis indiquer le nombre de solutions et leur nature (réelles ou complexes).
a) $z^2 + 3z + 1 = 0$ **b)** $2z^2 + 5z + 4 = 0$
c) $4z^2 + 4z + 1 = 0$ **d)** $-z^2 + z - 7 = 0$

31 Dans chaque cas, on donne l'une des solutions complexes z_1 d'une équation $az^2 + bz + c = 0$ (avec a, b, c réels, $a \neq 0$). Donner mentalement l'autre solution de cette équation.
a) $z_1 = 2 - i$ **b)** $z_1 = 5 + 3i$ **c)** $z_1 = 1 - i\sqrt{3}$
d) $z_1 = -5i$ **e)** $z_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ **f)** $z_1 = \sqrt{2} - i$

32 Dans chaque cas, résoudre l'équation dans $\mathbb{C}$.
a) $z^2 + 9z - 6 = 0$ **b)** $z^2 - 2z + 5 = 0$
c) $z^2 + z + 1 = 0$ **d)** $5z^2 + 8z + 3 = 0$
e) $-z^2 + 3z - 3 = 0$ **f)** $9z^2 + 12z + 4 = 0$

33 (**E**) est l'équation $z^2 - 6z + 13 = 0$.
a) Résoudre cette équation dans $\mathbb{C}$.
b) Dans le plan complexe, placer les points images des solutions de l'équation (**E**).

34 Dans le plan complexe ci-contre, on a placé six points A, B, C, D, E et F. Pour chaque équation ci-dessous, préciser les points images de ses solutions.



(E) : $z^2 - 1{,}5z - 10 = 0$
(F) : $z^2 - 2z + 2 = 0$
(G) : $z^2 + 4z + 13 = 0$

35 Dans chaque cas, résoudre l'équation dans $\mathbb{C}$, puis déterminer le module et un argument de chacune des solutions.

a) $z^2+4z+8=0$ **b)** $z^2+20=0$
c) $z^2-6z+36=0$ **d)** $z^2-2{,}5z-12{,}5=0$

36 Dans chaque cas, résoudre l'équation dans $\mathbb{C}$ et écrire chaque solution sous forme exponentielle.

a) $z^2+z+1=0$ **b)** $z^2-\sqrt{2}z+1=0$
c) $2z^2+5z+3=0$ **d)** $z^2+7=0$

37 Dans chaque cas, résoudre l'équation à l'aide de la calculatrice.

a) $z^2-14z+50=0$ **b)** $z^2+4z+4{,}16=0$
c) $-3z^2+2z-8=0$ **d)** $3z^2-z+7=0$

- **Casio :** SHIFT MENU, sur la ligne ComplexMode, F2 $(a+bi)$ MENU, Equation, F2 (POLY) choisir le degré, ici F1 (2). Saisir les coefficients de l'équation, F1 (SOLVE)
- **TI :** résol 2 (PlySmlt2) 1 (RACINES D'UN POLYNOME), renseigner 2 pour degré et $a+bi$ graphe.
Saisir les coefficients de l'équation, graphe.
- **NumWorks : Paramètres**, Forme complexe, Algébrique.
Menu **Equations**, Ajouter une équation et la saisir, puis choisir Résoudre l'équation.

Polynômes de la forme $z^n - a^n$

Cours 2

Questions flash À l'oral

38 Chaque polynôme ci-dessous est de la forme z^2-a^2. Dans chaque cas, préciser oralement une valeur possible du nombre complexe a.

a) $P(z)=z^2-4$ **b)** $Q(z)=z^2-9$ **c)** $R(z)=z^2+1$
d) $S(z)=z^2+16$ **e)** $T(z)=z^2+3$ **f)** $U(z)=z^2+7$

39 Factoriser mentalement chaque polynôme en utilisant une identité remarquable.

a) $P(z)=z^2-4$ **b)** $Q(z)=z^2-9$ **c)** $R(z)=z^2+1$
d) $S(z)=z^2+16$ **e)** $T(z)=z^2+3$ **f)** $U(z)=z^2+7$

40 Chaque polynôme ci-dessous est de la forme z^n-a^n. Dans chaque cas, préciser oralement une valeur possible du nombre complexe a.

a) $P(z)=z^3-27$ **b)** $Q(z)=z^4-1$
c) $R(z)=z^6+64$ **d)** $S(z)=z^4-9$

41 Dans chaque cas, factoriser le polynôme P par le polynôme Q. Simplifier autant que possible chaque polynôme qui intervient dans la factorisation.

a) $P(z)=z^3-4^3$ et $Q(z)=z-4$.
b) $P(z)=z^4-3^4$ et $Q(z)=z-3$.
c) $P(z)=z^4-i^4$ et $Q(z)=z-i$.
d) $P(z)=z^6-(2i)^6$ et $Q(z)=z-2i$.

42 P est le polynôme défini sur $\mathbb{C}$ par $P(z)=z^2+4$. Olivia et Nicolas ont utilisé un logiciel de calcul formel pour factoriser ce polynôme. Commenter la différence entre les réponses obtenues.

Olivia :

1	Factoriser(z^2+4)
	$\rightarrow$ z^2+4

Nicolas :

1	FactoriseCI(z^2+4)
	$\rightarrow$ $(z+2\,i)\,(z-2\,i)$

43 P est le polynôme défini sur $\mathbb{C}$ par $P(z)=z^3+8i$.

a) Trouver un nombre complexe a tel que $-a^3=8i$.
b) En déduire une factorisation de P.

44 Factoriser chaque polynôme P par un polynôme de la forme $z-a$.

a) $P(z)=z^3+i$ **b)** $P(z)=z^3+27i$
c) $P(z)=z^3+2\sqrt{2}i$ **d)** $P(z)=z^3-8i$
e) $P(z)=z^3-\frac{1}{8}i$ **f)** $P(z)=z^3-1000i$

45 Factoriser chaque polynôme P par un polynôme de la forme $z-a$, puis déterminer ses racines dans $\mathbb{C}$.

a) $P(z)=z^3-8$ **b)** $P(z)=z^3-125$
c) $P(z)=z^3-3{,}375$ **d)** $P(z)=z^3-\frac{27}{8}$
e) $P(z)=z^3-\frac{1}{64}$ **f)** $P(z)=z^3-\sqrt{8}$

46 **a)** Factoriser le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par $P(z)=z^3-1$, puis déterminer ses racines.
b) Dans le plan complexe, construire les points images des racines de ce polynôme.
c) Quelle est la nature du triangle formé par ces points ? Justifier.

Les racines du polynôme P sont appelées **racines cubiques de l'unité**. Elles seront étudiées dans le chapitre 5.

47 P est le polynôme défini sur $\mathbb{C}$ par $P(z)=z^4-81$.

a) Trouver un nombre réel positif a tel que $a^4=81$.
b) En déduire une factorisation de P.

48 Dans chaque cas, factoriser le polynôme P.

a) $P(z) = z^4 - 1$ **b)** $P(z) = z^4 - 625$ **c)** $P(z) = z^4 - 4$

49 P est le polynôme défini sur $\mathbb{C}$ par $P(z) = z^4 + 4$.

a) Vérifier que $(1+i)^4 = -4$.

b) En déduire une factorisation de P.

c) Avec un logiciel de calcul formel, Noémie a obtenu une autre factorisation de P.

1	Factoriser$(z^4 + 4)$
	$\rightarrow$ $(\mathbf{z^2 - 2\,z + 2})\ (\mathbf{z^2 + 2\,z + 2})$

En déduire les racines du polynôme P.

d) Écrire les racines du polynôme P sous forme exponentielle.

50 Peter et Filip doivent factoriser le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par $P(z) = z^4 - 4$.

Peter : « On peut factoriser par $z - \sqrt{2}$ ».

Filip : « On peut factoriser par $z - i\sqrt{2}$ ».

a) Qui a raison ?

b) Donner la, ou les, factorisations ainsi obtenues.

Factoriser un polynôme par $z - a$

Cours 2

Questions flash — À l'oral

51 Dans chaque cas, vérifier mentalement que 1 est une racine du polynôme.

a) $P(z) = z^2 + z - 2$

b) $Q(z) = 2z^2 + 3z - 5$

c) $R(z) = z^3 + z^2 - 4z + 2$

d) $S(z) = z^3 - 3z^2 + 2z$

52 Dans chaque cas, vérifier mentalement que i est une racine du polynôme.

a) $P(z) = 2z^2 + 2$

b) $Q(z) = z^3 + z^2 + z + 1$

c) $R(z) = 2z^3 - 5z^2 + 2z - 5$

d) $S(z) = z^4 - 5z^2 - 6$

53 Clara affirme : « 1 et -2 sont des racines du polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par $P(z) = z^4 + z^3 - z^2 + z - 2$ ». A-t-elle raison ?

54 Déterminer mentalement une racine évidente de chaque polynôme.

a) $P(z) = z^2 + 1{,}5z - 2{,}5$ **b)** $Q(z) = z^2 - 3z - 10$

c) $R(z) = z^3 + 4z$ **d)** $S(z) = z^3 - 5z^2 - z + 5$

55 Dans chaque cas, vérifier que a est une racine du polynôme P, puis factoriser P par $z - a$.

a) $P(z) = z^2 - 2z - 15$ et $a = 5$

b) $P(z) = 2z^2 + 5z + 2$ et $a = -0{,}5$

c) $P(z) = z^3 - 2z^2 + 3z - 18$ et $a = 3$

56 Dans chaque cas, déterminer les racines du polynôme, puis l'écrire comme un produit de polynômes de degré 1.

a) $P(z) = z^2 + 6{,}5z - 3{,}5$ **b)** $Q(z) = z^2 - 4z + 8$

c) $R(z) = z^2 + 5z + \dfrac{29}{4}$ **d)** $S(z) = z^2 - 2z + 37$

57 Adam affirme « Pour tout complexe z,

$$P(z) = z^3 + 5z^2 - 3z + 2$$
$$P(z) = (z-1)(z^2 - 3z - 2).\text{ »}$$

Michal lui dit : « Il suffit de calculer $P(1)$ pour voir que ta réponse est fausse ». Expliquer.

58 On s'intéresse au polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par :

$$P(z) = z^3 - 2{,}5z^2 + 0{,}5z + 1.$$

Trouver deux racines évidentes et donner dans chaque cas la factorisation correspondante.

59 P est le polynôme défini sur $\mathbb{C}$ par :

$$P(z) = z^3 - 9z^2 + 28z - 30.$$

a) Vérifier que $3 - i$ est une racine du polynôme P.

b) Nathan affirme : « On peut facilement conjecturer une autre racine ». Quelle est cette racine ?

c) Factoriser autant que possible le polynôme P.

60 Jeanne a utilisé un logiciel pour factoriser le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par $P(z) = 2z^3 + 7z^2 + 27z + 12$.

1	Factoriser$(2\,z^3 + 7\,z^2 + 27\,z + 12)$
	$\rightarrow$ $(\mathbf{2\,z + 1})\ (\mathbf{z^2 + 3\,z + 12})$

a) Déduire de cet affichage une racine réelle du polynôme P.

b) Poursuivre la factorisation de P en déterminant ses autres racines.

c) Déterminer le module de chacune des racines de P.

61 Dans chaque cas, vérifier que a est une solution de l'équation puis résoudre cette équation dans $\mathbb{C}$.

a) $z^3 + 9z^2 + 36z + 54 = 0$ et $a = -3$

b) $z^3 - 7z^2 + 14{,}5z - 10 = 0$ et $a = 4$

62 Dans chaque cas, vérifier que a est une solution de l'équation, puis résoudre cette équation dans $\mathbb{C}$.

a) $3z^3 + 5z^2 + 3z + 5 = 0$ et $a = i$

b) $3z^3 - 14z^2 + 23z - 10 = 0$ et $a = 2 - i$

Nombre de racines d'un polynôme

Cours 2

Questions flash À l'oral

63 Dans chaque cas, donner oralement le nombre maximum de racines du polynôme.

$A(z)=5z^2+z-1$ $B(z)=4-3z$

$C(z)=8z^3+z^4-z^2+2$ $D(z)=z^5-1$

$E(z)=4+z+z^3$ $F(z)=9z^2-24z+16$

64 Wandrille affirme : « Les racines du polynôme z^3-z^2+z-1 sont 1, –1, i et $-i$ ».
Que peut-on en penser ?

65 Associer mentalement chaque polynôme à l'ensemble de ses racines.

Les polynômes :

$P(z)=4z^3-7z+3$

$Q(z)=z^4-3z^3+9z^2-27z+40$

$R(z)=3z^2-z+5$

Les ensembles :

$E=\{-1{,}5\,;0{,}5\,;1\}$

$F=\left\{\frac{1}{6}+i\frac{\sqrt{59}}{6}\,;\frac{1}{6}-i\frac{\sqrt{59}}{6}\right\}$

$G=\left\{2+i\,;2-i\,;-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{31}}{2}\,;-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{31}}{2}\right\}$

66 Iona affirme : « D'après un théorème du cours, tout polynôme de degré 1 admet au plus une racine. Mais on sait qu'en fait, tout polynôme de degré 1 admet exactement une racine. »

a) Tester cette affirmation en trouvant la racine de chacun des polynômes suivants :

$P(z)=2z-5$ $Q(z)=iz-1$

$R(z)=5z+3+2i$ $S(z)=(1-i)z+1+i$

b) De manière générale, quelle est la racine du polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par $P(z)=az+b$, avec $a\neq 0$?

67 **a)** D'après le théorème du paragraphe **2. B**, que peut-on dire du nombre de racines d'un polynôme du second degré ?

b) Dans chaque cas, préciser s'il est possible qu'un polynôme du second degré admette exactement les solutions indiquées. Si oui, donner un exemple.

- Deux solutions complexes non réelles
- Deux solutions réelles
- Une solution imaginaire unique
- Aucune solution

68 P et Q sont les polynômes définis sur $\mathbb{C}$ par :

$$P(z)=z-3 \text{ et } Q(z)=z^2-z-6.$$

a) Préciser la racine du polynôme P.

b) Déterminer le nombre de racines du polynôme Q, sans essayer de les déterminer.

c) Romain affirme : « Le polynôme produit $P\times Q$ est de degré 3 et il a trois racines ».
Leonardo le contredit : « Non, le théorème affirme seulement que $P\times Q$ a trois racines au plus. D'ailleurs, il n'en a que deux ».
Qui a raison ?

69 P et Q sont les polynômes définis sur $\mathbb{C}$ par :

$$P(z)=-2z^2+9z-4 \text{ et } Q(z)=6z^2+3z-3.$$

a) Préciser le nombre maximum de racines de chacun des polynômes suivants :

- P
- Q
- $P+Q$
- $3P+Q$
- $P\times Q$

b) Déterminer les racines de chaque polynôme de la question précédente.

70 Floriane affirme : « Si deux polynômes P et Q de degré 2 ont chacun deux racines complexes, alors le polynôme somme $P+Q$ a forcément deux racines lui aussi. »
Cette affirmation est-elle vraie ? Si non, trouver un contre-exemple.

71 P, Q, R sont les polynômes définis sur $\mathbb{C}$ par :

$$P(z)=z^3-6z^2+12z-8\,;$$
$$Q(z)=z^3+8z^2+14z-68\,;$$
$$R(z)=z^3-3z-2.$$

a) Que peut-on dire du nombre de racines de chacun de ces polynômes ?

b) Vérifier que 2 est une racine de chaque polynôme.

c) Factoriser chaque polynôme et déterminer ses racines.

d) Amélie affirme : « Un seul de ces polynômes n'a que des racines réelles. » A-t-elle raison ?

72 Marion devait trouver les racines du polynôme à coefficients complexes défini sur $\mathbb{C}$ par :

$$P(z)=z^3+(1-3i)z^2+(-2-3i)z-2.$$

Voici sa conclusion.

J'ai trouvé les racines –1, i et $2i$.
Je peux donc affirmer qu'il n'y en a pas d'autres.

Vérifier et justifier ses affirmations.

EXO Exercices interactifs

73 QCM **Dans chaque cas, donner la réponse exacte sans justifier.**

		A	B	C	D
1	Une solution de l'équation $z^2+2=0$ dans $\mathbb{C}$ est …	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$1+i$	$i\sqrt{2}$
2	Le discriminant de l'équation $2z^2-z-5=0$ est …	-41	-39	39	41
3	Une solution de l'équation $z^3=-i$ est …	1	-1	i	$-i$
4	On peut factoriser le polynôme P tel que $P(z)=z^3-8$ par …	$z-2$	$z-8$	$z+2$	$z-2i$
5	On peut factoriser le polynôme P tel que $P(z)=z^3-3z^2+9z-27$ par …	z^2	z	$z-3$	$z+3$

74 QCM **Dans chaque cas, donner la ou les réponses exactes sans justifier.**

		A	B	C	D
1	Une racine carrée de -4 dans $\mathbb{C}$ est …	-2	$2i$	$-2i$	16
2	Une solution de l'équation $z^2-8z+20=0$ dans $\mathbb{C}$ est …	$4-2i$	$8+2i$	2	$4+2i$
3	Pour tout complexe z, $z^3-8=(z-2)Q(z)$ avec $Q(z)=$ …	z^2-4	z^2+2z+4	$(z-2)^2$	z^2+4
4	On peut factoriser le polynôme P tel que $P(z)=z^4+6z^2+20z$ par …	z	$z+2$	$z-1-3i$	$z-1+3i$
5	Le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par $P(z)=z^3+z^2+z+1$ admet …	quatre racines	au plus trois racines	-1 pour racine	exactement trois racines

75 Vrai/Faux **Dans chaque cas, dire si l'affirmation est vraie ou fausse en justifiant.**

1 P est le polynôme défini sur $\mathbb{C}$ par $P(z)=2z^3+z^2+2z+1$.
Affirmation : les racines du polynôme P sont $-\frac{1}{2}$, i et $-i$.

2 Q est le polynôme défini sur $\mathbb{C}$ par $Q(z)=z^3+z^2-z-1$.
Affirmation : le polynôme Q a exactement trois racines.

3 **Affirmation :** l'équation $(z-2i)(z^2-5z+9)=0$ a trois solutions imaginaires pures.

4 S est le polynôme défini sur $\mathbb{C}$ par $S(z)=z^4+4$.
Affirmation : pour tout complexe z, on peut factoriser $S(z)$ par $z-(1+i)$.

Vérifiez vos réponses : p. 293

76 Démontrer un théorème du cours

On rappelle le théorème énoncé au paragraphe 2. B.

a est un nombre complexe. Si P est un polynôme tel que $P(a)=0$, alors on peut factoriser $P(z)$ par $z-a$, c'est-à-dire qu'il existe un polynôme Q tel que pour tout complexe z, $\mathbf{P}(z)=(z-\boldsymbol{a})\mathbf{Q}(z)$.

Rédiger la démonstration en suivant le guide ci-dessous.

(1) Fixer les notations : on note P le polynôme défini sur $\mathbb{C}$ par :

$$P(z)=\alpha_n z^n+\dots z^{n-1}+\dots+\dots+\alpha_0$$

(2) Écrire l'expression de $P(a)$: $P(a)=\dots$

(3) Écrire l'expression de $P(z)-P(a)$:

$$P(z)-P(a)=\left(\alpha_n z^n+\dots\right)-(\dots)$$
$$P(z)-P(a)=\alpha_n(\dots)+\alpha_{n-1}(\dots)+\dots+\alpha_1(\dots)$$

(4) Utiliser un théorème énoncé en cours : chacun des polynômes écrits entre parenthèses ci-dessus peut être factorisé par ....

(5) Conclure : on sait que $P(a)=\dots$ donc ....

77 Démontrer à l'aide d'une fonction de la variable réelle

Propriété : Tout polynôme P défini sur $\mathbb{C}$, à coefficients réels et de degré 3, admet au moins une racine réelle.

1. Voici la démonstration de cette propriété.

On note, pour tout complexe z, $P(z)=az^3+bz^2+cz+d$ avec a, b, c, d réels et $a\neq 0$.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$.

- Si $a>0$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$
- Si $a<0$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

$0\in\,]-\infty;+\infty[$, donc **il existe au moins un réel x_0 tel que $f(x_0)=0$.**
De même, $P(x_0)=0$.

Expliquer chacune des expressions écrites en vert.

2. **Applications**

Dans chaque cas, afficher à l'écran de la calculatrice la courbe représentative de la fonction associée au polynôme P sur un intervalle bien choisi et lire graphiquement le nombre de racines réelles du polynôme.

a) $P(z)=2z^3-z^2-25z-12$ **b)** $P(z)=z^3-3z^2-9z+27$ **c)** $P(z)=z^3-6z^2+12z-8$

78 Établir une propriété des racines complexes

P est un polynôme à **coefficients réels** défini sur $\mathbb{C}$ par :

$$P(z)=a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\dots+a_1 z+a_0 \text{ avec } a_n\neq 0.$$

a) Démontrer que pour tout complexe z, $\overline{P(z)}=P(\overline{z})$.

b) Démontrer que si u est une racine non réelle du polynôme P, alors $\overline{u}$ est aussi une racine de P.

c) Quelle propriété peut-on en déduire à propos du nombre de racines non réelles d'un polynôme à coefficients réels ?

Vidéo

JAICOMPRIS.COM

Toutes les démonstrations au programme en vidéo

Liste des démonstrations :

- Factorisation de z^n-a^n par $z-a$.
- Factorisation de $P(z)$ par $z-a$ si $P(a)=0$.
- Le nombre de solutions d'une équation polynomiale est inférieur ou égal à son degré.

Conseil

Pour z_1 et z_2 nombres complexes et λ nombre réel :

$$\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$$
$$\overline{\lambda z}=\lambda\overline{z}$$

Étudier des polynômes de degré 2

Propriétés
P est un polynôme de degré 2 à coefficients réels défini sur $\mathbb{C}$ par $P(z) = az^2 + bz + c$ ($a \neq 0$).
Si z_1 et z_2 sont les racines de P (éventuellement confondues), alors $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$ et $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$.

79 P est un polynôme de degré 2 à coefficients réels défini sur $\mathbb{C}$ par $P(z) = az^2 + bz + c$ ($a \neq 0$).
a) On suppose le discriminant de P strictement négatif, que peut-on dire des racines de P ?
b) On suppose de plus que l'une des racines est le nombre complexe $7 - 3i$. Quelle est l'autre racine ?
c) On pose $a = 1$. Déterminer alors les coefficients b et c.

Pour les exercices 80 et 81, dans chaque cas u est une racine d'un polynôme de degré 2 à coefficients réels de la forme $P(z) = z^2 + bz + c$.
Indiquer l'autre racine de P et en déduire les coefficients b et c.

80 **a)** $u = 1 + 5i$ **b)** $u = 3 - i$

81 **a)** $u = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$ **b)** $u = \sqrt{2}(1 + i)$

Pour les exercices 82 à 84, P est un polynôme défini sur $\mathbb{C}$, à coefficients réels et de degré 2.
a) Déterminer les racines du polynôme P.
b) Calculer la somme et le produit de ces deux racines.
c) Retrouver ces deux racines à l'aide des coefficients du polynôme.

82 $P(z) = 2z^2 - 2z + 5$

83 $P(z) = \frac{1}{2}z^2 - z + 13$

84 $P(z) = -4z^2 + 4z - 10$

85 P est le polynôme défini sur $\mathbb{C}$ par :
$$P(z) = 2z^2 + bz + c \text{ avec } b \text{ et } c \text{ réels.}$$
a) L'une des racines de P est $z_1 = 5 - 6i$.
Quelle est son autre racine ?
b) Calculer le produit $z_1 z_2$, en déduire la valeur du coefficient c.
c) Déterminer également la valeur du coefficient b.

86 P est un polynôme de degré 2 à coefficients réels, dont l'une des racines est le nombre complexe $4 + i$.
a) Indiquer l'autre racine de P.
b) On sait de plus que $P(0) = 34$.
Déterminer l'expression du polynôme P.

87 P est le polynôme défini sur $\mathbb{C}$ par :
$$P(z) = az^2 + bz + 4 \text{ avec } a, b \text{ réels et } a \neq 0.$$
Le nombre complexe $\frac{1}{3} + \frac{5}{3}i$ est une racine de P.
a) Indiquer l'autre racine de P.
b) Déterminer les coefficients a et b du polynôme P.
Conseil : Utiliser la somme et le produit des racines de P ou bien une factorisation de P.

88 P est le polynôme à coefficients complexes défini sur $\mathbb{C}$ par :
$$P(z) = iz^2 - 8iz + 25i.$$
a) Factoriser ce polynôme par un nombre complexe bien choisi.
b) Déterminer les racines du polynôme P.

89 Mélina affirme : « Si un polynôme de degré 2 a deux racines complexes conjuguées, alors ses coefficients sont des nombres réels ».
Héloïse lui répond : « Non, ce n'est pas toujours le cas. Mais c'est vrai si le coefficient de z^2 est égal à 1. »
Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse, puis donner une démonstration ou un contre-exemple.

90 P est le polynôme défini sur $\mathbb{C}$ par :
$$P(z) = z^2 - 2z + 2.$$
a) Déterminer les racines z_1 et z_2 de ce polynôme et les écrire sous forme exponentielle.
b) Dans un repère orthonormé, construire les points images de ces racines.

91 Dans chaque cas, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :
$$z^2 - z\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 0.$$
a) $\alpha = 0$ **b)** $\alpha = \frac{\pi}{3}$ **c)** $\alpha = \frac{3\pi}{4}$

92 Dans chaque cas, déterminer les couples $(z_1 ; z_2)$ de nombres complexes solutions du système.

a) $\begin{cases} z_1 z_2 = 5 \\ z_1 + z_2 = 2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} z_1 z_2 = 4 \\ z_1 + z_2 = 6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} z_1 z_2 = -10 \\ z_1 - z_2 = 2 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 4z_1 z_2 = 5 \\ z_1 + z_2 = 1 \end{cases}$

Étudier des polynômes de degré 3

93 P est le polynôme défini sur $\mathbb{C}$ par :

$$P(z) = z^3 + 2z^2 - 16.$$

a) Vérifier que 2 est une racine de P.

b) En déduire une factorisation du polynôme P, puis déterminer l'ensemble de ses racines.

c) Dans le plan complexe, placer les points images des racines du polynôme.

d) Déterminer la nature du triangle formé par ces points.

Pour les exercices 94 et 95, dans chaque cas, trouver une racine dans $\mathbb{N}$ du polynôme, puis le factoriser et déterminer l'ensemble de ses racines dans $\mathbb{C}$.

94 **a)** $P(z) = 4z^3 + 4z^2 + 2z$

b) $Q(z) = z^3 - 8z^2 + 46z - 68$

95 **a)** $P(z) = 9z^3 - 18z^2 + 25z - 50$

b) $Q(z) = z^3 + z^2 - 2$

96 Yasmina doit résoudre l'équation $z^3 + 1 = 0$.
Voici sa réponse.

Il y a une seule solution réelle : −1.

a) Cette affirmation est-elle correcte ? Justifier.

b) Déterminer toutes les solutions de cette équation.

c) Calculer le module et un argument de chaque solution.

97 P est le polynôme défini sur $\mathbb{C}$ par $P(z) = z^3 - 2\sqrt{2}$.

a) Déterminer les racines du polynôme P.

b) Calculer le module et un argument de chaque racine.

c) Dans le plan complexe, déterminer la nature du triangle formé par les points images des racines du polynôme.

98 P est le polynôme défini sur $\mathbb{C}$ par :

$$P(z) = z^3 - 4z^2 + 8z - 8.$$

a) Vérifier que 2 est une racine de ce polynôme.

b) Factoriser le polynôme P et déterminer ses autres racines complexes.

c) Écrire chacune des racines du polynôme sous forme exponentielle.

99 P est le polynôme défini sur $\mathbb{C}$ par :

$$P(z) = z^3 + 7z^2 + 24z + 18.$$

a) Trouver une racine dans $\mathbb{Z}$ de ce polynôme.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

c) Écrire chacune des solutions obtenues sous forme exponentielle.

100 P est le polynôme défini sur $\mathbb{C}$ par $P(z) = z^3 + 8i$.

a) Que peut-on dire, *a priori*, du nombre de racines de ce polynôme ?

b) Déterminer un nombre complexe a tel que $a^3 = -8i$.

c) En déduire une factorisation de P en un produit de deux polynômes.

d) Développer le produit $\left(z + \sqrt{3} + i\right)\left(z - \sqrt{3} + i\right)$.

e) En déduire les racines du polynôme P et les écrire sous forme exponentielle.

f) Dans le plan complexe, déterminer la nature du triangle formé par les points images des racines du polynôme.

101 n désigne un nombre entier naturel non nul.
Hugo affirme : « On obtient les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^3 - n^3 = 0$ en multipliant par n les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^3 - 1 = 0$ ».

a) Vérifier l'affirmation de Hugo pour $n = 2$.

b) La propriété énoncée par Hugo est-elle vraie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$? Justifier.

102 Pour tout entier relatif n, on considère le polynôme P_n défini sur $\mathbb{C}$ par :

$$P_n(z) = z^3 + nz^2 + z + n.$$

a) Déterminer les racines des polynômes P_0, P_1 et P_{-2}.

b) Démontrer que, pour tout entier relatif n, $-n$ est une racine du polynôme P_n.

c) En déduire une factorisation de P_n, puis l'ensemble des racines de ce polynôme.

103 **1.** Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation :

$$\left(iz + 1 + i\sqrt{3}\right)\left(z^2 - 2z + 4\right) = 0$$

et donner les solutions sous forme algébrique.

2. On considère les nombres complexes :

$$a = 1 + i\sqrt{3} \text{ et } b = -\sqrt{3} + i.$$

On note A et B les points d'affixes respectives a et b dans le plan complexe.

a) Déterminer une forme exponentielle de a, puis de b.

b) Placer les points A et B (*unité* : 3 cm).

c) Démontrer que le triangle OAB est rectangle isocèle, où O est l'origine du repère.

d) Le point K est le milieu du segment [AB].
Placer K et déterminer son affixe k.

3. On considère le nombre complexe :

$$c = \left(1 - \sqrt{3}\right) + i\left(1 + \sqrt{3}\right).$$

On note C le point du plan complexe d'affixe c.

a) Montrer que K est le milieu du segment [OC], puis placer C.

b) Démontrer que le quadrilatère OACB est un carré.

Étudier des polynômes de degré 4

104 P est le polynôme défini sur $\mathbb{C}$ par :
$$P(z) = z^4 - 9.$$
a) Déterminer deux racines réelles de ce polynôme.
b) En déduire une factorisation du polynôme en un produit de trois polynômes à coefficients réels.
c) Déterminer l'ensemble des racines du polynôme P.
d) Quelle est la nature du polygone formé par les points images des racines de ce polynôme dans le plan complexe ?

105 P est le polynôme défini sur $\mathbb{C}$ par $P(z) = z^4 + 4$.
a) Vérifier que $(1+i)^4 = -4$ et en déduire une factorisation du polynôme P.
b) Q est le polynôme de degré 3 qui intervient dans la factorisation trouvée à la question **a)**. Vérifier que $1-i$ est une racine de Q, puis en déduire une factorisation de Q et une nouvelle factorisation du polynôme P.
c) Déterminer l'ensemble des racines du polynôme P.
d) Quelle est la nature du quadrilatère formé par les points images des racines de ce polynôme dans le plan complexe ?

106 P est le polynôme défini sur $\mathbb{C}$ par :
$$P(z) = z^4 + z^3 + 6z^2 + z + 5.$$
a) Vérifier que $P(i) = 0$ et factoriser le polynôme P.
b) Q est le polynôme de degré 3 qui intervient dans la factorisation trouvée à la question **a)**. Vérifier que $-i$ est une racine de Q et en déduire une factorisation de Q, puis une nouvelle factorisation du polynôme P.
c) R est le polynôme de degré 2 qui intervient dans la factorisation de Q trouvée à la question **b)**.
Déterminer les racines du polynôme R.
d) Écrire l'ensemble des racines du polynôme P.

107 P est le polynôme défini sur $\mathbb{C}$ par :
$$P(z) = z^4 - 14z^3 + 53z^2.$$
a) Trouver une factorisation évidente de P comme produit de deux polynômes.
b) Déterminer les racines de chacun de ces deux polynômes.
c) Terminer alors la factorisation du polynôme P.

108 P est le polynôme défini sur $\mathbb{C}$ par :
$$P(z) = z^4 - 19z^2 + 52z - 40.$$
Résoudre l'équation $P(z) = 0$ après avoir déterminé les réels a et b tels que pour tout complexe z,
$$P(z) = \left(z^2 + az + b\right)\left(z^2 + 4z + 2a\right).$$

109 **a)** Développer le produit :
$$\left(z^2 + 3z + 1\right)\left(z^2 - z + 6\right).$$
b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :
$$z^4 + 2z^3 + 4z^2 + 17z + 6 = 0.$$

110 P est le polynôme défini sur $\mathbb{C}$ par :
$$P(z) = z^4 + 324.$$
a) Vérifier que $3 - 3i$ est une racine de P.
En déduire sans calcul une autre racine complexe de P.
b) Déterminer un polynôme Q de degré 2 qui admet $3 - 3i$ et $3 + 3i$ pour racines.
c) Déterminer une factorisation du polynôme P en produit de deux polynômes du second degré.
d) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.
e) Écrire chacune des racines de P sous forme exponentielle.

S'entraîner à la logique → p. 290

111 **Implication et équivalence**

P et Q sont deux polynômes à coefficients réels définis sur $\mathbb{C}$ et u désigne un nombre complexe.
Dans chaque cas, dire :
– si la proposition M implique la proposition N ;
– si les propositions M et N sont équivalentes.
a) M : « u est une racine de P ».
N : « $\overline{u}$ est une racine de P ».
b) M : « u est une racine de Q ».
N : « $2u$ est une racine de Q ».
c) M : « u est une racine des polynômes P et Q ».
N : « u est une racine du polynôme P + Q ».
d) M : « u est une racine de l'un des deux polynômes P et Q ».
N : « u est une racine du polynôme $P \times Q$ ».

112 **Contre-exemple**

Repérer les énoncés faux et donner dans ce cas un contre-exemple.
a) Toute équation du second degré dans $\mathbb{C}$ admet exactement deux solutions.
b) Toute équation du cinquième degré dans $\mathbb{C}$ admet au moins une solution réelle.
c) Tout réel est solution d'une équation de la forme $z^2 - k = 0$, avec $k \in \mathbb{R}$.
d) i n'est racine d'aucune équation de la forme $z^n + i = 0$ où $n \in \mathbb{N}$.

113 Se ramener à une équation

Problème ouvert

Raisonner | Communiquer

Est-il possible que le double d'un nombre complexe z soit égal à l'opposé de son inverse ? Si oui, quels sont les nombres complexes qui vérifient cette propriété.

114 Imaginer une stratégie

Chercher | Calculer

P est le polynôme défini sur $\mathbb{C}$ par $P(z) = z^3 - 2z^2 + z - 2$.

a) Factoriser le polynôme P et déterminer l'ensemble de ses racines.

b) Résoudre dans $\mathbb{C} - \{-1\}$ l'équation :

$$\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 - 2\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2 + \left(\frac{z-1}{z+1}\right) - 2 = 0.$$

115 Prendre des initiatives

Représenter | Calculer

F est la fonction du plan complexe dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M′ d'affixe :

$$z' = z^3 - 3z^2 + 4z.$$

Déterminer l'ensemble des points invariants par la fonction F.

116 Étudier une famille de polynômes

Raisonner | Calculer

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, P_n est le polynôme défini sur $\mathbb{C}$ par :

$$P_n(z) = z^n - i^n.$$

a) Déterminer un nombre complexe racine de tous les polynômes P_n.

b) Factoriser le polynôme P_n pour $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$.

c) Pour quelles valeurs de n, le nombre complexe $-i$ est-il une racine de P_n ?

117 Trouver un polynôme

Narration de recherche

Chercher | Calculer | Communiquer

Rédiger les différentes étapes de la recherche, sans omettre les fausses pistes et les changements de méthode.

Problème

Trouver un polynôme de degré 4 à coefficients réels dont les racines vérifient les propriétés suivantes :

- deux racines sont des nombres imaginaires purs ;
- deux racines ont une partie réelle strictement positive ;
- toutes les racines ont un module égal à 5.

118 Finding a polynomial

Raisonner | Calculer | Communiquer

a) Consider the complex number $u = 5 + i$.

Find a polynomial with real coefficients and leading coefficient equal to 1 whose roots are $u, \bar{u}, -u$ and $-\bar{u}$.

b) Let $v = a + ib$ with a, b two real numbers.

Find a polynomial with real coefficients and leading coefficient equal to 1 whose roots are $v, \bar{v}, -v$ and $-\bar{v}$.

Give its algebraic expression using a and b.

119 Trouver toutes les racines

Raisonner | Communiquer

P est le polynôme défini sur $\mathbb{C}$ par :

$$P(z) = z^3 + (-5 + 3i)z^2 + (10 - 3i)z - 8 - 6i.$$

a) Déterminer une racine réelle et une racine imaginaire pure de ce polynôme.

b) En déduire une factorisation du polynôme P et résoudre l'équation $P(z) = 0$.

120 Algo python

Comprendre une fonction Python

Chercher | Raisonner

P est un polynôme à coefficients réels défini sur $\mathbb{C}$ par :

$$P(z) = z^3 + bz^2 + cz + d.$$

s est une racine réelle du polynôme P. Voici une fonction **Factorisation** écrite en langage Python.

```
1 def Factorisation(s,b,c,d):
2     if s==0:
3         m=b
4         n=c
5     else:
6         m=b+s
7         n=-d/s
8     return m,n
```

On exécute cette fonction avec différentes valeurs données aux paramètres.

```
>>> Factorisation(1,1,-1,-1)
(2, 1.0)
>>> Factorisation(2,0,0,-8)
(2, 4.0)
```

1. a) Pour chacune des exécutions, préciser le polynôme P et la racine s. En déduire une factorisation de P.

b) Que représentent les variables m et n renvoyées par la fonction **Factorisation**.

c) Expliquer le rôle du test de la ligne 2.

2. Justifier les formules des lignes 6 et 7 du programme.

3. Tester la fonction avec d'autres exemples.

121 Utiliser des informations

Représenter | Raisonner | Calculer

P est un polynôme de degré 3 à coefficients réels qui possède les propriétés suivantes :

- l'une des racines de P est le nombre complexe :

$$z_1 = 2\sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}} ;$$

- P admet une racine réelle positive ;
- dans le plan complexe, les points images des racines de P appartiennent à un même cercle.

a) Déterminer les deux autres racines de ce polynôme.

b) Déterminer la nature du triangle formé par les points images des racines du polynôme P.

122 Factoriser un polynôme

Raisonner | Calculer

P est le polynôme défini sur $\mathbb{C}$ par :

$$P(z) = z^3 + 2 - 2i.$$

a) Calculer $(1+i)^3$.

b) En déduire une factorisation du polynôme P.

c) On pose :

$$b = \frac{-\sqrt{3}-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2} \quad \text{et} \quad c = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + i\frac{-\sqrt{3}-1}{2}.$$

Calculer b^3 et c^3, puis proposer une factorisation complète du polynôme P.

123 Utiliser des racines évidentes

Raisonner | Calculer

P est le polynôme défini sur $\mathbb{C}$ par :

$$P(z) = z^4 + 3z^3 - 6{,}75z^2 - 15{,}75z + 18{,}5.$$

a) P admet deux racines dans $\mathbb{N}$. Les déterminer.

b) En déduire une factorisation du polynôme P en produit de trois polynômes.

c) Déterminer l'ensemble des racines de P.

124 Travailler dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$

Raisonner | Communiquer

f et g sont deux fonctions définies sur $\mathbb{C}$ par :

$$f(z) = z^3 + 2z^2 + 5z - 3$$
$$\text{et } g(z) = z^3 + z^2 + 3z - 10.$$

a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = g(z)$.

b) Afficher à l'écran de la calculatrice, dans un même repère, les courbes d'équations $y = x^3 + 2x^2 + 5x - 3$ et $y = x^3 + x^2 + 3x - 10$.

Conjecturer le nombre de points d'intersection de ces deux courbes.

c) Démontrer cette conjecture à l'aide de la question **a)**.

125 Déterminer un polynôme

Raisonner | Calculer

Trouver un polynôme P à coefficients réels dont les racines sont cinq nombres complexes de la forme ki où le nombre entier relatif k prend cinq valeurs consécutives.

126 Utiliser des formes exponentielles

Raisonner | Calculer

P est le polynôme de degré 2 défini sur $\mathbb{C}$ par :

$$P(z) = z^2 + bz + c$$

où b et c sont des nombres réels.

Déterminer la valeur de c sachant que l'une des racines complexes de P a pour forme exponentielle :

$$(c-1)e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

127 Manipuler des coefficients complexes

Raisonner | Calculer

P est un polynôme de degré 2 défini sur $\mathbb{C}$ par :

$$P(z) = z^2 + bz + c$$

où b et c sont des nombres complexes.

a) On suppose que les racines de P sont i et $2i$.

Déterminer b et c.

b) Plus généralement, on suppose que les racines de P sont ki et $(k+1)i$ avec $k \in \mathbb{N}$.

Démontrer que c est un nombre entier négatif et pair.

128 Démontrer par récurrence

Raisonner | Calculer

1. a et z désignent deux nombres complexes.

On se propose de démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $n \geqslant 2$,

$$z^n - a^n = (z-a)\left(z^{n-1} + az^{n-2} + \ldots + a^{n-2}z + a^{n-1}\right).$$

a) Vérifier que l'égalité est vraie pour $n = 2$.

b) On suppose l'égalité vraie pour un entier naturel k, $k \geqslant 2$.

Vérifier que :

$$z^{k+1} - a^{k+1} = z\left(z^k - a^k\right) + a^k(z-a).$$

En déduire que l'égalité est vraie pour $k+1$.

c) Conclure le raisonnement.

2. n désigne un nombre entier naturel, $n \geqslant 2$.

Démontrer que toute solution u (avec $u \neq 1$) dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = 1$ vérifie :

$$1 + u + u^2 + \ldots + u^{n-1} = 0.$$

129 Résoudre une équation de degré 6

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^6 = 1$.

130 Racines carrées d'un nombre complexe, équations du second degré à coefficients complexes

Partie A : racines carrées d'un nombre complexe

1. On se propose de résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (**E**) : $z^2 = -5 + 12i$.
On pose $z = x + iy$ avec x et y nombres réels.

a) Démontrer que z est solution de (**E**) si, et seulement si, $\begin{cases} x^2 - y^2 = -5 \\ xy = 6 \end{cases}$

b) Calculer $|-5 + 12i|$. Démontrer que si z est solution de (**E**), alors $x^2 + y^2 = 13$.

c) Justifier alors que z est solution de (**E**) si, et seulement si, $\begin{cases} x^2 - y^2 = -5 \\ x^2 + y^2 = 13. \\ xy = 6 \end{cases}$

d) Résoudre le système obtenu.
En déduire que l'équation (**E**) admet deux solutions complexes opposées. Donner ces deux solutions.

Les solutions de l'équation $z^2 = -5 + 12i$ sont appelées **racines carrées** du nombre complexe $-5 + 12i$.

De façon générale, tout nombre complexe non nul admet deux racines carrées, distinctes et opposées.

Pour tout réel $a \geqslant 0$, $\sqrt{a}$ désigne **le** nombre positif dont le carré est a.
Or, un complexe non nul admet deux racines carrées.
Ainsi, s'interdit-on d'écrire $\sqrt{-5+12i}$.

2. Dans chaque cas, déterminer les racines carrées du nombre complexe.
a) $8i$ **b)** $-3 + 4i$ **c)** $45 - 28i$

Partie B : équations du second degré à coefficients complexes

1. On se propose de résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (**E**) : $az^2 + bz + c = 0$ où a, b, c sont des nombres complexes avec $a \neq 0$.
a) Démontrer que l'équation (**E**) est équivalente à l'équation $\left(z + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = \dfrac{\Delta}{4a^2}$ où $\Delta = b^2 - 4ac$ est le discriminant de (**E**).
b) On suppose $\Delta = 0$.
Montrer que l'équation (**E**) a une seule solution ; l'exprimer en fonction de a et b.
c) On suppose $\Delta \neq 0$.
Montrer que l'équation (**E**) a deux solutions.
On note δ et $-\delta$ les racines carrées du nombre complexe Δ.
Exprimer les deux solutions de (**E**) en fonction de a, b et δ.

La situation du cours **1. B** est le cas particulier où les coefficients a, b, c sont réels avec $a \neq 0$.

2. On se propose de résoudre l'équation ($\mathbf{E_1}$) : $z^2 - (1+i)z + 2 + 2i = 0$.
a) Δ est le discriminant de ($\mathbf{E_1}$), vérifier que $\Delta = -8 - 6i$.
b) Démontrer que les racines carrées de Δ sont $1 - 3i$ et $-1 + 3i$.
c) Terminer la résolution de l'équation ($\mathbf{E_1}$).

3. Dans chaque cas, résoudre l'équation :
a) $z^2 - (2 - i)z - 2i = 0$
b) $z^2 - (5 - 14i)z - 2(12 + 5i) = 0$
c) $iz^2 - z + 3i = 0$

131 Résolution par radicaux de l'équation de degré 3

HISTOIRE DES MATHS

Au 16e siècle, les mathématiciens italiens imaginent des méthodes de résolution des équations de degré 3 de la forme (**E**) : $x^3 = px + q$ où p et q sont des nombres réels.

Partie A : équations de la forme $x^3 = px + q$

(**E**) est l'équation $x^3 = px + q$ avec p et q nombres réels.

1. a) x, u et v sont des nombres réels tels que $x = u + v$.
Justifier que $x^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u + v)$.

b) Démontrer que si le couple $(u\,;v)$ vérifie le système $\begin{cases} u^3 + v^3 = q \\ 3uv = p \end{cases}$, alors x est solution de (**E**).

c) On pose $\mathrm{U} = u^3$ et $\mathrm{V} = v^3$.
Démontrer que si U et V sont solutions de l'équation du second degré (**E′**) : $\mathrm{X}^2 - q\mathrm{X} + \dfrac{p^3}{27} = 0$, alors x est une solution de (**E**).

2. Un premier exemple

On s'intéresse à l'équation $(\mathbf{E_1}) : x^3 = 18x + 35$.

a) Préciser les valeurs des coefficients p et q.

b) Écrire, dans ce cas, l'équation du second degré $(\mathbf{E_1'})$. Résoudre cette équation.

c) En déduire alors une solution de l'équation $(\mathbf{E_1})$.

d) Justifier que l'équation $(\mathbf{E_1})$ n'a pas d'autre solution réelle.

3. Un deuxième exemple

On s'intéresse à l'équation $(\mathbf{E_2}) : x^3 = 30x - 36$.

a) Préciser les valeurs des coefficients p et q.

b) Écrire, dans ce cas, l'équation du second degré $(\mathbf{E_2'})$.

c) Justifier que l'équation $(\mathbf{E_2'})$ a deux solutions complexes conjuguées. Les donner.

Les mathématiciens de l'époque ne connaissent pas les nombres complexes, ils poursuivent tout de même leurs calculs et manipulent ces nouveaux nombres.

d) Vérifier que $(-3 + i)^3 = -18 + 26i$ et $(-3 - i)^3 = -18 - 26i$.

e) Quelle solution réelle de l'équation $(\mathbf{E_2})$ obtient-on de cette façon ?

f) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(\mathbf{E_2})$.

Partie B : équations de la forme $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$

1. (**F**) est l'équation $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ où a, b et c sont des nombres réels.

a) On effectue le changement d'inconnue $y = x + \dfrac{a}{3}$.
Écrire l'équation (**F′**) d'inconnue y ainsi obtenue.

b) Montrer que l'équation (**F′**) est de la forme $y^3 = py + q$ avec p et q réels.

2. Un exemple

On s'intéresse à l'équation $(\mathbf{F_1}) : x^3 + 9x^2 + 12x - 22 = 0$.

a) Appliquer le changement d'inconnues indiqué à la question **B. 1. a)**.
Quelle équation $(\mathbf{F_1'})$ obtient-on ?

b) Résoudre l'équation $(\mathbf{F_1'})$.
En déduire les solutions de l'équation $(\mathbf{F_1})$.

132 Formules de Viète : relations entre coefficients et racines

n désigne un nombre entier naturel tel que $n \geqslant 2$. Pour n nombres complexes z_1, z_2, …, z_n, le ***k*-ième nombre symétrique élémentaire** ($1 \leqslant k \leqslant n$), noté σ_k, est la somme de tous les produits possibles de k de ces nombres.

1. P est un polynôme défini sur $\mathbb{C}$ par $P(z) = az^2 + bz + c$ avec a, b, c dans $\mathbb{C}$ et $a \neq 0$.
On note z_1 et z_2 les racines (éventuellement confondues) de P.
Ainsi, $\sigma_1 = z_1 + z_2$ et $\sigma_2 = z_1 z_2$.
Écrire les relations entre σ_1, σ_2 et les coefficients de P.

2. P est un polynôme défini sur $\mathbb{C}$ par $P(z) = az^3 + bz^2 + cz + d$ avec a, b, c, d dans $\mathbb{C}$ et $a \neq 0$. On note z_1, z_2, z_3 les racines, dont certaines sont éventuellement égales, de P.
Ainsi, $\sigma_1 = z_1 + z_2 + z_3$, $\sigma_2 = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1$ et $\sigma_3 = z_1 z_2 z_3$.
a) Écrire une factorisation du polynôme P.
b) Établir alors les relations entre σ_1, σ_2, σ_3 et les coefficients de P.

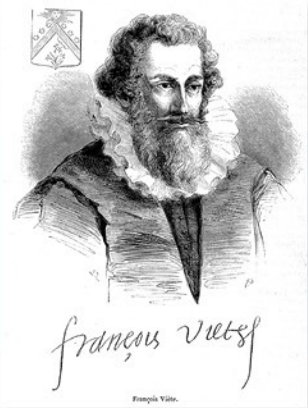
3. P est un polynôme défini sur $\mathbb{C}$ par $P(z) = az^4 + bz^3 + cz^2 + dz + e$ avec a, b, c, d, e dans $\mathbb{C}$ et $a \neq 0$.
On note z_1, z_2, z_3, z_4 les racines, dont certaines sont éventuellement égales, de P.
a) Écrire les quatre nombres symétriques élémentaires σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 que l'on peut former à partir de z_1, z_2, z_3, z_4.
b) Établir les relations entre ces nombres et les coefficients du polynôme P.

- Les relations entre les nombres σ_k et les coefficients de P sont appelées formules de Viète.
- Le nombre de termes de la somme σ_k est le nombre de combinaisons de k éléments parmi n.

4. Applications
a) P est le polynôme défini sur $\mathbb{C}$ par $P(z) = z^3 + bz^2 + cz - 20$ avec b et c dans $\mathbb{R}$.
L'une des racines de P est $1 - 2i$. En déduire une autre racine de P.
À l'aide des relations entre nombres symétriques élémentaires et coefficients de P, déterminer la troisième racine de P et les valeurs des coefficients b et c.
b) Q est le polynôme défini sur $\mathbb{C}$ par $Q(z) = z^4 + bz^3 + cz^2 + dz + e$ avec b, c, d, e dans $\mathbb{R}$. On connaît deux racines de ce polynôme : $2 + i$ et $3i$.
Déterminer les deux autres racines de Q, puis les valeurs de ses coefficients.

HISTOIRE DES MATHS

François Viète est un mathématicien français de la fin du 16e siècle. Il s'intéresse en particulier à la résolution des équations algébriques et aux relations entre coefficients et racines de ces équations.



133 Division des polynômes

P et S sont deux polynômes à coefficients réels et S n'est pas le polynôme nul.

On démontre qu'il existe un unique couple $(Q\,;R)$ de polynômes tels que :

$$P = S \times Q + R$$

où le degré de R est strictement inférieur au degré de S lorsque R n'est pas le polynôme nul.

L'opération qui au couple $(P\,;S)$ associe le couple $(Q\,;R)$ est appelée **division euclidienne** du polynôme P par le polynôme S.

Les polynômes Q et R sont respectivement appelés le **quotient** et le **reste** de cette division.

1. Un exemple

P et S sont les polynômes définis sur $\mathbb{C}$ par :

$$P(z) = 2z^4 + 3z - 5 \text{ et } S(z) = z^2 + 2.$$

Dans la suite, z désigne un nombre complexe.

a) Par quel terme multiplier z^2 pour obtenir $2z^4$?

Multiplier le polynôme S par ce terme et soustraire le résultat au polynôme P. On obtient un polynôme R_1.

b) Par quel terme multiplier z^2 pour obtenir le terme de plus haut degré de R_1 ?

Multiplier le polynôme S par ce terme et soustraire le résultat au polynôme R_1.

On obtient un polynôme R_2.

c) Vérifier que le degré de R_2 est strictement inférieur au degré de S.

d) On présente cette division de la façon suivante :

$$\begin{array}{llr|l}
2z^4 & & +3z-5 & z^2+2 \\ \cline{4-4}
-(2z^4 & +4z^2) & & 2z^2-4 \\ \cline{1-3}
 & -4z^2 & +3z-5 & \\
 & -(-4z^2 & -8) & \\ \cline{1-3}
 & & 3z+3 &
\end{array}$$

Grâce à cette division, on définit comme dans l'ensemble $\mathbb{Z}$ des nombres entiers relatifs, une arithmétique des polynômes.

Quel est le polynôme reste de cette division ?

Quel est le polynôme quotient de cette division ?

Écrire la relation entre P, S, Q et R.

2. Dans chaque cas, effectuer la division du polynôme P par le polynôme S.

a) $P(z) = z^2 + 5z + 5$ et $S(z) = z + 2$

b) $P(z) = z^2 + 4z + 1$ et $S(z) = z - 1$

c) $P(z) = z^3 + z^2 + z$ et $S(z) = z^2 + 1$

d) $P(z) = 2z^3 + 4z + 2$ et $S(z) = z^2 - z$

134 Le théorème du reste

P désigne un polynôme à coefficients réels et a un nombre réel.

Le théorème du reste énonce que le reste de la division du polynôme P par le polynôme $z - a$ est égal à $P(a)$.

1. Un exemple

P est le polynôme défini sur $\mathbb{C}$ par :

$$P(z) = z^3 + 2z - 6.$$

Dans chaque cas, vérifier le théorème du reste.

a) $a = 1$ **b)** $a = -2$ **c)** $a = 0$

2. Q est le polynôme défini sur $\mathbb{C}$ par :

$Q(z) = z^3 + kz - 6$ où k est un nombre réel.

a) Utiliser le théorème du reste pour déterminer la valeur de k telle que le polynôme Q soit divisible par $z - 1$.

b) Avec la valeur de k trouvée, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Q(z) = 0$.

3. R est le polynôme défini sur $\mathbb{C}$ par :

$$R(z) = 2z^3 + az^2 + bz + 12$$

où a et b sont des nombres réels.

On sait que le polynôme R est divisible par $z + 2$ et que le reste de la division de R par $z - 1$ est -4.

a) Déterminer les valeurs des coefficients a et b.

b) Avec les valeurs de a et b trouvées, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $R(z) = 0$.

Des Défis

135 Décomposer une solution

Trouver deux nombres complexes distincts de même module dont la somme est solution de l'équation :

$$z^2 - 36z + 468 = 0.$$

136 Factoriser un polynôme de degré 8

a est un nombre complexe.

Factoriser le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par $P(z) = z^8 - a^8$ en un produit de six polynômes de degrés inférieurs ou égaux à 2.

137 Résoudre une équation de degré 6

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(z-1)^6 + (z-1)^3 + 1 = 0.$$