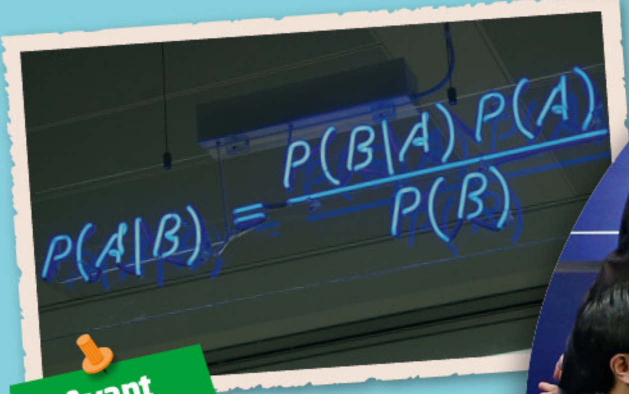
11 Probabilités conditionnelles et indépendance



Avant

▶ Juste avant sa mort, en 1761, le mathématicien britannique Thomas Bayes a laissé à un ami ses dernières recherches. Elles poseront les bases des probabilités conditionnelles. Ci-dessus, le théorème de Bayes éclairé au néon dans les locaux de Cambridge.

À présent

▶ L'inférence bayésienne est une méthode de probabilité basée sur la formule de Bayes. Utilisée dans le domaine de l'intelligence artificielle, elle permet aux machines d'apprendre, par déduction, grâce aux observations antérieures ou à des bases de données préexistantes.

Les capacités travaillées dans ce chapitre	Exercices
• Comprendre et utiliser la probabilité conditionnelle d'un événement B sachant qu'un événement A est réalisé.	1, 3, 9, 12, 13, 17 à 22
• Comprendre et reconnaître l'indépendance de deux événements.	2, 4, 23 à 25, 27 à 31
• Utiliser un arbre pondéré ou un tableau croisé.	10, 11, 14 à 16, 26
• Utiliser la formule des probabilités totales.	6, 8, 32 à 43
• Étudier la succession de deux épreuves indépendantes.	5, 7, 44 à 50

1 Probabilités conditionnelles

On s'intéresse aux 500 derniers véhicules neufs vendus dans une région selon le type d'énergie utilisée.

	Éthanol	Non éthanol	Total
Électrique	39		65
Non électrique	46		
Total			500

1 Recopier et compléter le tableau croisé ci-dessus.

2 **a)** On choisit au hasard la fiche de l'un de ces véhicules. Quelle est la probabilité :
- p_1 que ce véhicule fonctionne à l'éthanol ?
- p_2 que ce véhicule ait un fonctionnement hybride (électrique et éthanol) ?

b) On choisit au hasard la fiche de l'un des véhicules qui fonctionne à l'électricité. Quelle est la probabilité p_3 que ce véhicule fonctionne à l'éthanol ?

3 On considère les événements :
A : « Le véhicule choisi fonctionne à l'électricité » et B : « Le véhicule choisi fonctionne à l'éthanol ».

a) Exprimer p_1 et p_2 comme des probabilités d'événements.

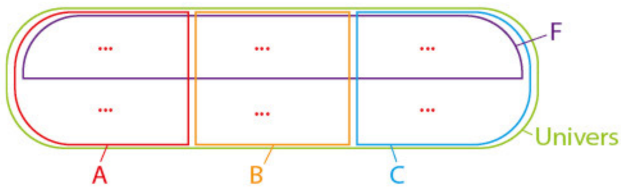
b) La probabilité p_3 est appelée **probabilité conditionnelle de B sachant A** et est notée $\mathbf{P_A(B)}$.
Imaginer une formule donnant p_3 en fonction de p_1 et p_2.

2 Formule des probabilités totales

Voici la répartition des 115 adhérents de l'association sportive d'un lycée selon le sexe et le sport pratiqué.

	Nombre d'adhérents	Pourcentage de filles
Athlétisme	55	20 %
Badminton	30	80 %
Canoë	30	50 %

On choisit au hasard la fiche d'inscription de l'un des adhérents et on considère les événements :
F : « L'adhérent choisi est une fille » ;
A : « L'adhérent choisi pratique l'athlétisme » ;
B : « L'adhérent choisi pratique le badminton » ;
C : « L'adhérent choisi pratique le canoë ».



1 **a)** Recopier et compléter ce diagramme avec les effectifs correspondants.

b) Déterminer P(F) sous forme fractionnaire.

2 **a)** Décrire les événements : • $A \cap B$ • $A \cap C$ • $B \cap C$ • $A \cup B \cup C$

On dit que les événements A, B, C forment une **partition** de l'univers de cette expérience.

b) Déterminer sous forme fractionnaire : • $P(F \cap A)$ • $P(F \cap B)$ • $P(F \cap C)$

c) Calculer $P(F \cap A) + P(F \cap B) + P(F \cap C)$. Qu'obtient-on ?

1 Conditionnement et indépendance

Une loi de probabilité P est définie sur l'univers E d'une expérience aléatoire.

A Probabilité de B sachant A

Définition

A et B sont deux événements, avec $P(A) \neq 0$.

La probabilité de l'événement B sachant A, notée $P_A(B)$, est définie par $\mathbf{P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}}$.

Remarque : si $P(B) \neq 0$, on définit de même la probabilité de l'événement A sachant B par $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Exemple

Un service après-vente a constaté que les retours d'un appareil sont dûs dans 30 % des cas à une panne A, dans 40 % des cas à une panne B et dans 3 % des cas à la simultanéité des deux pannes.
Un appareil choisi au hasard présente la panne A. La probabilité pour qu'il ait aussi la panne B est :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0{,}03}{0{,}3} = 0{,}1$$

B Probabilité de $A \cap B$

Propriété

A et B sont deux événements avec $P(A) \neq 0$.
La probabilité de l'intersection des événements A et B est :

$$\mathbf{P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)}$$

Remarque : si $P(B) \neq 0$, on a de façon analogue $P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A)$.

Exemple

40 % des chiens d'un éleveur sont des labradors. Les femelles représentent 65 % des labradors et 45 % des autres chiens. On choisit au hasard le carnet de santé de l'un des chiens de l'éleveur et on note A l'événement : « Le chien est un labrador » et B l'événement : « Le chien est une femelle ».
Ainsi $P(A) = 0{,}4$ et $P_A(B) = 0{,}65$. La probabilité de $A \cap B$: « Le chien est un labrador femelle » est :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = 0{,}4 \times 0{,}65 = 0{,}26$$

C Indépendance de deux événements

Définition

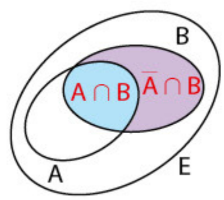
Dire que des événements A et B sont **indépendants** signifie que $\mathbf{P(A \cap B) = P(A) \times P(B)}$.

Propriété

Si deux événements A et B sont indépendants, alors les événements $\overline{A}$ et B le sont aussi.

Démonstration

D'après le diagramme ci-contre :
$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$, soit $P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$.
Or A et B sont indépendants, c'est-à-dire $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.
Par conséquent, $P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A) \times P(B) = (1 - P(A)) \times P(B) = P(\overline{A}) \times P(B)$.
Ainsi, les événements $\overline{A}$ et B sont aussi indépendants.



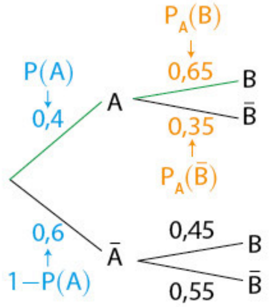
2 Arbres pondérés

Une loi de probabilité P est définie sur l'univers E d'une expérience aléatoire.

A Arbre pondéré par des probabilités

Exemple

On reprend l'exemple du paragraphe **B** page 262. On peut représenter cette expérience par l'arbre pondéré ci-dessous réalisé en respectant certaines règles.



- **Règle 1** Sur les branches du 1er niveau, on inscrit les probabilités des événements correspondants.
- **Règle 2** Sur les branches du 2e niveau, on inscrit des probabilités conditionnelles.
- **Règle 3** La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est toujours égale à 1.

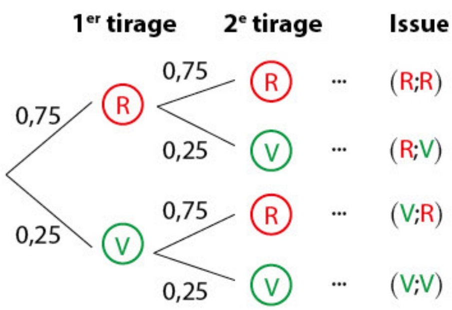
Remarque : le produit des probabilités des événements rencontrés le long d'un chemin est égal à la probabilité de l'intersection de ces événements.
Par exemple, pour le chemin vert, on retrouve $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = 0{,}4 \times 0{,}65 = 0{,}26$.

B Succession de deux épreuves indépendantes

Vocabulaire :
Dans une succession de deux épreuves, lorsque l'issue de l'une quelconque de ces épreuves ne dépend pas des issues de l'autre épreuve, on dit que ces épreuves sont **indépendantes**.

Exemple

Une urne opaque contient trois boules rouges et une boule verte. On prélève, au hasard et **avec remise**, deux boules de cette urne et on note les couleurs obtenues.



Une succession de deux branches est appelée un **chemin**. Chaque chemin conduit à une issue.

Propriété (admise)

Dans une répétition d'épreuves **indépendantes**, la probabilité d'une issue est le **produit** des probabilités rencontrées sur le chemin qui conduit à cette issue.

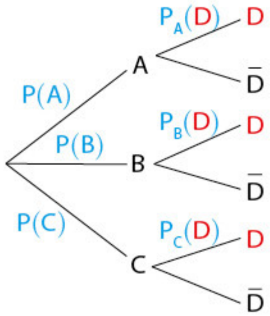
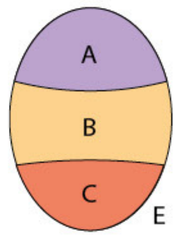
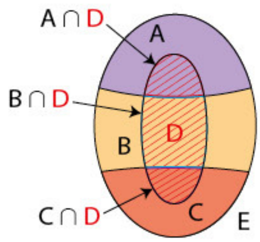
Exemple

L'issue $(R\,;V)$ a pour probabilité $P(R\,;V) = 0{,}75 \times 0{,}25 = 0{,}1875$.

3 Probabilités totales

Une loi de probabilité P est définie sur l'univers E d'une expérience aléatoire.

A Calcul d'une probabilité à l'aide d'une partition

<table>
<tr><td rowspan="2">Si une expérience aléatoire conduit à un arbre pondéré tel que celui-ci, …</td><td colspan="2">alors les événements A, B, C (1^{er} niveau de branches) forment une partition de l'univers E.</td></tr>
<tr><td>Cela signifie que :
$A \cap B = \varnothing$, $A \cap C = \varnothing$,
$B \cap C = \varnothing$ et $A \cup B \cup C = E$.</td><td>Cette partition induit une partition des événements D et $\overline{D}$ du 2^e niveau de branches.</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Ainsi $D = (A \cap D) \cup (B \cap D) \cup (C \cap D)$ et les événements $A \cap D$, $B \cap D$ et $C \cap D$ sont deux à deux incompatibles, donc :

$$\mathbf{P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) + P(C \cap D)}$$

Or, on sait que $P(A \cap D) = P(A) \times P_A(D)$, $P(B \cap D) = P(B) \times P_B(D)$, $P(C \cap D) = P(C) \times P_C(D)$, donc :

$$\mathbf{P(D) = P(A) \times P_A(D) + P(B) \times P_B(D) + P(C) \times P_C(D)}$$

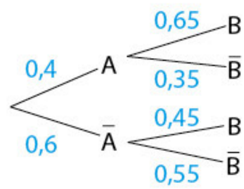
Ainsi, on peut calculer la probabilité d'un événement connaissant ses probabilités conditionnelles relatives à une partition de l'univers.

Propriété

Sur un arbre pondéré, la probabilité d'un événement D écrit à plusieurs extrémités du dernier niveau de branches est la somme des probabilités des chemins qui conduisent à D.
Cette propriété est connue sous le nom de **formule des probabilités totales**.

B Un exemple

On reprend l'exemple du paragraphe B page 262 pour lequel on a obtenu l'arbre pondéré ci-contre.



La probabilité que le chien choisi soit une femelle est :

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) = 0{,}4 \times 0{,}65 + 0{,}6 \times 0{,}45 = 0{,}53$$

Remarque : connaissant P(B), on peut calculer les probabilités suivantes :

- $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0{,}4 \times 0{,}65}{0{,}53}$ soit $P_B(A) \approx 0{,}491$;
- $P_{\overline{B}}(A) = \dfrac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \dfrac{0{,}4 \times 0{,}35}{1 - 0{,}53}$ soit $P_{\overline{B}}(A) \approx 0{,}298$.

EXERCICES RÉSOLUS

1 Calculer et interpréter des probabilités conditionnelles → Cours 1. A et B

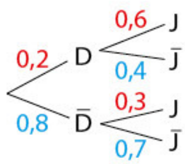
Une administration emploie 20 % de C.D.D. (Contrat à Durée Déterminée).
60 % des C.D.D. et 30 % des C.D.I. (Contrat à Durée Indéterminée) ont moins de 30 ans.
Dans la base de données des employés, on tire au hasard le nom de l'un des employés.
On note D l'événement : « L'employé est en C.D.D. » et J l'événement : « L'employé a moins de 30 ans ».

a) Traduire les données en termes de probabilités, en utilisant les événements D et J.

b) Déterminer la probabilité que l'employé choisi soit en C.D.D. et ait moins de 30 ans.

Solution

a) L'administration emploie 20 % de C.D.D., donc $P(D) = 0{,}2$.
60 % des C.D.D. ont moins de 30 ans, donc $P_D(J) = 0{,}6$.
30 % des C.D.I. ont moins de 30 ans, donc $P_{\overline{D}}(J) = 0{,}3$.

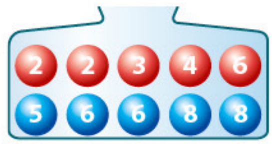


Pour étudier de telles situations, on les représente à l'aide d'un arbre pondéré. On reporte sur les branches les probabilités connues puis on complète par les probabilités sur les autres branches.

b) « L'employé est en C.D.D. et a moins de 30 ans » est l'événement $D \cap J$.
Sa probabilité est $P(D \cap J) = P(D) \times P_D(J) = 0{,}2 \times 0{,}6 = 0{,}12$.

2 Justifier l'indépendance de deux événements → Cours 1. C

On prélève au hasard une boule de l'urne ci-contre et on considère les événements A : « La boule prélevée est rouge » et B : « La boule prélevée porte un numéro impair ».
Justifier que les événements A et B sont indépendants.



Solution

- Il y a cinq boules rouges dans l'urne donc $P(A) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$.
- Deux boules portent des numéros impairs (3 et 5) donc $P(B) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$.
- L'événement $A \cap B$ est réalisé par le tirage d'une boule rouge portant un numéro impair (c'est la boule 3).
Donc $P(A \cap B) = \frac{1}{10}$.
- Or, $P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{10}$.
Ainsi, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ donc les événements A et B sont indépendants.

Pour démontrer que les événements A et B sont indépendants :
– on détermine les probabilités $P(A)$, $P(B)$ et $P(A \cap B)$;
– on compare le produit $P(A) \times P(B)$ à $P(A \cap B)$;
– en cas d'égalité, A et B sont indépendants. Sinon ils sont **dépendants**.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 1

3 On reprend la situation de l'exercice 1.
Déterminer la probabilité que l'employé choisi soit en C.D.I. et ait plus de 30 ans.

Sur le modèle de l'exercice résolu 2

4 On reprend la situation de l'exercice 2.
Les événements B et C : « La boule prélevée porte un numéro inférieur ou égal à 5 » sont-ils indépendants ?

EXERCICES RÉSOLUS

5 Répéter deux épreuves indépendantes

→ Cours 2. B

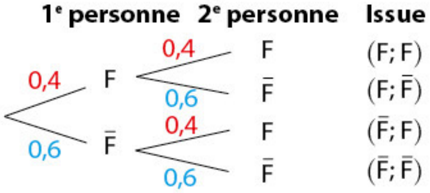
40 % des abonnés à un club de gymnastique sont des femmes. Parmi les fiches d'inscription des adhérents au club, on tire au hasard, successivement et avec remise, deux personnes et on note leur sexe.

a) Représenter cette situation par un arbre pondéré.

b) Déterminer la probabilité p d'obtenir un homme et une femme.

Solution

a) On note F l'événement : « La personne choisie est une femme ».



Les issues d'une succession de deux épreuves sont des couples, donc les issues $(F\,;\bar{F})$ et $(\bar{F}\,;F)$ sont distinctes.

b) La probabilité cherchée est $p = P(F\,;\bar{F}) + P(\bar{F}\,;F) = 0{,}4 \times 0{,}6 + 0{,}6 \times 0{,}4 = 0{,}48$.

6 Utiliser la formule des probabilités totales

→ Cours 3. A

Dans un jeu de stratégie, un joueur peut choisir entre deux armées, l'une rouge, l'autre bleue.
Il choisit l'armée rouge dans 75 % des cas. S'il choisit l'armée rouge, il gagne la partie dans 65 % des cas et s'il choisit l'armée bleue, il gagne la partie dans 30 % des cas.
On note G l'événement : « Le joueur a gagné la partie » et R (resp. B) l'événement : « Le joueur a choisi l'armée rouge (resp. bleue) ». Le joueur a gagné la partie.
Quelle est la probabilité qu'il ait choisi l'armée rouge ? *Arrondir au millième.*

Solution

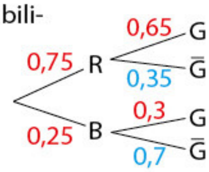
Les événements R et B forment une partition de l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales :

$P(G) = P(R) \times P_R(G) + P(B) \times P_B(G)$

$P(G) = 0{,}75 \times 0{,}65 + 0{,}25 \times 0{,}3 = 0{,}562\,5$

On en déduit que :

$$P_G(R) = \frac{P(R \cap G)}{P(G)} = \frac{P(R) \times P_R(G)}{P(G)} = \frac{0{,}75 \times 0{,}65}{0{,}562\,5}$$



La probabilité que le joueur ait choisi l'armée rouge sachant qu'il a gagné est environ 0,867.

On doit calculer la probabilité que le joueur ait choisi l'armée rouge sachant qu'il a gagné, c'est-à-dire $P_G(R)$.
Or, on ne connaît pas $P(G)$, d'où l'idée de commencer par déterminer $P(G)$.
On s'aide d'un arbre pondéré par les probabilités.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 5

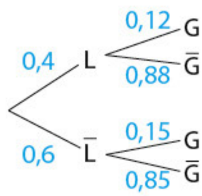
7 On lance deux fois de suite une pièce truquée de sorte que la probabilité d'obtenir Pile est $\frac{3}{5}$.

a) Représenter cette situation par un arbre pondéré.

b) Calculer la probabilité d'obtenir les deux côtés de la pièce.

Sur le modèle de l'exercice résolu 6

8 Une situation est représentée par cet arbre pondéré.
Déterminer $P(G)$ puis $P_G(L)$.



Conditionnement par un événement

→ Cours 1. A, B et 2. A

Questions Flash

Pour les exercices 9 et 10, on choisit une personne au hasard dans la liste des élèves d'un lycée. On considère les événements :
A : « L'élève choisi est une fille » ;
B : « L'élève choisi est en classe de Première ».

9 Traduire oralement en langage naturel :
a) $P_A(B)$ **b)** $P_B(A)$

10 Voici l'arbre pondéré associé à cette situation.

- ... A
  - ... B
  - ... $\overline{B}$
- ... $\overline{A}$
  - ... B
  - ... $\overline{B}$

Traduire en termes de probabilités :
a) la branche verte,
b) la branche rouge,
c) le chemin bleu.

Pour les exercices 11 à 13, A et B sont deux événements d'une expérience aléatoire d'univers E.

11 Voici un arbre pondéré par des probabilités.

- 0,3 A
  - 0,6 B
  - 0,4 $\overline{B}$
- 0,7 $\overline{A}$
  - 0,1 B
  - 0,9 $\overline{B}$

Dans chaque cas, choisir la bonne réponse.
a) $P_A(B)$ est égal à : **(1)** 0,7 **(2)** 0,1 **(3)** 0,6
b) $P_{\overline{A}}(\overline{B})$ est égal à : **(1)** 0,9 **(2)** 0,1 **(3)** 0,6
c) $P(A \cap B)$ est égal à : **(1)** 0,9 **(2)** 0,18 **(3)** 0,7

12 **a)** $P(A) = 0{,}6$ et $P(A \cap B) = 0{,}3$.
Quentin : « J'en déduis que $P_A(B) = \frac{1}{2}$. »
A-t-il raison ?
b) $P(A) = 0{,}5$ et $P(A \cap B) = 0{,}35$.
Nadia : « J'en déduis que $P_A(B) = \frac{5}{35}$. »
A-t-elle raison ?

13 Dans chaque cas, calculer mentalement $P(A \cap B)$.
a) $P(A) = 0{,}2$ et $P_A(B) = 0{,}5$.
b) $P(B) = 0{,}1$ et $P_B(A) = 0{,}85$.

14 Fin 2018, la liste des 30 footballeurs nominés pour le Ballon d'or récompensant le meilleur joueur de football a donné la répartition suivante.

Club \ Nationalité	France	Autre pays	**Total**
Real Madrid F.C.	2	6	8
Autres clubs	5	17	22
Total	7	23	30

On choisit au hasard la fiche de l'un des nominés.
Arrondir les probabilités au millième si besoin.
a) Calculer la probabilité que ce joueur joue au Real Madrid.
b) Le joueur choisi joue au Real Madrid F.C.
Calculer la probabilité que ce joueur soit Français.
c) Le joueur choisi est Français.
Calculer la probabilité qu'il ne joue pas au Real Madrid.

15 A et B sont deux événements d'un univers E.
a) Donner chacune des probabilités :
- $P(A)$ • $P(\overline{A})$
- $P(A \cap B)$ • $P(\overline{A} \cap \overline{B})$
- $P_A(B)$ • $P_{\overline{A}}(\overline{B})$

	A	$\overline{A}$	**Total**
B	5 %	30 %	35 %
$\overline{B}$	15 %	50 %	65 %
Total	20 %	80 %	100 %

b) Reproduire et compléter l'arbre pondéré ci-dessous.

- ... A
  - ... B
  - ... $\overline{B}$
- ... $\overline{A}$
  - ... B
  - ... $\overline{B}$

16 Voici un arbre pondéré par des probabilités.

- 0,1 A
  - 0,4 B
  - 0,6 $\overline{B}$
- 0,9 $\overline{A}$
  - 0,8 B
  - 0,2 $\overline{B}$

a) Calculer les probabilités :
- $P(A \cap B)$ • $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ • $P(A \cap \overline{B})$

b) Reproduire et compléter le tableau ci-dessous avec des pourcentages.

	A	$\overline{A}$	**Total**
B	...	...	...
$\overline{B}$	...	...	...
Total	...	...	...

17 Pour des raisons sanitaires, une municipalité a recensé les chiens du village.

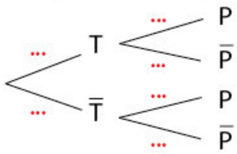
- 80 % sont traités contre les puces ;
- 30 % des chiens traités contre les puces ont des puces ;
- 5 % des chiens non traités contre les puces n'ont pas de puces.

Dans la liste des chiens de ce village, on en choisit un au hasard et on note :

T l'événement : « Le chien est traité contre les puces » ;

P l'événement : « Le chien a des puces ».

a) Reproduire et compléter l'arbre pondéré ci-dessous.



b) Calculer et interpréter pour cette situation les probabilités des événements suivants :

- $T \cap \overline{P}$
- $\overline{T} \cap P$

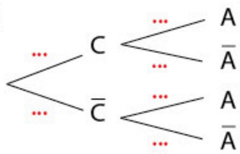
18 On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes.

C est l'événement : « La carte tirée est un cœur » ;

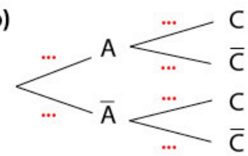
A est l'événement : « La carte tirée est un as ».

1. Reproduire et compléter chacun des arbres ci-dessous.

a)



b)

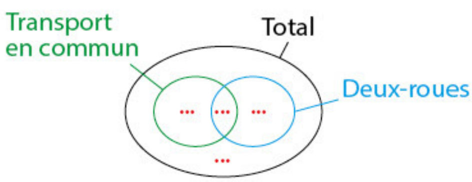


2. Calculer et interpréter $P(A \cap C)$, puis $P(\overline{A} \cap C)$.

19 On a interrogé 1 200 lycéens sur les moyens de transport utilisés pour venir au lycée.

750 utilisent les transports en commun, 260 utilisent un deux-roues et 50 utilisent les deux.

a) Reproduire et compléter par des effectifs le diagramme ci-dessous.



b) On choisit au hasard la fiche d'un des élèves.

L'élève choisi utilise les transports en commun.

Déterminer la probabilité qu'il utilise aussi un deux-roues.

c) L'élève choisi utilise un deux-roues.

Déterminer la probabilité qu'il n'utilise pas les transports en commun.

20 Chaque année, une entreprise reçoit des CV pour des stages. Cette année, 40 % des CV sont ceux de filles. Parmi les CV des filles, 60 % ont été acceptés ; parmi ceux des garçons, 50 % ont été acceptés.

On choisit au hasard l'un des CV reçus par l'entreprise cette année.

On note F l'événement : « Le CV choisi est celui d'une fille » et A l'événement : « Le CV choisi a été accepté ».

a) Représenter cette situation par un arbre pondéré.

b) Calculer et interpréter pour cette situation les probabilités :

- $P(\overline{F} \cap A)$
- $P(\overline{A} \cap F)$

21 L'Office National des Forêts (ONF) a recensé les arbres d'une forêt de montagne.

50 % des arbres sont des mélèzes, 40 % des sapins et le reste sont des épicéas.

Suite à une tempête, un garde forestier a constaté que 20 % des mélèzes, 15 % des sapins et 30 % des épicéas ont subi des dommages et doivent être abattus.

On choisit au hasard l'un des arbres recensés de cette forêt.

On considère les événements :

M (resp. S ; resp. E) : « Le résineux choisi est un mélèze (resp. un sapin ; resp. un épicéa) » ;

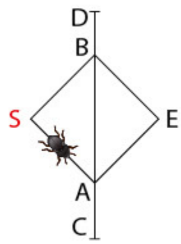
A : « Le résineux choisi doit être abattu ».

a) Représenter cette situation par un arbre pondéré.

b) Calculer et interpréter pour cette situation les probabilités :

- $P(M \cap A)$
- $P(E \cap \overline{A})$

22 Un scarabée part de S et se déplace sur les segments de la figure ci-contre.



Le scarabée met une minute pour parcourir chaque segment, quelle que soit sa longueur.

Chaque fois qu'il arrive en un point, il choisit un nouveau segment au hasard, et peut donc éventuellement rebrousser chemin.

1. Le scarabée se trouve au point A.

Quelle est la probabilité qu'il se déplace ensuite vers le point B ?

2. a) Construire un arbre pondéré qui décrit tous les trajets de 2 min possibles.

b) Quelle est la probabilité qu'après 2 min, le scarabée soit au point B ?

Événements indépendants

→ Cours 1. C et 2

Questions flash

Une loi de probabilité P est définie sur l'univers E d'une expérience aléatoire.

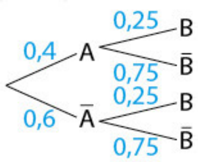
23 A et B sont deux événements indépendants tels que $P(A) = 0{,}8$ et $P(B) = 0{,}2$.
Alicia affirme : « L'événement $A \cap B$ est l'événement certain. » Que peut-on en penser ?

24 A et B sont deux événements.
Dans chaque cas, indiquer, sans justifier et sans calculatrice, s'ils sont indépendants.
a) $P(A) = 0{,}5$, $P(B) = 0{,}4$ et $P(A \cap B) = 0{,}3$
b) $P(A) = 0{,}7$, $P(B) = 0{,}5$ et $P(A \cap B) = 0{,}35$
c) $P(A) = 0{,}7$, $P(B) = 0{,}8$ et $P(A \cap B) = 0{,}56$

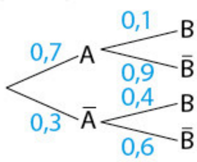
Pour les exercices 25 et 26, A et B sont deux événements d'une expérience aléatoire munie d'une loi de probabilité P.

25 $P(A) = 0{,}5$; $P(B) = 0{,}4$; $P(A \cup B) = 0{,}7$.
a) Calculer $P(A \cap B)$.
b) Les événements A et B sont-ils incompatibles ?
c) Les événements A et B sont-ils indépendants ?

26 Dans chaque cas, dire si A et B sont indépendants.
a) $P(A \cup B) = 0{,}55$



b) $P(A \cup B) = 0{,}82$



27 On lance simultanément deux dés équilibrés à six faces, l'un rouge, l'autre vert, et on considère les événements :
A : « La somme des nombres obtenus est 7 » ;
B : « On a obtenu le 3 au moins une fois ».
a) Les événements A et B sont-ils incompatibles ?
b) Les événements A et B sont-ils indépendants ?

28 Une secrétaire dispose de deux téléphones indépendants. Elle a remarqué que sur une durée d'une heure, le premier a une probabilité de sonner égale à 0,6 et le second égale à 0,7.
Déterminer la probabilité que, dans l'heure qui vient, la secrétaire ne soit pas dérangée par le téléphone.

29 A et B sont deux événements d'un univers E muni d'une loi de probabilité P.
Sachant que $P(A) = \frac{1}{4}$ et $P(A \cup B) = \frac{1}{3}$, déterminer $P(B)$ lorsque :
a) A et B sont incompatibles ;
b) A et B sont indépendants.

30 On fait l'hypothèse que chacun des moteurs d'un ancien bi-moteur tombe en panne avec une probabilité égale à 0,000 1 et ceci d'une façon indépendante l'un de l'autre.

De plus, l'avion est conçu pour pouvoir continuer à voler avec un seul moteur.
Calculer la probabilité qu'il arrive à bon port.

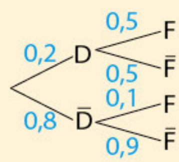
31 Un hôpital comporte deux salles d'opération qui ont la même probabilité d'être occupées. La probabilité que l'une des salles au moins soit occupée est 0,9 ; celle que toutes les deux soient occupées est 0,5.
1. Calculer la probabilité :
a) que la première salle soit libre ;
b) qu'une seule salle soit libre.
2. Les événements A : « La première salle est occupée » et B : « La seconde salle est occupée » sont-ils indépendants ? Justifier.

Formule des probabilités totales

→ Cours 3

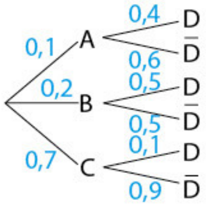
Questions flash

32 Voici un arbre pondéré par des probabilités associé à une expérience aléatoire.
Calculer mentalement :
- $P(D \cap F)$
- $P(\overline{D} \cap F)$
- $P(F)$
- $P(\overline{F})$



33 Un univers E est muni d'une loi de probabilité.
A, B, C sont trois événements qui forment une partition de E.
D est un événement de E.
a) $P(D \cap A) = 0{,}3$; $P(D \cap B) = 0{,}4$; $P(D \cap C) = 0{,}08$.
Laïla : « J'en déduis que $P(D) = 0{,}78$. »
A-t-elle raison ?
b) $P(D) = 0{,}85$; $P(D \cap A) = 0{,}1$; $P(D \cap C) = 0{,}02$.
Victor : « J'en déduis que $P(D \cap B) = 0{,}97$. »
A-t-il raison ?

34 A, B, C, D sont des événements d'une expérience aléatoire munie d'une loi de probabilité P.



Déterminer :

a) $P(A \cap D)$ **b)** $P(D)$ **c)** $P_D(A)$

35 Dans une ville, 80 % des habitations sont des appartements et le reste sont des maisons.

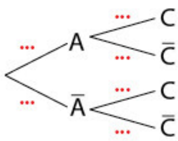
Les trois quarts des appartements et 90 % des maisons comportent au moins 5 pièces.

On choisit au hasard une habitation dans cette ville et on considère les événements :

A : « L'habitation choisie est un appartement » ;

C : « L'habitation choisie comporte au moins 5 pièces ».

a) Reproduire et compléter cet arbre pondéré par des probabilités.



b) Calculer $P(C)$.

c) En déduire $P_C(A)$.

Interpréter pour cette situation.

36 Un avion vient d'atterrir à Orly avec 280 passagers à bord dont 196 Français. Parmi les Français, un quart parle couramment espagnol ; parmi les étrangers, un tiers parle couramment espagnol.

On choisit au hasard un passager dans la liste d'embarquement et on considère les événements :

F : « Le passager est Français » ;

E : « Le passager parle couramment espagnol ».

a) Représenter la situation par un arbre pondéré.

b) Calculer la probabilité de chacun des événements :

- A : « Le passager est un Français parlant couramment espagnol »,
- B : « Le passager parle couramment espagnol ».

c) Le passager choisi parle couramment espagnol. Calculer la probabilité qu'il soit Français.

37 Une urne contient deux boules rouges et trois boules bleues.

On choisit, au hasard et sans remise, deux boules de cette urne et on note leur couleur.

a) Représenter la situation par un arbre pondéré.

b) Calculer la probabilité que la deuxième boule tirée soit bleue.

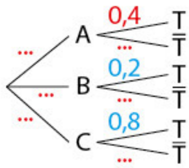
38 Une entreprise est composée de trois services A, B, C d'effectifs respectifs 450, 230 et 320 employés.

On choisit au hasard la fiche d'un des employés et on considère les événements :

A (resp. B ; resp. C) : « L'employé fait partie du service A (resp. B ; resp. C) » ;

T : « L'employé réside à moins de 30 min de l'entreprise ».

a) Interpréter par une phrase la probabilité indiquée en rouge sur cet arbre pondéré.



b) Reproduire et compléter cet arbre.

c) Justifier que $P(T) = 0{,}482$.

d) Déterminer et interpréter $P_T(B)$.

39 Dans un atelier, 2 % des pièces produites sont défectueuses. On constate qu'au cours du contrôle qualité, si la pièce est bonne, elle est acceptée dans 96 % des cas et que si elle est défectueuse, elle est refusée dans 98 % des cas.

a) Représenter cette situation par un arbre pondéré.

b) Donner la probabilité qu'une pièce soit refusée.

c) Quelle est la probabilité qu'il y ait une erreur dans le contrôle d'une pièce ?

40 Voici la répartition de la population de trois pays d'Europe du Nord en 2017 selon la Banque mondiale.

	Finlande	Norvège	Suède
Nombre d'habitants (en millions)	5,5	5,3	10
Proportion des moins de 15 ans (en %)	16,4	17,8	17,5

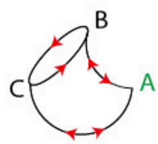
On choisit au hasard un habitant de l'un de ces pays.

a) Quelle est la probabilité qu'il ait moins de 15 ans ?

b) Cet habitant a moins de 15 ans.

Quelle est la probabilité qu'il soit Suédois ?

41 Un robot part du point A et effectue deux déplacements le long des chemins en suivant les flèches rouges.



On admet que lorsqu'il se trouve en un point, il choisit son chemin de manière équiprobable.

a) Représenter la situation par un arbre pondéré.

b) Calculer la probabilité qu'il se retrouve au point A à l'issue de ses deux déplacements.

42 Un test est mis en place pour évaluer l'efficacité d'un médicament sur un échantillon d'individus ayant un taux de glycémie anormalement élevé.
50 % des individus prennent le médicament, les autres reçoivent un placebo.
On constate une baisse significative du taux de glycémie pour 80 % des individus ayant pris le médicament et pour 10 % des individus ayant pris le placebo.
On tire au hasard la fiche de l'une des personnes de cet échantillon.
Calculer la probabilité que son taux de glycémie ait baissé de façon significative.

43 52 % des candidats d'un concours sont des filles.
39 % des candidats sont des filles qui seront admises.
70 % des garçons qui se présentent sont admis.
On choisit au hasard un candidat qui se présente à ce concours. Déterminer la probabilité :
a) qu'une fille qui se présente soit admise ;
b) que ce candidat soit admis.

Succession de deux épreuves indépendantes

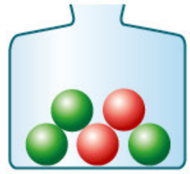
→ Cours 2. B

Questions Flash

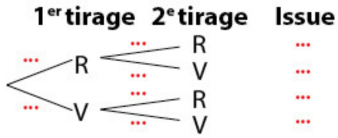
44 On lance deux fois de suite un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
On note les numéros obtenus.
Dans chaque cas, choisir la bonne réponse.
a) La probabilité d'obtenir un double 6 est égale à :
(1) $\frac{1}{6}$ **(2)** $\frac{1}{36}$ **(3)** $\frac{1}{30}$
b) La probabilité d'obtenir un 5 et un 6 est égale à :
(1) $\frac{2}{36}$ **(2)** $\frac{1}{36}$ **(3)** $\frac{1}{15}$
c) La probabilité d'obtenir 6 au second lancer est égale à :
(1) $\frac{1}{36}$ **(2)** $\frac{5}{36}$ **(3)** $\frac{1}{6}$

45 10 % des appareils d'une chaîne de fabrication présentent un défaut A.
On prélève au hasard et avec remise deux appareils.
Dans chaque cas, dire si l'affirmation est exacte.
a) La probabilité que les deux appareils présentent le défaut A est égale à 0,1.
b) La probabilité qu'aucun des deux appareils ne présente le défaut A est égale à 0,81.

46 Une urne opaque contient trois boules vertes (V) et deux boules rouges (R).



On extrait au hasard, successivement et avec remise, deux boules de cette urne et on note les couleurs obtenues.
a) Reproduire et compléter l'arbre pondéré ci-dessous.



b) Calculer la probabilité de chacun des événements :
A : « Les deux boules sont de la même couleur » ;
B : « L'une au moins des boules est verte ».

47 Alice demande à deux amies, sans se concerter, de choisir un chiffre entre 1 et 7 et de le garder secret.
Alice affirme : « Vous avez toutes les deux choisi un chiffre pair. »
a) Représenter la situation par un arbre pondéré.
b) Quelle est la probabilité qu'Alice ait raison ?

48 Les probabilités de sortie des numéros d'un dé truqué à quatre faces sont indiquées ci-dessous.

On lance ce dé deux fois de suite et on note, pour chaque lancer, le numéro vertical sur les trois faces visibles.

Numéro	1	2	3	4
Probabilité	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

a) Représenter la situation par un arbre pondéré.
b) Quelle est la probabilité que les numéros obtenus soient identiques ?

49 Sohan a dans sa poche trois pièces de 1 € : une provenant d'Allemagne (A), une d'Espagne (E) et une de France (F). Il tire au hasard, successivement et avec remise, deux pièces de sa poche.
Calculer la probabilité que les deux pièces proviennent de pays différents.

50 Sur le trajet d'un automobiliste se trouvent deux feux tricolores de circulation. Ces feux fonctionnent de façon indépendante et le cycle de chacun d'eux est réglé ainsi :
- vert : 35 s
- orange : 5 s
- rouge : 20 s

Calculer la probabilité que l'automobiliste croise un feu vert et un feu orange.

QCM interactifs

Pour se tester

51 Dans chaque cas, donner la réponse exacte sans justifier.

Chaque semaine, Émilie achète au hasard un jeu d'argent à gratter. Elle tire le jeu A quatre fois sur cinq et le jeu B une fois sur cinq. Elle a 12 % de chances de gagner avec le jeu A et 8 % avec le jeu B.

		A	B	C	D
1	La probabilité qu'Émilie tire le jeu A et gagne est …	0,12	0,48	0,96	0,096
2	La probabilité qu'Émilie gagne est …	0,56	0,2	0,112	0,16
3	Émilie a gagné. La probabilité qu'elle ait tiré le jeu A est environ …	0,857	0,214	0,48	0,011
4	Les événements « Tirer le jeu A » et « Gagner » sont …	indépendants	incompatibles	indépendants et incompatibles	ni indépendants ni incompatibles

52 Dans chaque cas, donner la (ou les) réponse(s) exacte(s) sans justifier.

		A	B	C	D
1	On prélève au hasard la fiche de l'une des personnes interrogées dont les réponses sont indiquées ci-dessous. Alors …	$P(S) = 0{,}7$	$P(\overline{F}) = 0{,}44$	$P(S \cup F) = \dfrac{21}{25}$	$P(H \cap \overline{S}) = \dfrac{4}{25}$
2	(voir tableau ci-dessous)	$P_S(F) = 0{,}6$	$P_F(S) = 0{,}75$	$P_H(\overline{S}) = \dfrac{4}{11}$	$P_{\overline{S}}(H) = \dfrac{4}{11}$
3	La probabilité pour un archer d'atteindre la cible est 0,8. Il vise deux fois la cible ; les tirs sont indépendants. La probabilité pour qu'il atteigne …	deux fois la cible est 0,64	exactement une fois la cible est 0,32	zéro fois la cible est 0,36	au moins une fois la cible est 0,96

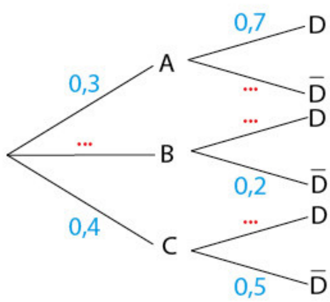
	Sportif (S)	Non sportif ($\overline{S}$)
Femme (F)	21	7
Homme (H)	14	8

53 Dans chaque cas, dire si l'affirmation est vraie ou fausse en justifiant.

A, B, C, D sont des événements d'une expérience aléatoire munie d'une loi de probabilité P.
Voici un arbre pondéré par des probabilités.

Affirmations :

1. $P(B) = 0{,}3$
2. $P_C(D) = 0{,}6$
3. $P(B \cap D) = 0{,}24$
4. $P(D) = 0{,}65$
5. $P(\overline{D}) = 0{,}45$
6. $P_D(A) = \dfrac{21}{65}$
7. $P_{\overline{D}}(B) = \dfrac{6}{35}$
8. Les événements A et D sont indépendants.



Vérifiez vos réponses : p. 340

Nathan live!

54 Comprendre les informations données dans un énoncé

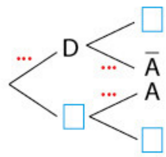
Un vaccin contre une maladie contagieuse n'est pas toujours totalement efficace.
Une étude réalisée sur un grand nombre d'individus a montré que :
(1) 30 % de la population est vaccinée ;
(2) un individu vacciné contracte la maladie dans un cas sur cinq ;
(3) un individu non vacciné contracte la maladie dans un cas sur trois.
On choisit au hasard un individu de la population.
On note V l'événement : « L'individu choisi est vacciné » et M l'événement : « L'individu choisi est malade ».
Traduire en termes de probabilités chacune des phrases **(1)**, **(2)**, **(3)**. Donner les probabilités correspondantes.

AIDE

La phrase **(2)** signifie que « Sachant qu'un individu est vacciné, la probabilité qu'il soit malade est $\frac{1}{5}$ ».

55 Traduire une situation par un arbre

Dans un atelier, 1 % des pièces produites sont défectueuses. Au cours du contrôle qualité, on constate que si la pièce est bonne, elle est acceptée dans 97 % des cas et que si elle est défectueuse, elle est refusée dans 95 % des cas.



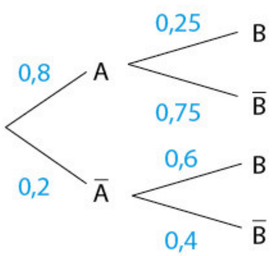
On choisit au hasard une pièce produite par cet atelier et on considère les événements :
D : « La pièce choisie est défectueuse » ;
A : « La pièce est acceptée au contrôle ».
a) Recopier cet arbre pondéré et compléter les cases bleues par les événements manquants.
Compléter les pointillés rouges par les probabilités citées dans l'énoncé.
Compléter ensuite les probabilités manquantes sur les autres branches.
b) Déterminer la probabilité $P(D \cap A)$, c'est-à-dire que la pièce choisie soit défectueuse et acceptée au contrôle malgré tout.

AIDE

Pour calculer la probabilité de $D \cap A$, on multiplie les probabilités rencontrées sur le chemin passant par D et A.

56 Utiliser la formule des probabilités totales

On choisit au hasard un touriste sur la liste des résidents d'un camping.
On considère les événements :
A : « Le touriste est Français » ;
B : « Le touriste parle anglais ».
Cet arbre pondéré donne des informations sur cette expérience aléatoire.
Déterminer la probabilité que le touriste choisi parle anglais c'est-à-dire $P(B)$.



AIDE

Sur un arbre pondéré, lorsqu'un événement B figure aux extrémités de plusieurs branches du 2^{e} niveau, sa probabilité est la somme des probabilités des chemins qui mènent à B.

EXERCICE RÉSOLU

57 Étudier une marche aléatoire

Un lapin se déplace sur une rangée de 5 cases numérotées de 0 à 4.

À partir de sa position initiale, la case 0, il effectue un parcours défini par l'algorithme ci-contre.

La variable p de cet algorithme a pour valeur le numéro de la case où se trouve le lapin.

a) Expliquer le déplacement du lapin.

b) Quelle est la probabilité que le lapin termine son parcours sur la case numéro 3 ?

```
p ← 0
Pour i allant de 1 à 2
    a ← un nombre aléatoire de [0 ; 1[
    Si a < 2/3 alors
        p ← p + 2
    sinon
        p ← p + 1
    Fin Si
Fin Pour
```

Solution

a) La boucle « Pour i allant de 1 à 2 » indique que le lapin effectue deux déplacements.

Pour chaque déplacement, un nombre aléatoire a est tiré dans l'intervalle $[0\,;1[$.

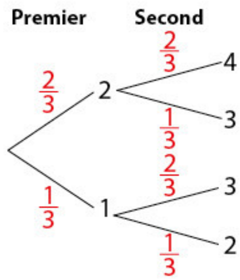
Si $a < \frac{2}{3}$, le lapin avance de deux cases sinon il avance d'une seule case.

b) L'arbre pondéré par les probabilités ci-contre indique les numéros des cases où le lapin peut se situer après chaque déplacement.

La probabilité que le lapin termine son parcours sur la case numéro 3 est donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$$

On fait fonctionner l'algorithme étape par étape et on suit les valeurs successives prises par la variable p.



À VOTRE TOUR

58 On reprend l'exercice **57** et on modifie les règles de déplacement.

Le lapin a maintenant autant de chances d'avancer d'une seule case que de deux cases.

a) Réécrire l'algorithme afin de prendre en compte cette modification.

b) Calculer alors, dans cette nouvelle situation, la probabilité que le lapin termine son parcours sur la case numéro 3.

59 Une fourmi se déplace sur les côtés d'un triangle équilatéral ABC. Elle part du point A et effectue trois déplacements successifs. Pour chaque déplacement, elle choisit au hasard un côté et se déplace sur ce côté, vers l'un des deux autres sommets.

a) Écrire un algorithme qui modélise cette marche aléatoire.

b) Calculer la probabilité que la fourmi termine son parcours au point A.

EXERCICE RÉSOLU

60 Relier probabilité et tableur

Un père apprend à calculer à sa fille Alice.
Il lance deux dés et lui demande de calculer la somme des numéros obtenus sur les faces supérieures.
Il a constaté que lorsque la somme est inférieure ou égale à 8, Alice se trompe une fois sur quatre, sinon, elle se trompe une fois sur deux.

a) Réaliser et compléter la feuille de calcul ci-contre afin de simuler 500 parties.
b) Conjecturer la probabilité qu'Alice réponde correctement à une partie.
c) Démontrer cette conjecture.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Numéro de partie	Dé 1	Dé 2	Somme des deux dés	Réponse de la fille : juste=1 ; fausse=0		Probabilité de gagner une partie
2	1						
3	2						
4	3						

Solution

a) On saisit les formules :
- dans les cellules B2 et C2 : $\boxed{\text{=ALEA.ENTRE.BORNES(1;6)}}$
- dans la cellule D2 : $\boxed{\text{=SOMME(B2:C2)}}$
- dans la cellule E2 : $\boxed{\text{=SI(D2<=8;SI(ALEA()<0,25;0;1);SI(ALEA()<0,5;0;1))}}$

On recopie la plage B2:E2 jusqu'à la ligne 501.
Dans la cellule G2, on saisit la formule $\boxed{\text{=NB.SI(E2:E501;1)/500}}$.

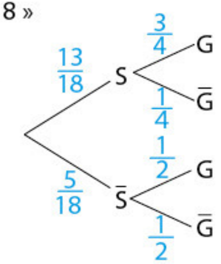
	A	B	C	D	E	F	G
1	Numéro de partie	Dé 1	Dé 2	Somme des deux dés	Réponse de la fille : juste=1 ; fausse=0		Probabilité de gagner une partie
2	1	3	1	4	1		0,692
3	2	3	1	4	1		
4	3	1	2	3	1		
5	4	1	6	7	1		
500	499	1	6	7	1		
501	500	4	3	7	1		

La formule saisie dans la cellule E2 signifie que :
- si $D2 \leqslant 8$, alors on tire un nombre aléatoire dans $[0\,;1[$: s'il est inférieur à 0,25, la réponse d'Alice est fausse, sinon elle est vraie ;
- sinon (si $D2 > 8$), on tire un nombre aléatoire dans $[0\,;1[$: s'il est inférieur à 0,5, la réponse est fausse, sinon elle est vraie.

b) Il semble que la probabilité de gagner une partie soit environ 0,69.

c) On suppose que l'on joue au hasard une partie.
On note S l'événement : « La somme des deux dés est inférieure ou égale à 8 » et G l'événement : « La partie est gagnée ».
Avec un tableau croisé, on constate qu'il y a 26 façons d'obtenir une somme inférieure ou égale à 8, donc $P(S) = \dfrac{26}{36} = \dfrac{13}{18}$.
D'après l'arbre pondéré ci-contre :

$$P(G) = \frac{13}{18} \times \frac{3}{4} + \frac{5}{18} \times \frac{1}{2} = \frac{49}{72} \text{ soit } P(G) \approx 0{,}68.$$



À VOTRE TOUR

61 On reprend la situation de l'exercice **60**.
Utiliser la feuille de calcul précédente pour simuler 1 000 fois cette expérience aléatoire.
Quelle estimation de la probabilité de gagner une partie obtient-on ?

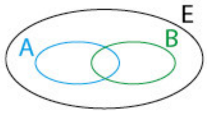
62 On reprend la situation de l'exercice **60**.
Cette fois, Alice s'est entraînée : si la somme est inférieure ou égale à 9, elle se trompe une fois sur dix et sinon, elle se trompe une fois sur deux.
Simuler avec le tableur et conjecturer la probabilité de gagner une partie. Démontrer cette conjecture.

Démontrer et raisonner

Une loi de probabilité P est définie sur l'univers E d'une expérience aléatoire.

63 Établir une relation entre $P_A(\overline{B})$ et $P_A(B)$

Méthode
Lorsqu'on travaille avec des événements tels que $A \cap \overline{B}$ ou $A \cap B$ ou …, il peut être utile de les visualiser sur un diagramme de ce type.



1. a) Exprimer $P_A(\overline{B})$ et $P_A(B)$ à l'aide de la définition d'une probabilité conditionnelle.
b) Représenter l'événement $A \cap \overline{B}$ sur le diagramme ci-dessus et exprimer $P(A \cap \overline{B})$ en fonction de $P(A)$ et de $P(A \cap B)$.
c) En déduire une relation entre $P_A(\overline{B})$ et $P_A(B)$.
2. Procéder de même pour établir une relation entre $P_{\overline{A}}(B)$ et $P_{\overline{A}}(\overline{B})$.

64 Comprendre l'indépendance de deux événements

Méthode
Pour démontrer que deux événements A et B sont indépendants, on doit justifier l'égalité :
$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

A et B sont deux événements indépendants.
1. On se propose de démontrer qu'alors $\overline{A}$ et B sont indépendants.
a) D'après la définition, que doit-on démontrer ?
b) Exprimer $P(\overline{A} \cap B)$ en fonction de $P(B)$ et de $P(A \cap B)$.
c) En déduire que $\overline{A}$ et B sont indépendants.
2. Démontrer de façon analogue que les événements $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.
3. a) Expliquer pourquoi $P_A(B) = P_{\overline{A}}(B) = P(B)$ et $P_B(A) = P_{\overline{B}}(A) = P(A)$.
b) Expliciter alors, dans le langage courant, ce que signifie l'indépendance de deux événements A et B.

65 Expliciter une condition

À quelle condition un événement A est-il indépendant avec lui-même ?

66 Démontrer la formule de Bayes

Méthode
Pour démontrer une égalité, on peut reformuler certains de ses termes.

A et B sont deux événements de probabilités non nulles.
On se propose de démontrer la formule de Bayes :
$$P_B(A) = \frac{P_A(B) \times P(A)}{P_A(B) \times P(A) + P_{\overline{A}}(B) \times P(\overline{A})}$$

a) Exprimer $P(A \cap B)$ de deux façons différentes.
b) Utiliser la formule des probabilités totales pour exprimer $P(B)$.
c) En déduire la formule de Bayes.

Calculer des probabilités conditionnelles

67 Une entreprise dispose d'un stock de guirlandes électriques. On sait que 40 % des guirlandes proviennent d'un fournisseur A et le reste d'un fournisseur B.
Un quart des guirlandes provenant du fournisseur A et un tiers des guirlandes provenant du fournisseur B peuvent être utilisées uniquement en intérieur pour des raisons de sécurité.

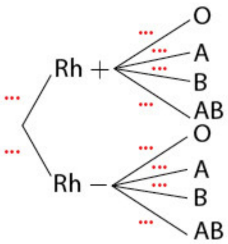
On choisit au hasard une guirlande dans le stock.
On note A (resp. B) l'événement : « La guirlande provient du fournisseur A (resp. B) » et I l'événement : « La guirlande ne peut être utilisée qu'en intérieur ».
a) Construire un arbre pondéré illustrant la situation.
b) Montrer que $P(I) = 0{,}3$.
c) On choisit une guirlande ne pouvant être utilisée qu'en intérieur.
Le responsable de l'entreprise affirme : « Il y a autant de chances qu'elle provienne du fournisseur A que du fournisseur B. » A-t-il raison ?

68 Voici le tableau de répartition des principaux groupes sanguins des habitants de la France.

	O	A	B	AB
Rhésus +	35,0 %	38,1 %	6,2 %	2,8 %
Rhésus –	9,0 %	7,2 %	1,2 %	0,5 %

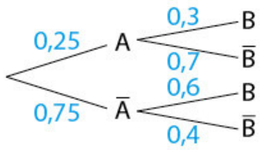
On choisit au hasard une personne dans la population.

a) Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous.



b) Quelle est la probabilité pour que la personne choisie soit du groupe O ? *Arrondir au millième.*

69 A et B sont deux événements d'une expérience aléatoire munie d'une loi de probabilité P.

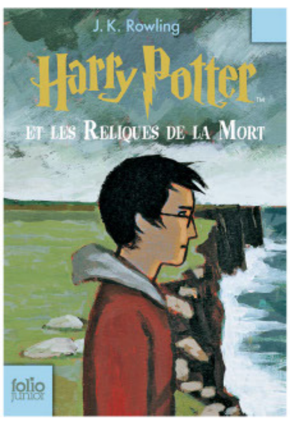


Utiliser l'arbre pondéré ci-dessus pour compléter ce tableau croisé avec des probabilités.

	A	$\overline{A}$	Total
B	...	...	...
$\overline{B}$	...	...	...
Total	...	...	...

70 La documentaliste d'un lycée souhaite acheter les romans de la saga *Harry Potter* (de J.K. Rowling). Elle enquête pour savoir si le sujet intéresse les élèves :

- 10 % des élèves ont lu le 7^e tome ;
- 90 % des élèves qui ont lu le 7^e tome ont vu le 7^e film ;
- 55 % des élèves qui n'ont pas lu le 7^e tome ont vu le 7^e film.

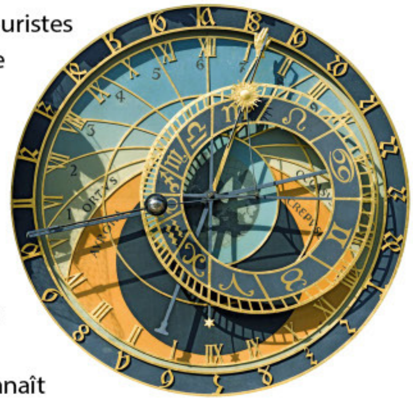


La documentaliste tire au hasard une réponse d'un des élèves interrogés.

a) Déterminer la probabilité que cet élève ait vu le 7^e film.

b) L'élève a vu le 7^e film.
Quelle est la probabilité qu'il ait lu le 7^e tome ?

71 Un groupe de touristes arrive près de l'horloge astronomique de Prague.



60 % des touristes sont Anglais, les autres sont Français.
Parmi les touristes anglais, 20 % parlent français.
Le guide, qui ne connaît pas ce groupe, décide de donner les explications en français.
On choisit au hasard l'un des touristes du groupe.
Déterminer la probabilité que ce touriste comprenne les explications du guide.

72 Un équipementier de motocross s'intéresse à un pilote car il envisage de le sponsoriser.
Selon les statistiques de ses dernières courses, ce pilote a 12 % de chances de finir dans les trois premiers d'une course.
L'équipementier s'est déplacé pour voir courir le pilote.
Si le pilote termine dans les trois premiers, alors l'équipementier le sponsorise avec une probabilité de 85 %, sinon l'équipementier hésite et décidera de le sponsoriser avec une probabilité de 25 %.
On note T l'événement :
« Le pilote arrive dans les trois premiers » ;
et S l'événement :
« L'équipementier sponsorise le pilote ».

a) Représenter la situation par un arbre pondéré.

b) Déterminer P(S).

c) L'équipementier a finalement décidé de ne pas sponsoriser le pilote.
Déterminer la probabilité que le pilote ait quand même fini dans les trois premiers de cette course.
Arrondir au millième.

73 Un voyageur quotidien a le choix chaque matin entre deux trains, celui de 7 h 27 et celui de 7 h 41, pour se rendre à son lieu de travail.
Il prend le premier train 4 fois sur 5.
S'il prend ce train, la probabilité qu'il arrive en retard au travail est 0,05.
D'autre part, la probabilité qu'il arrive en retard est égale à 0,06.
Le voyageur a choisi le train de 7 h 41.
Quelle est la probabilité qu'il arrive en retard ?

Étudier une succession d'épreuves indépendantes

74 Une classe de Première compte 32 élèves dont 18 filles. On choisit au hasard, successivement et avec remise, deux fiches de renseignement remplies par les élèves de cette classe.

1. On note A l'événement : « Les élèves choisis ne sont pas deux filles ».

a) Déterminer $P(\overline{A})$.

b) En déduire $P(A)$.

2. On note B l'événement : « Au moins un des élèves choisis est une fille ».

a) Déterminer $P(\overline{B})$.

b) En déduire $P(B)$.

75 Des enceintes Bluetooth assemblées dans une chaîne de fabrication peuvent présenter deux défauts A et B indépendants l'un de l'autre.

Des tests effectués sur les produits ont montré que :
- 1 % des enceintes présentent le défaut A ;
- 5 % des enceintes présentent le défaut B.

On prélève au hasard une enceinte de cette chaîne de fabrication et on note les événements :

A : « L'enceinte présente le défaut A » ;

B : « L'enceinte présente le défaut B ».

a) Déterminer la probabilité de chacun des événements :
- $A \cap \overline{B}$
- $\overline{A} \cap B$
- $\overline{A} \cap \overline{B}$
- $A \cap B$

b) On prélève désormais, au hasard, successivement et avec remise, deux enceintes de la chaîne de fabrication. Déterminer la probabilité que ces deux enceintes présentent uniquement le défaut B.

Arrondir au dix-millième.

76 Voici la répartition des licenciés d'un club de sport.

	Jeune	Adulte	**Total**
Homme	34	46	80
Femme	68	92	160
Total	102	138	240

a) On prélève au hasard la fiche de l'un des licenciés et on note les événements :

F : « Le licencié est une femme » ;

A : « Le licencié est un adulte ».

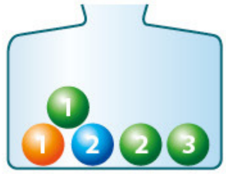
Justifier que les événements A et F sont indépendants.

b) On prélève désormais, au hasard, successivement et avec remise, deux fiches des licenciés.

Déterminer la probabilité qu'il y ait au moins une femme adulte parmi ces deux fiches.

Arrondir au centième.

77 On prélève au hasard, successivement et avec remise, deux boules de l'urne opaque ci-contre.



Situation 1

On note alors la couleur des boules tirées.

a) Représenter la situation par un arbre pondéré.

b) Déterminer la probabilité de chacun des événements :
- A : « Au moins l'une des boules est verte » ;
- B : « Les deux boules ne sont pas orange ».

Situation 2

On note alors la somme des numéros obtenus.

a) Représenter la situation par un arbre pondéré.

b) Déterminer la probabilité de chacun des événements :
- C : « La somme des numéros est strictement inférieure à 3 » ;
- D : « La somme des numéros est différente de 3 ».

S'entraîner à la logique → p. 336

E est un univers muni d'une loi de probabilité P.

78 Implication et réciproque

A et B sont deux événements tels que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$. Dans chaque cas, indiquer si l'implication est vraie ou fausse, puis écrire sa réciproque et indiquer si elle est vraie ou fausse.

a) Si $P_A(B) = P(B)$, alors $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

b) Si $C = A \cap B$ et $D = A \cap \overline{B}$, alors $P(C) + P(D) = P(A)$.

c) Si A et B sont incompatibles, alors ils ne sont pas indépendants.

d) Si $A \cap B = \varnothing$, alors $P_A(B) = 0$.

79 Quantificateurs

A, B et C sont des événements avec $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$.

Dans chaque cas, compléter l'affirmation par « Pour tout(s) …, on a … » ou « Il existe un(des) … tel(s) que … ».

a) … événement A … $P_A(A) = 1$.

b) … événement C … $P(A) + P(C) = 1$.

c) … événements A et B … :

$$P_A(B) \times P(A) = P_B(A) \times P(B)$$

80 Étudier une évolution

Problème ouvert

Chercher | Raisonner | Communiquer

Pour subsister, une espèce animale est parfois contrainte d'évoluer. Une évolution génétique est souvent causée par la mutation de plusieurs gènes simultanément.

Trois gènes, notés G_1, G_2, G_3, sont indépendants car situés sur des chromosomes différents.

Dans la population, les pourcentages de mutation de ces gènes sont respectivement de 2 %, 3 % et 5 %.

Pour que la mutation génétique ait lieu, il faut qu'au moins deux de ces trois gènes aient muté chez un même individu.

Sur 50 000 animaux de cette espèce, combien, environ, présenteront cette mutation génétique ?

81 Étudier des naissances

Chercher | Modéliser | Communiquer

En France, 2,5 % des naissances sont le fruit d'une fécondation in vitro (FIV).

La probabilité de donner naissance à des jumeaux suite à une FIV est de 1 sur 4, alors qu'elle n'est que de 1 sur 80 sinon.

Tom et Bill croisent une personne avec deux jumeaux dans une poussette.

Tom déclare : « C'est probablement suite à une FIV. » Que peut-on en penser ?

82 Prolonger ses connaissances

Narration de recherche

Chercher | Modéliser | Communiquer

Rédiger les différentes étapes de la recherche, sans omettre les fausses pistes et les changements de méthode.

Problème L'asthme est une maladie inflammatoire chronique des voies respiratoires qui touche 4 % des hommes et 5 % des femmes.

On sait que :

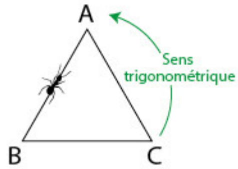
- si aucun des parents n'est asthmatique, la probabilité que leur enfant le soit est 0,1 ;
- si un seul des parents est asthmatique, la probabilité que leur enfant le soit est 0,3 ;
- si les deux parents sont asthmatiques, la probabilité que leur enfant le soit est 0,9.

Un enfant n'est pas asthmatique.

Quelle est la probabilité qu'au moins un de ses parents biologiques le soit ? *Arrondir au millième.*

83 Algo Parcourir un triangle

Chercher | Modéliser | Raisonner



Une fourmi parcourt de manière aléatoire les côtés d'un triangle équilatéral direct ABC.

Sa position initiale, sur l'un des sommets A, B ou C est décidée de manière aléatoire et équiprobable. Ensuite, quand elle se trouve sur un sommet, elle se déplace vers l'un des deux autres sommets. La probabilité qu'elle se déplace dans le sens trigonométrique est $\frac{3}{4}$.

1. Étudier un algorithme

Les sommets A, B et C du triangle sont repérés respectivement par les nombres entiers 1, 2 et 3.

L'algorithme incomplet suivant détermine le numéro du 2^e sommet fréquenté par la fourmi.

```
p ← un nombre entier aléatoire égal à
      1, 2 ou 3
Si p = 1 alors
  | a ← un nombre aléatoire de [0 ; 1[
  | Si a < 0,75 alors
  |   | p ← 2
  |   sinon
  |   | p ← 3
  | Fin Si
Fin Si
⋮
```

a) Expliquer le rôle de chacune des variables p et a.

b) Compléter l'algorithme afin de prévoir les autres positions initiales possibles de la fourmi.

c) Coder cet algorithme en langage Python et tester le programme obtenu.

2. Démontrer avec les probabilités

Pour tout nombre entier naturel non nul n, on considère les événements :

A_n : « La n-ième position de la fourmi est A » ;

B_n : « La n-ième position de la fourmi est B » ;

C_n : « La n-ième position de la fourmi est C ».

a) Donner la probabilité de l'événement A_1.

b) Préciser $P_{B_1}(A_2)$ et $P_{C_1}(A_2)$.

c) Représenter cette situation par un arbre pondéré par des probabilités.

d) Calculer $P(A_2)$. Que constate-t-on ?

e) Calculer de même $P(B_2)$ et en déduire $P(C_2)$.

On peut montrer que, pour tout nombre $n \geqslant 3$:

$$P(A_n) = P(B_n) = P(C_n) = \frac{1}{3}$$

84 Comparer des probabilités

Modéliser **Raisonner**

Une urne opaque contient deux billes numérotées 1 et n billes numérotées n, où n est un nombre entier naturel non nul.

On prélève au hasard et avec remise deux billes de cette urne et on note les numéros obtenus.

a) On considère les événements :

A : « Le produit des numéros obtenus est égal à n » ;

B : « La somme des numéros obtenus est égale à deux ».

Pour quelle valeur de n a-t-on $P(A) = 10\,P(B)$?

b) On considère les événements :

C : « Le produit des numéros obtenus est égal à n^2 » ;

D : « La somme des numéros obtenus est égale à $n + 1$ ».

Pour quelle valeur de n a-t-on $P(C) = 5\,P(D)$?

85 Prendre des initiatives

Modéliser **Représenter** **Raisonner**

A, B, C, D sont quatre événements d'une expérience aléatoire munie d'une loi de probabilité P.

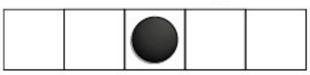
$$P(A) = \frac{1}{2}\ ;\quad P_{A}(C) = \frac{1}{4}\ ;\quad P_{\overline{A}}(D) = \frac{1}{8}$$

Quelle valeur faut-il donner à $P_A(B)$ pour que la probabilité $P_B(A)$ soit égale à 0,4 ?

86 Imaginer une stratégie

Chercher **Raisonner**

Un pion est placé sur la case centrale d'une ligne de 5 cases. À chaque étape, on déplace le pion vers la droite avec une probabilité de $\frac{1}{n}$, où n est un nombre entier naturel non nul, ou vers la gauche.



Lauriane affirme : « Plus n augmente, plus la probabilité que le pion soit au centre après deux déplacements diminue. »

Démontrer ou infirmer la conjecture de Lauriane.

87 Study a tale

Modéliser **Communiquer**

The Evil Queen goes to Snow White's cottage with a basket of sixteen apples, six of which are poisoned.

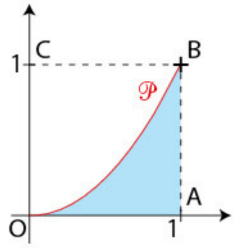
Snow White chooses three apples at random from the basket and saves them for the next few days.

Find the probability that, after a long, long time, Snow White awakens to the kiss of Prince Charming.

88 Algo Utiliser la méthode de Monte-Carlo

Chercher **Raisonner** **Communiquer**

On se propose de donner une valeur approchée d'une aire en utilisant une probabilité.



1. Dans un repère d'origine O, $\mathscr{P}$ est la courbe d'équation $y = x^2$ avec $0 \leqslant x \leqslant 1$.

On considère les points A(1 ; 0), B(1 ; 1) et C(0 ; 1).

On choisit au hasard un point dans le carré OABC.

La probabilité qu'il se trouve dans le domaine bleu est :

$$p = \frac{\text{aire du domaine bleu}}{\text{aire du carré OABC}}$$

Voici une fonction écrite en langage Python, pour simuler 10 000 fois cette expérience aléatoire.

```
1 from random import *
2
3 def Aire():
4     n=0
5     for i in range(10000):
6         x=random()
7         y=random()
8         if y<=x**2:
9             n=n+1
10    A=n/10000
11    return A
```

a) Quelles conditions vérifient les coordonnées $(x\,;y)$ d'un point M situé :

- dans le carré OABC ?
- dans le domaine bleu ?

b) Quelle est l'aire du carré OABC ?

c) Justifier les lignes 6, 7 et 10 du programme ci-dessus.

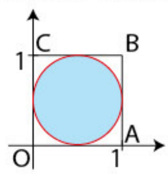
d) Saisir cette fonction et l'exécuter afin d'obtenir une valeur approchée de l'aire du domaine bleu.

2. On reprend la situation de la question **1** mais en remplaçant $\mathscr{P}$ par le disque inscrit dans le carré OABC.

a) Modifier la fonction précédente.

b) Saisir cette fonction et l'exécuter afin d'obtenir une valeur approchée de l'aire du disque bleu.

c) En déduire une approximation de π.



Faisant référence aux jeux de hasard pratiqués dans les casinos de Monte-Carlo, cette méthode consiste à obtenir l'approximation d'une aire (ou d'un volume) en simulant un grand nombre de fois une expérience aléatoire et en utilisant la loi des grands nombres.

Elle a été inventée en 1947 par le physicien gréco-américain Nicholas Metropolis.

89 Comparer des tests de dépistage

Modéliser Communiquer

Dans une population, une personne sur 200 est touchée par une certaine maladie.
Deux tests sont utilisés pour dépister cette maladie.

Le test A

Ce test est positif dans 80 % des cas chez les personnes atteintes par cette maladie et dans 5 % des cas chez les personnes saines.

Le test B

Ce test est positif dans 95 % des cas chez les personnes atteintes par cette maladie et dans 10 % des cas chez les personnes saines.

On choisit au hasard une personne de cette population et on note :
M l'événement : « La personne choisie est malade » ;
T_1 (resp. T_2) l'événement : « Le test A (resp. B) est positif ».
La valeur prédictive positive d'un test est la probabilité $P_T(M)$.
Comparer les valeurs prédictives positives de ces deux tests.

Des Défis

90 Modéliser la situation

Jérémy affirme que Natacha lui a dit que Karim lui a rapporté qu'Assma lui a confié qu'elle a gagné au Loto. Sachant que chacun dit la vérité 2 fois sur 3 et ment ou se trompe le reste du temps, quelle est la probabilité qu'Assma ait réellement gagné au Loto ?

91 Raisonner

Enzo et Théo s'affrontent lors d'un jeu de culture générale. Ils ont l'habitude d'y jouer et, on a remarqué, lors de parties précédentes, qu'Enzo sait répondre à 80 % des questions, tandis que Théo sait répondre à 60 % des questions.
Une série de questions leur est posée à tous les deux. Le vainqueur est celui qui répond correctement à une question tandis que l'autre s'est trompé à cette question. En cas d'égalité (Enzo et Théo répondent correctement ou se trompent tous les deux), le jeu se poursuit. Quelle est la probabilité qu'Enzo soit gagnant à la 4^e question ? *Arrondir au millième.*

OBJECTIF BAC

92 Modifier un approvisionnement — 40 min

D'après Bac 2018, Pondichéry

Une entreprise conditionne du sucre blanc provenant de deux exploitations U et V en paquets de 1 kg et de différentes qualités.
Le sucre extrafin est conditionné séparément dans des paquets portant le label « extrafin ».
Dans cette partie, on admet que 3 % du sucre provenant de l'exploitation U est extrafin et que 5 % du sucre provenant de l'exploitation V est extrafin.
On prélève au hasard un paquet de sucre dans la production de l'entreprise et, dans un souci de traçabilité, on s'intéresse à la provenance de ce paquet.
On considère les événements suivants :
U (resp. V) : « Le paquet contient du sucre provenant de l'exploitation U (resp. V) » ;
E : « Le paquet porte le label extrafin ».

1. Dans cette question, on admet que l'entreprise fabrique 30 % de ses paquets avec du sucre provenant de l'exploitation U et les autres avec du sucre provenant de l'exploitation V, sans mélanger les sucres des deux exploitations.
a) Quelle est la probabilité que le paquet prélevé porte le label extrafin ?
b) Sachant qu'un paquet porte le label extrafin, quelle est la probabilité que le sucre qu'il contient provienne de l'exploitation U ? *Arrondir au millième.*
2. L'entreprise souhaite modifier son approvisionnement auprès des deux exploitations afin que parmi les paquets portant le label extrafin, 30 % d'entre eux contiennent du sucre provenant de l'exploitation U.
Comment doit-elle s'approvisionner auprès des exploitations U et V ?
Toute trace de recherche sera valorisée dans cette question.

Exploiter ses compétences

93 Choisir la meilleure option

La situation problème

Un jeu oppose un présentateur à un candidat. Le candidat est placé devant trois portes fermées, notées ①, ②, ③. Derrière l'une d'elles se trouve une voiture et derrière les deux autres, une boîte de bonbons. Le jeu se déroule en deux étapes.

Utiliser les différentes informations pour déterminer si, à la suite de la première étape, le candidat a intérêt à changer son choix ou non.

DOC 1 Le candidat

- Le candidat commence par choisir au hasard l'une des trois portes car il ne sait pas où se trouve la voiture à gagner.
- À l'issue de l'intervention du présentateur, il a la possibilité de maintenir son choix initial ou d'en changer.

DOC 2 Le présentateur

- Le présentateur sait ce qui se trouve derrière chaque porte.
- Lorsque le candidat a choisi l'une des trois portes, le présentateur ouvre une porte qui n'est ni celle cachant la voiture, ni celle choisie par le candidat.

94 Évaluer l'efficacité d'un système de sécurité

La situation problème

Dans un aéroport, les portiques de sécurité servent à détecter les objets métalliques que peuvent emporter les voyageurs.

Un voyageur au hasard franchit un portique de sécurité.

Utiliser les différentes informations pour déterminer la probabilité que l'agent de sécurité trouve un objet métallique sur ce voyageur.

(d'après Liban 2018)

DOC 1 Information

On estime qu'un voyageur sur 20 franchit le portique de sécurité avec un objet métallique sur lui (ceinture, pièce de monnaie, téléphone portable, …).

DOC 2 L'agent de sécurité

- Lorsque le portique a sonné, l'agent de sécurité procède à une fouille.
- La probabilité qu'il trouve un objet métallique sur le voyageur est alors de $\frac{3}{4}$.

DOC 3 Le portique de sécurité

- Lorsque le voyageur franchit le portique de sécurité avec un objet métallique, la probabilité que le portique sonne est de 0,99.
- Lorsque le voyageur franchit le portique de sécurité sans objet métallique, la probabilité que le portique ne sonne pas est de 0,98.

95 Comparer des modèles

La situation problème

Une île imaginaire est sévèrement touchée par la pollution.
Les scientifiques de l'île ont classé les espèces animales en trois catégories : très menacée, en danger et peu menacée. Pour envisager l'avenir, deux modèles sont proposés.

- Modèle écologique : des mesures drastiques en faveur de l'écologie seront appliquées.
- Modèle actuel : rien ne change et la pollution perdure.

Utiliser les différentes informations pour déterminer, selon les modèles, la probabilité qu'une espèce animale choisie au hasard sur cette île ait disparu d'ici 50 ans.

DOC 1 Les données actuelles

Actuellement, 30 % des espèces animales sont très menacées, 40 % sont en danger et le reste des espèces est peu menacé.

DOC 2 Le modèle écologique

Dans ce modèle, la moitié des espèces très menacées finiront par disparaître d'ici 50 ans, ainsi que 20 % des espèces en danger et 5 % des espèces peu menacées.

DOC 3 Le modèle actuel

Dans ce modèle, 80 % des espèces très menacées finiront par disparaître d'ici 50 ans, ainsi que 50 % des espèces en danger et 10 % des espèces peu menacées.

96 Analyser une séance de tirs aux buts

La situation problème

À la fin du temps réglementaire, deux équipes de football féminin sont à égalité. La séance de tirs au but va démarrer.
Utiliser les différentes informations pour déterminer la probabilité, pour chaque gardienne, d'arrêter au moins l'un des trois premiers tirs au but.

DOC 1 Le premier tir au but

Leurs matchs précédents ont montré que la gardienne de l'équipe rouge arrête le premier tir au but dans 20 % des cas et la gardienne de l'équipe bleue l'arrête dans 18 % des cas.

DOC 2 La gardienne de l'équipe bleue

Pour cette gardienne, la probabilité d'arrêter un tir au but dépend du fait d'avoir réussi ou non à arrêter le tir au but précédent.
Ainsi, si elle a arrêté un tir au but, alors elle arrête le tir suivant dans 22 % des cas, sinon, elle arrête le tir suivant dans 15 % des cas.

DOC 3 La gardienne de l'équipe rouge

Pour cette gardienne, la probabilité d'arrêter un tir au but est indépendant du fait d'avoir réussi ou non à arrêter le tir au but précédent.