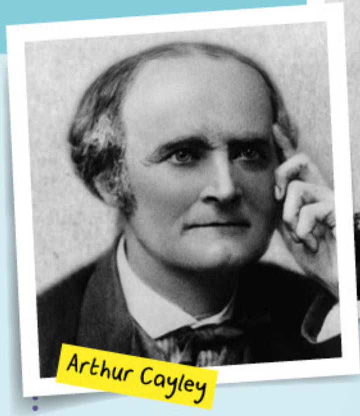
9 Matrices

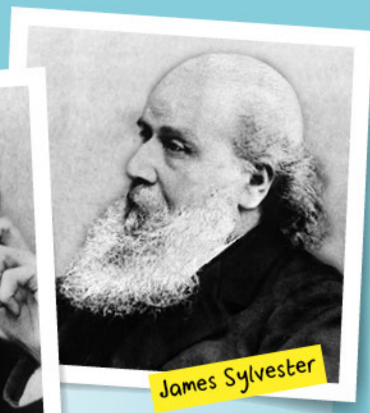
HISTOIRE DES MATHS

James Sylvester introduit le terme de matrice en 1850 pour désigner un tableau de nombres. Il travaille et échange sur ce sujet durant plusieurs années avec **Arthur Cayley**. Ce dernier comprend tout l'intérêt en algèbre de tels tableaux notamment pour représenter les systèmes d'équations linéaires.

En 1858, Cayley publie un article *A Memoir on the Theory of Matrices*. Il y confirme le nom de matrice dans le sens actuel. Cayley définit l'addition et la multiplication des matrices. Il explicite l'inverse d'une matrice en utilisant les déterminants.

Par la suite, d'autres mathématiciens tels **Hamilton** et **Frobenius** contribuent à développer la théorie des matrices.


Arthur Cayley


James Sylvester

▶ **Arthur Cayley** (1821-1895) est un mathématicien britannique. Il est le premier à introduire la multiplication des matrices. Très prolifique, il publie plus de 900 articles.

▶ **James Sylvester** (1814-1897) est un mathématicien britannique. Il fonde avec Cayley la théorie des invariants algébriques et celle des déterminants. Il découvre une méthode d'élimination d'une inconnue entre deux équations.

1843 Hamilton découvre les quaternions.

1850 Sylvester introduit le terme « matrice ».

1853 Cayley définit les opérations et leurs propriétés sur les matrices.

1878 Frobenius donne une démonstration du théorème de Cayley-Hamilton

1844 *Le Comte de Monte-Cristo* d'Alexandre Dumas

1851 Création de la SACEM

1857 Paris se dote d'un éclairage public au gaz

1865 Assassinat d'Abraham Lincoln

1867 Les États-Unis achètent l'Alaska

1840 1850 1860 1870

Le Roi Lion produit par Walt Disney Pictures et réalisé par Jon Favreau.

Aujourd'hui, les films d'animation sont souvent fabriqués à l'aide d'images de synthèse. Lors de leur création, on utilise les matrices de transformations pour déplacer les objets dans une scène.

Les contenus et capacités travaillés dans ce chapitre

	Savoir-faire	Exercices
• Vocabulaire et égalité des matrices. Opérations sur les matrices.	1 à 5, 7	20 à 30, 33 à 36
• Calculer l'inverse, les puissances d'une matrice carrée.	6, 8, 13, 15	31, 32, 37 à 43, 58, 59, 62 à 66
• Représentations matricielles : transformations géométriques du plan, systèmes linéaires, suites récurrentes.	9 à 12	44 à 53, 55
• Suites de matrices colonnes définies par une relation de récurrence du type $U_{n+1} = AU_n + C$.	14, 16 à 19	60, 61, 67 à 70
• Modéliser une situation par une matrice.		54, 56, 57, 79, 87 à 91

Calcul mental

Rappels utiles

• Exemple de système d'équations

Un système de deux équations linéaires à deux inconnues s'écrit :

$$(\mathbf{S})\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

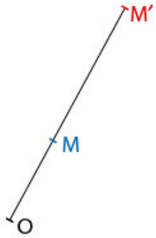
où a, b, c, a', b', c' sont des nombres réels.

Le système (**S**) a un unique couple solution si, et seulement si, $\boldsymbol{ab'-ba'\neq 0}$.

• Homothétie

L'homothétie de centre O et de rapport k, nombre réel non nul, transforme un point M du plan en le point M′ tel que :

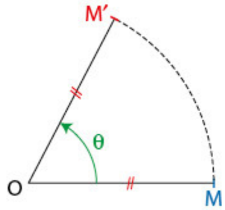
$$\overrightarrow{\mathbf{OM'}}=k\overrightarrow{\mathbf{OM}}.$$



• Rotation

La rotation de centre O et d'angle θ transforme un point M (M ≠ O) en le point M′ tel que :

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{OM}};\overrightarrow{\mathrm{OM'}}\right)=\theta \text{ et } \mathrm{OM'}=\mathrm{OM}.$$



• Raisonnement par récurrence

P(n) est une propriété qui dépend d'un nombre entier naturel n.

Si :

1. Initialisation : P(n_0) est vraie,

2. Hérédité : si P(k) est vraie pour un entier naturel $k \geqslant n_0$, alors P($k+1$) est vraie,

alors pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$, P(n) est vraie.

À l'oral — Questions-Tests

Pour chaque question, il y a une seule réponse exacte.

1 (**S**) est le système $\begin{cases} -2x+y=9 \\ -x-2y=-7 \end{cases}$.

Alors :

(1) (**S**) a une infinité de couples solutions.

(2) (**S**) a un couple solution unique.

(3) (**S**) n'a aucun couple solution.

2 (**T**) est le système $\begin{cases} 3x-4y=7 \\ -x+my=m \end{cases}$

où m est un nombre réel.

(**T**) a un couple solution unique si, et seulement si :

(1) $m=\dfrac{4}{3}$ (2) $m\neq\dfrac{4}{3}$ (3) $m\neq-\dfrac{4}{3}$

3 (**S**) est le système :

$$\begin{cases} -10x+y=-8 \\ 5x-2y=1 \end{cases}.$$

Alors :

(1) Le couple $(1;2)$ est l'unique solution de (**S**).

(2) Le système (**S**) a une infinité de couples solutions.

(3) Le système (**S**) n'a aucune solution.

4 $(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j})$ est un repère orthonormé direct du plan et A est le point de coordonnées $(2;0)$.

a) L'homothétie de centre O et de rapport $-\dfrac{1}{2}$ transforme le point A en le point :

(1) $\mathrm{A'}(-1;0)$ (2) $\mathrm{A'}(1;0)$ (3) $\mathrm{A'}\left(-\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$

b) La rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{6}$ transforme le point A en le point :

(1) $\mathrm{A''}(0;2)$ (2) $\mathrm{A''}(1;\sqrt{3})$ (3) $\mathrm{A''}(\sqrt{3};1)$

5 (x_n) et (y_n) sont deux suites définies par $x_0=-1$, $y_0=1$ et pour tout entier naturel n,

$$\begin{cases} x_{n+1}=x_n-y_n \\ y_{n+1}=-x_n+y_n \end{cases}.$$

On se propose de démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n,

$$\mathrm{P}(n): x_n=-2^n \text{ et } y_n=2^n.$$

a) On commence par vérifier que :

(1) P(0) est vraie. (2) P(1) est vraie. (3) P(2) est vraie.

b) On prend pour hypothèse de récurrence :

(1) $x_1=-2$ et $y_1=2$;

(2) pour un entier naturel k, $x_k=-2^k$;

(3) pour un entier naturel k, $x_k=-2^k$ et $y_k=2^k$.

1 La notion de matrice

Un commerçant vend des glaces durant l'été. Le tableau ci-dessous récapitule le nombre de glaces vendues au cours d'une journée.

Taille \ Type de glace	En cornet	En pot
Simple	50	20
Double	60	40
Triple	30	50

1 On peut résumer le tableau ci-dessus en ne conservant que les nombres. On obtient la matrice $A = \begin{pmatrix} 50 & 20 \\ 60 & 40 \\ 30 & 50 \end{pmatrix}$.
Elle contient 3 **lignes** et 2 **colonnes** ; on dit qu'elle est de **dimension** (ou de taille) (3, 2).
a) Écrire une matrice colonne B résumant les ventes de glaces en cornet. Préciser sa dimension.
b) Écrire une matrice ligne C résumant les ventes de glaces double. Préciser sa dimension.

2 Le commerçant constate une baisse de 10 % de ses ventes le lendemain.
Écrire la matrice D correspondant aux ventes du lendemain. On note $D = 0{,}9\,A$.

3 La matrice $A + D$ est obtenue en additionnant deux à deux les coefficients de A et D qui occupent la même position. Déterminer cette matrice, que représente-t-elle ?

2 Multiplication de matrices

John veut construire des placards sur mesure dans plusieurs pièces de sa maison. Le tableau ci-dessous récapitule les quantités de matériel dont il a besoin.

	Planche de bois	Paquet de vis	Coulisse
Entrée	3	4	8
Cellier	1	2	4
Dressing	6	8	12

1 **a)** Écrire la matrice B qui résume le tableau de ses besoins.
b) Une planche de bois coûte 20 €, un paquet de vis coûte 5 € et une coulisse coûte 7 €. Écrire la matrice P de dimension (3, 1) correspondant aux prix du matériel.

2 **a)** Calculer le coût total de fabrication des placards dans l'entrée, dans le cellier et dans le dressing.
b) Retrouver les résultats précédents en effectuant le produit $B \times P$ à l'aide de la disposition suivante.

$$\begin{pmatrix} 20 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$B \times P = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \\ 6 & 8 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 20 & + & 4 \times 5 & + & 8 \times 7 \\ \dots & + & \dots & + & \dots \\ \dots & + & \dots & + & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 136 \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

3 Peut-on, à l'aide d'une disposition analogue, effectuer le calcul $P \times B$?
Justifier.

Cours

Exercices
- **1** à **4** (ci-contre)
- **20** à **30**, **33** à **36**

1 Vocabulaire des matrices et premières opérations

A Vocabulaire

Définition

n et p désignent des nombres entiers naturels non nuls.
Une **matrice** de dimension (ou taille) (n, p) est un tableau de nombres réels à n lignes et p colonnes.

La matrice M ci-contre peut être notée $M = (a_{ij})$ où a_{ij} désigne le **coefficient** situé à la i-ème ligne et j-ième colonne.

Notation générale

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

Vocabulaire
- Lorsque $n = p$, on dit que M est une **matrice carrée** d'ordre n.
- Lorsque $n = 1$, on dit que M est une **matrice ligne**.
- Lorsque $p = 1$, on dit que M est une **matrice colonne**.
- La **matrice identité (ou unité) d'ordre n** ($n \geqslant 2$) est la matrice carrée d'ordre n qui contient des 1 sur la diagonale principale et des 0 ailleurs. On la note I_n ou seulement I.
- La matrice nulle est celle dont tous les coefficients sont égaux à 0.

Matrice carrée d'ordre 2	Matrice ligne	Matrice colonne	Matrice unité d'ordre 3
$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & -5 & 8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -1{,}7 \\ 10 \end{pmatrix}$	$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Définition

Dire que deux matrices sont **égales** signifie que :
- elles ont la même dimension ;
- les coefficients qui occupent la même position sont deux à deux égaux.

B Premières opérations

Définition

A et B sont deux matrices de même dimension.
La **somme** (resp. la **différence**) des matrices A et B, notée **A + B** (resp. **A – B**), est la matrice obtenue en additionnant (resp. en soustrayant) deux à deux les coefficients de A et B qui occupent la même position.

Exemple

$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

$A + B = \begin{pmatrix} 1+(-5) & -3+0 \\ 0+2 & -1+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ et $A - B = \begin{pmatrix} 1-(-5) & -3-0 \\ 0-2 & -1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$.

Définition

Le **produit** d'une matrice A par un **nombre réel k**, est la matrice, notée **kA**, obtenue en multipliant chaque coefficient de A par k.

Exemple

$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $2A = \begin{pmatrix} 2\times 1 & 2\times(-3) \\ 2\times 0 & 2\times(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

EXERCICES RÉSOLUS

1 Calculer avec des matrices

Le tableau ci-contre récapitule les ventes réalisées par différents agents immobiliers dans une agence au cours du premier trimestre 2019.

	Nathalie	Mélanie	Pierre
Maison	15	20	10
Appartement	5	0	10
Terrain	15	10	5

a) Résumer le tableau des ventes par une matrice A.

b) Au cours du second trimestre 2019, les ventes de chaque agent, pour chaque type de bien, ont baissé de 20 %.
Déterminer la matrice des ventes B pour ce second trimestre.

c) Que représente la matrice A + B ? Déterminer cette matrice.

Solution

a) On résume le tableau des ventes par la matrice $A=\begin{pmatrix}15 & 20 & 10\\ 5 & 0 & 10\\ 15 & 10 & 5\end{pmatrix}$.

b) On obtient B = 0,8A, donc :

$$B=\begin{pmatrix}12 & 16 & 8\\ 4 & 0 & 8\\ 12 & 8 & 4\end{pmatrix}.$$

c) La matrice A + B représente l'ensemble des ventes de ces trois agents au cours du premier semestre 2019.

$$A+B=\begin{pmatrix}15 & 20 & 10\\ 5 & 0 & 10\\ 15 & 10 & 5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}12 & 16 & 8\\ 4 & 0 & 8\\ 12 & 8 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}27 & 36 & 18\\ 9 & 0 & 18\\ 27 & 18 & 9\end{pmatrix}$$

2 Déterminer deux matrices égales

x et y désignent deux nombres réels.

On donne $A=\begin{pmatrix}6+5x & 4\\ 1 & 4y\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}2y & 1+3x\\ 1 & 22\end{pmatrix}$.

Déterminer les nombres réels x et y tels que les matrices A et B soient égales.

Solution

Les matrices A et B étant de même dimension, elles sont égales si, et seulement si les nombres x et y vérifient le système $\begin{cases}6+5x=2y\\ 1+3x=4\\ 4y=22\end{cases}$.

Avec la 2^{e} équation, on obtient $x=1$.

Avec la 3^{e} équation, on obtient $y=5{,}5$. Avec la 1re équation, on vérifie que $6+5\times 1=2\times 5{,}5$.

Ainsi, A = B si, et seulement si, $x=1$ et $y=5{,}5$.

> Dire que deux matrices sont égales revient à dire que leurs coefficients respectifs sont égaux.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 1

3 On donne les matrices :

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ 0 & 5 & 1\\ 4 & 3 & 0\end{pmatrix} \text{ et } B=\begin{pmatrix}4 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}.$$

Déterminer les matrices –0,5A et A + B.

Sur le modèle de l'exercice résolu 2

4 x et y désignent deux nombres réels.

On donne $A=\begin{pmatrix}0 & 9\\ 5xy & 4y\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}0 & 7x-5\\ 40 & 3x+10\end{pmatrix}$.

Déterminer les nombres réels x et y tels que les matrices A et B soient égales.

Exercices
- **5** à **8** (ci-contre)
- **31**, **32**, **37** à **43**

2 Multiplication des matrices. Matrice inverse

A Multiplication de deux matrices

Le produit d'une matrice M de dimension (n, p) par une matrice N de dimension (p, q) est une matrice de dimension (n, q). Pour multiplier deux matrices, on peut utiliser la disposition ci-dessous.

Exemples

$$A \times B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2\times 10 + 4\times 4 + 5\times 20 \\ 3\times 10 + 1\times 4 + 6\times 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 136 \\ 154 \end{pmatrix} \quad \text{avec } B = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Ici, on multiplie des matrices de dimensions $(2,3)$ et $(3,1)$, donc la matrice $A \times B$ a pour dimension $(2,1)$.

$$M \times N = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2\times 5 + 4\times 10 & 4+28 \\ -3\times 5 + 1\times 10 & -6+7 \\ 1\times 5 + 2\times 10 & 2+14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 & 32 \\ -5 & 1 \\ 25 & 16 \end{pmatrix} \quad \text{avec } N = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 10 & 7 \end{pmatrix}$$

Ici, on multiplie des matrices de dimensions $(3,2)$ et $(2,2)$, donc la matrice $M \times N$ a pour dimension $(3,2)$.

Propriétés du produit des matrices carrées d'ordre n ($n \geqslant 2$)

- Ce produit n'est pas commutatif, il existe des matrices carrées A et B d'ordre n telles que $AB \neq BA$.
- Pour toutes matrices carrées A, B, C d'ordre n : $A(BC) = (AB)C$, $A(B + C) = AB + AC$ et $(A + B)C = AC + BC$.
- Il existe des matrices carrées A, B, C d'ordre n telles que $AB = AC$ et $B \neq C$.
- Pour toute matrice carrée A d'ordre n, $AI_n = I_nA = A$.

B Matrice inverse d'une matrice carrée

Définition

A désigne une matrice carrée d'ordre n (n nombre entier naturel, $n \geqslant 2$).
- Dire que A est **inversible** signifie qu'il existe une matrice carrée A′ d'ordre n telle que $A \times A' = A' \times A = I_n$.
- Lorsqu'elle existe, la matrice A′ est unique, on l'appelle la **matrice inverse** de A et on la note $\mathbf{A^{-1}}$.

Cas des matrices carrées d'ordre 2

On donne $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ et on cherche une matrice $A' = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ telle que $A'A = I_2$,

c'est-à-dire $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, soit $\begin{pmatrix} a_{11}x + a_{21}y & a_{12}x + a_{22}y \\ a_{11}z + a_{21}t & a_{12}z + a_{22}t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$A'A = I_2$ équivaut donc à $\begin{cases} a_{11}x + a_{21}y = 1 \\ a_{12}x + a_{22}y = 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} a_{11}z + a_{21}t = 0 \\ a_{12}z + a_{22}t = 1 \end{cases}$.

Chacun de ces systèmes admet un unique couple solution si, et seulement si, $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$.
Ce nombre $d = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ est appelé le **déterminant de la matrice A**.

Lorsque $d \neq 0$, A est inversible et si l'on pose $A' = \dfrac{1}{d}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$, alors $A'A = I_2$ (donc aussi $AA' = I_2$).

On admet que s'il existe une matrice A′ telle que $A'A = I_n$, alors l'égalité $AA' = I_n$ est aussi vraie.

Propriété

Une matrice carrée $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ d'ordre 2 est inversible si, et seulement si, son **déterminant**

$\boldsymbol{d = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$ est **différent de 0**. La matrice inverse de A est alors $A^{-1} = \dfrac{1}{d}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$.

EXERCICES RÉSOLUS

5 Multiplier des matrices

On donne les matrices $A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 4 & -1\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}-2 & -4\\ 5 & 1\end{pmatrix}$.

Calculer le produit AB, puis vérifier le résultat à l'aide de la calculatrice.

Solution

$$AB=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 4 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & -4\\ 5 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\times(-2)+(-1)\times 5 & 3\times(-4)+(-1)\times 1\\ 4\times(-2)+(-1)\times 5 & 4\times(-4)+(-1)\times 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-11 & -13\\ -13 & -17\end{pmatrix}.$$

On retrouve ce résultat à l'aide de la calculatrice en procédant ainsi :

Commentaires	TI	Casio	NumWorks
• On saisit les coefficients des matrices	matrice ▶ ▶ (EDIT) entrer 2 entrer 2 entrer Taper les coefficients de A et entrer à chaque fois. quitter 2nde mode Recommencer pour entrer la matrice B.	MENU 1 F3 (▶MAT/VCT) 2 EXE 2 EXE EXE Taper les coefficients de A et EXE à chaque fois. EXIT ▼ Recommencer pour entrer la matrice B. EXIT	Calculs EXE shift [e^x A Taper les coefficients à l'aide des flèches de déplacements. Puis, juste après avoir saisi le dernier nombre, on nomme la matrice. ▷ ▷ shift sto→ x^y F shift ALPHA alpha [e^x A EXE Recommencer pour entrer la matrice B.
• On calcule A×B	matrice 1 ([A]) × matrice 2 ([B]) entrer	OPTN F2 (▶MAT/VCT) F1 (Mat) A ALPHA X,θ,T × B F1 (Mat) ALPHA log EXE	shift ALPHA alpha [e^x A × shift ALPHA alpha] ln B EXE

6 Déterminer l'inverse d'une matrice carrée d'ordre 2

On donne la matrice $A=\begin{pmatrix}5 & 2\\ -4 & 3\end{pmatrix}$.

a) Démontrer que A est inversible.

b) Donner sa matrice inverse.

Solution

a) Le déterminant de la matrice A est $d=5\times 3-(-4)\times 2=23$.

$d\neq 0$ donc la matrice A est inversible.

b) La matrice inverse de A est $A^{-1}=\dfrac{1}{23}\begin{pmatrix}3 & -2\\ 4 & 5\end{pmatrix}$.

Le calcul du déterminant de $\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$ se fait avec la règle du gamma.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 5

7 On donne les matrices :

$$A=\begin{pmatrix}6 & -2\\ -1 & 3\end{pmatrix} \text{ et } B=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 3 & -1\end{pmatrix}.$$

Calculer le produit AB, puis vérifier le résultat à l'aide de la calculatrice.

Sur le modèle de l'exercice résolu 6

8 Dans chaque cas, démontrer que la matrice est inversible et donner sa matrice inverse.

$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ $\qquad B=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 3 & -1\end{pmatrix}$ $\qquad C=\begin{pmatrix}-5 & -4\\ 7 & 5\end{pmatrix}$

Exercices
- 9 à 12 (ci-contre)
- 44 à 57

3 Exemples de représentations matricielles

A Matrices et transformations géométriques

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct d'origine O. A est une matrice carrée d'ordre 2 et f est la transformation géométrique du plan qui à tout point $M(x\,;y)$ associe le point $M'(x'\,;y')$ tel que $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
Dans cette situation, on dit que A est la **matrice de la transformation *f***.

Exemples

- Le symétrique de $M(x\,;y)$ par rapport à l'axe des abscisses est le point $M'(x\,;-y)$.
$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est la matrice de transformation de cette symétrie.
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$
- L'image du point $M(x\,;y)$ par l'homothétie de centre O et de rapport k est le point $M'(kx\,;ky)$ $\left(\text{car } \overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}\right)$.
$A = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ est la matrice de transformation de cette homothétie.
$$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$$

B Matrices et systèmes linéaires

Exemple

Le système de deux équations linéaires à deux inconnues $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 5x + 7y = -3 \end{cases}$ s'écrit sous forme matricielle AX = B avec $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Propriété

A est une matrice carrée qui admet une matrice inverse A^{-1}.
Le système d'équations linéaires dont l'écriture matricielle est $AX = B$, admet une unique solution ; elle s'obtient en calculant $X = A^{-1}B$.

Démonstration

En effet, $AX = B$ équivaut à $A^{-1}(AX) = A^{-1}B$, soit $I_nX = A^{-1}B$, c'est-à-dire $X = A^{-1}B$.

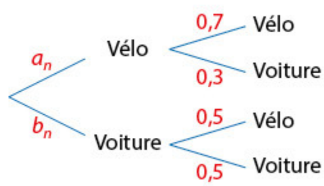
C Matrices et suites récurrentes

Exemple

Lisa aimerait aller à son travail tous les matins à vélo. Le premier jour, Lisa se rend au travail à vélo. Par la suite, elle se rend toujours au travail à vélo ou en voiture. Si elle a pris son vélo un jour, cela renforce sa motivation et elle reprend le vélo le lendemain avec une probabilité de 0,7.
Si elle a pris sa voiture un jour, la probabilité qu'elle reprenne la voiture le lendemain est de 0,5.

- **Modélisation avec des suites**

Pour tout entier naturel n non nul, on note a_n (resp. b_n) la probabilité que Lisa aille au travail à vélo (resp. en voiture) le jour n.



On a alors $a_1 = 1$ et $b_1 = 0$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,
$$\begin{cases} a_{n+1} = 0{,}7a_n + 0{,}5b_n \\ b_{n+1} = 0{,}3a_n + 0{,}5b_n \end{cases}$$

- **Modélisation avec les matrices**

On considère les matrices $M = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 0{,}5 \end{pmatrix}$ (appelée matrice de transition) et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $P_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$. Alors, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $P_{n+1} = MP_n$.

EXERCICES RÉSOLUS

9 Utiliser la matrice d'une transformation géométrique

Le plan est muni d'un repère orthonormé d'origine O.
Dans chaque cas, déterminer la matrice associée à la transformation.

a) S est la symétrie de centre O.

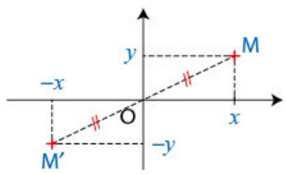
b) S′ est la symétrie orthogonale par rapport à la droite d d'équation $y = x$.

Solution

a) Le symétrique du point $M(x\,;y)$ par S est le point $M'(-x\,;-y)$.
La matrice A associée à S est telle que :

$$A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x\\-y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1x+0y\\0x-1y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.$$

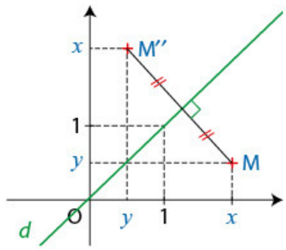
Donc la matrice de la symétrie S est $A=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$.



b) Le symétrique du point $M(x\,;y)$ par S′ est le point $M''(y\,;x)$.
La matrice B associée à S′ est telle que :

$$B\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y\\x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0x+1y\\1x+0y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.$$

Donc la matrice de la symétrie S′ est $B=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$.



10 Résoudre un système d'équations linéaires

(**S**) est le système d'équations $\begin{cases}x+y+z=156\\2{,}5x+y+1{,}5z=306\\350x+120y+90z=39\,160\end{cases}$.

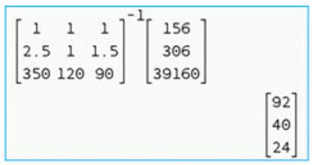
Écrire le système (**S**) sous la forme matricielle AX = B, puis le résoudre à l'aide de la calculatrice.

Solution

Le système (**S**) s'écrit sous forme matricielle AX = B avec $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2{,}5&1&1{,}5\\350&120&90\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}156\\306\\39\,160\end{pmatrix}$.

À l'aide de la calculatrice, on obtient alors $X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}92\\40\\24\end{pmatrix}$.

Le système (**S**) admet une solution unique, $\mathcal{S}=\{(92\,;40\,;24)\}$.



EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 9

11 Le plan est muni d'un repère orthonormé. Déterminer la matrice A associée à la symétrie orthogonale par rapport :

a) à l'axe des ordonnées ;

b) à la droite d'équation $y=-x$.

Sur le modèle de l'exercice résolu 10

12 Écrire le système (**S**) sous la forme matricielle AX=B, puis le résoudre à l'aide de la calculatrice.

$$(\mathbf{S})\begin{cases}x+y+z=250\\x+2y+3z=360\\40x+20y+10z=8\,100\end{cases}.$$

Cours

Exercices
- 13 à 16 (ci-contre)
- 58 à 70

4 Suites de matrices colonnes

A Puissance d'une matrice carrée

A désigne une matrice carrée d'ordre supérieur ou égal à 2 et n un nombre entier naturel non nul.

Définition

La **puissance n-ième** d'une matrice carrée A est la matrice notée A^n telle que $\mathbf{A^n} = \underbrace{\mathbf{A} \times \mathbf{A} \times \ldots \times \mathbf{A}}_{n \text{ fois}}$.

Propriété

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $A^{n+1} = A^n \times A = A \times A^n$ avec $A^1 = A$.

Exemple

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Alors $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} -9 & -11 \\ 22 & 13 \end{pmatrix}$.

B Suite de matrices colonnes vérifiant une relation de récurrence

n et N désignent des nombres entiers naturels avec $N \geqslant 2$.
On s'intéresse ici à la suite de matrices colonnes (U_n) (ayant N lignes) définie par la donnée de son premier terme U_0 et pour tout entier naturel n, par une relation de récurrence $U_{n+1} = AU_n + C$ où A est une matrice carrée d'ordre N et C une matrice colonne ayant N lignes.

Définition

On appelle **état stable** de la suite (U_n), une matrice colonne S (ayant N lignes) telle que $\mathbf{S = AS + C}$.

Propriété

Si la matrice **$\mathbf{I - A}$ est inversible**, alors **il existe** un état stable. Il est donné par $\mathbf{S = (I - A)^{-1}C}$.

Démonstration

$S = AS + C$ équivaut à $S - AS = C$, c'est-à-dire $(I - A)S = C$, soit $(I - A)^{-1}(I - A)S = (I - A)^{-1}C$ et $S = (I - A)^{-1}C$.

Exemple

La suite de matrices colonnes (U_n) est définie par son premier terme U_0 et pour tout entier naturel n,

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & -3 \\ -4 & 3 & -7 \end{pmatrix} U_n + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

À l'aide de la calculatrice, on constate que la matrice $I_3 - A$ est inversible et que :

$$(I_3 - A)^{-1} = \begin{pmatrix} -4{,}5 & 7 & -1{,}5 \\ -2 & 4 & -1 \\ 1{,}5 & -2 & 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

Il existe donc un état stable S donné par $S = (I_3 - A)^{-1}C$. On obtient alors $S = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Définition

Dire qu'une suite de matrices colonnes (U_n) **converge** vers une matrice L de même dimension signifie que chaque coefficient de U_n tend, quand n tend vers $+\infty$, vers le coefficient correspondant de L.

Dans le cas où il existe un état stable S, alors pour tout entier naturel n, on pose $V_n = U_n - S$ et ainsi $V_{n+1} = AV_n$.
On démontre alors par récurrence que pour tout entier naturel n, $V_n = A^n V_0$.
On peut alors étudier la convergence de la suite (V_n), puis celle de la suite (U_n).

EXERCICES RÉSOLUS

13 Déterminer des puissances d'une matrice

On donne $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et n désigne un nombre entier naturel non nul.

a) Calculer A^2, A^3 et A^4.

b) Conjecturer, pour tout entier naturel n, une expression de A^n en fonction de n et démontrer cette conjecture à l'aide d'un raisonnement par récurrence.

Solution

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On utilise la calculatrice : on édite la matrice A, puis avec la touche ^ (ou x^y) on obtient A^2, A^3 et A^4.

b) On conjecture que, pour tout entier naturel n non nul, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On le démontre par récurrence.

- **Initialisation :** pour $n = 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2\times 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. L'égalité est donc vraie pour $n = 1$.
- **Hérédité :** on suppose que, pour un entier naturel k non nul, $A^k = \begin{pmatrix} 1 & 2k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Alors $A^{k+1} = A^k A = \begin{pmatrix} 1 & 2k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2k+2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2(k+1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi l'égalité est vraie à l'ordre $k+1$.

- **Conclusion** : pour tout entier naturel non nul n, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

14 Recherche d'un état stable

(U_n) est une suite de matrices colonnes définie par son premier terme U_0 et pour tout entier naturel n,

$$U_{n+1} = AU_n + C \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer un état stable $S = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ où a, b et c désignent des nombres réels.

Solution

$S = AS + C$ équivaut à $\begin{cases} a = c+1 \\ b = 0{,}5a \\ c = 0{,}5a + b - 1 \end{cases}$, soit $\begin{cases} c = a-1 \\ b = 0{,}5a \end{cases}$.

La matrice $I_3 - A$ n'est pas inversible. Il existe ici plusieurs états stables.

Ainsi, toute matrice colonne $S = \begin{pmatrix} a \\ 0{,}5a \\ a-1 \end{pmatrix}$ où a est un nombre réel est un état stable.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 13

15 On donne $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et n désigne un nombre entier naturel non nul.

a) Calculer, à l'aide de la calculatrice M^2, M^3 et M^4.

b) Conjecturer, pour tout entier naturel n, une expression de M^n en fonction de n.

c) Démontrer cette conjecture par récurrence.

Sur le modèle de l'exercice résolu 14

16 (U_n) est la suite de matrices colonnes définie par U_0 et pour tout entier naturel n,

$$U_{n+1} = AU_n + C \text{ où } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Déterminer un état stable $S = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ où a, b et c désignent des nombres réels.

EXERCICE RÉSOLU

17 Étudier une suite de matrices colonnes à l'aide d'un programme

Cours 4. B

(U_n) est la suite de matrices colonnes définie par $U_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et pour tout entier naturel n,

$$U_{n+1} = AU_n + C \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Pour i allant de 1 à n
| $X \leftarrow 2x + y + 4$
| $y \leftarrow 3x - y - 1$
| $x \leftarrow X$
Fin pour

a) Au début de l'algorithme ci-contre, on affecte 3 à x et 1 à y.
Exécuter cet algorithme pas à pas en complétant un tableau de suivi des variables pour $n = 3$.

b) Expliquer le rôle de cet algorithme.

c) Coder cet algorithme en langage Python, saisir le programme, puis déterminer U_6.

Solution

a) Voici un tableau de suivi des variables obtenu lorsqu'on exécute l'algorithme pour $n = 3$.

i		1	2	3
X		11	33	95
y	1	7	25	73
x	3	11	33	95

b) L'algorithme calcule les coefficients de la matrice colonne U_n pour un nombre entier naturel n donné.

c) La fonction **U** ci-contre, écrite en langage Python, renvoie pour résultat le couple $(x_n\,;\,y_n)$ formé des coefficients de la matrice U_n pour une valeur donnée du paramètre n.

```
from math import*

def U(n):
    x=3
    y=1
    for i in range(1,n+1):
        X=2*x+y+4
        y=3*x-y-1
        x=X
    return(x,y)
```

Dans la boucle, la nouvelle valeur de x est stockée momentanément dans la variable X, le temps de calculer la nouvelle valeur de y.

Pour $n = 6$, dans la console, on obtient l'affichage :

```
>>> U(6)
(2091, 1657)
```

, ainsi $U_6 = \begin{pmatrix} 2\,091 \\ 1\,657 \end{pmatrix}$.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 17

18 (U_n) est la suite de matrices colonnes définie par $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et pour tout entier naturel n,

$$U_{n+1} = AU_n + C \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pour i allant de 1 à n
| $X \leftarrow x - y - 1$
| $y \leftarrow x + y$
| $x \leftarrow X$
Fin pour

a) Au début de cet algorithme, on affecte 1 à x et 2 à y. L'exécuter pas à pas en complétant un tableau de suivi des variables pour $n = 5$.

b) Expliquer son rôle.

c) Coder cet algorithme en langage Python, saisir le programme, puis déterminer U_{20}.

19 (U_n) est la suite de matrices colonnes définie par $U_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ où a et b sont deux nombres réels et, pour tout nombre entier naturel n,

$$U_{n+1} = AU_n + C \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

a) Écrire un algorithme qui détermine les coefficients de la matrice U_n pour un nombre entier naturel n et des nombres réels a et b donnés.

b) Coder cet algorithme en langage Python et le saisir.

c) Exécuter le programme obtenu afin de déterminer la matrice U_9 lorsque $U_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

d) Déterminer U_1 lorsque $U_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Que peut-on alors conjecturer dans cette situation ? Prouver cette conjecture.

Vocabulaire des matrices et premières opérations

Cours 1

Questions flash — À l'oral

20 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

Laquelle de ces affirmations est exacte ?

(1) A est de dimension (3,2).

(2) A est une matrice carrée.

(3) $a_{21} = -3$.

21 $A = \begin{pmatrix} a+1 & 1 \\ 3 & 2b \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b & 1 \\ a & 8 \end{pmatrix}$.

Déterminer mentalement pour quelles valeurs de a et b les matrices A et B sont égales.

22 $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 20 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 10 & -6 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer mentalement la somme $A + B$.

b) Déterminer mentalement le produit $-\frac{1}{2}B$.

23 $M = \begin{pmatrix} \dots & 2 & \dots \\ 1 & \dots & -1 \end{pmatrix}$

a) Préciser la dimension de la matrice M.

b) Recopier et compléter la matrice M sachant que :
$a_{22} = 2a_{11} = 3a_{21}$ et $a_{21} + a_{22} + a_{23} = a_{11} + a_{12} + a_{13}$.

24 Écrire, dans chaque cas, la matrice carrée A d'ordre 3, telle que, pour tous entiers naturels i et j, compris entre 1 et 3 :

a) $a_{ij} = \begin{cases} i & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i < j \\ -1 & \text{si } i > j \end{cases}$ **b)** $a_{ij} = i + j$

25 $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 12 & -8 & 4 \\ 0 & -3 & -7 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 9 & 1 & -6 \\ 8 & 0 & -5 \\ -4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer sans calculatrice les matrices :

• $A - B$ • $2A$ • $A + 2B$

b) Vérifier les résultats à l'aide de la calculatrice.

26 $A = \begin{pmatrix} 2x^2 & 5y-4 \\ 0 & y^2-4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 18 & 3x+7 \\ 0 & 4x \end{pmatrix}$.

Déterminer les nombres réels x et y tels que les matrices A et B soient égales.

27 $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ -b^2 & 2b \end{pmatrix}$ et $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Déterminer les nombres réels a et b tels que $A + B = I_2$.

Multiplication, inverse d'une matrice

Cours 2

Questions flash — À l'oral

28 $A = \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ et $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Déterminer mentalement $A \times I_2$ et $I_2 \times A$.

29 $A = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & -4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \end{pmatrix}$.

Expliquer l'affichage obtenu ci-dessous.

```
[A]*[B]
                    Erreur
```

30 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

La matrice AB est de dimension :

(1) (1,2) **(2)** (2,2) **(3)** (2,1)

31 A est une matrice carrée d'ordre 3, elle admet une matrice inverse A^{-1}.

Déterminer chacun des produits suivants :

a) $A \times A^{-1}$ **b)** $A^{-1} \times A$ **c)** $A \times A^{-1} \times A$

32 $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

Déterminer mentalement laquelle de ces matrices est la matrice inverse de M.

(1) $\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ **(2)** $\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ **(3)** $\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

33 On donne les matrices :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Déterminer sans calculatrice, lorsque c'est possible :

• AB • AC • AD • BC • CD • DC

34 Dans chaque cas, déterminer sans calculatrice le produit AB, puis vérifier le résultat à l'aide de la calculatrice.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$.

b) $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 4 \\ -3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

c) $A = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0{,}1 & 20 \\ -5 & 16 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 13 & 45 & 8 \\ 10 & 10 & 0{,}2 \end{pmatrix}$.

35 $M=\begin{pmatrix}5 & 4\\-2 & 0\end{pmatrix}$ et $N=\begin{pmatrix}-3 & 0\\2 & -4\end{pmatrix}$.

Déterminer sans la calculatrice :

a) les produits MN et NM, que remarque-t-on ?

b) le produit $(M-2N)(M+2N)$.

36 $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\4 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix}3 & 1\\9 & 1\end{pmatrix}$.

a) Déterminer sans la calculatrice les produits BA et CA.

b) Que remarque-t-on ?

Pour les exercices 37 et 38, utiliser la calculatrice pour déterminer l'inverse de la matrice A.

37 **a)** $A=\begin{pmatrix}7 & 6\\5 & 4\end{pmatrix}$ **b)** $A=\begin{pmatrix}3 & -2\\-7 & 5\end{pmatrix}$

38 **a)** $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 2 & -1\\0 & 1 & 1\end{pmatrix}$ **b)** $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\1 & 0 & -1\\2 & 1 & 1\end{pmatrix}$

Pour les exercices 39 et 40, déterminer si la matrice A est inversible. Si oui, donner, sans calculatrice, sa matrice inverse.

39 **a)** $A=\begin{pmatrix}0 & 2\\-3 & 4\end{pmatrix}$ **b)** $A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\-2 & 1\end{pmatrix}$

40 **a)** $A=\begin{pmatrix}3 & 6\\2 & 4\end{pmatrix}$ **b)** $A=\begin{pmatrix}10 & -4\\2 & 0{,}8\end{pmatrix}$

41 a, b, c et d désignent des nombres réels.

On donne $A=\begin{pmatrix}-2 & 3\\4 & -1\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$.

a) Montrer que l'égalité $A\times B=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$ est équivalente à :

$$\begin{cases}-2a+3c=1\\4a-c=0\end{cases} \text{ et } \begin{cases}-2b+3d=0\\4b-d=1\end{cases}.$$

b) Résoudre les systèmes précédents.

En déduire la matrice inverse de la matrice A.

42 $A=\begin{pmatrix}3 & -1\\-1 & 0\end{pmatrix}$ et $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$.

a) Vérifier par le calcul que $A(A-3I_2)=I_2$.

b) En déduire que la matrice A est inversible et déterminer son inverse.

43 $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\3 & 1\end{pmatrix}$

a) Calculer $AA-2A$.

b) Justifier que $A(A-2I_2)=8I_2$ où I_2 est la matrice identité d'ordre 2.

c) En déduire que la matrice A est inversible.

Donner A^{-1}.

Exemples de représentations matricielles

Cours 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct d'origine O.

Questions flash

À l'oral

44 $A=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & 0\\0 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ est la matrice d'une homothétie de centre O. Quel est son rapport ?

45 $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}$ est la matrice d'une symétrie. Laquelle ?

46 Donner mentalement la matrice de :

a) la symétrie par rapport à l'axe des abscisses ;

b) la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

47 Le système $\begin{cases}-x+2y=3\\5x+7y=1\end{cases}$ s'écrit sous forme matricielle $A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=B$.

Donner les matrices A et B.

48 (a_n) et (b_n) sont les suites définies par $a_0=b_0=0{,}5$ et pour tout entier naturel n,

$$\begin{cases}a_{n+1}=0{,}2a_n+0{,}4b_n\\b_{n+1}=0{,}8a_n+0{,}6b_n\end{cases}.$$

Quelle relation de récurrence la matrice $P_n=\begin{pmatrix}a_n\\b_n\end{pmatrix}$ vérifie-t-elle ?

49 r est le quart de tour direct de centre O, c'est-à-dire la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

A est la matrice associée à r.

1. a) Déterminer les coordonnées de l'image par r du point $I(1;0)$, puis du point $J(0;1)$.

b) Traduire ces résultats avec la matrice A.

2. a) Pour tous réels x et y, déterminer la matrice :

$$x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

b) $M(x\,;y)$ est un point du plan. Expliquer pourquoi :

$$A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}.$$

c) En déduire la matrice A associée à r.

3. Déterminer les coordonnées de l'image par r du point $N\left(-\frac{7}{2};\frac{3}{4}\right)$.

50 r est la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$ dans le sens direct. A est la matrice associée à r.

1. a) On note I′ et J′ les images respectives par r des points $\mathrm{I}(1;0)$ et $\mathrm{J}(0;1)$.

Expliquer pourquoi $\mathrm{I}'\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$ et $\mathrm{J}'\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

b) Traduire ces résultats avec la matrice A.

2. a) Pour tous réels x et y, déterminer la matrice $x\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$.

b) $\mathrm{M}(x;y)$ est un point du plan. Expliquer pourquoi :

$$\mathrm{A}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}.$$

c) En déduire la matrice A associée à r.

51 (**S**) est le système $\begin{cases}2x-4y=5\\ x+6y=1\end{cases}$.

Le système (**S**) s'écrit sous la forme matricielle $\mathrm{AX}=\mathrm{B}$ avec $\mathrm{X}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ et $\mathrm{B}=\begin{pmatrix}5\\ 1\end{pmatrix}$.

a) Laquelle des matrices suivantes est celle de la matrice A ?

(1) $\begin{pmatrix}2&4\\ 1&6\end{pmatrix}$ **(2)** $\begin{pmatrix}2&-4\\ 1&6\end{pmatrix}$ **(3)** $\begin{pmatrix}2&-4\\ 0&6\end{pmatrix}$

b) Déterminer la matrice inverse de A à l'aide de la calculatrice, puis résoudre le système (**S**).

52 (**S**) est le système $\begin{cases}2x-y+z=7\\ -x+2y+z=4\\ x-2y+z=0\end{cases}$.

a) Écrire le système (**S**) sous la forme matricielle $\mathrm{AX}=\mathrm{B}$, où A, X et B sont des matrices que l'on précisera.

b) Déterminer la matrice inverse de A à l'aide de la calculatrice, puis résoudre le système (**S**).

53 Résoudre, à l'aide du calcul matriciel les systèmes :

a) $\begin{cases}-4x+3y=0\\ 2x+y=-1\end{cases}$ **b)** $\begin{cases}x-2y=4\\ -4x-y=1\end{cases}$

54 Pour repeindre la pièce principale de son appartement, Frédéric a utilisé 3 pots de peinture blanche et 4 pots de peinture de couleur pour un total de 202 €. Pour les pièces annexes, il a utilisé 5 pots de peinture blanche et 7 pots de peinture de couleur pour un total de 347,50 €.

On note x (resp. y) le prix, en euro, d'un pot de peinture blanche (resp. de couleur).

a) Écrire un système (**S**) vérifié par le couple $(x;y)$.

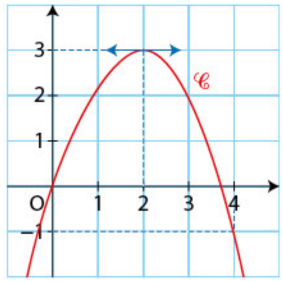
b) Résoudre ce système à l'aide du calcul matriciel et interpréter ce résultat.

55 Résoudre, à l'aide du calcul matriciel les systèmes :

a) $\begin{cases}x+y+z=6\\ 2x+3y-2z=2\\ 4x-y+2z=8\end{cases}$

b) $\begin{cases}3a+5b=12\\ a-3c=5\\ 5b-c=17\end{cases}$

56 On a tracé, dans le repère orthonormé ci-contre, une partie de la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax^3+bx^2+cx$ où a, b et c désignent des nombres réels.



a) Utiliser les informations indiquées en bleu sur le graphique pour écrire un système (**S**) à trois équations d'inconnues a, b et c.

b) Résoudre ce système à l'aide du calcul matriciel.

c) En déduire l'expression de $f(x)$.

57 Dans le cadre d'une étude, des chercheurs enferment des souris de laboratoire dans une cage comportant deux compartiments A et B.

La porte entre ces compartiments est ouverte pendant dix minutes tous les jours à midi.

On estime que chaque jour :

- 20 % des souris présentes dans le compartiment A avant l'ouverture de la porte se trouvent dans le compartiment B après fermeture de la porte.
- 10 % des souris qui étaient dans le compartiment B avant l'ouverture de la porte se trouvent dans le compartiment A après fermeture de la porte.

On suppose qu'au départ, les deux compartiments A et B contiennent le même effectif de souris.

On pose $a_0=0{,}5$ et $b_0=0{,}5$.

Pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, on note a_n et b_n les proportions de souris présentes respectivement dans les compartiments A et B au bout de n jours, après fermeture de la porte.

On désigne par U_n la matrice $\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\end{pmatrix}$.

a) Justifier que $\mathrm{U}_1=\begin{pmatrix}0{,}45\\ 0{,}55\end{pmatrix}$.

b) Pour tout entier naturel n, exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

c) En déduire que pour tout entier naturel n, $\mathrm{U}_{n+1}=\mathrm{MU}_n$ où M est une matrice que l'on précisera.

d) Déterminer la répartition des souris dans les compartiments A et B au bout de 3 jours.

Suite de matrices colonnes

Cours 4

Questions flash — À l'oral

58 $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$

Déterminer mentalement :

a) A^2 **b)** A^3

59 $A=\begin{pmatrix}0&2\\2&0\end{pmatrix}$, $A^2=\begin{pmatrix}4&0\\0&4\end{pmatrix}$, $A^3=\begin{pmatrix}0&8\\8&0\end{pmatrix}$.

Conjecturer une expression de A^n pour n entier non nul.

Pour les exercices 60 et 61, (u_n) et (v_n) sont des suites définies sur $\mathbb{N}$. Pour tout entier naturel n, $\begin{cases}u_{n+1}=2u_n+4\\v_{n+1}=5v_n-1\end{cases}$ et on pose $U_n=\begin{pmatrix}u_n\\v_n\end{pmatrix}$.

60 Déterminer mentalement les matrices A et C telles que pour tout entier naturel n,

$$U_{n+1}=AU_n+C.$$

61 Laquelle de ces matrices est un état stable ?

(1) $S=\begin{pmatrix}-4\\0,25\end{pmatrix}$ **(2)** $S=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ **(3)** $S=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-0,25\end{pmatrix}$

62 $A=\begin{pmatrix}0,5&0,5\\0,5&0,5\end{pmatrix}$

Calculer A^2 et en déduire une expression de A^n où n est un nombre entier naturel non nul.

63 $A=\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix}$

a) Déterminer à l'aide de la calculatrice A^2, A^3, A^4.

b) Conjecturer une expression de A^n avec n entier naturel non nul.

c) Démontrer cette conjecture par récurrence.

64 $M=\begin{pmatrix}0&-1\\3&4\end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix}-1&1\\1&-3\end{pmatrix}$ et $D=\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix}$.

a) Déterminer à l'aide de la calculatrice, la matrice inverse P^{-1} de P, puis vérifier que $M=PDP^{-1}$.

b) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, $M^n=PD^nP^{-1}$.

c) On admet que pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, $D^n=\begin{pmatrix}1&0\\0&3^n\end{pmatrix}$.

En déduire alors M^n en fonction de n.

65 Dans chaque cas, à l'aide de la calculatrice, conjecturer une expression de A^n avec n entier naturel non nul. Démontrer ensuite cette conjecture par un raisonnement par récurrence.

a) $A=\begin{pmatrix}3&3\\3&3\end{pmatrix}$ **b)** $A=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&-2&0\\0&0&4\end{pmatrix}$

66 $M=\begin{pmatrix}3&1\\-3&-1\end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix}0&1\\1&-2\end{pmatrix}$ et $D=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$.

a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, $M^n=PD^nP^{-1}$.

b) On admet que pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, $D^n=\begin{pmatrix}2^{n-1}&2^{n-1}\\2^{n-1}&2^{n-1}\end{pmatrix}$. Exprimer alors M^n en fonction de n.

67 (U_n) est une suite de matrices colonnes définie par la donnée de U_0 et pour tout entier naturel n,

$$U_{n+1}=\begin{pmatrix}2&-1\\2&0\end{pmatrix}U_n+\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}.$$

Utiliser l'affichage ci-contre pour déterminer l'état stable S.

$$\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2&-1\\2&0\end{bmatrix}\right)^{-1}$$
$$\begin{bmatrix}1&-1\\2&-1\end{bmatrix}$$

68 (U_n) est une suite de matrices colonnes définie par la donnée de U_0 et pour tout entier naturel n,

$$U_{n+1}=AU_n+C.$$

Dans chaque cas, déterminer, après avoir vérifié son existence à l'aide de la calculatrice, l'état stable S.

a) $A=\begin{pmatrix}5&2\\1&3\end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$; **b)** $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&2\\2&0&1\end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$.

69 (u_n) et (v_n) sont des suites telles que pour tout entier naturel n, $\begin{cases}u_{n+1}=u_n-v_n+4\\v_{n+1}=2u_n+3v_n-1\end{cases}$.

a) Déterminer les matrices A et C telles que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1}=AU_n+C$ avec $U_n=\begin{pmatrix}u_n\\v_n\end{pmatrix}$.

b) Montrer que la matrice $S=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ est un état stable de la suite de matrices (U_n) si, et seulement si, le couple $(x\,;y)$ est solution du système $\begin{cases}-y+4=0\\2x+2y-1=0\end{cases}$.

c) Résoudre ce système et en déduire l'état stable.

70 La suite de matrices colonnes (U_n) est définie par son premier terme U_0 et pour tout entier naturel n,

$$U_{n+1}=AU_n+C \text{ où } A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&1&0\end{pmatrix} \text{ et } C=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}.$$

Déterminer un état stable S.

71 QCM **Dans chaque cas, donner la réponse exacte sans justifier.**

On donne les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

		A	B	C	D
1	La matrice A + 3C est égale à …	$\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$
2	Le produit AB est égal à …	$\begin{pmatrix} 4 & -4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & -4 \end{pmatrix}$
3	La matrice inverse de A est égale à …	$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
4	Pour tout entier naturel n non nul, C^n est égal à …	$\begin{pmatrix} -1 & -2n \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} (-1)^n & (-1)^n 2n \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} (-1)^n & (-1)^{n+1} 2n \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 2n \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

72 QCM **Dans chaque cas, donner la (ou les) réponse(s) exacte(s) sans justifier.**

On donne les matrices $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -10 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ avec a et b nombres réels.

		A	B	C	D
1	L'inverse de la matrice A est égale à …	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$	$5I - A$	$5I + A$
2	L'équation matricielle AX = B est équivalente à …	$X = A^{-1}B$	$\begin{cases} 5a + b - 2 = 0 \\ a + 10 = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} a + 0{,}2b = 0{,}4 \\ a = 10 \end{cases}$	$X = BA^{-1}$
3	(U_n) est une suite de matrices colonnes. Pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = AU_n + B$. L'état stable associé est …	$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$	$S = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -8 \\ 38 \end{pmatrix}$	$S = (I - A)^{-1}B$	$S = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 8 \\ -38 \end{pmatrix}$

73 Vrai/Faux **Dans chaque cas, dire si l'affirmation est vraie ou fausse en justifiant.**

1 (u_n) est la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 3u_n$.

Affirmation : pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \times U_n$ avec $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$.

2 f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ où a, b, c et d désignent des nombres réels. On sait que $f(0) = 1$, $f(1) = 0$, $f(2) = 10$ et $f(3) = 1$.

Affirmation : $f(-1) = 43$.

3 Dans un repère orthonormé direct d'origine O, on donne les points $A\left(2\sqrt{2}\,;2\right)$ et $B\left(2\,;2\sqrt{2}\right)$.

Affirmation : le point B est l'image du point A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

4 A et B sont deux matrices carrées d'ordre 2 non nulles.

Affirmation : le produit AB est une matrice carrée d'ordre 2 non nulle.

Vérifiez vos réponses : p. 293

74 Suivre un guide pour déterminer un état stable

La suite de matrices colonnes (U_n) est définie par son premier terme U_0 et pour tout entier naturel n :

$$U_{n+1} = AU_n + C \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On se propose de déterminer un état stable de la suite (U_n).

Rédiger ce raisonnement en suivant le guide ci-dessous.

(1) Rappeler la définition : un état stable est une matrice S telle que… **(1)**

(2) Traduire par un système : on pose $S = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ avec a, b et c nombres réels,

(1) se traduit par le système d'équations **(E)** $\begin{cases} a = \dots \\ b = \dots. \\ c = \dots \end{cases}$

(3) Simplifier le système obtenu :

Le système (**E**) est équivalent au système $\begin{cases} 2a - 4b + c = \dots \\ \dots = 0 \end{cases}$, soit $\begin{cases} b = 0{,}35a - 0{,}2 \\ c = -0{,}6a + \dots \end{cases}$.

(4) Conclure : toute matrice colonne $S = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$ où a est un nombre réel, est un état stable.

> **Conseil**
> Ici, la matrice $I_3 - A$ n'est pas inversible et la suite (U_n) admet plusieurs états stables.

75 Comprendre une démonstration

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct d'origine O.
r est la rotation de centre O et d'angle θ.

Propriété : la matrice A de la rotation r est $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

Voici la démonstration de cette propriété.

L'image du point $M(x\,;y)$, distinct de O, par la rotation r est le point $M'(x'\,;y')$.
On note $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$.
$\frac{OM'}{OM} = 1$ et $(\overrightarrow{OM}\,;\overrightarrow{OM'}) = \theta\ [2\pi]$, c'est-à-dire $\frac{z'}{z}$ est le nombre complexe de module 1 dont un argument est θ. Ainsi $z' = e^{i\theta}z$.
Donc, $\begin{cases} x' = x\cos(\theta) - y\sin(\theta) \\ y' = x\sin(\theta) + y\cos(\theta) \end{cases}$.
La matrice associée à la rotation r est donc $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

Expliquer chaque étape écrite en vert du raisonnement.

> **Conseil**
> Utiliser le fait que $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.

76 Conjecturer puis démontrer

On donne la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Conjecturer

a) Déterminer à l'aide de la calculatrice, les matrices A^2, A^3, A^4 et A^5.

b) Conjecturer, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, l'expression de A^n.

2. Démontrer

Démontrer alors cette conjecture à l'aide d'un raisonnement par récurrence.

Manipuler des matrices

77 On donne les matrices :

$$M=\begin{pmatrix}0&1&0\\-4&-2&8\\-1&0&2\end{pmatrix} \text{ et } A=\begin{pmatrix}-5&-4&16\\0&3&0\\-4&-2&11\end{pmatrix}.$$

I_3 est la matrice unité d'ordre 3.

a) Déterminer sans calculatrice, les matrices M^2 et M^3.

b) Démontrer qu'il existe des réels a et b tels que :

$$A = aM^2 + bI_3.$$

c) En déduire que $MA = 3M$.

78 Algo python

M est une matrice où a_{ij} est le coefficient situé à la i-ième ligne et j-ième colonne.

Le programme ci-dessous, écrit en langage Python, permet de calculer et d'afficher les coefficients a_{ij} de la matrice M.

```
n=int(input("n="))
for i in range (1,n+1):
    for j in range (1,n):
        aij=2*j-i
        print("a",i,j,"=",aij)
```

1. Dans cette question, on saisit $n = 2$.

a) Expliquer pourquoi la matrice M est de dimension (2,1).

b) Déterminer la matrice M.

2. Dans cette question, on saisit $n = 3$.

a) Quelle est la dimension de la matrice M ?

b) Déterminer la matrice M.

3. Saisir et exécuter ce programme pour vérifier les résultats obtenus aux questions précédentes.

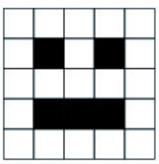
79 On modélise une image numérique en noir et blanc par une matrice composée de 0, pour un pixel noir, et de 1, pour un pixel blanc.

1. M est une matrice carrée d'ordre 5 composée de 0 et de 1 et $T=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\end{pmatrix}$.

a) Quel effet la multiplication TM a-t-elle sur la matrice M ? Justifier.

b) Quel effet la multiplication MT a-t-elle sur la matrice M ? Justifier.

2. M est la matrice qui modélise l'image ci-contre.



Dans chaque cas, déterminer sans calcul la matrice :

a) T^5M **b)** MT^3 **c)** T^2MT^2.

Déterminer l'inverse, la puissance *n*-ième d'une matrice

80 On donne $M=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\4&2&1\end{pmatrix}$ et $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

a) Déterminer la matrice M^2.

On admet que $M^3=\begin{pmatrix}20&10&11\\12&2&9\\42&20&21\end{pmatrix}$.

b) Vérifier que $M^3 = M^2 + 8M + 6I$.

c) En déduire que la matrice M est inversible et que :

$$M^{-1} = \frac{1}{6}\left(M^2 - M - 8I\right).$$

81 **1.** On donne $A=\begin{pmatrix}2&2\\2&-1\end{pmatrix}$ et $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

a) Déterminer les nombres réels a et b tels que la matrice $A^2 + aA + bI_2$ soit égale à la matrice nulle.

b) En déduire que la matrice A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A et I_2.

2. On donne $B=\begin{pmatrix}2&2&-1\\2&-1&-1\\-1&-1&-1\end{pmatrix}$ et $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

a) Déterminer les nombres réels a, b et c tels que la matrice $B^3 + aB^2 + bB + cI_3$ soit égale à la matrice nulle.

b) En déduire que la matrice B est inversible et exprimer B^{-1} en fonction de B^2 et I_3.

82 On donne $A=\begin{pmatrix}0{,}995&0{,}005\\0{,}6&0{,}4\end{pmatrix}$ et $P=\begin{pmatrix}1&-1\\1&120\end{pmatrix}$.

a) Justifier que P est inversible et déterminer P^{-1}.

b) Déterminer la matrice D définie par $D = P^{-1}AP$.

c) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$A^n = PD^nP^{-1}.$$

d) À l'aide de la calculatrice, conjecturer la matrice D^n pour n entier naturel non nul, puis démontrer cette conjecture.

e) En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$A^n = \frac{1}{121}\begin{pmatrix}120+0{,}395^n & 1-0{,}395^n\\ 120(1-0{,}395^n) & 1+120\times 0{,}395^n\end{pmatrix}.$$

83 On donne les matrices :

$$T=\begin{pmatrix}\frac{9}{16}&\frac{7}{16}\\\frac{9}{16}&\frac{7}{16}\end{pmatrix}, R=\begin{pmatrix}\frac{7}{16}&\frac{-7}{16}\\\frac{-9}{16}&\frac{9}{16}\end{pmatrix} \text{ et } M=\begin{pmatrix}0{,}3&0{,}7\\0{,}9&0{,}1\end{pmatrix}.$$

a) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$T^n = T \text{ et } R^n = R.$$

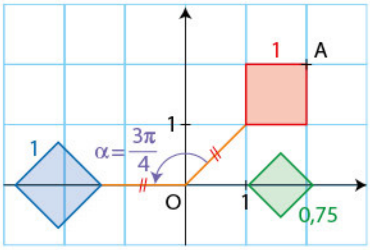
b) Déterminer le réel α tel que $M = T + \alpha R$.

c) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$M^n = T + \alpha^n R.$$

Représenter à l'aide de matrices

84 On a tracé, dans le repère orthonormé direct d'origine O ci-dessous, trois carrés. L'unité est le centimètre.



1. a) Quel est l'angle de la rotation de centre O qui transforme le carré rouge en le carré bleu ?

b) Déterminer la matrice M associée à cette transformation (voir exercice **75**).

2. a) Quel est le rapport de l'homothétie de centre O qui transforme le carré bleu en le carré vert ?

b) Déterminer la matrice M′ associée à cette transformation.

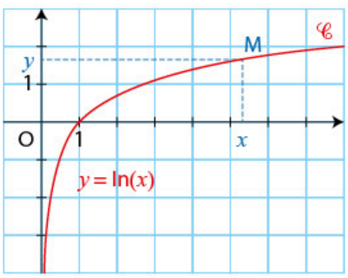
3. a) Déterminer la matrice M″ associée à la transformation permettant de passer directement du carré rouge au carré vert.

b) En déduire les coordonnées de chaque sommet du carré vert.

4. Le point $A'\left(-1-\sqrt{3}\,;-1+\sqrt{3}\right)$ est l'image du point $A(2\,;2)$ par une rotation de centre O.

Déterminer les coordonnées des images des trois autres sommets du carré rouge par cette rotation.

85 Dans le repère orthonormé ci-dessous, on a tracé la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction logarithme népérien.



Le point $M(x\,;y)$ décrit la courbe $\mathscr{C}$.

a) Quel est l'ensemble décrit par le point $M'(x'\,;y')$ tel que $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$?

b) Le point $M''(x''\,;y'')$ décrit la courbe représentative de la fonction $x \mapsto -\ln(x)$.

Déterminer la matrice B telle que $\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

86 Le plan est muni d'un repère orthonormé direct de centre O (*unité graphique* : 4 cm).

x, y, x' et y' désignent des nombres réels.

On considère les points $M(x\,;y)$ et $M'(x'\,;y')$ tels que :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ avec } A = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Démontrer que M′ est l'image du point M par une rotation dont on précisera le centre et l'angle (voir exercice **75**).

2. (M_n) est la suite de points de coordonnées $(x_n\,;y_n)$ définie par $M_0(1\,;0)$ et pour tout entier naturel n,

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}.$$

a) Démontrer que pour tout entier naturel n,

$$M_n\left(\cos\left(\frac{3n\pi}{4}\right);\sin\left(\frac{3n\pi}{4}\right)\right).$$

b) Construire les points M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4.

c) Montrer que pour tout entier naturel n, les points M_n et M_{n+8} sont confondus.

3. Prouver que les triangles $M_0M_1M_2$ et $M_7M_0M_1$ ont la même aire. Préciser sa valeur exacte, en cm^2.

87 Un créateur d'entreprise a lancé un réseau d'agences de services à domicile. Depuis 2010, le nombre d'agences n'a fait qu'augmenter.

Ainsi, l'entreprise qui comptait 200 agences au 1er janvier 2010 est passée à 300 agences au 1er janvier 2012 puis à 500 agences au 1er janvier 2014.

On modélise le nombre d'agences, en centaine, par une fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

où a, b et c sont trois nombres réels. La variable x désigne le nombre d'années écoulées depuis 2010.

a) Traduire les données de l'énoncé par un système **(S)** de trois équations linéaires à trois inconnues a, b et c.

b) On note X la matrice $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices M et R telles que le système précédent soit équivalent à l'équation matricielle MX = R.

c) Résoudre le système **(S)**.

d) Suivant ce modèle, déterminer le nombre d'agences que l'entreprise possédera au 1er janvier 2020.

88 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les points $A(1;5;-2)$, $B(7;-1;3)$ et $C(-2;7;-2)$ et on note $\mathcal{P}$ le plan (ABC).

On cherche une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ sous la forme $ax+by+cz=73$, où a, b et c sont des nombres réels.

On note $X=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $Y=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que X vérifie la relation :

$MX=73Y$, où M est la matrice $M=\begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 7 & -1 & 3 \\ -2 & 7 & -2 \end{pmatrix}$.

b) On donne $N=\begin{pmatrix} 19 & 4 & -13 \\ -8 & 6 & 17 \\ -47 & 17 & 36 \end{pmatrix}$.

À l'aide d'une calculatrice, on a calculé les produits $M\times N$ et $N\times M$, et on a obtenu les résultats suivants :

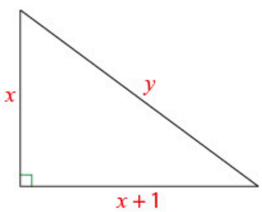
$$\begin{bmatrix} 73 & 0 & 0 \\ 0 & 73 & 0 \\ 0 & 0 & 73 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 73 & 0 & 0 \\ 0 & 73 & 0 \\ 0 & 0 & 73 \end{bmatrix}$$

À l'aide de ces informations, justifier que la matrice M est inversible et exprimer sa matrice inverse M^{-1} en fonction de la matrice N.

c) Montrer alors que $X=NY$.

En déduire que le plan $\mathcal{P}$ admet pour équation cartésienne $10x+15y+6z=73$.

89 On appelle « triangle rectangle presque isocèle », en abrégé TRPI, un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit ont pour longueurs x et $x+1$, et dont l'hypoténuse a pour longueur y, où x et y sont des nombres entiers naturels non nuls.



Dans cette situation, on dit que le couple $(x\,;y)$ définit un TRPI.

1. a) Démontrer que le couple $(x\,;y)$ d'entiers naturels non nuls définit un TRPI si, et seulement si :

$$y^2=2x^2+2x+1.$$

b) Montrer que le TRPI ayant les plus petits côtés est défini par le couple $(3\,;5)$.

2. On donne les matrices $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

x et y désignent deux nombres entiers naturels ; on définit les entiers naturels x' et y' par la relation :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+B.$$

a) Exprimer x' et y' en fonction de x et y.

b) Montrer que $y'^2-2x'(x'+1)=y^2-2x(x+1)$.

c) En déduire que si le couple $(x\,;y)$ définit un TRPI, alors le couple $(x'\,;y')$ définit également un TRPI.

3. On considère les suites (x_n) et (y_n) d'entiers naturels, définies par $x_0=3$, $y_0=5$ et pour tout entier naturel n,

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}+B.$$

a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, le couple $(x_n\,;y_n)$ définit un TRPI.

b) Déterminer, un TRPI dont les longueurs des côtés sont supérieures à 2020.

90 Algo python

Un fumeur décide d'arrêter de fumer.

On choisit d'utiliser la modélisation suivante :

- s'il ne fume pas un jour donné, il ne fume pas le jour suivant avec une probabilité de 0,9 ;
- s'il fume un jour donné, il fume le jour suivant avec une probabilité de 0,6.

On note p_n (resp. q_n) la probabilité de ne pas fumer (resp. de fumer) le n-ième jour après sa décision d'arrêter de fumer. On suppose que $p_0=0$ et $q_0=1$.

1. a) Calculer p_1 et q_1.

b) Quel couple la fonction **F** écrite ci-dessous en langage Python renvoie-t-elle pour la valeur $n=4$ du paramètre ?

```python
def F(n):
    p=0
    q=1
    for i in range(1,n+1):
        p=0.9*p+0.4*q
        q=1-p
    p=round(p,2)
    q=round(q,2)
    return(p,q)
```

2. a) Pour tout entier naturel n, on pose $X_n=\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$.

Déterminer la matrice M telle que $X_{n+1}=MX_n$.

On admet que pour tout entier naturel $n\geqslant 1$,

$$X_n=M^nX_0.$$

b) On donne $A=\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}8 \\ 0{,}2 & 0{,}2 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 0{,}2 & -0{,}8 \\ -0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}$.

Démontrer que $M=A+0{,}5B$.

c) Vérifier que $A^2=A$, $B^2=B$ et calculer les produits AB, BA. On admet dans la suite que pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, $A^n=A$ et $B^n=B$.

d) Démontrer que pour tout entier naturel $n\geqslant 1$,

$$M^n=A+0{,}5^nB.$$

e) En déduire que pour tout entier naturel $n\geqslant 1$,

$$p_n=0{,}8-0{,}8\times 0{,}5^n.$$

f) À long terme, peut-on affirmer avec certitude que le fumeur arrêtera de fumer ?

91 Dans un pays fictif, l'économie repose sur trois secteurs : l'agriculture, les biens manufacturés et l'énergie. L'unité de production est le milliard d'euros.
Pour pouvoir fonctionner, chaque secteur nécessite l'utilisation d'une partie de sa propre production, ainsi qu'une partie de la production des autres secteurs.
Ces secteurs doivent en outre satisfaire aux besoins de la population.
Les tableaux des entrées-sorties ci-dessous détaillent ces échanges durant une année.

consomme	Agriculture	Biens manufacturés	Énergie	Besoins de la population
1 unité d'agriculture	29,3 %	0	0	13,2 unités d'agriculture
1 unité de biens manufacturés	1,4 %	20,7 %	1,7 %	17,6 unités de biens manufacturés
1 unité d'énergie	4,4 %	1 %	21,6 %	1,8 unité d'énergie

On suppose que l'économie est équilibrée, c'est-à-dire que la production totale de ces trois secteurs couvre les besoins de ces secteurs et de la production.
On note x (resp. y et z) le nombre d'unités produites par l'agriculture (resp. les biens manufacturés et l'énergie) durant une année.

a) Interpréter les données en rouge des tableaux.

b) Expliquer pourquoi, lorsque l'économie est équilibrée, $0{,}014x + 0{,}207y + 0{,}017z + 17{,}6 = y$.

c) Écrire des équations analogues pour les deux autres secteurs.

d) Montrer que le système obtenu s'écrit aussi :
$\mathrm{AP} + \mathrm{D} = \mathrm{P}$ où $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\mathrm{D} = \begin{pmatrix} 13{,}2 \\ 17{,}6 \\ 1{,}8 \end{pmatrix}$ et A est une matrice carrée à préciser.

e) Montrer que résoudre l'équation matricielle $\mathrm{AP} + \mathrm{D} = \mathrm{P}$ revient à résoudre l'équation $(\mathrm{I}_3 - \mathrm{A})\mathrm{P} = \mathrm{D}$.

f) Utiliser la calculatrice pour résoudre l'équation matricielle $(\mathrm{I}_3 - \mathrm{A})\mathrm{P} = \mathrm{D}$.
En déduire la production, en milliard d'euros, de chaque secteur pour que le système soit équilibré.
Arrondir au dixième.

HISTOIRE DES MATHS

Le modèle étudié dans cet exercice porte le nom de modèle ouvert de Leontieff. **Wassily Leontieff** (1906-1999) est un économiste américano-soviétique lauréat du prix Nobel d'économie en 1973. Il est l'auteur de travaux sur l'analyse interindustrielle, dont il élaborera des tableaux d'échanges.

ÉTUDIER UNE SUITE DE MATRICES COLONNES

92 Des scientifiques ont modélisé la prédation entre mouches et poissons archers, dans un milieu fermé, de la manière suivante :
pour tout entier naturel n,

$$\begin{cases} \mathrm{P}_{n+1} = 0{,}7\mathrm{P}_n + 0{,}6\mathrm{M}_n \\ \mathrm{M}_{n+1} = -0{,}2\mathrm{P}_n + 1{,}5\mathrm{M}_n \end{cases}.$$

où P_n (resp. M_n) est le nombre de poissons archers (resp. de dizaines de mouches) présents dans ce milieu fermé le n-ième jour. On note U_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} \mathrm{P}_n \\ \mathrm{M}_n \end{pmatrix}$.

a) Montrer que pour tout entier naturel n, $\mathrm{U}_{n+1} = \mathrm{AU}_n$ où A est une matrice que l'on précisera.

b) Chaque jour, les scientifiques retirent dix mouches de ce milieu fermé.
Déterminer la matrice C telle que $\mathrm{U}_{n+1} = \mathrm{AU}_n + \mathrm{C}$.

c) Après avoir justifié son existence, déterminer l'état stable S, puis interpréter le résultat obtenu.

93 Le colza a des aptitudes particulières à disperser ses gènes. Deux espèces différentes A et B de colza sont plantées dans un même champ.
Une étude montre que si a_n et b_n sont les proportions respectives des espèces A et B dans ce champ l'année n où n désigne un nombre entier naturel,

$$\begin{cases} a_{n+1} = 0{,}7a_n - 0{,}2b_n + 0{,}07 \\ b_{n+1} = -0{,}4a_n + 0{,}7b_n + 0{,}1 \end{cases}.$$

On note U_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

Partie A : détermination de l'état stable

1. Déterminer les matrices A et C telles que pour tout entier naturel n, $\mathrm{U}_{n+1} = \mathrm{AU}_n + \mathrm{C}$.

2. Déterminer l'état stable S, c'est-à-dire la matrice S qui vérifie $\mathrm{S} = \mathrm{AS} + \mathrm{C}$, après avoir justifié son existence.

Partie B : étude de la convergence de la suite (U_n)

1. a) Pour tout entier naturel n, on pose

$$\mathrm{V}_n = \mathrm{U}_n - \mathrm{S}.$$

Montrer que pour tout entier naturel n,

$$\mathrm{V}_{n+1} = \mathrm{AV}_n.$$

b) En déduire que pour tout entier naturel n, $\mathrm{V}_n = \mathrm{A}^n\mathrm{V}_0$, puis que $\mathrm{U}_n = \mathrm{A}^n(\mathrm{U}_0 - \mathrm{S}) + \mathrm{S}$.

2. En 2012, il y avait une proportion égale à 0,2 pour l'espèce A et à 0,3 pour l'espèce B.
Quelle sera la proportion de l'espèce A en 2020 ?
Arrondir au centième.

94 Un organisme propose un apprentissage de langues étrangères en ligne.

Deux niveaux sont présentés : débutant ou avancé.

Au début de chaque mois, un internaute peut s'inscrire, se désinscrire ou changer de niveau.

Au début du mois 0, il y avait 300 internautes au niveau débutant et 450 au niveau avancé.

On constate que, chaque mois, la moitié des débutants passe au niveau avancé, l'autre moitié reste au niveau débutant et la moitié des avancés ayant terminé leur formation, se désinscrit du site.

De plus, chaque mois, 100 nouveaux internautes s'inscrivent en débutant et 70 en avancé.

On modélise cette situation par deux suites de nombres réels (d_n) et (a_n). Pour tout entier naturel n, d_n et a_n sont respectivement le nombre de débutants et le nombre d'avancés au début du mois n.

Pour tout entier naturel n, on note $U_n = \begin{pmatrix} d_n \\ a_n \end{pmatrix}$.

1. a) Déterminer U_0.

b) Justifier que pour tout entier naturel n,

$$\begin{cases} d_{n+1} = \frac{1}{2}d_n + 100 \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}d_n + \frac{1}{2}a_n + 70 \end{cases}.$$

c) Déterminer les matrices A et B telles que pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = AU_n + B$.

d) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $A^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (I_2 + nT)$ où $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. a) Déterminer la matrice S telle que $S = AS + B$.

b) Pour tout entier naturel n, on pose $V_n = U_n - \begin{pmatrix} 200 \\ 340 \end{pmatrix}$.

Montrer que pour tout entier naturel n, $V_{n+1} = AV_n$.

c) On admet que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $V_n = A^n V_0$.

En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$U_n = \begin{pmatrix} 100\left(\frac{1}{2}\right)^n + 200 \\ 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n + 110\left(\frac{1}{2}\right)^n + 340 \end{pmatrix}.$$

4. a) On admet que pour tout entier naturel $n \geqslant 4$, $2^n \geqslant n^2$.

En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 4$,

$$0 \leqslant 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant \frac{100}{n}.$$

b) En utilisant les questions précédentes, que peut-on prévoir pour l'évolution de la fréquentation du site sur le long terme ?

95 Dans une ville, une enseigne de banque nationale possède deux agences, appelées X et Y.

D'une année sur l'autre, une partie des fonds de l'agence X est transférée à l'agence Y, et réciproquement. De plus, chaque année, le siège de la banque transfère une certaine somme à chaque agence.

Pour tout entier naturel n, on note x_n (resp. y_n) la quantité de fonds, en million d'euros, détenue par l'agence X (resp. Y) au 1er janvier de l'année $2019 + n$.

On note $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ainsi $U_0 = \begin{pmatrix} 50 \\ 10 \end{pmatrix}$.

L'évolution de la quantité de fonds est donnée pour tout entier naturel n par :

$$U_{n+1} = AU_n + B \text{ où } A = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}15 \\ 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

1. On note $D = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0 \\ 0 & 0{,}7 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 0{,}25 & -0{,}375 \\ 0{,}25 & 0{,}125 \end{pmatrix}$.

a) Donner sans détailler le calcul, la matrice PDQ.

b) Démontrer que $QP = I$.

c) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$A^n = PD^nQ.$$

d) En déduire l'expression de A^n en fonction de n.

2. Déterminer l'état stable S.

3. On pose pour tout entier naturel n,

$$V_n = U_n - \begin{pmatrix} 5 \\ \frac{20}{3} \end{pmatrix}.$$

a) Démontrer que pour tout entier naturel n, $V_{n+1} = AV_n$.

b) Déterminer V_0, puis pour tout entier naturel n, exprimer V_n en fonction de A, n et V_0.

4. a) Justifier que pour tout entier naturel n,

$$x_n = 10 \times 0{,}3^n + 35 \times 0{,}7^n + 5.$$

b) Déterminer la limite de x_n quand n tend vers $+\infty$. Interpréter ce résultat dans le contexte du problème.

S'entraîner à la logique

→ p. 290

96 **Implication et réciproque**

Pour chacune des implications, dire :

- si elle est vraie ou fausse ;
- si sa réciproque est vraie ou fausse.

Justifier.

A et B désignent des matrices carrées de même ordre.

a) Si AB est la matrice nulle, alors A est la matrice nulle ou B est la matrice nulle.

b) Si A est la matrice nulle, alors A^2 est la matrice nulle.

97 Imaginer une stratégie

Chercher **Raisonner** **Calculer**

Une espèce d'oiseaux vit sur deux îles A et B d'un archipel.

Des observations sur plusieurs années ont permis aux ornithologues d'estimer que, compte tenu des naissances, décès et migrations, on a au début de chaque année, pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} a_{n+1} = 0{,}7a_n + 0{,}1b_n \\ b_{n+1} = 0{,}2a_n + 0{,}6b_n \end{cases}$$

où a_n (resp. b_n) est le nombre d'oiseaux (en millier) présents sur l'île A (resp. B) au début de l'année $(2018+n)$.

Les ornithologues décident de réintroduire chaque année, 10 milliers d'oiseaux sur l'île A et 5 milliers d'oiseaux sur l'île B.

Avec ce modèle, peut-on dire qu'au bout d'un grand nombre d'années, le nombre d'oiseaux sur l'île A va se stabiliser ? Si oui, préciser vers quelle valeur.

98 Appliquer le codage de Hill

Représenter **Raisonner** **Calculer**

Partie A

a et b désignent des nombres entiers relatifs.

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. a) Exprimer le déterminant de la matrice M en fonction de a et b.

b) On suppose que $3a - 5b \neq 0$.
Justifier que la matrice M est inversible et exprimer M^{-1} en fonction de a et b.

2. On considère l'équation (**E**) : $\det(M) = 3$.
On se propose de déterminer tous les couples $(a\,;b)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation (**E**).

a) Vérifier que le couple $(6\,;3)$ est une solution de l'équation (**E**).

b) Montrer que le couple $(a\,;b)$ d'entiers relatifs est solution de (**E**) si, et seulement si, $3(a-6) = 5(b-3)$.

c) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (**E**).

Partie B

1. On donne $Q = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$. Utiliser la **partie A** pour déterminer la matrice inverse de Q.

2. Codage avec la matrice Q

Pour coder un mot de deux lettres à l'aide de la matrice Q, on utilise la procédure suivante.

Étape 1 : on associe au mot la matrice $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ où x_1 est l'entier correspondant à la première lettre du mot et x_2 l'entier correspondant à la deuxième lettre du mot selon le tableau de correspondance ci-dessous.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Étape 2 : la matrice X est transformée en la matrice $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ telle que $Y = QX$.

Étape 3 : la matrice Y est transformée en la matrice $R = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$ telle que r_1 (resp. r_2) est le reste de la division euclidienne de y_1 (resp. y_2) par 26.

Étape 4 : à la matrice $R = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$, on associe un mot de deux lettres selon le tableau de correspondance de l'étape 1.

Par exemple, le mot JE est codé en le mot OF :

$$\text{JE} \to X = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix} \to Y = \begin{pmatrix} 66 \\ 57 \end{pmatrix} \to R = \begin{pmatrix} 14 \\ 5 \end{pmatrix} \to \text{OF}.$$

Coder le mot DO.

3. Procédure de décodage

Lors du codage, la matrice X est transformée en la matrice Y telle que $Y = QX$.

a) Démontrer que $3X = 3Q^{-1}Y$, puis que :

$$\begin{cases} 3x_1 \equiv 3r_1 - 3r_2 \ [26] \\ 3x_2 \equiv -5r_1 + 6r_2 \ [26] \end{cases}.$$

b) Démontrer que :

$$\begin{cases} x_1 \equiv r_1 - r_2 \ [26] \\ x_2 \equiv 7r_1 + 2r_2 \ [26] \end{cases}.$$

c) Décoder le mot SG.

99 Prendre des initiatives

Raisonner **Calculer**

On donne $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Déterminer toutes les matrices M carrées d'ordre 2 telles que $MA = AM$.

100 Study a convergence

Raisonner | Calculer | Communiquer

We give $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0{,}5 & 0{,}5\end{pmatrix}$ and $Q=\begin{pmatrix}0{,}5 & 0\\ 0{,}5 & 1\end{pmatrix}$.

a) Give Q^{-1}.

b) Determine $D=Q^{-1}\times A\times Q$ and justify that, for any integer $n\geqslant 1, D^n=Q^{-1}\times A^n\times Q$.

c) Write D^n using n, then deduce A^n using n.

d) Study the convergence of the sequence (A^n).

101 Déterminer une puissance d'une matrice

Problème ouvert

Chercher | Calculer

On donne $M=\begin{pmatrix}a & 0\\ a & a\end{pmatrix}$, où a désigne un nombre réel.

Déterminer la matrice M^{100}.

102 Étudier la suite de Fibonacci

Raisonner | Calculer | Communiquer

On appelle **suite de Fibonacci**, du nom d'un mathématicien italien, la suite (u_n) définie par $u_0=0$, $u_1=1$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+2}=u_{n+1}+u_n.$$

On admet que pour tout entier naturel n, u_n est un nombre entier naturel.

On considère la matrice $F=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

1. a) Déterminer les matrices F^2 et F^3.

b) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n\geqslant 1$,

$$F^n=\begin{pmatrix}u_{n+1} & u_n\\ u_n & u_{n-1}\end{pmatrix}.$$

2. a) Vérifier que pour tout entier naturel $n\geqslant 1$,

$$F^{2n+2}=F^{n+2}\times F^n.$$

b) Démontrer que pour tout entier naturel $n\geqslant 1$,

$$u_{2n+2}=u_{n+2}\times u_{n+1}+u_{n+1}\times u_n.$$

c) En déduire que pour tout entier naturel $n\geqslant 1$,

$$u_{2n+2}=u_{n+2}^2-u_n^2.$$

3. On donne $u_{12}=144$.

Démontrer qu'il existe un triangle rectangle dont les longueurs des côtés sont des nombres entiers, l'une d'elles étant égale à 12.

Donner la longueur des deux autres côtés.

HISTOIRE DES MATHS

C'est dans son *Liber abaci*, en 1202, que **Fibonacci** introduit cette suite en étudiant la reproduction des lapins.

103 Déterminer un coût

Narration de recherche

Modéliser | Calculer | Communiquer

Rédiger les différentes étapes de la recherche, sans omettre les fausses pistes et les changements de méthodes.

Problème

Un artisan fabrique trois modèles de verrières. La conception de chaque modèle nécessite le passage par trois postes de travail. L'artisan souhaite fixer le coût horaire de chaque poste de travail.

Le tableau suivant indique le nombre d'heures nécessaires par modèle et par poste pour réaliser les verrières.

	Poste 1	Poste 2	Poste 3
Modèle 1	6	8	7
Modèle 2	8	9	10
Modèle 3	11	10	12

L'artisan souhaite que le prix de revient soit de 415 € pour le modèle 1, de 530 € pour le modèle 2 et de 655 € pour le modèle 3.

Déterminer, en utilisant le calcul matriciel, le coût horaire, en euro, pour chaque poste de travail de sorte que les prix de revient soient ceux espérés par l'artisan.

104 Effectuer des calculs algébriques

Chercher | Raisonner | Calculer

On considère les matrices :

$$I_4=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix} \text{ et } O=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

1. Calculer A^2 et A^3.

En déduire A^n pour tout entier naturel $n\geqslant 4$.

2. À tout réel x, on associe la matrice notée $M(x)$ telle que $M(x)=I_4+xA+\dfrac{x^2}{2}A^2$ (**R1**).

a) Déterminer $M(0)$ et $B=M(4)$.

b) x et y étant deux nombres réels quelconques, montrer, en utilisant la relation (**R1**), l'égalité :

$$M(x)\times M(y)=M(x+y)\ (\textbf{R2}).$$

3. Vérifier que $M(x)=\begin{pmatrix}1 & x & \dfrac{x^2}{2}\\ 0 & 1 & x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

4. Déterminer une condition sur les nombres réels x et x' pour qu'ils vérifient $M(x)\times M(x')=I_4$.

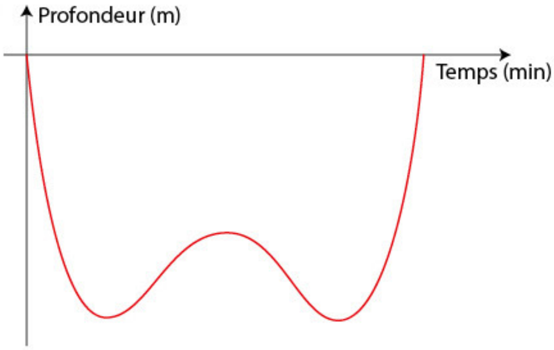
En déduire une matrice B' telle que $B\times B'=I_4$.

105 Interpolation polynomiale

Une tortue de mer remonte régulièrement en surface pour respirer.
On a modélisé la profondeur d'une tortue de mer, en m, en fonction du temps t, en min, entre deux retours en surface par la fonction polynôme f définie sur l'intervalle $[0\,;10]$ par :

$$f(t) = at^4 + bt^3 + ct^2 + dt$$

où a, b, c et d désignent des nombres réels.



On a pu observer que :
- la tortue a plongé 10 min entre ces deux respirations ;
- au bout d'une minute, elle se trouvait à 51,75 m de profondeur ;
- au bout de 4 min, elle se trouvait à 48 m de profondeur ;
- alors qu'elle remontait vers la surface, elle décide au bout de 5 min de replonger vers le fond.

On se propose de déterminer la profondeur maximum de la plongée de la tortue.

Partie A : modélisation

1. a) Expliquer pourquoi $f'(5) = 0$.

b) Justifier que le quadruplet $(a\,;b\,;c\,;d)$ est solution du système (**S**) :

$$\begin{cases} 10\,000a + 1000b + 100c + 10d = 0 \\ a + b + c + d = -51{,}75 \\ 256a + 64b + 16c + 4d = -48 \\ 500a + 75b + 10c + d = 0 \end{cases}.$$

c) Écrire le système (**S**) sous la forme matricielle AX = B où A, B et X sont des matrices à préciser.

d) Résoudre le système (**S**) à l'aide de la calculatrice et en déduire l'expression de la fonction f.

e) Déterminer à quelle profondeur la tortue se trouvait au bout de 3 min.

Partie B : réponse au problème

a) On sait que $f'(5) = 0$, il existe donc trois réels α, β et γ tels que, pour tout réel t de l'intervalle $[0\,;10]$,

$$f'(t) = (t-5)\left(\alpha t^2 + \beta t + \gamma\right).$$

Déterminer α, β et γ.

b) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;10]$.

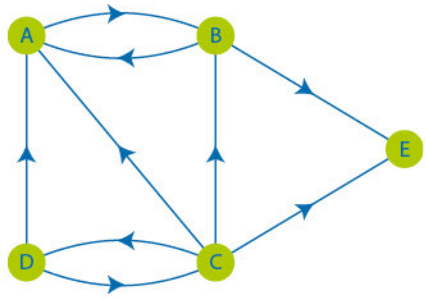
c) Déterminer la profondeur maximum de la plongée de la tortue.
Au bout de combien de temps, cette profondeur est-elle atteinte ?

106 L'algorithme PageRank

Tice

Un moteur de recherche propose à l'utilisateur un certain nombre de pages web correspondant à sa requête. La pertinence du classement de celles-ci dépend de l'algorithme de recherche utilisé par le moteur. L'algorithme PageRank, inventé par Larry Page en 1997, consiste à attribuer une note à chaque page afin de favoriser les pages les mieux notées.

Voici un exemple pour illustrer ce procédé. On suppose que le Web est composé de cinq pages A, B, C, D et E où les liens d'une page à l'autre sont représentés par le graphe ci-contre.



Initialement, chaque page a la même note $k = \dfrac{0{,}15}{\text{nombre de pages}}$ (0,15 est appelé le coefficient d'échappement).

Le PageRank est calculé de manière itérative. D'une étape à la suivante, chaque page reçoit une nouvelle note héritée des pages qui lui donnent accès :

(1) chaque page donne 85 % de sa note précédente aux pages auxquelles elle donne accès et ceci de manière équitable entre celles-ci ;

(2) chaque page reçoit en supplément la note k.

Le **PageRank** d'une page est la note obtenue par celle-ci après un nombre infini d'étapes.

1. Relations de récurrence

Pour la page C, le point **(1)** se traduit ainsi : la page C donne accès à quatre pages A, B, D et E. Elle partage donc de manière équitable, 85 % de sa note entre ces quatre pages. Elle reverse donc 21,25 % de sa note à chacune de ces pages. Pour représenter ceci, on note par exemple 0,2125 sur le lien allant de C vers A.

a) Compléter de même les autres liens du graphe.

b) On note respectivement a_n, b_n, c_n, d_n et e_n les notes des pages A, B, C, D et E à l'étape n.
Montrer que pour tout nombre entier naturel n, $a_{n+1} = 0{,}03 + 0{,}425b_n + 0{,}2125c_n + 0{,}425d_n$.

c) Déterminer de même les relations de récurrence concernant les autres suites.

2. À l'aide du tableur

a) Réaliser cette feuille de calcul. Saisir les formules adéquates dans la plage B3:F3 puis recopier vers le bas.

b) Conjecturer alors le PageRank de chaque page.

	A	B	C	D	E	F
1	Étape	A	B	C	D	E
2	0	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03
3	1					
4	2					
5	3					
6	4					

3. À l'aide des matrices

$$N_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \\ e_n \end{pmatrix}$$

a) Pour tout entier naturel n, on note la matrice N_n ci-contre.
Démontrer que pour tout entier naturel n, $N_{n+1} = AN_n + B$ où A est une matrice carrée d'ordre 5 et B une matrice colonne à déterminer.

b) Déterminer l'état stable S vérifiant $S = AS + B$ après avoir justifié son existence.

c) Pour tout entier naturel n, on pose $V_n = N_n - S$.
Démontrer que pour tout entier naturel n, $V_{n+1} = AV_n$.

d) En déduire que pour tout entier naturel n, $V_n = A^n V_0$.

e) On admet que la suite (A^n) converge vers la matrice carrée nulle d'ordre 5. Conclure sur la convergence de la suite (V_n), puis sur celle de la suite (N_n).

f) En déduire le PageRank de chacune des pages web.

g) Donner alors la page qui, à long terme, est la plus favorisée.

Dans cet exemple, le Web ne comporte que cinq pages et un tableur suffit à réaliser les itérations. Mais en réalité la barre des 1 000 milliards de pages a été franchie en 2008… Il existe alors des « fermes de serveurs » permettant de calculer le PageRank plusieurs fois par jour.

107 Modèle « proie-prédateur » discrétisé : évolution couplée de deux suites récurrentes

Tice

Dans un territoire donné, on s'intéresse à l'évolution couplée de deux espèces : les buses (les prédateurs) et les campagnols (les proies).

Des scientifiques modélisent, cette évolution par $b_0 = 1\,000$, $c_0 = 1\,500$ et pour tout entier naturel n,

$$\begin{cases} b_{n+1} = 0{,}3b_n + 0{,}5c_n \\ c_{n+1} = -0{,}5b_n + 1{,}3c_n \end{cases}$$

où b_n représente le nombre de buses et c_n le nombre de campagnols le 1er juin de l'année $2017 + n$.

Partie A : à l'aide du tableur

a) Réaliser la feuille de calcul ci-contre.

Saisir les formules adéquates dans la plage A3:C3 puis recopier vers le bas.

b) Quelle conjecture peut-on émettre quant au nombre de chaque espèce à long terme ?

	A	B	C
1	n	b_n	c_n
2	0	1 000	1 500
3	1	1 050	1 450
4	2	1 040	1 360
5	3	992	1 248

Partie B : à l'aide des matrices

1. On note $A = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}5 \\ -0{,}5 & 1{,}3 \end{pmatrix}$ et pour tout entier naturel n, $U_n = \begin{pmatrix} b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

a) Vérifier que $U_1 = \begin{pmatrix} 1050 \\ 1450 \end{pmatrix}$ et calculer U_2.

b) Justifier que pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = AU_n$, puis que $U_n = A^n U_0$.

c) Déterminer U_{20} à l'aide de la calculatrice.

Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

2. On donne les matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}5 \\ 0 & 0{,}8 \end{pmatrix}$.

a) Justifier que la matrice P est inversible et déterminer P^{-1}.

b) Vérifier que $A = PTP^{-1}$, puis démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$A^n = PT^nP^{-1}.$$

c) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

$$T^n = \begin{pmatrix} 0{,}8^n & 0{,}5n \times 0{,}8^{n-1} \\ 0 & 0{,}8^n \end{pmatrix}.$$

3. a) En déduire les coefficients de la matrice U_n en fonction de n.

b) On admet que pour entier naturel $n \geqslant 1$, $n \leqslant 10 \times 1{,}1^n$.

Déterminer la limite de chacune des suites (b_n) et (c_n).

c) Des mesures effectuées dans des territoires comparables montrent que la population de campagnols reste toujours supérieure à 50 individus.

À la lumière de cette information le modèle proposé dans l'exercice paraît-il cohérent ?

108 Étude de lancers successifs

Partie A : calcul matriciel

On considère les trois matrices :

$$M=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & \frac{1}{4}\end{pmatrix},\ Q=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\ \text{et } D=QMQ.$$

a) Calculer Q^2.
En déduire que Q est inversible et expliciter Q^{-1}.

b) Calculer D et justifier que $M=QDQ$.

c) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $M^n = QD^nQ$.

d) Expliciter les coefficients de la matrice M^n.

Partie B : étude d'une expérience

On dispose de deux pièces de monnaie équilibrées.
On effectue des lancers successifs selon le protocole suivant :

- à l'étape 1, on lance les 2 pièces,
- à l'étape 2, on lance les pièces ayant amené Pile à l'étape 1 (s'il en existe),
- à l'étape 3, on lance les pièces ayant amené Pile à l'étape 2 (s'il en existe),

et ainsi de suite.
On suppose que tous les lancers sont indépendants.
On considère, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, les événements :
A_n : « Obtenir 0 fois Pile à l'étape n »,
B_n : « Obtenir 1 fois Pile à l'étape n »,
C_n : « Obtenir 2 fois Pile à l'étape n ».
On note $a_n = P(A_n)$, $b_n = P(B_n)$ et $c_n = P(C_n)$.

1. Calculer a_1, b_1 et c_1.

2. Déterminer pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, les probabilités $P_{A_n}(A_{n+1})$, $P_{B_n}(A_{n+1})$ et $P_{C_n}(A_{n+1})$.

3. Justifier que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{4}c_n \\ b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n \\ c_{n+1} = \frac{1}{4}c_n \end{cases}.$$

4. Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$,

$$\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\\ c_n\end{pmatrix} = M^{n-1}\begin{pmatrix}a_1\\ b_1\\ c_1\end{pmatrix}.$$

5. a) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, exprimer $P(A_n)$, $P(B_n)$ et $P(C_n)$ en fonction de n.

b) Vérifier que la somme de ces trois probabilités est égale à 1 et donner la limite de chacune d'elles.

109 Calculs de dérivées n-ièmes

1. On donne $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 2 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

a) Déterminer la matrice N telle que $A = 2I_3 + N$ où I_3 représente la matrice unité d'ordre 3. Calculer N^2 et N^3.

b) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$A^n = 2^n I_3 + n2^{n-1}N + n(n-1)2^{n-3}N^2.$$

c) Démontrer que A est inversible et expliciter A^{-1}.

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \left(ax^2 + bx + c\right)e^{2x}$$

où a, b et c désignent des nombres réels.

a) Démontrer qu'il existe trois réels a_1, b_1 et c_1 tels que pour tout réel x, $f'(x) = \left(a_1x^2 + b_1x + c_1\right)e^{2x}$.
Exprimer a_1, b_1 et c_1 en fonction de a, b et c, puis traduire les égalités obtenues à l'aide de matrices.

b) Plus généralement, démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, la dérivée n-ième de f, notée $f^{(n)}$, vérifie pour tout réel x, $f^{(n)}(x) = \left(a_nx^2 + b_nx + c_n\right)e^{2x}$,
où a_n, b_n et c_n désignent des nombres réels.
Vérifier que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$\begin{pmatrix}a_{n+1}\\ b_{n+1}\\ c_{n+1}\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\\ c_n\end{pmatrix}.$$

Calculer a_n, b_n et c_n en fonction de a, b, c et n.

Des Défis

110 Utiliser la formule du binôme

On donne $A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 1 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$.

Exprimer pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, A^n en fonction de n.

111 Résoudre le problème des bœufs

75 bœufs broutent en 12 jours la totalité de l'herbe d'un pré de 60 ares.
81 bœufs broutent en 15 jours la totalité de l'herbe d'un pré de 72 ares.
On suppose que :

- le nombre de rations quotidiennes disponibles au départ, par are, est le même pour chaque pré ;
- tous les bœufs ont le même appétit.

Combien de bœufs un pré de 96 ares peut-il nourrir en 18 jours ?