15 Succession d'épreuves indépendantes. Schéma de Bernoulli

HISTOIRE DES MATHS

Au 17e siècle, les jeux de hasard, notamment de cartes et de dés, se pratiquent couramment. Dès lors les mathématiciens s'emparent du sujet. **Pierre de Fermat** et **Blaise Pascal** entretiennent une correspondance au sujet du problème des parties. En 1657 paraît le premier traité sur les probabilités, *Raisonnement sur les jeux de dés*, du Néerlandais **Christiaan Huygens**.

S'appuyant sur les travaux de Huygens, le mathématicien suisse **Jacques Bernoulli** écrit *Ars conjectandi*, ouvrage qui a un grand retentissement en raison de ses nombreux apports. Il y parle pour la première fois de *probabilitas* (probabilité), introduit la notion d'espérance, le schéma d'une urne, et traite de la loi binomiale et d'estimation.

Du milieu du 17e siècle à la fin du 18e, d'autres membres de la famille Bernoulli, répartis sur trois générations, s'illustrent dans les sciences.


Karl Pearson


Daniel Bernoulli

► **Daniel Bernoulli** (1700-1782), neveu de Jacques Bernoulli, est un savant suisse. Il est considéré aujourd'hui par certains économistes de la finance comme fondateur des bases de la théorie économique et financière de l'aversion au risque.

► **Karl Pearson** (1857-1936) est un mathématicien britannique. Il est l'un de ceux qui ont développé l'utilisation des lois de probabilité dans les sciences appliquées, dans son cas en biométrie.

1654 Correspondance entre Pascal et Fermat sur les jeux de hasard.

1713 Publication de *Ars conjectandi* de J. Bernoulli après sa mort.

1792 Condorcet souhaite développer l'enseignement des probabilités.

1816 Lacroix édite le 1er ouvrage d'enseignement des probabilités.

1933 Kolmogorov formule les axiomes des probabilités.

1670 Dom Pérignon invente le champagne

1707 Premiers essais du navire à vapeur, par Denis Papin

1795 La Convention cède la place au Directoire

1850 *La Tulipe noire*, roman d'A. Dumas

1890 Naissance de Charles de Gaulle

1700 — 1750 — 1800 — 1850 — 1900

Le caloptéryx éclatant, plus communément appelé libellule bleue.

Selon les scientifiques, l'un des prédateurs les plus efficaces du monde animal est… la libellule ! Lorsqu'elle a repéré une proie, son taux de réussite de prédation moyen avoisine les 95 %. Grâce à la loi binomiale, on peut estimer la probabilité que, sur les dix dernières proies repérées, une libellule en ait attrapé au moins huit.

Les contenus et capacités travaillés dans ce chapitre

	Savoir-faire	Exercices
• Modéliser une situation par une succession d'épreuves indépendantes, ou une succession de deux ou trois épreuves quelconques. La représenter par un arbre.	1 à 3	10 à 12
• Calculer une probabilité en utilisant l'indépendance, des probabilités conditionnelles, la formule des probabilités totales.		13 à 16, 53 à 55
• Modéliser une situation par un schéma de Bernoulli.	4 à 6	17 à 27
• Modéliser une situation par une loi binomiale. Calculer numériquement $P(X = k)$, $P(X \leqslant k)$, $P(k \leqslant X \leqslant k')$ en s'aidant au besoin d'un algorithme.	7, 8	28 à 45
• Chercher un intervalle I tel que la probabilité $P(X \in I)$ est inférieure à une valeur donnée α ou supérieure à $1 - \alpha$.	9	50, 57, 61, 74

Calcul mental

Rappels utiles

• E désigne un ensemble à n éléments et k un nombre entier naturel, $0 \leqslant k \leqslant n$.
Une **combinaison de k éléments de E** est une partie à k éléments de E.

• Nombre de chemins avec k succès

Dans un arbre « succès-échec » à n niveaux, le **nombre de chemins avec k succès** est le nombre de combinaisons de k éléments parmi n. On le note $\binom{n}{k}$.

• Propriétés des combinaisons

Pour tous entiers naturels n et k :

• $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

• $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ avec $0 \leqslant k \leqslant n$

• $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ avec $1 \leqslant k \leqslant n-1$

• Probabilité conditionnelle de B sachant A

A et B sont deux événements et $P(B) \neq 0$.
La probabilité conditionnelle de B sachant A est :

$$\mathbf{P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}.$$

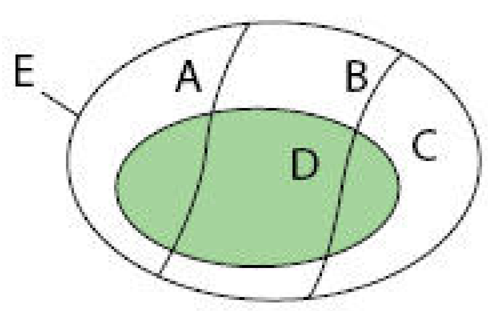
Ainsi : $\mathbf{P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A)}$

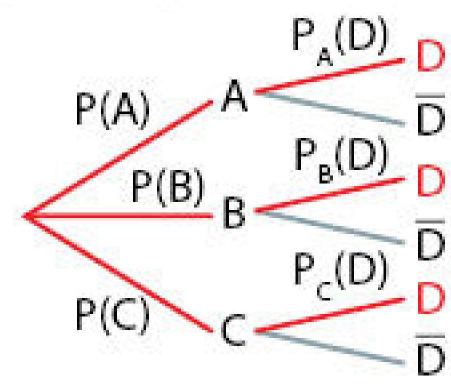
• Formule des probabilités totales

A, B, C sont trois événements qui forment une **partition** d'un univers E.
D est un événement de E.

$P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) + P(C \cap D)$

$P(D) = P_A(D) \times P(A) + P_B(D) \times P(B) + P_C(D) \times P(C)$





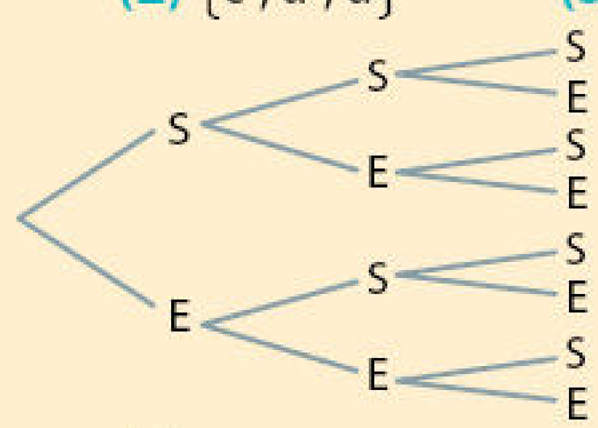
À l'oral — Questions-Tests

Pour chaque question, il y a une seule réponse exacte.

1 Une combinaison de trois éléments de $E = \{a\,;b\,;c\,;d\}$ est :

(1) $(a\,;b\,;c)$ **(2)** $\{c\,;a\,;d\}$ **(3)** $\{b\,;c\}$

2



D'après cet arbre, $\binom{3}{2}$ est égal à :

(1) 1 **(2)** 2 **(3)** 3

3 À l'aide de la calculatrice (nCr, combinaison, …), on sait que $\binom{10}{3}$ est égal à :

(1) 7 **(2)** 120 **(3)** 1 000

4 $\binom{15}{7}$ est égal à :

(1) $\binom{8}{0}$ **(2)** $\binom{20}{12}$ **(3)** $\binom{15}{8}$

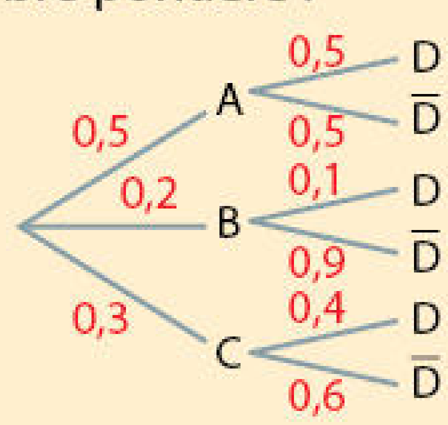
5 A et B sont deux événements d'un univers E tels que $P(A) = 0{,}4$, $P(A \cap B) = 0{,}1$, $P_B(A) = 0{,}3$.

a) $P_A(B)$ est égal à : **(1)** $\frac{1}{4}$ **(2)** 4 **(3)** 0,04

b) P(B) est égal à :

(1) $\frac{1}{3}$ **(2)** 0,03 **(3)** 0,1

6 Voici un arbre pondéré :



a) La probabilité de $\overline{D}$ sachant B est égale à :

(1) 0,18 **(2)** 0,2 **(3)** 0,9

b) La probabilité de $C \cap D$ est égale à :

(1) 0,12 **(2)** 0,4 **(3)** 0,6

c) La probabilité de D est égale à :

(1) $P(\overline{D}) - 1$ **(2)** 0,39 **(3)** 0,25

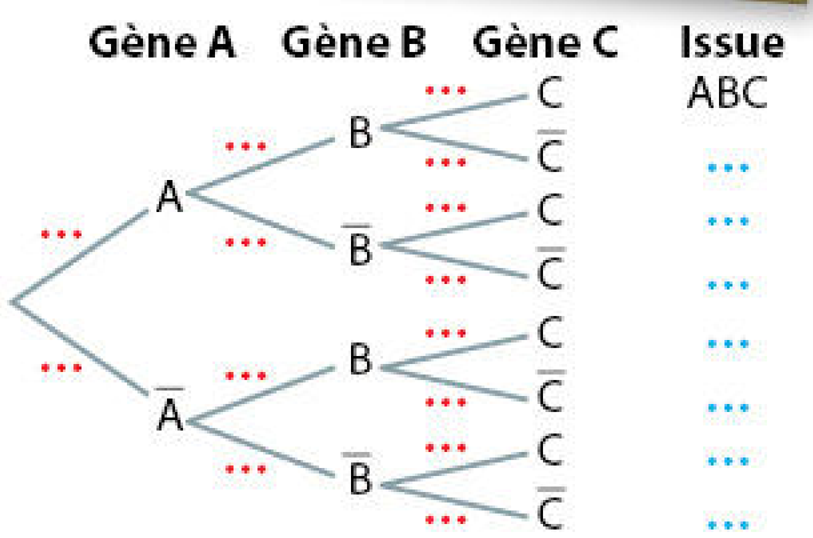
1 Succession d'épreuves indépendantes

Chez une espèce animale, la mutation de chacun des trois gènes A, B, C conduit à une modification de l'apparence.
Ces mutations sont indépendantes car les gènes sont situés sur des chromosomes différents.
Des scientifiques ont observé que :

- 2 % des individus présentent une mutation du gène A ;
- 4 % des individus présentent une mutation du gène B ;
- 10 % des individus présentent une mutation du gène C.

On choisit au hasard un animal de cette espèce et on note A (resp. B, resp. C) l'issue « le gène A (resp. B, resp. C) a muté ».

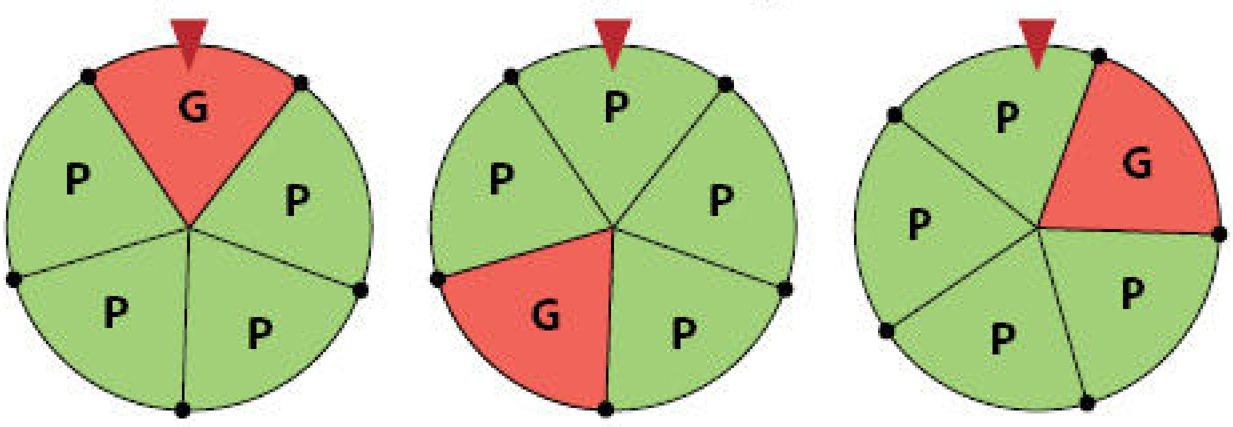
1 **a)** Reproduire et compléter l'arbre pondéré ci-contre par les probabilités qui conviennent (pointillés rouges).
b) Compléter les pointillés bleus par les issues de cette succession de trois épreuves indépendantes.

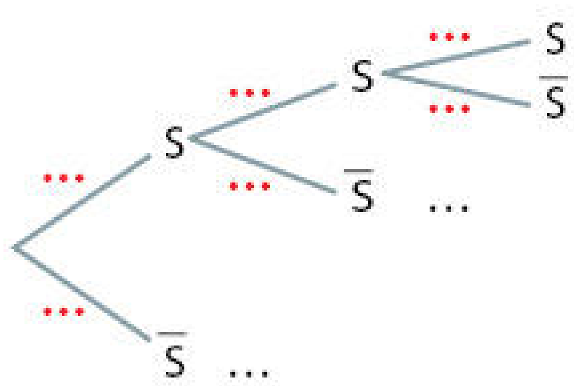


2 Calculer, puis interpréter la probabilité de chacune des issues :
a) ABC **b)** $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$ **c)** $A\overline{B}C$

2 Schéma de Bernoulli et loi binomiale

À la fête foraine, Aya joue à la loterie et fait tourner les trois roues ci-dessous. Chaque roue est divisée en cinq secteurs identiques ; un seul des cinq secteurs (G) est gagnant, les autres (P) sont perdants.
L'expérience aléatoire qui consiste à faire tourner une roue a deux issues, le succès S : « Aya obtient le secteur G » et l'échec $\overline{S}$: « Aya obtient un secteur P ». On dit qu'il s'agit d'une **épreuve de Bernoulli.**
Faire tourner les trois roues revient à répéter 3 fois cette même épreuve de Bernoulli, dans des conditions d'indépendance. On dit qu'il s'agit d'un **schéma de Bernoulli.**





1 **a)** Quelle est la probabilité du succès S ?
b) L'arbre ci-dessus représente ce schéma de Bernoulli ; il n'est que partiel.
Recopier et terminer cet arbre, puis indiquer la probabilité qui convient sur chaque branche.

2 X est la variable aléatoire qui donne le nombre de succès.
À l'aide de l'arbre précédent, présenter la loi de probabilité de X dans un tableau tel que celui ci-contre.

k	0	1	2	3
$P(X = k)$				

Cette loi est appelée **loi binomiale de paramètres $n = 3$** (nombre d'épreuves répétées) et **$p = 0{,}2$** (probabilité du succès) ; on la note $\mathscr{B}(\mathbf{3\ ;\ 0{,}2})$.

Cours

Exercices
- 1 à 3 (ci-contre)
- 10 à 16

1 Succession d'épreuves indépendantes

A Modélisation d'une succession d'épreuves indépendantes

Définition

Dans une succession d'épreuves, lorsque l'issue d'une épreuve ne dépend pas des épreuves précédentes, on dit que ces épreuves sont **indépendantes**.

Univers et issues d'une succession d'épreuves indépendantes

On considère n épreuves successives indépendantes d'univers E_1, E_2, …, E_n.

L'univers E de cette succession de n épreuves successives indépendantes est le **produit cartésien** :

$$E = E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n.$$

Les issues de E sont les ***n*-uplets** $(x_1 ; x_2 ; \dots ; x_n)$ où $x_i \in E_i$ pour tout entier naturel i, avec $1 \leqslant i \leqslant n$.

Propriété (admise)

Dans une succession de n épreuves indépendantes, la probabilité d'une issue $(x_1 ; x_2 ; \dots ; x_n)$ est égale **au produit** des probabilités des issues de ses composantes $x_1, x_2, \dots, x_n$.

B Un exemple

On lance un dé tétraédrique équilibré dont les quatre sommets sont numérotés 1, 2, 3, 4.

L'univers de cette expérience aléatoire est $E_1 = \{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$.

Puis, on tire au hasard un jeton d'un sac contenant un jeton A et deux jetons B.

L'univers de cette expérience aléatoire est $E_2 = \{A ; B\}$.

Voici la loi de probabilité de chacune de ces épreuves :

Issue	1	2	3	4
Probabilité	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Issue	A	B
Probabilité	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

La succession de ces deux épreuves indépendantes a pour univers $E = E_1 \times E_2$.

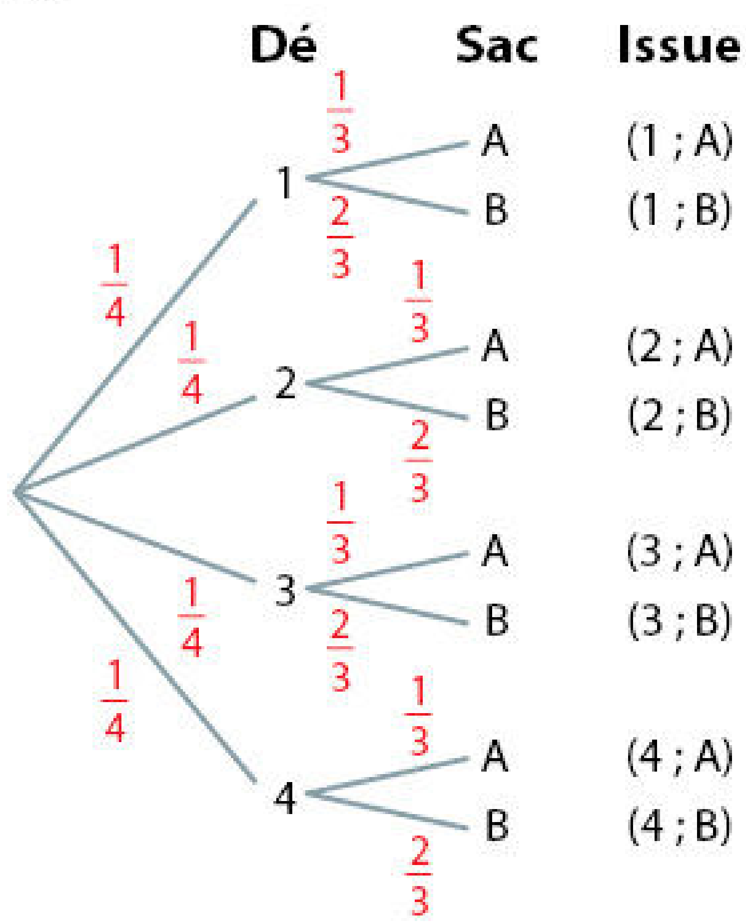
On représente ces issues à l'aide de l'arbre ci-contre.

Par exemple :

$$P(1 ; A) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

$$P(3 ; A) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

$$P(1 ; B) = \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$$



D'où la loi de probabilité de la succession de ces deux épreuves indépendantes.

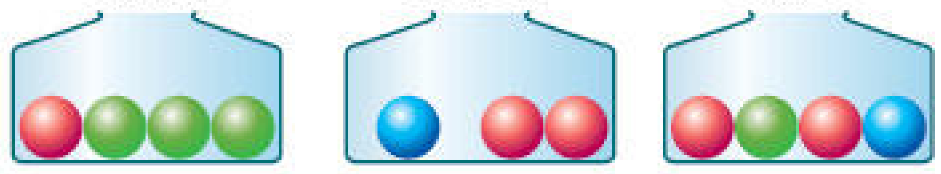
Issue	(1 ; A)	(1 ; B)	(2 ; A)	(2 ; B)	(3 ; A)	(3 ; B)	(4 ; A)	(4 ; B)
Probabilité	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$

EXERCICE RÉSOLU

1 Comprendre une succession d'épreuves indépendantes

Voici trois urnes. On tire au hasard une boule de l'urne 1 et on note sa couleur, puis on tire au hasard une boule de l'urne 2 et on note sa couleur, et enfin une boule de l'urne 3 et on note sa couleur (R : rouge, B : bleu, V : vert).

Urne 1 Urne 2 Urne 3



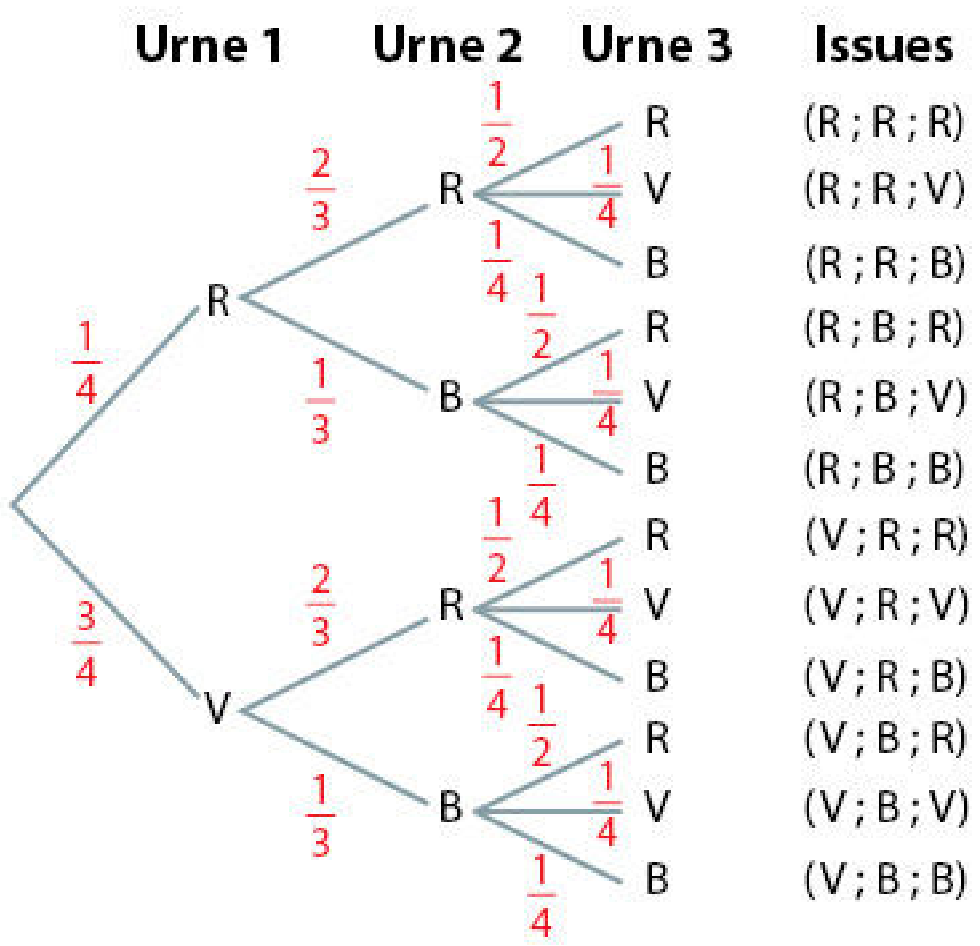
a) Représenter la situation par un arbre pondéré.

b) Déterminer la loi de probabilité sur l'ensemble des issues de cette expérience aléatoire.

c) On gagne à ce jeu lorsqu'on tire au moins deux boules rouges. Calculer la probabilité de gagner une partie.

Solution

a)



$E_1 = \{R ; V\}$
$E_2 = \{R ; B\}$
$E_3 = \{R ; V ; B\}$
Donc l'univers $E = E_1 \times E_2 \times E_3$ de cette expérience aléatoire possède 12 issues : $2 \times 2 \times 3 = 12$.

Par exemple, $P(V ; B ; R) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.

b) La loi de probabilité sur l'ensemble E des issues est donnée par le tableau :

Issue	(R ; R ; R)	(R ; R ; V)	(R ; R ; B)	(R ; B ; R)	(R ; B ; V)	(R ; B ; B)	(V ; R ; R)	(V ; R ; V)	(V ; R ; B)	(V ; B ; R)	(V ; B ; V)	(V ; B ; B)
Probabilité	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

c) La probabilité de gagner une partie est :

$$p = P(R ; R ; R) + P(R ; R ; V) + P(R ; R ; B) + P(R ; B ; R) + P(V ; R ; R) = \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \frac{1}{24} + \frac{1}{24} + \frac{1}{4} = \frac{11}{24}.$$

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 1

2 On lance un dé équilibré à six faces numérotées 1 à 6, puis on lance une pièce équilibrée dont les faces sont numérotées 1 et 2.

a) S'aider d'un arbre pour déterminer la loi de probabilité sur l'ensemble E des issues.

b) Calculer la probabilité d'obtenir un couple de numéros pairs.

3 On lance une pièce équilibrée dont les faces sont numérotées 1 et 2, puis on tire au hasard un papier de ce sac.

a) S'aider d'un arbre pour déterminer la loi de probabilité sur l'ensemble E des issues.

b) Calculer la probabilité d'obtenir au moins une fois le numéro 2.

Exercices
- 4 à 6 (ci-contre)
- 17 à 27

2 Épreuve et schéma de Bernoulli

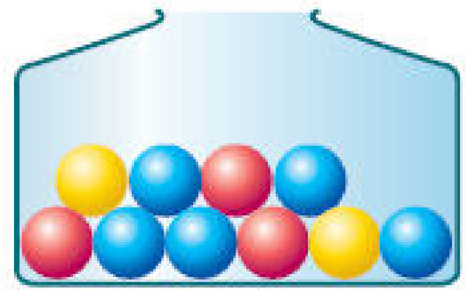
A Épreuve de Bernoulli

Définition

Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire à deux issues.
L'une est souvent appelée **succès** et notée S, l'autre est souvent appelée **échec** et notée $\overline{S}$.

Exemple

Une urne contient dix boules indiscernables au toucher : 5 bleues, 2 jaunes et 3 rouges.
On tire une boule au hasard.
Cette expérience a trois issues, mais l'on peut considérer qu'il s'agit d'une épreuve de Bernoulli en prenant pour succès, par exemple, S : « Tirer une boule rouge » et pour échec $\overline{S}$: « Tirer une boule bleue ou jaune ».



B Loi de Bernoulli

Définition

On considère une épreuve de Bernoulli où la probabilité du succès est p.
X est la variable aléatoire qui prend la valeur 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec.
La loi de probabilité de X, présentée dans le tableau ci-contre, est appelée **loi de Bernoulli de paramètre p**.

a	0	1
$P(X=a)$	$1-p$	p

Exemple

On reprend l'exemple du paragraphe A.

$p = P(S) = \frac{3}{10} = 0,3.$

Voici ci-contre la loi de Bernoulli de paramètre 0,3.

a	0	1
$P(X=a)$	0,7	0,3

Conséquence : l'espérance et la variance de X sont $\mathbf{E(X)=p}$ et $\mathbf{V(X)=p(1-p)}$.
En effet, $E(X) = (1-p)\times 0 + p\times 1 = p$
et $V(X) = (1-p)\times(0-p)^2 + p\times(1-p)^2 = p(1-p)(p+1-p) = p(1-p)$.

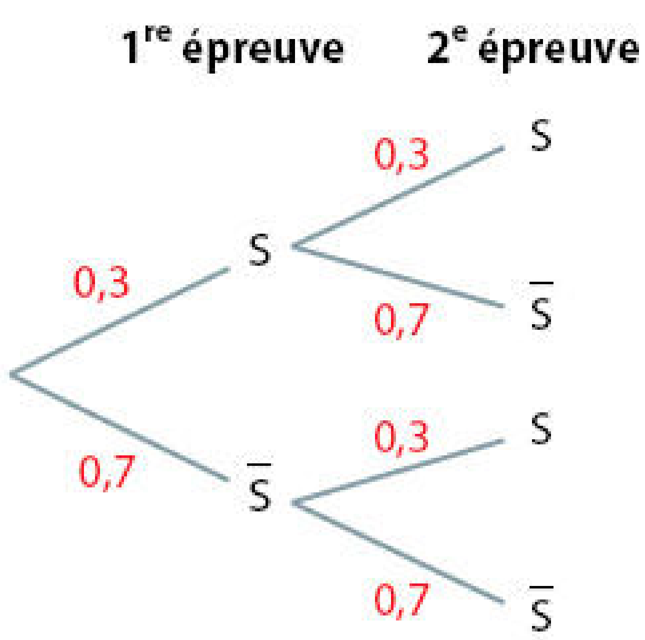
C Schéma de Bernoulli

Définition

Un **schéma de Bernoulli** est une répétition d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

Exemple

On reprend l'exemple du paragraphe A.
On répète deux fois l'épreuve de Bernoulli en replaçant la boule dans l'urne avant chaque nouveau tirage.
Le fait de replacer la boule dans l'urne assure que les tirages sont identiques et indépendants.
Cela constitue un schéma de Bernoulli qui peut être représenté par l'arbre pondéré ci-contre.



EXERCICE RÉSOLU

4 Modéliser une situation par un schéma de Bernoulli

Alex essaie trois fois de suite d'atteindre une cible à l'aide d'une arbalète.
On estime qu'elle atteint la cible dans 65 % des cas et on suppose que ses tirs sont indépendants.

a) Associer une épreuve de Bernoulli à chaque tir et donner la probabilité du succès S.

b) Expliquer pourquoi on peut associer un schéma de Bernoulli à cette situation.

c) Représenter ce schéma par un arbre pondéré.

Solution

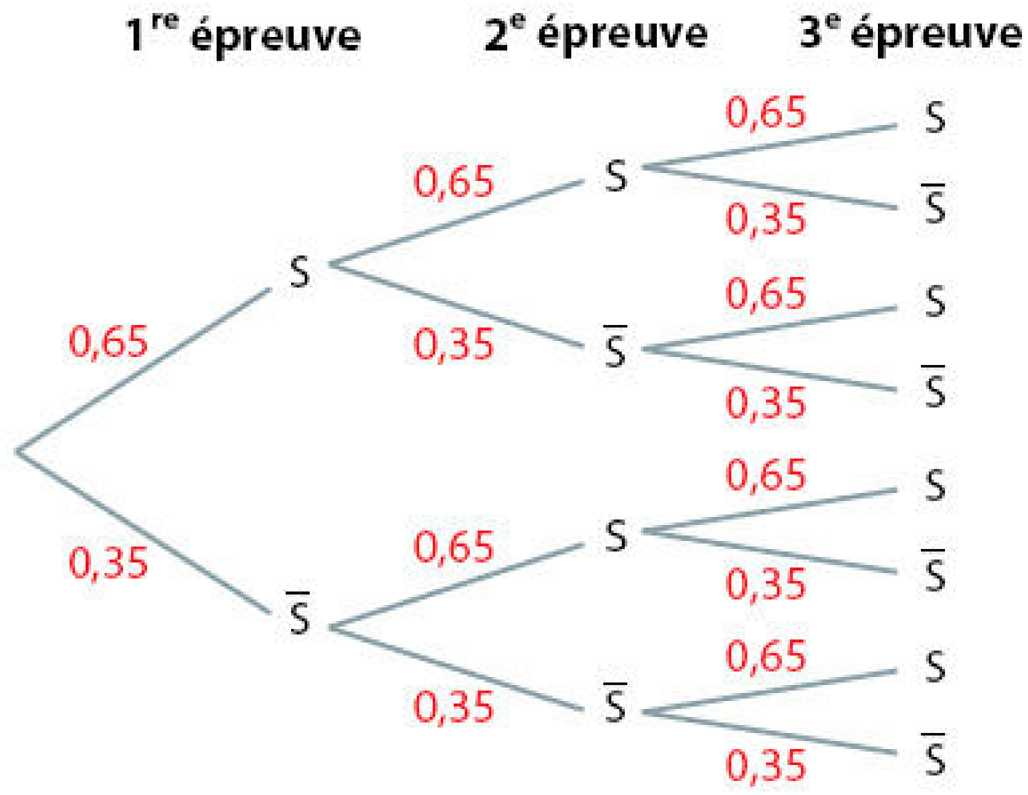
a) Chaque tir est une expérience aléatoire à deux issues :
- le succès S : « Alex atteint la cible » ;
- l'échec $\overline{S}$: « Alex n'atteint pas la cible ».

On sait que $P(S) = 0{,}65$, donc on considère chaque tir comme une épreuve de Bernoulli de paramètre 0,65.

b) Cette épreuve de Bernoulli est répétée trois fois de manière indépendante.
La situation peut donc être associée à un schéma de Bernoulli.

Pour justifier qu'il s'agit d'un schéma de Bernoulli, il faut préciser l'épreuve de Bernoulli qui est répétée et indiquer que les répétitions sont indépendantes.

c) Voici l'arbre pondéré représentant cette situation.



$P(S) = 0{,}65$ donc $P(\overline{S}) = 1 - 0{,}65 = 0{,}35$.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 4

5 Un bac de briques Lego contient 44 pièces jaunes et 56 pièces vertes.
Morgane prend une pièce au hasard, regarde sa couleur, puis la remet dans le bac.
Elle répète cette expérience aléatoire trois fois.

a) Associer une épreuve de Bernoulli à chaque tirage et donner la probabilité du succès S.

b) Expliquer pourquoi on peut associer un schéma de Bernoulli à cette situation.

c) Représenter ce schéma par un arbre pondéré.

6 En France, la probabilité de naissance d'un garçon est 0,51. On suppose que les sexes de nouveaux-nés successifs, au sein d'une même famille, sont indépendants.
On considère les familles de deux enfants.

a) Associer une épreuve de Bernoulli à chaque naissance et donner la probabilité du succès S.

b) Expliquer pourquoi on peut associer un schéma de Bernoulli à cette situation.

c) Représenter ce schéma par un arbre pondéré.

Cours

Exercices
- 7 et 8 (ci-contre)
- 28 à 45

3 Loi binomiale $\mathscr{B}(n\,;p)$

A Loi du nombre de succès

Définition

On considère un schéma de Bernoulli constitué de n épreuves où la probabilité du succès est p.
X est la variable aléatoire qui donne le nombre de succès lors de ces n épreuves.
La loi de probabilité de la variable aléatoire X est appelée **loi binomiale** (ou loi du nombre de succès) **de paramètres n et p**. On la note $\mathscr{B}(\boldsymbol{n}\,;\boldsymbol{p})$.

Remarque : la variable aléatoire X prend donc toutes les valeurs entières entre 0 (aucun succès) et n (uniquement des succès).

Propriété

X est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n\,;p)$.
Pour tout entier naturel k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$,

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}.$$

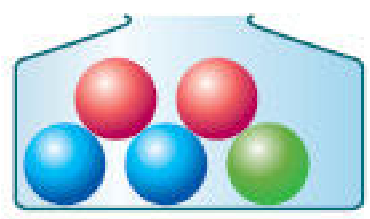
Vidéo
JAICOMPRIS.COM
Cette notion est présentée en vidéo

Démonstration

Les n épreuves répétées sont identiques et indépendantes donc un chemin de l'arbre réalisant k succès de probabilité p, et $n-k$ échecs de probabilité $1-p$, conduit à une issue dont la probabilité est donnée par $p^k(1-p)^{n-k}$. Or, il y a $\binom{n}{k}$ chemins réalisant k succès (voir p. 60) donc $\mathrm{P}(\mathrm{X}=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$.

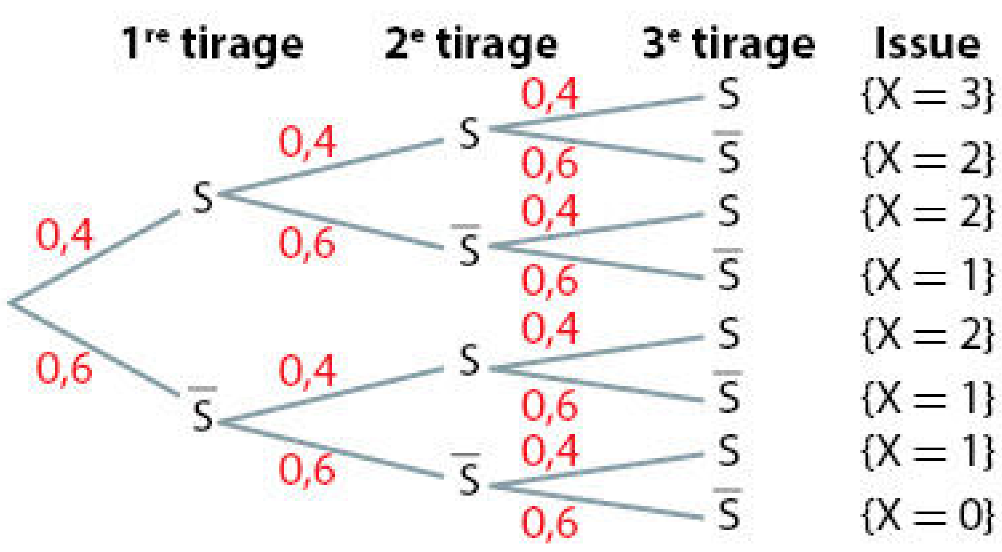
B Exemple

On tire trois fois, successivement et avec remise, une boule de l'urne ci-contre.
Pour chaque tirage, on associe au succès S l'issue : « La boule tirée est rouge ».



Donc $p=\dfrac{2}{5}=0{,}4$.

La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès obtenus sur les $n=3$ tirages suit la loi binomiale de paramètres 3 et 0,4, c'est-à-dire $\mathscr{B}(3\,;0{,}4)$.



Par exemple,

$\mathrm{P}(\mathrm{X}=1)=\binom{3}{1}0{,}4^1(1-0{,}4)^{3-1}$

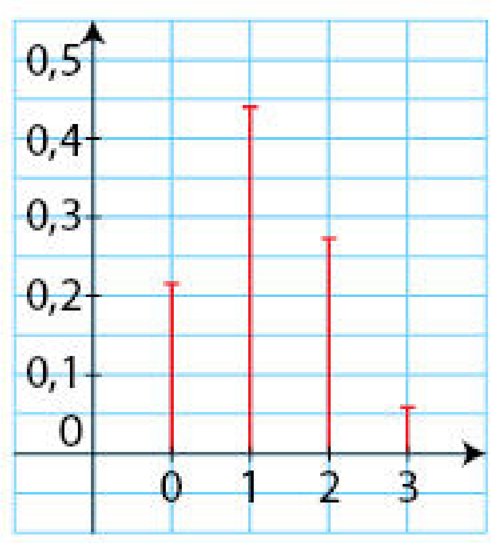
$\mathrm{P}(\mathrm{X}=1)=3\times0{,}4\times0{,}6^2$

$\mathrm{P}(\mathrm{X}=1)=0{,}432$

La loi de probabilité de X est donnée par le tableau :

k	0	1	2	3
$\mathrm{P}(\mathrm{X}=k)$	0,216	0,432	0,288	0,064

Voici ci-contre le diagramme en bâtons représentant graphiquement la loi binomiale de $\mathscr{B}(3\,;0{,}4)$.



EXERCICE RÉSOLU

7 Reconnaître et utiliser une loi binomiale

Un QCM a trois questions avec quatre réponses proposées dont une seule est correcte.
Un élève répond au hasard et ses réponses sont indépendantes les unes des autres.
La variable aléatoire X compte le nombre de réponses correctes données par l'élève.

a) Justifier que la situation peut être modélisée par une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

b) Calculer $P(X=2)$ et interpréter le résultat. *Arrondir au millième.*

c) Calculer la probabilité que l'élève ait au plus deux réponses correctes. *Arrondir au millième.*

Solution

a) Épreuve de Bernoulli : choisir au hasard une réponse à une question.

Le succès est S : « La réponse est correcte » et $p = P(S) = \dfrac{1}{4}$.

Schéma de Bernoulli : on répète $n = 3$ fois cette épreuve de Bernoulli dans des conditions d'indépendance.

Loi binomiale : la variable aléatoire X qui donne le nombre de succès suit la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = \dfrac{1}{4}$.

b) $P(X=2) = \dbinom{3}{2}\left(\dfrac{1}{4}\right)^2\left(\dfrac{3}{4}\right)^1 = 3 \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^2 \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{9}{64}$ soit $P(X=2) \approx 0{,}141$.

La probabilité que l'élève ait exactement deux réponses correctes est environ 0,141.

c) $P(X \leqslant 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$

$$P(X \leqslant 2) = \binom{3}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(1-\frac{1}{4}\right)^{3-0} + \binom{3}{1}\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(1-\frac{1}{4}\right)^{3-1} + \binom{3}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(1-\frac{1}{4}\right)^{3-2}$$

$P(X \leqslant 2) \approx 0{,}984$.

La probabilité que l'élève ait au plus deux réponses correctes est environ 0,984.

> On décrit l'épreuve de Bernoulli (en précisant S et P(S)), puis le schéma de Bernoulli (en précisant n) et on conclut en disant que X suit la loi binomiale de paramètres n et p.

> Pour le calcul des coefficients $\dbinom{n}{k}$ voir p. 60 et 61.

> On traduit « au plus deux réponses correctes » par $\{X \leqslant 2\}$.

Avec la calculatrice

Casio : MENU 2 (STAT) F5 (DIST) F5 (BINOMIAL)

b) F1 (Bpd) puis renseigner la boîte de dialogue.

```
D.P. binomiale
  p=0.140625
```

c) F2 (Bcd) et renseigner : Lower=0, upper=2

```
D.C. binomiale
  p=0.984375
```

TI : 2nde var (distrib)

b) A↓binomFdp(

```
binomFdp
nbreEssais:3
p:0.25
valeur de x:2
Coller
```

```
binomFdp(3,.25,2)
             0.140625
```

c) B↓binomFRép(

```
binomFRép(3,0.25,2)
             0.984375
```

NumWorks : Probabilités EXE

Binomiale EXE, renseigner n et p, Suivant.

b) Sélectionner et :

```
P(X= 2   )= 0.140625
```

c) Sélectionner et :

```
P(X≤ 2   )= 0.984375
```

EXERCICE D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 7

8 On lance quatre fois de suite un dé équilibré à six faces numérotées de 1 à 6.
La variable aléatoire X compte le nombre de 6 obtenus.

a) Justifier que la situation peut être modélisée par une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

b) Calculer $P(X=3)$ et interpréter le résultat.

c) Calculer $P(X \leqslant 1)$ et interpréter le résultat.

Arrondir au millième.

EXERCICE RÉSOLU

9 Déterminer la plus petite valeur de k telle que $P(X \leqslant k) \geqslant 1 - \alpha$

Cours 3

Une société de vente en ligne de matériel de jardinage propose à ses clients des lots de 80 asperseurs.
Une étude a montré que 5 % des asperseurs vendus sont défectueux.
On choisit un lot au hasard et on note X la variable aléatoire qui compte le nombre d'asperseurs défectueux sur les 80 du lot.

a) Modéliser la situation par une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

b) La société souhaite déterminer le plus petit nombre entier naturel k tel que $P(X \leqslant k) \geqslant S$ où S est un nombre réel de l'intervalle $]0\,;1[$.
Au début de l'algorithme incomplet ci-contre, on affecte 0 à la variable k et $0{,}95^{80}$ à la variable P ; on donne une valeur de $]0\,;1[$ à la variable S.
À la fin de son exécution, l'algorithme renvoie la valeur de la variable k.
Compléter les pointillés verts et rouges.

c) Coder cet algorithme à l'aide d'une fonction **Seuil** en langage Python.
Saisir cette fonction et l'exécuter pour $S = 0{,}99$, puis pour $S = 0{,}999$.

```
Tant que P < S
    k ← ...
    P ← ...
Fin Tant que
```

Solution

a) On répète 80 fois dans des conditions d'indépendance l'épreuve de Bernoulli dont le succès est « L'asperseur est défectueux ». La variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(80\,;0{,}05)$.

b) Pointillés verts : $k+1$ Pointillés rouges : $P + \binom{80}{k} \times 0{,}05^k \times 0{,}95^{80-k}$.

c)

```python
from math import *

def Combi(n,k):
    C=factorial(n)//(factorial(k)*factorial(n-k))
    return C

def Seuil(S):
    k=0
    P=0.95**80
    while P<S:
        k=k+1
        P=P+Combi(80,k)*0.05**k*0.95**(80-k)
    return k
```

La fonction **Combi**, de paramètres n et k, calcule $\binom{n}{k}$ à l'aide de la formule :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

```
>>> Seuil(0.99)
9
>>> Seuil(0.999)
11
```

Ainsi, 9 est la plus petite valeur telle que $P(X \leqslant 9) \geqslant 0{,}99$ et 11 est la plus petite valeur telle que $P(X \leqslant 11) \geqslant 0{,}999$.

La variable P est initialisée à $0{,}95^{80}$ c'est-à-dire à $P(X=0)$.
La boucle donne successivement à P les valeurs $P(X=0) + P(X=1)$ soit $P(X \leqslant 1)$, puis $P(X \leqslant 2)$, … jusqu'à dépasser la valeur de S.

Avec la calculatrice : on cherche k tel que $P(X \leqslant k) \geqslant 0{,}999$.

Casio : MENU 2 (STAT) F5 (DIST) F5 (BINOMIAL) F3 (InvB)

TI : 2nde var (distrib) entrer C↓invBinom(entrer

NumWorks : Probabilités Binomiale, renseigner n et p, Suivant, sélectionner et saisir 0.999 dans $P(X \leqslant \ldots) = 0{,}999$.

```
Binomial inverse
Data      :Variable
Area      :0.999
Numtrial:80
p         :0.05
Save Res:None
Exécuter
CALC
```

```
Binomial inverse
 xInv=11
```

Sucession d'épreuves indépendantes

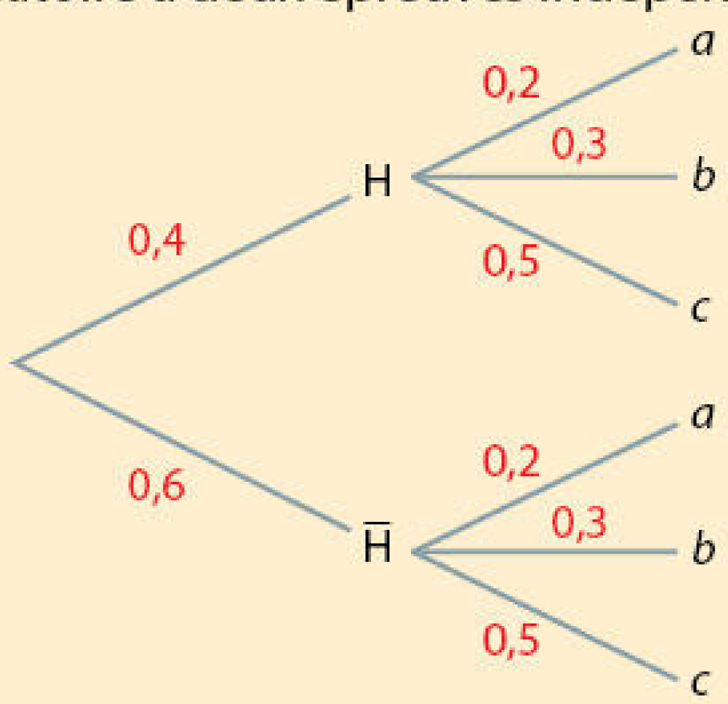
Cours 1

Questions flash — À l'oral

10 Déterminer mentalement le nombre d'issues des expériences aléatoires suivantes.
Expérience 1 : On lance deux fois de suite une pièce de monnaie et on note les faces obtenues.
Expérience 2 : On lance deux fois de suite un dé cubique et on note les numéros obtenus.
Expérience 3 : On lance une pièce de monnaie, puis un dé à six faces numérotées de 1 à 6 et on note la face et le numéro obtenus.

11 E_1 et E_2 sont deux univers d'expériences aléatoires : $E_1 = \{A\,;B\,;C\,;D\}$ et $E_2 = \{1\,;3\,;7\}$.
Dans chaque cas, citer deux issues de l'univers E indiqué : **a)** $E = E_1 \times E_2$ **b)** $E = E_1 \times E_1$

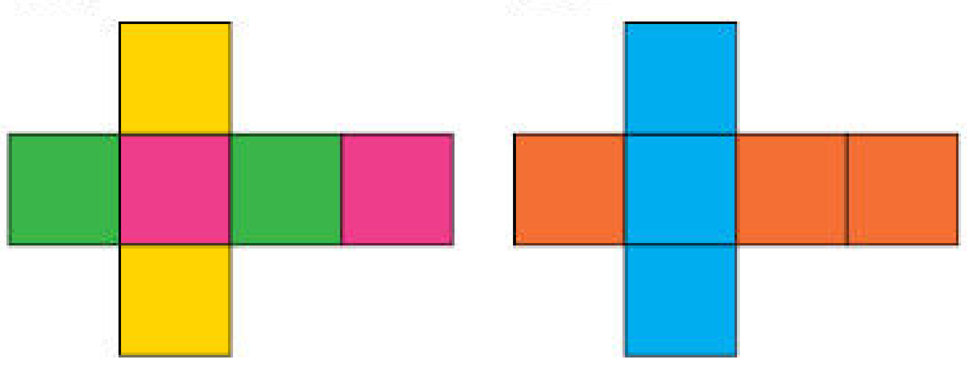
12 L'arbre pondéré ci-dessous illustre une expérience aléatoire à deux épreuves indépendantes.



Calculer mentalement la probabilité de chaque issue : **a)** $(H\,;a)$ **b)** $(\overline{H}\,;b)$ **c)** $(\overline{H}\,;c)$

13 Voici les patrons de deux dés équilibrés.

Dé 1 **Dé 2**



On lance le dé 1, puis le dé 2 et on note les couleurs obtenues (rose : R ; jaune : J ; vert : V ; bleu : B ; orange : O).
a) Quel est l'univers de cette expérience aléatoire ?
b) Représenter la situation par un arbre pondéré.
c) Dans chaque cas, déterminer la probabilité.
- $P(V\,;B)$
- $P(J\,;O)$
- $P(R\,;B)$
- $P(R\,;O)$

14 Les enfants de deux familles (qui ne possèdent ni jumeaux, ni triplés, ni quadruplés) se retrouvent un dimanche pour jouer des matchs de tennis.
La première famille compte quatre enfants (notés *a*, *b*, *c*, *d* de l'aîné au cadet) et la seconde famille compte deux enfants (notés *e* et *f* de l'aîné au cadet).
Pour le premier match, on choisit au hasard un enfant de la première famille, puis un enfant de la seconde famille.
a) Quel est l'univers de cette expérience aléatoire ?
b) Représenter la situation par un arbre pondéré.
c) Calculer la probabilité que les aînés des deux familles jouent ce premier match.

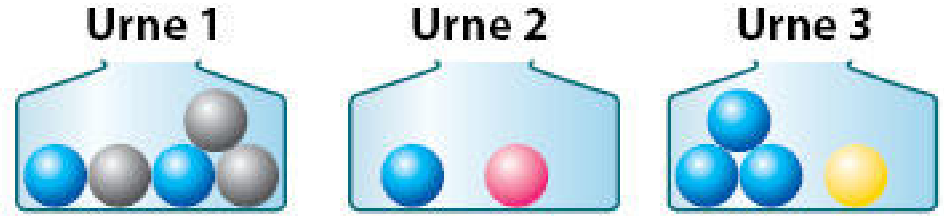
15 Un contrôle comporte quatre questions.
Pour chacune d'elles, le professeur propose deux réponses : l'une juste (J), l'autre fausse (F).
Un élève n'ayant pas appris sa leçon répond au hasard à chacune des questions.
On suppose que les réponses qu'il donne sont indépendantes les unes des autres.
a) Représenter cette situation par un arbre pondéré.
Combien y a-t-il de réponses possibles à ce contrôle ?
b) Que peut-on dire de la loi de probabilité sur l'ensemble des réponses ?
c) Donner la probabilité de chacun des événements suivants, sous forme d'une fraction irréductible :
- A : « L'élève a donné quatre réponses justes » ;
- B : « L'élève a donné une seule réponse juste ».

d) Déterminer la probabilité de l'événement C : « L'élève a donné au moins 2 réponses justes ».

Vidéo
JaiCompris.com — Cet exercice est corrigé en vidéo

16 On tire successivement une boule de chacune des urnes ci-dessous et on note les couleurs obtenues (B : bleu ; G : gris ; R : rose ; J : jaune).

Urne 1 **Urne 2** **Urne 3**



a) Déterminer le nombre d'issues de cette expérience aléatoire.
b) Représenter la situation par un arbre pondéré.
c) Déterminer la probabilité de l'événement : « Les trois boules sont de couleurs différentes. »
d) Donner deux issues différentes dont la probabilité est égale à $\dfrac{3}{40}$.

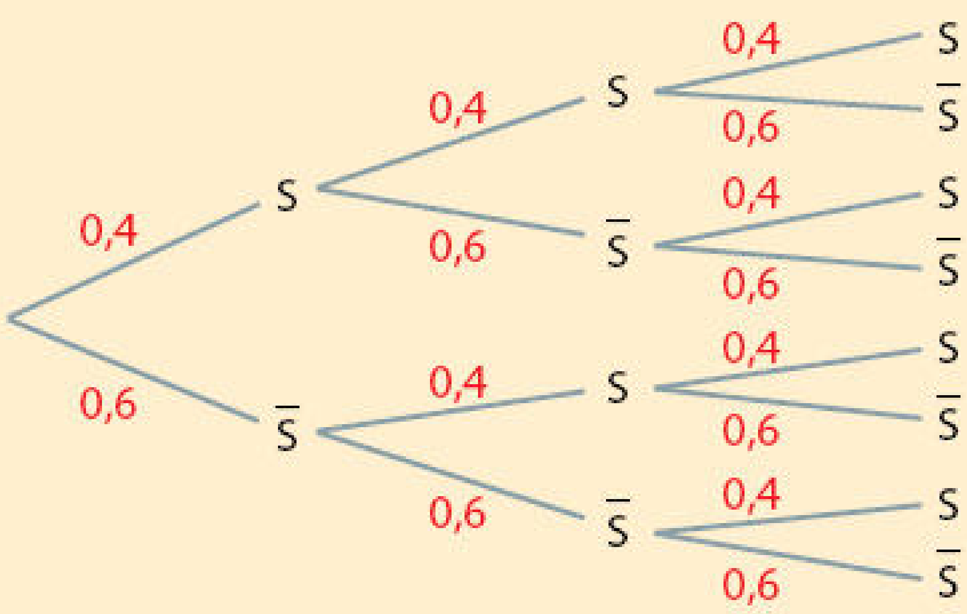
Épreuves et schéma de Bernoulli

Cours 2

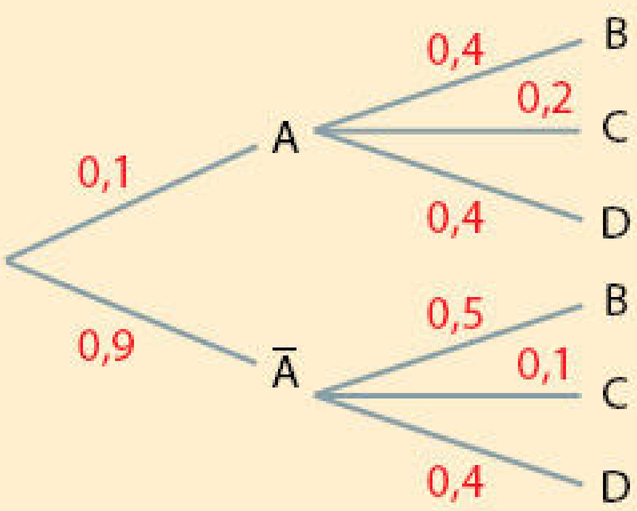
Questions flash — À l'oral

17 Un sac opaque contient sept jetons numérotés de 1 à 7. On tire au hasard un jeton du sac et on regarde si le numéro obtenu est pair ou impair.
Axelle : « On peut associer cet énoncé à une épreuve de Bernoulli de paramètre $\frac{3}{7}$ ».
Kylian : « On peut associer cet énoncé à une épreuve de Bernoulli de paramètre $\frac{4}{7}$ ».
Qui a raison ? Expliquer oralement.

18 Décrire un schéma de Bernoulli dont l'arbre ci-dessous serait une représentation.



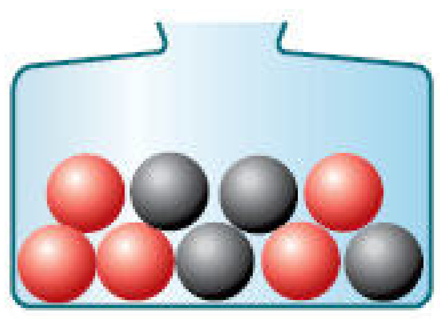
19 Donner oralement deux raisons pour lesquelles l'arbre pondéré ci-dessous ne peut pas représenter un schéma de Bernoulli.



Pour les exercices 20 à 22, reconnaître une épreuve de Bernoulli, définir le succès, l'échec et donner la loi de probabilité associée.

20 Une classe de Terminale compte 34 élèves dont 18 filles. On choisit au hasard la fiche d'un élève et on observe s'il s'agit d'un garçon.

21 On tire au hasard une boule de l'urne ci-contre et on observe s'il s'agit d'une boule rouge.



22 On lance un dé tétraédrique équilibré dont les sommets sont numérotés de 1 à 4, et on note si le 3 est sorti sur le sommet supérieur.

23 Selon la Sécurité routière, en 2019, environ 1,8 % des véhicules roulaient sans assurance. Depuis, de nouveaux radars capables de détecter le défaut d'assurance ont été mis en service.
Trois véhicules passent devant l'un de ces radars qui interroge alors les fichiers d'assurance.

a) Expliquer pourquoi on peut associer un schéma de Bernoulli à cette situation.
b) Représenter ce schéma par un arbre pondéré.

24 Le jeu de tarot est un jeu de cartes comportant 78 cartes dont 21 atouts. On tire successivement et avec remise quatre cartes d'un jeu de tarot.
a) Expliquer pourquoi on peut associer un schéma de Bernoulli à cette situation.
b) Représenter ce schéma par un arbre pondéré.

Pour les exercices 25 à 27, indiquer si l'on peut associer un schéma de Bernoulli à la situation. Si oui, représenter ce schéma par un arbre pondéré.

25 Un chapeau contient cinq cartes : deux portent la lettre X, trois la lettre Y.
Une partie consiste à tirer au hasard une carte du chapeau ; la partie est gagnée si la carte porte un X.
On réalise trois parties successives avec remise de la carte.

26 Dans son téléphone, Maxime a 140 morceaux de musique dont 32 de rap français.
Lorsqu'il est en mode lecture aléatoire, le téléphone choisit au hasard un morceau de la liste (sans répéter deux fois de suite le même morceau).
On note R l'événement : « Le morceau est du rap français ».
On s'intéresse aux deux premiers morceaux diffusés.

27 Une pièce de monnaie est truquée selon les modalités indiquées dans le tableau.

Issue	Pile	Face
Probabilité	$\frac{1}{9}$	$\frac{8}{9}$

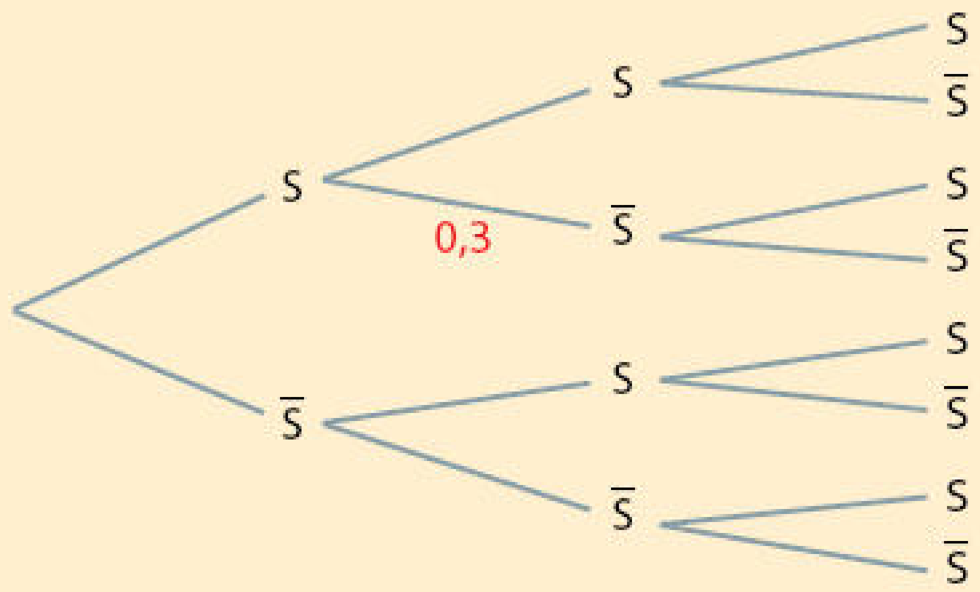
On lance cette pièce trois fois de suite.

Loi binomiale $\mathscr{B}(n\,;p)$

Cours 3

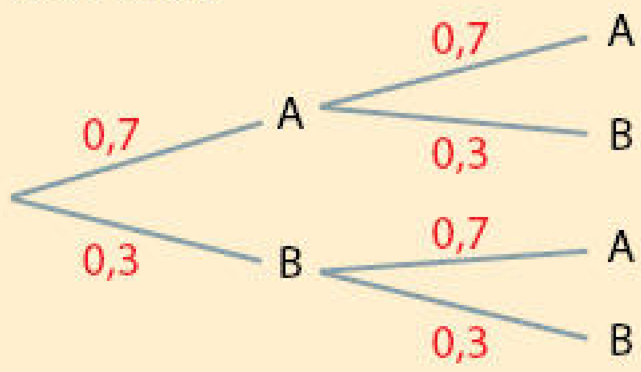
Questions flash — À l'oral

28 X est la variable aléatoire qui compte le nombre de succès dans le schéma de Bernoulli ci-dessous.



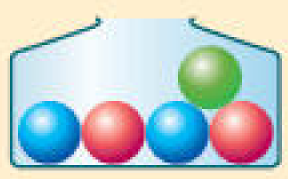
Indiquer oralement le nombre d'épreuves répétées, la probabilité du succès, les valeurs prises par X.

29 L'arbre pondéré ci-dessous représente un schéma de Bernoulli.



Léa : « On peut utiliser la loi binomiale $\mathscr{B}(2\,;0,7)$ ».
Jean-Philippe : « On peut utiliser la loi binomiale $\mathscr{B}(2\,;0,3)$ ».
Qui a raison ? Justifier oralement.

30 On tire successivement avec remise dix boules de l'urne ci-contre.



X est la variable aléatoire qui compte le nombre de boules rouges tirées.
Quelle est la loi de probabilité suivie par X ?

Pour les exercices 31 à 33, X est la variable aléatoire qui compte le nombre de succès. Indiquer, en justifiant, la loi de probabilité suivie par X.

31 On lance vingt fois de suite un dé équilibré à six faces numérotées de 1 à 6. Pour chaque lancer, on associe au succès l'obtention du 6.

32 On lance cinq fois de suite une pièce équilibrée. Pour chaque lancer, on associe au succès l'obtention de Pile.

33 Une urne contient dix billes numérotées de 1 à 10. On tire, successivement et avec remise, trois billes de cette urne. Pour chaque tirage, on associe au succès le fait que le numéro obtenu soit entre 3 et 5 inclus.

34 On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes. On note s'il s'agit d'un As, puis on la remet dans le jeu. On répète ce tirage trois fois de suite.
X est la variable aléatoire qui donne le nombre d'As obtenus.

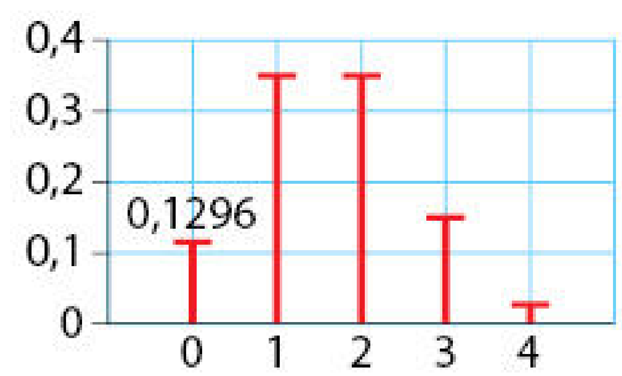
a) Quelle est la loi de probabilité suivie par X ?
b) Dans chaque cas, déterminer :
- $P(X = 1)$
- $P(1 \leqslant X < 3)$

35 X est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale. Voici le tableau incomplet qui résume cette loi.

k	0	1	2	3
$P(X = k)$	$\frac{27}{125}$	…	…	…

a) Quels sont les paramètres de cette loi ?
b) Recopier et compléter le tableau. Donner les résultats sous forme de fractions.

36 On a représenté graphiquement ci-contre une loi binomiale de paramètres n et p.
Déterminer les valeurs de ces paramètres.



37 Algo python

Un dé est truqué selon les modalités suivantes.

Issue	1	2	3	4	5	6
Probabilité	0,1	0,05	0,2	0,05	0,3	0,3

1. a) On lance ce dé une fois.
Déterminer la probabilité d'obtenir un numéro pair.
b) n désigne un nombre entier naturel non nul.
On lance n fois le dé et on note X_n la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où un numéro pair est sorti.
Exprimer $P(X_n = 1)$ en fonction de n.

2. Voici un programme incomplet en langage Python. Il permet de calculer $P(X = 1)$ pour n allant de 1 à 10.

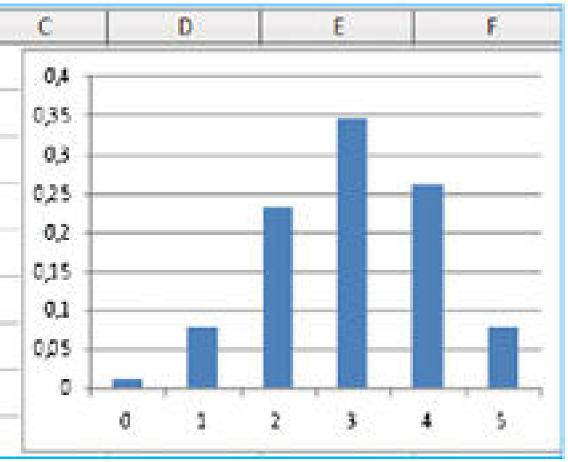
```
for i in range(1,11):
    p=
    print("n =",i,"P(X = 1) =",p)
```

a) Indiquer l'expression cachée dans la case rouge.
b) Saisir ce programme et l'exécuter afin de compléter le tableau ci-dessous. *Arrondir au millième.*

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X = 1)$										

38 Tice Une variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0{,}6$.
À l'aide du tableur, réaliser le tableau qui donne la loi de probabilité de X et sa représentation graphique.

	A	B
3	k	P(X=k)
4	0	0,01024
5	1	0,0768
6	2	0,2304
7	3	0,3456
8	4	0,2592
9	5	0,07776



Conseil : dans la cellule B4, saisir la formule =LOI.BINOMIALE(A4;5;0,6;0).

39 Déterminer l'arrondi au centième de $P(X \leqslant 2)$:
a) lorsque X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(5\,;0{,}3)$;
b) lorsque X suit la loi binomiale $\mathscr{B}\left(10\,;\dfrac{1}{4}\right)$.

40 Déterminer l'arrondi au centième de $P(3 \leqslant X < 6)$:
a) lorsque X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(10\,;0{,}2)$;
b) lorsque X suit la loi binomiale $\mathscr{B}\left(11\,;\dfrac{2}{5}\right)$.

41 Algo python
X est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres n et p. a et b désignent deux nombres entiers naturels tels que $0 \leqslant a < b \leqslant n$. Voici un algorithme :

Pour i allant de a à b
  $p \leftarrow p + \binom{n}{i} p^{i}(1-p)^{n-i}$
Fin Pour

Au début de cet algorithme, on affecte la valeur 0 à la variable p. En fin d'exécution, l'algorithme renvoie la valeur de la variable p.
a) Quel est le rôle de cet algorithme ?
b) Coder cet algorithme en langage Python, le saisir et l'exécuter pour $n = 20$, $p = 0{,}7$, $a = 8$, $b = 15$.

Vidéo
JAICOMPRIS.COM Cet exercice est corrigé en vidéo

42 Un service de livraison a constaté que 3 % des colis livrés sont abîmés.
Un livreur doit acheminer 20 colis.
On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de colis abîmés parmi les 20.
a) Quelle est la loi de probabilité suivie par X ?
b) Déterminer $P(X = 0)$ et en déduire $P(X \geqslant 1)$. *Arrondir au centième.*

43 Pour décorer la terrasse, le gérant d'un hôtel a acheté cinq lampes extérieures.
Ces lampes changent de couleur de manière aléatoire, indépendamment les unes des autres : rouge, bleu, vert et rose.

X est la variable aléatoire qui compte le nombre de lampes qui s'illuminent en vert lorsque le gérant les allume à la tombée du jour.
a) Quelle est la loi de probabilité suivie par X ?
b) Déterminer la probabilité, arrondie au centième, de chacun des événements :
A : « Moins de deux lampes s'illuminent en vert » ;
B : « Au moins deux lampes s'illuminent en vert ».

44 À la naissance, une mère qui possède un caractère génétique C, le transmet à son enfant dans un cas sur dix.
On suppose que la transmission à un enfant est indépendante de la transmission à un autre enfant.
Une femme, qui présente le caractère C, souhaite fonder une famille de 4 enfants.
On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre d'enfants parmi les 4, présentant le caractère C.
a) Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire X ?
b) Calculer la probabilité de l'événement : « Au moins un enfant sur les quatre présente le caractère C ». *Arrondir au centième.*

45 Lors d'une fête foraine, une attraction fait fureur. 250 cordelettes sont proposées au joueur dont 30 sont reliées à un gros lot.
Un joueur achète le droit de tirer 3 cordelettes et on considère qu'il s'agit d'une répétition de trois expériences identiques et indépendantes.
X est la variable aléatoire qui donne le nombre de gros lots gagnés par le joueur.
a) Justifier que X suit une loi binomiale.
Quels sont ses paramètres ?
b) Quelle est la probabilité de ne pas gagner de gros lot ? *Arrondir au centième.*
c) Quelle est la probabilité de gagner au moins un gros lot ? *Arrondir au centième.*
d) Quelle est la probabilité de gagner exactement deux gros lots ? *Arrondir au centième.*

46 QCM **Dans chaque cas, donner la réponse exacte sans justifier.**

Urne 1 : 3 boules rouges (R) et 2 blanches (B) **Urne 2 :** 1 boule rouge, 2 vertes (V), 3 blanches

On tire au hasard une boule de l'urne 1, on note sa couleur, puis une boule de l'urne 2, on note sa couleur.

		A	B	C	D
1	Cette expérience aléatoire possède …	15 issues	11 issues	6 issues	5 issues
2	La probabilité de l'issue (B ; R) est …	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$
3	X est la variable aléatoire qui compte le nombre de boules rouges tirées. $P(X=1)$ est égal à …	$\frac{17}{30}$	$\frac{13}{30}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{23}{30}$

47 QCM **Dans chaque cas, donner la (ou les) réponse(s) exacte(s) sans justifier.**

		A	B	C	D
1	X est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathscr{B}\left(10\,;\frac{1}{4}\right)$. Alors $P(X \geqslant 1)$ est égal à …	$1-P(X<1)$	environ 0,056	$1-P(X=0)$	environ 0,944
2	X est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $\mathscr{B}(3\,;p)$. On donne $P(X=0)=\frac{1}{64}$. Alors …	$p=\frac{1}{4}$	$p=\frac{3}{4}$	$(1-p)^3=\frac{1}{64}$	$p^3=\frac{1}{64}$
3	X est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathscr{B}(3\,;0{,}2)$. Alors $P(X=3)$ est égal à …	$\left(\frac{1}{5}\right)^3$	$\left(\frac{4}{5}\right)^3$	$P(X=0)$	$1-P(X\leqslant 2)$
4	X est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathscr{B}(6\,;0{,}2)$. Alors $P(2\leqslant X<4)$ est égal à …	$P(X=2)+P(X=3)$	$P(X<4)-P(X<1)$	0,328 environ	0,672 environ

48 Vrai/Faux **Dans chaque cas, dire si l'affirmation est vraie ou fausse en justifiant.**

Voici la répartition des licenciés d'un club de sport selon le sexe et la catégorie d'âge.
On choisit au hasard une licence dans chacune des trois catégories d'âge et on note le sexe de chaque licencié.

	Femme	Homme
Moins de 18 ans	45	55
De 18 à 60 ans	30	45
60 ans et plus	18	12

1. **Affirmation** : l'univers de cette expérience aléatoire comporte 6 issues.
2. **Affirmation** : la probabilité que les trois licenciés soient du même sexe est égale à 0,24.
3. **Affirmation** : la probabilité qu'au moins deux des trois licenciés soient des femmes est égale à 0,474.

Vérifiez vos réponses : p. 529

49 Étudier une propriété des lois binomiales

1. X est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(2\,;p)$. On pose $q = 1 - p$.
Recopier le tableau et la somme ci-dessous, puis compléter les pointillés.

k	0	1	2
$\mathrm{P}(\mathrm{X}=k)$	q^2	...	...

$\mathrm{P}(\mathrm{X}=0)+\mathrm{P}(\mathrm{X}=1)+\mathrm{P}(\mathrm{X}=2)=q^2+\ldots+\ldots$

$\mathrm{P}(\mathrm{X}=0)+\mathrm{P}(\mathrm{X}=1)+\mathrm{P}(\mathrm{X}=2)=(\ldots)^2=\ldots$

2. X est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(3\,;p)$.

a) Recopier le tableau et la somme ci-dessous, puis compléter les pointillés.

k	0	1	2	3
$\mathrm{P}(\mathrm{X}=k)$	q^2	...	...	...

$\mathrm{P}(\mathrm{X}=0)+\mathrm{P}(\mathrm{X}=1)+\mathrm{P}(\mathrm{X}=2)+\mathrm{P}(\mathrm{X}=3)$ est égal à :
$q^3+\ldots+\ldots+\ldots$

b) Développer l'expression $(p+q)^3$.
En déduire que $\mathrm{P}(\mathrm{X}=0)+\mathrm{P}(\mathrm{X}=1)+\mathrm{P}(\mathrm{X}=2)+\mathrm{P}(\mathrm{X}=3)=1$.

3. Cas général

X est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;p)$.

On conjecture que pour tout entier naturel n, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k q^{n-k}=(p+q)^n=1$.

Voici la démonstration par récurrence de cette propriété.

- **Initialisation** : pour $n=0$, $\binom{0}{0}p^0q^{0-0}=1$ et $(p+q)^0=1$
- **Hérédité** : on suppose que pour un entier n, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k q^{n-k}=(p+q)^n=1$.

On démontre qu'alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}p^k q^{n+1-k}=(p+q)^{n+1}=1$.

Or, $(p+q)^{n+1}=(p+q)^n(p+q)=p(p+q)^n+q(p+q)^n$.

Donc d'après l'hypothèse de récurrence :

$$p(p+q)^n=p^{n+1}+\binom{n}{n-1}p^nq+\ldots+\binom{n}{k-1}p^kq^{n+1-k}+\ldots+\binom{n}{1}p^2q^{n-1}+\binom{n}{0}pq^n$$

$$q(p+q)^n=\binom{n}{n}p^nq+\ldots+\binom{n}{k}p^kq^{n+1-k}+\ldots+\binom{n}{2}p^2q^{n-1}+\binom{n}{1}pq^n+q^{n+1}$$

$$(p+q)^{n+1}=p^{n+1}+\binom{n+1}{n}p^nq+\ldots+\binom{n+1}{k}p^kq^{n+1-k}+\ldots+\binom{n+1}{2}p^2q^{n-1}+\binom{n+1}{1}pq^n+q^{n+1}$$

Ainsi $\displaystyle(p+q)^{n+1}=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}p^kq^n$

- **Conclusion :** pour tout entier naturel n, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n}{k}p^kq^{n-k}=1$.

Expliquer les trois lignes écrites en vert.

50 Travailler avec des expressions littérales

X est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;p)$.
S est un nombre réel de l'intervalle $]0\,;1[$.
Déterminer, en fonction de S et de p, la plus petite valeur de n telle que $\mathrm{P}(\mathrm{X}\geqslant 1)\geqslant \mathrm{S}$.

Vidéo

JAICOMPRIS.COM

Toutes les démonstrations au programme en vidéo

Liste des démonstrations :

- Expression de la probabilité de k succès dans le schéma de Bernoulli.

Conseil
Penser que $(p+q)^3$ est égal à $(p+q)(p+q)^2$.

Conseil
La notation $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\mathrm{P}(\mathrm{X}=k)$ signifie $\mathrm{P}(\mathrm{X}=0)+\mathrm{P}(\mathrm{X}=1)+\ldots+\mathrm{P}(\mathrm{X}=n)$

Conseil
Penser à utiliser la relation de Pascal.

Étudier une succession d'épreuves indépendantes ou non

51 **PARCOURS DIFFÉRENCIÉS**

Parcours 1

L'alphabet latin compte 26 lettres dont 6 voyelles, et l'alphabet grec compte 24 lettres dont 5 voyelles. On choisit au hasard une lettre dans chacun des deux alphabets.
Déterminer la probabilité que sur les deux lettres tirées il y ait au moins une voyelle.

Parcours 2

Un code secret est composé de deux chiffres ■▲ avec ■ $\in \{1\,;2\,;3\}$ et ▲ $\in \{0\,;1\,;2\,;3\}$.
Alex a oublié le code et il le compose au hasard.
a) Représenter la situation par un arbre pondéré.
b) Repasser en rouge les chemins de l'arbre qui réalisent l'événement A : « Au moins l'un des deux chiffres tapés par Alex est pair ».
c) Calculer $P(A)$.

52 **Algo** python

On lance successivement deux dés équilibrés : l'un à six faces numérotées de 1 à 6 et l'autre tétraédrique dont les sommets sont numérotés de 1 à 4.
X est la variable aléatoire qui donne la somme des numéros obtenus.

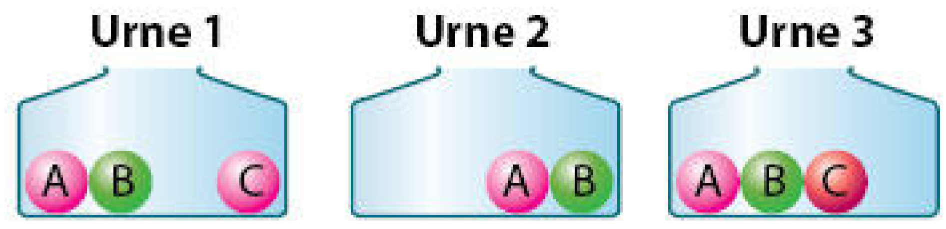
1. Voici une fonction incomplète écrite en langage Python qui renvoie pour résultat un échantillon de n expériences et qui indique la fréquence de sortie de l'issue $\{X = k\}$.

a) Indiquer les expressions cachées dans les cadres colorés.
b) Saisir et exécuter cette fonction pour :
- $n = 1\,000$, $k = 5$;
- $n = 5\,000$, $k = 6$.

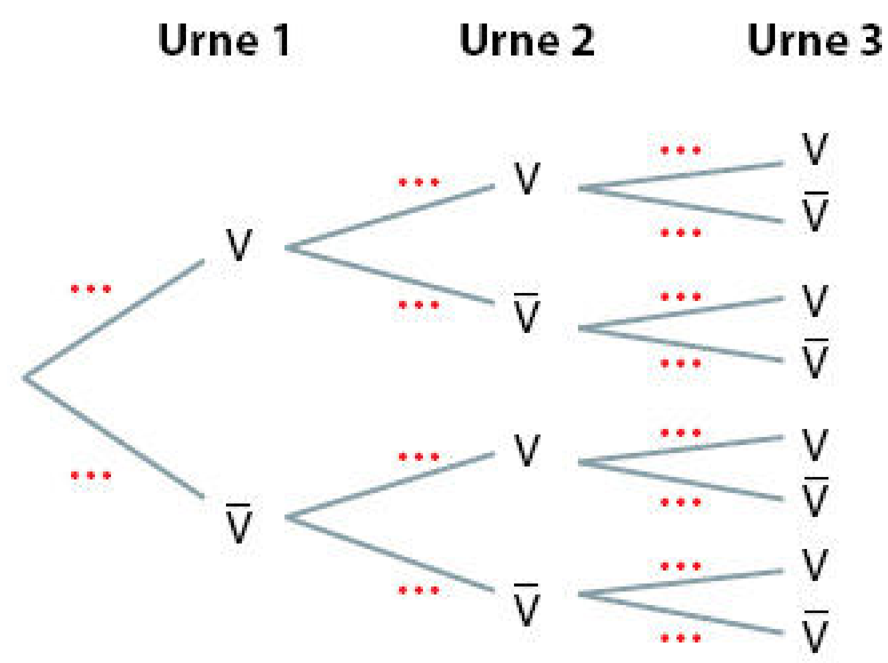
```
from random import *

def Echantillon(n,k):
    som=0
    for i in range(0,n):
        a=randint(1,6)
        b=
        x=a+b
        if
            som=som+1
    f=
    return f
```

2. a) Utiliser un tableau croisé pour lister toutes les issues possibles pour la variable aléatoire X.
b) Déterminer $P(X = 5)$, puis $P(X = 6)$.
Comparer ces résultats théoriques aux fréquences observées sur les échantillons de la question **1. b)**.

53 On prélève au hasard une boule de chacune des urnes ci-dessous.



Situation 1 : on note la couleur des boules tirées.
V est l'événement « La boule tirée est verte ».
a) Reproduire et compléter l'arbre ci-dessous.



b) Déterminer la probabilité de tirer au moins une boule verte.
Situation 2 : on note la lettre indiquée sur chaque boule tirée.
A est l'événement : « La boule tirée porte la lettre A ».
a) Représenter la situation par un arbre pondéré.
b) Déterminer la probabilité d'obtenir A une fois au plus.

54 L'efficacité du vaccin contre la grippe peut diminuer en fonction des caractéristiques des personnes vaccinées, ou en raison du vaccin, qui n'est pas toujours totalement adapté aux souches du virus qui circulent. Il est donc possible de contracter la grippe en étant vacciné.
Une étude menée à l'issue de la période hivernale a montré que :
- 40 % de la population est vaccinée
- 8 % des personnes vaccinées et 28 % des personnes non vaccinées ont contracté la grippe.

On choisit une personne au hasard dans la population.
V est l'événement : « La personne est vaccinée » ;
G est l'événement : « La personne a contracté la grippe ».
a) Représenter la situation par un arbre pondéré.
b) Déterminer la probabilité que la personne choisie ait contracté la grippe.
c) La personne choisie a contracté la grippe.
Déterminer la probabilité qu'elle soit vaccinée.
d) Déterminer la probabilité que la personne choisie ait contracté la grippe ou soit vaccinée.

55 Voici la répartition des membres d'une association humanitaire selon leur âge et leur spécialité.

	Médecin (M)	Infirmier (I)	Administratif (A)
Femme (F)	8	14	3
Homme (H)	7	15	8

Pour chacune des situations ci-dessous, construire un arbre pondéré, puis calculer la probabilité P(S).

Situation 1

On prélève au hasard la fiche d'un membre de chacune des spécialités.

S est l'événement : « L'un des trois membres est une femme ».

Situation 2

On prélève au hasard la fiche d'une femme, puis celle d'un homme.

S est l'événement : « L'un des deux membres au moins est médecin ».

Situation 3

On prélève au hasard successivement et sans remise les fiches de deux membres de l'association.

S est l'événement : « Les deux membres sont du même sexe ».

Modéliser avec une loi binomiale

56 **PARCOURS DIFFÉRENCIÉS**

Parcours 1

On a constaté que 0,4 % d'une population est touchée par une certaine maladie.

On prélève au hasard la fiche médicale de 50 individus de cette population.

La population est suffisamment grande pour assimiler ces prélèvements à des tirages avec remise.

A est l'événement : « L'échantillon compte au moins deux personnes malades ».

Déterminer P(A). *Arrondir au millième.*

Parcours 2

Dans une société de démarchage téléphonique, un opérateur appelle 10 personnes par jour. On estime que 40 % des personnes appelées répondent.

X est la variable aléatoire qui compte le nombre de personnes qui répondent.

a) Quelle est la loi de probabilité suivie par X ?

b) Déterminer $P(X = 0)$ et $P(X = 1)$. *Arrondir au millième.*

c) En déduire la probabilité qu'au moins deux personnes répondent.

57 **Algo** python

Une roseraie livre des fleuristes par lots de 100 roses. Afin de fidéliser ses clients, elle rembourse un lot lorsqu'il contient strictement plus de 5 roses fanées.

Une étude a montré que 4 % des roses livrées sont fanées.

On choisit un lot au hasard.

X est la variable aléatoire qui donne le nombre de roses fanées de ce lot.

1. a) Quelle est la loi de probabilité suivie par X ?

b) Calculer la probabilité que le lot soit remboursé au fleuriste. *Arrondir au centième.*

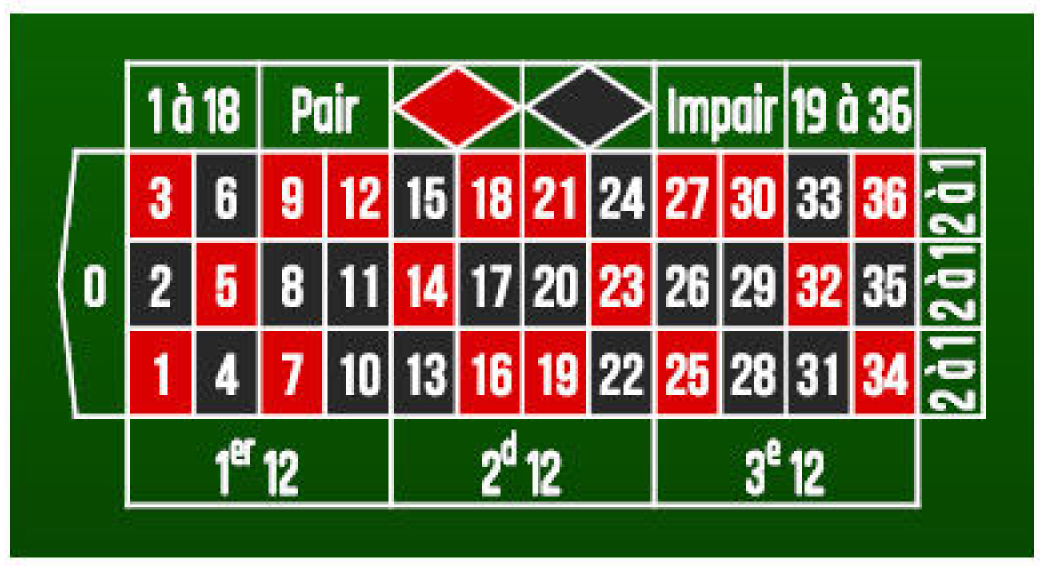
2. Le chef des ventes de la roseraie souhaite réduire le nombre de lots remboursés. Pour cela, il décide d'augmenter le nombre k de roses fanées à partir duquel le lot est remboursé.

a) Écrire une fonction **Seuil** en langage Python qui détermine la plus petite valeur k telle que la probabilité de rembourser le lot soit inférieure ou égale à 0,01.

b) Saisir et exécuter cet algorithme.

58 Au casino, le jeu de la roulette contient 37 numéros (de 0 à 36).

On a détaillé ci-dessous cinq façons de jouer une partie à la roulette.



(1) Miser sur l'un des 37 numéros.

(2) Miser sur « Impair ».

(3) Miser sur « 1 à 18 ».

(4) Miser sur « Rouge ».

(5) Miser sur « 1er 12 », c'est-à-dire sur les 12 premiers numéros de 1 à 12.

Un joueur décide de jouer quatre parties successives en misant, à chaque fois, de la même façon.

X est la variable aléatoire qui compte le nombre de parties gagnées sur les quatre parties jouées.

Pour chaque façon de miser :

a) modéliser la situation par une loi binomiale dont on précisera les paramètres ;

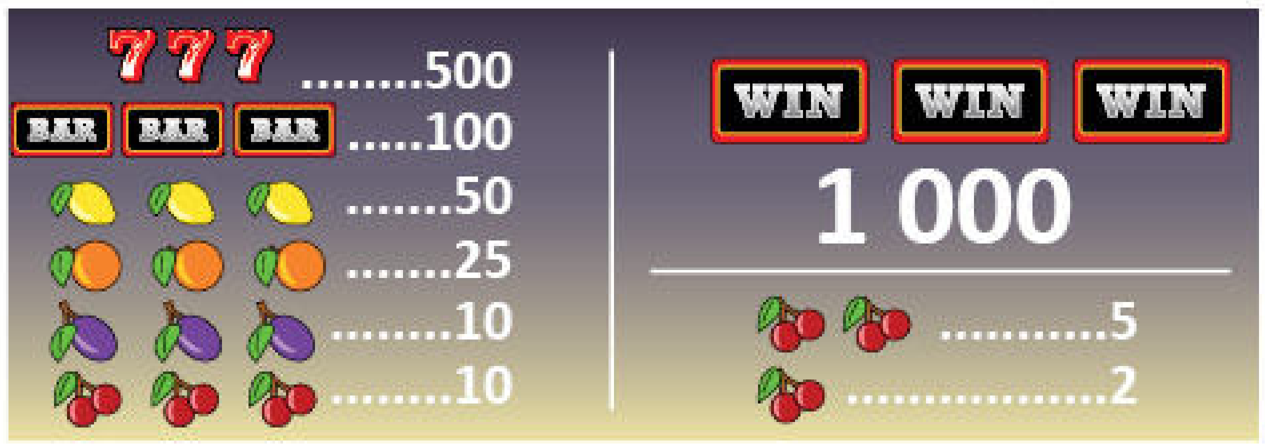
b) déterminer la probabilité que le joueur gagne au moins une partie. *Arrondir au millième.*

59 Un serveur a étudié les pourboires laissés par ses clients durant l'année écoulée.
Il a constaté que 25 % des clients ne laissent pas de pourboire et que les autres laissent un pourboire moyen de 1,80 €.
On prélève au hasard un échantillon de 50 clients de ce restaurant. On suppose que les paiements des clients sont indépendants.
X est la variable aléatoire qui compte le nombre de clients ayant laissé un pourboire.
Les résultats seront arrondis au millième.
a) Déterminer et interpréter $P(X = 35)$.
b) Déterminer la probabilité de l'événement : « Avec ces 50 clients, le restaurateur a reçu 72 € de pourboires ».
c) Déterminer $P(35 \leqslant X \leqslant 40)$.
Interpréter le résultat obtenu.

60 **Tice** On lance un dé tétraédrique équilibré dont les faces portent les numéros 1, 2, 3 et 4 ; on note le numéro inscrit sur la face cachée.
1. On lance dix fois de suite le dé.
On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où le numéro 2 est obtenu.
X suit une loi binomiale.
a) Saisir dans une feuille de calcul, la loi de probabilité de X et sa représentation graphique.
b) Calculer la probabilité de l'événement $(X \geqslant 1)$. *Arrondir au millième.*
2. n désigne un nombre entier naturel non nul.
On lance n fois le dé.
On note U_n la probabilité d'obtenir pour la première fois le numéro 2 au n-ième lancer.
a) Expliquer pourquoi pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,
$$U_n = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \times \frac{1}{6}.$$
b) Démontrer que (U_n) est une suite géométrique.
c) Pour quelles valeurs de n, a-t-on $U_n < 0{,}1$?

61 On considère un dé pipé dont les six faces sont numérotées de 1 à 6.
On note p_i la probabilité d'apparition de la face numérotée i.
a) Sachant que $p_1 = p_3 = p_5$; $p_2 = p_4 = p_6$; $p_2 = 2p_3$, déterminer p_i pour tout entier i compris entre 1 et 6.
b) On lance le dé n fois de suite.
Exprimer en fonction de n la probabilité q_n de l'événement : « On obtient au moins une fois un résultat pair ».
Utiliser la calculatrice pour déterminer les valeurs de n telles que $q_n > 0{,}999$.

62 Voici un jeu proposé sur une application smartphone.



Les trois rouleaux de la machine sont identiques et constitués de :
deux WIN ; trois 7 ; quatre BAR ; cinq ; six ; huit ; dix .
Les gains sont indiqués en points sur la machine.
a) Calculer la probabilité d'obtenir chacun des gains indiqués. *Arrondir au millième.*
b) Pour jouer, le joueur doit miser 10 points.
Calculer la probabilité que la partie ne soit pas perdante.

S'entraîner à la logique → p. 525

63 **Événements contraires**

Un schéma de Bernoulli est constitué de cinq répétitions.
Dans chaque cas, définir l'événement contraire.
a) « Obtenir au moins un succès ».
b) « Obtenir au plus deux succès ».
c) « Obtenir au plus trois échecs ».

64 **Propositions vraies ou fausses**

X est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres n et p (avec n nombre entier naturel, $n \geqslant 2$ et $0 < p < 1$).
Pour chaque proposition, dire si elle est vraie ou fausse. Justifier.
a) Si $P(X = 0) \leqslant 0{,}1$, alors $P(X \geqslant 1) \geqslant 0{,}9$.
b) Pour tout entier naturel k avec $0 \leqslant k \leqslant n$,
$$P(X = k) \leqslant P(X = n - k).$$
c) La variable aléatoire Y qui donne le nombre d'échecs suit la loi binomiale de paramètres n et $1 - p$.

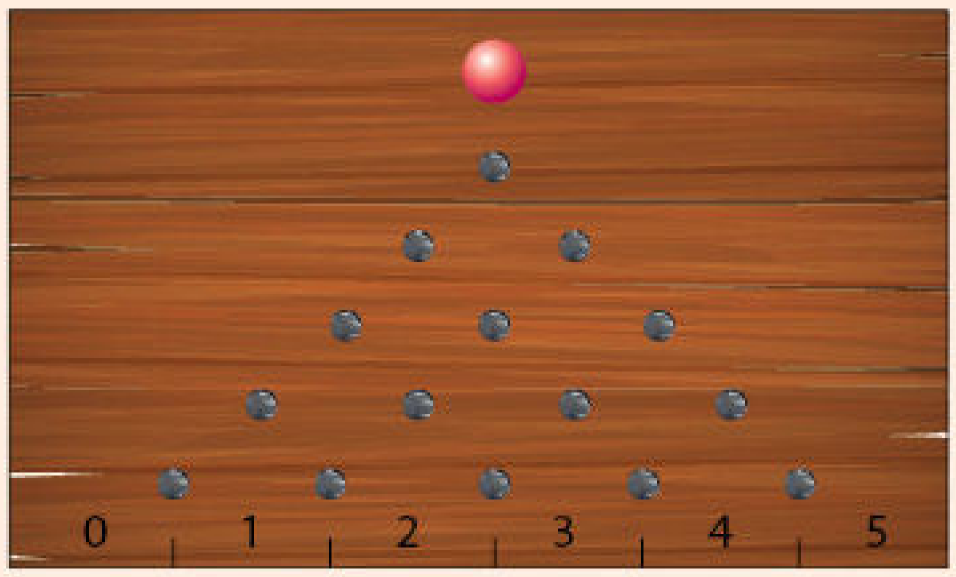
65 SIMULATION ET UNE PLANCHE DE GALTON

Algo python

Objectif
Utiliser un algorithme pour simuler une expérience aléatoire associée à un schéma de Bernoulli, puis modéliser cette expérience aléatoire.

Principe

La planche de Galton est un appareil permettant de simuler un schéma de Bernoulli.
Celle reproduite ci-contre est composée de cinq rangées de 1, 2, 3, 4 puis 5 clous. Une bille est lâchée à la verticale du premier clou. À chaque fois qu'elle rencontre un clou, la bille tombe à gauche ou à droite de façon équiprobable.
En bas de la planche se trouvent des compartiments numérotés de 0 à 5 pour réceptionner la bille.



1. Simulation par un algorithme

À chaque fois que la bille rencontre un clou, on note 0 lorsqu'elle part sur la gauche et 1 lorsqu'elle part sur la droite du clou.
On effectue ensuite la somme des cinq numéros obtenus au passage des cinq rangées. Cette somme correspond au numéro du compartiment.

a) À quel numéro de compartiment correspond le trajet 0-0-1-1-0 ? le trajet 1-1-0-1-0 ?

b) Voici une fonction incomplète écrite en langage Python qui renvoie la fréquence d'obtention du compartiment numéro k lors de n lancers.
Indiquer l'expression cachée par le cadre rouge.
Saisir ce programme et exécuter **Simulation(10000,3).**

c) Utiliser ce programme afin d'obtenir la fréquence de chacun des numéros de compartiments pour 10 000 lancers.

```python
from random import *

def Simulation(n,k):
    som=0
    for i in range(n):
        a=randint(0,1)
        b=randint(0,1)
        c=randint(0,1)
        d=randint(0,1)
        e=randint(0,1)
        S=a+b+c+d+e
        if S==k:
            som=som+1
    f=
    return f
```

2. Modélisation

a) À chaque rangée de clous, on note succès lorsque la bille part à droite.
Modéliser cette situation par une épreuve de Bernoulli dont on précisera le paramètre.

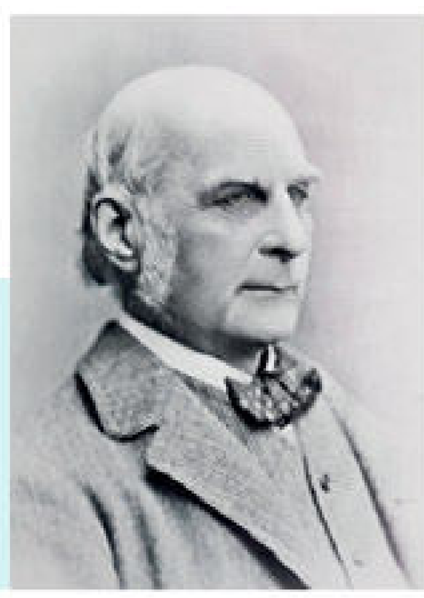
b) On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de succès obtenus lors du lâcher de la bille.
Déterminer la loi de probabilité de X.

c) Calculer $P(X = 3)$, puis comparer le résultat à celui obtenu au **1. b)**. Expliquer cette différence.

d) Pour chacun des autres compartiments, calculer la probabilité que la bille tombe dans ce compartiment.

HISTOIRE DES MATHS

Ce procédé a été imaginé par le savant anglais Sir Francis Galton (1822-1911). Écrivain, météorologue, statisticien …, il est également connu pour avoir mis en place la méthode d'identification des individus par leurs empreintes digitales.



66 SURRÉSERVATION AÉRIENNE

Algo python

Objectif
Modéliser une situation à l'aide de la loi binomiale, puis utiliser un algorithme afin d'optimiser les recettes d'une entreprise.

Principe

Une compagnie aérienne assure une ligne régulière avec un avion d'une capacité de 70 passagers. Les clients réservent gratuitement par Internet, sans obligation d'achat et sans pénalité en cas de non présentation.

La compagnie propose n places à la réservation (n nombre entier naturel, $n \geqslant 70$) et on suppose que les n places sont réservées mais seuls 95 % des voyageurs se présentent à l'embarquement et achètent effectivement leur billet.

Le prix du billet s'élève à 90 €.

Du point de vue de la compagnie, la présence ou non d'un client à l'embarquement est une épreuve de Bernoulli et les n clients représentent n répétitions identiques et indépendantes de cette épreuve.

X est la variable aléatoire qui donne le nombre de passagers achetant effectivement leur billet parmi les n ayant réservé.

1. Sans surréservation

On suppose dans cette question que $n = 70$.

a) Déterminer la loi de probabilité de X et préciser ses paramètres.

b) Calculer la probabilité qu'il y ait au moins une place libre dans l'avion.

Arrondir au millième.

2. Avec surréservation

On suppose dans cette question que $n = 80$ (la capacité restant de 70 passagers).

Si un voyageur ayant réservé arrive pour embarquer alors que l'avion est déjà complet, la compagnie lui verse un dédommagement de 45 €.

a) Dans cette situation, quelle est la loi de probabilité de X ?

b) Calculer la probabilité qu'il y ait au moins une place libre dans l'avion ?

Arrondir au millième.

c) Calculer la probabilité qu'il y ait au moins un voyageur ayant réservé et ne pouvant pas embarquer.

Arrondir au millième.

3. Un programme en langage Python

Voici une fonction incomplète écrite en langage Python qui, pour n places offertes à la réservation en entrée, renvoie la recette de la compagnie aérienne.

a) Indiquer les expressions cachées par les cadres.

b) Saisir ce programme et le tester afin de déterminer le nombre de places à offrir à la réservation afin que la recette soit maximum.

```python
def Recette(n):
    if 0.95*n>=70:
        R=[          ]
    else:
        R=[      ]
    return R
```

67 Comparer des probabilités

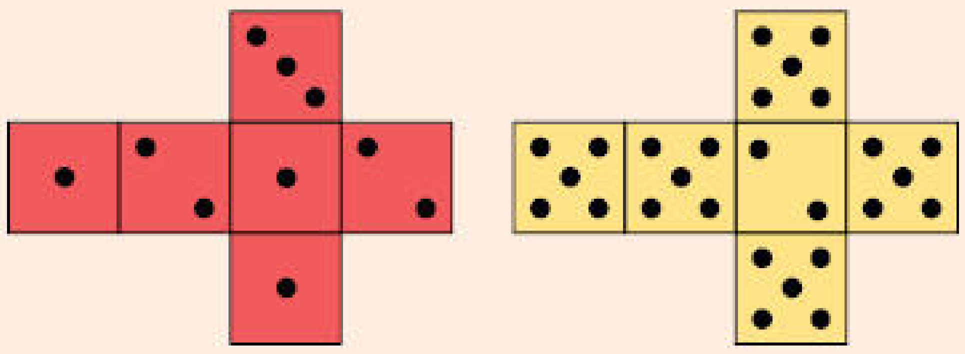
Narration de recherche

Raisonner **Calculer**

Rédiger les différentes étapes de la recherche, sans omettre les fausses pistes et les changements de méthode.

Problème

Voici les patrons de deux dés équilibrés.



Yanis lance le dé rouge deux fois et fait la somme des numéros obtenus. Elia lance le dé jaune trois fois et fait la somme des numéros obtenus.

Yanis dit à Elia : « J'ai plus de chances d'obtenir 5 que toi d'obtenir 12 ». Yanis a-t-il raison ?

68 Prendre des initiatives

Raisonner **Calculer**

n désigne un nombre entier naturel non nul.

Dans une loterie, un ticket sur n est gagnant.

Alyssia décide d'acheter n tickets.

Déterminer la plus petite valeur de n pour laquelle la probabilité qu'Alyssia ait au moins un ticket gagnant soit inférieure à 0,64. *S'aider de la calculatrice.*

69 Déterminer une probabilité maximum

Modéliser **Raisonner** **Calculer**

1. f est la fonction définie sur $[0\,;100]$ par :

$$f(x)=\frac{x}{50}\left(1-\frac{x}{100}\right).$$

Démontrer que f admet un maximum sur $[0\,;100]$ et préciser sa valeur.

2. Un sac contient 100 jetons indiscernables au toucher dont m jetons sont gagnants (avec m nombre entier naturel, $0<m<100$).

On tire successivement et avec remise deux jetons du sac.

X est la variable aléatoire qui donne le nombre de jetons gagnants parmi les deux.

A est l'événement : « Obtenir exactement un jeton gagnant sur les deux. »

a) Pour quelle valeur de m, la probabilité $P(A)$ est-elle maximum ?

b) Calculer cette probabilité pour la valeur de m trouvée.

70 Modéliser une situation

Problème ouvert

Raisonner **Calculer** **Communiquer**

Sur l'année qui vient de s'écouler, une compagnie aérienne affiche des retards sur 4 % de ses vols courte distance ($<$ 1 500 km). Parmi ces retards, 22 % sont des retards de plus de 3 h.

Une loi de 2004 de l'Union européenne prévoit une indemnisation de 250 € par passager lorsqu'un vol courte distance est retardé de plus de 3 h.

Alexandra effectue 10 allers-retours courte distance par an avec cette compagnie aérienne.

Quelle est la probabilité que, sur l'année écoulée, elle ait reçu 750 € d'indemnisation ?

71 Penny's wins

Raisonner **Calculer** **Communiquer**

Penny, Alex and Leonard regularly play table football.

Penny wins eighty times out of hundred against Alex and three times out of ten against Leonard.

Today, she will play four consecutive games against Alex and five consecutive games against Leonard.

We assume that the results are independent.

Let X (resp. Y) be the random variable that counts the number of games Penny wins against Alex (resp. against Leonard).

a) What is the probability distribution of X? of Y?

b) Compare $P(X \geqslant 1)$ and $P(Y \geqslant 2)$.

72 Imaginer une stratégie

Modéliser **Raisonner** **Calculer**

Un mage se présente aux portes d'une cité pour y offrir ses services de divination.

Les habitants sceptiques lui font passer un test au cours duquel il devra deviner les résultats de dix lancers d'une pièce d'argent équilibrée.

Il se trouve qu'il donne huit fois la bonne réponse.

Les habitants de la cité peuvent-ils faire confiance à ce mage ?

73 Déceler des erreurs dans un échange d'information

⏱ 35 min

D'après Bac, Polynésie 2019

Dans cet exercice, les probabilités demandées seront précisées à 10^{-4} près.

Lors d'une communication électronique, tout échange d'information se fait par l'envoi d'une suite de 0 ou de 1, appelés bits, et cela par le biais d'un canal qui est généralement un câble électrique, des ondes radio, …
Une suite de 8 bits est appelé un octet. Par exemple 10010110 est un octet.

Partie A

On se place dans le cas où l'on envoie, sur le canal, successivement 8 bits qui forment un octet.
On envoie un octet au hasard. On suppose la transmission de chaque bit indépendantes de la transmission des bits précédents. On admet que la probabilité qu'un bit soit mal transmis est égale à 0,01.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de bits mal transmis dans l'octet lors de cette communication.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ? Justifier.
2. Déterminer la probabilité qu'exactement deux bits de l'octet soient mal transmis.
3. Que peut-on penser de l'affirmation suivante : « La probabilité que le nombre de bits mal transmis de l'octet soit au moins égal à trois est négligeable » ? Argumenter.

> **Guide de résolution**
> **3. Négligeable** signifie très proche de zéro.

Partie B

Afin de détecter si un ou plusieurs bits de l'octet sont mal transmis, on utilise un protocole de détection d'erreur. Il consiste à ajouter, à la fin de l'octet à transmettre, un bit, appelé bit de parité, et qui est transmis après les huit bits de l'octet.
On s'intéresse désormais à la transmission de l'octet suivi de son bit de parité.
Une étude statistique a permis d'obtenir que :

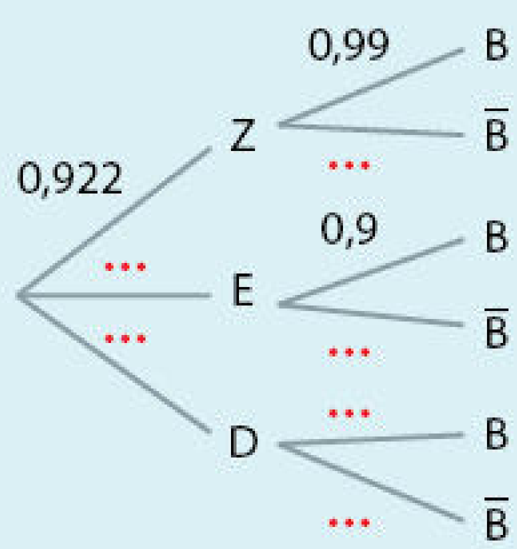
- la probabilité que les huit bits (octet) soient transmis sans erreur vaut 0,922 ;
- la probabilité que les huit bits (octet) soient transmis avec exactement une erreur vaut 0,075 ;
- si les huit bits (octet) ont été transmis sans erreur, la probabilité que le bit de parité soit envoyé sans erreur vaut 0,99 ;
- si les huit bits (octet) ont été transmis avec exactement une erreur, la probabilité que le bit de parité ait été envoyé sans erreur vaut 0,9 ;
- si les huit bits (octet) ont été transmis avec au moins deux erreurs, la probabilité que le bit de parité soit envoyé sans erreur vaut 0,99.

> **Guide de résolution**
> **B.** Les chapitres vus en classe de Première sont au programme du Bac. Ici, les probabilités conditionnelles.

On choisit au hasard un octet suivi de son bit de parité. On considère les événements suivants :

- Z : « Les huit bits de l'octet sont transmis sans erreur »
- E : « Les huit bits de l'octet sont transmis avec exactement une erreur »
- D : « Les huit bits de l'octet sont transmis avec au moins deux erreurs »
- B : « Le bit de parité est transmis sans erreur »

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre.
2. Quelle est la probabilité que l'octet soit transmis avec une erreur exactement et que le bit de parité soit transmis sans erreur ?
3. Calculer la probabilité de l'événement B.



> **Guide de résolution**
> **3.** Utiliser la formule des probabilités totales : trois chemins de l'arbre mènent à l'événement B.

74 Compléter un algorithme pour répondre à un problème

Algo python — 45 min

D'après Bac, Métropole 2012

Pour embaucher ses cadres, une entreprise fait appel à un cabinet de recrutement. La procédure retenue est la suivante. Le cabinet effectue une première sélection de candidats sur dossier.

40 % des dossiers reçus sont validés et transmis à l'entreprise.

Les candidats ainsi sélectionnés passent un premier entretien à l'issue duquel 70 % d'entre eux sont retenus.

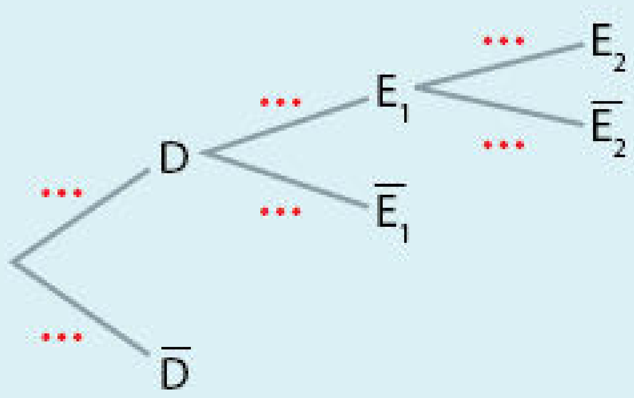
Ces derniers sont convoqués à un ultime entretien avec le directeur des ressources humaines qui recrutera 25 % des candidats rencontrés.

1. On choisit au hasard le dossier d'un candidat.

On considère les événements suivants :

- D : « Le candidat est retenu sur dossier »,
- E_1 : « Le candidat est retenu à l'issue du premier entretien »,
- E_2 : « Le candidat est recruté ».

a) Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous.



b) Calculer la probabilité de l'événement E_1.

c) On note F l'événement : « Le candidat n'est pas recruté ».

Démontrer que la probabilité de l'événement F est égale à 0,93.

2. Cinq amis postulent pour devenir cadre dans cette entreprise.

Les études de leur dossier sont faites indépendamment les unes des autres.

On admet que la probabilité que chacun d'eux soit recruté est égale à 0,07.

On désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes recrutées parmi ces cinq candidats.

a) Justifier que X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.

b) Calculer la probabilité que deux exactement des cinq amis soient recrutés. On arrondira au millième.

3. On note n le nombre de dossiers traités par le cabinet de recrutement. On admet que les dossiers sont étudiés indépendamment les uns des autres. On admet que la probabilité que le candidat correspondant à un dossier soit recruté est égale à 0,07.

On désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes recrutées parmi ces n candidats.

a) Exprimer la probabilité $P(X \geqslant 1)$ en fonction de n.

b) Voici un programme incomplet écrit en langage Python qui permet d'obtenir le nombre minimum de dossiers que le cabinet de recrutement doit traiter pour que la probabilité de recruter au moins un candidat soit supérieure ou égale à 0,999.

```
n=0
while [          ]:
    n=[   ]
print("L'entier n cherché est",n)
```

Indiquer les expressions cachées par les cadres en couleur.

c) Déterminer par le calcul la valeur affichée en sortie par le programme.

Guide de résolution
3. a) Penser à l'événement contraire.

Guide de résolution
3. c) Utiliser les propriétés de la fonction ln.

75 **Passer des lois binomiales aux probabilités conditionnelles** 20 min

D'après Bac, Nouvelle Calédonie 2018

Un QCM a 20 questions avec une seule réponse correcte parmi les 4 proprosées. Le candidat ou la candidate gagne un point par réponse correcte et ne perd aucun point si la réponse est fausse. On considère trois candidats :

- Anselme répond complètement au hasard à chacune des vingt questions ;
- Barbara est un peu mieux préparée : pour chacune des questions, la probabilité qu'elle réponde correctement est de $\frac{1}{2}$;
- Camille fait encore mieux : pour chacune des questions, la probabilité qu'elle réponde correctement est de $\frac{2}{3}$.

1. On note X, Y et Z les variables aléatoires égales aux notes respectivement obtenues par Anselme, Barbara et Camille.

a) Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire X ? Justifier.

b) À l'aide de la calculatrice, donner l'arrondi au millième de la probabilité $P(X \geqslant 10)$.

Dans la suite, on admettra que $P(Y \geqslant 10) \approx 0{,}588$ et $P(Z \geqslant 10) \approx 0{,}962$.

2. On choisit au hasard la copie d'un de ces trois candidats. On constate, après l'avoir corrigée, que la copie obtient une note supérieure ou égale à 10 sur 20.

Quelle est la probabilité qu'il s'agisse de la copie de Barbara ? Arrondir au millième.

Guide de résolution
2. Illustrer la situation par un arbre pondéré. Utiliser la formule des probabilités totales.

Se préparer À L'ORAL

76 **Présenter un exposé**

a) X est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;p)$.

k désigne un nombre entier naturel tel que $0 \leqslant k \leqslant n$.

Rappeler comment calculer la probabilité d'avoir k succès :

- exactement ;
- au moins ;
- au plus.

b) Dans un exposé oral de 10 min, présenter ces résultats et les appliquer à une situation.

77 **Travailler l'oral en groupe**

Résoudre cet exercice en petit groupe, puis présenter les résultats à l'oral.

Dans un centre d'accrobranche, un tiers des participants tentent le parcours sportif. On choisit trois participants au hasard à l'entrée du parc.

On assimile ce choix à des tirages identiques et indépendants.

Le responsable du parcours affirme : « Il y a huit fois plus de chances de ne voir aucun des trois tenter le parcours que de les voir tous le tenter ». A-t-il raison ?

78 **Travailler les compétences orales**

▶ **ANTICIPER LES QUESTIONS DU JURY**

1. Préparation de la restitution orale (5 min)
Par groupe de 3, résoudre l'exercice ci-dessous, chaque élève travaillant sur une des trois propositions.

2. Jeu de rôle (15 min)
Chaque élève présente son résultat à l'oral (2 min), pendant que les deux autres composent le jury.
Chaque juré pose une question au candidat (5 min).

Énoncé : Un dé est truqué selon les modalités suivantes.

Numéro	1	2	3	4	5	6
Probabilité	0,1	0,2	0,3	0,3	0,05	0,05

On lance ce dé deux fois successivement et on note les numéros obtenus. Répondre par Vrai ou Faux en justifiant.

a) Léa : « J'ai autant de chances d'obtenir deux ❻ que d'obtenir une seule fois le ❶ ».

b) La probabilité que la somme des deux numéros fasse 7 est égale à 0,2.

c) La probabilité d'obtenir deux numéros différents est égale à 0,5.

79 Loi géométrique

On considère une épreuve de Bernoulli de paramètre p et dont le succès est noté S.

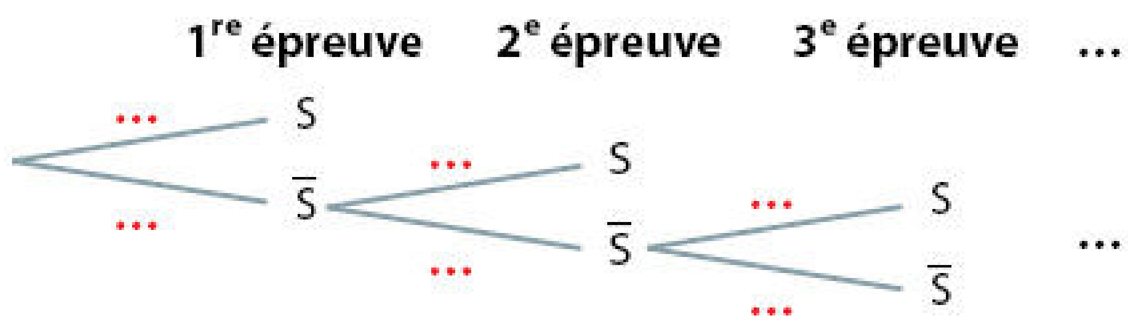
On répète cette épreuve de Bernoulli jusqu'à l'obtention du premier succès.

On note X la variable aléatoire qui indique le rang du premier succès. On dit que X suit la **loi géométrique de paramètre p**.

1. Le cas général

a) Quelles sont les valeurs possibles pour X ?

b) Reproduire et compléter l'arbre pondéré ci-dessous jusqu'à la cinquième épreuve.



c) Dans chaque cas, exprimer la probabilité en fonction de p.

• $P(X = 3)$ • $P(X = 5)$

d) Pour tout entier naturel $k \geqslant 1$, exprimer $P(X = k)$ en fonction de p et de k.

e) Pour tout entier naturel $k \geqslant 1$, exprimer $P(X \leqslant k)$ en fonction de p et de k.

Conseil : utiliser la formule donnant la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique.

f) Étudier la limite de la fonction $k \mapsto P(X \leqslant k)$ lorsque k tend vers $+\infty$.

2. Un exemple

À chaque utilisation, un produit bon marché a une chance sur 50 de tomber en panne.

On note X la variable aléatoire qui indique au bout de combien d'utilisations ce produit est tombé en panne.

a) Justifier que la situation relève d'une loi géométrique dont on précisera le paramètre.

b) Dans chaque cas, calculer et interpréter la probabilité.

• $P(X = 30)$ • $P(X \leqslant 75)$

Arrondir au millième.

80 Tice Introduction de la loi de Poisson

La loi de Poisson est une loi de probabilité pour laquelle la variable aléatoire X compte le nombre de fois où un événement rare se produit.

Pour un nombre réel $\lambda > 0$ donné, on a, pour tout entier naturel k,

$$\mathbf{P(X = k) = e^{-\lambda} \times \frac{\lambda^k}{k!}}$$

Partie A : comparaisons graphiques avec la loi binomiale

Lorsqu'une variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres n et p, pour calculer $P(X = k)$ dans une feuille de calcul, on saisit :

=LOI.BINOMIALE(k;n;p;0)

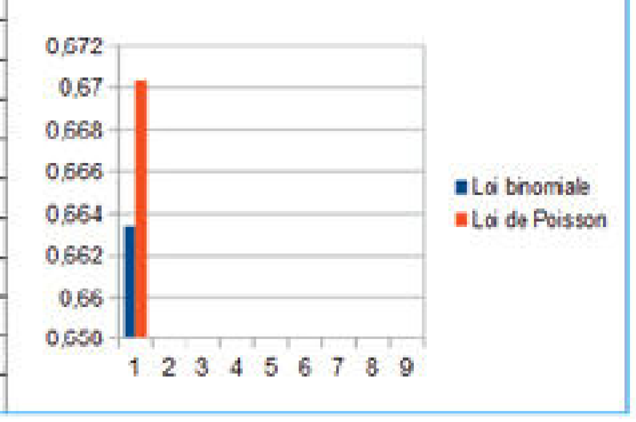
Lorsqu'une variable aléatoire X suit la loi de Poisson de paramètre λ, pour calculer $P(X = k)$ dans une feuille de calcul, on saisit :

=LOI.POISSON(k;λ;0)

1. Dans cette question $n = 8$, $p = 0{,}05$ et $\lambda = n \times p$.

a) Réaliser et compléter la feuille de calcul, puis le graphique en bâtons ci-dessous.

	A	B	C
1		P(X=k)	
2	k	Loi binomiale	Loi de Poisson
3	0	0,6634204313	0,670320046
4	1		
5	2		
6	3		
7	4		
8	5		
9	6		
10	7		
11	8		



b) Que remarque-t-on ?

2. Reprendre la question **1.** avec :

a) $n = 50$ et $p = 0{,}2$; **b)** $n = 80$ et $p = 0{,}01$.

Partie B : un exemple

Dans une chaîne de fabrication, 2 % des pièces sont défectueuses.

On prélève au hasard et avec remise 40 pièces de cette chaîne de fabrication.

1. X est la variable aléatoire qui compte le nombre de pièces défectueuses parmi les 40 pièces prélevées.

a) Montrer que X suit une loi binomiale.

b) Calculer et interpréter $P(X \leqslant 2)$.

2. On admet qu'en moyenne, il y a 0,8 pièce défectueuse dans cet échantillon de 40 pièces.

Y est la variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre 0,8.

Calculer $P(Y \leqslant 2)$. Que remarque-t-on ?

HISTOIRE DES MATHS

Denis Poisson (1781-1840) abandonne ses études de médecine pour devenir mathématicien. En 1837, il publie *Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile*. Il y propose la loi qui porte son nom. Le domaine d'application de cette loi a longtemps été restreint aux événements rares (suicides, nombre d'étoiles filantes, etc.). Aujourd'hui, elle est utilisée en télécommunications, biologie, météorologie, finance, …

81 Fonction de répartition

X est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres n et p (avec n nombre entier naturel, $n \geqslant 2$ et $0 < p < 1$).

F est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathbf{F}(x) = \mathbf{P}(\mathbf{X} \leqslant x)$.

On dit que F est la **fonction de répartition** de X.

Partie A : étude des propriétés de F

a) Justifier que pour tout réel x,

$$0 \leqslant \mathrm{F}(x) \leqslant 1.$$

b) Prouver que pour tout réel x,

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} > x) = 1 - \mathrm{F}(x).$$

c) Démontrer que, pour tous réels x et x' avec $x \leqslant x'$,

$$\mathrm{F}(x') - \mathrm{F}(x) = \mathrm{P}(x < \mathrm{X} \leqslant x').$$

En déduire que F est croissante sur $\mathbb{R}$.

d) Démontrer que, pour tout entier naturel k avec $1 \leqslant k \leqslant n$, $\quad \mathrm{P}(\mathrm{X} = k) = \mathrm{F}(k) - \mathrm{F}(k-1)$.

Partie B : représentation graphique de F sur un exemple

Dans cette partie, on donne $n = 5$ et $p = 0{,}4$.

a) Reproduire et compléter le tableau ci-dessous à l'aide de la calculatrice. *Arrondir au millième.*

Issue de X	0	1	2	3	4	5
Probabilité						

b) Justifier que $\mathrm{F}(1{,}7) \approx 0{,}338$.

c) Reproduire et compléter le tableau de valeurs de la fonction F.

x	-3	-1	0	0,2	1	1,7	2	2,1	2,8
$\mathrm{F}(x)$						0,338			

d) Dans un repère orthogonal (*unités* : 2 cm en abscisse et 5 cm en ordonnée), construire la courbe représentative de F.

Partie C : une autre application

Dans cette partie, $p = \dfrac{2}{5}$ et on donne $\mathrm{F}(0{,}85) = 0{,}129\,6$.

a) Calculer la valeur de n.

b) En déduire $\mathrm{F}(1{,}2)$.

82 Évaluation de la rentabilité

Pour donner de la visibilité à son entreprise, le gérant d'une start-up a décidé de faire de la publicité sur Internet.

Il a contacté deux sites connus pour leur demander leurs tarifs pour un encart publicitaire.

Site 1 : 8 000 € par an **Site 2 :** 9 000 € par an

Des études sur les fréquentations de ces deux sites ont donné les résultats suivants.

Site 1 : en moyenne, pour 600 personnes qui se rendent sur le site, 20 personnes cliquent sur l'encart publicitaire et parmi elles, 1 seule personne effectuera un achat.

Site 2 : en moyenne, pour 1 500 personnes qui se rendent sur le site, 45 personnes cliquent sur l'encart publicitaire et parmi elles, 3 personnes effectueront un achat.

1. Les clics sur la publicité

Chaque jour, on estime que le site 1 est visité par 80 internautes et que le site 2 est visité par 100 internautes.

X_1 (resp. X_2) est la variable aléatoire qui compte le nombre de visiteurs du site 1 (resp. du site 2) qui cliquent sur l'encart publicitaire dans la journée.

a) Déterminer la loi de probabilité de X_1, puis de X_2.

b) Dans chaque cas, calculer et interpréter la probabilité.

- $\mathrm{P}(\mathrm{X}_1 < 1)$
- $\mathrm{P}(\mathrm{X}_2 > 1)$.

c) Le gérant aimerait que, sur une année, au moins 1 000 personnes cliquent sur son encart publicitaire. Que peut-on en penser ?

Répondre pour chacun des sites internet.

2. La rentabilité

Le gérant estime qu'un client qui effectuera un achat grâce à son encart publicitaire dépensera, en moyenne, 150 €.

L'investissement du gérant pour l'encart publicitaire est-il rentable : **a)** pour le site 1 ? **b)** pour le site 2 ?

Des défis

83 Évaluer un nombre de balles

Une urne contient dix balles de couleur rouge ou bleue. Lorsqu'on tire successivement trois balles avec remise de l'urne, on a environ 19 % de chances d'avoir exactement une balle rouge.

Peut-on évaluer le nombre de balles rouges contenues dans l'urne ?

84 Critiquer

Que peut-on penser de cette publicité pour un jeu de hasard ?

~~~~~~NÉO-BINGO~~~~~~
1 billet gagnant sur 2 !
Achetez 4 billets pour gagner au moins 2 fois avec 80 % de chances !
~~~~~~