Les fonctions

FONCTIONS ET AÉROSPATIAL

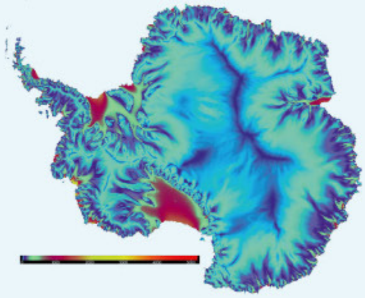
L'entreprise SpaceX révolutionne la **conquête spatiale** en récupérant les lanceurs de ses fusées afin de les réutiliser. Les trajectoires de ces lanceurs lors de leurs retours sur Terre sont des courbes de fonctions. Ces trajectoires sont rectifiées au fur et à mesure de l'approche au sol grâce à des propulseurs à gaz froid, afin qu'ils se posent exactement à l'endroit voulu.

Révolutionner la conquête spatiale

En France, les ingénieurs du CNES et de l'ONERA participent à des projets similaires dans le même but : **rentabiliser les voyages dans l'espace**.

L'actualité des maths

FONCTIONS ET PRÉVISIONS



Modélisation des vitesses de fonte de la calotte Antarctique

Le réchauffement climatique a, entre autres, pour conséquence la fonte des glaces en Antarctique. Les différentes mesures de la surface de la calotte au cours des années précédentes permettent de prévoir la surface de celle-ci dans les années futures.

En effet, à partir du nuage de points obtenus par les différentes mesures, on arrive à déterminer une fonction dont la courbe passe au plus près de chaque point. On a ainsi modélisé l'évolution de la surface de la calotte et on peut supposer, avec un certain risque d'erreur, que cette évolution suivra ce modèle les quelques années suivantes.

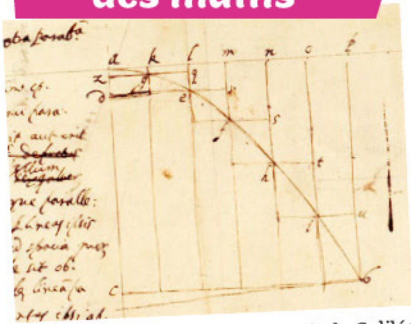
Maths et art

Le but d'Hiroshi Sugimoto est de nous montrer une courbe mathématique idéale, au moins pour notre perception. Matériellement, la perfection absolue de l'objet mathématique abstrait est hors de portée.

« J'ai essayé de transformer des équations mathématiques en objets tangibles en introduisant les équations dans un ordinateur et en utilisant les outils d'usinage les plus avancés du Japon. »

Hiroshi Sugimoto

Histoire des maths



Graphique extrait d'un manuscrit de Galilée

17e SIÈCLE FONCTIONS ET FORMULES

Le mathématicien français **François Viète** (1560-1603) introduit de façon systématique le calcul littéral.

La notion de fonction, qui était alors uniquement associée à une courbe, va maintenant être liée à une **formule**.

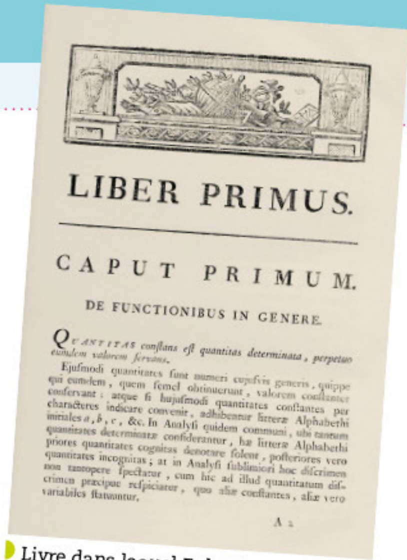
En 1623, Galileo Galilei, dit **Galilée**, propose sa loi disant que la distance de chute d'un corps est proportionnelle au carré du temps, autrement dit $d(t) = kt^2$.

17e ET 18e SIÈCLES FONCTIONS, GÉOMÉTRIE ET NOTATION

En 1692, le terme de fonction, du latin *functio* qui signifie « exécution », est introduit par le mathématicien **Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646-1716) dans un cadre géométrique. Il désigne par ce terme des grandeurs géométriques dépendant d'autres grandeurs **géométriques**.

Quelques années plus tard, en 1718, **Jean Bernoulli** (1667-1748) proposera la notation ϕ_x pour parler d'une fonction dépendant d'une variable x.

Timbre en l'honneur des travaux de Leibniz



LIBER PRIMUS.

CAPUT PRIMUM.

DE FUNCTIONIBUS IN GENERE.

Quantitas conſtans eſt quantitas determinata, perpetuo eundem valorem ſervans.

Ejuſmodi quantitates ſunt numeri cujuſvis generis, quippe qui eundem, quem ſemel obtinuerunt, valorem conſtanter conſervant: atque ſi hujuſmodi quantitates conſtantes per characteres indicare conveniat, adhibentur litteræ Alphabethi initiales *a*, *b*, *c*, &c. In Analyſi quidem communi, ubi tantum quantitates determinatæ conſiderantur, hæ litteræ Alphabethi priores quantitates cognitas denotare ſolent, poſteriores vero quantitates incognitas; at in Analyſi ſublimiori hoc diſcrimen non tantopere ſpectatur, cum hic ad illud quantitatum diſcrimen præcipue reſpiciatur, quo aliæ conſtantes, aliæ vero variabiles ſtatuuntur.

A 2

Livre dans lequel Euler donne sa définition de la notion de fonction

18e SIÈCLE FONCTIONS ET DÉFINITION

En 1748, le mathématicien suisse **Leonhard Euler** (1707-1783) propose une nouvelle définition pour la notion de fonction : « Une fonction est une expression analytique composée d'une manière quelconque de cette quantité variable et de nombres ou de quantités constantes. »

1591 : Viète introduit le calcul littéral

1642 : Blaise Pascal invente la machine à calculer

1748 : Euler donne sa définition de fonction

Henri IV — 1600 — Louis XIII — Louis XIV — 1700 — Louis XV — 1800

1692 : Leibniz introduit le terme fonction

1623 : Galilée expose ses lois sur la chute des corps

1751 : Diderot commence à éditer L'*Encyclopédie*

Zoom sur un métier

L'**ingénieure en aéronautique** peut être amenée à étudier et réaliser des maquettes d'aéronefs destinées à être testées en soufflerie pour valider des modèles aérodynamiques. Pour cela, l'utilisation des fonctions et de leurs représentations graphiques est indispensable. Elles permettent de transcrire et de visualiser les relations qui lient les différentes grandeurs physiques à considérer.

Parcours classique	
	1re et terminale : choix des spécialités scientifiques (mathématiques, physique-chimie, …)
2 ans	Classe préparatoire aux grandes écoles PTSI
3 ans	École d'ingénieur

Métiers des maths

Informaticien
Prévisionniste météo
Météorologue
Chercheur
Économiste
santé
Ingénieur
Architecte
Statisticien
Comptable

Orientation ⊕ d'infos sur **secondes2018-2019.fr** onisep

8 Fonctions de référence

Avant

En 2012 avant J.-C., la colonie grecque de Syracuse est attaquée par la flotte romaine.
Selon la légende, Archimède aurait utilisé des miroirs paraboliques pour enflammer les bateaux ennemis avant qu'ils n'accostent.

À présent

Pour communiquer avec les satellites en orbite autour de la Terre, on utilise des antennes paraboliques.
Ces antennes sont constituées d'un réflecteur dont la forme est obtenue à partir de la représentation graphique de la fonction carré.

Les capacités travaillées dans ce chapitre	Exercices
• Connaître le vocabulaire des fonctions.	9 à 20
• Connaître la fonction carré et la fonction inverse.	21 à 30, 35 à 43
• Connaître la fonction cube et la fonction racine carrée.	48 à 54, 58 à 65
• Comparer les images de deux nombres par une fonction de référence.	31, 44, 55, 66
• Résoudre graphiquement ou algébriquement $f(x) = k$, $f(x) < k$ où f est une fonction de référence.	1 à 8, 32 à 34, 45 à 47, 56, 57, 67 à 70

1 La fonction carré

Antonio souhaite réaliser une nappe de forme carrée. Pour cela, il se rend dans un magasin où le tissu qu'il a choisi est vendu au prix de 10 € par m^2.
On modélise cette situation par la fonction S qui à une longueur x positive, en m, associe la superficie $S(x)$ de la nappe, en m^2.

1 **a)** Exprimer la superficie $S(x)$ en fonction de la longueur x.
b) Recopier et compléter le tableau ci-dessous.

Longueur du côté x	0,3	0,5	0,8	1	1,4	1,9	2,2	2,6	3
Superficie $S(x)$									

c) Tracer un repère orthonormé (*unité* : 2 cm) en plaçant l'axe des abscisses en bas de page.
Porter les longueurs du côté en abscisses et les superficies en ordonnées.
Représenter alors les données du tableau.
d) Tracer à main levée une courbe représentant la fonction S sur l'intervalle $[0 ; 3]$.

2 Antonio a un budget de 65 € pour l'achat de ce tissu.
Déterminer la longueur maximum, en m, du côté de la nappe qu'il pourra réaliser. *Arrondir au dixième*.

2 La fonction inverse

Manon a reçu en cadeau un jeu d'initiation à l'électricité.
Elle construit un circuit constitué :
- **d'un générateur qui produit un courant électrique de tension $U = 1$ V (volt) ;**
- **d'une résistance variable R en ohm (Ω).**

La loi d'Ohm affirme que $U = R \times I$, où I est l'intensité du courant dans le circuit, exprimée en ampère (A).

1 **a)** Exprimer l'intensité I en fonction de la résistance R.
b) Recopier et compléter le tableau ci-dessous.

Résistance (Ω)	0,1	0,2	0,5	1	1,6	2	2,5	3,2	5	10
Intensité (A)										

c) Tracer un repère orthonormé (*unité* : 1 cm).
Porter les résistances en abscisses et les intensités en ordonnées.
Représenter alors les données du tableau.
d) Tracer à main levée une courbe représentant sur l'intervalle $]0 ; 10]$ la fonction *f* qui à une résistance R associe l'intensité I dans le circuit.

2 Manon doit réaliser un circuit avec une intensité de 4 A.
Sur quelle valeur doit-elle régler la résistance ?

Cours

1 Vocabulaire des fonctions

Définitions

À chaque nombre réel x d'un intervalle I, une **fonction** f associe **un nombre réel et un seul** que l'on note $f(x)$.
On dit que $f(x)$ est **l'image** de x par la fonction f et que I est **l'ensemble de définition** de f.
Lorsque $y = f(x)$, on dit que le nombre x est **un antécédent** du nombre y par la fonction f.

Notation : une fonction f peut se noter $x \mapsto f(x)$ (lire « à x on associe $f(x)$ »).

Remarque : l'ensemble de définition d'une fonction peut aussi être **une réunion** d'intervalles, par exemple $]-\infty\,;0[\ \cup\ ]0\,;+\infty[$.

Exemple

f est la fonction qui à tout nombre réel x associe son triple. Ainsi f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x$.
$f(2) = 3 \times 2 = 6$ donc 6 est l'image de 2 par la fonction f et 2 est un antécédent de 6 par la fonction f.

2 Fonctions affines

Définition

Une fonction affine est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\boldsymbol{f(x) = ax + b}$ où a et b désignent deux nombres réels donnés.

Exemples

$f : x \mapsto -5x + 2$ (ici, $a = -5$, $b = 2$) et $g : x \mapsto \frac{x}{2} - 4$ (ici, $a = \frac{1}{2}$, $b = -4$) sont des fonctions affines.

Cas particuliers :
- $x \mapsto ax$ (ici, $b = 0$) est une fonction affine particulière appelée **fonction linéaire**.
- $x \mapsto b$ (ici, $a = 0$) est une fonction affine particulière appelée **fonction constante**.

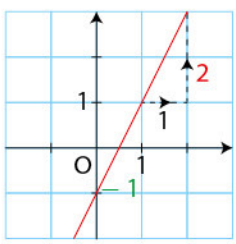
Propriété (rappel)

Dans un repère, la représentation graphique d'une fonction affine est une **droite**.

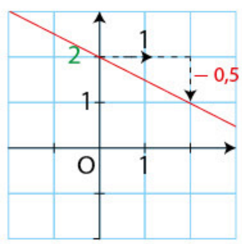
Vocabulaire : dans un repère, d est la droite représentant une fonction affine $f : x \mapsto ax + b$. On dit que :
- a est le **coefficient directeur** de d ;
- b est l'**ordonnée à l'origine** de d, c'est l'ordonnée du point d'intersection de d avec l'axe des ordonnées.

Exemples

Représentation graphique de la fonction affine $x \mapsto 2x - 1$ dans un repère.



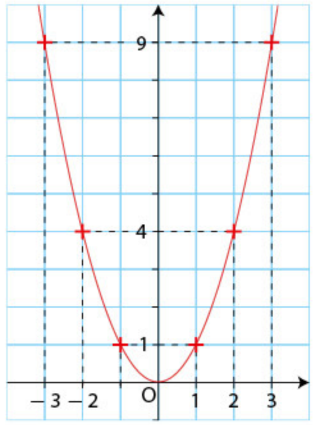
Représentation graphique de la fonction affine $x \mapsto -0{,}5x + 2$ dans un repère.



3 La fonction carré $x \mapsto x^2$

Définition

La **fonction carré** est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\boldsymbol{f(x) = x^2}$.



Exemples

- $f(2) = 4$, donc 4 est l'image de 2 par la fonction carré.
- $f(3) = 3^2 = 9$ et $f(-3) = (-3)^2 = 9$, donc 3 et -3 sont des antécédents de 9 par la fonction carré.

Définition - Propriété

Dans un repère orthogonal, la représentation graphique de la fonction carré est appelée **parabole**.
Elle est **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.**

Démonstration

Pour tout nombre réel x, $(-x)^2 = x^2$, donc les points $\mathrm{M}(x\,;x^2)$, et $\mathrm{M}'(-x\,;x^2)$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées. Cet axe est l'axe de symétrie de la parabole.

Remarque : pour tout nombre réel x, $x^2 \geqslant 0$. Ainsi, la parabole est située au-dessus de l'axe des abscisses.

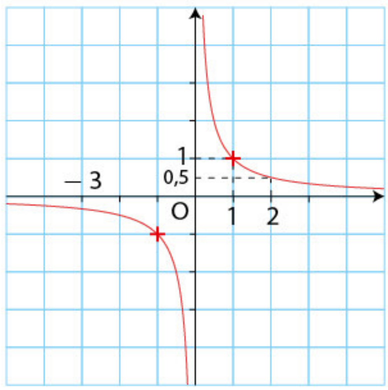
4 La fonction inverse $x \mapsto \dfrac{1}{x}$

Définition

La **fonction inverse** est la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{1}{x}}$.

Exemples

- $g(2) = \dfrac{1}{2}$, donc $\dfrac{1}{2}$ est l'image de 2 par la fonction inverse.
- $g(-3) = -\dfrac{1}{3}$, donc -3 est un antécédent de $-\dfrac{1}{3}$ par la fonction inverse.



Définition - Propriété

Dans un repère, la représentation graphique de la fonction inverse est appelée **hyperbole**.
Elle est **symétrique par rapport à l'origine O du repère**.

Démonstration

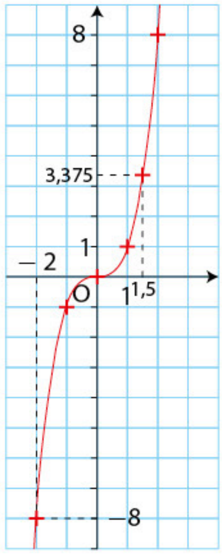
Pour tout nombre réel non nul x, $\dfrac{1}{-x} = -\dfrac{1}{x}$, donc les points $\mathrm{M}\left(x\,;\dfrac{1}{x}\right)$ et $\mathrm{M}'\left(-x\,;-\dfrac{1}{x}\right)$M sont symétriques par rapport à O. Ce point est le centre de symétrie de l'hyperbole.

Remarque : les nombres x et $\dfrac{1}{x}$ sont de même signe, donc l'hyperbole est située au-dessous de l'axe des abscisses sur $]-\infty\,;0[$ et au-dessus sur $]0\,;+\infty[$.

5 La fonction cube $x \mapsto x^3$

Définition

La **fonction cube** est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\boldsymbol{f(x) = x^3}$.



Exemples

- $f(-2) = (-2)^3 = -8$, donc -8 est l'image de -2 par la fonction cube.
- $f(1{,}5) = 1{,}5^3 = 3{,}375$ donc 1,5 est un antécédent de 3,375 par la fonction cube.

Propriété

Dans un repère, la représentation graphique de la fonction cube est **symétrique par rapport à l'origine O du repère**.

Démonstration

Pour tout nombre réel x, $(-x)^3 = -x^3$, donc les points $\mathrm{M}(x\,; x^3)$ et $\mathrm{M}'(-x\,; -x^3)$ sont symétriques par rapport à O.
Ce point est le centre de symétrie de la représentation graphique de la fonction cube.

Remarque : les nombres x et x^3 sont de même signe, donc la représentation graphique de la fonction cube est au-dessous de l'axe des abscisses sur $]-\infty\,; 0[$ et au-dessus sur $[0\,; +\infty[$.

6 La fonction racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$

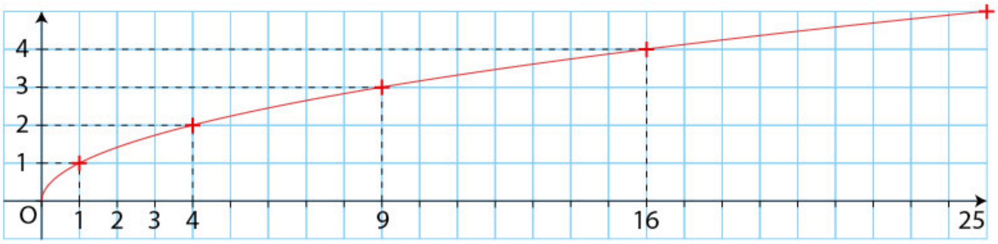
Définition

La **fonction racine carrée** est la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,; +\infty[$ par $\boldsymbol{f(x) = \sqrt{x}}$.

Exemples

- $f(4) = \sqrt{4} = 2$ donc 2 est l'image de 4 par la fonction racine carrée.
- $f(9) = \sqrt{9} = 3$ donc 9 est un antécédent de 3 par la fonction racine carrée.

Représentation graphique de la fonction racine carrée dans un repère



Remarque : pour tout nombre réel $x \geqslant 0$, $\sqrt{x} \geqslant 0$, donc la représentation graphique de la fonction racine carrée est dans la partie du repère où abscisses et ordonnées sont positives.

EXERCICES RÉSOLUS

1 Résoudre une équation du type $x^2 = k$ (avec $k \in \mathbb{R}$)

→ Cours 3

Résoudre l'équation $x^2 = 5$:

a) graphiquement ;

b) algébriquement.

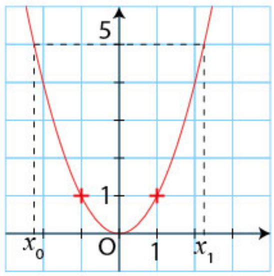
Solution

a) On trace la parabole représentative de la fonction carré dans un repère.
On lit les abscisses des points d'ordonnée 5 de la parabole :

$$x_0 \approx -2{,}2 \text{ et } x_1 \approx 2{,}2$$

b) $x^2 = 5$ équivaut à :

$$x = \sqrt{5} \text{ ou } x = -\sqrt{5}$$



Graphiquement, on lit en général des valeurs approchées des solutions. Algébriquement, on trouve leurs valeurs exactes, mais on ne peut résoudre algébriquement toutes les équations.

2 Résoudre une inéquation du type $x^3 < k$ (avec $k \in \mathbb{R}$)

→ Cours 5

Résoudre graphiquement chaque inéquation.

a) $x^3 < 3$

b) $x^3 \geqslant -2$

Solution

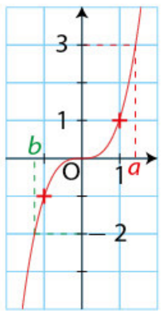
Dans un repère, on trace la représentation graphique de la fonction cube.

a) On lit les abscisses des points de la courbe d'ordonnée strictement inférieure à 3 :

$x < a$ avec $a \approx 1{,}4$.

b) On lit les abscisses des points de la courbe d'ordonnée supérieure ou égale à -2 :

$x \geqslant b$ avec $b \approx -1{,}2$.



$x^3 < 3$ est une **inéquation** : c'est une inégalité dans laquelle figure une **inconnue**, ici x.
Résoudre cette inéquation, c'est trouver toutes les valeurs de x pour lesquelles l'inégalité $x^3 < 3$ est vraie.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 1

3 Résoudre l'équation $x^2 = 3$:

a) graphiquement ; **b)** algébriquement.

4 Résoudre chaque équation graphiquement puis algébriquement.

a) $x^2 = 0$ **b)** $x^2 = 2$

5 Résoudre chaque équation graphiquement.

a) $x^2 = 2{,}25$ **b)** $x^2 = -1$

Sur le modèle de l'exercice résolu 2

6 Résoudre graphiquement chaque inéquation.

a) $x^3 > 4$ **b)** $x^3 \leqslant -1$

7 Résoudre graphiquement chaque inéquation.

a) $x^3 \geqslant 0$ **b)** $x^3 < -3$

8 Résoudre graphiquement chaque inéquation.

a) $x^3 > 1{,}5$ **b)** $x^3 < -4{,}2$

Calcul mental → Exercez-vous sur la plateforme Hyperbole
+ de détails page 4

Vocabulaire des fonctions

→ Cours 1

Questions Flash

9 f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
Aline affirme : « $f(-2) = 3$ donc 3 est un antécédent de -2 par f. » Que peut-on en penser ?

10 f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
Traduire chaque égalité par une phrase en utilisant le mot indiqué entre parenthèses.
a) $f(2) = 7$ (image)
b) $f(0{,}3) = -12$ (antécédent)

11 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui à tout nombre réel associe sa moitié.
Déterminer mentalement :
a) l'image de 6 par la fonction f ;
b) l'antécédent de $-0{,}5$ par la fonction f.

12 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui à tout nombre réel x associe la somme de son carré et de son double.
a) Calculer l'image de 1 par la fonction f.
b) Nolan affirme : « 0 est son propre antécédent par la fonction f. » A-t-il raison ?
c) Exprimer $f(x)$ en fonction de x.

13 Algo Voici un programme de calcul.

- Choisir un nombre.
- Retrancher 5.
- Élever au carré.
- Ajouter 1.

a) On note t le nombre choisi. Donner l'expression algébrique de la fonction g qui à t associe le résultat obtenu avec ce programme.
b) Calculer l'image de -4 par g.
c) Farah affirme : « 2,5 est un antécédent de 7,25 par cette fonction g. » A-t-elle raison ?

14 Algo Voici une fonction écrite en langage Python.

```
def F(x):
    y=2+1/x
    return y
```

a) Appliquer cette fonction avec la valeur $x = 2$ du paramètre. Quelle est la valeur renvoyée ?
b) Quelle valeur faut-il donner à x pour que la fonction renvoie le résultat 3 ?
c) Donner l'expression algébrique de la fonction correspondant à ce programme.

Fonctions affines

→ Cours 2

Questions Flash

15 Pour chaque fonction, dire si elle est affine.

$f : x \mapsto x^2$ $\quad g : x \mapsto 3x + 5$

$h : x \mapsto -x + 2$ $\quad k : x \mapsto \dfrac{1}{x} + 3$

$m : x \mapsto 7x$ $\quad n : x \mapsto \dfrac{7x - 5}{6}$

16 f est la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = 2x - 3$$
Calculer mentalement :
a) $f(2)$;
b) l'unique antécédent de -3 par f ;
c) l'image de $-\dfrac{1}{2}$ par f.

17 Parmi ces programmes, lesquels correspondent à des fonctions affines ?

Programme 1
- Choisir un nombre.
- Multiplier par 7.
- Soustraire 2.

Programme 2
- Choisir un nombre.
- Diviser par 2.
- Ajouter 7.

Programme 3
- Choisir un nombre.
- Ajouter 7.

Programme 4
- Choisir un nombre.
- Élever au carré.
- Ajouter 2.

18 f est la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = 2x - 2$$
a) Calculer l'image de -1 par la fonction f.
b) Déterminer l'antécédent de 2 par la fonction f.
c) Dans un repère, d est la représentation graphique de la fonction f.
Quels sont le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine de la droite d ? Tracer la droite d.

19 g est la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$g(t) = -0{,}5t$$
a) Calculer l'image de -4 par la fonction g.
b) Déterminer l'antécédent de 3 par la fonction g.
c) Dans un repère, d est la représentation graphique de la fonction g.
Tracer la droite d à l'aide de son coefficient directeur et de son ordonnée à l'origine.

20 f est la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = -x + 5$$
a) Déterminer l'antécédent de 2 par la fonction f.
b) Simon affirme : « Il existe un nombre réel qui est égal à son image par f. » A-t-il raison ?

La fonction carré

→ Cours 3

Questions flash

21 f désigne la fonction carré.
Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse.
a) L'image de 4 par f est 2.
b) Un antécédent de 25 par f est -5.

22 Alexandre affirme : « Le carré de $-2{,}5$ est $-6{,}25$. »
Que peut-on lui dire ?

23 Calculer mentalement l'image de chaque nombre par la fonction carré.
a) 5 **b)** 100 **c)** 0 **d)** 0,1
e) -8 **f)** -3 **g)** $-0{,}5$ **h)** $-0{,}9$

24 Calculer l'image de chaque nombre par la fonction carré.
a) $\sqrt{5}$ **b)** $7\sqrt{5}$ **c)** $-3\sqrt{2}$ **d)** $3\sqrt{3}$

25 Calculer l'image de chaque nombre par la fonction carré.
a) 10^3 **b)** 10^{-4} **c)** 5^2 **d)** 2^4

26 Calculer l'image de chaque nombre par la fonction carré.
a) $\frac{3}{4}$ **b)** $-\frac{9}{5}$ **c)** $\frac{15}{7}$ **d)** $-\frac{1}{4}$

27 Déterminer algébriquement les antécédents de chaque nombre par la fonction carré.
a) 4 **b)** 36 **c)** 1 **d)** 81

28 Déterminer algébriquement les antécédents de chaque nombre par la fonction carré.
a) $\frac{9}{4}$ **b)** $\frac{1}{16}$ **c)** $\frac{100}{49}$ **d)** $\frac{36}{25}$

29 Dans un repère orthonormé, tracer la parabole représentant la fonction carré sur l'intervalle indiqué.
a) $[-1\,;3]$ (*unité* : 1 cm)
b) $[-1\,;1]$ (*unité* : 10 cm)

30 Afficher à l'écran de la calculatrice la parabole représentant la fonction carré sur l'intervalle I indiqué, en précisant la fenêtre utilisée.
a) $\mathrm{I} = [-0{,}3\,;0{,}3]$ **b)** $\mathrm{I} = [100\,;1000]$

31 Dans chaque cas, comparer numériquement les deux nombres, puis utiliser la parabole de la fonction carré dans un repère pour visualiser la comparaison.
a) 3^2 et 4^2 **b)** $1{,}5^2$ et $(-0{,}5)^2$
c) $1{,}7^2$ et $1{,}5^2$ **d)** $(-3{,}7)^2$ et $(-4{,}2)^2$

32 **1.** Dans un repère orthogonal, tracer la parabole représentant la fonction carré.
2. En s'aidant éventuellement du graphique, dire combien chaque nombre a d'antécédents par la fonction carré.
a) 10 **b)** -3 **c)** 0 **d)** 150

33 **1.** Dans un repère orthogonal, tracer la parabole représentant la fonction carré.
2. Dans chaque cas, résoudre graphiquement l'inéquation.
a) $x^2 < 3$ **b)** $x^2 > 5$ **c)** $x^2 \leqslant 2$
d) $x^2 \geqslant 6{,}5$ **e)** $x^2 > 0$ **f)** $x^2 \leqslant -1$

34 **1.** Dans un repère orthogonal, tracer la parabole représentant la fonction carré.
2. Utiliser ce graphique pour déterminer dans chaque cas les nombres réels x tels que :
a) $0 \leqslant x^2 \leqslant 3$ **b)** $2 < x^2 < 16$ **c)** $x^2 > 7$

La fonction inverse

→ Cours 4

Questions flash

35 Jason affirme : « L'inverse de 5 est -5. »
Célina affirme : « Tout nombre de l'intervalle $[0\,;+\infty[$ a un inverse. »
Que peut-on en penser ?

36 Calculer mentalement l'image de chaque nombre par la fonction inverse.
a) 5 **b)** 10 **c)** 1 **d)** 0,5
e) -1 **f)** -100 **g)** $\frac{1}{3}$ **h)** $-\frac{1}{4}$

37 g est la fonction inverse.
L'une de ces égalités est fausse. Laquelle ?
(1) $g(2) = 0{,}5$ **(2)** $g(3) = 0{,}3$ **(3)** $g(-1) = -1$

38 Déterminer mentalement l'antécédent de chaque nombre réel par la fonction inverse.
a) -1 **b)** $\frac{1}{3}$ **c)** 0,02 **d)** 10^{-2}

39 Déterminer l'image de chaque nombre par la fonction inverse.

a) $\frac{3}{4}$ **b)** $-\frac{5}{8}$ **c)** -10^6 **d)** -10^{-4}

40 Déterminer l'antécédent de chaque nombre par la fonction inverse.

Donner la réponse sous forme fractionnaire.

a) $\frac{7}{3}$ **b)** $-\frac{2}{9}$ **c)** $-1{,}5$ **d)** $2{,}5$

41 Dans un repère orthonormé, tracer l'hyperbole représentant la fonction inverse sur l'intervalle indiqué.

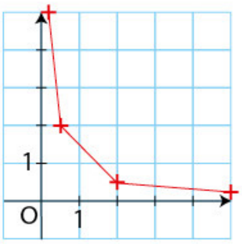
a) $\left[\frac{1}{2}\,;4\right]$ (*unité* : 2 cm)

b) $[-1\,;-0{,}1]$ (*unité* : 1 cm)

42 Afficher à l'écran de la calculatrice l'hyperbole représentant la fonction inverse sur chacun des intervalles, en précisant la fenêtre utilisée.

a) $[1\,;10]$ **b)** $[-0{,}1\,;-0{,}01]$

43 Pour tracer l'hyperbole représentant la fonction inverse sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$, Mathilde a placé les points de coordonnées $(0{,}2\,;5)$, $(0{,}5\,;2)$, $(2\,;0{,}5)$ et $(5\,;0{,}2)$. Elle les a ensuite reliés pour obtenir le tracé ci-dessous.



a) Les points placés sont-ils corrects ?

b) Critiquer le tracé de Mathilde.

44 Dans chaque cas, comparer numériquement les deux nombres, puis utiliser l'hyperbole de la fonction inverse dans un repère pour visualiser la comparaison.

a) $\frac{1}{-4}$ et $\frac{1}{-2}$ **b)** $\frac{1}{0{,}5}$ et $\frac{1}{0{,}8}$ **c)** $-\frac{1}{1{,}4}$ et $-\frac{1}{0{,}9}$

45 **1.** Dans un repère orthonormé, tracer l'hyperbole représentant la fonction inverse.

2. À l'aide du graphique, indiquer le nombre de solutions de chacune des équations.

a) $\frac{1}{x}=2$ **b)** $\frac{1}{x}=-3$ **c)** $\frac{1}{x}=0$ **d)** $\frac{1}{x}=\frac{3}{4}$

3. Résoudre algébriquement chacune des équations précédentes.

46 **1.** Dans un repère orthonormé, tracer l'hyperbole représentant la fonction inverse.

2. Utiliser le graphique pour déterminer dans chaque cas les nombres réels x tels que :

a) $0{,}5<\frac{1}{x}<2$ **b)** $-3\leqslant\frac{1}{x}\leqslant-1$

47 **1.** Dans un repère orthonormé, tracer l'hyperbole représentant la fonction inverse.

2. Dans chaque cas, résoudre graphiquement l'inéquation.

a) $\frac{1}{x}\geqslant 1$ **b)** $\frac{1}{x}\leqslant -2$ **c)** $\frac{1}{x}\leqslant 3$

La fonction cube

→ Cours 5

Questions flash

48 Laquelle de ces affirmations est exacte ?

(1) Le cube d'un nombre est le double du carré de ce nombre.

(2) Le cube d'un nombre non nul est le produit de son carré par son inverse.

(3) Le cube d'un nombre non nul est le quotient de son carré par son inverse.

49 Calculer mentalement l'image de chaque nombre par la fonction cube.

a) 3 **b)** -1 **c)** -2 **d)** -10

50 Neela affirme : « Il y a exactement deux nombres qui sont égaux à leur cube. »

Thibaut lui répond : « Non, il y en a exactement trois. »

Qui a raison ?

51 Calculer l'image de chaque nombre par la fonction cube. *Donner la réponse sous forme fractionnaire.*

a) $\frac{2}{5}$ **b)** $-\frac{1}{4}$ **c)** $\frac{10}{3}$ **d)** $-\frac{3}{2}$

52 Déterminer l'antécédent de chaque nombre par la fonction cube.

a) -1 **b)** 8 **c)** -1000 **d)** 27

53 Dans un repère orthonormé, tracer la représentation graphique de la fonction cube sur l'intervalle :

a) $[-2\,;2]$ (*unité* : 1 cm)

b) $[-1\,;1]$ (*unité* : 10 cm)

c) $\left[-\frac{1}{2}\,;\frac{4}{5}\right]$ (*unité* : 20 cm)

54 Afficher à l'écran de la calculatrice la représentation graphique de la fonction cube sur chacun des intervalles, en précisant la fenêtre utilisée.
a) $[-10 ; 10]$ **b)** $[-0{,}01 ; 0{,}01]$

55 Dans chaque cas, comparer numériquement les deux nombres, puis utiliser la représentation graphique de la fonction cube dans un repère pour visualiser la comparaison.
a) 2^3 et $(-2)^3$ **b)** $3{,}1^3$ et $3{,}3^3$ **c)** $(-0{,}7)^3$ et $(-0{,}2)^3$

56 **1.** Dans un repère orthonormé, tracer la représentation graphique de la fonction cube.
2. Utiliser le graphique pour déterminer les nombres réels x tels que :
a) $-1 < x^3 < 27$ **b)** $-64 \leqslant x^3 \leqslant 0{,}125$

57 Une entreprise fabrique des cartons de forme cubique. Pour une longueur d'arête x, en dm, on note $V(x)$ le volume intérieur du carton, en dm^3.

a) Exprimer $V(x)$ en fonction de x. Calculer $V(3{,}1)$.
b) Représenter la fonction V dans un repère (*unités* : 2 cm en abscisses et 0,25 cm en ordonnées).
c) Quelle doit être la longueur de l'arête pour obtenir un volume supérieur à 30 dm^3 ? *Arrondir à l'unité.*

La fonction racine carrée

→ Cours 6

Questions flash

58 Dire si chaque affirmation est vraie ou fausse.
a) L'image de 4 par la fonction racine carrée est 2.
b) 5 est l'antécédent de 25 par la fonction racine carrée.

59 Calculer mentalement l'image de chaque nombre par la fonction racine carrée.
a) 9 **b)** 0 **c)** 49 **d)** 10^8 **e)** 10^{-4}

60 Déterminer mentalement l'antécédent de chaque nombre par la fonction racine carrée.
a) 5 **b)** 8 **c)** 11 **d)** 1,5 **e)** 10^{-7}

61 Margaux affirme : « Quel que soit le nombre réel k, l'équation $\sqrt{x} = k$ admet une solution. »
Que peut-on en penser ?

62 Calculer l'image de chaque nombre par la fonction racine carrée. *Donner la réponse sous forme fractionnaire.*
a) $\frac{16}{9}$ **b)** $\frac{1}{4}$ **c)** $\frac{81}{36}$ **d)** $\frac{100}{121}$

63 Adama affirme : « L'image de $\frac{1}{2}$ par la fonction racine carrée est $\frac{\sqrt{2}}{2}$. »
Que peut-on en penser ?

64 Dans un repère orthonormé, tracer la représentation graphique de la fonction racine carrée sur l'intervalle $[0 ; 1]$ (*unité* : 10 cm).

65 Afficher à l'écran de la calculatrice la représentation graphique de la fonction racine carrée sur chacun des intervalles, en précisant la fenêtre utilisée.
a) $[0 ; 0{,}1]$ **b)** $[0 ; 1000]$

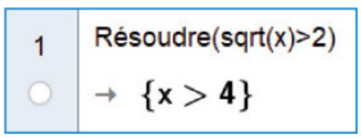
66 Dans chaque cas, comparer numériquement les deux nombres puis utiliser la représentation graphique de la fonction racine carrée dans un repère pour visualiser la comparaison.
a) $\sqrt{12}$ et $\sqrt{10}$ **b)** $\sqrt{0{,}7}$ et $\sqrt{1{,}3}$ **c)** $\sqrt{1{,}5}$ et $\sqrt{1{,}6}$

67 Résoudre graphiquement puis algébriquement chaque équation.
a) $\sqrt{x} = 3{,}5$ **b)** $\sqrt{x} = 2$ **c)** $\sqrt{x} = 0{,}5$

68 **1.** Dans un repère orthonormé, tracer la représentation graphique de la fonction racine carrée.
2. Résoudre graphiquement chaque inéquation.
a) $\sqrt{x} \geqslant 2$ **b)** $\sqrt{x} < 4$ **c)** $\sqrt{x} > 1{,}5$
d) $\sqrt{x} \leqslant -4$ **e)** $\sqrt{x} \geqslant \frac{1}{4}$ **f)** $\sqrt{x} > -1$

69 **1.** Dans un repère orthonormé, tracer la représentation graphique de la fonction racine carrée.
2. Utiliser le graphique pour déterminer les nombres réels x tels que :
a) $2 < \sqrt{x} < 3$ **b)** $1{,}5 \leqslant \sqrt{x} \leqslant 8{,}5$

70 Olivia a utilisé un logiciel de calcul formel pour résoudre une inéquation.



De quelle inéquation s'agit-il ?
Écrire ses solutions avec un intervalle.

QCM interactifs

Pour se tester

71 Dans chaque cas, donner la réponse exacte sans justifier.

		A	B	C	D
1	8 est l'image de 3 par une fonction f. Alors …	$f(8) = 3$	$f(3) = 8$	$f(3) \mapsto 8$	$f(8) \mapsto 3$
2	f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x - 5$. Alors l'image de -1 par la fonction f est …	-8	-9	-2	-1
3	L'image de -3 par la fonction carré est …	-6	6	-9	9
4	La solution de l'équation $\frac{1}{x} = -2$ est …	0,5	$-0{,}5$	-1	1
5	La solution de l'équation $x^3 = 27$ est …	-3	3	-9	9
6	L'image de 9 par la fonction racine carrée est …	-3	-9	3	9

72 Dans chaque cas, donner la (ou les) réponse(s) exacte(s) sans justifier.

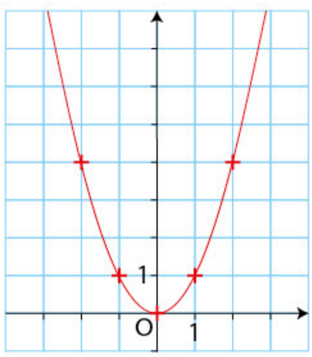
		A	B	C	D
1	f est la fonction carré. $f(2)$ et $f(3)$ vérifient …	$f(2) > f(3)$	$f(2) < f(3)$	$f(2) = f(3)$	$f(2) \neq f(3)$
2	Les antécédents de 16 par la fonction carré sont …	256 et -256	positifs	4 et -4	opposés
3	Les seuls nombres égaux à leur image par la fonction inverse sont …	0, 1 et -1	1 et 2	-1 et 1	0,5 et 2
4	Des nombres réels x tels que $x^3 > -8$ appartiennent à l'intervalle …	$[0\,;+\infty[$	$]-\infty\,;-2[$	$[-1\,;2]$	$]-2\,;+\infty[$

73 Dans chaque cas, dire si l'affirmation est vraie ou fausse en justifiant.

On a tracé ci-contre, dans un repère, la courbe représentative de la fonction carré.

Affirmations :

1. L'image de 2,5 par la fonction carré est supérieure à 5.
2. $(-3{,}5)^2 > (-1{,}5)^2$
3. $(-\pi)^2 = \pi^2$
4. L'équation $x^2 = -4$ admet deux solutions.
5. L'équation $x^2 = 5$ admet deux solutions.
6. Si $x \in [-1\,; 1]$, alors $x^2 \geqslant 1$.
7. Si $x \geqslant -2$, alors $x^2 \geqslant 4$.



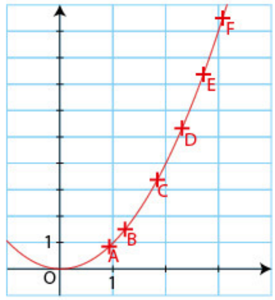
Vérifiez vos réponses : p. 346

74 Comparer graphiquement des carrés

Voici la parabole représentant la fonction carré dans un repère orthogonal.

a) Parmi les points A, B, C, D, E, F ci-contre, repérer ceux qui ont pour abscisses 2,3 et 2,7.

b) Comparer alors $2{,}3^2$ et $2{,}7^2$ sans calcul.



AIDE

b) $2{,}3^2$ et $2{,}7^2$ sont les ordonnées des points trouvés à la question **a)**.

75 Comparer des images par la fonction cube

a) Dans un repère orthonormé (*unité* : 1 cm), tracer la représentation graphique $\mathscr{C}$ de la fonction cube.

b) Placer les points de $\mathscr{C}$ d'abscisses $-1{,}2$ et $-1{,}5$.

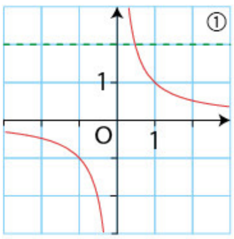
c) Graphiquement, comparer $(-1{,}2)^3$ et $(-1{,}5)^3$.

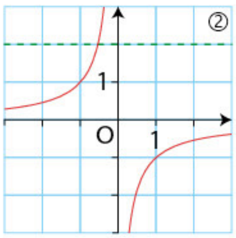
AIDE

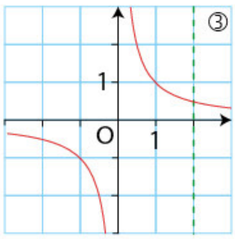
a) Placer quelques points de la courbe, puis la tracer en lui donnant l'allure que l'on connaît.

76 Résoudre graphiquement une équation

a) Parmi les graphiques ci-dessous, lequel permet de résoudre graphiquement l'équation $\frac{1}{x} = 2$?







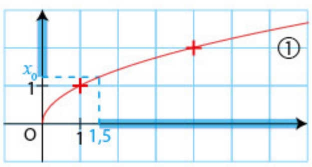
AIDE

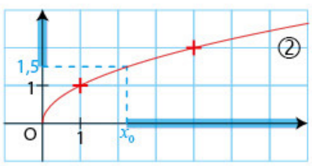
a) Pour résoudre graphiquement une équation du type $f(x) = k$, il faut placer k sur l'axe des ordonnées.

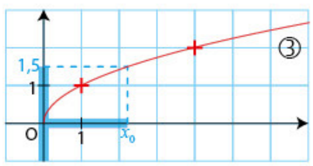
b) Quelle est la solution de l'équation $\frac{1}{x} = 2$?

77 Résoudre graphiquement une inéquation

a) Parmi les graphiques ci-dessous, lequel permet de résoudre graphiquement l'inéquation $\sqrt{x} \geqslant 1{,}5$?







b) Écrire l'intervalle des solutions de l'inéquation $\sqrt{x} \geqslant 1{,}5$ en utilisant la valeur exacte de x_0.

AIDE

$\sqrt{x_0} = 1{,}5$ équivaut à $x_0 = \dots$

S'entraîner Algo

EXERCICE RÉSOLU

78 Étudier et comprendre un algorithme

On considère l'algorithme ci-contre, où a est un nombre réel avec $a > 0$.

a) Exécuter cet algorithme pas à pas avec $a = 0{,}1$ et compléter le tableau ci-dessous.

x	1	2	…							
y										

Quelle est la valeur de x à la fin de l'algorithme ?

b) Expliquer le rôle de cet algorithme.

c) Coder cet algorithme en langage Python.

Saisir le programme et le tester avec différentes valeurs de a.

```
x ← 1
y ← 1
Tant que y > a
    x ← x + 1
    y ← 1/x
Fin Tant que
```

Solution

a) Avec $a = 0{,}1$, les variables x et y prennent les valeurs successives suivantes (éventuellement arrondies au centième) :

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	1	0,5	0,33	0,25	0,2	0,17	0,14	0,13	0,11	0,1

Lorsque $y = 0{,}1$, la condition $y > a$ est fausse et la valeur obtenue est donc $x = 10$.

b) Pour un nombre réel strictement positif a donné, on obtient à la fin de l'algorithme le plus petit nombre entier naturel non nul x tel que $\frac{1}{x} \leqslant a$.

c) On obtient la fonction ci-contre.

```python
def H(a):
    x=1
    y=1
    while y>a:
        x=x+1
        y=1/x
    return x
```

Voici l'affichage obtenu pour $a = 0{,}003$.

```
>>> H(0.003)
334
```

À VOTRE TOUR

79 Voici un algorithme, où a est un nombre réel avec $a > 0$.

```
x ← 0
y ← 0
Tant que y ⩽ a
    x ← x + 0,5
    y ← √x
Fin Tant que
```

a) Exécuter cet algorithme pas à pas avec $a = 1{,}5$ et compléter le tableau suivant :

x	0	0,5	…			
y						

Quelle est la valeur de x à la fin de l'algorithme ?

b) Expliquer le rôle de cet algorithme.

80 Voici un algorithme, où a est un nombre réel avec $a > 0$.

```
x ← 0
y ← 0
Tant que y ⩽ a
    x ← x + 1
    y ← x³
Fin Tant que
```

a) Exécuter cet algorithme pas à pas avec $a = 100$ et compléter le tableau suivant :

x	0	1	…			
y						

Quelle est la valeur x à la fin de l'algorithme ?

b) Expliquer le rôle de cet algorithme.

Démontrer et raisonner

81 Conjecturer puis démontrer

Méthode
Pour savoir si une affirmation du type « Pour tout x… » est vraie ou fausse, on peut commencer par la tester pour certaines valeurs particulières de x. Si ces exemples incitent à conjecturer que cette affirmation est vraie, il faut alors la démontrer dans le cas général. Si l'on a trouvé un exemple pour lequel l'affirmation est fausse, cela suffit pour conclure qu'elle est fausse.

Elliot affirme : « Pour tout nombre entier naturel a, l'image du nombre entier suivant a par la fonction carré est égale à la somme de a, de son image et du nombre entier suivant a. »

a) Choisir des valeurs de a et tester l'affirmation d'Elliot pour chacune d'elles.
Cette affirmation semble-t-elle vraie ou sait-on qu'elle est fausse ?

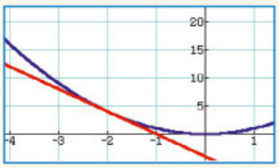
b) Exprimer en fonction de a le suivant de a.
Développer $(a+1)^2$, c'est-à-dire $(a+1)(a+1)$.
Démontrer la conjecture émise à la question **a)**.

82 Étudier des positions relatives

f et g sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2$$

et $g(x) = -4x - 4$



1. À l'aide de l'écran de calculatrice ci-dessus, conjecturer la position relative des représentations graphiques des fonctions f et g.

2. a) Développer $(x+2)^2$, c'est-à-dire :

$$(x+2)(x+2),$$

et vérifier que pour tout x, $f(x) - g(x) = (x+2)^2$.

b) En déduire le signe de cette différence.
Confronter cette réponse à la conjecture émise à la question **1**.

83 Retrouver le coefficient directeur

f est la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3x + 5$$

a) Calculer $f(2) - f(1)$.

b) Calculer $f(5{,}5) - f(4{,}5)$.

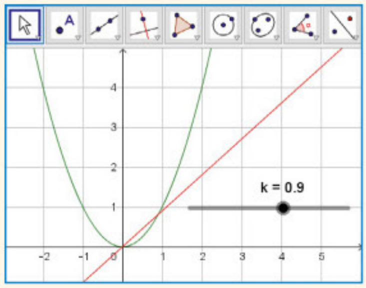
c) Démontrer que pour tout nombre réel x :

$$f(x+1) - f(x) = 3$$

84 Tice Étudier une intersection

1. a) Avec un logiciel de géométrie :
- tracer la parabole représentant la fonction carré ;
- créer un curseur k de -5 à 5 avec un incrément de 0,1 ;
- tracer la droite représentant la fonction $x \mapsto kx$.

b) Déplacer le curseur et conjecturer le nombre de points d'intersection des deux courbes selon les valeurs de k.

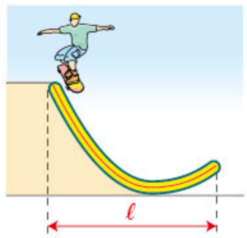


2. a) Factoriser $x^2 - kx$.

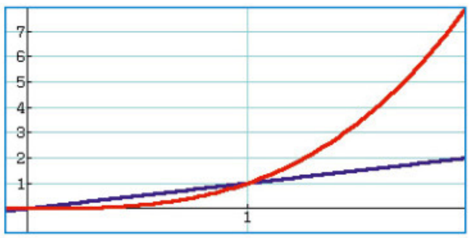
b) Démontrer la conjecture précédente en résolvant l'équation $x^2 - kx = 0$.

Connaître les fonctions carré et cube

85
Ce tremplin a la forme de la parabole de la fonction carré dans un repère orthonormé (*unité* : 1 m).
Il est haut de 0,5 m d'un côté et de 2 m de l'autre.
Calculer sa largeur ℓ en m.
Arrondir au dixième.



86
Voici les représentations graphiques des fonctions $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto x$ obtenues à l'écran d'une calculatrice.
Mathis affirme : « Pour tout nombre réel x, si $x \leqslant 1$, alors $x^3 \leqslant x$. »



Critiquer l'affirmation de Mathis.

87 Un artiste souhaite réaliser une sphère en alliage métallique. Il a pour cela acheté 5 m^3 de métal qu'il fera fondre puis mouler par un métallurgiste.

On se propose de déterminer le rayon maximum r de cette sphère.
On rappelle que le volume V d'une sphère de rayon r est donné par la formule :

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

a) Justifier que l'équation que l'on doit résoudre équivaut à l'équation $r^3 = \frac{15}{4\pi}$.

b) Donner l'arrondi au millième de $\frac{15}{4\pi}$.

c) À l'aide de la calculatrice, tabuler la fonction cube de 0 à 2 avec le pas 0,1.
En déduire un encadrement de r d'amplitude 0,1.

d) En modifiant l'intervalle et le pas, donner l'arrondi au centième de r.

Connaître la fonction inverse

88 Cassandre Beaugrand, championne du monde de triathlon en 2018, s'entraîne à parcourir une distance d'un kilomètre.

a) Exprimer la vitesse moyenne v de la cycliste en fonction du temps de parcours t, en min.
Quelle est l'unité de cette grandeur ?

b) Calculer la vitesse moyenne pour un temps de parcours de 2 min.

c) Quel doit être le temps de parcours de Cassandre Beaugrand pour que sa vitesse moyenne soit égale à 60 km·h^{-1} ?

89 Un rectangle a une aire égale à 60 m^2. On note x la largeur et y la longueur, en m, de ce rectangle.

1. Exprimer la longueur y en fonction de x.

2. Déterminer la largeur x lorsque $y = 24$.

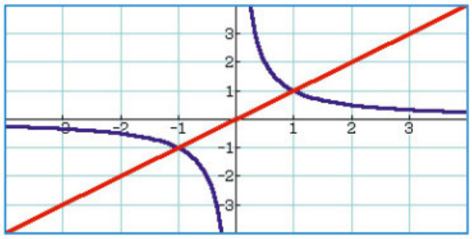
3. On souhaite que la longueur de ce rectangle soit telle que $y \geqslant 10$.

a) Montrer que sa largeur doit être telle que $\frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{6}$.

b) Déterminer graphiquement les valeurs possibles de x.

90 $(O\,;I, J)$ est un repère orthonormé.
α désigne un nombre réel différent de 0.
À tout point m de coordonnées $(\alpha\,;0)$ on associe :
– le point d'intersection m' de l'axe des ordonnées et de la parallèle à la droite (Jm) passant par I ;
– le point M tel que $OmMm'$ est un rectangle.
Déterminer l'ensemble E décrit par le point M lorsque m décrit l'axe des abscisses privé de O.

91 Pour étudier la position relative de la courbe de la fonction inverse et de celle de la fonction $x \mapsto x$, Eva a représenté ces deux courbes à l'écran de sa calculatrice.



1. a) Lire graphiquement les coordonnées des points d'intersection des deux courbes.

b) Résoudre l'équation $\frac{1}{x} = x$ en utilisant l'égalité des produits en croix.

2. Lire graphiquement la position relative des deux courbes.

92 La distance entre le domicile de Lucas et son lieu de travail est de 60 km.
Selon les jours, il met entre 1 h 15 min et 1 h 30 min pour effectuer le trajet.
On note t (en h) la durée du trajet et v (en km·h^{-1}) la vitesse moyenne de Lucas sur ce parcours.

a) Exprimer v en fonction de t.

b) Exprimer 1 h 15 min et 1 h 30 min par un nombre décimal d'heure.

c) Donner un encadrement de v en s'aidant de l'hyperbole de la fonction inverse.

93 Algo **1.** Appliquer ce programme au nombre 2.

- Choisir un nombre non nul.
- L'élever au carré.
- Prendre l'inverse.

2. Ambre : « Je cherche un nombre x tel que, après avoir appliqué ce programme, je retrouve x. »

a) Montrer que si un tel nombre existe, alors il est solution de l'équation $x^3 = 1$.

b) Quel nombre Ambre doit-elle choisir ?

Connaître la fonction racine carrée

94 Histoire des maths Un pendule est constitué d'une masse suspendue au bout d'un fil. Lorsque ce pendule oscille, sa période est le temps qui s'écoule entre deux passages dans le même sens, à la verticale. On montre que la période p, en s, est donnée en fonction de la longueur ℓ du fil, en m, par la formule :

$$p(\ell) = 2\sqrt{\ell}$$

1. Le célèbre pendule de Foucault avait une longueur de 67 m. Quelle était sa période ?
Arrondir au dixième.

2. On se propose de déterminer la longueur d'un pendule dont la période est 3 s.

a) Justifier que le problème revient à résoudre l'équation $\sqrt{\ell} = 1{,}5$.

b) Résoudre graphiquement cette équation et conclure.

Un peu d'histoire
En 1851, le physicien français Léon Foucault utilisa le pendule qui porte maintenant son nom pour démontrer le mouvement de rotation de la Terre. Le pendule était pour cela accroché à la voûte du Panthéon de Paris.

95 La fréquence f du son émis par la corde d'une guitare, en hertz (Hz), est donnée en fonction de la tension t de la corde, en newton, par la formule $f(t) = 10\sqrt{t}$.

1. Calculer la fréquence pour $t = 100$, puis pour $t = 400$.

2. On souhaite déterminer la tension qui permet d'obtenir la note La_2, de fréquence 220 Hz.

a) Justifier que le problème revient à résoudre l'équation $\sqrt{t} = 22$.

b) Résoudre graphiquement cette équation et conclure.

3. De même, déterminer avec quelles tensions on obtient un son dont la fréquence est supérieure à celle du Sol_2, qui est de 198 Hz.

96 On se place sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
f est la fonction cube et $\mathscr{C}$ est sa représentation graphique dans un repère.
g est la fonction racine carrée et $\mathscr{C}'$ est sa représentation graphique dans le même repère.
On se propose d'étudier les positions relatives des courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.

a) Avec la calculatrice, conjecturer les positions relatives de ces courbes.

b) À l'aide de cet écran de calcul formel, expliquer pourquoi :

- $x^3 - \sqrt{x} \geqslant 0$ si $x \geqslant 1$;
- $x^3 - \sqrt{x} \leqslant 0$ si $0 < x \leqslant 1$.

1	$h(x) = x\,(x-1)\,\dfrac{x^4+x^3+x^2+x+1}{x^3+\sqrt{x}}$
	→ $\mathbf{h(x) = x^3 - \sqrt{x}}$

c) En déduire la position relative des courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

S'entraîner à la logique → p. XXI

97 **Implication réciproque**

Pour chaque implication, dire si elle est vraie, puis énoncer sa réciproque et dire si celle-ci est vraie.

a) Si $x = 2$, alors $x^2 = 4$.

b) Si $x = 5$, alors $x^3 = 125$.

c) Si $x = 0{,}5$, alors $\dfrac{1}{x} = 5$.

d) Si $x = 9$, alors $\sqrt{x} = 3$.

98 **Quantificateurs**

Dans chaque cas, on a écrit deux affirmations, l'une avec le quantificateur universel, l'autre avec le quantificateur existentiel.
Indiquer les affirmations qui sont vraies.

1. a) Il existe un nombre réel x tel que $x^2 = 5$.
b) Pour tout nombre réel x, $x^2 = 5$.

2. a) Il existe un nombre réel positif x tel que $\sqrt{x} > 0$.
b) Pour tout nombre réel positif x, $\sqrt{x} > 0$.

3. a) Il existe un nombre réel $x \neq 0$ tel que $\dfrac{1}{x} = 0$.
b) Pour tout nombre réel $x \neq 0$, $\dfrac{1}{x} = 0$.

Organiser son raisonnement

99 Imaginer une stratégie

Chercher | Modéliser | Communiquer

Un nombre réel strictement positif augmente du quart de sa valeur.
Comment varie son inverse ?

100 Discover a special number

Chercher | Calculer | Communiquer

Jenna says to Isaac: "There is a number whose images under the four functions we've studied in this chapter (p. 191 and 192) are the same."
Is it true? If so, what is that number?

101 Prendre des initiatives

Modéliser | Calculer

En 2018, 85 sphères de 1 840 kg de granit ont été installées sur la place du château de Christiansborg à Copenhague.

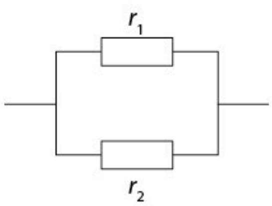
On sait que le volume d'une sphère de rayon r est $\frac{4}{3}\pi r^3$ et que la masse volumique du granit est de 2 640 $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$.
Déterminer le diamètre, en m, de chaque sphère.
Arrondir au centième.

102 Étudier une situation en Physique

Chercher | Calculer

Quand on associe deux résistances r_1 et r_2 en parallèle, la résistance totale du circuit, r, vérifie la relation :

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$$



On souhaite obtenir un circuit dont la résistance totale est de 0,5 ohm en utilisant une résistance de 2,5 ohms.
Quelle doit être la valeur de l'autre résistance ?

103 Étudier une vitesse

Chercher | Calculer

La vitesse v, en $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$, d'un raz-de-marée dépend de la profondeur d'eau h, en km, selon la formule :

$$v = 870\sqrt{\frac{h}{6}}$$

Déterminer la hauteur d'eau (en km au **a)** et en m au **b)**) lorsque la vague se déplace à la vitesse de :
a) 870 $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ au large ; **b)** 50 $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ près des côtes.
Arrondir à l'unité si besoin.

104 Chercher des nombres

Narration de recherche

Chercher | Modéliser | Calculer

Rédiger les différentes étapes de la recherche, sans omettre les fausses pistes et les changements de méthode.

Problème Existe-t-il deux nombres consécutifs de $\mathbb{N}$ dont la différence des inverses est $\frac{1}{72}$?

105 Inverser des moyennes

Problème ouvert

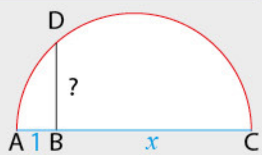
Chercher | Modéliser

a et b désignent deux nombres réels strictement positifs. m désigne l'inverse de la moyenne de a et b et n désigne la moyenne des inverses de a et b.
Comparer les nombres m et n.

Des Défis

106 Construire un nombre particulier

A, B et C sont trois points alignés tels que $AB = 1$ et $BC = x$.
Le point D appartient à un demi-cercle de diamètre [AC] et le segment [BD] est perpendiculaire à [AB].
Exprimer la longueur BD en fonction de x.



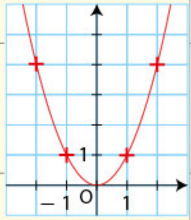
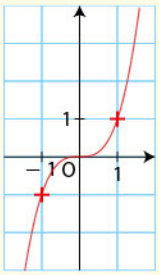
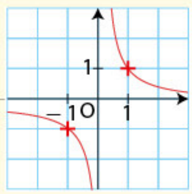
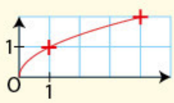
107 Des images imbriquées

f est la fonction inverse.
On calcule $f(2)$, puis $f(1+f(2))$, puis $f(1+f(1+f(2)))$ et ainsi de suite.
Commenter l'évolution des valeurs que l'on obtient ainsi.

QCM Bilan

QCM interactifs

108 Dans chaque cas, donner la réponse exacte en justifiant.

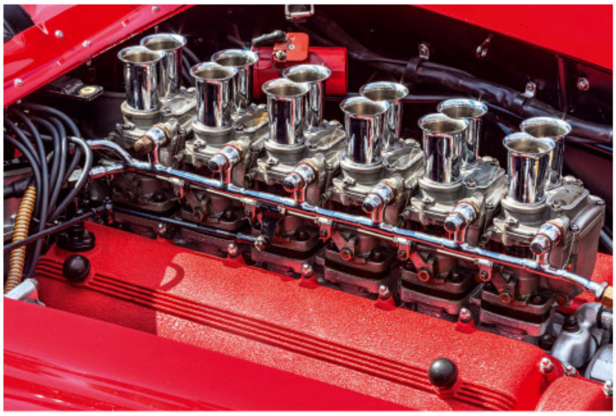
		A	B	C	D
1	Les solutions de l'équation $x^2 = 2$ sont … 	2 et -2	1 et -1	$\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$	de même signe
2	L'équation $x^2 = k$ admet deux solutions distinctes …	si $k = -1$	si $k \geqslant 0$	si $k > 0$	si $k \neq 0$
3	Les solutions de l'inéquation $x^2 \geqslant 9$ sont les nombres…	3 et -3	de l'intervalle $[-3\,;3]$	de l'intervalle $]-3\,;3[$	de l'ensemble $]-\infty\,;-3] \cup [3\,;+\infty[$
4	L'équation $x^3 = -1$ admet … 	une unique solution	une solution positive	deux solutions opposées	deux solutions négatives
5	Les solutions de l'inéquation $x^3 < 3\sqrt{3}$ sont les nombres de l'intervalle …	$]-\infty\,;3]$	$\left]-\infty\,;\sqrt{3}\right[$	$\left[0\,;\sqrt{3}\right[$	$\left[0\,;\sqrt{3}\right]$
6	Les images de π et $-\pi$ par la fonction inverse vérifient …	$\frac{1}{\pi} = \frac{1}{-\pi}$	$\frac{1}{\pi} > \frac{1}{-\pi}$	$\frac{1}{\pi} < \frac{1}{-\pi}$	$\frac{1}{\pi} = -\frac{2}{-\pi}$
7	L'équation $\frac{1}{x} = k$ (avec $k \neq 0$) admet pour unique solution … 	$-k$	k	$\frac{1}{k}$	$-\frac{1}{k}$
8	Les solutions de l'inéquation $\frac{1}{x} < -0{,}5$ sont les nombres de l'intervalle …	$]-\infty\,;-2[$	$]-\infty\,;-0{,}5[$	$]-2\,;0[$	$]-5\,;0[$
9	L'image de $\frac{4}{3}$ par la fonction racine carrée est … 	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
10	Les solutions de l'inéquation $\sqrt{x} < 4$ sont les nombres de l'intervalle …	$]-\infty\,;16[$	$]-\infty\,;2[$	$[0\,;16[$	$]16\,;+\infty[$

Vérifiez vos réponses p. 346 pour avoir votre note (considérez 1 point par réponse juste).

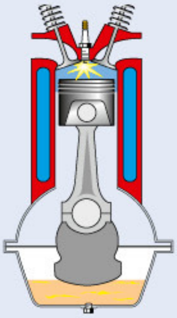
109 Prévoir la pression dans un piston

La situation problème

Le fonctionnement d'un moteur à combustion est basé sur l'utilisation de pistons. Un piston peut contenir un volume variable de carburant, ce qui modifie la pression intérieure.
Utiliser les différentes informations pour déterminer la pression maximum que doit pouvoir supporter le piston du DOC 1.



DOC 1 Schéma d'un cylindre



DOC 2 Relation pression – volume

La loi de Boyle-Mariotte indique que, à température constante, la pression P, en bar, et le volume V de gaz, en litre, dans le piston vérifient :

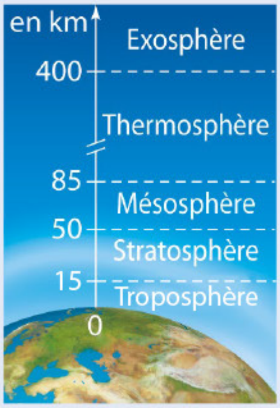
$$P \times V = 1$$

110 Traverser l'atmosphère

La situation problème

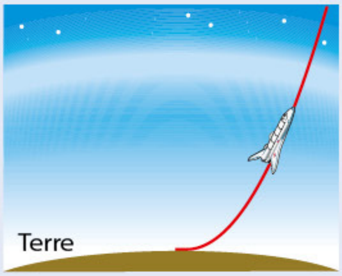
Une navette spatiale quitte la Terre pour rejoindre l'espace.
Lors de son trajet, elle traverse les couches successives de l'atmosphère.
Utiliser les différentes informations pour déterminer le temps, en seconde, que la navette met à traverser la thermosphère.

DOC 1 L'atmosphère



DOC 2 Une modélisation de la distance

La distance parcourue, en décimètre, est modélisée en fonction du temps, en seconde, par la fonction cube.

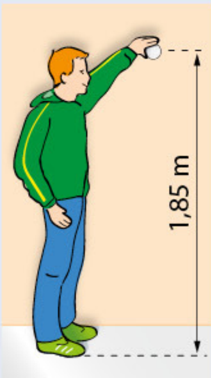


111 Calculer un temps de chute

La situation problème

Iker, qui vit à Bruxelles, lâche une balle de golf. Le temps qui s'écoule avant que la balle touche le sol dépend de la hauteur initiale, mais aussi de l'altitude du lieu où Iker se situe.
Utiliser les différentes informations pour calculer le temps de chute de la balle, en s. *Arrondir au centième.*

DOC 1 La situation



DOC 2 Équation horaire

Hauteur de la balle, en m, en fonction de la durée de chute, en s :

$$1{,}85 - 0{,}5\,gt^2$$

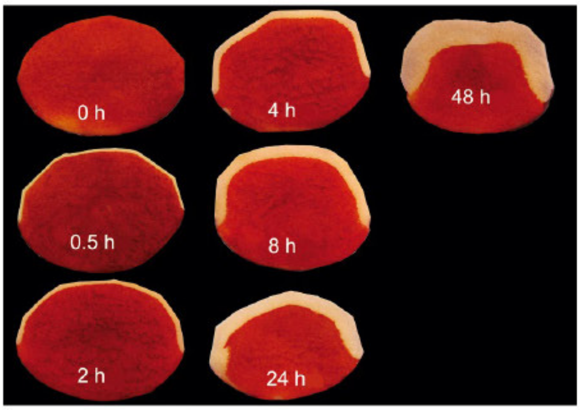
DOC 3 Valeurs de g dans plusieurs villes

Ville	Pays	Valeur de g (en $N \cdot kg^{-1}$)
Thule	Groenland	9,939
Vadso	Norvège	9,834
Bruxelles	Belgique	9,809
Barcelone	Espagne	9,804
Almirante	Panama	9,776

112 Tice Modéliser un phénomène

La situation problème

Quand on plonge une pomme de terre à chair rouge, épluchée, dans une solution de chlorure de sodium à 7 %, on observe un blanchiment progressif de la chair.
On peut mesurer la progression du blanchiment en plongeant plusieurs pommes de terre dans la solution et en les retirant après des durées différentes puis en les découpant pour mesurer l'épaisseur blanchie.
Utiliser les différentes informations pour estimer l'épaisseur blanche au bout de 5 h. *Arrondir au dixième.*



DOC 1 Valeurs expérimentales

Durée x (en h)	Épaisseur y (en mm)
0	0
0,5	1,2
1	1,7
1,5	2,1
2	2,4
2,5	2,7
3	2,9

DOC 2 Un conseil de Maxime

« Utilise le tableur et, dans une feuille de calcul, saisis le tableau ci-contre et ajoute une colonne où tu calculeras les valeurs de $\frac{y^2}{x}$, pour $x \neq 0$. »