10 Graphes

HISTOIRE DES MATHS

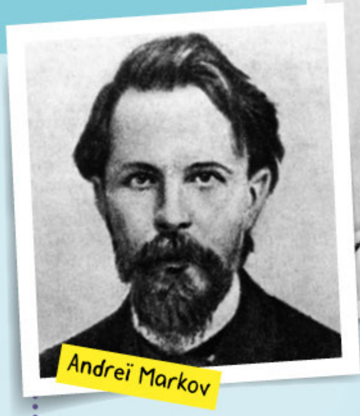
En 1735, **Leonhard Euler** étudie le problème des sept ponts de Königsberg. Il modélise la situation par un dessin de réseau reliant les rives.

En 1741, il rédige la solution dans son livre *Solution d'un problème lié à la géométrie de la position* à l'aide d'une nouvelle branche des mathématiques : la théorie des graphes.

D'autres problèmes tels que la coloration d'un graphe, la recherche du chemin le plus court conduisent au développement de cette théorie.

En 1906, **Andreï Markov** étudie des processus aléatoires, les représente par des graphes pondérés et y associe des matrices.

Aujourd'hui, cette théorie a de nombreuses applications : réseaux, télécommunications, génétique, intelligence artificielle…



Andreï Markov

Claude Berge

▶ **Andreï Markov** (1856-1922) est un mathématicien russe. Ses travaux en théorie des probabilités l'amènent à mettre au point les chaînes de Markov qui formalisent les processus aléatoires dépendant du temps.

▶ **Claude Berge** (1926-2002) est un mathématicien et artiste français. Il participe au développement de la théorie des graphes et introduit la notion de graphe parfait. En 1993, il reçoit le prix Euler pour ses travaux.

1741 Euler donne naissance à la théorie des graphes.

1771 Vandermonde étudie le problème du cavalier.

1870 Hierholzer démontre le théorème énoncé par Euler sur les graphes dits eulériens.

1906 Markov étudie des processus particuliers qui porteront son nom.

1936 König publie le premier livre de théorie des graphes.

1774 Louis XVI est sacré Roi de France

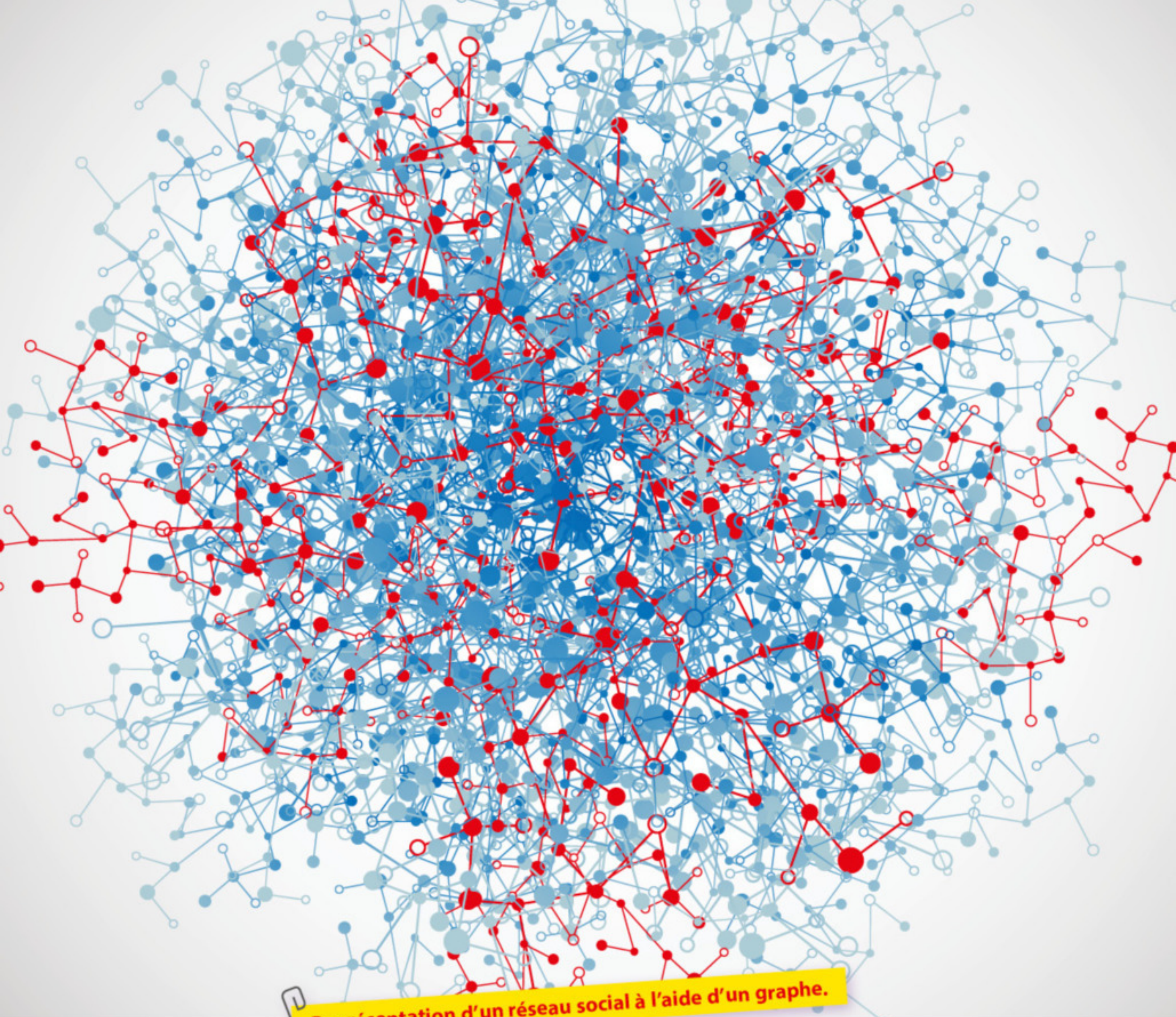
1819 *Ivanhoé* roman de Walter Scott

1849 Meucci imagine les bases du téléphone

1890 Début de l'aviation avec Ader

1906 Destruction à 80 % de San Fransisco par un incendie

1750 — 1800 — 1850 — 1900 — 1950



Représentation d'un réseau social à l'aide d'un graphe.

L'étude des réseaux sociaux est un domaine de recherche particulièrement actif dont un des objectifs est l'analyse des interactions observées entre des individus. Par exemple, lors d'une élection présidentielle, un ensemble de tweets peut ainsi être vu comme un graphe. Cela permet d'identifier des groupes d'individus en fonction des sujets dont ils parlent et de mesurer l'importance des interactions avec d'autres groupes.

Les contenus et capacités travaillés dans ce chapitre

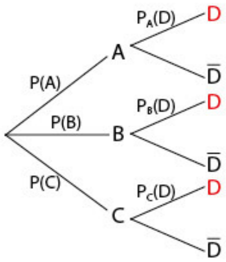
	Savoir-faire	Exercices
• Vocabulaire des graphes.	2, 4, 5, 7	22 à 31, 33, 35
• Modéliser une situation par un graphe.	1, 3	71 à 73
• Matrice d'adjacence d'un graphe. Calculer le nombre de chemins de longueur donnée entre deux sommets d'un graphe.	6, 8	32, 34, 36 à 42
• Associer un graphe orienté pondéré à une chaîne de Markov à 2 ou 3 états. Matrice de transition P d'une chaîne de Markov.	9 à 11	43, 45 à 47
• Interpréter des coefficients de P^n. Distribution après n transitions.	12 à 14, 19 à 21	44, 48 à 53
• Étudier une chaîne de Markov pour déterminer une distribution invariante.	15 à 18	54 à 62

Calcul mental

Rappels utiles

• Arbre pondéré

Une expérience aléatoire conduit à l'arbre pondéré ci-contre.



La probabilité de l'événement $A \cap D$ est donnée par :

$$P(A \cap D) = P(A) \times P_A(D)$$

D'après la formule des probabilités totales :

$$P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) + P(C \cap D)$$

• Suites géométriques

Si (u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0, alors pour tout entier naturel n,

$$u_n = u_0 \times q^n.$$

Si $|\boldsymbol{q}| < \mathbf{1}$, alors la **limite** de cette suite est égale à **0**.

• Produits de matrices

Pour multiplier deux matrices :

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{21}y & a_{12}x + a_{22}y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

• Systèmes d'équations linéaires

a, b, c, d, e, f désignent des nombres réels.

Un système d'équations $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$

peut s'écrire sous forme matricielle $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ où

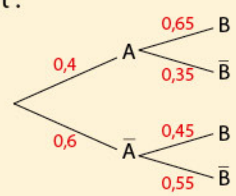
$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$.

Si la matrice A est inversible, alors $X = A^{-1}B$.

À l'oral — Questions-Tests

Pour chaque question, il y a une seule réponse exacte.

1 Une expérience aléatoire conduit à l'arbre pondéré suivant :



a) La probabilité de l'événement $A \cap B$ est :

(1) 0,65 (2) 0,26 (3) 0,615

b) La probabilité de l'événement B est :

(1) 0,65 (2) 0,45 (3) 0,53

2 **a)** (u_n) est la suite géométrique de raison 0,4 telle que $u_0 = 2$. Alors pour tout entier naturel n :

(1) $u_n = 0{,}4 \times 2^n$ (2) $u_n = 2 \times 0{,}4n$ (3) $u_n = 2 \times 0{,}4^n$

b) (u_n) est une suite définie sur $\mathbb{N}$.
(v_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 3$.
Si (v_n) est la suite géométrique de raison 0,5 telle que $v_0 = 7$, alors pour tout entier naturel n :

(1) $u_n = 7 \times 0{,}5^n - 3$ (2) $u_n = 7 \times 0{,}5^n + 3$ (3) $u_n = 7 \times 0{,}5^n$

c) (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 7 \times 0{,}5^n + 3$.
Alors la limite de la suite (u_n) est :

(1) 3 (2) 7 (3) 10

3 **a)** On donne les matrices $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.
Le produit AB est :

(1) $\begin{pmatrix} 21 & 12 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 14 & 19 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 17 & 12 \end{pmatrix}$

b) On reprend les matrices A et B du **a)**.
Le produit BA :

(1) est $\begin{pmatrix} 12 & 17 \end{pmatrix}$ (2) est $\begin{pmatrix} 17 \\ 12 \end{pmatrix}$ (3) n'existe pas

c) On donne les matrices $C = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.
Le produit CD est :

(1) $\begin{pmatrix} 14 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 17 & 12 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 17 & 12 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

4 **a)** On considère le système d'équations

$$\begin{cases} -0{,}1x + 0{,}2y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

dont l'écriture matricielle est AX = B.
Alors la matrice A est :

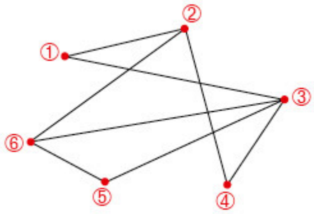
(1) $\begin{pmatrix} -0{,}1 & 0{,}2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} -0{,}1 & 0{,}2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) Le système $\begin{cases} -0{,}1x + 0{,}2y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$ a pour couple solution :

(1) $\left(\frac{2}{3} ; \frac{1}{3}\right)$ (2) $(0 ; 1)$ (3) $(2 ; -1)$

1 Réseau social

Six élèves, désignés ci-contre par ①, ②, …, ⑥, se retrouvent et constatent qu'ils sont tous inscrits sur le même réseau social.
Le graphe G ci-contre schématise les liens d'amitiés qui les unissent sur ce réseau.



1 **a)** Reproduire et compléter le tableau ci-contre dans lequel on inscrit 1 lorsqu'il existe un lien d'amitié entre deux élèves et 0 sinon.
b) Écrire la matrice M associée à ce tableau.
On dit que M est **la matrice d'adjacence** associée au graphe G.

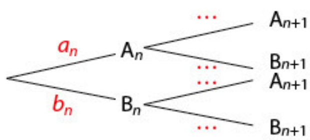
	①	②	③	④	⑤	⑥
①						
②						
③						
④						
⑤						
⑥						

2 On dit que la chaîne ③ ⑤ ⑥ relie l'élève ③ à l'élève ⑥, et a pour longueur 2.
a) Écrire toutes les chaînes de longueur 2 reliant l'élève ① à l'élève ④.
b) Écrire toutes les chaînes de longueur 3 reliant l'élève ② à l'élève ⑤.
c) Calculer la matrice M^2. Comparer le coefficient a_{14} (ligne 1 et colonne 4) à la réponse à la question **2 a)**.
d) Proposer une façon de retrouver également la réponse à la question **2 c)**. Vérifier.

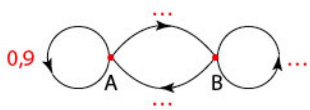
2 Évolution de parts de marché

Deux entreprises, A et B, se partagent le marché de l'horticulture dans une région de France.
En 2018, l'entreprise A possédait 45 % du marché et l'entreprise B le reste.
Chaque année, l'entreprise A conserve 90 % de ses clients, les autres choisissent l'entreprise B.
Quant à l'entreprise B, elle conserve 85 % de ses clients, les autres choisissent l'entreprise A.
On choisit un client au hasard tous les ans et on note pour tout entier naturel n :
- **a_n la probabilité de l'événement A_n : « Le client a choisi l'entreprise A l'année $2018 + n$ »,**
- **b_n la probabilité de l'événement B_n : « Le client a choisi l'entreprise B l'année $2018 + n$ ».**

1 **a)** Reproduire et compléter l'arbre pondéré ci-contre.
b) Démontrer que pour tout nombre entier naturel n, $a_{n+1} = 0{,}9a_n + 0{,}15b_n$.
c) Établir une relation comparable pour b_{n+1}.



2 **a)** Recopier et compléter le graphe pondéré ci-dessous par les probabilités conditionnelles traduisant les changements ou non d'états d'une année à l'autre.



b) Reproduire et compléter le tableau ci-contre.
c) Déterminer la matrice P associée à ce tableau, appelée **matrice de transition** du graphe.

	A	B
A	0,9	
B		

3 On représente la répartition des parts de marché en $2018 + n$ par la matrice ligne $\pi_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$.
On la nomme **distribution** après n années.
Ainsi $\pi_0 = \begin{pmatrix} 0{,}45 & 0{,}55 \end{pmatrix}$.
Vérifier que pour tout entier naturel n, $\pi_{n+1} = \pi_n \times P$.

Cours

Exercices
- **1** à **4** (ci-contre)
- **22** à **31**

1 Vocabulaire des graphes

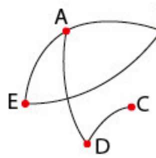
A Graphes et graphes orientés

Définitions

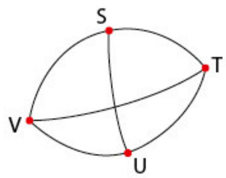
- Un **graphe** est constitué de **sommets** dont certains sont reliés par une **arête**.
- Deux sommets reliés par une arête sont dits **adjacents**.
- L'**ordre** d'un graphe est le nombre de sommets de ce graphe.
- Le **degré** d'un sommet est le nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrémité.
- Un graphe est **complet** lorsque tous ses sommets sont adjacents.

Exemples

- Le graphe ci-dessous est d'ordre 5, le degré du sommet A est 3, les sommets A et B sont adjacents. Le graphe n'est pas complet car les sommets B et D ne sont pas adjacents.



- Le graphe ci-dessous est d'ordre 4, le degré du sommet U est 3.
Tous les sommets sont adjacents, ainsi le graphe est complet.

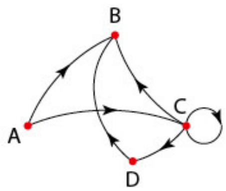


Définition

Un graphe **orienté** est un graphe dont les arêtes sont orientées.
Chaque arête ne peut être parcourue que dans le sens de la flèche.
Une **boucle** est une arête orientée ayant pour origine son extrémité.

Exemple

Le graphe ci-contre est un graphe orienté.
On peut se rendre du sommet A au sommet B, mais pas dans l'autre sens, du sommet B au sommet A.
À partir du sommet C, on peut se rendre au sommet C par la boucle.



B Degrés des sommets

Propriétés

- La **somme des degrés** des sommets d'un graphe non orienté est égale **au double** de son nombre d'arêtes.
- Le nombre de sommets de **degré impair** d'un graphe non orienté est **pair**.

Démonstrations

- Lorsqu'on calcule la somme des degrés des sommets d'un graphe non orienté, on compte exactement deux fois chaque arête.
- Par l'absurde, on suppose que le nombre de sommets de degré impair d'un graphe non orienté est impair. Il existe alors un entier naturel n tel que le nombre de ces sommets soit $2n+1$. Or, la somme de deux nombres impairs est paire donc la somme des $2n+1$ degrés impairs est impaire. Ainsi la somme des degrés (pairs et impairs) est impaire. On obtient une contradiction car cette somme, égale au double du nombre d'arêtes, est paire.

EXERCICES RÉSOLUS

1 Modéliser à l'aide d'un graphe

Le Centre d'Études et d'Application sur les Nouvelles Technologies Éducatives (CEANTE) a découpé la carte de France comme ci-contre.

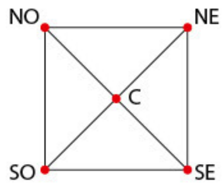
a) Modéliser cette carte par un graphe dans lequel l'existence d'une frontière entre deux zones se traduira par une arête.

b) Déterminer l'ordre de ce graphe.

c) Le graphe est-il complet ?

Solution

a) Voici un graphe qui modélise cette carte.
Les sommets représentent les différentes zones et les arêtes les frontières entre celles-ci.



b) L'ordre du graphe est 5.

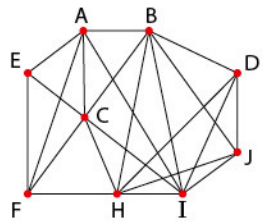
c) Le graphe n'est pas complet car, par exemple, les sommets NO et SE ne sont pas adjacents.

On désigne chaque zone par son (ou ses) initiale(s).

Un contre-exemple suffit pour justifier qu'un graphe n'est pas complet.

2 Utiliser la somme des degrés

Les neuf sommets du graphe ci-contre représentent les lacs du delta d'un grand fleuve. Chaque arête représente un canal de communication entre deux lacs.



a) Déterminer le degré de chaque sommet.

b) En déduire le nombre de canaux de communication entre ces lacs.

Solution

a) Voici le tableau donnant le degré de chaque sommet :

Sommet	A	B	C	D	E	F	H	I	J
Degré	5	6	6	4	3	4	6	6	4

b) La somme des degrés de chaque sommet est égale à 44.
Ainsi le nombre de canaux de communication entre ces lacs est 22.

Le nombre d'arêtes est égal à la moitié de la somme des degrés de chaque sommet.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 1

3 Ce tableau présente les liaisons aériennes entre quatre villes des États-Unis.

	Seattle	Bismarck	Boston	Miami
Seattle		X		X
Bismarck	X		X	X
Boston		X		X
Miami	X	X	X	

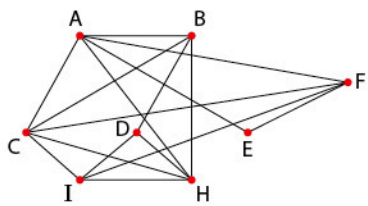
a) Modéliser cette carte par un graphe.

b) Déterminer l'ordre de ce graphe.

c) Le graphe est-il complet ?

Sur le modèle de l'exercice résolu 2

4 Le graphe suivant modélise le plan d'un village. Les arêtes du graphe représentent ses rues et les sommets du graphe les croisements de celles-ci.



a) Déterminer le degré de chaque sommet.

b) En déduire le nombre de rues de ce village.

Exercices
- **5** à **8** (ci-contre)
- **32** à **42**

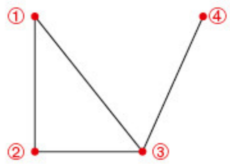
2 Matrice d'adjacence d'un graphe

A Matrice d'adjacence et chaînes

Définition

m est un entier naturel non nul et G est un graphe d'ordre m dont les sommets sont numérotés de 1 à m.
La **matrice d'adjacence** associée au graphe G est la matrice carrée d'ordre m où le coefficient figurant en ligne i et colonne j est égal au nombre d'arêtes reliant i à j.

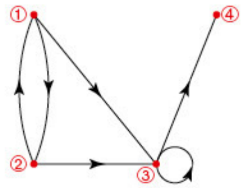
Exemple 1



$$\mathrm{M}=\begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} & \textcircled{4} \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \\ \textcircled{4} \end{array} \end{array}$$

- M est symétrique avec des 0 sur la 1re diagonale.
- **1** arête relie ① à ②.

Exemple 2



$$\mathrm{M}=\begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} & \textcircled{4} \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \\ \textcircled{4} \end{array} \end{array}$$

- M n'est pas symétrique.
- **1** arête relie ② à ③.

Définitions

- Une **chaîne** ou **chemin** est une liste ordonnée de sommets reliés deux à deux par une arête.
- La **longueur d'une chaîne** est le nombre d'arêtes qui la composent.
- Une chaîne est **fermée** lorsque son premier sommet est également son dernier sommet.
- Un **cycle** est une chaîne fermée dont toutes les arêtes sont empruntées une et une seule fois.

Exemples

À l'exemple 1 ci-dessus, ① – ③ – ④ est une chaîne de longueur 2 et ① – ③ – ② – ① est un cycle de longueur 3.

Définition

Un graphe non orienté est **connexe** si deux sommets quelconques peuvent être reliés par une chaîne.

B Nombre de chemins de longueur donnée

Propriété

m est un entier naturel non nul et G est un graphe d'ordre m dont les sommets sont numérotés de 1 à m.
M est la matrice d'adjacence associée au graphe G.
Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, le coefficient situé en ligne i et colonne j de la matrice M^n est **le nombre de chaînes de longueur *n* reliant *i* à *j***.

Démonstration

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note $\left(\mathrm{M}^n\right)_{ij}$ le coefficient situé en ligne i et colonne j de la matrice M^n et P(n) la propriété : « $\left(\mathrm{M}^n\right)_{ij}$ est le nombre de chemins de longueur n reliant i à j ».

- **Initialisation :** P(1) est vraie car $\left(\mathrm{M}^1\right)_{ij}$ est le nombre de chemins de longueur 1 reliant i à j.
- **Hérédité :** on suppose que pour un entier naturel $k \geqslant 1$, P(k) est vraie.

Un chemin de longueur $k+1$ reliant i à j est composé d'un chemin de longueur k allant de i à un sommet quelconque h (avec $1 \leqslant h \leqslant n$), suivie d'une arête allant de h à j.

Donc le nombre de chemins de longueur $k+1$ reliant i à j est $\sum_{h=1}^{n} \left(\mathrm{M}^k\right)_{ih} \times \mathrm{M}_{hj}$ c'est-à-dire $\left(\mathrm{M}^{k+1}\right)_{ij}$.
Ainsi la propriété P($k+1$) est vraie.

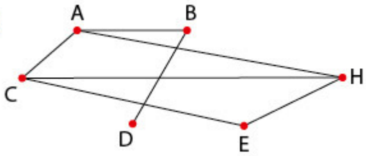
- **Conclusion :** pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, la propriété P(n) est vraie.

EXERCICES RÉSOLUS

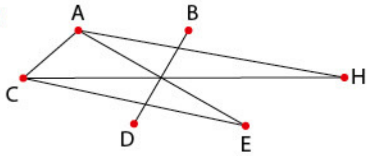
5 Reconnaître un graphe connexe

Dans chaque cas, dire si le graphe est connexe puis citer un cycle de longueur 4 d'origine le sommet A.

a)



b)

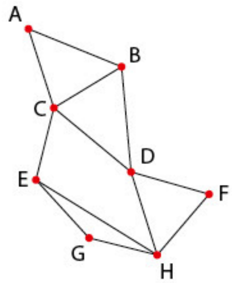


Solution

a) Deux sommets quelconques peuvent être reliés par une chaîne donc le graphe est connexe.
La chaîne A-C-E-H-A est un cycle de longueur 4.
b) Il n'existe pas de chaîne reliant les sommets A et B donc le graphe n'est pas connexe.
La chaîne A-E-C-H-A est un cycle de longueur 4.

6 Déterminer un nombre de chemins de longueur donnée

Un producteur prépare la tournée d'un orchestre qui se déplacera chaque jour d'une ville à une autre.
Le graphe ci-contre représente différentes villes dans lesquelles ils ont la possibilité de jouer et les autoroutes reliant ces villes.
a) Déterminer la matrice d'adjacence M associée au graphe puis calculer M^3.
b) La tournée commencera dans la ville B pour se terminer trois jours plus tard dans la ville G. Combien y a-t-il d'itinéraires possibles ? Préciser ces itinéraires.



Solution

a) La matrice d'adjacence associée en plaçant les sommets par ordre alphabétique est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Alors } M^3 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 & 2 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 6 & 7 & 3 & 2 & 2 & 3 \\ 6 & 6 & 4 & 9 & 7 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 9 & 4 & 3 & 5 & 3 & 8 \\ 1 & 3 & 7 & 3 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 2 & 2 & 3 & 5 & 3 & 2 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 4 & 2 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 8 & 7 & 5 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

À l'aide de la calculatrice, on détermine M^3.
On repère alors le coefficient correspondant aux sommets indiqués (2^e ligne pour B et 7^e colonne pour G).

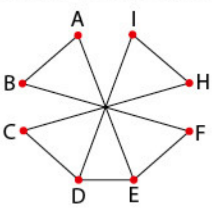
b) Il y a donc 2 itinéraires possibles de longueur 3 jours reliant B à G. Il s'agit de B-D-H-G et B-C-E-G.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

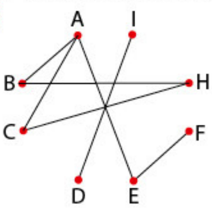
Sur le modèle de l'exercice résolu 5

7 Dans chaque cas, dire si le graphe est connexe puis citer un cycle de longueur 4 d'origine le sommet A.

a)

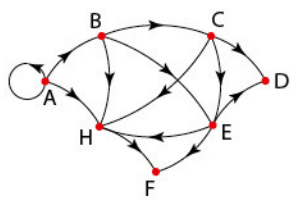


b)



Sur le modèle de l'exercice résolu 6

8 **a)** Déterminer la matrice d'adjacence M associée à ce graphe, puis calculer M^4.
b) Combien y a-t-il d'itinéraires possibles de longueur 4 reliant A et F ? Préciser ces itinéraires.



Exercices
- 9 à 11 (ci-contre)
- 43, 45 à 47

3 Chaînes de Markov

A Vocabulaire

Un **processus** est une suite (X_n) de variables aléatoires à valeurs dans un ensemble E à deux ou trois éléments, appelés les **états**. On dit que E est **l'espace des états**.
Pour tout état i de E et pour tout entier naturel n, dire que le processus **est dans l'état *i* à l'instant *n*** signifie que l'événement $\{X_n = i\}$ est réalisé.

Définitions

Une **chaîne de Markov** sur un espace d'états E est un processus (X_n) tel que :
- pour tout état i de E, l'événement $\{X_{n+1} = i\}$ ne dépend que de l'état dans lequel était le processus à l'instant n (« Le futur ne dépend que de l'instant présent ») ;
- la probabilité de passer de l'état i à l'état j ne dépend pas de l'instant n.

Exemple

Dans un certain pays, s'il pleut un certain jour alors il pleut également le lendemain avec une probabilité égale à 0,7.
De plus, s'il ne pleut pas un certain jour alors il pleut le lendemain avec une probabilité égale à 0,2.
On choisit au hasard une journée. X_n est la variable aléatoire qui prend la valeur 1 s'il pleut après n jours et 2 s'il ne pleut pas après n jours.
Comme le fait qu'il pleuve une journée ne dépend que du temps de la journée précédente et que la probabilité que le temps change ou non ne dépend pas du rang de la journée, on en déduit que la suite (X_n) est une chaîne de Markov à deux états 1 et 2.

B Matrice et graphe associés

Définitions

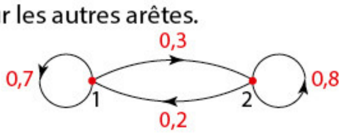
À une chaîne de Markov, on associe :
- un graphe orienté pondéré, dit **graphe pondéré associé**, dont les sommets sont les états et dont l'arête orientée reliant l'état i à l'état j est pondérée par la probabilité de passer de l'état i à l'état j.
- une matrice carrée P, dite **matrice de transition associée**, où le coefficient situé en ligne i et colonne j est égal à la probabilité de passer de l'état i à l'état j.

Exemple

On reprend l'exemple du paragraphe A.

- **Graphe pondéré associé**

La probabilité de rester dans l'état 1 est égale à 0,7, on pondère donc la boucle du sommet 1 du graphe par 0,7.
La probabilité de passer de l'état 1 à l'état 2 est donc égale à 0,3, on pondère donc l'arête orientée du sommet 1 au sommet 2 par 0,3. On procède de même pour les autres arêtes.



La somme des probabilités situées sur les arêtes partant d'un même sommet est égale à 1.

- **Matrice de transition associée**

Le coefficient p_{11} de la matrice P est la probabilité de rester dans l'état 1, donc 0,7.
Le coefficient p_{12} de la matrice P est la probabilité de passer de l'état 1 à l'état 2, donc 0,3.
Le coefficient p_{21} de la matrice P est la probabilité de passer de l'état 2 à l'état 1, donc 0,2.
De même $p_{22} = 0{,}8$.

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} ① & ② \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ ① \\ ② \end{array}$$

La somme des coefficients de la matrice de transition situés sur une même ligne est égale à 1.

EXERCICE RÉSOLU

9 Traduire à l'aide d'une chaîne de Markov

Chaque année, chacun des habitants d'un village choisit une activité parmi la randonnée (R), le vélo (V) ou la lecture (L).
Des études montrent que :

- 80 % des habitants ayant choisi l'activité lecture une année la conservent l'année suivante alors que 5 % changent pour l'activité randonnée ;
- 70 % des habitants pratiquant l'activité randonnée une année la conservent l'année suivante alors que 20 % changent pour l'activité vélo ;
- 60 % des habitants pratiquant l'activité vélo une année la conservent l'année suivante alors que 30 % changent pour l'activité lecture.

Pendant la durée de l'étude, on suppose que l'ensemble des habitants concernés reste inchangé.

a) Traduire l'énoncé à l'aide d'une chaîne de Markov.

b) Déterminer le graphe pondéré et la matrice de transition associés.

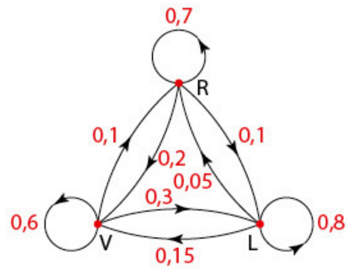
Solution

a) On choisit au hasard un habitant du village.
X_n est la variable aléatoire qui prend la valeur R si l'habitant choisit l'activité randonnée après n années, V s'il choisit l'activité vélo et L s'il choisit l'activité lecture.

- Le fait que l'habitant pratique une certaine activité une année ne dépend que de l'activité qu'il pratiquait l'année précédente.
- La probabilité de passer d'une activité à une autre ne dépend pas du rang de l'année.

Ainsi la suite (X_n) est une chaîne de Markov à trois états L, R et V.

b) Voici ci-contre le graphe pondéré et la matrice de transition associés à cette chaîne de Markov en conservant l'ordre alphabétique.



$$P = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} L & R & V \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}05 & 0{,}15 \\ 0{,}1 & 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}6 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ L \\ R \\ V \end{array}$$

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 9

10 À l'approche d'une élection où deux candidats A et B sont en lice, une étude montre que d'une semaine à la suivante :
– 10 % des électeurs se déclarant pour A,
– 15 % des électeurs se déclarant pour B,
changent d'avis.
On suppose que l'ensemble des électeurs reste inchangé.

a) Traduire l'énoncé à l'aide d'une chaîne de Markov.

b) Déterminer le graphe pondéré et la matrice de transition associés.

11 Les habitants d'une commune ne peuvent que s'abonner aux opérateurs téléphoniques A et B.
À partir de 2019, on considère que, d'une année à la suivante, 10 % des abonnés à l'opérateur A le quitte pour l'opérateur B et 40 % des abonnés à l'opérateur B le quitte pour l'opérateur A.
On suppose que l'ensemble des abonnés reste inchangé.

a) Traduire l'énoncé à l'aide d'une chaîne de Markov.

b) Déterminer le graphe pondéré et la matrice de transition associés.

Cours

Exercices
- **12** à **14** (ci-contre)
- **44**, **48** à **53**

4 Distributions

Dans ce paragraphe, (X_n) est une chaîne de Markov à deux ou trois états et de matrice de transition P.

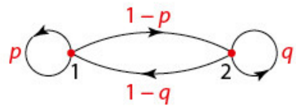
A Coefficients de P^n

Propriété

Pour tous états i et j et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, le coefficient en ligne i et colonne j de la matrice P^n est la probabilité de passer de l'état i à l'état j en n transitions.

Démonstration

On se place dans le cas d'une chaîne de Markov à deux états notés 1 et 2 avec $0 < p < 1$ et $0 < q < 1$ (graphe pondéré ci-contre). Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note $Q(n)$ la propriété « Pour tous états i et j, le coefficient $(P^n)_{ij}$ est la probabilité de passer de l'état i à l'état j en n transitions. »



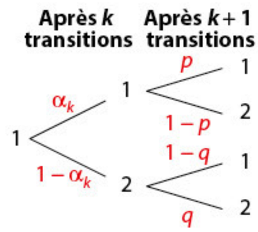
$$P = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-q & q \end{pmatrix}$$

On démontre par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $Q(n)$ est vraie.

- **Initialisation :** par définition de la matrice P, le coefficient $(P^1)_{ij}$ est la probabilité de passer de l'état i à l'état j en une transition, donc $Q(1)$ est vraie.
- **Hérédité :** on suppose que pour un entier naturel $k \geqslant 1$, $Q(k)$ est vraie.

Ainsi, pour tous états i et j, $(P^k)_{ij}$ est la probabilité de passer de l'état i à l'état j en k transitions.

On note $P^k = \begin{pmatrix} \alpha_k & 1-\alpha_k \\ 1-\beta_k & \beta_k \end{pmatrix}$. Avec l'arbre ci-contre, la formule des probabilités totales permet d'affirmer que la probabilité de passer de l'état 1 à l'état 1 en $k+1$ transitions est $\alpha_k \times p + (1-\alpha_k)(1-q)$.



Or, cette même probabilité est le coefficient en ligne 1 et colonne 1 de $P^{k+1} = P^k \times P = \begin{pmatrix} \alpha_k & 1-\alpha_k \\ 1-\beta_k & \beta_k \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-q & q \end{pmatrix}$.

Ainsi, $(P^{k+1})_{11}$ est la probabilité de passer de l'état 1 à l'état 1 en $k+1$ transitions. De manière analogue, on démontre que pour tous états i et j, $(P^{k+1})_{ij}$ est la probabilité de passer de l'état i à l'état j en $k+1$ transitions.

La propriété $Q(k+1)$ est donc vraie.

- **Conclusion :** la propriété $Q(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

B Distribution après n transitions

Définitions

La **distribution initiale**, notée π_0, est la loi de probabilité de la variable aléatoire X_0.
La **distribution après n transitions**, notée π_n, est celle de la variable aléatoire X_n.

Elles sont représentées par des matrices lignes.

Propriété

π_0 est la distribution initiale d'une chaîne de Markov. Alors pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, la distribution π_n après n transitions vérifie $\boldsymbol{\pi_n = \pi_0 \times P^n}$ et pour tout n, $\boldsymbol{\pi_{n+1} = \pi_n \times P}$.

Démonstration

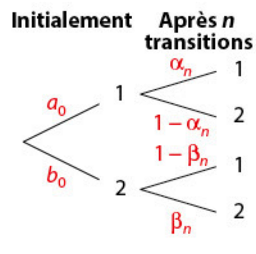
On reprend la chaîne de Markov du paragraphe A.

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $P^n = \begin{pmatrix} \alpha_n & 1-\alpha_n \\ 1-\beta_n & \beta_n \end{pmatrix}$ et $\pi_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$.

Avec l'arbre ci-contre, la formule des probabilités totales permet d'affirmer que $a_n = a_0 \times \alpha_n + b_0 \times (1-\beta_n)$ et $b_n = a_0 \times (1-\alpha_n) + b_0 \times \beta_n$.

Ainsi, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $\pi_n = \pi_0 \times P^n$.

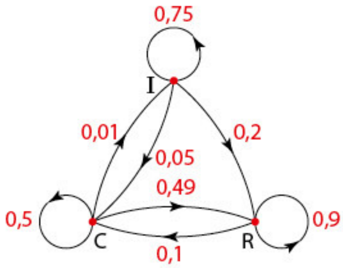
D'où, pour tout entier naturel n, $\pi_{n+1} = \pi_0 \times P^{n+1}$ soit $\pi_{n+1} = \pi_0 \times P^n \times P = \pi_n \times P$.



EXERCICE RÉSOLU

12 Déterminer une distribution

Dans une entreprise, une rumeur se propage au début d'une pause.
Chaque employé se trouve alors dans l'un des états suivants : ignorer la rumeur (I), connaître la rumeur et la propager (R), connaître la rumeur sans la propager (C).
Initialement, 0,1 % des employés connaissent la rumeur et la propagent, les autres l'ignorent.
Le graphe pondéré ci-dessous traduit l'évolution de l'état d'un employé d'une minute à la suivante.



a) Déterminer la matrice de transition P associée en conservant l'ordre alphabétique.
b) Donner la distribution initiale π_0.
c) Déterminer la distribution π_5. *Arrondir au centième.*
En déduire le pourcentage d'employés ignorant la rumeur après 5 minutes.

Solution

a) La matrice de transition associée est $P = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}01 & 0{,}49 \\ 0{,}05 & 0{,}75 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0 & 0{,}9 \end{pmatrix}$.

b) La distribution initiale est $\pi_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}999 & 0{,}001 \end{pmatrix}$.

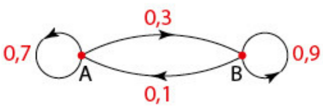
c) $\pi_5 = \pi_0 \times P^5$.
À l'aide de la calculatrice, on obtient $\pi_5 \approx \begin{pmatrix} 0{,}13 & 0{,}24 & 0{,}63 \end{pmatrix}$.
Ainsi, environ 24 % des employés ignorent la rumeur après 5 min.

$$[0\ 0.999\ 0.001]\begin{bmatrix} 0.5 & 0.01 & 0.49 \\ 0.05 & 0.75 & 0.2 \\ 0.1 & 0 & 0.9 \end{bmatrix}^5$$
$$[0.1324291\ 0.239738\ 0.6278329]$$

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

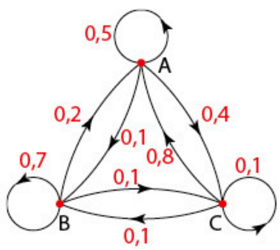
Sur le modèle de l'exercice résolu 12

13 On définit une chaîne de Markov à deux états A et B par le graphe pondéré ci-dessous et de distribution initiale $\pi_0 = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}$.



a) Déterminer la matrice de transmission P associée en conservant l'ordre alphabétique (A, B).
b) Déterminer la distribution π_4.
Arrondir au centième.
c) En déduire la probabilité que le processus soit dans l'état A après 4 transitions.

14 On définit une chaîne de Markov à trois états A, B et C par le graphe pondéré ci-dessous et de distribution initiale $\pi_0 = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0 & 0{,}9 \end{pmatrix}$.



a) Déterminer la distribution π_3.
Arrondir au centième.
b) En déduire la probabilité que le processus soit dans l'état B après 3 transitions.

Cours

Exercices
- **15** à **18** (ci-contre)
- **54** à **62**

5 Distributions invariantes

A Notion de distribution invariante

Définition

P est la matrice de transition associée à une chaîne de Markov.
Dire que π est une **distribution invariante** de la chaîne de Markov signifie que $\pi = \pi \times \mathbf{P}$.

Exemple

$P = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}$ est la matrice de transition associée à une chaîne de Markov et $\pi = \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}75 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}75 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}75 \end{pmatrix}$ donc π est une distribution invariante de la chaîne de Markov.

Il existe des chaînes de Markov qui admettent une infinité de distributions invariantes. Par exemple, pour la chaîne de Markov de matrice de transition $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, toute distribution est invariante.

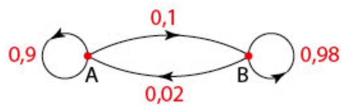
B Détermination d'une distribution invariante

Propriété (admise)

P est la matrice de transition associée à une chaîne de Markov de distribution initiale π_0.
S'il existe un entier naturel $k \geqslant 1$ tel que la matrice P^k ne comporte pas de 0, alors la suite (π_n) des distributions converge vers une distribution π **invariante** et indépendante de la distribution initiale π_0.
De plus, π est l'**unique** distribution invariante de cette chaîne de Markov.

Exemple

Le graphe pondéré ci-contre est associé à une chaîne de Markov.



La matrice de transition $P = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}02 & 0{,}98 \end{pmatrix}$ associée ne comporte pas de 0, ainsi la chaîne admet une unique distribution invariante π.

- **Méthode 1 : avec la relation $\pi \times \mathbf{P} = \pi$**

$\pi = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ avec $x + y = 1$ est la distribution invariante signifie que $\pi = \pi \times P$.

$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}02 & 0{,}98 \end{pmatrix}$ équivaut à $\begin{cases} 0{,}9x + 0{,}02y = x \\ 0{,}1x + 0{,}98y = y \end{cases}$, soit $-0{,}1x + 0{,}02y = 0$

Or $x + y = 1$, donc cette dernière équation est équivalente à $-0{,}12x + 0{,}02 = 0$, c'est-à-dire $x = \frac{1}{6}$ et $y = \frac{5}{6}$.

On en déduit que $\pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$.

- **Méthode 2 : avec l'étude de la distribution π_n**

On note $\pi_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ avec $a_n + b_n = 1$, la distribution après n transitions.

D'après le graphe, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0{,}9a_n + 0{,}02b_n$, c'est-à-dire $a_{n+1} = 0{,}88a_n + 0{,}02$.

On démontre alors que la suite (a_n) converge vers $\frac{1}{6}$ et on obtient $\pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$.

- **Méthode 3 : avec le calcul de $\pi_n = \pi_0 \times \mathbf{P}^n$ pour de grandes valeurs de n**

Avec une distribution initiale π_0, à l'aide de la calculatrice, on calcule $\pi_n = \pi_0 \times P^n$ pour de grandes valeurs de n. L'affichage permet de conjecturer que $\pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$. On vérifie ensuite que $\pi = \pi \times P$, l'unicité de la distribution invariante permet de conclure.

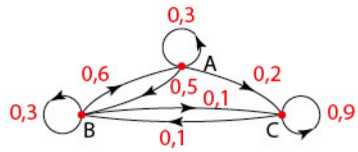
$$[0\ 1]\begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.02 & 0.98 \end{bmatrix}^{250}$$
$$[0.1666667\ 0.8333333]$$

EXERCICES RÉSOLUS

15 Vérifier qu'une distribution est invariante

Le graphe pondéré ci-contre est associé à une chaîne de Markov.
Démontrer qu'une distribution invariante de cette chaîne est :

$$\pi = \begin{pmatrix} \frac{3}{16} & \frac{7}{32} & \frac{19}{32} \end{pmatrix}$$



Solution

$P = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}6 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix}$ est la matrice de transition associée à cette chaîne de Markov. Or $\pi \times P = \pi$ donc π est une distribution invariante de cette chaîne.

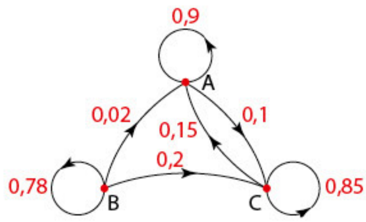
$$\begin{bmatrix} \frac{3}{16} & \frac{7}{32} & \frac{19}{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.6 & 0.3 & 0.1 \\ 0 & 0.1 & 0.9 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 0.1875 & 0.21875 & 0.59375 \end{bmatrix}$$

16 Déterminer une distribution invariante

Une île ne compte que trois villes A, B et C. Ce graphe pondéré représente les évolutions de population entre ces trois villes d'une année à la suivante. On suppose que l'ensemble des habitants de l'île reste inchangé pendant l'étude.

a) Déterminer la matrice de transition P associée à la chaîne de Markov traduisant la situation.

b) Déterminer la distribution invariante π de cette chaîne.



Solution

a) Ci-contre la matrice de transition associée.

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0 & 0{,}1 \\ 0{,}02 & 0{,}78 & 0{,}2 \\ 0{,}15 & 0 & 0{,}85 \end{pmatrix}$$

b) $\pi = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$ avec $x + y + z = 1$ est une distribution invariante signifie que $\pi = \pi \times P$.

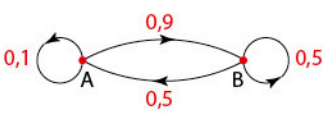
$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0 & 0{,}1 \\ 0{,}02 & 0{,}78 & 0{,}2 \\ 0{,}15 & 0 & 0{,}85 \end{pmatrix} \text{ équivaut à } \begin{cases} 0{,}9x + 0{,}02y + 0{,}15z = x \\ 0{,}78y = y \\ 0{,}1x + 0{,}2y + 0{,}85z = z \end{cases}, \text{ soit } \begin{cases} -0{,}1x + 0{,}15z = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Or $x + y + z = 1$ donc ce dernier système est équivalent à $\begin{cases} -0{,}1x + 0{,}15z = 0 \\ y = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$. On obtient $\pi = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0 & 0{,}4 \end{pmatrix}$.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 15

17 Le graphe pondéré ci-dessous est associé à une chaîne de Markov.



Démontrer qu'une distribution invariante de cette chaîne est $\pi = \begin{pmatrix} \frac{5}{14} & \frac{9}{14} \end{pmatrix}$.

Sur le modèle de l'exercice résolu 16

18 Une entreprise répartit ses employés sur deux étages A et B. D'une année à la suivante, 85 % des employés de l'étage A et 25 % des employés de l'étage B changent d'étage. On suppose que l'ensemble des employés de l'entreprise reste inchangé.

a) Déterminer le graphe pondéré et la matrice de transition associés à la chaîne de Markov traduisant la situation.

b) Déterminer la distribution invariante.

EXERCICE RÉSOLU

19 Déterminer un rang

Cours 4. B

L'entreprise PiscinePlus propose deux types de contrat annuel d'entretien à ses clients, le contrat A et le contrat B. Le président de cette entreprise remarque que chaque année 20 % des particuliers ayant souscrit au contrat A décident de souscrire au contrat B et 12 % des particuliers ayant souscrit au contrat B décident de souscrire au contrat A. On suppose que l'ensemble des clients reste inchangé.

1. Construire le graphe pondéré associé à la chaîne de Markov à deux états A et B traduisant la situation, puis donner la matrice de transition associée en conservant l'ordre alphabétique.

2. $\pi_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ est la distribution de la chaîne après n années à partir de l'année 2019.

a) En 2019, 15 % des clients ont souscrit au contrat A. Déterminer la distribution initiale π_0.

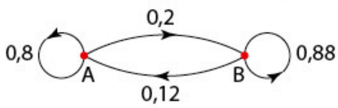
b) Exprimer, pour tout entier naturel n, a_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

3. a) Écrire, en langage Python, une fonction **Rang** dont le paramètre est un seuil s et qui renvoie l'année à partir de laquelle la proportion de clients souscrivant au contrat A est supérieure à s.
La durée de l'étude sera limitée à 15 ans. Saisir cette fonction.

b) L'entreprise PiscinePlus a pour objectif qu'au moins 35 % de ses clients souscrivent au contrat A. Donner l'année à partir de laquelle cet objectif sera atteint.

Solution

1. Voici le graphe pondéré et la matrice de transition P associés.



$$P = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}12 & 0{,}88 \end{pmatrix}$$

2. a) La distribution initiale est $\pi_0 = \begin{pmatrix} 0{,}15 & 0{,}85 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 0{,}8a_n + 0{,}12b_n & 0{,}2a_n + 0{,}88b_n \end{pmatrix}$

Pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0{,}8a_n + 0{,}12b_n$.

3. a) La variable N représente le nombre d'années à partir de 2019. Tant que $A < s$ et $N \leqslant 15$, on calcule les coefficients successifs (A pour a_N et B pour b_N) de la distribution.
À la sortie de la boucle, si $N \leqslant 15$, on affiche l'année cherchée $2019 + N$ sinon on affecte à la variable Année la valeur 0 pour signifier que le seuil s n'a pas été dépassé.

```python
def Rang(s):
    N=0
    A=0.15
    B=0.85
    while A<s and N<=15:
        A=0.8*A+0.12*B
        B=1-A
        N=N+1
    if N<=15:
        Année=2019+N
    else:
        Année=0
    return Année
```

b) On obtient
```
>>> Rang(0.35)
2025
```
Ainsi, l'objectif de l'entreprise sera atteint à partir de 2025.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 19

20 Reprendre l'exercice 19 avec la distribution initiale $\pi_0 = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix}$.

a) Modifier la fonction **Rang**.

b) Obtient-on la même réponse qu'à la question **3. b)** de l'exercice 19 ?

21 Reprendre l'exercice 19 avec la matrice de transition :

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}15 & 0{,}85 \end{pmatrix}.$$

a) Modifier la fonction **Rang**.

b) Obtient-on la même réponse qu'à la question **3. b)** de l'exercice 19 ?

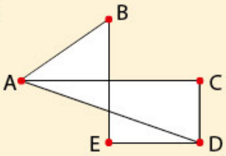
Vocabulaire des graphes

Cours 1

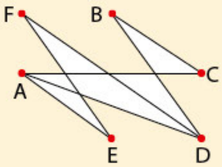
Questions flash — À l'oral

22 Pour chaque graphe, donner oralement son ordre et le degré de chacun de ses sommets.

a)



b)



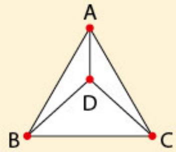
23 On donne ci-dessous le tableau des degrés de chaque sommet d'un graphe à 10 arêtes.

Sommet	A	B	C	D	E	F
Degré	2	3	5		4	2

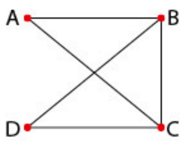
Le nombre manquant est :

(1) 2 **(2)** 3 **(3)** 4

24 Alix affirme que le graphe ci-contre est complet.
A-t-il raison ?
Justifier oralement.



25 **a)** Quel est l'ordre du graphe ci-contre ?
b) Réaliser et compléter le tableau ci-dessous.



Sommet	A	B	C	D
Degré				

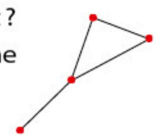
c) Citer deux sommets non adjacents.

26 Un professeur demande à ses élèves de déterminer le degré de chacun des sommets d'un graphe. Ronan répond à l'aide du tableau ci-dessous.

Sommet	A	B	C	D	E	F
Degré	2	4	5	3	4	3

Claire n'est pas d'accord : « Tu t'es trompé car il y a 11 arêtes dans ce graphe ».
a) Expliquer le raisonnement de Claire.
b) Sachant que l'erreur de Ronan vient du sommet E, réaliser et compléter le tableau en corrigeant l'erreur.

27 **a)** Le graphe ci-contre est-il complet ?
b) Dans chaque cas, construire un graphe complet :
• d'ordre 4 ; • d'ordre 5.



28 Dans chaque cas, on donne le degré de chacun des sommets d'un graphe.
Donner l'ordre et le nombre d'arêtes de ce graphe puis en construire un possible qui répond à ces contraintes.

a)

Sommet	A	B	C	D
Degré	3	3	2	2

b)

Sommet	A	B	C	D	E
Degré	1	4	1	2	2

c)

Sommet	A	B	C	D	E	F
Degré	2	2	2	2	2	2

29 **a)** Modéliser cette carte des régions du Mali par un graphe dans lequel les sommets sont les régions et les arêtes traduisent la présence d'une frontière entre deux régions.

b) Le graphe est-il complet ?

30 P_1, P_2, …, P_6 désignent six espèces de poissons. Dans le tableau ci-dessous, une croix signifie que deux espèces ne peuvent cohabiter dans le même milieu.

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
P_1		x		x		
P_2	x		x		x	x
P_3		x		x		
P_4	x		x			
P_5		x				x
P_6		x			x	

Représenter ce tableau par un graphe dans lequel les arêtes indiquent les incompatibilités entre espèces.

31 Au cours d'un tournoi, six équipes ont joué chacune trois matchs.
a) Traduire les résultats ci-dessous par un graphe où chaque équipe est représentée par un sommet et une arête orientée de A vers B signifie « L'équipe A a battu l'équipe B ».

	Gagnant
A-B	A
A-D	D
A-F	A

	Gagnant
C-D	C
C-F	F
C-B	B

	Gagnant
E-F	F
E-B	E
E-D	D

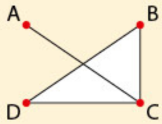
b) Une équipe a-t-elle gagné ses trois matchs ?
c) Une équipe a-t-elle perdu ses trois matchs ?

Matrice d'adjacence d'un graphe

Cours 2

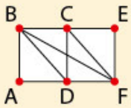
Questions flash — À l'oral

32 M est la matrice d'adjacence associée au graphe ci-contre. Donner oralement les coefficients manquants de M.



$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ \dots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

33 On considère le graphe ci-contre. Citer deux cycles de longueur 4 partant du sommet A.



34 Étienne a saisi la matrice A d'adjacence d'un graphe dont les sommets sont numérotés de 1 à 4. Il obtient l'écran ci-contre.

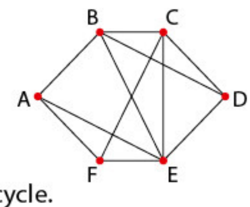
$[A]^3$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 & 2 \\ 4 & 5 & 8 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 2 \\ 5 & 8 & 11 & 5 \end{bmatrix}$$

Le nombre de chemins de longueur 3 reliant 2 à 4 est égal à :

(1) 8 **(2)** 4 **(3)** 5

35 Voici un graphe.



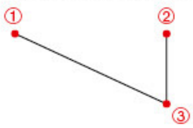
a) Citer deux chemins de longueur 3 reliant A à D.

b) Dans chaque cas, donner la longueur du chemin, dire s'il est fermé et préciser s'il s'agit d'un cycle.

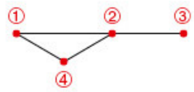
- A-F-C-D-B-E-A
- A-E-C-D-E-A
- B-D-C-F-A-E

36 Déterminer la matrice d'adjacence associée à chacun des graphes suivants.

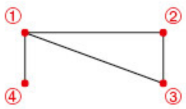
a)



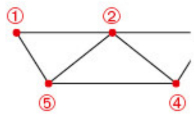
b)



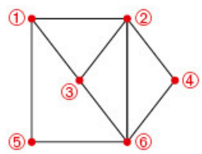
c)



d)



37 G est le graphe ci-contre.



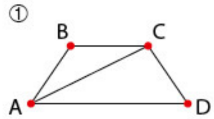
a) Écrire la matrice d'adjacence M associée à ce graphe.

b) À l'aide de la calculatrice, déterminer M^5.

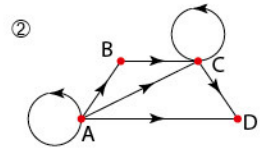
c) En déduire le nombre de chemins de longueur 5 reliant ① à ④.

38 Pour chaque graphe ci-dessous :

①



②



a) déterminer la matrice d'adjacence M ;

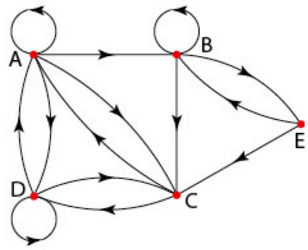
b) déterminer M^3 ;

c) déterminer le nombre de chemins de longueur 3 reliant A à D et les citer.

39 M est la matrice ci-contre. Construire un graphe dont M est la matrice d'adjacence.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

40 Ce graphe représente les différentes possibilités pour passer d'un niveau à un autre (éventuellement le même) d'un jeu vidéo.

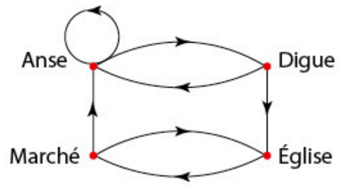


a) Déterminer la matrice d'adjacence M associée à ce graphe en conservant l'ordre alphabétique.

b) À l'aide de la calculatrice, déterminer M^4.

c) Combien existe-t-il de chemins de longueur 4 reliant C à E ? Citer ces chemins.

41 Ce graphe représente les chemins de randonnée de 1 km dans un village de Bretagne.

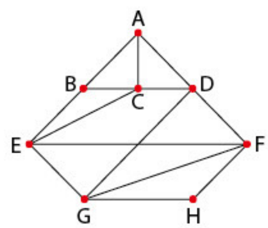


a) Écrire la matrice d'adjacence M du graphe en conservant l'ordre alphabétique des lieux.

b) À l'aide de la calculatrice, déterminer M^5.

c) En déduire le nombre de chemins de randonnée de longueur 5 km allant de la Anse à l'Église.

42 Le graphe ci-contre représente les différentes rues que le maire et ses adjoints doivent parcourir lors du défilé du 14 juillet.



a) Déterminer la matrice d'adjacence M, en prenant les sommets dans l'ordre alphabétique.

b) À l'aide de la calculatrice, déterminer M^7.

c) Combien existe-t-il de chemins de longueur 7 reliant la mairie A au stade G ?

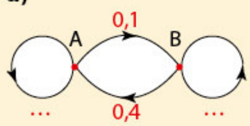
Chaînes de Markov et distributions

Cours 3

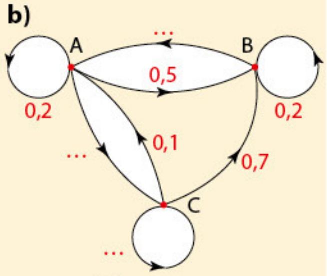
Questions flash À l'oral

43 Pour chaque graphe pondéré, donner oralement les probabilités manquantes.

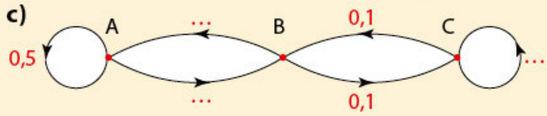
a)



b)



c)



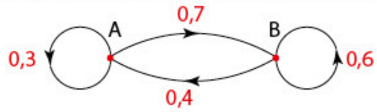
44 P est la matrice de transition associée à une chaîne de Markov à deux états A et B en conservant l'ordre alphabétique et $P^5 = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \\ 0,05 & 0,95 \end{pmatrix}$.

La probabilité de passer de l'état A à l'état B en 5 transitions est égale à :

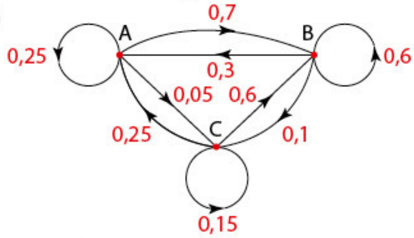
(1) 0,7 **(2)** 0,05 **(3)** 0,95

45 Pour chaque graphe pondéré, écrire la matrice de transition associée en conservant l'ordre alphabétique.

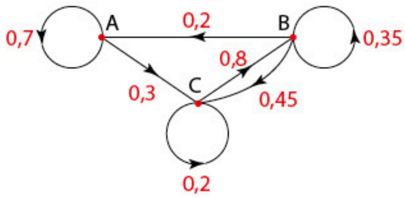
a)



b)



c)



46 Dans chaque cas, construire un graphe pondéré associé à la matrice de transition donnée.

a) $P = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,9 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$ **b)** $P = \begin{pmatrix} 0,14 & 0,16 & 0,7 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0,3 & 0,1 & 0,6 \end{pmatrix}$

47 Le chat Melkio a pour habitude de dormir soit sur une armoire soit dans son bac.

- S'il dort une nuit sur une armoire, la probabilité qu'il dorme sur une armoire la nuit suivante est égale à 0,3.
- S'il dort une nuit dans son bac, la probabilité qu'il dorme dans son bac la nuit suivante est égale à 0,9.

Traduire l'énoncé à l'aide d'une chaîne de Markov, puis déterminer le graphe pondéré et la matrice de transition associés.

48 $P = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \\ 0,18 & 0,82 \end{pmatrix}$ est la matrice de transition associée à une chaîne de Markov à deux états A et B en conservant l'ordre alphabétique.

a) Déterminer P^4.

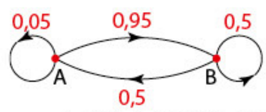
b) En déduire la probabilité de passer de l'état A à l'état B en 4 transitions. *Arrondir au centième.*

49 $P = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0,1 & 0,1 & 0,8 \end{pmatrix}$ est la matrice de transition associée à une chaîne de Markov à trois états A, B et C en conservant l'ordre alphabétique.

a) Déterminer P^5.

b) En déduire la probabilité de passer de l'état C à l'état C en 5 transitions. *Arrondir au centième.*

50 Le graphe G ci-contre est associé à une chaîne de Markov à deux états A et B.

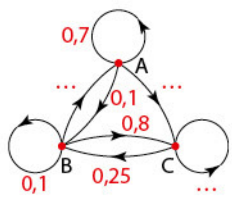


Déterminer la probabilité de passer de l'état A à l'état B en 6 transitions. *Arrondir au centième.*

51 $P = \begin{pmatrix} 0,65 & 0,35 \\ 0,05 & 0,95 \end{pmatrix}$ est la matrice de transition associée à une chaîne de Markov de distribution initiale $\pi_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer la distribution π_4.

52 $P = \begin{pmatrix} 0,01 & 0,8 & 0,19 \\ 0,01 & 0,95 & 0,04 \\ 0 & 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$ est la matrice de transition associée à une chaîne de Markov de distribution initiale $\pi_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$. Déterminer la distribution π_2.

53 **a)** Recopier et compléter ce graphe pondéré associé à une chaîne de Markov à 3 états.



b) Déterminer la matrice de transition P associée en conservant l'ordre alphabétique.

c) La distribution initiale est $\pi_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer la distribution π_7. *Arrondir au centième.*

Distributions invariantes

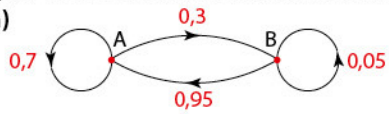
Cours 4

Questions flash À l'oral

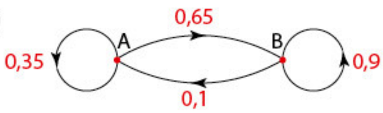
54 $P = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$ est la matrice de transition associée à une chaîne de Markov.
Fred affirme : « La distribution $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$ est invariante. » A-t-il raison ?

55 $\pi = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ est la distribution invariante d'une chaîne de Markov à deux états et le couple $(x\,;y)$ est solution du système $\begin{cases} -0{,}2x + 0{,}1y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$.
Alors la distribution π est égale à :
(1) $\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}$ **(2)** $\begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \end{pmatrix}$ **(3)** $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

56 Dans chaque cas, le graphe pondéré est associé à une chaîne de Markov.
Déterminer la matrice de transition P associée et indiquer si π est la distribution invariante de la chaîne.

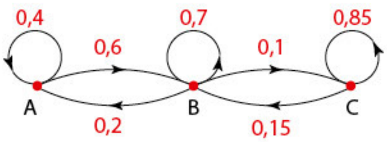
a)


$\pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{6}{7} \end{pmatrix}$

b)


$\pi = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$

57 Voici le graphe pondéré associé à une chaîne de Markov.



Parmi les trois distributions proposées, une seule est la distribution invariante de la chaîne. Laquelle ?
(1) $\pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ **(2)** $\pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ **(3)** $\pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{5} & 0 \end{pmatrix}$

58 Nadia affirme : « La distribution invariante du graphe ci-contre est $\pi = \begin{pmatrix} 0{,}625 & 0{,}375 \end{pmatrix}$. »

Sophie lui répond : « Tu as dû te tromper, regarde ce que j'obtiens à la calculatrice. »

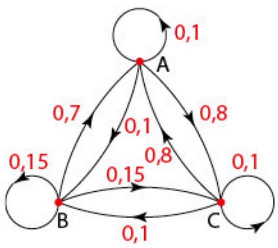
```
[A]
                [0.4 0.6]
                [0.7 0.3]
[B]
             [0.625 0.375]
[B]*[A]
           [0.5125 0.4875]
```

Expliquer le raisonnement de Sophie.

59 Le graphe pondéré ci-contre est associé à une chaîne de Markov.

a) Déterminer la matrice de transition associée.
b) Démontrer que $\pi = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ est une distribution invariante de la chaîne si, et seulement si $(x\,;y)$ est solution du système : $\begin{cases} -0{,}95x + 0{,}99y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$.
c) Résoudre ce système et conclure pour π.

60 Le graphe pondéré ci-contre est associé à une chaîne de Markov.



a) Déterminer la matrice de transition associée.
b) Démontrer que $\pi = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$ est une distribution invariante de la chaîne si, et seulement si, $(x\,;y\,;z)$ est solution du système : $\begin{cases} -0{,}9x + 0{,}7y + 0{,}8z = 0 \\ 0{,}1x - 0{,}85y + 0{,}1z = 0. \\ x + y + z = 1 \end{cases}$
c) Résoudre ce système et conclure pour π.

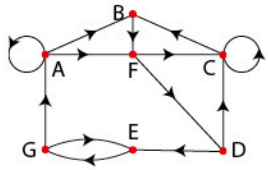
61 Les services commerciaux d'une grande surface de produits alimentaires ont défini un profil de client qui a été appelé « consommateur bio ».
Sur la base d'observations réalisées les années précédentes, on a constaté que 90 % des clients « consommateur bio » maintenaient cette pratique l'année suivante et que 15 % des clients n'ayant pas le profil de « consommateur bio » entraient dans cette catégorie l'année suivante.
On suppose dans le modèle que cette évolution se poursuit d'une année à la suivante à partir de 2019 et que l'ensemble des clients reste inchangé.
a) Construire le graphe pondéré associé à la chaîne de Markov traduisant cette situation avec pour sommets B : « Le client est consommateur bio » et $\overline{B}$.
b) Déterminer la matrice de transition associée.
c) Déterminer la distribution invariante de cette chaîne.

62 $P = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}9 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$ est la matrice de transition associée à une chaîne de Markov de distribution initiale $\pi_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$. Zélie a saisi les matrices P en A et π_0 en B dans sa calculatrice et a obtenu les résultats ci-contre.

```
[B]*[A]^100
               [0.25 0.75]
[B]*[A]^101
               [0.25 0.75]
```

Conjecturer la distribution invariante de la chaîne. Vérifier.

63 QCM Dans chaque cas, donner la réponse exacte sans justifier.

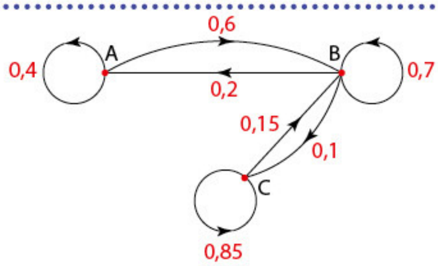


On considère le graphe orienté ci-contre.
M est la matrice d'adjacence associée à ce graphe en conservant l'ordre alphabétique.

		A	B	C	D
1	L'ordre du graphe est …	6	13	7	26
2	La matrice M …	est symétrique	contient le chiffre 2	possède une diagonale de 0	contient 13 fois le chiffre 1
3	La matrice M^3 …	ne contient pas de 0	est symétrique	ne contient pas de 3	est égale à M^4
4	Le graphe possède 5 chemins de longueur 3 …	partant de B	arrivant à E	partant d'un sommet en y revenant	partant de C sans y revenir

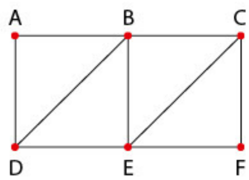
64 QCM Dans chaque cas, donner la (ou les) réponse(s) exacte(s) sans justifier.

Chaque année, un club de randonnée élabore des circuits de trois niveaux différents : A « Débutant », B « Intermédiaire » et C « Confirmé ». Le graphe pondéré ci-contre montre l'évolution d'une année à la suivante de la répartition des adhérents dans ces niveaux à partir de l'année 2018. Pour tout entier naturel n, π_n est la distribution de la chaîne de Markov associée après n années et $\pi_0 = \begin{pmatrix}0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2\end{pmatrix}$ est la distribution initiale dans l'ordre alphabétique.



		A	B	C	D
1	En 2018, le club comptait …	20 % d'adhérents de niveau A	50 % d'adhérents de niveau B	40 % d'adhérents de niveau A	moins de 50 % d'adhérents de niveau C
2	En 2024, le pourcentage d'adhérents …	de niveau A sera environ 17,8 %	de niveau B sera environ 52,3 %	de niveau B sera environ 52,88 %	de niveau C sera environ 29,9 %
3	$\pi = \begin{pmatrix}x & y & z\end{pmatrix}$ est la distribution invariante de la chaîne. Alors …	$x + y + z = 1$	$0{,}4x + 0{,}6y = 0$	$-0{,}6x + 0{,}2y = 0$	$0{,}6x - 0{,}3y + 0{,}15z = 0$
4	À long terme, le pourcentage d'adhérents de niveau B …	sera le même qu'en 2018	sera 3 fois plus élevé que celui des adhérents de niveau A	sera environ égal à 33,33 %	dépend de π_0

65 Vrai/Faux Dans chaque cas, dire si l'affirmation est vraie ou fausse en justifiant.



1 On considère le graphe G ci-contre.
Affirmation : le graphe G est connexe et complet.

2 On considère le chemin A-B-E-F-C-E-D-A issu du graphe G ci-contre.
Affirmation : ce chemin est un cycle.

Vérifiez vos réponses : p. 293

Démontrer et raisonner

66 Rédiger une démonstration

On démontre la propriété suivante dans le cas de deux états A et B.

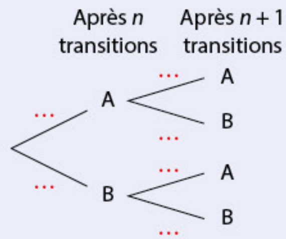
> P est la matrice de transition associée à une chaîne de Markov de distribution initiale π_0. Alors, pour tout entier naturel n, la distribution π_n après n transitions vérifie $\pi_{n+1} = \pi_n \times \mathrm{P}$ et pour tout $n \geqslant 1$, $\pi_n = \pi_0 \times \mathrm{P}^n$.

$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est la matrice de transition associée à la chaîne de Markov en conservant l'ordre alphabétique avec a, b, c, d dans l'intervalle $[0\,;1]$ tels que $a + b = 1$ et $c + d = 1$.
Pour tout entier naturel n, $\pi_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ est la distribution après n transitions.

1. Rédiger la démonstration en suivant et complétant le guide.

(1) Rappeler la définition de chacun des coefficients a, b, c et d de la matrice P :
a est la probabilité de passer de l'état A à l'état …, b est ….

(2) Reproduire et compléter l'arbre ci-contre avec les nombres réels a_n, b_n, a, b, c et d.



(3) Utiliser la formule des probabilités totales :
- la probabilité d'être dans l'état A après $n+1$ transitions est $a_{n+1} = \ldots$
- la probabilité d'être dans l'état B après $n+1$ transitions est $b_{n+1} = \ldots$

Alors $\pi_{n+1} = \ldots$.

(4) Calculer d'autre part $\pi_n \times \mathrm{P}$: $\begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \ldots$.

(5) Conclure : pour tout entier naturel n, $\pi_{n+1} = \ldots$.

2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $\pi_n = \pi_0 \times \mathrm{P}^n$.

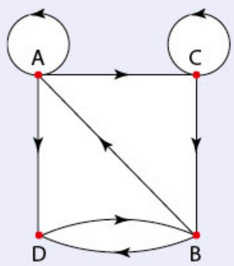
67 Démontrer par récurrence et raisonner

1. On donne la matrice $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Vérifier que $\mathrm{M}^4 = 2\mathrm{M}^3$.

2. On se propose de démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, la propriété $\mathrm{P}(n)$: « $\mathrm{M}^n = 2^{n-3} \times \mathrm{M}^3$ » est vraie.
- **Initialisation :** vérifier que la propriété P(3) est vraie.
- **Hérédité :** on suppose que pour un entier naturel $k \geqslant 3$, $\mathrm{P}(k)$ est vraie.

Écrire alors cette hypothèse de récurrence.
Quelle propriété doit-on alors démontrer ? L'écrire.
Effectuer la démonstration.
- **Conclusion :** écrire la conclusion du raisonnement par récurrence.

3. Le graphe ci-contre représente un parcours de jeu auquel participent 100 joueurs.
Les arêtes représentent des tronçons de longueurs égales et les sommets des lieux pour se repérer. L'organisateur souhaite que chaque joueur aille du départ D à l'arrivée A par des parcours différents mais de même longueur.
À l'aide des questions précédentes, déterminer la longueur minimum de ces chemins.



Vidéo
JAICOMPRIS.COM
Toutes les démonstrations au programme en vidéo

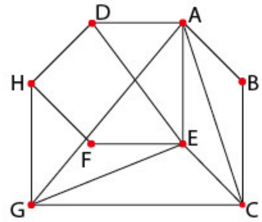
Liste des démonstrations :
- Nombre de chemins de longueur n reliant deux sommets d'un graphe et coefficients de M^n.
- Pour une chaîne de Markov, probabilité de passer de l'état i à l'état j en n transitions.

Conseil
Effectuer cette vérification avec la calculatrice.

Conseil
Le coefficient situé en ligne 4 et colonne 1 de M^n est le nombre de parcours de longueur n allant de D à A.

Déterminer un nombre de chemins

68 Le graphe ci-contre représente le plan d'un parc pour enfants où les sommets sont les différents jeux proposés et les arêtes les sentiers les reliant.



a) Déterminer un sous-graphe complet d'ordre 4. Que cela signifie-t-il concrètement ?

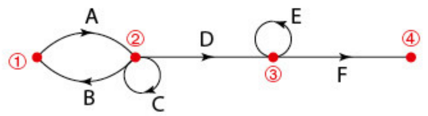
b) Déterminer le nombre de possibilités d'aller du jeu E au jeu F en empruntant 3 sentiers.

c) Déterminer le nombre de possibilités de partir du jeu E sans y revenir en empruntant 3 sentiers.

d) Déterminer le nombre de possibilités de partir du jeu E et d'y revenir en empruntant 3 sentiers.

e) Peut-on toujours aller d'un jeu à l'autre en empruntant 3 sentiers ?

69 Une succession de lettres constitue un code reconnu par le graphe ci-dessous si ces lettres se succèdent sur un chemin du graphe en partant du sommet ① et en arrivant au sommet ④.



Les codes ADEF et ACCDF sont ainsi des codes reconnus, contrairement au code ADB.

1. Parmi les trois codes suivants, lequel est reconnu par le graphe ?

- ACDE
- BCDEF
- ACDEEF

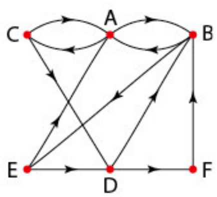
2. Pour accéder à sa messagerie, Alice souhaite un code à 5 lettres reconnu par le graphe.

a) Déterminer la matrice d'adjacence associée.

b) Déterminer le nombre de codes à 5 lettres reconnus par le graphe et les citer.

70 Le graphe ci-contre représente un site internet comprenant six pages.

Les arêtes représentent les liens hypertexte permettant de passer de l'une à l'autre.



Un virus affecte la page A et se transmet aux autres pages en cliquant sur un lien hypertexte les liant.

Combien y a-t-il de possibilités que la page F ne soit infectée qu'au cinquième clic ?

71 Moïra organise une chasse au trésor avec cinq équipes. Voici la carte où sont indiqués les différents lieux et chemins de randonnée. D est le point de départ.

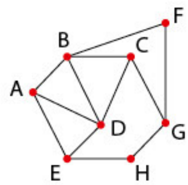
Moïra souhaite que chacune des cinq équipes ait un parcours différent pour arriver au trésor, situé au point T, tout en ayant le même nombre de chemins de randonnée traversés, éventuellement plusieurs fois.

a) Construire le graphe orienté représentant les différents lieux et chemins de randonnée.

b) Déterminer la matrice d'adjacence associée.

c) Quelle est la longueur minimum des chemins à parcourir par chaque équipe afin qu'elles aient toutes un parcours différent et de même longueur ?

72 Une compagnie aérienne utilise huit aéroports que l'on nomme A, B, C, D, E, F, G et H. Entre certains de ces aéroports, la compagnie propose des vols dans les deux sens.

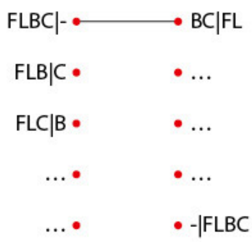


Cette situation est représentée par le graphe ci-dessus, dans lequel les sommets représentent les aéroports, et les arêtes les liaisons assurées dans les deux sens par la compagnie. Un voyageur souhaite aller de l'aéroport B à l'aéroport H.

a) Déterminer le nombre minimum de vols que le voyageur doit emprunter.

b) Donner tous les trajets possibles de ce voyageur empruntant trois vols successifs.

73 Un fermier (F) doit aider un loup (L), une biche (B) et un cheval (C) à traverser une rivière. Il ne peut faire traverser qu'un seul animal à la fois en sachant que ni le loup et la biche ni le loup et le cheval ne doivent se retrouver seuls.



On modélise la situation par un graphe dont les sommets sont les couples de la forme FLB|C signifiant que le fermier, le loup et la biche sont sur la rive gauche et le cheval sur l'autre rive.

a) Compléter le graphe par les sommets possibles et les arêtes représentant les transports possibles.

b) Déterminer le nombre minimal de transports permettant la traversée et en proposer une.

Étudier une chaîne de Markov à court terme

74 Élena a souscrit un abonnement téléphonique avec un forfait de 30 Go par mois. Si à la fin d'un mois, elle a dépassé son forfait, alors la probabilité qu'elle le dépasse le mois suivant est 0,6. Si à la fin d'un mois, elle n'a pas dépassé son forfait, alors la probabilité qu'elle le dépasse le mois suivant est 0,2. Initialement, Élena n'a pas dépassé son forfait.

a) Construire le graphe pondéré associé à la chaîne de Markov décrivant cette situation.

b) Préciser la distribution initiale π_0.

c) Quelle est la probabilité qu'Élena ait dépassé son forfait après 3 mois ?

d) Déterminer le mois à partir duquel la probabilité qu'Élena dépasse son forfait est supérieure à 0,33.

75 Algo python

Jeanne étudie l'évolution des inscriptions de ses camarades au club « jeux de société » de son école. Chaque année, un certain pourcentage d'inscrits renouvellent leur inscription et un autre de non inscrits s'inscrivent l'année suivante. On suppose que l'ensemble des écoliers reste inchangé. La fonction ci-dessous écrite en langage Python renvoie le rang de l'année à partir duquel plus de 65 % des écoliers sont inscrits au club.

a) Compléter ce programme dans lequel A et B sont les variables contenant les proportions d'écoliers respectivement inscrits et non-inscrits au club.

```
def Rang(n):
    N=0
    A=0.05
    B=0.95
    while A<
        A=0.9*A+0.2*B
        B=
        N=
    return N
```

b) Déterminer le pourcentage d'inscrits renouvelant leur inscription au club d'une année à la suivante.

c) Construire le graphe pondéré associé à la chaîne de Markov décrivant cette situation et préciser la distribution initiale.

76 Voici le graphe pondéré associé à une chaîne de Markov modélisant l'évolution de la répartition des téléspectateurs entre deux émissions concurrentes A et B d'une semaine à la suivante. Au début de l'étude, 70 % de ces téléspectateurs regardent l'émission A. On suppose que l'ensemble des téléspectateurs reste inchangé.

Déterminer la semaine à partir de laquelle l'audience de l'émission B dépassera celle de l'émission A.

Étudier à long terme à l'aide de systèmes

77 Chaque année, 30 % des animaux d'une espèce quittent leur milieu A et migrent vers un nouveau milieu B, alors que 40 % de ceux du milieu B le quittent et migrent vers le milieu A. On suppose que durant ces années, la population d'animaux étudiée dans ces deux milieux reste inchangée.

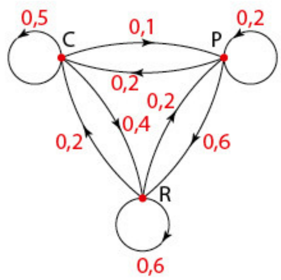
a) Construire le graphe pondéré associé à la chaîne de Markov à deux états traduisant la situation.

b) En résolvant un système d'équations, déterminer la répartition des animaux dans les deux milieux à long terme.

78 Algo python

On étudie l'effet de la présence d'un requin bleu dans une zone dans laquelle ses proies possibles sont des calmars (C), des poissons (P) et des petits requins (R). Le choix de la proie ne dépend que de celle choisie précédemment.

On modélise la situation par une chaîne de Markov dont le graphe pondéré associé est donné ci-contre. Ainsi, après avoir mangé un calmar, la probabilité que le requin bleu mange un poisson la fois suivante est 0,1.



Au début de l'étude, le requin bleu a choisi un calmar comme proie.

1. a) Compléter la fonction écrite en Python ci-dessous qui retourne la distribution après N repas lorsque la distribution initiale est $\pi_0 = (C \quad P \quad R)$.

```
def Requin(C,P,R,N):
    for j in range(N):
        Cprec=C
        Pprec=P
        Rprec=R
        C=0.5*Cprec+0.2*Pprec+0.2*Rprec
        P=
        R=
    return(C,P,R)
```

b) Saisir ce programme, puis le tester pour différentes valeurs de N assez grandes.

2. a) Déterminer la matrice de transition associée.

b) $\pi = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$ est une distribution invariante de la chaîne. Déterminer un système d'équations admettant $(x\,;y\,;z)$ comme solution et le résoudre.

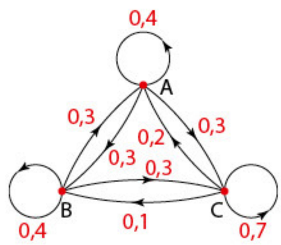
3. Comparer les résultats des questions **1. b)** et **2. b)**.

Étudier à long terme

79 Afin de présider un club, deux membres A et B s'opposent aux élections tous les ans.
En 2019, A l'a emporté avec 70 %.
On admet qu'à partir de l'année 2019, 14 % des électeurs votant pour A et 6 % des électeurs votant pour B changeront leur vote à l'élection suivante. On suppose que l'ensemble des électeurs reste inchangé.
On choisit un électeur au hasard et on modélise la situation par une chaîne de Markov à deux états A : « L'électeur vote A » et B : « L'électeur vote B ».
1. Déterminer la matrice de transition associée à cette chaîne en conservant l'ordre alphabétique.
2. n est un nombre entier naturel et $\pi_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ est la distribution de la chaîne après n années.
Démontrer que pour tout entier naturel n,
$$a_{n+1} = 0{,}8a_n + 0{,}06.$$
3. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = a_n - 0{,}3$.
a) Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,8. Préciser son premier terme.
b) En déduire l'expression de u_n puis de a_n en fonction de n et déterminer la limite de la suite (a_n).
c) En déduire la distribution invariante et l'interpréter.

80 Bruna participe à une compétition de tir à l'arc. Lorsqu'elle atteint la cible à un tir, la probabilité qu'elle atteigne la cible au tir suivant est égale à 0,9.
Lorsqu'elle a manqué la cible à un tir, elle se déconcentre et la probabilité qu'elle atteigne la cible au tir suivant est égale à 0,4.
Initialement, elle a autant de chances d'atteindre la cible que de la manquer.
On modélise la situation par une chaîne de Markov à deux états A : « Elle atteint la cible » et $\overline{A}$.
1. Donner la matrice de transition P associée avec dans l'ordre A, puis $\overline{A}$.
2. n est un nombre entier naturel et $\pi_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ est la distribution de la chaîne après n tirs.
Démontrer que pour tout entier naturel n,
$$a_{n+1} = 0{,}5a_n + 0{,}4.$$
3. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = a_n - 0{,}8$.
a) Justifier que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,5. Préciser son premier terme.
b) En déduire l'expression de u_n, puis de a_n en fonction de n et déterminer la limite de la suite (a_n).
4. a) Démontrer que la suite (a_n) est croissante.
b) La probabilité que Bruna atteigne la cible peut-elle dépasser 0,85 ? Justifier.

81 Les produits référencés A, B et C se partagent le marché. Un consommateur utilise, chaque mois, un seul de ces produits. Initialement, le produit A possède 10 % des parts du marché contre 20 % pour le produit B et 70 % pour le produit C. Une enquête a permis d'obtenir le graphe pondéré suivant indiquant le comportement des consommateurs d'un mois au suivant.
On choisit au hasard un consommateur de ces produits et on modélise la situation par une chaîne de Markov à trois états A (resp. B, C) : « Le consommateur a choisi le produit A (resp. B, C) ».



1. Déterminer la matrice de transition associée.
2. n est un nombre entier naturel et $\pi_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$ est la distribution après n mois.
a) Déterminer la distribution initiale π_0.
b) Pour tout entier naturel n, exprimer a_{n+1}, b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
c) En déduire que, pour tout entier naturel n,
$$U_{n+1} = AU_n + B$$
où $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ et A et B sont deux matrices à préciser.
3. a) Déterminer une matrice colonne C telle que :
$$C = AC + B.$$
b) Pour tout entier naturel n, on pose :
$$V_n = U_n - C.$$
Démontrer que pour tout entier naturel n, $V_{n+1} = AV_n$, puis exprimer V_n en fonction de V_0.
4. R est la matrice $= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.
a) Calculer $D = R^{-1} \times A \times R$.
b) Déterminer l'expression de D^n, puis celle de A^n en fonction de n.
c) En déduire l'expression de la matrice colonne V_n en fonction de n.
d) Déterminer alors la distribution π_n en fonction de n.
e) En déduire la répartition des parts à long terme.

82 Une coccinelle se pose soit en un point A soit en un point B. Le graphe pondéré ci-dessous est associé à la chaîne de Markov à deux états A et B pour laquelle toute transition correspondant au vol de la coccinelle est équiprobable.

1. a) Déterminer la matrice de transition P associée à cette chaîne de Markov.

b) Calculer P^2, P^3 et P^4 puis conjecturer une expression de P^n pour $n \geqslant 1$.

c) Démontrer par récurrence la conjecture précédente.

2. a) Déterminer la limite de chacun des coefficients de la matrice P^n.

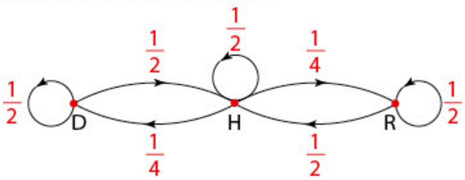
b) En déduire la distribution invariante π de la chaîne.

83 On suppose que l'hérédité d'une maladie chez un individu est déterminée par deux gènes A et B.

Un individu est dans l'état :

- dominant (D) s'il possède l'association AA ;
- hybride (H) s'il possède l'association AB (ou BA) ;
- récessif (R) s'il possède l'association BB.

Le graphe pondéré ci-dessous est associé à la chaîne de Markov traduisant l'évolution de l'état d'un individu d'une génération à la suivante.



1. a) Déterminer la matrice de transition P associée en conservant l'ordre alphabétique.

b) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$P^n = \begin{pmatrix} \dfrac{2^{n-1}+1}{2^{n+1}} & \dfrac{1}{2} & \dfrac{2^{n-1}-1}{2^{n+1}} \\ \dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{2^{n-1}-1}{2^{n+1}} & \dfrac{1}{2} & \dfrac{2^{n-1}+1}{2^{n+1}} \end{pmatrix}$$

c) Interpréter le coefficient en ligne 1 et colonne 2 de la matrice P^n pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

2. a) Déterminer la limite de chacun des coefficients de la matrice P^n.

b) En déduire la distribution invariante π de la chaîne et interpréter le résultat.

84 Chaque jour, Alice rend visite à son ami. Elle peut s'y rendre par trois sentiers A, B ou C.

On remarque que :

- lorsqu'elle prend le sentier A un jour, elle prend le lendemain le sentier B une fois sur dix et le sentier C quatre fois sur dix ;
- lorsqu'elle prend le sentier B un jour, elle prend le lendemain le sentier A trois fois sur dix et le sentier C deux fois sur dix ;
- lorsqu'elle prend le sentier C un jour, elle prend le lendemain le sentier A trois fois sur dix et le sentier B deux fois sur dix.

Un jour, Alice a pris le sentier A.

1. Construire le graphe pondéré associé à la chaîne de Markov à trois états A, B et C traduisant la situation.

2. a) Déterminer la distribution π_n après n jours pour une valeur de n assez grande.

b) Conjecturer la valeur de la distribution invariante π, puis le vérifier.

3. L'ami d'Alice affirme : « Après un grand nombre de jours, celle-ci a une préférence pour le sentier C ».

A-t-il raison ? Justifier.

S'ENTRAÎNER À LA LOGIQUE → p. 290

85 Implication et réciproque

Dans chaque cas, l'implication énoncée R est vraie. Rédiger sa réciproque et dire si celle-ci est vraie ou fausse.

a) R : « Si P est la matrice de transition associée à une chaîne de Markov, alors ses coefficients sont compris entre 0 et 1. »

b) $\pi_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$ est la distribution après n transitions d'une chaîne de Markov admettant une distribution invariante.

R : « Si la distribution invariante est $\pi = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}7 & 0{,}2 \end{pmatrix}$, alors la limite de la suite (a_n) est 0,1. »

c) R : « Si un graphe non orienté possède 7 arêtes, alors la somme des degrés de ses sommets est égale à 14. »

86 Avec un contre-exemple

Dans chaque cas, l'implication est fausse. Infirmer celle-ci à l'aide d'un contre-exemple.

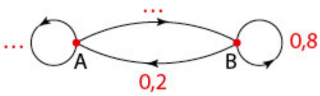
a) Si un graphe est connexe, alors il est complet.

b) Si un chemin d'un graphe non-orienté est fermé, alors ce chemin est un cycle.

87 Prendre des initiatives

Chercher | Représenter | Raisonner

Une ville dont l'ensemble des habitants est supposé stable se divise en deux zones A et B. Le graphe ci-dessous indique les mouvements de population.



Est-il possible que, à long terme, la population de la zone A représente moins de 10 % de la population totale ?

88 Word of mouth

Représenter | Calculer | Communiquer

We are studying the spread of information from one person to another. Let there be, for a piece of information received, the probability of communicating this information exactly as received (E) set at 0,9 and the probability of spreading contrary information $(\overline{E})$ set at 0,1. We are modeling the situation by a two-state Markov chain E and $\overline{E}$.

a) Build a weighted graph associated with the Markov chain.

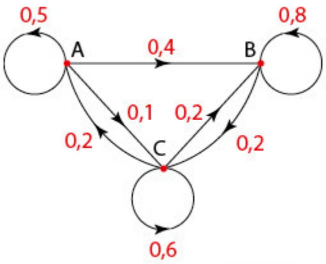
b) Describe the associated transition matrix P.

c) Determine and interpret the invariant distribution.

89 Imaginer une stratégie

Chercher | Calculer

Voici ci-contre le graphe pondéré associé à une chaîne de Markov à trois états A, B et C. Déterminer la distribution invariante de cette chaîne.



90 Rechercher des informations

Narration de recherche

Raisonner | Communiquer

Rédiger les différentes étapes de la recherche, sans omettre les fausses pistes et les changements de méthode.

Problème

G est un graphe connexe et sans boucle dont la matrice d'adjacence M est telle que :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Déterminer le nombre d'arêtes du graphe.

91 Choisir sa démarche

Problème ouvert

Modéliser | Représenter | Calculer

Une île isolée subit une épidémie et chaque habitant peut être dans l'un des trois états suivants : sain (S), infecté (I) ou immunisé (R).

Des études montrent que, d'un mois au suivant, chaque habitant peut voir son état changer selon les règles suivantes :

- s'il est immunisé, il le reste avec la probabilité 0,8 ou devient sain avec la probabilité 0,2 ;
- s'il est infecté, il le reste avec la probabilité 0,1 ou devient immunisé avec la probabilité 0,9 ;
- s'il est sain, il le reste avec la probabilité 0,3 ou devient infecté avec la probabilité 0,7.

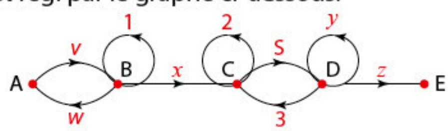
Au début de l'épidémie, 1 % de la population de cette île était infectée et 5 %, immunisée. On suppose que l'ensemble des habitants de l'île reste inchangé.

Déterminer la répartition de la population dans les trois états à long terme en utilisant la méthode de son choix.

92 Trouver assez de mots de passe

Raisonner | Communiquer

Un site de vente en ligne propose à chacun de ses 800 clients un mot de passe. Le gestionnaire de ce site souhaite que ce mot de passe soit différent pour chaque client et de même longueur. La création de ce mot de passe est régi par le graphe ci-dessous.



Cela signifie qu'un mot de passe valide est une succession de lettres ou chiffres le long d'un chemin qui part du sommet A et se termine au sommet E, par exemple : *v*1*x*2S*yz* est un mot de passe valide de longueur 7.

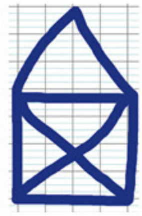
a) Proposer un mot de passe valide de longueur 8.

b) Déterminer la matrice d'adjacence M associée à ce graphe en conservant l'ordre alphabétique.

c) Déterminer la longueur minimale du mot de passe à créer pour satisfaire le souhait du gestionnaire.

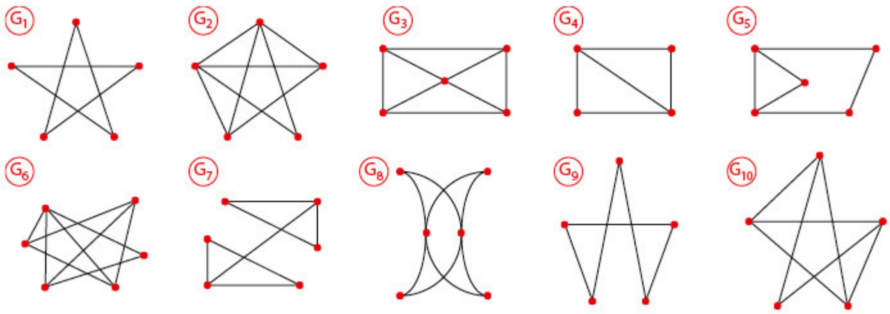
93 Étude de graphes eulériens

1. Une première approche



Le dessin ci-contre peut être tracé sans lever le crayon et sans repasser plus d'une fois sur le même trait, c'est-à-dire que l'on peut trouver une chaîne qui emprunte **chaque** arête du graphe **une et une seule fois**. Une telle chaîne est appelée une **chaîne eulérienne**, si de plus celle-ci est fermée, il s'agit d'un **cycle eulérien**.

a) Parmi les dix graphes connexes ci-dessous, lesquels admettent une chaîne eulérienne, et dans ce cas, dire s'il s'agit d'un cycle eulérien.



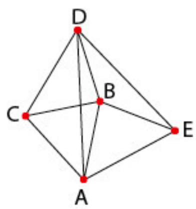
b) Déterminer le nombre de sommets de degré impair de chacun de ces graphes, puis émettre une conjecture pour qu'un graphe connexe admette une chaîne eulérienne et plus précisément un cycle eulérien.

On admet alors le théorème d'Euler suivant :

- Un graphe connexe admet une chaîne eulérienne si, et seulement si, le nombre de sommets de degré impair est 0 ou 2. De plus, les extrémités de cette chaîne sont les sommets de degré impair s'ils existent.
- Un graphe connexe admet un cycle eulérien si, et seulement si, tous ses sommets sont de degré pair.

2. Jeu pour enfants

On considère un espace de jeu réservé à des enfants. Les enfants peuvent se déplacer sur cinq plates-formes notées A, B, C, D et E. Ces plates-formes sont reliées entre elles par un certain nombre de rampes. On représente cet espace de jeu par le graphe G ci-contre.



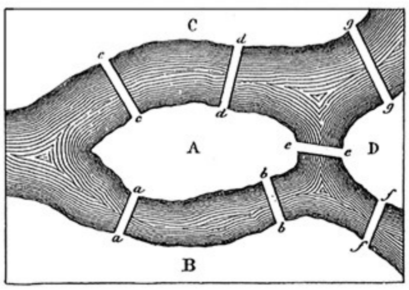
a) Peut-on partir de la plateforme C et rejoindre la plateforme E en utilisant toutes les rampes, et sans passer deux fois par la même rampe ? Si oui, proposer un tel chemin.

b) Où peut-on placer une nouvelle rampe pour obtenir l'existence d'un chemin qui, partant d'une plate-forme donnée, emprunte une et une seule fois chaque rampe pour revenir à la plate-forme initiale ? Justifier la réponse.

3. Les sept ponts de Königsberg

Ce problème, résolu par Euler en 1741, a donné naissance à la théorie des graphes :

À Königsberg, en Poméranie, il y a une île appelée Kneiphof ; le fleuve qui l'entoure se divise en deux bras, sur lesquels sont jetés les sept ponts a, b, c, d, e, f, g. Cela posé, peut-on arranger son parcours de telle sorte que l'on ne puisse y passer qu'une seule fois ?



a) Construire un graphe où les sommets sont les quatre rives A, B, C, D et les arêtes les sept ponts les reliant.

b) Résoudre le problème.

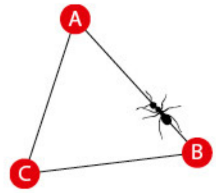
94 Marche aléatoire sur un graphe – Étude asymptotique

Une **marche aléatoire** est une chaîne de Markov pour laquelle la transition d'un état à un autre se fait de manière aléatoire.

1. Marche aléatoire sur un triangle

Une fourmi se déplace sur les bords d'un triangle ABC et change de sommet à chaque seconde de manière aléatoire.

On se propose d'étudier la position de la fourmi au cours du temps.



a) Construire le graphe pondéré associé à la chaîne de Markov à trois états A, B et C traduisant la situation.

b) Déterminer la matrice de transition P associée.

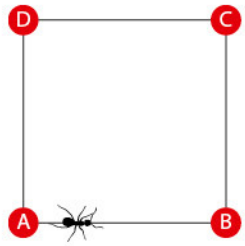
c) Déterminer la distribution invariante π de cette chaîne.

d) En déduire la probabilité que la fourmi soit au sommet A à long terme.

Les chaînes de Markov ne se limitent pas seulement à deux ou trois états, les propriétés se généralisent à un nombre fini d'états comme dans la suite de l'exercice.

2. Marche aléatoire sur un carré

À présent la fourmi se déplace sur les bords d'un carré ABCD et change de sommet à chaque seconde de manière aléatoire. Initialement, la fourmi est en A.



a) Construire le graphe pondéré associé à la chaîne de Markov à quatre états A, B, C et D traduisant la situation.

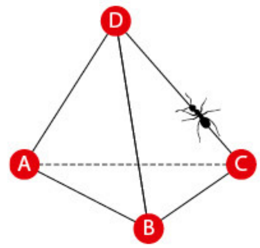
b) Déterminer la matrice de transition P associée.

c) Déterminer la distribution de la chaîne après une seconde, deux secondes et trois secondes. Quelle conjecture émettre sur la distribution π_n après n secondes selon les valeurs de n ?

d) On admet cette conjecture, la suite (π_n) n'est donc pas convergente.
Démontrer que la chaîne admet néanmoins une distribution invariante.

3. Marche aléatoire sur un tétraèdre

Enfin, la fourmi se déplace sur les bords d'un tétraèdre ABCD et change de sommet à chaque seconde de manière aléatoire.



a) Construire le graphe pondéré associé à la chaîne de Markov à quatre états A, B, C et D traduisant la situation.

b) Déterminer la matrice de transition P associée.

c) Voici l'affichage d'un logiciel de calcul formel.
Conjecturer la distribution invariante de la chaîne.

d) Démontrer cette conjecture.

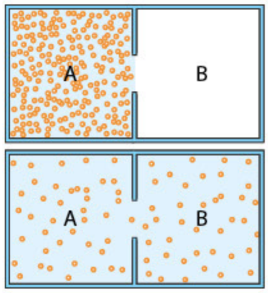
$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

$$M = P^{15}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \end{pmatrix}$$

95 Modèle de diffusion d'Ehrenfest

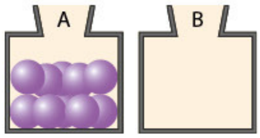
Algo python



Une enceinte hermétique est séparée en deux compartiments A et B de taille identique. Lorsqu'on remplit le compartiment A d'un gaz, les molécules de gaz migrent d'un compartiment à l'autre, jusqu'à l'établissement d'une situation d'équilibre où il y aura autant de molécules de gaz dans chaque compartiment. Or, d'après les lois de la Mécanique, le système devrait être réversible et revenir à son état initial.

C'est sur ce paradoxe que les époux Ehrenfest se sont penchés en 1907, en imaginant un modèle qui simplifie à l'extrême celui de la diffusion des gaz.

Partie A : le modèle d'Ehrenfest



Initialement, une urne A contient N billes (avec $N \in \mathbb{N}^*$) et une urne B est vide.
On choisit ensuite au hasard, de façon équiprobable une bille parmi les N et on la change d'urne.

On considère la fonction **Ehr** écrite ci-contre en langage Python qui pour une valeur donnée du paramètre N renvoie le nombre d'étapes nécessaires pour que l'urne A revienne à son état initial.

```python
from random import *

def Ehr(N):
    c=1
    x=N-1
    while x!=N:
        r=randint(1,N)
        if r<=x:
            x=x-1
        else:
            x=x+1
        c=c+1
    return c
```

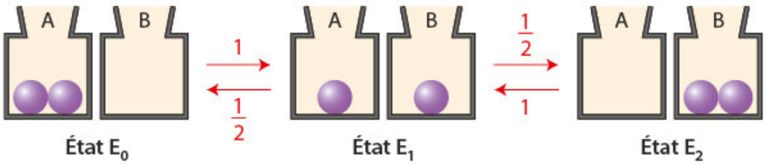
a) Que représentent les variables c et x ?

b) Saisir et exécuter ce programme pour N = 2, N = 3, N = 4 et N = 6.
Constater qu'un retour à l'état initial est possible.

c) Que constate-t-on lorsque l'on exécute le programme pour N = 100 ?

Partie B : étude du cas N = 2

À chaque étape, la répartition dans les urnes A et B est l'une des trois suivantes :



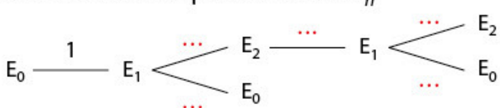
1. Construire le graphe pondéré associé à la chaîne de Markov à trois états E_0, E_1 et E_2 traduisant la situation puis déterminer la matrice P de transition associée. Préciser la distribution initiale π_0.

2. π_n est la distribution de la chaîne après n étapes. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$: • $\pi_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ pour n impair • $\pi_n = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \end{pmatrix}$ pour n pair

3. On admet que la chaîne admet une distribution invariante π. La déterminer et vérifier qu'il s'agit de la loi de probabilité d'une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(2\,;0{,}5)$.

4. a) On considère $2n$ tirages et on note T_n la variable aléatoire égale au premier tirage où l'urne revient à son état initial ou égale à 0 si l'urne n'est pas revenue à son état initial.
Recopier et compléter l'arbre pondéré et le tableau résumant la loi de probabilité de T_n.

t	0	1	2	3	4	…	$2n$
$P(T_n = t)$	…	0	…	…	…	…	…



b) Justifier que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, l'espérance $E(T_n)$ est égale à $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^{k-1}}$.

c) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $E(T_n) = 4 - \dfrac{n+2}{2^{n-1}}$.

d) On admet que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{2^{n-1}} = 0$. En déduire la limite de la suite $(E(T_n))$ et interpréter le résultat.

96 Déplacements sur un carré

Partie A : relation entre matrices

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

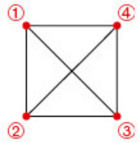
a) Calculer R^{-1}, puis $R^{-1}JR$ et $R^{-1}KR$ à l'aide de la calculatrice.

b) En déduire une matrice $D(\alpha,\beta)$ diagonale telle que $\alpha J + \beta K = R \times D(\alpha,\beta) \times R^{-1}$, où α et β sont deux nombres réels.

Partie B : étude d'un mouvement aléatoire

Dans cette partie, p est un nombre de l'intervalle $[0\,;1[$.

Un pion se déplace sur les sommets du carré ci-contre selon la règle suivante :



- le pion est sur le sommet ① au départ ;
- lorsque le pion est, à un instant donné sur un sommet du carré, il se déplace l'instant suivant vers un sommet voisin relié par un côté avec la probabilité p ou vers un sommet opposé relié par une diagonale avec la probabilité $1-2p$.

On note X_n la variable aléatoire égale au numéro du sommet sur lequel se trouve le pion après n transitions.

1. a) Écrire la matrice de transition P associée à la chaîne de Markov (X_n).

b) Vérifier qu'il existe des réels α et β tels que :

$$P = \alpha J + \beta K.$$

2. Pour tout entier naturel n, π_n est la distribution de la chaîne après n transitions.

a) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$\pi_n = \frac{1}{4}\pi_0 R \times D(p, 1-2p)^n \times R$$

où $D(p, 1-2p)$ est la matrice trouvée dans la **partie A**.

b) En déduire la distribution π_n pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

97 Tirages à deux urnes

On considère deux urnes U et V contenant chacune 3 boules.

Au départ, l'urne U contient 3 boules blanches et l'urne V contient 3 boules noires.

On effectue une suite de tirages dans ces urnes de la façon suivante : chaque tirage consiste à tirer au hasard une boule de chaque urne et à la mettre dans l'autre urne (un tirage est un échange de 2 boules).

Pour tout entier naturel n, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches que contient l'urne U après le n-ième échange et $X_0 = 3$.

1. a) Construire le graphe pondéré associé à la chaîne de Markov (X_n).

b) Écrire la matrice de transition P associée.

2. On admet qu'il existe une matrice Q inversible dont la première colonne ne contient que des 1 telle que :

$$P = QDQ^{-1} \text{ où } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{9} \end{pmatrix}.$$

a) Démontrer que la suite (P^n) converge vers la matrice :

$$L = Q\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}Q^{-1}.$$

b) $(\ell_1 \;\; \ell_2 \;\; \ell_3 \;\; \ell_4)$ est la 1^{re} ligne de la matrice Q^{-1}.

En utilisant la relation $Q^{-1}P = DQ^{-1}$, montrer que $\ell_1 = \ell_4$ et $\ell_2 = \ell_3 = 9\ell_4$.

c) En considérant le produit $Q^{-1}Q$, démontrer que $\ell_4 = \frac{1}{20}$.

d) En déduire les 16 coefficients de la matrice L.

3. Déterminer la distribution invariante π.

Des Défis

98 Passer à l'espace

Un lotissement de trois maisons doit être équipé d'eau, de gaz et d'électricité. La réglementation interdit de croiser les canalisations pour des raisons de sécurité.

Proposer une manière de procéder.

99 Remonter le temps

On se passe des informations, dites vraies, de bouche-à-oreille. À chaque passage, on estime que 10 % des informations deviennent fausses et que, par chance, 1 % des informations fausses redeviennent vraies. Après un grand nombre de passages, on se rend compte que seulement 5 informations sont vraies. Combien y en avait-il initialement ?