3 Second degré

Avant

Le viaduc de Garabit fut construit à la fin du 19e siècle par Gustave Eiffel. Son arche parabolique a été choisie pour répondre aux contraintes de charges et de résistance au vent sans avoir besoin de construire de longs piliers pour soutenir l'ouvrage.

À présent

L'utilisation de panneaux solaires paraboliques pour la production d'énergie solaire permet d'obtenir un meilleur rendement. Les panneaux paraboliques réfléchissent les rayons du soleil vers le récepteur, qui est en fait un moteur, et monte en température.

Les capacités travaillées dans ce chapitre

	Exercices
• Utiliser des fonctions polynômes du second degré.	16 à 24, 26
• Factoriser une fonction polynôme du second degré.	46, 48 à 51
• Déterminer et utiliser la forme canonique.	2, 4, 31 à 33, 36 à 38
• Choisir la forme adaptée d'une fonction polynôme du second degré.	27, 68
• Résoudre des équations du second degré.	1, 3, 5, 7, 8, 34, 35, 39 à 45
• Utiliser une racine évidente.	6, 9 à 11, 52 à 54
• Étudier le signe d'un polynôme du second degré.	12, 14, 28 à 30, 57, 58, 60
• Résoudre des inéquations du second degré.	13, 15, 59, 61 à 67, 69, 70
• Déterminer et utiliser la somme et le produit des racines.	25, 47, 55, 56

1 Équations du second degré et forme canonique

L'arche d'un pont sur le Canal du Midi peut être modélisée, dans le repère orthonormé ci-contre (*unité* : 1 m), par la courbe représentative de la fonction *f* définie sur l'intervalle $[0\,;8]$ par :

$$f(x) = -0{,}3x^2 + 2{,}4x$$

Hector a loué un bateau pour une mini-croisière sur le Canal du Midi. Les dimensions de son bateau de location sont les suivantes :

- **largeur maximale : 3,90 m, située à 0,9 m au-dessus de l'eau ;**
- **hauteur : la partie haute du bateau est à 2,82 m au-dessus de l'eau et elle a 3 m de large.**

1 Factoriser $f(x)$ et en déduire la largeur du pont.

2 **a)** Vérifier que pour tout nombre x de l'intervalle $[0\,;8]$,

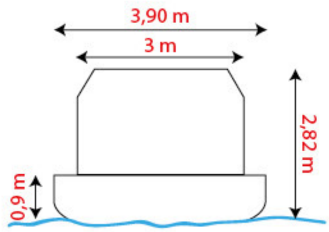
$$f(x) = -0{,}3(x-4)^2 + 4{,}8$$

Cette forme est appelée la **forme canonique** de la fonction *f*.

b) En déduire la hauteur maximale, en m, de l'arche.

3 **a)** Choisir la forme de $f(x)$ la plus adaptée pour résoudre les équations $f(x) = 0{,}9$ et $f(x) = 2{,}82$. *Arrondir au centième.*

b) En déduire si le bateau pourra passer ou non sous le pont.

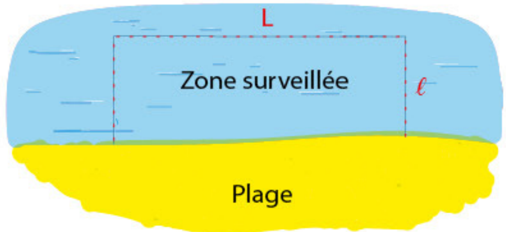


2 Tice Inéquation du second degré

Marie-Pierre doit délimiter la zone de baignade qu'elle va surveiller. Elle dispose pour cela d'une ligne qui a une longueur de 60 m.

Pour des questions de sécurité, la zone de baignade doit être rectangulaire et avoir une superficie supérieure à 400 m^2.

On note L la longueur et ℓ la largeur, en m, de la zone de baignade.



1 Traduire les données de l'énoncé par une équation et une inéquation d'inconnues L et ℓ.

2 Montrer que résoudre le problème revient à résoudre le système $\begin{cases} -2\ell^2 + 60\ell - 400 \geqslant 0 \\ \mathrm{L} = 60 - 2\ell \end{cases}$.

3 Voici différentes écritures de l'expression $-2\ell^2 + 60\ell - 400$ obtenues avec un logiciel de calcul formel.

a) Utiliser la forme la plus adaptée pour résoudre l'inéquation $-2\ell^2 + 60\ell - 400 \geqslant 0$.

b) En déduire les dimensions possibles pour la zone de baignade que Marie-Pierre doit surveiller.

1	FormeCanonique$(-2\,\ell^2 + 60\,\ell - 400)$ → $\mathbf{-2\,(\ell - 15)^2 + 50}$
2	Factoriser$\left(-2\,(\ell - 15)^2 + 50\right)$ → $\mathbf{-2\,(\ell - 20)\,(\ell - 10)}$

1 Fonctions polynômes du second degré

A Les fonctions $x \mapsto ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$

Définition

Une **fonction polynôme du second degré** (ou de degré 2) est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$ où a, b et c désignent des nombres réels avec $\boldsymbol{a \neq 0}$.
On dit que f est donné sous **forme développée**.

Exemple

$f : x \mapsto -2x^2 + 3x - 1$ est une fonction polynôme du second degré avec $a = -2$, $b = 3$, $c = -1$.

B Fonctions polynômes du second degré sous forme factorisée

Propriété

Toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\boldsymbol{f(x) = a(x-u)(x-v)}$ où a, u, v désignent des nombres réels, $a \neq 0$, est une fonction polynôme du second degré. On dit que f est donnée sous **forme factorisée**.

En effet, pour tout nombre réel x :
$f(x) = a(x-u)(x-v) = a(x^2 - ux - vx + uv) = ax^2 - a(u+v)x + auv$ **(1)**

Remarque : toute fonction polynôme du second degré n'admet pas une forme factorisée.

C Avantages de la forme factorisée

f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a(x-u)(x-v)$ avec a, u, v nombres réels, $a \neq 0$.

• **Équation $\boldsymbol{f(x) = 0}$**

$a(x-u)(x-v) = 0$ si, et seulement si, $x - u = 0$ ou $x - v = 0$ (car $a \neq 0$) c'est-à-dire $x = u$ ou $x = v$.
Ainsi, l'équation $f(x) = 0$ a pour solutions u et v. On dit que u et v sont **les racines** (ou **zéros**) de f.

• **Somme et produit des racines :** on note $f(x) = ax^2 + bx + c$ la forme développée de f.
D'après l'égalité **(1)** ci-dessus, on déduit que $-a(u+v) = b$ et $auv = c$, c'est-à-dire puisque $a \neq 0$,
$\boldsymbol{u + v = -\frac{b}{a}}$ (**somme des racines** de f) et $\boldsymbol{uv = \frac{c}{a}}$ (**produit des racines** de f).

• **Signe de $\boldsymbol{f(x)}$**

Pour étudier le signe de $f(x)$, on dresse le tableau de signes ci-dessous (ici, on suppose que $u < v$).

x	$-\infty$		u		v		$+\infty$
$x-u$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-v$		$-$		$-$	0	$+$	
$a(x-u)(x-v)$		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

Exemple

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = -4(x+2)(x-1)$$
Les solutions de $f(x) = 0$ sont -2 et 1.
Le signe de $f(x)$ est donné ci-contre.

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

2 Résolution d'une équation du second degré

A Forme canonique

Méthode de complétion du carré

On vérifie aisément que pour tous nombres réels x et k, $x^2 + kx = \left(x + \frac{k}{2}\right)^2 - \left(\frac{k}{2}\right)^2$.

Exemples

- f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 8x + 9$.
Pour tout nombre réel x, $f(x) = (x-4)^2 - 4^2 + 9 = (x-4)^2 - 7$.
- f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + 6x + 1$.
Pour tout nombre réel x, $f(x) = 2\left(x^2 + 3x + \frac{1}{2}\right) = 2\left[\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\right] = 2\left[\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{7}{4}\right]$.

De façon générale, on admet la propriété suivante.

Propriété - Définition

Toute fonction polynôme du second degré définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ admet pour **forme canonique** : $$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

On pose $\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4ac}$, c'est le **discriminant** de la fonction f.

Alors, la forme canonique de f s'écrit $f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$ **(1).**

B Résolution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$

- **1^er^ cas : $\Delta > 0$**
D'après **(1)**, pour tout nombre réel x, $f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = a\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$.
L'équation $f(x) = 0$ a deux solutions distinctes : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- **2^e^ cas : $\Delta = 0$**
Pour tout nombre réel x, $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$. L'équation $f(x) = 0$ a une seule solution : $x_0 = -\frac{b}{2a}$.
- **3^e^ cas : $\Delta < 0$**
$-\frac{\Delta}{4a^2} > 0$ donc pour tout nombre réel x, $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} > 0$. L'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution.

Propriétés

Signe de Δ	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
Solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$	$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$	$x_0 = -\frac{b}{2a}$	Pas de solution

Dans le cas où $\Delta = 0$, l'unique solution x_0 est appelée **racine double de f** (dans ce cas $x_1 = x_2$).

3 Factorisation et signe de $ax^2 + bx + c$

f est une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.
Son discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac$.

A Forme factorisée d'une fonction polynôme du second degré

On déduit immédiatement du paragraphe B p. 69 la propriété suivante.

Propriétés

- Si $\Delta > 0$, alors pour tout nombre réel x, $\boldsymbol{f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)}$ où x_1 et x_2 sont les racines de f.
- Si $\Delta = 0$, alors pour tout nombre réel x, $\boldsymbol{f(x) = a(x - x_0)^2}$ où x_0 est la racine double de f.

Remarque : si $\Delta < 0$, on ne retient pas de forme factorisée pour $f(x)$.

B Somme et produit des racines

On déduit immédiatement du paragraphe C p. 68 la propriété suivante.

Propriété

Si l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions x_1 et x_2, alors : $\boldsymbol{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}}$ et $\boldsymbol{x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}}$.

Exemple

L'équation $3x^2 - 5x + 1 = 0$ a deux solutions distinctes car $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 3 \times 1 = 13$ et $13 > 0$.
Sans calculer ces solutions, on sait que leur somme est $S = \frac{5}{3}$ et que leur produit est $P = \frac{1}{3}$.

C Signe de $ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$

- **1er cas : $\Delta > 0$**

Pour tout x, $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.
D'après l'étude du signe de $f(x)$ faite au paragraphe C p. 68, on obtient le tableau de signes ci-contre (on suppose $x_1 < x_2$).

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

- **2e cas : $\Delta = 0$**

Pour tout nombre réel x, $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$.
Le signe de $ax^2 + bx + c$ est le signe de a sauf pour $x = x_0$ où $ax^2 + bx + c$ s'annule.

- **3e cas : $\Delta < 0$**

Pour tout nombre réel x, $f(x) = ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$ (voir paragraphe A p. 69).

Or $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} > 0$ donc le signe de $ax^2 + bx + c$ est celui de a.

Propriétés

Signe de Δ	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
Signe de $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$	x : $-\infty$, x_1, x_2, $+\infty$ $f(x)$: signe de a, 0, signe de $-a$, 0, signe de a	x : $-\infty$, x_0, $+\infty$ $f(x)$: signe de a, 0, signe de a	x : $-\infty$, $+\infty$ $f(x)$: signe de a

EXERCICES RÉSOLUS

1 Se ramener à la forme factorisée

→ Cours 1. C

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chaque équation du second degré.

a) $5x^2 - 16x = 0$ **b)** $4x^2 - 25 = 0$ **c)** $x^2 + 6x + 9 = 0$

Solution

a) $5x^2 - 16x = 0$ équivaut à $x(5x - 16) = 0$, c'est-à-dire $x = 0$ ou $5x - 16 = 0$. L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \left\{0 ; \frac{16}{5}\right\}$.

b) $4x^2 - 25 = 0$ équivaut à $(2x + 5)(2x - 5) = 0$, c'est-à-dire $2x + 5 = 0$ ou $2x - 5 = 0$, soit $x = -\frac{5}{2}$ ou $x = \frac{5}{2}$.

L'ensemble de solutions est $\mathcal{S} = \left\{-\frac{5}{2} ; \frac{5}{2}\right\}$.

c) $x^2 + 6x + 9 = 0$ équivaut à $(x + 3)^2 = 0$, c'est-à-dire $x + 3 = 0$. L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{-3\}$.

Pour résoudre une équation du type $ax^2 + bx = 0$ (avec $a \neq 0$), on peut factoriser le membre de gauche.

Pour résoudre une équation du type $ax^2 + c = 0$ (avec $a \neq 0$), on peut se ramener à une équation du type $x^2 = k$.

2 Déterminer et utiliser la forme canonique

→ Cours 2. A

f est la fonction polynôme du second degré définie par $f(x) = 4x^2 - 16x - 5$.

a) Déterminer la forme canonique de *f*.

b) En déduire que la fonction *f* admet un minimum.

Solution

a) Pour tout nombre réel x :

$$f(x) = 4\left(x^2 - 4x - \frac{5}{4}\right) = 4\left[(x-2)^2 - 2^2 - \frac{5}{4}\right]$$

La forme canonique de *f* est :

$$f(x) = 4\left[(x-2)^2 - \frac{21}{4}\right] = 4(x-2)^2 - 21$$

b) Pour tout nombre réel x, $4(x - 2)^2 \geqslant 0$, donc $f(x) \geqslant -21$.

Le minimum de *f* est -21 ; il est atteint lorsque $x - 2 = 0$, c'est-à-dire en $x = 2$.

Pour déterminer la forme canonique de *f* :
- on met $a = 4$ en facteur,
- on utilise la méthode de complétion du carré en écrivant :

$$x^2 - 4x = \left(x - \frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{4}{2}\right)^2$$

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 1

3 Résoudre dans $\mathbb{R}$ chaque équation du second degré sans utiliser le discriminant.

a) $-x^2 + 120 = 0$

b) $\frac{1}{4}x^2 + 3x + 9 = 0$

c) $3x^2 + 15x = 0$

d) $4x^2 - 4x + 1 = 0$

Sur le modèle de l'exercice résolu 2

4 g est la fonction polynôme du second degré définie par :

$$g(t) = -3t^2 - 6t + 18$$

a) Déterminer la forme canonique de g.

b) En déduire que la fonction g admet un maximum. Préciser pour quelle valeur de t il est atteint.

EXERCICES RÉSOLUS

5 Résoudre une équation du second degré

→ Cours 2. B

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chaque équation.

a) $-\frac{1}{2}x^2 + 6x + 14 = 0$ **b)** $3x^2 - 9x + 15 = 0$ **c)** $2x^2 + 12x + 18 = 0$

Solution

a) Ici, $a = -\frac{1}{2}$, $b = 6$, $c = 14$. Donc :

$\Delta = 6^2 - 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times 14 = 64.$

$\Delta > 0$ donc l'équation a deux solutions distinctes :

$x_1 = \frac{-6 - \sqrt{64}}{2 \times \frac{-1}{2}} = 14$ et $x_2 = \frac{-6 + \sqrt{64}}{2 \times \frac{-1}{2}} = -2.$

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{-2\,;14\}$.

b) Ici, $a = 3$, $b = -9$, $c = 15$. Donc : $\Delta = (-9)^2 - 4 \times 3 \times 15 = -99$.

$\Delta < 0$ donc l'équation n'a pas de solution ; on note $\mathcal{S} = \varnothing$.

c) Ici, $a = 2$, $b = 12$, $c = 18$. Donc : $\Delta = 12^2 - 4 \times 2 \times 18 = 0$.

L'équation a une unique solution : $x_0 = -\frac{12}{2 \times 2} = -3$. L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{-3\}$.

> Pour résoudre une équation du second degré :
> – on calcule le discriminant Δ ;
> – on observe le signe de Δ ;
> – on applique la propriété énoncée au paragraphe B p. 69.

6 Repérer et utiliser une racine évidente

→ Cours 3. B

Repérer une racine évidente de l'équation $x^2 + 6x + 5 = 0$ puis terminer la résolution de cette équation.

Solution

-1 est une solution évidente de l'équation.

En effet, $(-1)^2 + 6 \times (-1) + 5 = 1 - 6 + 5 = 0$.

L'autre solution x' vérifie $-1 \times x' = \frac{5}{1} = 5$ et $x' = -5$.

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{-1\,;-5\}$.

> Lorsqu'une équation du second degré a une solution évidente, on peut utiliser le produit des racines pour obtenir l'autre solution.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 5

7 Dans chaque cas, calculer le discriminant et résoudre l'équation.

a) $-2x^2 + 11x - 12 = 0$ **b)** $x^2 + x + 1 = 0$

c) $0{,}25x^2 - 0{,}4x + 0{,}16 = 0$

8 Résoudre chacune des équations suivantes :

a) $5x - x^2 + 14 = 0$ **b)** $9x^2 + 6x + 1 = 0$

c) $0{,}4x^2 + 2x + 5 = 0$

Sur le modèle de l'exercice résolu 6

9 Repérer une racine évidente de l'équation $2x^2 + 4x - 6 = 0$ puis terminer la résolution.

10 Repérer une racine évidente de l'équation $2x^2 - x - 6 = 0$ puis terminer la résolution.

11 Repérer une racine évidente de l'équation $x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$ puis terminer la résolution.

EXERCICES RÉSOLUS

12 Étudier le signe d'une fonction polynôme du second degré

→ Cours 3. C

Étudier le signe de chaque fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

a) $f(x) = 2x^2 - 3x - 2$ **b)** $g(x) = -4x^2 + 2x - 7$ **c)** $h(x) = \frac{4}{9}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{4}$

Solution

a) $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 25.$

$\Delta > 0$ donc la fonction polynôme f a deux racines :

$x_1 = \frac{3+5}{4} = 2$ et $x_2 = \frac{3-5}{4} = -\frac{1}{2}.$

D'où le tableau de signes de $f(x)$:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On peut mémoriser le signe de $ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$) en disant que « $ax^2 + bx + c$ est toujours du signe de a sauf entre les racines lorsque $\Delta > 0$. »

b) $\Delta = 2^2 - 4 \times (-4) \times (-7) = -108.$

$\Delta < 0$ donc la fonction polynôme g n'a pas de racine.

D'où le tableau de signes de $g(x)$:

x	$-\infty$		$+\infty$
$g(x)$		$-$	

c) $\Delta = \left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 4 \times \frac{4}{9} \times \frac{1}{4} = \frac{4}{9} - \frac{4}{9} = 0.$

$\Delta = 0$ donc la fonction polynôme h a une seule racine : $x_0 = -\frac{-\frac{2}{3}}{2 \times \frac{4}{9}} = \frac{2}{3} \times \frac{9}{8} = \frac{3}{4}.$

D'où le tableau de signes de $h(x)$:

x	$-\infty$		$\frac{3}{4}$		$+\infty$
$h(x)$		$+$	0	$+$	

13 Résoudre une inéquation du second degré

→ Cours 3. C

On reprend les fonctions f, g, h de l'exercice 12.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : **a)** $f(x) \geqslant 0$ **b)** $g(x) < 0$ **c)** $h(x) > 0$

Solution

a) $\mathcal{S} = \left]-\infty\,;-\frac{1}{2}\right] \cup [2\,;+\infty[$

b) $\mathcal{S} = \mathbb{R}$ **c)** $\mathcal{S} = \left]-\infty\,;\frac{3}{4}\right[\cup \left]\frac{3}{4}\,;+\infty\right[$

a. et **c.**, on repère le signe « $+$ » dans le tableau.
b. On repère le signe « $-$ » dans le tableau.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 12

14 Étudier le signe de chaque fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

a) $f(x) = -3x^2 + 7x + 26$ **b)** $g(x) = x^2 - 2x + 9$

c) $h(x) = -9x^2 + 24x - 16$

Sur le modèle de l'exercice résolu 13

15 On reprend les fonctions f, g, h de l'exercice 14.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :

a) $f(x) > 0$ **b)** $g(x) < 0$

c) $h(x) \geqslant 0$

Fonctions polynômes du second degré

→ Cours 1

Questions Flash

16 Louisa affirme : « La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x+1)^2 - 4x^2 + 6$ est une fonction polynôme du second degré car il y a des x^2. »
A-t-elle raison ?

17 Chaque expression est de la forme $ax^2 + bx + c$. Indiquer oralement les valeurs de a, b et c.

a) $\frac{3}{2}x^2 - x + 4$ **b)** $5 - 4x^2$

c) $3x - x^2$ **d)** $2x - 3 + x^2$

18 Laura affirme : « La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x(1+3x) + 4$ est un polynôme du second degré. »
Que peut-on en penser ?

19 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = (2x-1)^2 - x^2$$
Reconnaître d'autres expressions de $f(x)$:

(1) $(x-1)(3x-1)$ **(2)** $3x^2 - 2x + 1$

(3) $3x^2 - 4x + 1$ **(4)** $(x+1)(2x-5)$

20 Définir une fonction polynôme de degré 2 qui s'annule en 4 et en -3.

21 Vérifier mentalement que -1 est une racine évidente de la fonction $x \mapsto -x^2 + \frac{5}{4}x + \frac{9}{4}$.

22 Développer et réduire chaque expression.
Préciser celles qui sont du second degré.

a) $\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}$ **b)** $x^2 - (x+1)^2$

c) $\left(x + \frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{2}x - 1\right)$ **d)** $\left(x + \frac{2}{5}\right)\left(x - \frac{2}{5}\right)$

23 Le professeur de mathématiques de Maya lui demande de retrouver les polynômes du second degré parmi les fonctions définies ci-dessous.

$f_1(x) = -4x + 2 + x^2$
$f_2(x) = 3x^2 + 7 + (3x-4)^2$
$f_3(x) = (1-5x)^2 - 25x^2$

Maya répond : « Les trois fonctions sont des polynômes du second degré. »
A-t-elle raison ?

24 Recopier et relier chaque forme factorisée à sa forme développée.

Forme factorisée	Forme développée
$(2x+3)(x+1)$ •	• $2x^2 + 7x + 3$
$(x+3)(2x+1)$ •	• $-2x^2 + 5x - 3$
$(2x-1)(3-x)$ •	• $2x^2 + 5x + 3$
$(3-2x)(x-1)$ •	• $-2x^2 + 7x - 3$

25 f est la fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = (x-7)(2x+4)$$
a) Écrire la forme développée de $f(x)$.
b) Wesley affirme : « La somme des racines de f est 5 et leur produit est -14. »
Procéder de deux façons différentes pour savoir si Wesley a raison.

26 f est la fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = x^2 - 9x + 20$$
a) Recopier et compléter pour tout nombre réel x :
$$f(x) = (x-5)(x - \ldots)$$
b) Résoudre alors l'équation $f(x) = 0$.

27 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = 2x(x+1) - x(x-4)$$
a) Factoriser $f(x)$.
b) Développer $f(x)$.
c) Utiliser la forme qui convient le mieux pour résoudre l'équation $f(x) = 0$.

28 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = 3(x+5)(x-7)$$
Recopier et compléter ce tableau de signes.

x	$-\infty$	…	…	$+\infty$
$x+5$		0		
$x-7$			0	
$f(x)$		0	0	

29 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = -3\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{4}\right)$$
Dresser le tableau de signes de $f(x)$.

30 g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$g(t) = \frac{1}{2}(4t-1)(3t-2)$$
Dresser le tableau de signes de $g(t)$.

Forme canonique et équation du second degré

→ Cours 2

Questions Flash

31 Laquelle de ces égalités est vraie pour tout nombre réel x ?

(1) $x^2 + 3x = (x + 6)^2 - 36$

(2) $x^2 - 5x = \left(x - \dfrac{5}{2}\right)^2 - \dfrac{25}{4}$

(3) $x^2 + 8x = (x + 4)^2 - 64$

32 f est la fonction polynôme du second degré définie par $f(x) = -x^2 + 2x + 7$. Laquelle de ces expressions est la forme canonique de f ?

(1) $(x - 1)^2 + 6$ **(2)** $-(x + 1)^2 + 6$

(3) $-(x - 1)^2 + 8$ **(4)** $-(x + 1)^2 + 8$

33 f est la fonction polynôme du second degré définie par $f(x) = 2(x - 3)^2 - 8$.
Parmi ces expressions, lesquelles sont d'autres écritures de $f(x)$?

(1) $2x^2 - 6x + 4$ **(2)** $2(x - 5)(x - 1)$

(3) $2(x - 7)(x + 1)$ **(4)** $2x^2 - 12x + 10$

34 Dans chaque cas, calculer mentalement le discriminant et indiquer le nombre de solutions de l'équation.

a) $2x^2 + 2x - 1 = 0$ **b)** $-x^2 + 3x - 4 = 0$

c) $3x^2 - 4x + \dfrac{4}{3} = 0$

35 Octave affirme :
« L'équation $\dfrac{1}{2}x^2 + 4x + 8 = 0$ n'a pas de solution. » A-t-il raison ?

36 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 4x^2 + 8x - 5$$

Recopier et compléter pour obtenir la forme canonique de f :

$$f(x) = 4\left(x^2 + \ldots x - \frac{\ldots}{\ldots}\right)$$

$$f(x) = 4\left[(x + \ldots)^2 - \ldots^2 - \frac{5}{4}\right]$$

$$f(x) = 4\left[(x + \ldots)^2 - \frac{\ldots}{\ldots}\right]$$

37 Dans chaque cas, déterminer la forme canonique de la fonction définie en utilisant la complétion du carré.

a) $f(x) = 2x^2 - 2x + 3$ **b)** $g(x) = 3x^2 + 6x + 12$

c) $h(t) = -5t^2 - 20t + 20$

38 Recopier et relier chaque fonction polynôme du second degré à sa forme canonique.

Fonction	Forme canonique
$-2x^2 - 4x + 3$ •	• $-2(x + 1)^2$
$-2x^2 - 8x - 5$ •	• $-2(x + 2)^2 + 3$
$-2x^2 - 4x - 2$ •	• $-2(x + 1)^2 + 5$

39 Résoudre dans $\mathbb{R}$ chaque équation.

a) $2x^2 - 5x - 3 = 0$ **b)** $3x^2 - 2x + \dfrac{1}{3} = 0$

c) $x^2 + 2x = 35$ **d)** $t^2 + t + 9 = 0$

40 Résoudre dans $\mathbb{R}$ chaque équation.

a) $-3x^2 + x + 4 = 0$ **b)** $4x - 4x^2 + 15 = 0$

c) $7u^2 + 5u + 1 = 0$ **d)** $0{,}5x^2 + 2{,}5x - 7 = 0$

41 Nassim a résolu l'équation $-2x^2 + 6x - 2 = 0$.
Il a obtenu les solutions :

$$x_1 = \frac{-6 - 2\sqrt{5}}{-4} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-6 + 2\sqrt{5}}{-4}.$$

Jessica n'est pas d'accord, car elle a obtenu :

$$x_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

Que peut-on en penser ?

42 **a)** Développer $(2 + \sqrt{3})^2$.
b) Résoudre l'équation suivante :

$$x^2 - (2 - \sqrt{3})x - 2\sqrt{3} = 0$$

Les solutions seront données sous forme simplifiée.

43 À Terrassa, en Catalogne, la Masia Freixa est une ancienne fabrique textile, remodelée par l'architecte Lluis Muncunill. On retrouve l'influence de Gaudi dans la profusion de formes paraboliques.

Dans le repère indiqué (*unité* : 1 m) on peut modéliser l'arche par la fonction définie sur $[0\,;11]$ par :

$$f(x) = 3x - 0{,}3x^2$$

a) Résoudre l'équation $f(x) = 0$ et en déduire la largeur, en m, de l'arche au sol.
b) Déterminer la forme canonique de f et en déduire la hauteur maximum, en m, de l'arche.

44 La température de l'eau, en °C, dans un radiateur muni d'un thermostat, peut être modélisée par :

$$\theta(t) = 3t^2 - 12t + 40$$

où t représente le temps, en heure (avec $t \geqslant 0$).

a) Calculer $\theta(0)$. En déduire la température de l'eau au début de l'observation.

b) Écrire $\theta(t)$ sous forme canonique. En déduire la température minimum de l'eau. Elle correspond à la température à partir de laquelle le système de chauffage se remet en marche. À quel instant cela se produit-il ?

c) Résoudre l'équation $\theta(t) = 55$.

Le système de chauffage se coupe lorsque la température de l'eau atteint 55 °C. Pendant combien de temps le système de chauffage aura-t-il fonctionné ?

45 On étudie une population de bactéries en fonction du temps t, en minute (avec $t \geqslant 0$).

Le nombre de bactéries est donné par :

$$\mathrm{N}(t) = -\frac{4}{3}t^2 + 40t + 132$$

a) Vérifier que $\mathrm{N}(t) = -\frac{4}{3}[(t-15)^2 - 324]$ et en déduire le nombre maximum de bactéries durant l'observation.

b) Résoudre l'équation $\mathrm{N}(t) = 0$. En déduire l'instant auquel toutes les bactéries auront disparues.

Factorisation, somme et produit

→ Cours 3. A. B

Questions flash

46 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x^2 + 4x - 6$$

Parmi les expressions suivantes, déterminer celles qui correspondent à des factorisations de f.

(1) $(2x-2)(x+3)$ **(2)** $2(x+1)^2 - 4$

(3) $2(x+1)(x-3)$ **(4)** $2(x-1)(x+3)$

47 Dans chaque cas, l'équation a deux solutions.

Déterminer mentalement la somme et le produit de ces solutions.

a) $5x^2 + 4x - 10 = 0$ **b)** $-7x^2 + 2x + 35 = 0$

c) $x - 3x^2 + 1 = 0$ **d)** $7 - 10x + 0{,}5x^2 = 0$

48 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3x^2 + x + 2$$

Marius affirme : « Il est impossible de factoriser $f(x)$. » A-t-il raison ?

49 **a)** Résoudre l'équation $-x^2 - 4x + 5 = 0$.

b) En déduire une factorisation de $-x^2 - 4x + 5$.

50 Donner, si possible, la forme factorisée de chaque fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

a) $f(x) = x^2 - x + 1$ **b)** $g(x) = -x^2 - 4x - 4$

c) $h(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - 2$ **d)** $k(x) = 7x - x^2 - 6$

51 Donner, si possible, la forme factorisée de chaque fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

a) $f(x) = -x^2 + 7x - 18$ **b)** $g(x) = 25x^2 - 20x + 4$

c) $h(x) = -4x^2 + 3x + 1$ **d)** $k(x) = 2x^2 + 3x - 2$

52 g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 3x^2 + x - 2$$

a) Vérifier que -1 est une racine de g.

b) Sans calcul supplémentaire, déterminer le produit des racines de g.

c) En déduire la seconde racine de g.

53 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3x^2 - 13x - 10$$

a) Vérifier que 5 est une racine de f.

b) Sans calcul supplémentaire, déterminer la somme des deux racines de f.

c) En déduire la forme factorisée de $f(x)$.

54 h est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = -6x^2 - 10x - \frac{25}{6}$$

Marie affirme : « La forme canonique de h est :

$$h(x) = -6\left(x + \frac{5}{6}\right)^2. »$$

Fannie lui dit : « J'ai dû faire une erreur, j'ai cherché la forme factorisée de $h(x)$ et j'ai trouvé la même expression que toi. »

L'une d'entre elles s'est-elle trompée ?

Justifier.

55 L'une des équations ci-dessous, vérifie la propriété :

« L'équation admet deux solutions inverses l'une de l'autre. » Laquelle ?

(1) $3x^2 - 7x + \frac{1}{3} = 0$ **(2)** $7x^2 - 3x + 7 = 0$

(3) $-3x^2 - 7x + 3 = 0$ **(4)** $3x^2 - 7x + 3 = 0$

56 Armelle affirme :

« L'équation $7x^2 - 100x + 7 = 0$ admet deux solutions positives et inverses l'une de l'autre. » A-t-elle raison ?

Signe de ax^2+bx+c

→ Cours 3. C

Questions flash

57 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=x^2+\blacksquare x+\blacksquare$$

mais certains coefficients sont cachés.
On sait que -1 et 3 sont les racines de f.
En déduire mentalement le signe de $f(x)$.

58 Dans chaque cas, donner mentalement le signe de l'expression.

a) $3(x-2)^2+1$ **b)** $-(x-1)^2-5$

59 Parmi les inéquations proposées, déterminer mentalement celles dont l'ensemble des solutions est $\mathcal{S}=[-2\,;6]$.

(1) $3(x+2)(x-6)\geqslant 0$ **(2)** $-(x+2)(x-6)\geqslant 0$
(3) $(4x+8)(x-6)\leqslant 0$ **(4)** $(4+2x)(6-x)\leqslant 0$

60 Sans utiliser le discriminant, déterminer le signe de chaque expression.

a) $-3(x+2)(x-7)$ **b)** $5(1-x)(x+8)$

c) $4(2-x)(11-x)$ **d)** $\frac{1}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{3}{4}\right)$

61 Résoudre chaque inéquation.

a) $(x-3)(x+1)>0$ **b)** $t^2-7t+12>0$

c) $-x^2+7x-6\geqslant 0$ **d)** $-3u^2+5u-3\leqslant 0$

62 Résoudre chaque inéquation.

a) $-2a^2+13a>15$ **b)** $x^2+2{,}1x\leqslant 3{,}52$

c) $10x^2+0{,}1>-2x$ **d)** $t^2+\frac{13}{16}\leqslant\frac{1}{2}t$

63 Résoudre chaque inéquation.

a) $2x^2-3x-2\geqslant 0$ **b)** $5x^2-6x<0$

c) $-3x^2+30x-75>0$ **d)** $-x^2+6x-9\leqslant 0$

64 Hector affirme :
« L'inéquation $2x^2-12x+18\leqslant 0$ a une unique solution. » A-t-il raison ?

65 Expliquer l'affichage obtenu ci-contre avec un logiciel de calcul formel.

1	Résoudre(2x²-3x+4>=0,x)
	→ {x = x}

66 Imaginer une inéquation du second degré qui admet une seule solution.

67 Samuel et Léo doivent résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $3x^2-3{,}5x-2{,}5<0$.
Samuel dit à Léo : « J'ai calculé Δ et j'ai trouvé un résultat négatif, j'en conclus que l'inéquation n'a pas de solution. »
Léo lui répond : « Tu t'es trompé car 0 est une solution de cette inéquation, mais je ne sais pas s'il y en a d'autres. »
Corriger les erreurs de Samuel et donner l'ensemble des solutions de l'inéquation.

68 f est une fonction polynôme du second degré dont les trois expressions sont indiquées ci-dessous.

Forme développée	$f(x)=3x^2+3x-60$
Forme canonique	$f(x)=3\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{243}{4}$
Forme factorisée	$f(x)=3(x-4)(x+5)$

Choisir l'expression la plus appropriée pour résoudre chaque inéquation.

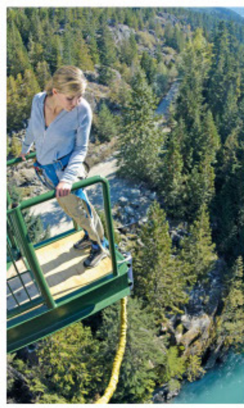
a) $f(x)\leqslant 0$ **b)** $f(x)\geqslant -60$ **c)** $f(x)\geqslant -\frac{243}{4}$

69 Une entreprise fabrique x dizaines d'objets par jour. Son bénéfice, exprimé en centaines d'euros, est donné par la fonction B définie sur l'intervalle $[0\,;10]$ par $\mathrm{B}(x)=-2x^2+12x-10$.

a) Dresser le tableau de signes de la fonction B sur l'intervalle $[0\,;10]$.
b) En déduire les solutions de l'inéquation $\mathrm{B}(x)>0$ sur l'intervalle $[0\,;10]$.
c) Quelles quantités d'objets l'entreprise doit-elle produire et vendre pour réaliser un bénéfice ?

70 Un laboratoire a mis au point un nouvel élastique pour effectuer des sauts. Avant de le mettre sur le marché, le laboratoire doit s'assurer qu'il peut subir, sans se rompre, une force comprise entre 20000 N et 30000 N. Les résultats des tests démontrent que la force, en newton, subie par cet élastique en fonction de l'étirement I, en cm, est donnée par :

$$\mathrm{F(I)}=3{,}2\mathrm{I}^2+5\mathrm{I}\ \text{avec}\ \mathrm{I}\geqslant 0.$$



a) Déterminer la plus petite valeur entière de I telle que $\mathrm{F(I)}\geqslant 20000$.
b) Déterminer la plus grande valeur entière de I telle que $\mathrm{F(I)}\leqslant 30000$.
c) En déduire les étirements, en cm, à réaliser lors du test.

QCM interactifs

Pour se tester

71 Dans chaque cas, donner la réponse exacte sans justifier.

		A	B	C	D
1	La forme canonique de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4x - 6$ est …	$\frac{1}{2}\left[(x+4)^2 - 28\right]$	$\frac{1}{2}\left[(x-4)^2 - 28\right]$	$\left(\frac{1}{2}x + 4\right)^2 - 22$	$\frac{1}{2}\left[(x+4)^2 + 4\right]$
2	f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3(x+1)^2 + 4$. Alors, elle admet …	-1 pour maximum en -4	4 pour maximum en -1	-1 pour minimum en -4	4 pour minimum en -1
3	L'équation $2x^2 - 8x + 6 = 0$ admet deux solutions. Leur somme S et leur produit P sont …	$S = -8$ $P = 6$	$S = -4$ $P = 3$	$S = 4$ $P = 3$	$S = 3$ $P = -4$
4	L'équation $x^2 - 5x + 6 = 0$ a pour solutions …	6 et -1	-6 et 1	-2 et -3	2 et 3
5	L'ensemble des solutions de l'inéquation $-x^2 + 3x + 4 < 0$ est …	$]-\infty\,;-4[\,\cup\,]1\,;+\infty[$	$]-\infty\,;-1[\,\cup\,]4\,;+\infty[$	$]-4\,;1[$	$]-1\,;4[$

72 Dans chaque cas, donner la (ou les) réponse(s) exacte(s) sans justifier.

		A	B	C	D
1	Si pour tout nombre réel x, $f(x) = -2(x+3)^2 - 8$, alors …	pour tout x, $f(x) = -2(x+1)(x+5)$	l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution	pour tout nombre réel x, $f(x) < 0$	-8 est le minimum de f sur $\mathbb{R}$
2	f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 9x^2 - 6x + 1$. Alors …	$\Delta = 0$	pour tout x, $f(x) = (3x-1)^2$	pour tout x, $f(x) > 0$	$\frac{1}{3}$ et 1 sont les racines de f
3	f est une fonction polynôme du second degré qui s'annule en -2 et 5. Alors par exemple, pour tout x, …	$f(x) = 3(x+2)(x-5)$	$f(x) = (x+2)(x-5)$	$f(x) = x^2 - 3x - 10$	$f(x) = (x+2)^2 + 5$

73 Dans chaque cas, dire si l'affirmation est vraie ou fausse en justifiant.

1 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + 2x + \frac{1}{2}$.
Affirmation : pour tout nombre réel x, $f(x) > 0$.

2 g est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = t^2 + bt - 4$ où b désigne un nombre réel.
Affirmation : pour tout nombre réel b, l'équation $g(t) = 0$ admet deux solutions.

3 h est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 4x^2 + bx - 1$ où b désigne un nombre réel.
Affirmation : l'équation $h(x) = 0$ admet deux solutions de même signe.

Vérifiez vos réponses : p. 340

Nathan live!

74 Utiliser une racine évidente

f est la fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 6x - 9$.

a) Vérifier que 1 est une racine de f.

b) Sans calculer la seconde racine de f, indiquer la somme des deux racines de f.

c) En déduire la seconde racine de f.

d) Proposer une factorisation de $f(x)$.

AIDE

c) En notant x_2 cette seconde racine, utiliser le fait que $1 \times x_2 = \frac{c}{a}$.

d) Penser à utiliser $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

75 Utiliser une forme canonique

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x^2 - 8x + 9$$

a) Vérifier que pour tout nombre réel x :

$$f(x) = 2(x-2)^2 + 1$$

b) En déduire le signe de $f(x)$.

AIDE

a) Développer et réduire $2(x-2)^2 + 1$.

b) Un carré est toujours positif ou nul.

76 Résoudre une équation

(E) est l'équation $2x^2 - 3x - 2 = 0$.

a) Cette équation est de la forme $ax^2 + bx + c = 0$.
Quelles sont les valeurs de a, b et c ?

b) Calculer le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

c) En déduire le nombre de solutions de **(E)**.
Résoudre alors cette équation **(E)**.

AIDE

b) Remplacer a, b, c par leurs valeurs en pensant aux parenthèses utiles.
$\Delta = (\ldots)^2 - 4 \times \ldots \times (\ldots)$

77 Déterminer le signe $ax^2 + bx + c$

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 + 2x - 15$$

a) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

b) Recopier et compléter ce tableau de signes :

x	$-\infty$		...		...		$+\infty$
$f(x)$		...	0	...	0	...	

AIDE

Lorsque $\Delta > 0$, $ax^2 + bx + c$ est « du signe de a à l'extérieur des racines et du signe de $-a$ ailleurs ».

78 Résoudre une inéquation

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 25x^2 - 40x + 16$$

a) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

b) Dresser le tableau de signes de $f(x)$.

c) En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation :

$$f(x) > 0$$

AIDE

Lorsque $\Delta = 0$, $ax^2 + bx + c$ est toujours du signe de a, sauf pour la racine double où $ax^2 + bx + c$ s'annule.

EXERCICE RÉSOLU

79 Résoudre une équation du second degré

Voici un algorithme de résolution de l'équation :

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ avec } a \neq 0.$$

1. Compléter cet algorithme.

2. Coder cet algorithme en langage Python. Saisir ce programme.

3. Résoudre chacune des équations suivantes algébriquement et avec le programme. Comparer les solutions obtenues avec les deux méthodes.

a) $4x^2 + 8x - 5 = 0$

b) $-3x^2 - x + 2 = 0$

Saisir a, b, c
$d \leftarrow b^2 - 4ac$
Afficher d
Si $d > 0$ alors
  $x \leftarrow \boxed{}$
  $y \leftarrow \boxed{}$
  Afficher x, y
Fin Si
Si $d = 0$ alors
  $x \leftarrow \boxed{}$
  Afficher x
Fin Si
Si $\boxed{}$ alors
  Afficher "Pas de solution"
Fin Si

Solution

1. Cadre rouge : $(-b + \sqrt{d}) / (2a)$

Cadre vert : $(-b - \sqrt{d}) / (2a)$

Cadre bleu : $-b / (2a)$

Cadre noir : $d < 0$

2. L'algorithme est traduit ci-dessous en langage Python.

```python
from math import *
a=float(input("Entrer a"))
b=float(input("Entrer b"))
c=float(input("Entrer c"))
d=b**2-4*a*c
print("Delta =",d)
if d>0:
    x=(-b+sqrt(d))/(2*a)
    y=(-b-sqrt(d))/(2*a)
    print("Les solutions sont",x,"et",y)
if d==0:
    x=-b/(2*a)
    print("La seule solution est",x)
if d<0:
    print("Pas de solution")
```

3. a) $\Delta = 8^2 - 4 \times 4 \times (-5) = 144 = 12^2$.

Donc l'équation a deux solutions :

$$\frac{-8+12}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{-8-12}{8} = -\frac{5}{2}$$

```
Delta = 144.0
Les solutions sont 0.5 et -2.5
```

Le programme affiche les mêmes solutions.

b) $\Delta = (-1)^2 - 4 \times (-3) \times 2 = 25$

Donc l'équation a deux solutions :

$$\frac{-(-1)+5}{-6} = -1$$

$$\frac{-(-1)-5}{-6} = \frac{2}{3}$$

```
Delta = 25.0
Les solutions sont -1.0 et 0.6666666666666666
```

Le programme affiche une valeur approchée de l'une des solutions.

À VOTRE TOUR

80 Résoudre chaque équation algébriquement puis avec le programme de l'exercice **79**.

a) $9x^2 - 24x + 16 = 0$

b) $0{,}5x^2 + 3{,}4x + 1 = 0$

81 f est une fonction $x \mapsto ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$. Sa forme canonique est $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$.
Écrire un programme qui affiche α, β lorsqu'on saisit a, b, c en entrée. Tester ce programme.

EXERCICE RÉSOLU

82 Rechercher les points d'intersection de deux courbes

f et g sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x - 1$ et sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \dfrac{1}{x}$.

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives respectives des fonctions f et g dans un repère.

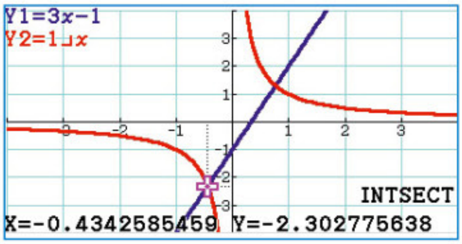
a) Avec la calculatrice, conjecturer le nombre de points d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et leurs abscisses.

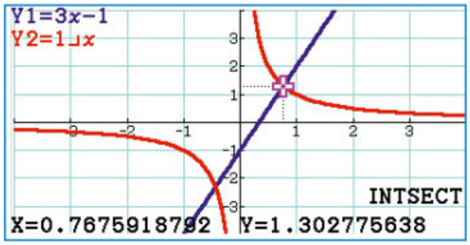
b) Déterminer algébriquement les abscisses exactes des points d'intersections de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

Confronter à la conjecture émise à la question **a)**.

Solution

a) On conjecture que $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont deux points d'intersection d'abscisses x_1 et x_2 avec $x_1 \approx -0{,}43$ et $x_2 \approx 0{,}77$.





b) Les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ c'est-à-dire $3x - 1 = \dfrac{1}{x}$.

Dans $\mathbb{R}^*$, cette équation équivaut à $(3x-1)x = 1$, c'est-à-dire $3x^2 - x - 1 = 0$.

$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 3 \times (-1) = 1 + 12 = 13$.

$\Delta > 0$ donc l'équation a deux solutions :

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{13}}{6} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1+\sqrt{13}}{6}.$$

Donc $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont deux points d'intersection d'abscisses x_1 et x_2.

On peut vérifier qu'effectivement $x_1 \approx -0{,}43$ et $x_2 \approx 0{,}77$.

À VOTRE TOUR

83 f et g sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$$

et sur $\mathbb{R}^*$ par $\quad g(x) = \dfrac{1}{x}$.

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives respectives des fonctions f et g dans un repère.

a) Avec la calculatrice, conjecturer le nombre de points d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et leurs abscisses.

b) Déterminer algébriquement les valeurs exactes des abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

Confronter à la conjecture émise au **a)**.

84 f et g sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{2}$ et sur $[0\,;+\infty[$ par $g(x) = \sqrt{x}$.

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives respectives des fonctions f et g dans un repère.

a) Avec la calculatrice, conjecturer le nombre de points d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et leurs abscisses.

b) Expliquer pourquoi, dans $[0\,;+\infty[$, $\dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{2} = \sqrt{x}$ équivaut à $\left(\dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{2}\right)^2 = x$.

c) Déterminer les abscisses exactes des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

Démontrer et raisonner

85 **Établir une condition suffisante d'existence**

Méthode
Démontrer qu'une proposition P est une **condition suffisante** à une proposition Q, c'est démontrer que « Si P, alors Q ».

1. a) On considère l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ (avec $a \neq 0$).
Démontrer que la condition « a et c sont de signes contraires » est suffisante pour que l'équation ait au moins une solution.
b) Quelle condition supplémentaire faut-il ajouter pour que l'équation ait deux solutions réelles distinctes ?
2. Proposer un contre-exemple pour démontrer que la propriété : « Si l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a au moins une solution, alors a et c sont de signes contraires » est fausse.

86 **Déterminer deux nombres de somme et produit donnés**

Méthode
Dans certains cas, la résolution d'un problème se ramène à la résolution d'une équation du second degré.

1. S et P sont deux nombres réels donnés.
a) On suppose qu'il existe deux nombres réels u et v tels que $S = u + v$ et $P = uv$.
Montrer qu'alors u et v sont solutions de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$.
b) Réciproquement, montrer que si u et v sont solutions de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$, alors $S = u + v$ et $P = uv$.
c) Énoncer la propriété ainsi démontrée aux questions **a)** et **b)**.
2. Applications
a) Déterminer, s'ils existent, deux nombres réels dont la somme est égale à 6 et dont le produit est égal à 1.
b) Existe-t-il un rectangle de périmètre 24 et d'aire 25 ?

87 **Calculer astucieusement**

Une équation du second degré admet deux solutions distinctes x_1 et x_2 de somme 2 et de produit -11.
Calculer : **a)** $x_1^2 + x_2^2$ **b)** $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$

Utiliser des fonctions polynômes du second degré

88 f est une fonction polynôme du second degré dont les racines sont -4 et 5.
De plus, on sait que $f(3) = 8$.
Déterminer la forme développée de $f(x)$.

89 f et g sont les fonctions polynômes du second degré définies sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = -\frac{1}{64}x^2 + \frac{7}{4}x + 60$$
$$g(x) = -0{,}025x^2 + 2{,}805x + 30{,}32$$
Rafaël affirme : « Les deux fonctions ont le même maximum. »
Utiliser l'écran de calcul formel ci-dessous pour dire si Rafaël a raison.

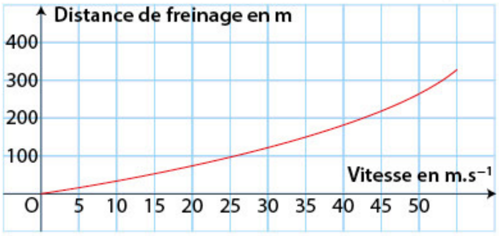
1	FormeCanonique$\left(-\frac{1}{64}x^2 + \frac{7}{4}x + 60\right)$
	$\rightarrow -\frac{1}{64}(x-56)^2 + 109$
2	FormeCanonique$(-0.025x^2 + 2.805x + 30.32)$
	$\rightarrow -\frac{1}{40}\left(x - \frac{561}{10}\right)^2 + \frac{436001}{4000}$

90 Des biologistes étudient l'impact d'un bactéricide sur une culture de bactéries.
Ils estiment que le nombre de bactéries présentes dans la culture en fonction du temps t, en min, est donné par :
$$N(t) = -5t^2 + 50t + 1000$$
Quel est le nombre maximum de bactéries observables ?

91 On alimente un appareil électrique à l'aide d'un panneau solaire photovoltaïque faisant un angle α, en degré, avec l'horizontale.
La quantité d'énergie, en kWh, reçue annuellement par ce panneau est donnée par :
$$E(\alpha) = -0{,}2\alpha^2 + 12{,}8\alpha + 1800$$
avec $0 \leqslant \alpha \leqslant 90$.
Déterminer l'inclinaison qui permet de recevoir une quantité d'énergie maximum.

Résoudre une équation du second degré

92 Sur route sèche, la distance d'arrêt d'une voiture est donnée par $D = \dfrac{v^2}{14} + 2v$ où v est la vitesse exprimée en $m \cdot s^{-1}$ (au moment du début du freinage).



Une voiture a parcouru 175 m avant de s'immobiliser.

a) Établir la vitesse du véhicule, en $m \cdot s^{-1}$, à l'instant du freinage. *Arrondir à l'unité.*

b) Sachant que le conducteur roulait sur autoroute, respectait-il la limitation de vitesse ?

93 Guillaume possède un terrain rectangulaire ayant une superficie de 17 m^2.
Il a utilisé 17 m de grillage pour le clôturer.
Déterminer les dimensions, en m, du terrain de Guillaume. *Arrondir au dixième.*

94 Pour résoudre une équation bicarrée, c'est-à-dire de la forme $ax^4 + bx^2 + c = 0$ (avec $a \neq 0$), on résout le système $\begin{cases} X = x^2 \\ aX^2 + bX + c = 0 \end{cases}$.
Résoudre chaque équation.

a) $x^4 - 3x^2 = 0$ **b)** $-\dfrac{1}{6}x^4 + 3x^2 - 13{,}5 = 0$

c) $3x^4 + 9x^2 - 12 = 0$ **d)** $2x^4 + 40x^2 + 128 = 0$

95 **a)** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :
$$81x^2 - 18x + 1 = 0$$
b) Résoudre alors l'équation : $81x^4 - 18x^2 + 1 = 0$.

c) Résoudre enfin l'équation : $81x^8 - 18x^4 + 1 = 0$.

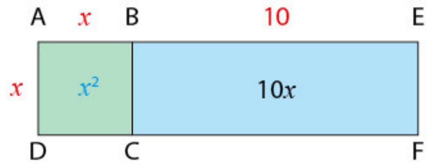
96 Résoudre le système : $\begin{cases} x + y = 49 \\ x^2 + y^2 = 1\,225 \end{cases}$

97 Résoudre le système : $\begin{cases} x - y = 10 \\ xy = -16 \end{cases}$

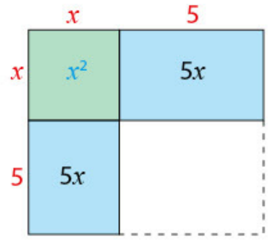
98 Résoudre le système : $\begin{cases} xy = -2{,}5 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = -0{,}3 \end{cases}$

99 Pour se rendre de Bordeaux à Saint-Jean-de-Luz (distance approximative 195 km) deux cyclistes partent en même temps. L'un d'eux, dont la vitesse moyenne sur ce parcours est supérieure de 4 $km \cdot h^{-1}$ à celle de l'autre, arrive une heure plus tôt.
Quelle est la vitesse de chaque cycliste ?

100 Histoire des maths **1.** Le mathématicien arabe Al-Khwârizmî imaginait que résoudre l'équation $x^2 + 10x = 39$ revenait à trouver la longueur x telle que l'aire du rectangle AEFD ci-dessous soit égale à 39.



Pour cela, il découpait le rectangle BEFC en deux rectangles de dimensions 5 et x, puis effectuait, le « collage » ci-dessous.



a) Expliquer pourquoi résoudre l'équation $x^2 + 10x = 39$ revient à résoudre l'équation :
$$(x+5)^2 - 25 = 39$$
b) Déterminer x.

2. a) Résoudre l'équation $x^2 + 10x = 39$ en calculant le discriminant.

b) Trouve t-on les mêmes solutions qu'à la question **1** ?

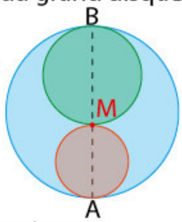
À l'époque d'Al-Khwârizmî on n'utilisait que des nombres positifs. C'est pour cela qu'il écrivit l'équation $x^2 + 10x = 39$ et non pas $x^2 + 10x - 39 = 0$.

101 L'aire d'un triangle rectangle est 429 m^2 et son hypoténuse a pour longueur $h = 72{,}5$.
Déterminer le périmètre de ce triangle.

102 Le plan est muni d'un repère orthonormé d'origine O.
d est la droite d'équation $y = 2x + 4$.
$M(x\,;y)$ est un point de cette droite.
Déterminer les coordonnées des points M tels que la distance OM soit égale à $\sqrt{5}$.

ÉTUDIER LE SIGNE DE $ax^2 + bx + c$

103 Charlotte doit créer un pendentif formé de trois disques deux à deux tangents. Le point M appartient au diamètre [AB], de longueur 4 cm, du grand disque. On note x la longueur AM en cm.



a) Démontrer que l'aire, en cm^2, de la partie bleue est :

$$D(x) = \frac{\pi}{2}(-x^2 + 4x)$$

b) Déterminer la position du point M telle que l'aire de la partie bleue soit maximum. On note cette aire D_{max}.

c) L'aire de la partie bleue du pendentif doit vérifier les contraintes $0{,}5D_{max} \leqslant D(x) \leqslant 0{,}75D_{max}$.
Où Charlotte doit-elle placer le point M ?

104 Une entreprise produit de la pâte à papier.

On note q la masse, en tonne, de pâte produite, avec $q \in [0\,;60]$.
Le coût total de production, en euro, pour une quantité produite q est :

$$C(q) = q^2 + 632q + 1\,075$$

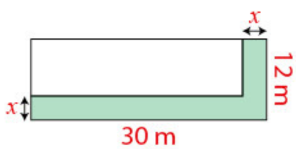
L'entreprise vend toute sa production à un prix à la tonne fixe. L'activité est à l'équilibre pour la production et la vente de 25 tonnes de pâte.

a) Déterminer le prix de vente à la tonne.

b) En déduire l'expression du bénéfice en fonction de q.

c) Dans quel intervalle doit se situer la production pour que l'activité soit rentable ?

105 Un terrain rectangulaire a pour longueur 30 m et pour largeur 12 m.



On se propose d'aménager un chemin de largeur x, en mètre, le long de deux côtés consécutifs comme le montre la figure ci-dessus.
La largeur x du chemin doit être supérieure à 0,8 m et on souhaite que la partie restante du terrain ait une aire supérieure à 280 m^2.

a) Indiquer un intervalle dans lequel se trouve la largeur x du chemin.

b) Vérifier que la condition sur l'aire de la partie restante se traduit par l'inéquation $x^2 - 42x + 80 \geqslant 0$.

c) Résoudre cette inéquation et en déduire les valeurs possibles de la largeur x du chemin.

106 **Algo** h est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = x^2 - 1\,000x$$

1. Existe-t-il un nombre réel x tel que $h(x) \geqslant 8000$? Justifier.

2. On considère la fonction Seuil écrite en langage Python.

```python
def Seuil(M):
    x=0
    while x**2-1000*x<M:
        x=x+1
    return x
```

a) Quel est le rôle de cette fonction ?

b) Saisir et exécuter cette fonction avec M = 8000. Interpréter la valeur renvoyée.

S'ENTRAÎNER À LA LOGIQUE → p. 336

107 **Quantificateur universel**

f est une fonction polynôme du second degré dont on donne le tableau de signes ci-dessous.

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Dans chaque cas, dire si l'affirmation est vraie ou fausse. Justifier.

a) Tous les nombres supérieurs à 1 ont une image positive par f.

b) Tous les nombres négatifs ont une image négative par f.

c) Il existe des nombres positifs dont l'image par f est positive.

d) Tous les nombres dont l'image par f est négative appartiennent à l'intervalle $]-\infty\,;-2]$.

e) Il existe des nombres dans l'intervalle $]-1\,;1[$ dont l'image est négative.

108 **Réciproque**

f est une fonction polynôme du second degré définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$). Δ est son discriminant.

P$_1$: Si pour tout nombre réel x, $f(x) > 0$, alors $\Delta < 0$.

P$_2$: Si $ac < 0$, alors $\Delta > 0$.

Pour chaque proposition :
- indiquer si elle est vraie ou fausse ;
- énoncer sa réciproque et indiquer si elle est vraie ou fausse.

109 Modéliser une situation

Chercher | Modéliser

Myriam a dessiné un triangle rectangle :
- l'un de ses côtés mesure 3,5 cm ;
- son périmètre est de 8,4 cm.

Quelles sont les dimensions possibles du triangle de Myriam ?

110 Comparer des stratégies

Raisonner | Calculer | Communiquer

a) Abdel, Belinda, Charlotte et Dominic ont eu l'exercice suivant à résoudre.

Écrire la forme factorisée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -5x^2 + 20x - 20$$

Voici chacune de leurs réponses.

Expliquer leurs méthodes et indiquer les avantages et inconvénients de chacune d'elles.

Abdel

Je calcule le discriminant :

$$\Delta = 20^2 - 4 \times (-5) \times (-20) = 0$$

J'en conclus que la fonction f a une racine unique :

$$x_0 = \frac{20}{2 \times (-5)} = 2 \quad \text{donc } f(x) = -5(x-2)^2$$

Bellinda

J'ai remarqué que 2 est une racine évidente :

$$f(2) = -5 \times 4 + 20 \times 2 - 20 = 0$$

Je peux donc factoriser par $(x-2)$ et j'obtiens alors l'expression factorisée de f :

$$f(x) = (x-2)(-5x+10)$$

Charlotte

J'écris f sous forme canonique :

$f(x) = -5(x^2 - 4x + 4)$

$f(x) = -5[(x-2)^2 - 4 + 4] = -5(x-2)^2$

Dominic

$f(x) = -5(x^2 - 4x + 4)$

Je reconnais une identité remarquable :

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

donc : $f(x) = -5(x-2)^2$

b) Pour la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -5x^2 + 10x + 10$$

indiquer les stratégies qui auraient pu être utilisées.

111 Study the England's flag

Modéliser | Calculer | Communiquer

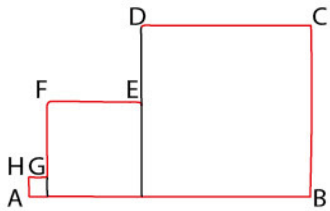
The flag of England is a rectangle with 2 m for width and 3 m for length. The background is white croissed with a red cross.

The cross is made with two rectangles with the same width. Which width should we choose for the cross if we want that red and white part to have the same area?

112 Choisir l'inconnue

Modéliser

Un polygone constitué de trois carrés accolés est représenté en rouge sur cette figure à main levée.



Le côté de chaque carré mesure 2 cm de plus que le précédent et l'aire totale du polygone est de 515 cm^2.

Déterminer la longueur AB.

113 Étudier les conséquences d'un paramètre

Chercher | Raisonner

(E) est l'équation $mx^2 + (m-1)x - 1 = 0$ où m désigne un nombre réel.

Discuter le nombre de solutions de **(E)** selon les valeurs de m.

114 Prendre des initiatives

Raisonner | Modéliser

Un groupe d'amis a gagné les 2 millions d'euros de la cagnotte du Loto.

Ils se partagent équitablement le gain.

Combien sont-ils sachant que l'un d'eux affirme : « Si nous avions été 5 de moins, nous aurions gagné chacun 20 000 € de plus » ?

115 Étudier des rectangles

? Problème ouvert

Chercher | Modéliser

k désigne un nombre réel positif.

Pour quelles valeurs de k existe-t-il des rectangles ayant pour périmètre k et pour aire k (dans des unités de longueur et d'aire associées) ?

116 Étudier une fonction polynôme de degré 3

Calculer

g est la fonction polynôme de degré 3 définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 2x^3 - 7x^2 + x + 10$$

a) Montrer que 2 est une racine évidente de g.

b) Déterminer des nombres réels a, b, c tels que pour tout nombre réel x, $g(x) = (x-2)(ax^2 + bx + c)$.

c) Résoudre l'équation $g(x) = 0$.

117 Algo Étudier l'algorithme de Héron

Raisonner **Calculer**

Héron d'Alexandrie est un mathématicien grec du 1er siècle. On lui attribue plusieurs formules mathématiques et une méthode récursive d'extraction des racines carrées.

1. L'algorithme de Héron d'Alexandrie fournit une valeur approchée de la solution positive de l'équation $x^2 = k$ avec $k \geqslant 1$.

Dans cet algorithme, n désigne la partie entière de $\sqrt{k}$.

$a \leftarrow n$
Pour i allant de 0 à 4
  $a \leftarrow \frac{1}{2}\left(a + \frac{k}{a}\right)$
Fin Pour

a) Coder l'algorithme en langage Python.

b) Saisir ce programme et le tester pour $k = 2$ et $n = 1$ (en effet, $\sqrt{2} \approx 1{,}4$).

2. a) Écrire la forme canonique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

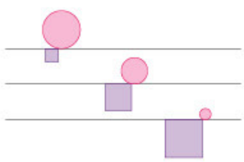
$$f(x) = 3x^2 + 6x + 5$$

b) Montrer que résoudre l'équation $f(x) = 8$ équivaut à résoudre l'équation $(x+1)^2 = 2$.

c) Avec le programme précédent, déterminer des valeurs approchées des solutions de l'équation $f(x) = 8$.

118 Imaginer une stratégie

Modéliser **Raisonner** **Communiquer**



On coupe un segment de longueur 100 cm en deux parties : avec la première on construit un carré et avec la seconde un cercle. Lorsque la figure évolue de gauche à droite du segment, expliquer :

a) comment varie l'aire du carré ? l'aire du disque ?

b) comment varie la somme des deux aires ?

119 Comprendre une situation

Narration de recherche

Raisonner **Modéliser** **Calculer**

Rédiger les différentes étapes de la recherche, sans omettre les fausses pistes et les changements de méthode.

Problème Très pressé de s'acheter une nouvelle tablette, Florian emprunte 180 € à ses parents qui lui demandent de s'engager à rembourser la somme fixe de x euros par mois, pendant n mois, pour avoir tout remboursé.

Florian demande à rembourser 2 € de moins par mois, mais il devra alors rembourser 3 mois de plus.

Déterminer le montant et la durée du remboursement mensuel demandé par ses parents.

120 Résoudre une longue équation

Raisonner **Calculer**

Résoudre l'équation :

$$(x^2 - x + 10)(x^2 - 2x + 20) \times \ldots \times (x^2 - 40x + 400) = 0$$

121 Factoriser $x^n - a^n$

Raisonner **Calculer** **Communiquer**

1. P est la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{P}(x) = x^n - 1$ où n désigne un nombre de $\mathbb{N}^*$.

a) Vérifier que 1 est une racine de P.

b) On admet qu'il existe une fonction polynôme Q de degré $n-1$ telle que $x^n - 1 = (x-1)\mathrm{Q}(x)$.
Déterminer $\mathrm{Q}(x)$.

Conseil

Au chapitre 1, on a rencontré une somme égale à $\dfrac{x^n - 1}{x - 1}$ (avec $x \neq 1$). Laquelle ?

2. h est la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^n - a^n$ où a est un nombre réel et n est un nombre de $\mathbb{N}^*$.

a) Vérifier que a est une racine de h.

b) En s'aidant de la méthode utilisée à la question **1. b)**, proposer une factorisation de $h(x)$ par $x - a$.

3. a) Utiliser les résultats précédents pour factoriser les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 8 \quad \text{et} \quad g(x) = x^4 - 81.$$

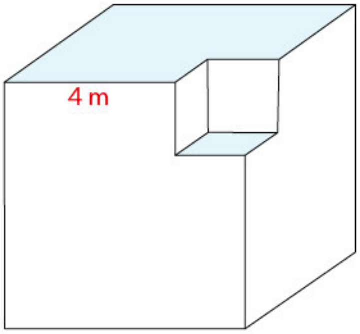
Aurait-on pu procéder autrement pour factoriser $g(x)$? Expliquer la méthode.

b) Déterminer l'ensemble des solutions de chacune des équations $f(x) = 0$ et $g(x) = 0$.

122 Étudier un volume

Modéliser | Raisonner | Calculer

À l'un de ses sommets, un grand cube a été évidé d'un petit cube pour obtenir le solide représenté ci-dessous. Ce solide a un volume de 208 m^3.



Déterminer, en m, l'arête du grand cube.

Des Défis

123 Le nombre d'or

Le nombre d'or, noté ϕ, est la solution positive de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.
Déterminer la valeur exacte de ϕ^{21}.

124 Un lot de cubes

Léopoldine a deux types de cubes : certains ont des arêtes de x centimètres, les autres des arêtes de $x + 2$ centimètres.
Le volume d'un gros cube dépasse de 56 cm^3 le volume d'un petit cube.
Déterminer la longueur de l'arête d'un petit cube.

OBJECTIF BAC

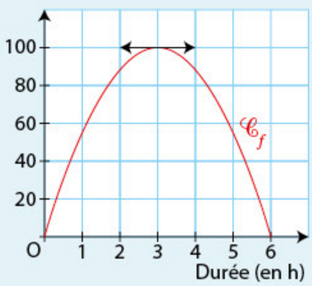
125 Algo Relier mathématiques et économie

40 min

D'après Bac 2018, Amérique du Nord

On appelle fonction de satisfaction toute fonction qui prend ses valeurs entre 0 et 100.
Lorsque la valeur 100 est atteinte, on dit qu'il y a « saturation ».
Les parties A, B et C peuvent être traitées indépendamment.

Partie A. Un étudiant prépare un concours, pour lequel sa durée de travail varie entre 0 et 6 h par jour. Il modélise sa satisfaction en fonction de son temps de travail quotidien par la fonction « satisfaction » f dont la courbe représentative est donnée ci-dessus.



Déterminer par lecture graphique, la durée de travail conduisant à un état de « saturation ».

Partie B. La fonction « envie » correspondant à la fonction de satisfaction précédente est donnée par :

$$g(x) = -\frac{200}{9}x + \frac{200}{3}$$

On admet qu'il y a « souhait » lorsque la fonction « envie » est positive ou nulle et « rejet » lorsque la fonction « envie » est strictement négative.
Recopier et compléter l'algorithme suivant, pour qu'il affiche l'état d'esprit de cet étudiant. La variable t représente la durée du travail, en h, de l'étudiant

```
y ← −(200/9) t + 200/3
Si y ⩾ …
   Afficher "…"
   sinon
   Afficher "…"
Fin Si
```

Partie C. Dans cette partie, on considère la fonction de satisfaction correspondant à la satisfaction d'un(e) client(e) d'un institut de beauté qui s'est offert un massage d'une heure.
La fonction est définie sur l'intervalle $[0\,;60]$ par :

$$h(x) = -\frac{1}{36}x^2 + \frac{10}{3}x$$

où x représente la durée du massage en minute.

a) Déterminer à quel instant va être atteint « la saturation ».

b) La personne est dite « heureuse » lorsque la satisfaction est supérieure à 60. Déterminer à partir de quel instant la personne sera « heureuse ».

126 Calculer le volume d'une piscine

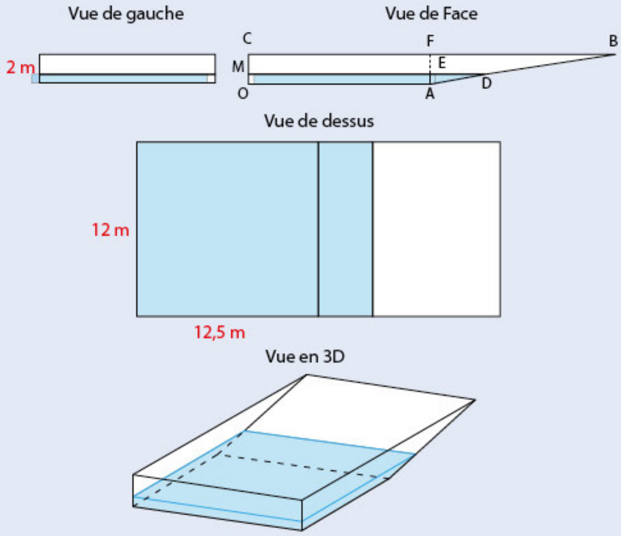
La situation problème

Une piscine de 25 m de long et de 2 m de profondeur est à fond plat sur 12,5 m et à fond incliné sur 12,5 m également. Les propriétaires souhaitent remplir cette piscine.

Utiliser les différentes informations pour déterminer la hauteur d'eau, en m, maximum dans la piscine.

Arrondir au dixième.

DOC 1 Plan de la piscine



DOC 2 Économie d'eau

Les propriétaires de la piscine souhaitent cependant que le remplissage de la piscine ait un coût inférieur à 1 200 €.

Dans la ville où est construite cette piscine, le tarif de l'eau est de 3 € par m^3.

127 Construire un aquarium

La situation problème

Philippe va fabriquer un aquarium en forme de parallélépipède rectangle. Il a choisi pour dimensions, en dm, trois nombres entiers consécutifs (Longueur > Hauteur > Largeur).

Utiliser les différentes informations pour déterminer les dimensions, en dm, et le coût, en euro, de l'aquarium. *Arrondir au dixième.*

DOC 1 Achat du matériel

Philippe a repéré chez « Bricoltout » un joint adhésif renforcé (à poser sur toutes les arêtes, même sur le haut de l'aquarium) qui coûte 20 centimes d'euro le décimètre et le verre à utiliser qui est à 50 € le mètre carré (la découpe étant offerte).

DOC 2 Informations sur l'aquarium

Philippe note avec amusement que le volume, en dm^3, de son aquarium sera égal à quatre fois la longueur, en dm, de joint acheté.

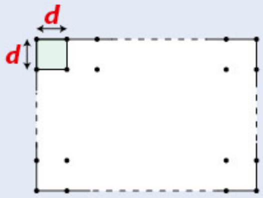
128 Estimer un coût

La situation problème

Pierre possède une parcelle de 369 pommiers.
Utiliser les différentes informations pour déterminer le coût du ramassage de sa production.

DOC 1 Informations sur la parcelle

Le champ de Pierre est rectangulaire de longueur 140 m et de largeur 28 m. Les pommiers ont été plantés régulièrement en quadrillage avec un pommier à chaque coin de la parcelle.



DOC 2 Deux procédés de ramassage

Selon la distance entre deux rangées, Pierre pourra utiliser deux procédés de ramassage.

- Distance strictement inférieure à 2 m : exclusivement ramassage manuel. Le coût pour 1 h de ramassage est de 20 € par heure.
- Distance comprise entre 2 m et 5 m : ramassage à l'aide d'un tracteur de taille moyenne. Le coût pour 1 h de ramassage est de 75 €.

Le ramassage se fait dans le sens de la longueur (rangées les plus longues).

DOC 3 Durée du ramassage

- Ramassage manuel : il faut 5 h pour ramasser la production d'une rangée de pommiers.
- Ramassage « tracteur taille moyenne » : le ramassage d'une rangée se fait en 1 h.

129 Étudier un bénéfice

La situation problème

Une entreprise produit de la pâte à papier. Elle lance une étude sur ses ventes et ses coûts de production.
Utiliser les différentes informations pour déterminer dans quel intervalle doit se situer sa production quotidienne, en tonne, pour que la production soit rentable, ainsi que le bénéfice maximum réalisé par l'entreprise.

DOC 1 Coûts fixes

Le service comptabilité a établi la liste des coûts fixes, notés C_F, par jour de production.

- Salaires et charges du personnel : 650 €
- Assurances : 200 €
- Location du matériel : 150 €

DOC 2 Coûts variables

Les coûts variables correspondent aux charges qui varient en fonction de la quantité produite.
Sont inclus dans les coûts variables : l'électricité pour faire fonctionner les machines, l'eau, l'achat du bois qui sert à produire la pâte à papier. Les coûts variables sont donnés par :

$$C_V(q) = q^2 + 632q$$

où q représente la quantité, en tonne, de pâte à papier produite.

DOC 3 Équilibre de l'activité

L'activité est à l'équilibre lorsque l'entreprise produit et vend 20 tonnes de pâte à papier.