Géométrie

L'actualité des maths

GÉOMÉTRIE ET MÉDECINE

De nombreux laboratoires de sciences appliquées, comme l'ETH Zurich, en Suisse, travaillent en étroite collaboration avec les équipes médicales.

L'étude de la texture, de la masse, de l'élasticité et surtout de la géométrie de nos organes est au cœur de leurs travaux. Réalisé grâce à des imprimantes 3D, on peut voir ci-dessous un modèle de cœur artificiel.

Répliquer des organes

Grow Home® d'Ubisoft

GÉOMÉTRIE ET CONCEPTION DE JEUX VIDÉOS

Le « low-poly » est une technique d'infographie 3D permettant de représenter un objet ou un personnage grâce à un maillage par des polygones. Cette technique est, par exemple, utilisée dans le développement de jeux vidéos indépendants – c'est-à-dire ayant peu de moyens financiers – car les personnages et les décors sont alors moins chers à créer et plus simples à programmer.

Plus le nombre de polygones utilisé est important, plus les détails sont précis.

Maths et art

Cette installation a été présentée à Bratislava, en Slovaquie, en 2016, sous le titre From the future. *Elle a été réalisée par l'artiste italienne* **Esther Stocker**.

Cette artiste a déjà investi toutes sortes de lieux, toujours en noir et blanc, avec des objets géométriques en deux ou trois dimensions, tels que des polygones, parfois incomplets.

Histoire des maths

6e SIECLE AV. J.-C.
LA GÉOMÉTRIE COMME SCIENCE PRATIQUE

C'est **Thalès de Milet** qui aurait rapporté la géométrie d'Égypte. Le philosophe et mathématicien ne considère alors pas la géométrie comme une science abstraite, mais comme une science pratique. Elle servait, par exemple, aux arpenteurs du cadastre égyptien à re-délimiter les contours des terrains après une crue du Nil.

Le Nil en crue

DU 4e SIECLE AU 2e SIÈCLE AV. J.-C.
RAISONNEMENT DÉDUCTIF ET TRIGONOMÉTRIE

Au 4e siècle avant J.-C., la géométrie est en pleine expansion, notamment en Grèce avec **Aristote** et **Platon**.

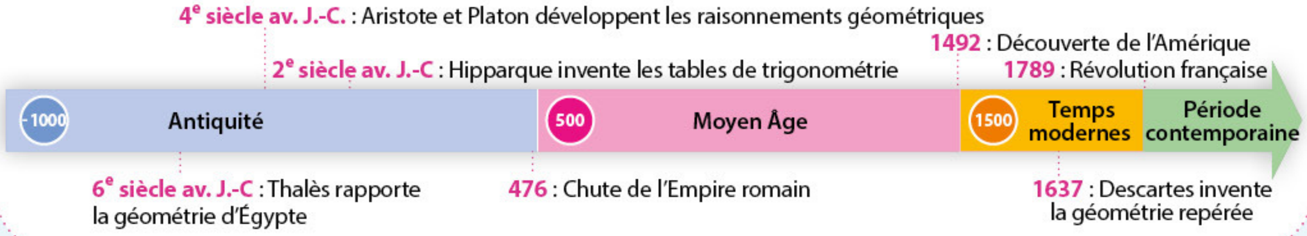
Platon est fasciné par cette science qui utilise le raisonnement déductif, c'est-à-dire qui, à partir d'une idée admise ou d'une hypothèse, permet de déduire des résultats. Bâtie au cœur d'Athènes, l'Académie de Platon portait, gravée sur le fronton, la devise : *« Nul n'entre ici s'il n'est géomètre. »*

Au 2e siècle av. J.-C., le grec Hipparque serait l'inventeur des tables de trigonométrie, utilisées notamment en astronomie.

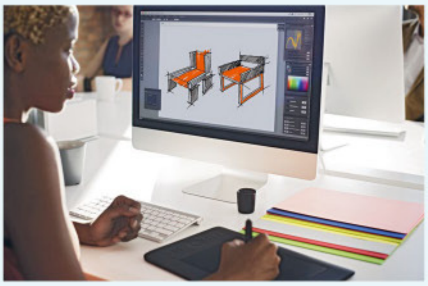
L'École d'Athènes, de Raphaël

17e SIÈCLE
NAISSANCE DE LA GÉOMÉTRIE REPÉRÉE

Sous l'Antiquité, l'algèbre se développe peu car les mathématiciens ont souvent recours à la géométrie. Les travaux du philosophe et mathématicien français **René Descartes** (1596 – 1650), en particulier la géométrie repérée, permettent de faire le lien entre la géométrie, l'algèbre, la physique, etc., et de développer différents domaines scientifiques.



Zoom sur un métier



La **designeuse industrielle** imagine le design, c'est-à-dire l'esthétique, des nouveaux objets de notre vie quotidienne, tout en prenant en compte leur aspect technique. Elle collabore avec une équipe pluridisciplinaire, souvent au sein d'une agence de design.

Elle suit toute la conception de ces nouveaux objets, de l'idée jusqu'à la réalisation.

Parcours classique	
	1re et terminale : choix des spécialités scientifiques (Physique Chimie, Sciences de l'ingénieur ou Sciences informatiques)
2 ans	BTS design de produits ou de conception des produits industriels
1 an	Diplôme national des métiers des arts et du design
2 ans	École d'ingénieur mention créateur industriel ou Master option design

Métiers des maths

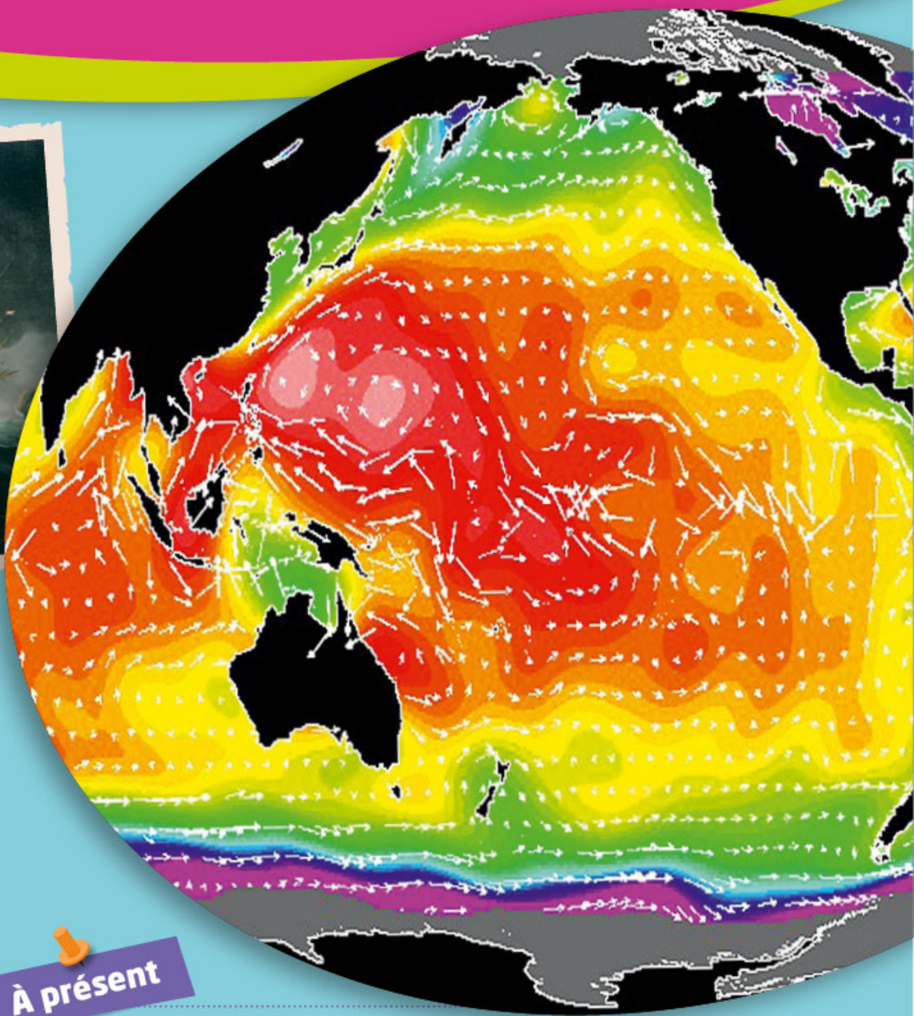
Urbaniste
Pilote de ligne
Prévisionniste météo
Technicien en avionique
Optronicien
Web designer
Tailleur de pierre
Ingénieur en énergies renouvelables
Home stager
Technicien de police scientifique
Collaborateur d'architecte
Ingénieur naval
Vétérinaire

Orientation ⊕ d'infos sur **secondes2018-2019.fr** onisep

5 Vecteurs et opérations

Avant

▶ La loi de l'attraction universelle de Newton (1642-1727) décrit la gravité comme une force représentée par un vecteur. Elle permet d'expliquer, mais de façon imparfaite, le phénomène complexe des marées.

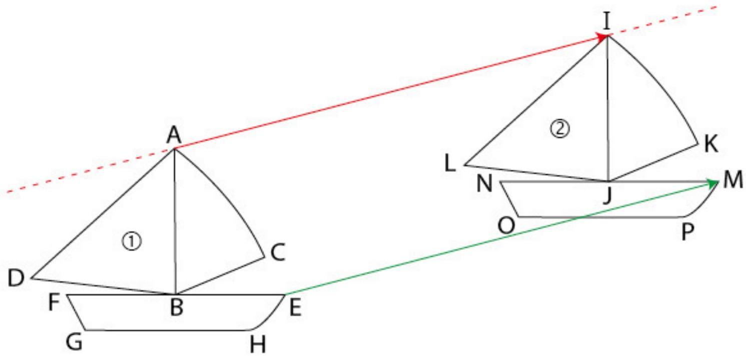


À présent

▶ Les observations par satellites océanographiques ont pour objet l'étude de la dynamique des océans et permettent d'en savoir plus sur les courants et les marées.

Les capacités travaillées dans ce chapitre	Exercices
• Représenter géométriquement des vecteurs.	1, 3, 13 à 19
• Connaître les coordonnées des vecteurs.	2, 4, 20, 21, 23, 25
• Calculer les coordonnées du milieu d'un segment.	22, 24, 26, 27
• Calculer une distance, une norme.	5, 7, 28 à 37, 51, 52
• Construire géométriquement la somme de deux vecteurs.	6, 8, 38 à 44
• Calculer les coordonnées des vecteurs $\vec{u}+\vec{v}$ et $\lambda\vec{u}$.	45 à 48
• Connaître et utiliser la colinéarité.	9 à 12, 53 à 64
• Résoudre des problèmes avec une représentation adaptée des vecteurs.	49, 50, 79, 82, 91, 95, 99

1 Vecteurs et translations

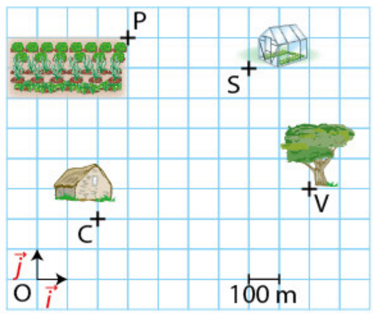


1 On fait glisser ce voilier (fig. ①) le long de la droite (AI), dans le sens de A vers I et d'une longueur AI, on obtient alors la figure ②.
Ce glissement est appelé **translation de vecteur $\overrightarrow{AI}$** et on dit que **le point I est l'image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{AI}$.**
Quelles sont les images des points C et D par cette translation ?

2 On considère maintenant la translation de vecteur $\overrightarrow{EM}$.
a) Par cette translation, la figure ① glisse-t-elle vers la figure ② ?
On dit alors que les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{EM}$ sont **égaux**.
b) Quelle est la nature du quadrilatère AEMI ? Justifier.
c) Citer d'autres vecteurs égaux au vecteur $\overrightarrow{EM}$.

2 Coordonnées de vecteurs

Louise a reçu un plan simplifié du jardin public de sa ville.
Ce plan est muni d'un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$) (*unité* : 100 m).



1 **a)** Reproduire ce repère et placer les points C, V, S et P.
b) Louise se trouve à la cabane (C) et se dirige en ligne droite vers le vieil arbre (V). Tracer le vecteur $\overrightarrow{CV}$ de son déplacement.
On dit que le vecteur $\overrightarrow{CV}$ a pour **coordonnées** (7 ; 1) dans la **base** ($\vec{i}$, $\vec{j}$).
c) Tracer le vecteur $\overrightarrow{VS}$. Quelles sont ses coordonnées ?

2 Louise pouvait se rendre directement de la cabane à la serre (S).
a) Tracer le vecteur $\overrightarrow{CS}$. Quelles sont ses coordonnées ?
b) Comment obtenir les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CS}$ à partir de celles des vecteurs $\overrightarrow{CV}$ et $\overrightarrow{VS}$?

3 Depuis la serre, Louise se rend au potager (P) puis revient sur ses pas.
a) Tracer le vecteur $\overrightarrow{SP}$ et donner ses coordonnées.
b) Tracer le vecteur $\overrightarrow{PS}$ et donner ses coordonnées.
On dit que ces deux vecteurs sont **opposés**.

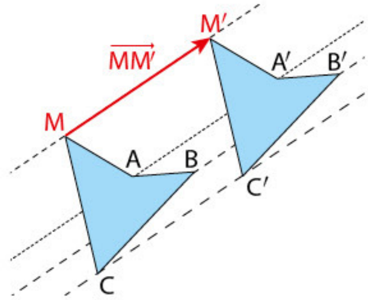
Cours

1 Notion de vecteur

A Translations et vecteurs

Définitions

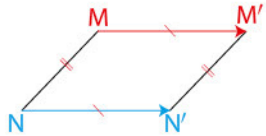
M et M' sont deux points distincts du plan.
La translation qui transforme M en M' est appelée **translation de vecteur $\overrightarrow{MM'}$.**
Le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a pour **direction** celle de la droite (MM'), pour **sens** celui de M vers M' et pour **norme** la longueur MM'.



Par la translation de vecteur $\overrightarrow{MM'}$, les points M, A, B, C ont pour images respectives les points M', A', B', C'.

Image N' d'un point N par la translation de vecteur $\overrightarrow{MM'}$

1er cas : $N \notin (MM')$
N' est le point tel que $MM'N'N$ est un **parallélogramme.**

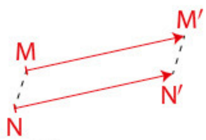


2^{e} cas : $N \in (MM')$
N' est le point de la droite (MM') tel que $MM' = NN'$ et tel que le sens de N vers N' est le même que celui de M vers M'.

B Égalité de deux vecteurs

Définition

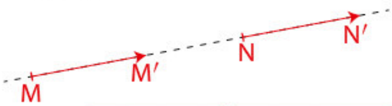
Lorsque la translation qui transforme M en M' transforme également N en N', on dit que les vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{NN'}$ sont **égaux.**
On note $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'}$.



$\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{NN'}$ ont même direction, même sens et même longueur.

Propriété

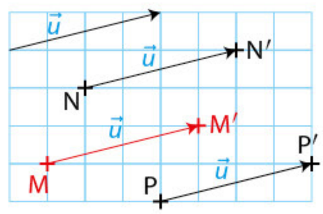
$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'}$ **si, et seulement si,** le quadrilatère $MM'N'N$ est un parallélogramme (éventuellement aplati).



En effet, cela se déduit immédiatement de ce qui précède.

- **Notation $\vec{u}$**

Il existe une infinité de vecteurs égaux au vecteur $\overrightarrow{MM'}$.
Par exemple, sur la figure ci-contre $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'} = \overrightarrow{PP'} = \dots$
Ce vecteur peut être noté $\vec{u}$ et on dit que $\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{NN'}, \overrightarrow{PP'}, \dots$ sont des **représentants** du vecteur $\vec{u}$.



- **Des vecteurs particuliers**

La translation qui transforme le point M en lui-même est la translation de vecteur $\overrightarrow{MM}$.
Le vecteur $\overrightarrow{MM}$ est appelé **vecteur nul ;**
on le note $\vec{\mathbf{0}}$.
Ainsi $\overrightarrow{MM} = \vec{0}$.

La translation qui transforme le point M' en M est la translation de vecteur $\overrightarrow{M'M}$.
Le vecteur $\overrightarrow{M'M}$ est appelé **opposé** du vecteur $\overrightarrow{MM'}$.

2 Coordonnées

A Coordonnées d'un point dans un repère orthonormé

Propriétés - Définition

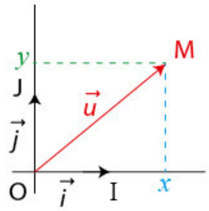
- Un **repère orthonormé** d'origine O est un triplet (O ; I, J) tel que le triangle OIJ est rectangle isocèle en O.
- Tout point M est repéré par un unique couple de **coordonnées** $(x\,;y)$.

x est l'**abscisse** de M et y est l'**ordonnée** de M.

B Coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée

Définitions

- Un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\mathrm{I},\mathrm{J})$ est aussi noté $(\mathrm{O}\,;\vec{i},\vec{j})$ avec $\vec{i}=\overrightarrow{\mathrm{OI}}$ et $\vec{j}=\overrightarrow{\mathrm{OJ}}$.
- On dit que $(\vec{i},\vec{j})$ est une **base orthonormée**.
- Les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j})$ sont les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\vec{u}$.



Exemples

$\vec{i}$ a pour coordonnées $(1\,;0)$ et $\vec{j}$ a pour coordonnées $(0\,;1)$.

Propriété

Deux vecteurs sont égaux **si, et seulement si**, leurs coordonnées sont égales.
C'est-à-dire $\vec{u}(x\,;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ sont égaux **si, et seulement si**, $x=x'$ et $y=y'$.

Démonstration

M et M′ sont les points tels que $\vec{u}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{\mathrm{OM'}}$. Ainsi $\vec{u}=\vec{v}$ si, et seulement si, $\mathrm{M}=\mathrm{M'}$, c'est-à-dire M et M′ ont les mêmes coordonnées, autrement dit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont les mêmes coordonnées.

C Calculs avec les coordonnées

Propriétés (1 et 2 admises)

$(\mathrm{O}\,;\vec{i},\vec{j})$ est un repère orthonormé. $\mathrm{A}(x_\mathrm{A}\,;y_\mathrm{A})$, $\mathrm{B}(x_\mathrm{B}\,;y_\mathrm{B})$ sont deux points et $\vec{u}(x\,;y)$ est un vecteur.

(1) Le **milieu** I du segment [AB] a pour coordonnées $(x_\mathrm{I}\,;y_\mathrm{I})$ avec $\boldsymbol{x_\mathrm{I}=\dfrac{x_\mathrm{A}+x_\mathrm{B}}{2}}$ et $\boldsymbol{y_\mathrm{I}=\dfrac{y_\mathrm{A}+y_\mathrm{B}}{2}}$.

(2) Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ sont $\boldsymbol{(x_\mathrm{B}-x_\mathrm{A}\,;y_\mathrm{B}-y_\mathrm{A})}$.

(3) La **norme** du vecteur $\vec{u}$, notée $\|\vec{u}\|$, est $\boldsymbol{\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2}}$.

(4) La **distance** entre les points A et B est $\boldsymbol{\mathrm{AB}=\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\|=\sqrt{(x_\mathrm{B}-x_\mathrm{A})^2+(y_\mathrm{B}-y_\mathrm{A})^2}}$.

Démonstrations

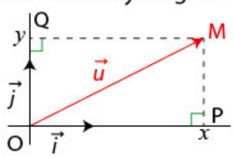
(3) Cas où $x>0$ et $y>0$

On note $\mathrm{M}(x\,;y)$, $\mathrm{P}(x\,;0)$ et $\mathrm{Q}(0\,;y)$. Dans le triangle OMP rectangle en P, le théorème de Pythagore permet d'écrire $\mathrm{OM}^2=\mathrm{OP}^2+\mathrm{PM}^2$ or $\mathrm{OP}=x$ et $\mathrm{PM}=\mathrm{OQ}=y$,

donc $\mathrm{OM}^2=x^2+y^2$.

Alors $\|\vec{u}\|=\mathrm{OM}=\sqrt{x^2+y^2}$ (car OM est un nombre positif).

(4) La propriété découle immédiatement des propriétés **(2)** et **(3)**.

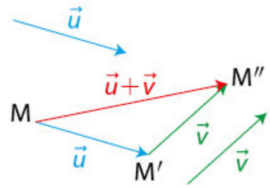


3 Somme de vecteurs

A Vecteur somme

Définition

La **somme** de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur associé à la translation qui résulte de l'enchaînement des translations de vecteur $\vec{u}$ et de vecteur $\vec{v}$. On note ce vecteur $\vec{\boldsymbol{u}}+\vec{\boldsymbol{v}}$.

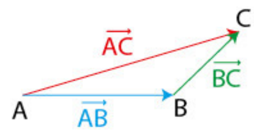


B Construction du vecteur somme

Pour construire la somme de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on peut utiliser l'une des deux propriétés suivantes.

Relation de Chasles

Pour tous points A, B et C : $\overrightarrow{\mathbf{AB}}+\overrightarrow{\mathbf{BC}}=\overrightarrow{\mathbf{AC}}$

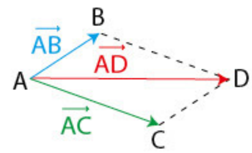


Propriété

Règle du parallélogramme

A, B et C sont trois points.

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ **si, et seulement si**, ABDC est un parallélogramme.



Démonstration

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ si, et seulement si, d'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}$. Ainsi, $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ **si, et seulement si**, ABDC est un parallélogramme.

C Coordonnées du vecteur somme

Propriété

$(\mathrm{O}\,;\vec{i},\vec{j})$ est un repère orthonormé.

Si $\vec{u}(x\,;y)$ et $\vec{v}(x';y')$, alors $\vec{\boldsymbol{u}}+\vec{\boldsymbol{v}}(x+x'\,;y+y')$.

Démonstration

On note $\vec{u}=\overrightarrow{OM}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{MN}$. Alors $\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}$. Donc les coordonnées du vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ sont celles du point N. Or $\vec{v}=\overrightarrow{MN}$, donc les coordonnées de ces vecteurs sont égales c'est-à-dire : $x'=x_{\mathrm{N}}-x$ et $y'=y_{\mathrm{N}}-y$. D'où $x_{\mathrm{N}}=x+x'$ et $y_{\mathrm{N}}=y+y'$, soit $\vec{u}+\vec{v}(x+x'\,;y+y')$.

Propriétés

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$:

(1) $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$ **(2)** $\vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}$ **(3)** $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$

Démonstrations

Dans une base orthonormée $(\vec{i},\vec{j})$: $\vec{u}(x;y)$, $\vec{v}(x';y')$ et $\vec{w}(x'',y'')$.

(1) $\vec{u}+\vec{v}(x+x';y+y')$, $\vec{v}+\vec{u}(x'+x\,;y'+y)$ donc $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$.

(2) $\vec{0}(0;0)$ donc $\vec{u}+\vec{0}(x;y)$ et $\vec{0}+\vec{u}(x;y)$. Ainsi $\vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}$.

(3) $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}((x+x')+x'';(y+y')+y'')$, c'est-à-dire $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}(x+x'+x'';y+y'+y'')$.

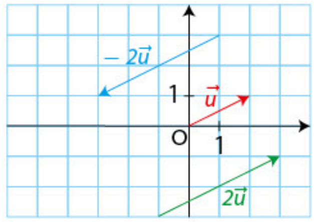
De la même façon, $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})(x+x'+x'';\,y+y'+y'')$, donc $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$.

4 Produit d'un vecteur par un nombre réel

A Le vecteur $\lambda\vec{u}$

Définition

λ désigne un nombre réel et $\vec{u}$ un vecteur de coordonnées $(x\,;y)$ dans une base orthonormée.
Le vecteur $\lambda\vec{u}$ est le vecteur de coordonnées $(\lambda x\,;\lambda y)$.



On admet que le vecteur $\lambda\vec{u}$ ainsi défini ne dépend pas de la base choisie.

Exemples

- Dans la base ci-contre, $\vec{u}(2\,;1)$, $2\vec{u}(4\,;2)$ et $-2\vec{u}(-4\,;-2)$.
  $\vec{u}$ et $2\vec{u}$ ont le même sens, $\vec{u}$ et $-2\vec{u}$ ont des sens contraires.
- I est le milieu d'un segment $[AB]$ équivaut à $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Propriétés (admises)

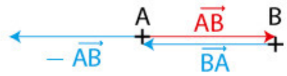
(1) Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et tous nombres réels λ et λ' :
- $\lambda(\vec{u}+\vec{v}) = \lambda\vec{u}+\lambda\vec{v}$
- $(\lambda+\lambda')\vec{u} = \lambda\vec{u}+\lambda'\vec{u}$
- $\lambda(\lambda'\vec{u}) = (\lambda\lambda')\vec{u}$

(2) Pour tout vecteur $\vec{u}$ et tout nombre réel λ :

$\lambda\vec{u} = \vec{0}$ **si, et seulement si,** $\lambda = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$

Notations

- Le vecteur $(-1)\vec{u}$, opposé du vecteur $\vec{u}$, est noté $-\vec{u}$, c'est le seul vecteur tel que $\vec{u}+(-\vec{u}) = \vec{0}$.
  Or, on sait que $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA} = \vec{0}$, donc $\overrightarrow{\mathbf{BA}} = -\overrightarrow{\mathbf{AB}}$.



- La différence $\vec{u}-\vec{v}$ est le vecteur $\vec{u}+(-\vec{v})$.

B Décomposition d'un vecteur

Propriété

$(\vec{i}, \vec{j})$ est une base orthonormée, $\vec{u}$ est un vecteur et x, y désignent des nombres réels.
$\vec{u}$ a pour coordonnées $(x\,;y)$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ **si, et seulement si,** $\boldsymbol{\vec{u} = x\vec{i}+y\vec{j}}$.

Démonstration

$\vec{i}(1\,;0)$ et $\vec{j}(0\,;1)$ donc $x\vec{i}(x\,;0)$, $y\vec{j}(0\,;y)$ et $x\vec{i}+y\vec{j}(x\,;y)$. L'équivalence est alors démontrée car deux vecteurs sont égaux si, et seulement si, ils ont les mêmes coordonnées.

C Norme du vecteur $\lambda\vec{u}$

Propriété

Pour tout vecteur $\vec{u}$ et tout nombre réel λ, $\|\lambda\vec{u}\| = |\lambda|\|\vec{u}\|$.

Démonstration

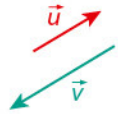
Dans une base orthonormée, $\vec{u}(x\,;y)$ donc $\lambda\vec{u}(\lambda x\,;\lambda y)$ et $\|\lambda\vec{u}\| = \sqrt{(\lambda x)^2+(\lambda y)^2} = \sqrt{\lambda^2(x^2+y^2)}$, soit $\|\lambda\vec{u}\| = \sqrt{\lambda^2}\sqrt{x^2+y^2}$. Or, $\sqrt{\lambda^2} = |\lambda|$ (voir p. 45) donc $\|\lambda\vec{u}\| = |\lambda|\|\vec{u}\|$.

5 Colinéarité de deux vecteurs

A Colinéarité des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$

Définition

- Dire que deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** signifie qu'il existe un nombre réel λ tel que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$, autrement dit que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont même direction.
- On convient que le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.



Propriété - Définition

$(\vec{i}, \vec{j})$ est une base orthonormée.
Les vecteurs $\vec{u}(x\,;y)$ et $\vec{v}(x'\,;y')$ sont colinéaires **si, et seulement si,** $xy' - x'y = 0$.
Le nombre $xy' - x'y$ est appelé **déterminant du vecteur $\vec{u}$ et du vecteur $\vec{v}$.**

Démonstration

- On suppose que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

– Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, alors $x = 0$, $y = 0$ ou $x' = 0$, $y' = 0$ donc $xy' - x'y = 0$.
– Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls, alors il existe un nombre réel λ tel que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$.
Ainsi $x' = \lambda x$ et $y' = \lambda y$ et on en déduit que $xy' - x'y = x(\lambda y) - (\lambda x)y = 0$.

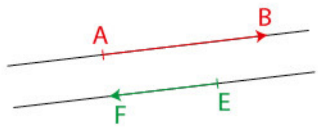
- Réciproquement, on suppose que $xy' - x'y = 0$.

– Si $\vec{u} = \vec{0}$, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
– Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, alors l'une au moins de ses coordonnées est non nulle, par exemple $x \neq 0$.
Donc $y' = \dfrac{x'}{x}y$, c'est-à-dire $y' = \lambda y$ avec $\lambda = \dfrac{x'}{x}$. Ainsi $\vec{v}$ a pour coordonnées $(\lambda x\,;\lambda y)$ et $\vec{v} = \lambda\vec{u}$.
(Si $y \neq 0$, on obtient le même résultat avec $\lambda = \dfrac{y'}{y}$.)

B Applications au parallélisme et à l'alignement

Propriété

Deux droites (AB) et (EF) sont parallèles **si, et seulement si**, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires.



Démonstration

Dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires signifie qu'ils ont la même direction, c'est-à-dire que les droites (AB) et (EF) sont parallèles.

Propriété

Trois points A, B, C sont alignés **si, et seulement si**, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Démonstration

Cas où A, B, C sont deux à deux distincts

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires si, et seulement si, les droites (AB) et (AC) sont parallèles, c'est-à-dire confondues car elles ont le point A en commun. Ainsi A, B, C sont alignés.

Remarque : il est clair que l'on peut substituer à la condition « $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ colinéaires » l'une des conditions « $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ colinéaires » ou « $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$ colinéaires », ou…

EXERCICES RÉSOLUS

1 Représenter et utiliser des vecteurs

→ Cours 1

a) Tracer un triangle ABC et construire le point K tel que $\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{BA}$.

b) Construire le point L tel que les vecteurs $\overrightarrow{BL}$ et $\overrightarrow{BC}$ soient opposés.

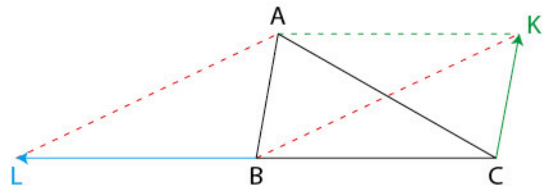
c) Démontrer que le quadrilatère LBKA est un parallélogramme.

Solution

a) On trace un triangle ABC puis on construit le point K tel que CKAB soit un parallélogramme. Ainsi $\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{BA}$.

b) Le vecteur opposé à $\overrightarrow{BC}$ est $\overrightarrow{CB}$. On construit alors le point L tel que $\overrightarrow{BL} = \overrightarrow{CB}$.

c) CKAB est un parallélogramme donc $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{KA}$, or $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BL}$ donc $\overrightarrow{KA} = \overrightarrow{BL}$ et LBKA est un parallélogramme.



2 Lire ou calculer les coordonnées d'un vecteur

→ Cours 2

Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(1\,;3)$ et $B(4\,;-1)$.

a) Placer les points A et B. Tracer le vecteur $\overrightarrow{AB}$ et lire ses coordonnées.

b) Construire le vecteur $\overrightarrow{AC}$ de coordonnées $(-3\,;-2)$.

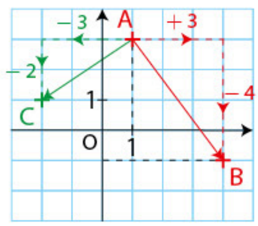
c) Déterminer les coordonnées du point D tel que ABDC soit un parallélogramme.

Solution

a) On place les points A et B. À partir du point A, on se déplace horizontalement de 3 unités vers la droite puis verticalement de 4 unités vers le bas, jusqu'au point B. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(3\,;-4)$.

b) À partir du point A, on se déplace horizontalement (-3) puis verticalement (-2) pour placer le point C. Puis, on trace le vecteur $\overrightarrow{AC}$.

c) ABDC est un parallélogramme si, et seulement si, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$. On note $(x\,;y)$ les coordonnées de D, alors $\overrightarrow{BD}(x-4\,;y+1)$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ équivaut à $x-4=-3$ et $y+1=-2$, soit $x=1$ et $y=-3$.
Les coordonnées de D sont $(1\,;-3)$.



Pour calculer les coordonnées de D, on peut aussi utiliser : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 1

3 **a)** Tracer un triangle ABC et construire le point D tel que $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$.

b) Construire le point J tel que les vecteurs $\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{AB}$ soient opposés.

c) Quelle est la nature du quadrilatère DCJA ?

Sur le modèle de l'exercice résolu 2

4 Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(-2\,;1)$ et $B(2\,;4)$.

a) Tracer le vecteur $\overrightarrow{AB}$ et lire ses coordonnées.

b) Construire le vecteur $\overrightarrow{AC}$ de coordonnées $(1\,;-4)$.

c) Déterminer les coordonnées du point D tel que ABDC soit un parallélogramme.

EXERCICES RÉSOLUS

5 Calculer la distance entre deux points

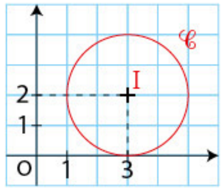
→ Cours 2. C

Dans un repère orthonormé, $\mathscr{C}$ est le cercle de centre $\mathrm{I}(3\,;2)$ et de rayon 2.

1. a) A est le point de coordonnées $(4{,}7\,;3)$.
Calculer la distance IA.

b) Le point A appartient-il au cercle $\mathscr{C}$?

2. Le point $\mathrm{B}(4\,;2+\sqrt{3})$ appartient-il au cercle $\mathscr{C}$?



Solution

1. a) $\mathrm{IA}=\sqrt{(4{,}7-3)^2+(3-2)^2}=\sqrt{1{,}7^2+1^2}=\sqrt{3{,}89}$

b) $\mathscr{C}$ a pour rayon 2 et $\mathrm{IA}\neq 2$ donc le point A n'appartient pas au cercle $\mathscr{C}$.

2. $\mathrm{IB}=\sqrt{(4-3)^2+(2+\sqrt{3}-2)^2}=\sqrt{1^2+\sqrt{3}^2}=\sqrt{4}=2$

La distance IB est égale au rayon de $\mathscr{C}$ donc le point B appartient au cercle $\mathscr{C}$.

Le cercle de centre I et de rayon r est l'ensemble des points M tels que $\mathrm{IM}=r$.

6 Construire la somme de deux vecteurs

→ Cours 3. A et B

ABCD est un rectangle de centre I.

a) Construire le représentant d'origine C du vecteur $\vec{u}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{CI}}$.

b) À quel vecteur de la figure le vecteur $\vec{u}$ semble-t-il égal ? Prouver cette conjecture.

Solution

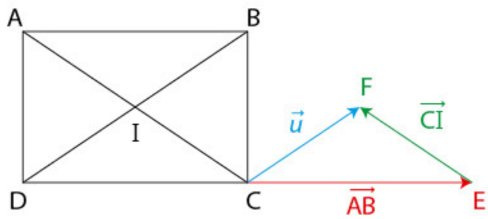
a) On construit le point E tel que $\overrightarrow{\mathrm{CE}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, puis le point F tel que $\overrightarrow{\mathrm{EF}}=\overrightarrow{\mathrm{CI}}$.

Alors $\vec{u}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{CI}}=\overrightarrow{\mathrm{CE}}+\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ donc, d'après la relation de Chasles, $\vec{u}=\overrightarrow{\mathrm{CF}}$.

b) Il semble, sur la figure, que $\vec{u}=\overrightarrow{\mathrm{DI}}$.

En effet, $\vec{u}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{CI}}$, or ABCD est un rectangle donc $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ et $\vec{u}=\overrightarrow{\mathrm{DC}}+\overrightarrow{\mathrm{CI}}$.

D'après la relation de Chasles, $\vec{u}=\overrightarrow{\mathrm{DI}}$.



EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 5

7 Dans un repère orthonormé, Γ est le cercle de centre $\mathrm{K}(5\,;4)$ et de rayon 3.

1. a) A est le point de coordonnées $(6\,;6{,}8)$.
Calculer la distance KA.

b) Le point A appartient-il au cercle Γ ?

2. Dans chaque cas, dire si le point appartient au cercle Γ.

- $\mathrm{B}(5;7)$
- $\mathrm{C}(7;4+\sqrt{5})$
- $\mathrm{D}(-2;4)$

3. E est le point de coordonnées $(5;1)$.
Le segment $[\mathrm{BE}]$ est-il un diamètre de Γ ?

Sur le modèle de l'exercice résolu 6

8 ABCD est un parallélogramme.
I est le milieu du côté $[\mathrm{BC}]$.

1. a) Construire le représentant d'origine B du vecteur $\vec{v}=\overrightarrow{\mathrm{DC}}+\overrightarrow{\mathrm{IA}}$.

b) À quel vecteur de la figure obtenue le vecteur $\vec{v}$ semble-t-il égal ?
Prouver cette conjecture.

2. Construire le représentant d'origine I du vecteur $\vec{w}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{ID}}+\overrightarrow{\mathrm{CI}}$.
Que peut-on conjecturer ? Prouver cette conjecture.

EXERCICES RÉSOLUS

9 Démontrer un alignement

→ Cours 4. A et 5. B

ABC est un triangle.
M et N sont les points tels que $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$.

a) Construire une figure.

b) Démontrer que $\overrightarrow{AN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$.

c) En déduire que les points A, C, N sont alignés.

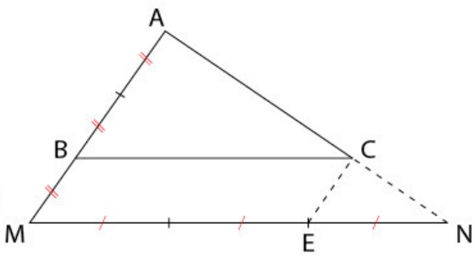
Solution

a) Voici la figure ci-contre, où le point E est tel que $\overrightarrow{ME} = \overrightarrow{BC}$.

b) D'après la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{3}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}.$$

c) Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont colinéaires donc les points A, C et N sont alignés.



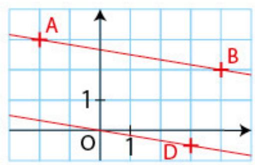
10 Démontrer un parallélisme avec les coordonnées

→ Cours 5

Dans un repère orthonormé d'origine O, on donne les points :

$$A(-2\ ;3),\ \ B(4\,;2),\ \ D\left(3\ ;\ -\frac{1}{2}\right)$$

Démontrer que les droites (AB) et (OD) sont parallèles.



Solution

$\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(4-(-2)\ ;2-3)$, soit $(6\ ;\ -1)$.

$\overrightarrow{OD}$ a pour coordonnées $\left(3\ ;\ -\frac{1}{2}\right)$.

Le déterminant du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et du vecteur $\overrightarrow{OD}$ est :

$$6\times\left(-\frac{1}{2}\right) - 3\times(-1) = -3+3 = 0$$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{OD}$ sont colinéaires et les droites (AB) et (OD) sont parallèles.

Dire que le déterminant ci-contre est nul revient à dire que le tableau de coordonnées

6	-1
3	$-\frac{1}{2}$

$\times\frac{1}{2}$

est un tableau de proportionnalité.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 9

11 ABC est un triangle.
M et N sont les points tels que :

$$\overrightarrow{AM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{MN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

a) Construire une figure.

b) Démontrer que $\overrightarrow{AN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

c) En déduire que les points A, C, N sont alignés.

Sur le modèle de l'exercice résolu 10

12 Dans un repère orthonormé d'origine O, on donne les points $A(-2\,;2)$ et $B(2\,;4)$.

a) On donne le point $D\left(7\ ;\ \frac{7}{2}\right)$.
Démontrer que les droites (AB) et (OD) sont parallèles.

b) On donne les points $M(3\,;1)$ et $N(1\,;0)$.
Démontrer que les droites (AB) et (MN) sont parallèles.

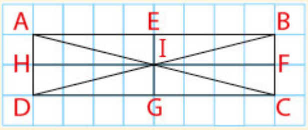
Calcul mental → Exercez-vous sur la plateforme Hyperbole
⊕ de détails page 4

Notion de vecteur

→ Cours 1

Questions flash

13



À l'aide de la figure ci-dessus, citer :

a) un vecteur égal au vecteur $\overrightarrow{CB}$ puis $\overrightarrow{IA}$;

b) un vecteur opposé au vecteur $\overrightarrow{EG}$;

c) un représentant du vecteur $\overrightarrow{IF}$ d'origine D ;

d) un représentant du vecteur $\overrightarrow{IG}$ d'extrémité H.

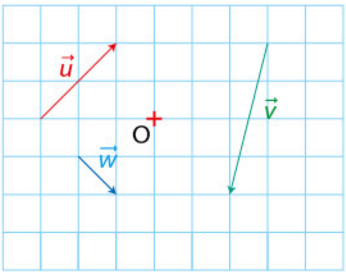
14 Dans chaque cas, dire si l'affirmation est vraie ou fausse en justifiant.

a) Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, alors ABCD est un parallélogramme.

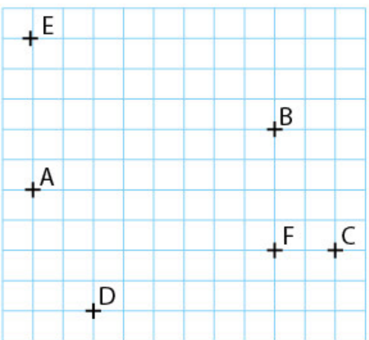
b) Si EFGH est un parallélogramme, alors $\overrightarrow{HE} = \overrightarrow{GF}$.

c) Si la translation qui transforme I en L transforme aussi J en K, alors $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK}$.

15 Réaliser la figure et placer les points A, B et C tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{CO}$.



16 À l'aide de la figure, dire dans chaque cas si l'affirmation est vraie ou fausse.



a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

b) $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{FB}$

c) $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont opposés.

d) ACBE est un parallélogramme.

17 ABCD et ABEF sont des parallélogrammes.

a) Construire une figure.

b) Quelles sont les images des points D et F par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$?

c) Démontrer que CDFE est un parallélogramme.

18 **a)** Construire un carré ABCD de centre O.

b) Construire le point E tel que $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{EB}$ et le point F tel que les segments $[OC]$ et $[BF]$ se coupent en leur milieu.

c) Démontrer que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{FC}$.

d) Que peut-on en déduire pour le quadrilatère AECF ?

e) En déduire que O est le milieu du segment $[EF]$.

19 ABC est un triangle.

a) Construire le point D tel que $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$.

b) M est un point du segment $[BD]$, les points E et F sont les symétriques respectifs des points B et A par rapport au point M.

Démontrer que le quadrilatère CDFE est un parallélogramme.

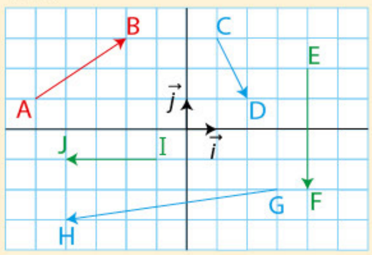
Coordonnées de points, de vecteurs

→ Cours 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Questions flash

20 Lire les coordonnées de chacun des vecteurs représentés ci-dessous dans la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$.



21 Dans chaque cas, calculer mentalement les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

a) $A(1 ; 2)$ et $B(4 ; 1)$ **b)** $A(-5 ; 1)$ et $B(6 ; -2)$

c) $A(10 ; -5)$ et $B(10 ; 0)$ **d)** $A\left(-\frac{1}{2} ; 1\right)$ et $B\left(\frac{1}{2} ; 1\right)$

22 Dans chaque cas, calculer mentalement les coordonnées du milieu I du segment $[AB]$.

a) $A(1 ; 3)$ et $B(1 ; 5)$ **b)** $A(-2 ; 1)$ et $B(2 ; 7)$

c) $A(-1 ; 10)$ et $B(3 ; 0)$ **d)** $A(3 ; 4)$ et $B(2 ; -1)$

23 Construire le repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ et un représentant de chaque vecteur :

$\vec{u}(1\,;3)$, $\vec{v}(-2\,;2)$, $\vec{w}(0\,;-2)$

Choisir pour chaque représentant l'origine que l'on veut.

24 On donne les points :

$A(-2\,;-1)$, $B(3\,;1)$, $C(1\,;3)$ et $D(-4\,;1)$

a) Démontrer que ABCD est un parallélogramme en calculant les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$.

b) Calculer les coordonnées du point d'intersection des diagonales [AC] et [BD].

25 On donne le point $A(-2\,;3)$ et le vecteur $\vec{u}(4\,;-2)$.

Calculer les coordonnées du point B image du point A par la translation de vecteur $\vec{u}$.

26 On donne les points :

$A(0\,;5)$, $B(-2\,;1)$ et $C(5\,;4)$

a) Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

b) Déterminer les coordonnées du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.

c) Calculer les coordonnées du centre de ce parallélogramme.

27 On donne les points :

$A(-2\,;-1)$, $B(4\,;1)$ et $I(0\,;1)$

Calculer les coordonnées des points C et D tels que ABCD soit un parallélogramme de centre I.

Distances et normes

→ Cours 2. C

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

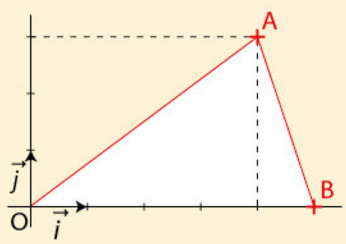
Questions Flash

28 On donne les vecteurs :

$\vec{u}(3\,;4)$, $\vec{v}(-2\,;0)$, $\vec{w}(1\,;\sqrt{3})$ et $\vec{\ell}(2\,;1)$

Calculer mentalement la norme de chacun d'eux.

29 Voici deux points A et B.



Paul affirme : « $OA = 5$, $OB = 5$ et $AB = 3{,}1$. »

Critiquer les résultats donnés par Paul.

30 $\mathscr{C}$ est le cercle de centre $I(1\,;2)$ et de rayon 5.

M est le point de coordonnées $(5\,;5)$.

a) Calculer la distance IM.

b) Le point M appartient-il au cercle $\mathscr{C}$?

31 $\mathscr{C}$ est le cercle de centre $I(1{,}8\,;-3{,}5)$ passant par le point $A(-1{,}8\,;1{,}3)$.

Calculer le rayon du cercle $\mathscr{C}$.

32 On donne les points :

$A(-1\,;5)$, $B(3\,;1)$ et $M(-5\,;-3)$

a) Calculer les distances MA et MB.

b) Expliquer pourquoi le point M appartient à la médiatrice du segment [AB].

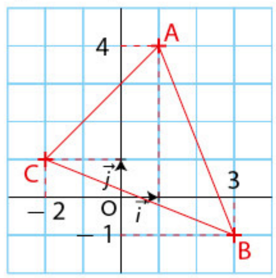
33 On donne les points :

$A(0\,;2)$, $B(\sqrt{3}\,;-1)$ et $C(-\sqrt{3}\,;-1)$

a) Calculer les distances AB, AC et BC.

b) Que peut-on en déduire pour le triangle ABC ?

34 Voici trois points A, B et C.



a) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.

b) Démontrer que le triangle ABC est isocèle en B.

35 On donne les points :

$A(6\,;5)$, $B(2\,;-3)$ et $C(-4\,;0)$

a) Calculer les distances AB, AC et BC.

b) Démontrer que le triangle ABC est rectangle.

c) Calculer l'aire du triangle ABC.

36 On donne les points :

$A(-1\,;2)$, $B(5\,;4)$ et $C(8\,;5)$

a) Calculer les distances AB, BC et AC.

b) Démontrer que le point B appartient au segment [AC].

37 On donne les points :

$A(-1\,;1)$, $B(3\,;2)$, $C(-2\,;5)$ et $D(2\,;6)$

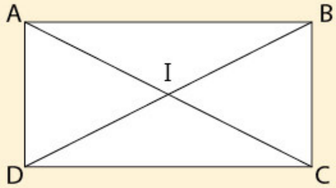
Démontrer que le triangle ABC est rectangle isocèle, puis que ABDC est un carré.

Somme de vecteurs

→ Cours 3

Questions Flash

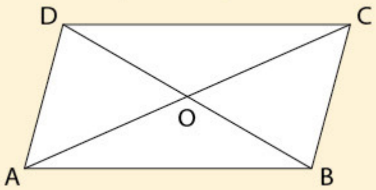
38 ABCD est un rectangle de centre I.



Donner un vecteur égal à chaque somme.

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ **b)** $\overrightarrow{DI}+\overrightarrow{IC}$ **c)** $\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{ID}$
d) $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BC}$ **e)** $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DI}$

39 ABCD est un parallélogramme de centre O.

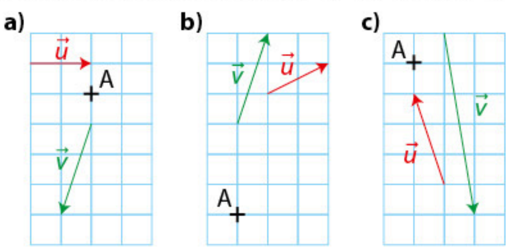


Dire si chaque égalité est vraie ou fausse.

a) $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CO}$ **b)** $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AC}$
c) $\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OC}$ **d)** $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$

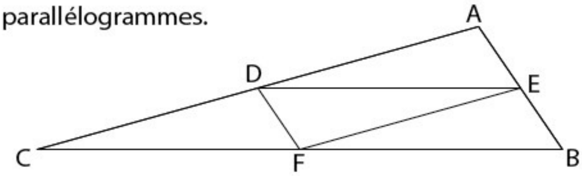
40 **1.** Construire un carré ABCD de centre O, de côté 4 cm.
2. Construire le représentant du vecteur :
a) $\vec{u}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{AB}$ d'origine A ;
b) $\vec{v}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{OB}$ d'origine D ;
c) $\vec{w}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{OD}$ d'origine C ;
d) $\vec{\ell}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$ d'origine O.

41 Dans chaque cas, reproduire la figure et construire le représentant d'origine A du vecteur $\vec{u}+\vec{v}$.



42 ABCD est un parallélogramme de centre I.
a) Construire une figure et le représentant d'origine B du vecteur $\vec{u}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{BI}$.
b) À quel vecteur de la figure le vecteur $\vec{u}$ semble-t-il égal ? Prouver cette conjecture.

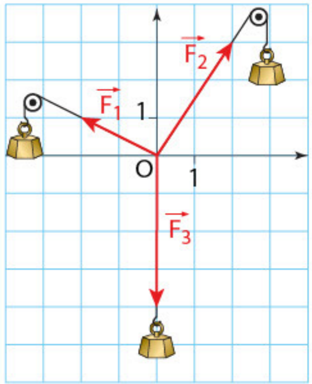
43 Sur cette figure AEFD, DEBF et DEFC sont des parallélogrammes.



Démontrer que ces trois vecteurs sont égaux :

$$\vec{u}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE},\ \vec{v}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{ED}\ \text{ et }\ \vec{w}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{FB}$$

44 En physique, un système est équilibré lorsque la somme des forces qui s'exercent sur lui est nulle.
Déterminer si le système représenté par les trois forces ci-contre est équilibré :
a) en utilisant les coordonnées ;
b) en représentant la somme des forces.



Produit d'un vecteur par un nombre réel

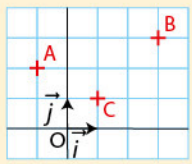
→ Cours 4

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

Questions Flash

45 On donne les vecteurs $\vec{u}(1\,;-2)$ et $\vec{v}(4\,;3)$.
Calculer les coordonnées des vecteurs :
a) $2\vec{u}$ **b)** $-3\vec{v}$ **c)** $\vec{u}-\vec{v}$ **d)** $\vec{u}+2\vec{v}$

46 Déterminer mentalement les coordonnées des vecteurs :
a) $\overrightarrow{AB}$ **b)** $2\overrightarrow{AB}$ **c)** $\overrightarrow{BC}$
d) $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ **e)** $2\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$



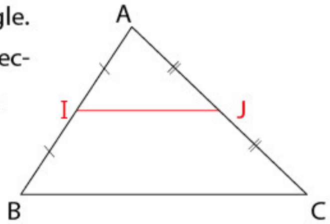
47 On donne : $A(3\,;5)$, $B(-1\,;4)$ et $C(0\,;2)$.
Déterminer les coordonnées des points D et E tels que :
a) $\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AB}$ **b)** $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{BC}$

48 On donne : $A(4\,;2)$, $B(-2\,;1)$ et $C(-3\,;5)$.
a) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
b) Calculer les coordonnées du vecteur :

$$\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$$

c) En déduire les coordonnées du point M.

49 ABC est un triangle.
I et J sont les milieux respectifs des côtés $[AB]$ et $[AC]$.



a) Compléter les deux égalités : $\overrightarrow{AI} = \ldots\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ} = \ldots\overrightarrow{AC}$

b) Démontrer que $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

50 $[AB]$ est un segment donné. On se propose de construire un point D tel que $\overrightarrow{DA} + 4\overrightarrow{DB} = \vec{0}$.

a) Démontrer que $\overrightarrow{AD} = \frac{4}{5}\overrightarrow{AB}$.

b) Construire le point D.

51 On donne les vecteurs $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j}$ et $\vec{v}(2\,;3)$.

a) Déterminer les coordonnées du vecteur $\frac{1}{2}\vec{u} + \vec{v}$.

b) Calculer la norme de ce vecteur.

52 On donne le vecteur $\vec{u} = -3\vec{i} + 4\vec{j}$.

a) Calculer la norme du vecteur $\vec{u}$.

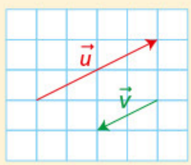
b) En déduire la norme du vecteur $\vec{v} = -\frac{3}{2}\vec{i} + 2\vec{j}$.

Colinéarité de deux vecteurs

→ Cours 5

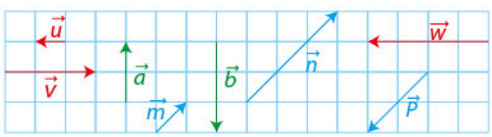
Questions Flash

53 Trois camarades affirment :
Jade : « $\vec{u} = -2\vec{v}$ »
Amanda : « $\vec{u} = 2\vec{v}$ »
Walid : « $\vec{v} = -\frac{1}{2}\vec{u}$ »
Lesquels ont raison ?



54 Dans une base orthonormée, on donne les vecteurs $\vec{u}(4\,;-2)$ et $\vec{v}\left(-1\,;\frac{1}{2}\right)$.
Ces vecteurs sont-ils colinéaires ?

55



Recopier et compléter chaque égalité par un nombre réel :

a) $\vec{v} = \ldots\vec{u}$ **b)** $\vec{b} = \ldots\vec{a}$ **c)** $\vec{n} = \ldots\vec{m}$
d) $\vec{p} = \ldots\vec{m}$ **e)** $\vec{w} = \ldots\vec{v}$ **f)** $\vec{n} = \ldots\vec{p}$

56 Dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$, on donne :
$$\vec{u} = 3\vec{i} - 2\vec{j} \text{ et } \vec{v} = 7\vec{i} + 2\vec{j}$$

a) Calculer le déterminant du vecteur $\vec{u}$ et du vecteur $\vec{v}$.

b) Calculer le déterminant du vecteur $\vec{v}$ et du vecteur $\vec{u}$.

57 Dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$, on donne :
$$\vec{u} = 2\vec{i} + (1-\sqrt{5})\vec{j} \text{ et } \vec{v} = (\sqrt{5}+1)\vec{i} - 2\vec{j}$$

a) Calculer le déterminant du vecteur $\vec{u}$ et du vecteur $\vec{v}$.

b) Qu'en déduit-on pour les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$?

58 Dans une base orthonormée, on donne les vecteurs :
$\vec{u}(3\,;-1)$ et $\vec{v}(4\,;m)$ où m est un nombre réel.

a) Calculer le déterminant du vecteur $\vec{u}$ et du vecteur $\vec{v}$.

b) Pour quelle valeur de m les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ?

59 Dans un repère orthonormé, on donne les points :
$$A(2\,;3),\ B(5\,;7) \text{ et } C(-7\,;-9)$$
Les points A, B, C sont-ils alignés ?

60 Dans un repère orthonormé, on donne les points :
$A(-1\,;4)$, $B\left(\frac{1}{2}\,;1\right)$, $C(3\,;-4)$, $D(-1\,;0)$ et $E(0\,;-2)$

a) Placer ces cinq points

b) Démontrer que les points A, B, C sont alignés.

c) Démontrer que les droites (AB) et (DE) sont parallèles.

61 Algo Pierre a écrit une fonction en langage Python qui renvoie le déterminant du vecteur $\vec{u}(a\,;b)$ et du vecteur $\vec{v}(c\,;d)$ dans une base orthonormée.

```
def Det(a,b,c,d):
    e=[          ]
    return e
```

a) Compléter et saisir le programme de Pierre.

b) Tester son fonctionnement.

62 ABCD est un parallélogramme de centre O.
E est le point tel que :
$$\overrightarrow{AE} = 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$$

a) Construire une figure.

b) Démontrer que les points A, O, E sont alignés.

63 ABCD est un parallélogramme.
I est le milieu du côté $[CD]$ et J est le point tel que :
$$\overrightarrow{BJ} = 2\overrightarrow{BI}$$

a) Démontrer que les points A, D, J sont alignés.

b) Démontrer que les droites (AJ) et (BC) sont parallèles.

64 ABC est un triangle et D est le point tel que :
$$\overrightarrow{BD} = 3\overrightarrow{BA} - 2\overrightarrow{BC}$$
Démontrer que le point D appartient à la droite (AC).

QCM interactifs

Pour se tester

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

65 Dans chaque cas, donner la réponse exacte sans justifier.

		A	B	C	D
1	On donne les points $A(1\,;2)$, $B(3\,;-2)$ et $C(-1\,;0)$. ABCD est un parallélogramme lorsque …	$D(1\,;-4)$	$D(-3\,;4)$	$D(-2\,;4)$	$D(5\,;0)$
2	On donne les points $A(-2\,;1)$, $B(1\,;-4)$ et $C(5\,;2)$ et I est le milieu du segment $[BC]$. Le vecteur $\overrightarrow{AI}$ a pour coordonnées …	$(4\,;2)$	$(3\,;-1)$	$(5\,;-2)$	$(-5\,;2)$
3	On donne les vecteurs $\vec{u}(-1\,;3)$ et $\vec{v}(4\,;-4)$. Le vecteur $2\vec{u}-\frac{1}{2}\vec{v}$ a pour coordonnées …	$(-4\,;8)$	$(4\,;-8)$	$(0\,;4)$	$\left(2\,;-\frac{1}{2}\right)$
4	De $\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{BC}=\vec{0}$, on déduit que …	$\overrightarrow{AB}=-3\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{AB}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{AB}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$
5	Les vecteurs $\vec{u}(2\,;-4)$ et $\vec{v}(5\,;x)$ sont colinéaires lorsque le nombre x est égal à …	-7	10	-10	$2{,}5$

66 Dans chaque cas, donner la (ou les) réponse(s) exacte(s) sans justifier.

		A	B	C	D
1	On donne les points $A(3\,;5)$, $B(0\,;2)$ et $C(3\,;-1)$. Le triangle ABC est …	isocèle	équilatéral	rectangle	aplati
2	On donne les vecteurs $\vec{u}(-4\,;3)$ et $\vec{v}\left(2\,;-\frac{3}{2}\right)$. Alors …	$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont opposés	$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires	$\lVert\vec{u}\rVert=5$	$\lVert\vec{u}\rVert=\lVert\vec{v}\rVert$
3	On donne les points $A\left(-1\,;\frac{1}{2}\right)$, $B(2\,;2)$, $C(0\,;-2)$ et $D(4\,;0)$. Alors …	$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires	$\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont colinéaires	(AB) et (CD) sont parallèles	A, B, C sont alignés
4	On donne $\vec{u}=\lambda\vec{i}+2\vec{j}$ et $\vec{v}=\vec{i}+\lambda\vec{j}$. Le déterminant de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ s'annule pour …	$\lambda=2$	$\lambda=-1$	$\lambda=-\sqrt{2}$	$\lambda=\sqrt{2}$

67 Dans chaque cas, dire si l'affirmation est vraie ou fausse en justifiant.

1 Sur une droite graduée, on a placé les points A, B, C et D.

Affirmation : $2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{CD}=\vec{0}$

2 On donne les points $A(-4\,;2)$, $B(1\,;4)$, $C(-1\,;-2)$, $D(14\,;5)$.
Affirmation : les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

3 $\vec{u}$ est un vecteur donné.
Affirmation : les vecteurs $\frac{1}{2}\vec{u}$ et $-\frac{1}{2}\vec{u}$ n'ont pas la même norme.

4 A, B et C sont trois points tels que $\overrightarrow{BC}=-5\overrightarrow{CA}$.
Affirmation : les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Vérifiez vos réponses : p. 346

68 Représenter des vecteurs

$(O\,;\vec{i},\vec{j})$ est un repère orthonormé.
On donne les vecteurs $\vec{u}(3\,;1)$ et $\vec{v}(-2\,;2)$.

a) Tracer le repère orthonormé et construire les représentants d'origine O des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

b) Construire le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ et lire ses coordonnées sur la figure.

c) Retrouver les coordonnées du vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ par un calcul.

AIDE

a) Pour construire le représentant d'origine O du vecteur $\vec{u}$: à partir du point O, on se déplace horizontalement de 3 unités vers la droite puis verticalement de 1 unité vers le haut, on obtient alors l'extrémité du représentant du vecteur $\vec{u}$.

69 Calculer des coordonnées

Dans un repère orthonormé, on donne les points :

$A(4\,;-1)$, $B(2\,;2)$ et $C(-1\,;-3)$

a) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

b) Calculer les coordonnées des vecteurs :

- $2\overrightarrow{AB}$
- $3\overrightarrow{AC}$
- $2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$.

AIDE

a) Pour calculer l'abscisse du vecteur $\overrightarrow{AB}$, on effectue la différence :

(abscisse de B) − (abscisse de A).

On procède de même avec les ordonnées.

70 Démontrer que des vecteurs sont colinéaires

Dans une base orthonormée, on donne les vecteurs :

$\vec{u}(3\,;9)$, $\vec{v}(-2\,;-6)$ et $\vec{w}(1\,;6)$

1. a) Calculer le déterminant du vecteur $\vec{u}$ et du vecteur $\vec{v}$.

b) Que peut-on en déduire pour les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$?

2. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont-ils colinéaires ?

AIDE

1. a) On note souvent le déterminant de $\vec{u}(x\,;y)$ et de $\vec{v}(x'\,;y')$ sous forme d'un tableau :

$$\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y.$$

71 Démontrer un alignement

ABC est un triangle.
M est le point tel que $\overrightarrow{AM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$ **(1)**.

a) Démontrer que $\overrightarrow{BM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$.

b) En déduire que les points B, C, M sont alignés.

AIDE

a) Avec la relation de Chasles, remplacer $\overrightarrow{AM}$ par $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{AC}$ par $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ dans l'égalité **(1)**, puis réduire l'égalité obtenue.

b) Que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{BC}$?

EXERCICE RÉSOLU

72 Utiliser les coordonnées de milieux de segments

Voici un algorithme où x_A, y_A, x_B, y_B, x_C, y_C représentent les coordonnées des points A, B, C.

a) Quelles valeurs de x_D et y_D obtient-on en fin d'algorithme pour :

$$x_A = -2,\ \ y_A = 1,\ \ x_B = 1,\ \ y_B = 1,\ \ x_C = 2 \text{ et } y_C = 3$$

b) Expliquer le rôle de cet algorithme.

c) Modifier cet algorithme afin d'en obtenir une version ne faisant pas intervenir de milieu.

$x_I \leftarrow \dfrac{x_A + x_C}{2}$
$y_I \leftarrow \dfrac{y_A + y_C}{2}$
$x_D \leftarrow 2x_I - x_B$
$y_D \leftarrow 2y_I - y_B$

Solution

a) $x_I = \dfrac{x_A + x_C}{2} = \dfrac{-2+2}{2} = 0$, $y_I = \dfrac{y_A + y_C}{2} = \dfrac{1+3}{2} = 2$,

donc $x_D = 2\times 0 - 1 = -1$, $y_D = 2\times 2 - 1 = 3$.

b) Les deux premières instructions d'affectation déterminent les coordonnées $(x_I\,;y_I)$ du milieu I du segment $[AC]$.

De $x_D = 2x_I - x_B$ et $y_D = 2y_I - y_B$, on déduit que $x_I = \dfrac{x_B + x_D}{2}$ et $y_I = \dfrac{y_B + y_D}{2}$.

Donc les deux instructions suivantes déterminent les coordonnées $(x_D\,;y_D)$ du point D tel que I soit le milieu du segment $[BD]$.

Ainsi, les diagonales du quadrilatère ABCD se coupent en leur milieu I, donc l'algorithme détermine les coordonnées du quatrième sommet D du parallélogramme ABCD.

c) ABCD est un parallélogramme si, et seulement si, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

On détermine alors les coordonnées $(a\,;b)$ du vecteur $\overrightarrow{AB}$, la traduction de l'égalité $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ à l'aide des coordonnées donne $a = x_C - x_D$ et $b = y_C - y_D$, soit $x_D = x_C - a$ et $y_D = y_C - b$.

$a \leftarrow x_B - x_A$
$b \leftarrow y_B - y_A$
$x_D \leftarrow x_C - a$
$y_D \leftarrow y_C - b$

À VOTRE TOUR

73 Les variables qui interviennent dans cet algorithme représentent les coordonnées des points A, B, C, D.

$a \leftarrow x_B - x_A$
$b \leftarrow y_B - y_A$
$c \leftarrow x_D - x_C$
$d \leftarrow y_D - y_C$
Si $ad = cb$ alors
  Afficher [ ]
  sinon
  Afficher [ ]
Fin si

a) Expliquer son rôle et indiquer les messages qu'il affiche en sortie.

b) Tester cet algorithme avec les valeurs suivantes :

$$x_A = 5, y_A = 2, x_B = -3, y_B = 0,$$
$$x_C = 1, y_C = -4, x_D = 5, y_D = -3$$

74 Les variables qui interviennent dans cet algorithme représentent les coordonnées des points A, B, C.

$a \leftarrow x_B - x_A$
$b \leftarrow y_B - y_A$
$c \leftarrow x_C - x_A$
$d \leftarrow y_C - y_A$
Si $ad = bc$ alors
  Afficher [ ]
  sinon
  Afficher [ ]
Fin si

a) Expliquer son rôle et indiquer les messages qu'il affiche en sortie.

b) Tester cet algorithme avec les valeurs suivantes :

$$x_A = -2, y_A = -0{,}5, x_B = 1, y_B = -4, x_C = 0, y_C = 10$$

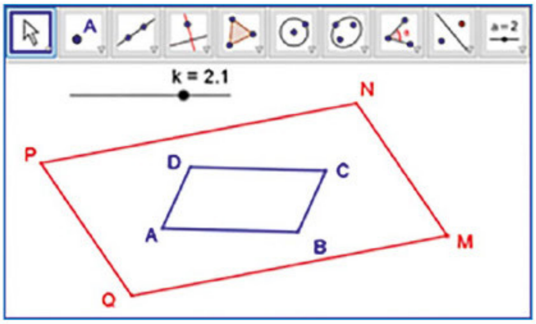
EXERCICE RÉSOLU

75 Conjecturer la nature d'un quadrilatère puis démontrer

ABCD est un parallélogramme, k est un nombre réel.
Les points M, N, P et Q sont définis par :

$$\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB},\ \ \overrightarrow{BN} = k\overrightarrow{BC},\ \ \overrightarrow{CP} = k\overrightarrow{CD},\ \ \overrightarrow{DQ} = k\overrightarrow{DA}$$

1. a) Avec un logiciel de géométrie, réaliser la figure ci-dessous où k est un curseur variant de -5 à 5 avec pour incrément 0,1.



b) Faire varier le curseur k et conjecturer la nature du quadrilatère MNPQ.

2. a) À l'aide de la relation de Chasles, exprimer le vecteur $\overrightarrow{MN}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.

b) De la même façon, exprimer le vecteur $\overrightarrow{QP}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{DC}$.

c) Valider alors la conjecture émise à la question **1. b)**.

Solution

1. a) On réalise la figure. Par exemple, pour construire le point M, on saisit M=A+k∗ Vecteur(A, B)

b) On fait varier k, on conjecture que MNPQ est un parallélogramme.

2. a) Avec la relation de Chasles, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}$.

Or $\overrightarrow{MA} = -k\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BN} = k\overrightarrow{BC}$ donc $\overrightarrow{MN} = -k\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{BC}$,

soit $\overrightarrow{MN} = (1-k)\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{BC}$.

b) De même $\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{QD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CP}$.

Or $\overrightarrow{QD} = k\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{CP} = -k\overrightarrow{DC}$

donc $\overrightarrow{QP} = k\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} - k\overrightarrow{DC}$,

soit $\overrightarrow{QP} = k\overrightarrow{AD} + (1-k)\overrightarrow{DC}$.

c) ABCD est un parallélogramme donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$.

Alors $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$ et le quadrilatère MNPQ est un parallélogramme.

> Dans les données de l'énoncé figurent les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BN}$. Ceci peut aider à décider d'écrire le vecteur $\overrightarrow{MN}$ sous la forme $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}$ avec la relation de Chasles.

À VOTRE TOUR

76 On reprend les données de l'exercice **75**.

a) À l'aide de la relation de Chasles, exprimer le vecteur $\overrightarrow{MQ}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AD}$.

b) De la même façon, exprimer le vecteur $\overrightarrow{NP}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CD}$.

c) Comparer les vecteurs $\overrightarrow{MQ}$ et $\overrightarrow{NP}$ et retrouver le résultat établi à l'exercice **75**.

77 ABCD est un parallélogramme de centre O, k est un nombre réel non nul.
Les points M, N, P et Q sont définis par :

$$\overrightarrow{OM} = k\overrightarrow{OA},\ \ \overrightarrow{ON} = k\overrightarrow{OB},\ \ \overrightarrow{OP} = k\overrightarrow{OC},\ \ \overrightarrow{OQ} = k\overrightarrow{OD}$$

1. a) Réaliser une figure à l'aide d'un logiciel de géométrie.

b) Conjecturer la nature du quadrilatère MNPQ.

2. a) Établir que $\overrightarrow{MN} = k\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{PQ} = k\overrightarrow{CD}$.

b) Démontrer la conjecture émise à la question **1. b)**.

Démontrer et raisonner

78 Démontrer une égalité

Méthode
Pour démontrer une égalité $\vec{u} = \vec{v}$, on peut :
- modifier l'écriture de $\vec{u}$ et parvenir en fin de calculs à celle de $\vec{v}$;
- ou établir que $\vec{u} - \vec{v} = \vec{0}$;
- ou transformer l'égalité.

ABCD est un quadrilatère.
On se propose de démontrer que :
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$$
Voici trois méthodes.

1. a) Justifier l'écriture :
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD}$$
b) Poursuivre le calcul et obtenir l'égalité attendue.

2. a) Compléter l'écriture :
$\vec{u} - \vec{v} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) - (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB})$
$\vec{u} - \vec{v} = (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB}) + (\ldots - \ldots)$
$\vec{u} - \vec{v} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + (\ldots + \ldots) = \overrightarrow{AC} + \ldots$
b) Terminer la démonstration.

3. a) Justifier que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$ équivaut à justifier que $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}$.
b) Démontrer que $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DB}$.
c) Terminer alors la démonstration.

79 Définir un repère pour démontrer

Méthode
On peut être amené à définir un repère orthonormé du plan afin de résoudre un problème à l'aide des coordonnées.

ABCD est un rectangle tel que $AB = 2AD$ et I est le milieu de $[AB]$.

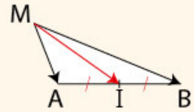
1. a) Construire une figure.
b) Placer le point E tel que $\overrightarrow{IE} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{IC}$ et le point F symétrique du point E par rapport à I.
c) Conjecturer la situation des points B, D et F.

2. a) Définir à l'aide de certains points de la figure un repère orthonormé du plan.
b) Donner les coordonnées des différents points dans ce repère.
c) Démontrer alors la conjecture émise à la question **1. c)**.

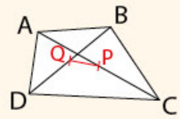
80 Décomposer des vecteurs avec la relation de Chasles

Méthode
Pour démontrer certaines propriétés ou égalités, on peut être amené à transformer des écritures de vecteurs. Pour cela, la relation de Chasles est souvent un outil efficace.

Voici deux situations différentes.



1. I est le milieu d'un segment $[AB]$. Démontrer que pour tout point M, $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.
Pour cela, écrire $\overrightarrow{MA}$ sous la forme $\overrightarrow{M\cdot} + \overrightarrow{\cdot A}$ et….



2. ABCD est un quadrilatère, P et Q sont les milieux des diagonales $[AC]$ et $[BD]$.
Démontrer que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{PQ}$.
Pour cela, écrire $\overrightarrow{AB}$ sous la forme $\overrightarrow{A\cdot} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{\cdot B}$ et…

81 Démontrer que des droites sont parallèles

Méthode
Pour démontrer que des droites (MN) et (PQ) sont parallèles, on peut établir que les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{PQ}$ sont colinéaires.

ABC est un triangle. E et F sont les points tels que :
$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \text{ et } \overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AB}$$
a) Construire une figure.
b) Démontrer que les droites (BE) et (FC) sont parallèles.

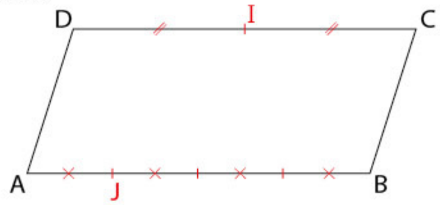
Opérer sur les vecteurs

82 ABCD est un parallélogramme.
E, F et G sont les symétriques respectifs des points A, B et D par rapport à C.
a) Construire une figure.
b) Démontrer que le quadrilatère CGEF est un parallélogramme.

83 ABC est un triangle.
a) Placer les points D et E tels que $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BD}$ puis les points F et G tels que les segments $[AG]$ et $[BF]$ aient le même milieu C.
b) Démontrer que $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{EF}$. Que peut-on en déduire pour les droites (AG) et (EF) ?
c) Démontrer que les droites (BF) et (DG) sont parallèles ainsi que les droites (AF) et (BG).

84 ABCD est un parallélogramme.

Les points I et J sont placés comme le montre la figure ci-dessous.



Démontrer que $\overrightarrow{JI} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.

85 Démontrer que pour tous points A, B, C, D, E :

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$;

b) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$;

c) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{EB} = \vec{0}$.

Utiliser les coordonnées

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$.

86 On donne les points :

$$A(4\,;2),\ B(-2\,;1)\ \text{et}\ C(-3\,;5)$$

M est le point tel que $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$.

Calculer les coordonnées du point M.

87 On donne les points :

$$A(7\,;-1),\ B(-4\,;10)\ \text{et}\ C(-4\,;5)$$

Déterminer les coordonnées du point M tel que :

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

88 On donne les points :

$$A(-2\,;-3),\ B(5\,;0)\ \text{et}\ C(0\,;7)$$

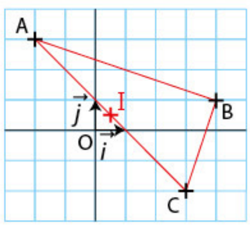
a) Calculer les coordonnées de I milieu de $[BC]$, J milieu de $[AC]$ et K milieu de $[AB]$.

b) Déterminer les coordonnées des points G, H et L tels que $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{BH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BJ}$ et $\overrightarrow{CL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CK}$.

c) Que remarque-t-on ?

89 On donne les points :

$$A(-2\,;3),\ B(4\,;1)\ \text{et}\ C(3\,;-2)$$



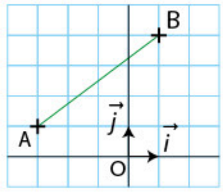
a) Démontrer que le triangle ABC est rectangle en B.

b) Calculer les coordonnées du milieu I du segment $[AC]$.

c) On note $\mathscr{C}$ le cercle de centre I et qui passe par A. Calculer son rayon.

d) Les points B et C appartiennent-ils au cercle $\mathscr{C}$?

90 On donne les points $A(-3\,;1)$ et $B(1\,;4)$.



On se propose de déterminer le point M de l'axe des abscisses qui se trouve à égale distance de A et B.

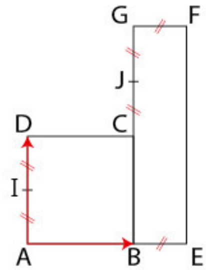
On note pour cela $(x\,;0)$ les coordonnées du point M.

a) Exprimer les distances MA et MB en fonction de x.

b) Résoudre l'équation $MA^2 = MB^2$.

c) Conclure l'étude.

91 La figure ci-contre est formée par un carré et un rectangle.



On munit le plan du repère orthonormé $(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.

a) Lire graphiquement les coordonnées des points de la figure.

b) Calculer les distances IJ, JF et IF.

c) Les points I, J, F sont-ils alignés ?

Utiliser la colinéarité de vecteurs

92 OAB est un triangle.

a) Construire une figure et placer les points C et D tels que $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{CD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$.

b) Démontrer que les points O, B, D sont alignés.

93 Dans un repère orthonormé, on donne les points :

$$A(2\,;3)\ \text{et}\ B(-1\,;4)$$

M est un point quelconque de coordonnées $(x\,;y)$.

1. À quelle condition, portant sur x et y, les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont-ils colinéaires ?

2. a) Un point P a pour abscisse -4 et appartient à la droite (AB). Quelle est son ordonnée ?

b) Un point Q a pour ordonnée 7 et appartient à la droite (AB). Quelle est son abscisse ?

94 Dans un repère orthonormé, on donne les points :

$$A\left(-1\,;-\frac{3}{2}\right),\ B\left(0\,;\frac{1}{2}\right),\ C\left(-2\,;\frac{3}{2}\right),\ D\left(\frac{3}{2}\,;\frac{7}{2}\right),$$
$$E(1\,;-2)\ \text{et}\ F(3\,;-1)$$

a) Placer ces points.

b) Conjecturer des alignements de trois points.

c) Démontrer ces conjectures par le calcul.

95 Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, les points P, Q, R vérifient :

$$\overrightarrow{PQ}=3\vec{i}-\vec{j} \text{ et } \overrightarrow{RP}=x\vec{i}+2\vec{j}$$

où x désigne un nombre réel.

Déterminer x pour que les points P, Q, R soient alignés.

96 ABCD est un parallélogramme.

Les points I, J, K sont définis par :

$$\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD} \text{ et } \overrightarrow{IK}=\frac{3}{5}\overrightarrow{IJ}$$

a) Construire une figure.

b) Démontrer que $\overrightarrow{AK}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AI}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AJ}$.

c) En déduire que $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{5}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})$.

d) Prouver alors que les points A, K, C sont alignés.

97 ABC est un triangle.

I est le milieu de $[AC]$, J celui de $[BI]$ et K est le point défini par $\overrightarrow{BK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

a) Construire une figure.

b) Démontrer que $\overrightarrow{AJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

c) Démontrer que $\overrightarrow{AK}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

d) En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{AK}$ sont colinéaires.

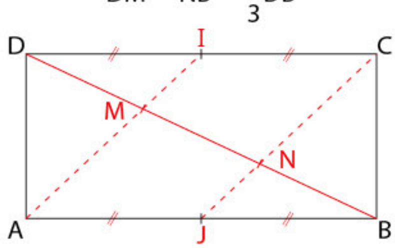
Que peut-on alors dire des points A, J, K ?

98 ABCD est un rectangle tel que $AB=2AD$.

Les points I et J sont les milieux respectifs des segments $[CD]$ et $[AB]$.

M et N sont les points tels que :

$$\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{NB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$$



On pose $\vec{i}=\overrightarrow{AJ}$ et $\vec{j}=\overrightarrow{AD}$.

a) Déterminer les coordonnées des points de la figure dans le repère orthonormé $(A\,;\vec{i},\vec{j})$.

b) Démontrer que les points A, M, I sont alignés ainsi que les points J, N, C.

c) Démontrer que les droites (AI) et (CJ) sont parallèles.

99 Dans un repère orthonormé, on donne les points :

$$R(-2\,;-1) \text{ et } S(0\,;4)$$

La droite (RS) coupe l'axe des abscisses au point T.

a) Justifier que les vecteurs $\overrightarrow{RS}$ et $\overrightarrow{RT}$ sont colinéaires.

b) Calculer l'abscisse t du point T.

c) Déterminer le nombre réel k tel que :

$$\overrightarrow{RS}=k\overrightarrow{RT}$$

100 ABC est un triangle, I est le milieu du côté $[AB]$.

À tout nombre réel k, on associe le point J défini par :

$$\overrightarrow{AJ}=\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AC}$$

a) Démontrer que le point J appartient à la droite passant par le point B et parallèle à la droite (AC).

b) Pour quelle valeur de k les droites (AJ) et (IC) sont-elles parallèles ?

c) Construire une figure pour la valeur de k obtenue.

S'entraîner à la logique → p. XXI

101 Implications, équivalences

Dans chaque cas, P et Q sont des propositions. Dire si P implique Q, si Q implique P ou bien si P et Q sont équivalentes.

a) P : ABCD est un parallélogramme.
Q : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

b) P : A, B, C sont alignés.
Q : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

c) P : $\vec{u}=\vec{v}$
Q : $\|\vec{u}\|=\|\vec{v}\|$

d) P : $AI=IB$
Q : I est le milieu de $[AB]$.

e) P : B appartient à $[AC]$.
Q : $AB+BC=AC$

102 Quantificateurs

Dans chaque cas, dire si la proposition P est vraie ou fausse. Justifier la réponse.

a) A est un point donné.
P : Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un point M tel que $\overrightarrow{AM}=\vec{u}$.

b) $\vec{u}$ est un vecteur non nul.
P : Pour tout nombre réel k, $\|k\vec{u}\|=k\|\vec{u}\|$.

c) $\vec{v}$ est un vecteur.
P : Il existe un nombre réel k tel que $\|k\vec{v}\|=-k\|\vec{v}\|$.

d) P : Pour tous points A, B, C :

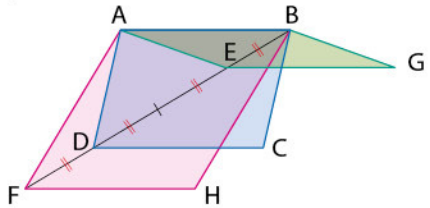
$$AC \leqslant AB+BC$$

103 Imaginer une stratégie

Chercher **Raisonner**

ABCD est un parallélogramme.
E et F sont les points tels que $\overrightarrow{DE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{DF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$.

G et H sont les points tels que ABGE et ABHF sont deux parallélogrammes.

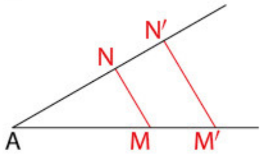


Démontrer que les points G, C, H sont alignés.

104 Définir une homothétie

Chercher **Raisonner**

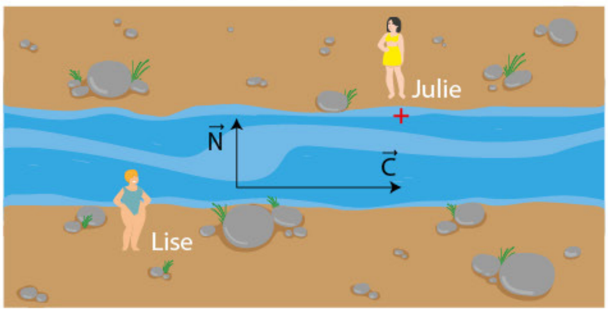
A est un point et k est un nombre réel non nul.
L'homothétie de centre A et de rapport k transforme un point M en un point M′ tel que $\overrightarrow{AM'} = k\overrightarrow{AM}$.
Elle transforme aussi un autre point N en un point N′.



1. a) Démontrer que :
$$\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$$
b) En déduire que les droites (MN) et (M′N′) sont parallèles.
c) Démontrer que $M'N' = |k| \times MN$.
2. Pour quelles valeurs de k, l'homothétie est-elle :
a) un agrandissement ?
b) une réduction ?

105 Appliquer à la physique

Modéliser **Représenter**



Lise veut traverser la rivière à la nage pour rejoindre Julie sur l'autre rive. À chaque instant, la force du courant est représentée par le vecteur $\vec{C}$ et celle développée par Lise est représentée par le vecteur $\vec{N}$.
De quel endroit de la rive Lise doit-elle partir pour parvenir exactement à Julie ?

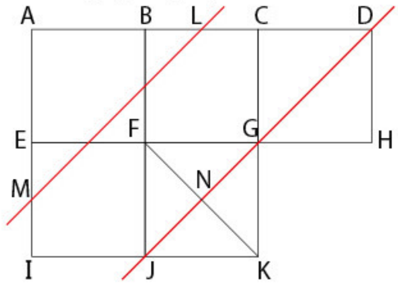
106 Étudier le parallélisme

Narration de recherche

Chercher **Raisonner** **Communiquer**

Rédiger les différentes étapes de la recherche, sans omettre les fausses pistes et les changements de méthode.

Problème Voici un assemblage de cinq carrés.
L est le milieu de [AD], M est le milieu de [EI].
Les diagonales [FK] et [JG] se coupent en N.

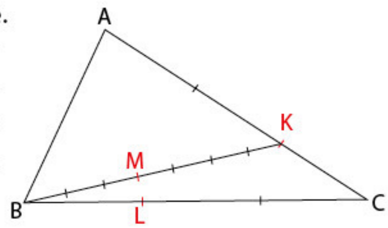


Démontrer que les droites (ML) et (ND) sont parallèles.

107 Prendre des initiatives

Chercher **Calculer**

ABC est un triangle.
Sur la figure ci-contre, les graduations représentées sont régulières et on a placé les points K, L et M.

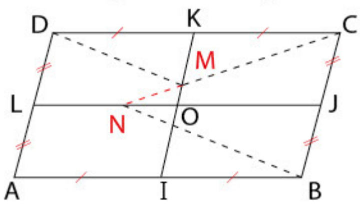


Les points A, M, L sont-ils alignés ?

108 Utiliser des vecteurs colinéaires

Chercher **Raisonner** **Calculer**

ABCD est un parallélogramme de centre O.
I, J, K et L sont les milieux respectifs des côtés [AB], [BC], [CD] et [DA].
M et N sont les points tels que :
$$\overrightarrow{IM} = \frac{5}{8}\overrightarrow{IK} \text{ et } \overrightarrow{JN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{JL}$$



a) Démontrer que les points C, M, N sont alignés.
b) Démontrer que les droites (BN) et (DM) sont parallèles.

109 Déterminer un alignement

Problème ouvert

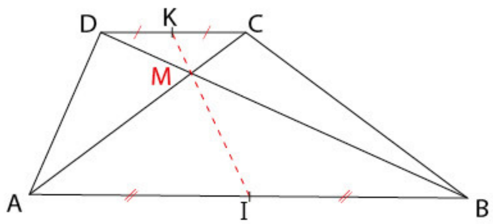
Raisonner | Calculer

ABCD est un trapèze tel que $\overrightarrow{DC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

I et K sont les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[CD]$.

Les droites (AC) et (BD) se coupent en M.

Les points I, M, K sont-ils alignés ?



110 Reconnaître un polygone particulier

Chercher | Représenter | Calculer

Dans un repère orthonormé, on donne les points :

$A(11\,;-3)$, $B(8\,;-3+3\sqrt{3})$, $C(2\,;-3+3\sqrt{3})$

1. a) Placer ces points.

b) Démontrer que le triangle ABC est isocèle en B.

2. a) Déterminer les coordonnées du point I tel que ABCI est un parallélogramme.

b) Démontrer que les points A, B et C appartiennent à un même cercle $\mathscr{C}$ de centre I.

3. a) Tracer ce cercle $\mathscr{C}$ et construire les points A', B' et C' diamétralement opposés respectivement à A, B et C.

b) Quelle est la nature du polygone $ABCA'B'C'$?

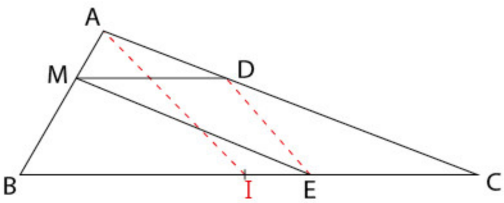
111 Tice Conjecturer puis démontrer

Chercher | Représenter | Calculer

ABC est un triangle, I est le milieu du côté $[BC]$.

On place un point M sur le côté $[AB]$ et on trace les parallèles aux deux autres côtés passant par M.

L'une coupe $[AC]$ en D, l'autre coupe $[BC]$ en E.



a) À l'aide d'un logiciel de géométrie, conjecturer une position du point M pour laquelle les droites (AI) et (DE) sont parallèles.

b) Démontrer cette conjecture.

112 Conjecture a property

Représenter | Calculer

A, B and C are three non collinear points.

a) Place the point M such that:

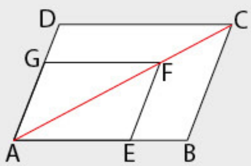
$$2\overrightarrow{CM} = 5\overrightarrow{CA} - 3\overrightarrow{CB}$$

b) What can you conjecture about the points A, B and M? Prove that conjecture.

Des Défis

113 Reconnaître le parallélisme

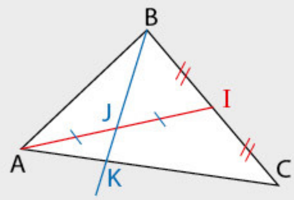
ABCD et AEFG sont deux parallélogrammes tels que les points A, E, B sont alignés ainsi que les points A, G, D et A, F, C.



Les droites (BD) et (EG) sont-elles parallèles ? Justifier.

114 Préciser une position

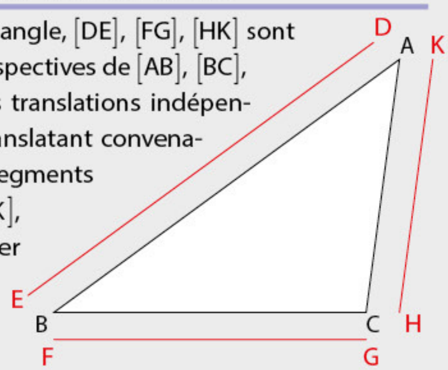
Dans un triangle ABC, I est le milieu de $[BC]$, J celui de $[AI]$. La droite (BJ) coupe (AC) en K.



Préciser la position du point K sur le segment $[AC]$.

115 Appliquer des translations

ABC est un triangle, $[DE]$, $[FG]$, $[HK]$ sont les images respectives de $[AB]$, $[BC]$, $[CA]$ par trois translations indépendantes. En translatant convenablement les segments $[DE]$, $[FG]$, $[HK]$, peut-on former un nouveau triangle ?



QCM Bilan

QCM interactifs

116 **Dans chaque cas, donner la réponse exacte en justifiant.**

$(O\,;\vec{i},\vec{j})$ est un repère orthonormé du plan.

		A	B	C	D
1	ABCD est un parallélogramme, E et F sont tels que $\overrightarrow{AE}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BF}=3\overrightarrow{BC}$. Alors …	D, E, F sont alignés	D est le milieu du segment $[EF]$	$\overrightarrow{DF}=-3\overrightarrow{DE}$	$\overrightarrow{DF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DE}$
2	On donne les points $A(3\,;0)$ et $B(1\,;2)$. Les points M et N sont tels que : $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{AN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ Alors …	$N\left(\frac{2}{3}\,;\frac{4}{3}\right)$	O, M, N sont alignés	$\overrightarrow{ON}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{OM}$	$\overrightarrow{OM}=2\overrightarrow{ON}$
3	λ désigne un nombre réel. On donne les vecteurs $\vec{u}(1\,;\lambda)$ et $\vec{v}(\lambda\,;9)$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires pour …	$\lambda=0$	$\lambda=-1$	$\lambda=1$	$\lambda=3$
4	On donne les points $A(-3\,;-1)$, $B(2\,;0)$, $C(-1\,;2)$ et $D(3\,;y)$. Les droites (AB) et (CD) sont parallèles pour …	$y=5$	$y=\frac{5}{14}$	$y=\frac{14}{5}$	$y=-14$
5	On donne les points $M(-4\,;0)$ et $N(3\,;2)$. La droite (MN) coupe l'axe des ordonnées en K. Alors …	$\overrightarrow{MK}=\frac{5}{7}\overrightarrow{MN}$	$K\left(0\,;\frac{4}{7}\right)$	$K\left(0\,;\frac{8}{7}\right)$	K est le milieu de $[MN]$
6	λ désigne un nombre réel. On donne les vecteurs $\vec{u}(-3\,;\lambda)$ et $\vec{v}(0\,;2\lambda)$. Alors $\lVert\vec{u}\rVert=\lVert\vec{v}\rVert$ pour …	$\lambda=0$	$\lambda=-\sqrt{3}$	$\lambda=\sqrt{2}$	$\lambda=3$
7	$\mathscr{C}$ est le cercle de centre O et de rayon 4. A est le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse 2 et d'ordonnée y positive. Alors …	$y^2=12$	$y=2$	$y=\sqrt{6}$	$y=4$
8	On donne les points $A(-5\,;0)$, $B(3\,;-4)$ et $C(2\,;4)$. Alors …	C est le milieu de $[AB]$	O est le milieu de $[AC]$	$CA=2CB$	C appartient à la médiatrice de $[AB]$
9	On donne les points $A(-3\,;2)$, $B(3\,;2{,}5)$, $C(7\,;-2)$ et $D(1\,;-2{,}5)$. Le quadrilatère ABCD est un …	parallélogramme non losange	losange	rectangle non carré	carré
10	$\mathscr{C}_1$ est le cercle de centre $I_1(-1\,;2)$ et de rayon $\sqrt{5}$, $\mathscr{C}_2$ est le cercle de centre $I_2(4\,;3)$ et de rayon 5. Alors …	O n'appartient pas à $\mathscr{C}_1$	$\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ ont deux points communs	$\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ ont un seul point commun	$\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ ne se coupent pas

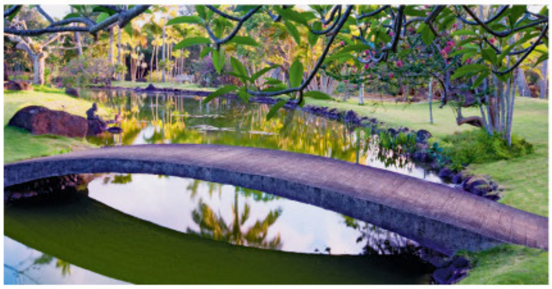
Vérifiez vos réponses p. 346 pour avoir votre note (considérez 1 point par réponse juste).

117 Tice Déterminer le plus court chemin possible

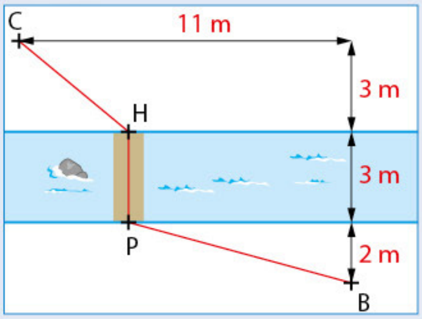
La situation problème

Dans le jardin de M. et Mme Préry coule une rivière. Le couple a installé de part et d'autre de la rivière une balançoire (B) et une cabane en bois (C) pour leurs enfants. Ils souhaitent construire un nouveau pont (le segment [HP]) de sorte que le chemin qui relie la balançoire à la cabane soit le plus court possible.

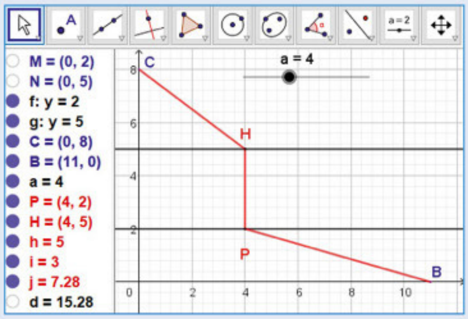
Utiliser les différentes informations pour indiquer où positionner ce pont.



DOC 1 Modélisation



DOC 2 Avec un logiciel de géométrie



118 Trouver le bon chemin

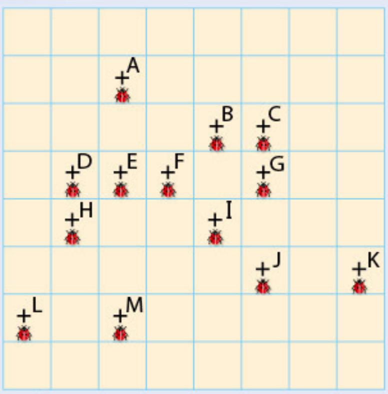
La situation problème

Salomé et Arthur ont inventé un jeu : on démarre d'une case « coccinelle » de la grille (DOC 1) et on passe par toutes les autres cases « coccinelle » en douze sauts successifs imposés. Ces sauts sont symbolisés par les douze vecteurs représentés sur le DOC 2.

On ne peut pas passer deux fois par la même case.

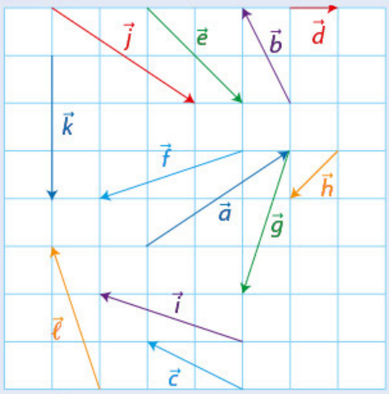
Utiliser les différentes informations pour trouver un chemin qui convient.

DOC 1 Grille des cases « coccinelle »



$\overrightarrow{HB}$ est un représentant du vecteur $\vec{a}$.

DOC 2 Vecteurs « sauts successifs »



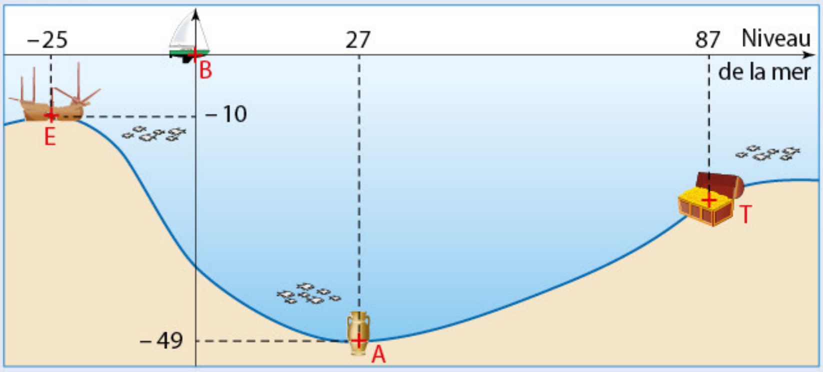
$\vec{a}$ a pour coordonnées $(3\,;2)$.

119 Trouver la position du trésor

La situation problème

Sur un site de plongée sous-marine, on a repéré des points d'intérêt : l'épave (E) d'un vieux galion posée sur le fond, des amphores (A) et un trésor (T) dont la position n'est pas complètement connue.
Utiliser les différentes informations pour trouver la position de ce trésor.

DOC 1 Un plan dans un repère orthonormé



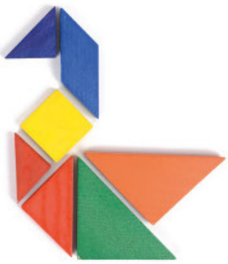
Les points E, A, T sont situés dans le plan du repère orthonormé d'origine B représenté (*unité* : 1 m).

DOC 2 Des indices supplémentaires

On sait que les distances AT et AE en ligne droite sont égales et que le trésor est à une plus faible profondeur que les amphores.

120 Étudier le tangram

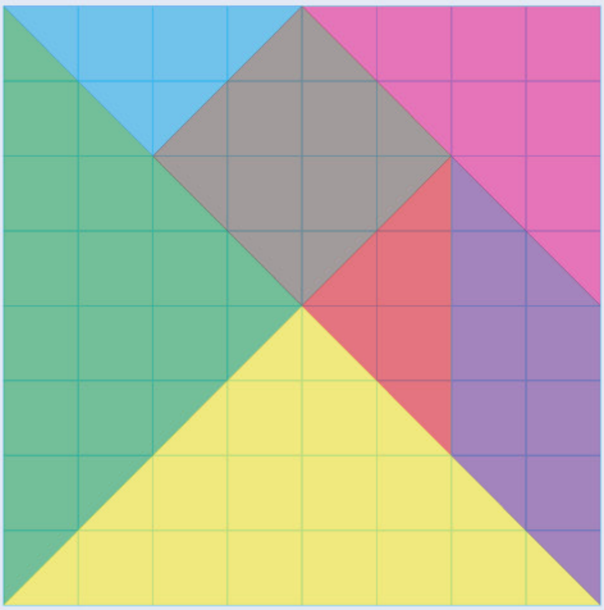
La situation problème



Le tangram est un puzzle constitué de sept pièces qui peuvent se juxtaposer pour donner différents motifs.

Il possède un grand nombre de propriétés géométriques.
Utiliser les différentes informations pour :
- déterminer la nature, les dimensions, le périmètre et l'aire de chacune des pièces du puzzle ;
- réaliser, découper ce puzzle et fabriquer la figure du DOC 3.

DOC 1 Le tangram



DOC 2 L'unité de longueur

On prendra pour unité de longueur le côté d'un petit carré du quadrillage de la figure.

DOC 3 Le sapin