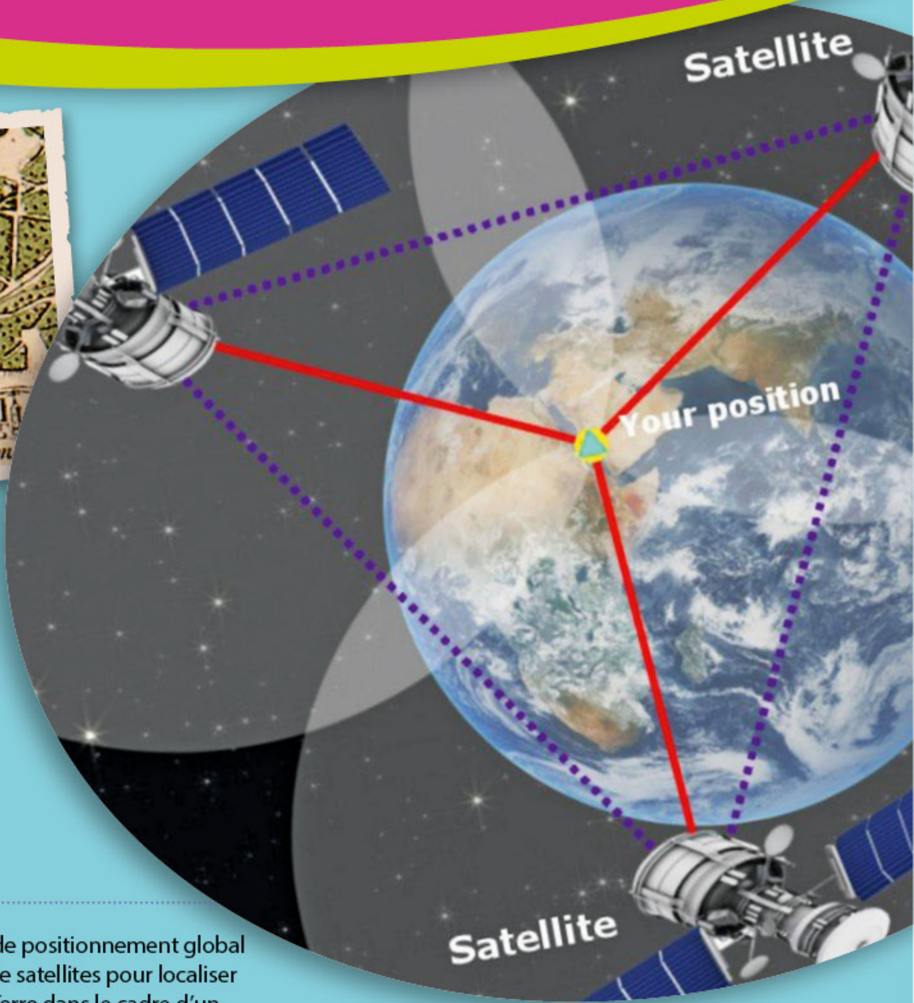
10 Applications du produit scalaire

Avant

▶ La carte de Cassini est la première carte du Royaume de France. Établie par la famille Cassini, de 1747 à 1818, sur ordre du roi Louis XV, elle s'appuie sur la méthode de triangulation.



À présent

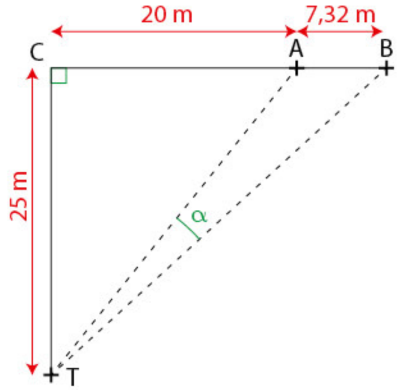
▶ De nos jours, un système de positionnement global (GPS) utilise les données de satellites pour localiser un point spécifique de la Terre dans le cadre d'un processus appelé trilatération.

Les capacités travaillées dans ce chapitre

	Exercices
• Connaître et utiliser la transformation de $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$.	1, 3, 16 à 29
• Utiliser la formule d'Al-Kashi. Calculer des distances et des angles.	2, 4 à 10, 30 à 47
• Déterminer une équation cartésienne d'une droite connaissant un point et un vecteur normal. Lire les coordonnées d'un vecteur normal sur une équation de droite.	11, 13, 48 à 61, 63 à 66
• Reconnaître une équation de cercle, déterminer centre et rayon.	12, 14, 15, 67, 75 à 79
• Déterminer et utiliser l'équation d'un cercle donné par son centre et son rayon.	68 à 74
• Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur une droite.	62, 92, 93

1 Calcul d'un angle de tir

Lors d'un match de football, un joueur s'apprête à tirer un coup-franc. Sur la figure ci-dessous, le but est représenté par le segment $[AB]$ et le joueur qui tire le coup-franc par le point T.



1 **a)** Justifier la décomposition $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{TB} - \overrightarrow{TA}$.

b) À partir de l'égalité précédente, développer $\overrightarrow{AB}^2$ et en déduire la relation :

$$AB^2 = TA^2 + TB^2 - 2 \times TA \times TB \times \cos \widehat{ATB}$$

Cette relation est appelée **formule d'Al-Kashi** du nom du mathématicien perse Al-Kashi (1380-1429).

2 **a)** Calculer TA^2 et TB^2.

b) En déduire alors la mesure, en degré, de l'angle de tir $\widehat{ATB}$. *Arrondir au dixième.*

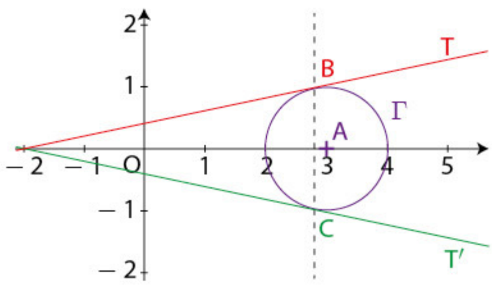
2 Déterminer les équations d'un cercle et de deux tangentes

Jim Denevan (né en 1961) est un artiste américain qui crée des œuvres éphémères. Ses dessins sur le sable sont voués à disparaître.
Sur la photo ci-contre, il a représenté des cercles et deux tangentes.
Dans le repère orthonormé représenté ci-dessous, Γ est le cercle de centre $A(3\,;0)$ et de rayon 1.
B et C sont les points de Γ d'abscisse 2,8.

1 Démontrer qu'un point $N(x\,;y)$ appartient à Γ si, et seulement si, $x^2 - 6x + y^2 + 8 = 0$. *Utiliser le fait que $AN = 1$.*

2 Déterminer l'ordonnée v du point B. *Arrondir au centième.*

3 La droite T est la tangente en B au cercle Γ.
Expliquer pourquoi un point M appartient à la tangente T si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont orthogonaux.
On dit alors que $\overrightarrow{AB}$ est un **vecteur normal** à la droite T.



4 Démontrer qu'une équation cartésienne de la tangente T est $-0{,}2x + vy = v^2 - 0{,}56$.

Cours

1 Calculs vectoriels

A Transformation de l'expression $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$

Propriété

A et B sont deux points donnés et I est **le milieu** du segment [AB].

Pour tout point M, $\quad \overrightarrow{\mathbf{MA}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{MB}} = \mathbf{MI}^2 - \dfrac{1}{4}\mathbf{AB}^2$.

Démonstration

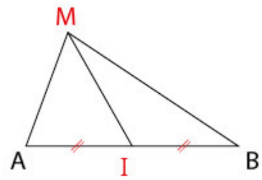
Pour tout point M, d'après la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} \text{ et } \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}.$$

I est le milieu du segment [AB] donc $\overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}$.

Alors $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}) = \overrightarrow{MI}^2 - \overrightarrow{IA}^2 = MI^2 - IA^2$.

Or $IA = \dfrac{1}{2}AB$ donc $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \left(\dfrac{1}{2}AB\right)^2 = MI^2 - \dfrac{1}{4}AB^2$.



B Ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

Propriété

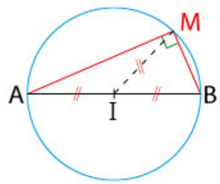
A et B sont deux points distincts donnés.

L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{\mathbf{MA}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{MB}} = \mathbf{0}$ est le **cercle de diamètre [AB]**.

Démonstration

On note I le milieu du segment [AB]. Alors, d'après la propriété précédente, pour tout point M, $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ équivaut à $MI^2 = \dfrac{1}{4}AB^2$ c'est-à-dire $MI = \dfrac{1}{2}AB$ soit $IM = IA$.

Donc l'ensemble cherché est le cercle de centre I qui passe par A, autrement dit le cercle de diamètre [AB].



C Formule d'Al-Kashi

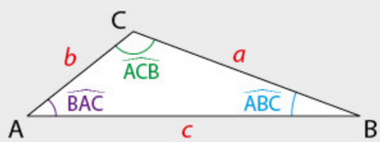
Propriétés

Dans un triangle ABC, avec les notations ci-contre :

(1) $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \times b \times c \times \cos(\widehat{BAC})$

(2) $b^2 = a^2 + c^2 - 2 \times a \times c \times \cos(\widehat{ABC})$

(3) $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \times a \times b \times \cos(\widehat{ACB})$



Démonstration

(1) D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$.

Donc $a^2 = BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = \overrightarrow{AC}^2 - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}^2 = AC^2 - 2AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) + AB^2$

soit $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \times b \times c \times \cos(\widehat{BAC})$.

(2) et **(3)** : on procède de la même façon en transformant respectivement $\overrightarrow{AC}^2$ et $\overrightarrow{AB}^2$.

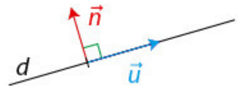
2 Géométrie repérée

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

A Équations cartésiennes d'une droite de vecteur normal $\vec{n}$

Définition

Dire qu'un vecteur non nul $\vec{n}$ **est normal à une droite** *d* signifie que $\vec{n}$ est orthogonal à un vecteur directeur de la droite *d*.



Conséquences :

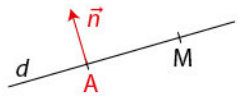
- Si *d* est la droite passant par un point A et de vecteur normal $\vec{n}$, alors la droite *d* est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.
- Deux droites sont **orthogonales** si, et seulement si, elle admettent des **vecteurs normaux orthogonaux**.
- Deux droites sont **parallèles** si, et seulement si, elles admettent des **vecteurs normaux colinéaires**.

Propriétés

(1) Une droite *d* de vecteur normal $\vec{n}(a\,;b)$ a une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$ où *c* est un nombre réel.
(2) La droite *d* d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ avec $(a\,;b) \neq (0\,;0)$ admet le vecteur $\vec{n}(a\,;b)$ pour vecteur normal.

Démonstrations

(1) Un point $M(x\,;y)$ appartient à la droite *d* qui passe par $A(x_0\,;y_0)$ et de vecteur normal $\vec{n}(a\,;b)$ si, et seulement si, $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$,
c'est-à-dire $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$, soit $ax + by + c = 0$ où $c = -ax_0 - by_0$.



(2) La droite *d* d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ (avec $(a\,;b) \neq (0\,;0)$) a pour vecteur directeur $\vec{u}(-b\,;a)$. Le vecteur $\vec{n}(a\,;b)$ est tel que $\vec{n} \cdot \vec{u} = a \times (-b) + b \times a = 0$ donc $\vec{n}$ est un vecteur normal à la droite *d*.

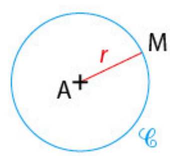
B Équations cartésiennes d'un cercle

Propriété

$\mathscr{C}$ est le cercle de centre $A(x_A\,;y_A)$ et de rayon *r*.
Une équation cartésienne de $\mathscr{C}$ est $\boldsymbol{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = r^2}$.

Démonstration

$M(x\,;y)$ appartient au cercle $\mathscr{C}$ si, et seulement si, $AM = r$, c'est-à-dire $AM^2 = r^2$, soit $(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = r^2$.



Exemple

$\mathscr{C}$ est le cercle de centre le point $A(1\,;-2)$ et de rayon 5.
Une équation cartésienne de $\mathscr{C}$ est $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 5^2$, c'est-à-dire $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 25$.
Cette équation peut aussi s'écrire en développant $x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = 25$, c'est-à-dire $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 20$.

Acquérir des automatismes

EXERCICES RÉSOLUS

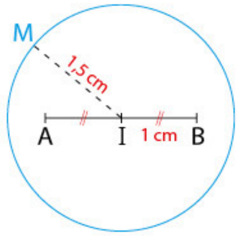
1 Utiliser une transformation $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$

→ Cours 1. A

A et B sont deux points tels que $AB = 2$ cm et I est le milieu du segment $[AB]$.
Déterminer et construire l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 1{,}25$.

Solution

Un point M appartient à l'ensemble $\mathscr{E}$ si, et seulement si,
$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 1{,}25$, c'est-à-dire $MI^2 - \frac{1}{4}AB^2 = 1{,}25$.
Or $\frac{1}{4}AB^2 = \frac{1}{4} \times 2^2 = 1$, donc M appartient à $\mathscr{E}$ si,
et seulement si, $MI^2 - 1 = 1{,}25$, soit $MI^2 = 2{,}25$,
c'est-à-dire $MI = 1{,}5$.
Donc l'ensemble $\mathscr{E}$ est le cercle de centre I et de rayon 1,5 cm.



La longueur MI est positive donc $MI^2 = 2{,}25$ équivaut à $MI = 1{,}5$.

2 Calculer la longueur d'une médiane

→ Cours 1. A

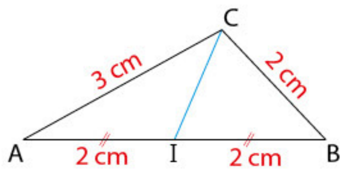
ABC est un triangle et I est le milieu du côté $[AB]$.

a) En écrivant avec la relation de Chasles, $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CI} + \overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CI} + \overrightarrow{IB}$, démontrer que :
$$CA^2 + CB^2 = 2CI^2 + \frac{1}{2}AB^2$$

b) On suppose que $AB = 4$ cm, $AC = 3$ cm et $BC = 2$ cm.
Calculer la longueur de la médiane $[CI]$ du triangle ABC.

Solution

a) $CA^2 + CB^2 = \overrightarrow{CA}^2 + \overrightarrow{CB}^2 = (\overrightarrow{CI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{CI} + \overrightarrow{IB})^2 = 2CI^2 + 2\overrightarrow{CI} \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) + IA^2 + IB^2$
I est le milieu de $[AB]$ donc $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{CI} \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) = 0$.
D'autre part $IA^2 = IB^2 = \left(\frac{1}{2}AB\right)^2 = \frac{1}{4}AB^2$, donc :
$$CA^2 + CB^2 = 2CI^2 + \frac{1}{2}AB^2$$
b) On obtient $3^2 + 2^2 = 2CI^2 + \frac{1}{2} \times 4^2$.
Ainsi, $2CI^2 = 3^2 + 2^2 - \frac{1}{2} \times 4^2 = 5$, soit $CI^2 = 2{,}5$ et $CI = \sqrt{2{,}5}$ cm.



EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 1

3 A et B sont deux points tels que $AB = 2$ cm et I est le milieu du segment $[AB]$.
Déterminer et construire l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M du plan tels que :
a) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 8$;
b) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 15$.

Sur le modèle de l'exercice résolu 2

4 ABC est un triangle et K est le milieu du côté $[BC]$.
a) Démontrer que $AB^2 + AC^2 = 2AK^2 + \frac{1}{2}BC^2$.
b) On suppose que $AB = 2{,}5$ cm, $AC = 4$ cm et $BC = 6$ cm. Calculer la longueur AK, en cm.
Arrondir au dixième.

EXERCICES RÉSOLUS

5 Utiliser la formule d'Al-Kashi

→ Cours 1. C

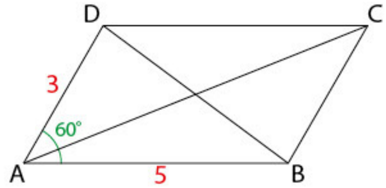
ABCD est un parallélogramme tel que :

$$AB = 5, \quad AD = 3 \text{ et } \widehat{DAB} = 60°.$$

a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.

b) Calculer la longueur BD.

c) Calculer la longueur AC.



Solution

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = AB \times AD \times \cos(\widehat{BAD}) = 5 \times 3 \times \cos(60°) = 15 \times \dfrac{1}{2} = 7{,}5$

b) D'après la formule d'Al-Kashi appliquée au triangle ABD :

$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2 \times AB \times AD \times \cos(\widehat{DAB})$

$BD^2 = 5^2 + 3^2 - 2 \times 5 \times 3 \times \cos(60°) = 19$

D'où $BD = \sqrt{19}$.

c) ABCD est un parallélogramme donc $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

D'où $AC^2 = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})^2 = AB^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + AD^2$.

Or, d'après **a)**, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 7{,}5$ donc :

$AC^2 = 25 + 2 \times 7{,}5 + 9 = 49$ et $AC = 7$.

On peut utiliser la formule d'Al-Kashi car on connaît une mesure d'angle et les longueurs des côtés adjacents à cet angle.

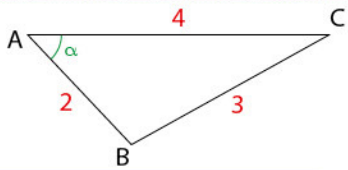
Pour calculer AC, on peut aussi utiliser la formule d'Al-Kashi dans le triangle ABC avec $\widehat{ABC} = 120°$.

6 Calculer une mesure d'angle

→ Cours 1. C

ABC est un triangle tel que $AB = 2$, $BC = 3$ et $AC = 4$.

Déterminer la mesure, en degré, de l'angle $\widehat{BAC}$. *Arrondir à l'unité.*



Solution

D'après la formule d'Al-Kashi appliquée au triangle ABC :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$$

D'où $\cos(\alpha) = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \times AB \times AC} = \dfrac{4 + 16 - 9}{16} = \dfrac{11}{16}$ et $\alpha \approx 47°$.

Après avoir calculé $\cos(\alpha)$, on utilise la touche Acs ou $\cos^{-1}$ ou acos de la calculatrice.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 5

7 ABCD est un parallélogramme tel que :

$$AB = 6, \quad AD = 5 \text{ et } \widehat{BAD} = 120°.$$

a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.

b) Calculer la longueur BD puis la longueur AC.

8 ABCD est un parallélogramme tel que :

$$AB = 4, \quad AD = 8 \text{ et } \widehat{ABC} = 150°.$$

a) Calculer la longueur AC.

b) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.

c) Calculer la longueur BD.

Sur le modèle de l'exercice résolu 6

9 ABC est un triangle tel que :

$$AB = 4, \quad AC = 6 \text{ et } BC = 5.$$

Déterminer la mesure α, en degré, de l'angle $\widehat{BAC}$.
Arrondir à l'unité.

10 ABC est un triangle tel que :

$$AB = 5, \quad AC = 7 \text{ et } \widehat{BAC} = 45°.$$

Calculer la longueur BC puis déterminer la mesure α, en degré, de l'angle $\widehat{ABC}$.
Arrondir au centième.

EXERCICES RÉSOLUS

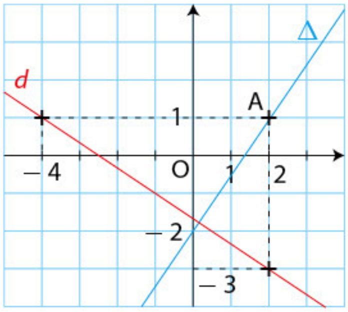
11 Déterminer une équation cartésienne de droite

→ Cours 2. A

Dans un repère orthonormé, *d* est la droite d'équation $2x+3y+5=0$ et A est le point de coordonnées $(2\,;1)$.
Déterminer une équation cartésienne de la droite Δ passant par A et perpendiculaire à la droite *d*.

Solution

La droite Δ est perpendiculaire à la droite *d* donc un vecteur normal à Δ est un vecteur directeur de *d*.
Un vecteur directeur de *d* est $\vec{u}(-3\,;2)$.
Donc une équation cartésienne de Δ est de la forme :
$$-3x+2y+c=0$$
Or, A appartient à Δ donc $-3\times 2+2\times 1+c=0$ et $c=4$.
Ainsi une équation cartésienne de Δ est :
$$-3x+2y+4=0$$



12 Reconnaître un ensemble de points

→ Cours 2. B

Dans un repère orthonormé, $\mathscr{E}$ est l'ensemble des points $\mathrm{M}(x\,;y)$ tels que $x^2+y^2-3x+4y=1$.
Quelle est la nature de cet ensemble $\mathscr{E}$?

Solution

On utilise la méthode de complétion du carré :

- « Les termes en x » : $x^2-3x=\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2-\left(\dfrac{3}{2}\right)^2=\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{9}{4}$.
- « Les termes en y » : $y^2+4y=(y+2)^2-2^2=(y+2)^2-4$.

Ainsi, $\mathrm{M}(x\,;y)$ appartient à $\mathscr{E}$ si, et seulement si,
$\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{9}{4}+(y+2)^2-4=1$, c'est-à-dire $\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+(y+2)^2=\dfrac{29}{4}$.
Donc $\mathscr{E}$ est le cercle de centre $\mathrm{A}\left(\dfrac{3}{2}\,;-2\right)$ et de rayon $\dfrac{\sqrt{29}}{2}$.

L'idée consiste à présenter l'équation :
$$x^2+y^2-3x+4y=1$$
sous la forme :
$$(x-a)^2+(y-b)^2=k$$
Lorsque $k\geqslant 0$, l'ensemble cherché est un cercle de centre $\mathrm{A}(a\,;b)$ et de rayon $\sqrt{k}$.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 11

13 Dans un repère orthonormé, *d* est la droite d'équation :
$$x+2y-4=0$$
et A est le point de coordonnées $(-1\,;3)$.
a) Réaliser une figure.
b) Déterminer une équation de la droite Δ passant par A et perpendiculaire à la droite *d*.
Tracer Δ sur la figure précédente.

Sur le modèle de l'exercice résolu 12

14 Dans un repère orthonormé, $\mathscr{F}$ est l'ensemble des points $\mathrm{M}(x\,;y)$ tels que $x^2+y^2+2x-2y=4$.
Quelle est la nature de cet ensemble $\mathscr{F}$?

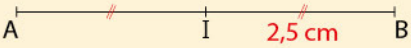
15 Dans un repère orthonormé, $\mathscr{G}$ est l'ensemble des points $\mathrm{M}(x\,;y)$ tels que :
$$x^2+y^2-2x-5y=7{,}25$$
Quelle est la nature de cet ensemble $\mathscr{G}$?

Transformation de l'expression $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ Longueur d'une médiane

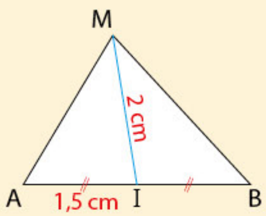
→ Cours 1. A

Questions Flash

16 Calculer mentalement $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB}$.



17 Calculer mentalement $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$.



18 ABC est un triangle tel que $AB = 8$ cm et $CI = 4$ cm où I est le milieu du côté [AB].
Jessica affirme : « $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$. »
A-t-elle raison ?

19 Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(3\,;5)$ et $B(2\,;1)$.
Réaliser une figure et construire l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

20 **a)** Construire un carré ABCD.
b) Construire l'ensemble des points M tels que :
- $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$
- $\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

c) Quels sont les points M tels qu'à la fois $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ et $\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$?

21 A et B sont deux points tels que $AB = 4$ cm et I est le milieu du segment [AB].
Déterminer et construire si possible l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -9$.

22 A et B sont deux points tels que $AB = 14$ cm et I est le milieu du segment [AB].
Déterminer et construire si possible l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 49$.

23 I est le milieu d'un segment [AB].
L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -5$ est le cercle de centre I et de rayon 2.
Quelle est la longueur AB ?

24 A et B sont deux points tels que $AB = 4$ cm et I est le milieu du segment [AB].
L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$ est le cercle de centre I et de rayon 3 cm.
Déterminer k.

25 A et B sont deux points tels que $AB = 2$ cm et I est le milieu du segment [AB].
L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$ est le cercle de centre I et de rayon 8 cm.
Déterminer k.

26 A et B sont deux points tels que $AB = 2$ cm et I est le milieu du segment [AB]. Déterminer l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} \leqslant 8$.

27 Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(1\,;-2)$ et $B(6\,;-3)$.
Déterminer les points M de l'axe des abscisses tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 6$.

28 Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(1\,;-4)$ et $B(5\,;-2)$.
Déterminer les points M de l'axe des ordonnées tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 8$.

29 A et B sont deux points tels que $AB = 12$ cm et I est le milieu du segment [AB].
$\mathscr{E}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$ où k est un nombre réel donné.
a) Justifier qu'un point M appartient à $\mathscr{E}$ si, et seulement si, $MI^2 = k + 36$.
b) Quelle est la nature de l'ensemble $\mathscr{E}$ lorsque :
- $k < -36$?
- $k = -36$?
- $k > -36$?

30 ABC est un triangle. I est le milieu du côté [BC].
a) En écrivant avec la relation de Chasles $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC}$, démontrer que :
$$AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}BC^2$$
b) On suppose que :
$AB = 4$ cm, $AC = 5$ cm et $BC = 6$ cm.
Calculer la longueur AI, en cm. *Arrondir au dixième.*

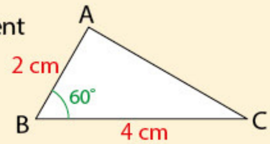
31 ABC est un triangle tel que :
$AB = 3{,}5$ cm, $AC = 2{,}5$ cm et $BC = 4$ cm.
I, J, K sont les milieux respectifs des côtés [BC], [AC], [AB].
a) Réaliser une figure.
b) Calculer les longueurs AI, BJ et CK, en cm.
Arrondir au dixième.

Calculs de distances et d'angles

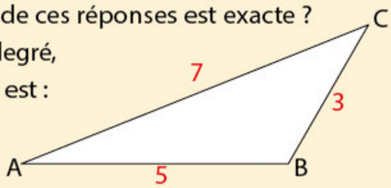
→ Cours 1

Questions Flash

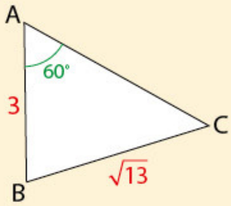
32 Calculer mentalement le carré de la distance AC.



33 Laquelle de ces réponses est exacte ?
La mesure, en degré, de l'angle $\widehat{ABC}$ est :
(1) 60°
(2) 120°
(3) 125°



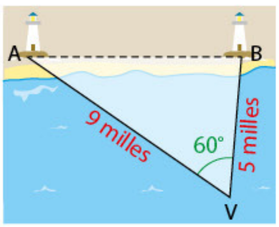
34 Vincent affirme :
« Sur cette figure, $AC = 4$. »
A-t-il raison ?



35 ABC est un triangle tel que :
$$AB = 2,\ \ AC = 6 \text{ et } \widehat{BAC} = 60°.$$
Calculer la valeur exacte de la longueur BC.

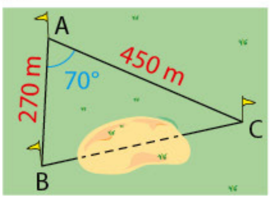
36 ABCD est un parallélogramme tel que :
$$AB = 6,\ \ AD = 4 \text{ et } \widehat{DAB} = 60°.$$
a) Construire une figure.
b) Calculer la longueur BD.
c) Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$?
d) Calculer la longueur AC.

37 Un voilier V approche de la côte. Il est situé à 9 milles du phare A, à 5 milles du phare B et l'angle $\widehat{AVB}$ mesure 60°.

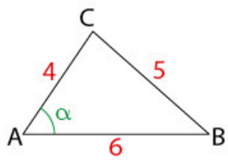


Calculer la distance AB entre les deux phares.
Arrondir au dixième.

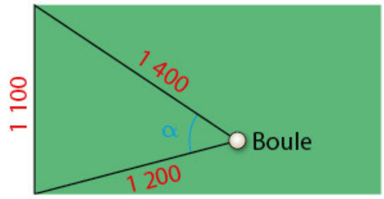
38 Sur un terrain de golf, trois trous A, B et C sont repérés sur le schéma ci-dessous.
Déterminer la longueur BC, en m.
Arrondir au dixième.



39 ABC est un triangle tel que :
$$AB = 6,\ \ BC = 5,\ \ AC = 4.$$
Déterminer la mesure α, en degré, de l'angle $\widehat{BAC}$.
Arrondir à l'unité.

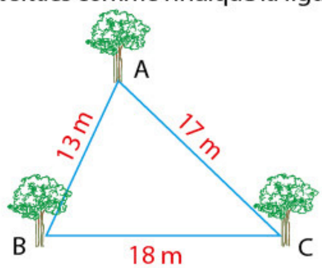


40 Sur le billard représenté ci-dessous, les dimensions sont données en mm.



Déterminer la mesure de l'angle α.
Arrondir à l'unité.

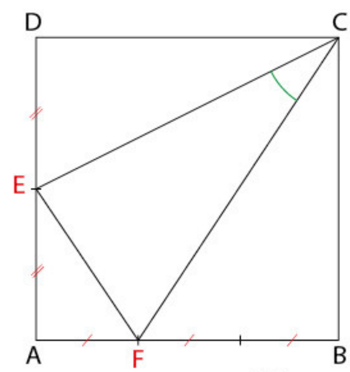
41 Dans une forêt, un hêtre A, un charme B et un chêne C sont situés comme l'indique la figure ci-dessous.



Déterminer la mesure, en degré, de chaque angle du triangle ABC. *Arrondir à l'unité.*

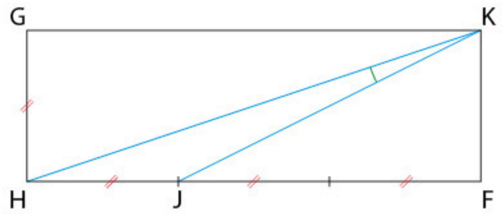
42 Dans un repère orthonormé, on donne les points :
$$A(1\,;3),\ \ B(-1\,;-1) \text{ et } C(6\,;-2).$$
a) Calculer les longueurs des côtés du triangle ABC.
b) Déterminer la mesure, en degré, de chaque angle du triangle ABC. *Arrondir au dixième.*

43 ABCD est le carré de côté 4 cm représenté ci-contre.
E est le milieu du côté $[AD]$ et F le point du segment $[AB]$ tel que $AF = \dfrac{1}{3}AB$.



a) Déterminer les longueurs CE, CF et EF.
b) Déterminer la mesure, en degré, de l'angle $\widehat{ECF}$.
Arrondir à l'unité.

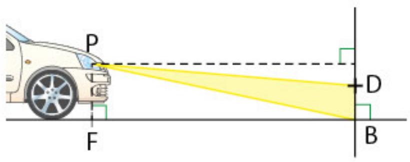
44 HFKG est le rectangle ci-dessous avec HG $= a$ où a est un nombre réel strictement positif.



a) Exprimer les longueurs KH et KJ en fonction de a.

b) Déterminer la mesure, en degré, de l'angle $\widehat{\text{HKJ}}$.
Arrondir au dixième.

45 Une voiture est arrêtée face à un mur.
Ce schéma n'est pas à l'échelle.



On a PF $= 0{,}6$ m, FB $= 10$ m et DB $= 0{,}4$ m.
Calculer la mesure, en degré, de l'angle $\widehat{\text{DPB}}$ du faisceau d'un phare. *Arrondir à l'unité.*

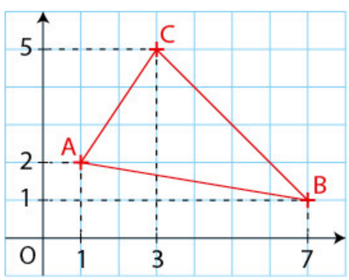
46 ABC est un triangle tel que :

$$\text{AB} = 3, \quad \text{BC} = \sqrt{37} \quad \text{et} \quad \widehat{\text{BAC}} = 60°.$$

a) On note AC $= x$ avec x nombre réel, $x > 0$.
Démontrer que $x^2 - 3x - 28 = 0$.

b) En déduire la longueur AC.

47 Dans le repère orthonormé ci-dessous, on donne le triangle ABC.



1. a) Calculer les longueurs des côtés du triangle ABC.

b) En déduire la mesure, en degré, de l'angle $\widehat{\text{BAC}}$.
Arrondir au dixième.

2. a) Dans ce triangle, H est le pied de la hauteur issue du sommet C.
Déterminer la longueur CH. *Arrondir au dixième.*

b) En déduire une valeur approchée de l'aire du triangle ABC.

Équations de droites. Vecteur directeur, vecteur normal

→ Cours 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

Questions flash

48 Donner oralement un vecteur directeur $\vec{u}$, un vecteur normal $\vec{v}$ et un point A de chaque droite.

a) d_1 a pour équation $2x + 3y - 4 = 0$.

b) d_2 a pour équation $x = 7$.

49 d est la droite qui passe par le point A$(3\,;-1)$ et de vecteur normal $\vec{n}(3\,;2)$.
Laquelle de ces équations est une équation cartésienne de la droite d ?

(1) $-3x + 2y - 7 = 0$

(2) $3x + 2y - 7 = 0$

(3) $3x + 2y + 7 = 0$

50 d est la droite d'équation $x + 5y - 1 = 0$.
Imaginer une équation cartésienne d'une droite :

a) parallèle à d ;

b) perpendiculaire à d.

51 d est la droite qui passe par le point A$(4\,;1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(-1\,;2)$.

a) Déterminer une équation cartésienne de d.

b) Donner un vecteur $\vec{n}$ normal à d.

c) Déterminer les coordonnées de deux autres points de d.

52 d est la droite qui passe par le point A$(4\,;2)$ et de vecteur normal $\vec{n}(-3\,;-5)$.

a) Déterminer une équation cartésienne de d.

b) Donner l'équation réduite de d.

c) Donner un vecteur directeur et la pente de d.

53 Voici deux points : A$(5\,;1)$ et B$(-1\,;3)$.
Déterminer un vecteur normal à la droite (AB) puis déterminer une équation cartésienne de cette droite.

54 d_1 et d_2 sont les droites d'équations cartésiennes respectives :

$$x + 2y - 4 = 0 \quad \text{et} \quad -3x - 6y + 8 = 0.$$

a) Déterminer un vecteur normal à chaque droite.

b) En déduire que les droites d_1 et d_2 sont parallèles. Expliquer.

55 d_1 et d_2 sont les droites d'équations cartésiennes respectives :

$$-\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 10 = 0 \quad \text{et} \quad 3x + 4y + 10 = 0.$$

a) Déterminer un vecteur normal $\overrightarrow{n_1}$ à la droite d_1 et un vecteur normal $\overrightarrow{n_2}$ à la droite d_2.

b) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}$.

c) Que peut-on en déduire pour les droites d_1 et d_2 ?

56 On donne les points :

$$A(2\,;-2), \quad B(-4\,;1) \quad \text{et} \quad C(-1\,;-3).$$

Déterminer une équation cartésienne de la hauteur issue de C dans le triangle ABC.

57 On donne les points $A(5\,;-2)$ et $B(2\,;-1)$.
Déterminer une équation cartésienne de la médiatrice du segment [AB].

58 On donne les points $A(1\,;3)$ et $B(4\,;2)$.

a) Déterminer une équation cartésienne de la perpendiculaire d en A à la droite (AB).

b) Déterminer une équation de la parallèle à d qui passe par B.

59 d_1 est la droite qui passe par le point $A(2\,;3)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n_1}(1\,;2)$.
d_2 est la droite d'équation cartésienne $2x - y + 4 = 0$.

a) Déterminer un vecteur normal $\overrightarrow{n_2}$ à la droite d_2.

b) Démontrer que les droites d_1 et d_2 sont perpendiculaires.

c) Calculer les coordonnées du point d'intersection des droites d_1 et d_2.

60 On donne le point $A(2\,;1)$ et la droite d_1 d'équation cartésienne $x + y - 1 = 0$.

a) Déterminer une équation cartésienne de la perpendiculaire d_2 à la droite d_1 qui passe par A.

b) Calculer les coordonnées du point d'intersection des droites d_1 et d_2.

61 $A(2\,;3)$, $B(-1\,;-1)$, $C(4\,;-2)$ sont trois points.

a) Réaliser une figure et la compléter tout au long de l'exercice.

b) Déterminer une équation cartésienne de la hauteur d_1 issue de A dans le triangle ABC.

c) d_2 est la droite d'équation cartésienne :

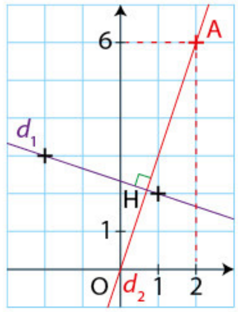
$$-5x + y + 9 = 0$$

Démontrer que les droites d_1 et d_2 sont parallèles.

d) Démontrer que d_2 est la médiatrice de [BC].

62 La droite d_1 a pour équation cartésienne :

$$x + 3y - 7 = 0$$



a) Déterminer une équation cartésienne de la droite d_2 qui passe par le point $A(2\,;6)$ et perpendiculaire à la droite d_1.

b) Déterminer les coordonnées du point d'intersection H des droites d_1 et d_2.

c) En déduire la distance du point A à la droite d_1.

63 On donne les points :

$$A(2\,;-1), \quad B(4\,;3) \quad \text{et} \quad C(0\,;2).$$

a) Démontrer que la droite d_1 d'équation cartésienne $4x + y - 7 = 0$ est la hauteur issue de A dans le triangle ABC.

b) Déterminer une équation cartésienne de la hauteur d_2 issue de B dans le triangle ABC.

c) Déterminer les coordonnées du point d'intersection H de ces deux hauteurs.

d) Vérifier que la droite (CH) est la troisième hauteur du triangle ABC.

64 On donne les points :

$$A(5\,;2), \quad B(-1\,;3) \quad \text{et} \quad C(0\,;-4).$$

a) Déterminer une équation cartésienne de chacune des médiatrices des segments [AB] et [AC].

b) Déterminer les coordonnées du point d'intersection K de ces deux médiatrices.

c) Vérifier que K est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, c'est-à-dire passant par A, B, C.
Calculer son rayon.

65 $\mathscr{C}$ est le cercle de centre l'origine O du repère et de rayon 1.

a) Démontrer que le point $A\left(\frac{1}{2}\,;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ appartient à $\mathscr{C}$.

b) T est la tangente à $\mathscr{C}$ au point A et d est la droite d'équation cartésienne $x + \sqrt{3}y = 0$.
Démontrer que les droites d et T sont parallèles.

66 $\mathscr{C}$ est le cercle de centre $A(3\,;2)$ et de rayon 2.

a) Vérifier que le point $B(4\,;2 + \sqrt{3})$ appartient à $\mathscr{C}$.

b) Déterminer une équation cartésienne de la tangente T_1 au cercle $\mathscr{C}$ en B.

c) Déterminer également une équation cartésienne de la tangente T_2 au cercle $\mathscr{C}$ en B′ point diamétralement opposé à B.

Équations de cercles

→ Cours 1. B et 2. B

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

Questions Flash

67 Dans chaque cas, déterminer le centre et le rayon du cercle dont une équation cartésienne est donnée.

a) $(x-3)^2+(y-1)^2=9$ **b)** $x^2+(y+5)^2=2$

c) $(x+2)^2+(y-5)^2=16$ **d)** $x^2+y^2=5$

68 $\mathscr{C}$ est le cercle d'équation :

$$(x-2)^2+(y+1)^2=25$$

a) Ida affirme : « Le point $A(2\,;4)$ appartient à $\mathscr{C}$. » A-t-elle raison ?

b) Pour chaque point, dire s'il appartient à $\mathscr{C}$.

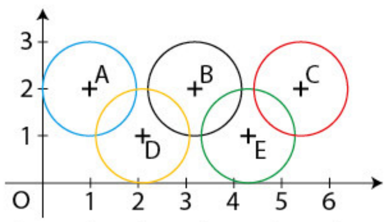
- $B(5\,;3)$
- $C(7\,;-2)$
- $D(6\,;2)$

69 Dans chaque cas, déterminer une équation cartésienne du cercle de centre A et de rayon r.

a) $A(2\,;5)$, $r=3$ **b)** $A(-3\,;2)$, $r=1$

c) $A(-1\,;-4)$, $r=\sqrt{6}$ **d)** $A(0\,;1)$, $r=2\sqrt{2}$

70 On a tracé ci-contre les cercles olympiques de rayon 1 et de centres les points



$A(1\,;2)$, $B(3{,}2\,;2)$, $C(5{,}4\,;2)$, $D(2{,}1\,;1)$ et $E(4{,}3\,;1)$.

Déterminer une équation cartésienne de chacun des cinq cercles.

71 Dans chaque cas, $\mathscr{C}$ est le cercle de centre le point A et qui passe par le point B.

Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{C}$.

a) $A(1\,;1)$, $B(5\,;0)$ **b)** $A(2\,;0)$, $B(3\,;1)$

c) $A(-1\,;3)$, $B(4\,;-2)$ **d)** $A(0\,;4)$, $B(7\,;5)$

Pour les exercices 72 et 73, A et B sont des points. Déterminer les coordonnées du milieu I du segment [AB]. Calculer la distance AB puis écrire une équation du cercle de diamètre [AB].

72 $A(-1\,;1)$ et $B(3\,;2)$.

73 $A(0\,;-4)$ et $B(1\,;-5)$.

74 $\mathscr{C}$ est le cercle de diamètre [AB] avec $A(4\,;3)$ et $B(-2\,;1)$.

On se propose de déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{C}$ de deux façons différentes.

1. Première méthode

a) Déterminer les coordonnées du centre I du cercle, puis son rayon r.

b) En déduire une équation cartésienne de $\mathscr{C}$.

2. Deuxième méthode

$M(x\,;y)$ est un point de $\mathscr{C}$.

a) Exprimer $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$ en fonction de x et y.

b) En déduire une équation cartésienne de $\mathscr{C}$ et la présenter sous la forme $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.

75 $\mathscr{C}$ est l'ensemble d'équation :

$$x^2+y^2-10x+4y+23=0$$

a) Recopier et compléter les égalités suivantes :

- $x^2-10x=(x-\ldots)^2-\ldots$
- $y^2+4y=(y+\ldots)^2-\ldots$

b) En déduire que l'ensemble $\mathscr{C}$ est un cercle.

Donner son centre et son rayon.

76 Dans chaque cas, l'ensemble $\mathscr{F}$ dont l'équation est donnée est-il un cercle ?

Dans l'affirmative, donner son centre et son rayon.

a) $x^2+y^2-4x+6y+12=0$

b) $x^2+y^2+10x-4y+29=0$

c) $x^2+y^2+8x-10y+42=0$

d) $x^2+y^2-12x=0$

77 $\mathscr{C}$ est le cercle d'équation cartésienne :

$$x^2+y^2-2x-4y+3=0$$

a) Déterminer le centre A et le rayon r du cercle $\mathscr{C}$.

b) Vérifier que le point $B(2\,;3)$ appartient à $\mathscr{C}$.

c) d est la droite d'équation cartésienne :

$$x+y-5=0$$

Démontrer que cette droite est tangente au cercle $\mathscr{C}$ au point B.

78 $\mathscr{C}$ est le cercle d'équation cartésienne :

$$x^2+y^2-2x-6y+8=0$$

a) Déterminer le centre A et le rayon r du cercle $\mathscr{C}$.

b) Vérifier que le point $B(0\,;4)$ appartient à $\mathscr{C}$.

c) Déterminer une équation de la tangente T au cercle $\mathscr{C}$ au point B.

79 d et d' sont deux droites d'équations respectives $2x-y+3=0$ et $x+3y-1=0$.

Ces deux droites sont-elles des tangentes à un même cercle en des points diamétralement opposés ?

QCM interactifs

Pour se tester

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

80 Dans chaque cas, donner la réponse exacte sans justifier.

A$(-2\,;1)$ et B$(4\,;3)$ sont deux points et d est la médiatrice du segment [AB].

		A	B	C	D
1	Une équation cartésienne de la droite d est …	$3x+y+1=0$	$3x+y+5=0$	$3x+y-5=0$	$3x-y-5=0$
2	Un vecteur normal à (AB) est …	$\vec{n}(6\,;2)$	$\vec{n}(-1\,;3)$	$\vec{n}(1\,;3)$	$\vec{n}(0\,;4)$
3	Une équation du cercle $\mathscr{C}_1$ de centre A et de rayon 2 est …	$(x+2)^2+(y-1)^2=4$	$(x-2)^2+(y+1)^2=4$	$(x+2)^2+(y-1)^2=2$	$x^2+y^2=4$
4	Une équation du cercle $\mathscr{C}_2$ de diamètre [AB] est …	$x^2+y^2+2x+4y=5$	$x^2+y^2-2x-4y=0$	$x^2+y^2=5$	$x^2+y^2-2x-4y=5$

81 Dans chaque cas, donner la (ou les) réponse(s) exacte(s) sans justifier.

A$(0\,;3)$, B$(4\,;5)$ et C$(6\,;0)$ sont des points.

		A	B	C	D
1	L'ensemble des points M tel que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=4$ est …	le cercle de centre I milieu de [AB] et de rayon 3	le cercle d'équation $(x-2)^2+(y-4)^2=9$	formé du seul point I	l'ensemble vide
2	J est le milieu du côté [AC]. La longueur BJ est égale à …	$\dfrac{143}{2}$	$\dfrac{\sqrt{151}}{2}$	$\dfrac{53}{4}$	$\dfrac{\sqrt{53}}{2}$
3	En degré, on note $\widehat{BAC}=\alpha$ et $\widehat{ABC}=\beta$. L'arrondi à l'unité …	de α est 53°	de α est 42°	de α est 85°	de β est 85°

82 Dans chaque cas, dire si l'affirmation est vraie ou fausse en justifiant.

1. ABC est un triangle tel que $AB=10$, $AC=12$ et $BC=20$.

Affirmation : l'arrondi à l'unité de la mesure, en degré, de l'angle $\widehat{BAC}$ est 131°.

2. Les cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ ont pour équations respectives :

$$x^2+y^2-4x+2y-6=0 \text{ et } (x-2)^2+(y-1)^2=7.$$

Affirmation : $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ ont le même centre.

3. $\mathscr{C}$ est le cercle de centre O, l'origine du repère, et de rayon 1 et d est la droite d'équation cartésienne $x+y-\sqrt{2}=0$.

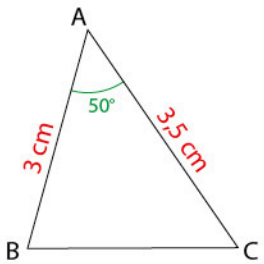
Affirmation : d est tangente à $\mathscr{C}$.

Vérifiez vos réponses : p. 340

83 Utiliser la formule d'Al-Kashi

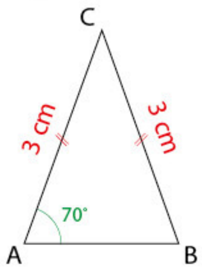
ABC est un triangle.
Dans chaque cas, utiliser la formule d'Al-Kashi pour effectuer le calcul demandé.

a)



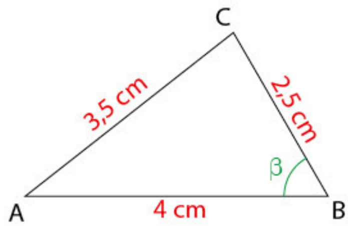
Calculer BC, en cm.
Arrondir au dixième.

b)



Calculer AB, en cm.
Arrondir au dixième.

c)



Calculer β, en degré.
Arrondir au dixième.

AIDE

b) Déterminer d'abord l'angle $\widehat{ACB}$.
c) Calculer $\cos(\beta)$ et en déduire une valeur approchée de β avec la calculatrice.

84 Déterminer une équation cartésienne de droite

Le plan est muni d'un repère orthonormé.
1. d est la droite qui passe par le point $A(-3\,;2)$ et de vecteur normal $\vec{n}(2\,;1)$.
a) Recopier et compléter : une équation cartésienne de d est de la forme $\ldots x + \ldots y + c = 0$.
b) d passe par le point $A(-3\,;2)$.
Remplacer x et y par les coordonnées de A dans l'équation précédente et en déduire c.
c) Donner l'équation cartésienne de la droite d.
2. Dans chaque cas, déterminer une équation cartésienne de la droite :
a) qui passe par le point $B(1\,;-4)$ et de vecteur normal $\vec{m}(-1\,;2)$;
b) qui passe par les points $C(3\,;2)$ et $D(-2\,;5)$.

AIDE

$d : ax + by + c = 0$

$\vec{n}(a\,;b)$ est un vecteur normal de d.

85 Déterminer une équation cartésienne de cercle

Dans un repère orthonormé, $\mathscr{C}$ est le cercle de centre $A(2\,;-3)$ et qui passe par le point $B(5\,;1)$.
a) Recopier et compléter, puis terminer le calcul :

$$AB^2 = (\ldots - \ldots)^2 + (\ldots - \ldots)^2$$

En déduire le rayon du cercle $\mathscr{C}$.
b) Déterminer alors une équation cartésienne de $\mathscr{C}$.
c) Pour chaque point, dire s'il appartient au cercle $\mathscr{C}$.
- $E(2\,;2)$
- $F(4\,;3)$
- $G(7\,;-3)$
- $H(6\,;0)$

AIDE

Centre $(a\,;b)$ Rayon r

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$
Équation du cercle

EXERCICE RÉSOLU

86 Déterminer des ensembles de points

Le plan est muni d'un repère orthonormé.
On donne les points $A(x_A\,;y_A)$, $B(x_B\,;y_B)$ et un nombre réel k.
L'algorithme ci-contre détermine et affiche la nature de l'ensemble Γ des points M tels que :

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=k$$

1. Exécuter l'algorithme dans chacun des cas suivants :

a) $A(0\,;-2)$ $B(3\,;-2)$ et $k=1$
b) $A(3\,;5)$ $B(-2\,;-1)$ et $k=-18$
c) $A(-1\,;1)$ $B(1\,;3)$ et $k=-2$

2. a) Expliquer et justifier le fonctionnement de cet algorithme.
b) Préciser les caractéristiques de l'ensemble Γ dans chacune des situations.

```
d ← √((x_B − x_A)² + (y_B − y_A)²)
p ← k + d²/4
Si p < 0
    Afficher "Γ est l'ensemble vide"
    sinon
    Si p = 0 alors
        Afficher "Γ est réduit à un point"
        sinon
        Afficher "Γ est un cercle"
    Fin Si
Fin Si
```

Solution

1. On obtient les résultats suivants.

	d	p	Message affiché en sortie
a)	3	$\frac{13}{4}$	Γ est un cercle
b)	$\sqrt{61}$	$-\frac{11}{4}$	Γ est l'ensemble vide
c)	$2\sqrt{2}$	0	Γ est réduit à un point

2. a) Pour tout point M, $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=MI^2-\frac{1}{4}AB^2$ où I est le milieu de $[AB]$.

Donc Γ est l'ensemble des points M tels que $MI^2-\frac{1}{4}AB^2=k$, soit $MI^2=k+\frac{1}{4}AB^2$,

c'est-à-dire $MI^2=p$ avec $p=k+\frac{d^2}{4}$ où $d=AB$.

- Si $p<0$, alors Γ est l'ensemble vide.
- Si $p=0$, alors Γ est réduit au point I.
- Si $p>0$, alors Γ est le cercle de centre le point I et de rayon $\sqrt{p}$.

b) À la question **1. a)**, Γ est le cercle de centre $I\left(\frac{3}{2}\,;-2\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{13}}{2}$.

À la question **1. c)**, Γ est réduit au point $I(0\,;2)$.

À VOTRE TOUR

87 Dans les messages affichés par l'algorithme de l'exercice **86**, apporter les précisions suivantes :
- lorsque $p=0$, afficher les coordonnées du point auquel Γ est réduit.
- lorsque $p>0$, afficher les coordonnées du centre du cercle Γ ainsi que son rayon.

88 Le plan est muni d'un repère orthonormé.
On donne les points $A(x_A\,;y_A)$, $M(x\,;y)$ et un nombre réel positif r.
$\mathscr{C}$ est le cercle de centre A et de rayon r.
Écrire un algorithme qui affiche si le point M se trouve à l'intérieur de $\mathscr{C}$, sur $\mathscr{C}$ ou à l'extérieur de $\mathscr{C}$.

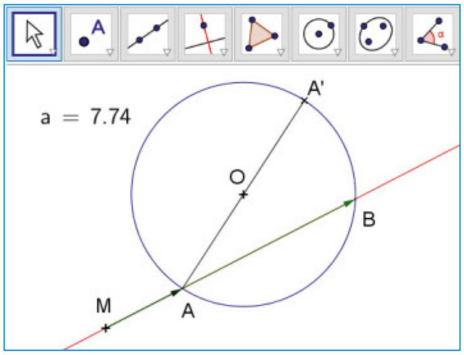
EXERCICE RÉSOLU

89 Conjecturer puis démontrer

$\mathscr{C}$ est un cercle de centre O et de rayon r.
M est un point qui n'appartient pas à $\mathscr{C}$.
A est un point mobile du cercle $\mathscr{C}$ et A' est son point diamétralement opposé.
d la droite qui passe par les points M et A ; elle recoupe le cercle en B.

1. a) Avec un logiciel de géométrie, réaliser la figure ci-contre.
Ensuite créer les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$, afficher $a = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$.
b) Déplacer le point A et observer a.
Quelle conjecture peut-on émettre ?

2. Démontrer cette conjecture.



Solution

1. a) Pour créer les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$, saisir `vecteur(M,A)` `vecteur(M,B)`, le logiciel les note u et v.
Pour créer $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$, saisir `ProduitScalaire(u,v)`, le logiciel le note a.
b) En déplaçant le point A sur le cercle, il semble que le produit scalaire $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ (c'est-à-dire a) reste constant et ne dépende donc pas de la sécante d.

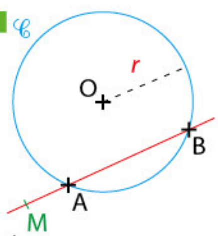
2. Avec la relation de Chasles, $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} \cdot (\overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{A'B})$
soit $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{A'B}$.
Le point A' est diamétralement opposé à A sur le cercle $\mathscr{C}$,
donc $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BA'} = 0$; on en déduit que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{A'B} = 0$.
D'autre part, O est le milieu de $[AA']$ donc on peut écrire :
$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'} = MO^2 - \frac{1}{4}AA'^2 = MO^2 - r^2$.
Donc pour tout point M du plan, $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MO^2 - r^2$ **(1)**.
Ainsi, le produit scalaire $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ ne dépend pas de la sécante d.
Remarque : on peut vérifier que **(1)** est encore vraie lorsque M appartient à $\mathscr{C}$.

Pour déterminer le produit scalaire $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$, on utilise la relation de Chasles en décomposant $\overrightarrow{MB}$ en somme $\overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{A'B}$. Une idée qui peut faire penser à cela est de vouloir utiliser l'orthogonalité des vecteurs $\overrightarrow{A'B}$ et $\overrightarrow{MA}$.

On vient d'établir que si d'un point M on mène une sécante d qui coupe un cercle $\mathscr{C}$ en A et B, alors $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ ne dépend pas de d. Le nombre $MO^2 - r^2$ est appelé la puissance de M par rapport au cercle $\mathscr{C}$.

À VOTRE TOUR

90 On a établi à l'exercice **89** que pour tout point M :
$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = OM^2 - r^2$$
a) Factoriser $OM^2 - r^2$ et en déduire que le signe de $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ est le signe de $OM - r$.
b) En déduire le signe de $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ selon la position du point M par rapport au cercle $\mathscr{C}$.



91 $\mathscr{C}$ est un cercle de centre O et de rayon $r = 4$ cm.
Déterminer et construire l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M dont la puissance par rapport au cercle $\mathscr{C}$ (voir commentaire de l'exercice **89**) est égale :
a) à 20 **b)** à 16
c) à -7 **d)** à -16

Démontrer et raisonner

92 Déterminer un projeté orthogonal

Méthode
Pour déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point A sur une droite *d*, on minimise la distance AM où M est un point de *d*.

Dans un repère orthonormé, on donne le point $A(2\,;1)$ et la droite *d* d'équation $x+y-1=0$.
On note $M(x\,;y)$ un point de la droite *d*.

a) Exprimer AM^2 en fonction de x et de y.
b) Exprimer y en fonction de x en utilisant l'équation de la droite *d*.
c) En déduire une expression de AM^2 en fonction de x uniquement.
Développer et réduire cette expression.
d) Déterminer alors la valeur de x pour laquelle AM^2 est minimum.
e) En déduire les coordonnées du projeté orthogonal de A sur la droite *d*.

93 Étudier la position relative d'une droite et d'un cercle

Méthode
Pour étudier la position relative d'une droite *d* et d'un cercle $\mathscr{C}$ de centre A et de rayon *r*, on calcule la distance de A à *d* et on la compare avec le rayon *r*.

Dans un repère orthonormé d'origine O, on donne la droite *d* d'équation $2x-y+3=0$ et le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1.

a) Déterminer le projeté orthogonal de O sur la droite *d* et en déduire la distance de O à *d*.
b) Conclure sur la position de *d* par rapport à $\mathscr{C}$.

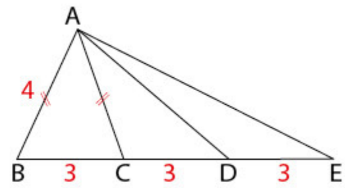
94 Étudier l'intersection de deux cercles

Méthode
Pour étudier l'intersection de deux cercles, on compare la distance entre leurs centres et la somme de leurs rayons.

Dans un repère orthonormé, $\mathscr{C}$ est le cercle de centre $A(1\,;-1)$ et de rayon 2 et $\mathscr{C}'$ est le cercle d'équation $(x-2)^2+(y+2)^2=9$.
Étudier l'intersection des cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.

Calculer avec le produit scalaire

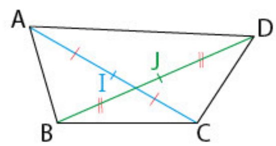
95 Sur la figure ci-dessous, les points B, C, D, E sont alignés et $BC=CD=DE=3$.
ABC est un triangle isocèle en A avec $AB=4$.



1. a) En décomposant les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ à l'aide de la relation de Chasles, démontrer que :
$$AB^2+AD^2=2AC^2+\frac{1}{2}BD^2$$
b) En déduire que $AD=\sqrt{34}$.
2. Par une méthode analogue, calculer la longueur AE.

96 ABCD est un rectangle de centre O.
Démontrer que pour tout point M :
$$MA^2+MC^2=MB^2+MD^2.$$

97 Leonhard Euler affirmait en 1748 : « La somme des carrés des côtés d'un quadrilatère est supérieure ou égale à la somme des carrés des diagonales. »

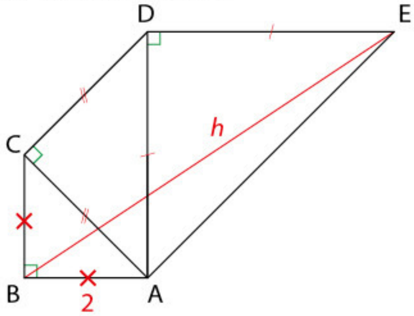


1. On se propose de démontrer cette propriété.
ABCD est un quadrilatère. I et J sont les milieux respectifs des segments [AC] et [BD].
a) Démontrer que :
- $BA^2+BC^2=2BI^2+\frac{1}{2}AC^2$
- $DA^2+DC^2=2DI^2+\frac{1}{2}AC^2$

b) Établir alors l'égalité :
$$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=4IJ^2+AC^2+BD^2$$
c) En déduire l'affirmation d'Euler.
2. Dans quelle situation, la somme $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2$ est-elle minimum ?
Que peut-on dire alors du quadrilatère ABCD ?

98 Algo Écrire une fonction en langage Python qui renvoie pour résultat la valeur de $\cos(\widehat{BAC})$ et dont les paramètres sont les coordonnées des points distincts A, B, C dans un repère orthonormé.

99 Voici une figure codée.



À l'aide de la formule d'Al-Kashi, calculer la longueur $h = \text{BE}$.

100 Dans un repère orthonormé d'origine O, $\mathscr{C}$ est le cercle de centre O et rayon 1, et Γ est la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$.

a) Calculer les coordonnées du point d'intersection A du cercle $\mathscr{C}$ et de la courbe Γ.

b) Déterminer la mesure, en degré, de l'angle $\widehat{\text{IOA}}$ où $\text{I}(1\,;0)$. *Arrondir au dixième.*

101 ABCD est un carré de côté 2 cm.
Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que :

a) $\overrightarrow{\text{AM}}^2 = 4$ **b)** $\overrightarrow{\text{BM}} \cdot \overrightarrow{\text{BC}} = 0$

c) $\overrightarrow{\text{CM}} \cdot \overrightarrow{\text{CD}} = 2$ **d)** $\overrightarrow{\text{MA}} \cdot \overrightarrow{\text{MC}} = 1$

Déterminer ou utiliser des équations cartésiennes de droites

102 Dans un repère orthonormé, on donne les points :

$\text{A}(1\,;-2)$, $\text{B}(4\,;3)$ et $\text{C}(-2\,;1)$.

a) Déterminer une équation cartésienne de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.

b) Déterminer une équation cartésienne de la hauteur issue de B dans le triangle ABC.

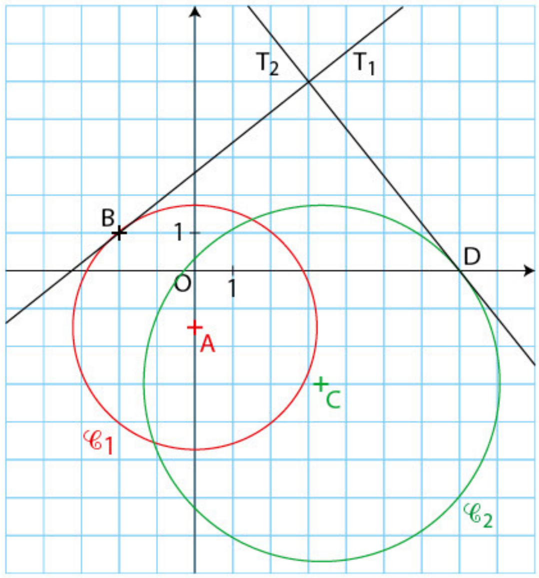
c) Calculer les coordonnées de l'orthocentre H du triangle ABC.

103 Dans un repère orthonormé d'origine O, $\mathscr{C}$ est le cercle de centre O et de rayon 5.

a) A est le point de coordonnées $(3\,;4)$.
Calculer la distance OA.
Que peut-on en déduire pour le point A ?

b) Écrire une équation cartésienne de la tangente T en A au cercle $\mathscr{C}$.

104 Le plan est muni d'un repère orthonormé.
$\mathscr{C}_1$ est le cercle de centre $\text{A}(0\,;-1{,}5)$ passant par le point $\text{B}(-2\,;1)$.
$\mathscr{C}_2$ est le cercle de centre $\text{C}(3{,}25\,;-3)$ passant par le point $\text{D}(7\,;0)$.



Démontrer que la tangente T_1 en B au cercle $\mathscr{C}_1$ est perpendiculaire à la tangente T_2 en D au cercle $\mathscr{C}_2$.

105 Dans un repère orthonormé, A est le point de coordonnées $(2\,;4)$ et d est la droite d'équation $x - y + 1 = 0$.
Le point A′ est le symétrique orthogonal de A par rapport à la droite d.

a) Que peut-on dire du vecteur $\overrightarrow{\text{AA}'}$ et du milieu I de $[\text{AA}']$ pour la droite d ?

b) Calculer les coordonnées du point A′.

106 Dans un repère orthonormé d'origine O, on donne les points $\text{A}(-1\,;3)$ et $\text{B}(2\,;1)$.

1. Déterminer une équation cartésienne de :

a) la médiatrice d_1 du segment $[\text{AB}]$;

b) la hauteur d_2 issue de O dans le triangle OAB ;

c) la tangente d_3 en B au cercle de centre A qui passe par B.

2. Déterminer la position relative des droites d_1, d_2, d_3 :

a) analytiquement ;

b) géométriquement.

107 Dans un repère orthonormé, on donne les points $\text{A}(-1\,;1)$ et $\text{B}(3\,;-1)$.
Déterminer une équation de l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{\text{AM}} \cdot \overrightarrow{\text{AB}} = 0$.

Déterminer ou utiliser des équations cartésiennes de cercles

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

108 Déterminer une équation de la tangente en $A(3\,;2)$ au cercle de centre $B(-1\,;3)$.

109 Déterminer une équation cartésienne du cercle de centre $A(5\,;1)$ et tangent à la droite d d'équation :

$$x+y-4=0$$

110 $\mathscr{C}$ est le cercle d'équation cartésienne :

$$x^2+y^2-2x-6y+8=0$$

a) Déterminer le centre A et le rayon r du cercle $\mathscr{C}$.
b) Vérifier que le point $B(0\,;4)$ appartient à $\mathscr{C}$.
c) Déterminer une équation cartésienne de la tangente T en B au cercle $\mathscr{C}$.

111 $\mathscr{C}$ est le cercle d'équation cartésienne :

$$x^2+y^2-2x-4y+3=0$$

et d est la droite d'équation $mx-y+5=0$ où m est un nombre réel.
a) Déterminer le centre A et le rayon du cercle $\mathscr{C}$.
b) Exprimer en fonction de m les coordonnées du projeté orthogonal H de A sur la droite d.
c) Préciser la position relative de la droite d_m et du cercle $\mathscr{C}$ selon les valeurs de m.

112 $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont les cercles d'équations respectives :

$$(x+5)^2+(y-1)^2=4 \quad \text{et} \quad x^2+(y+3)^2=9.$$

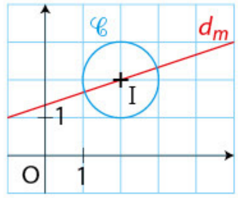
a) Déterminer le centre et le rayon du cercle $\mathscr{C}$ puis du cercle $\mathscr{C}'$.
b) Étudier l'intersection de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.
c) Tracer ces deux cercles.
Cela est-il cohérent avec la réponse à la question **b)** ?

113 $\mathscr{C}_1$ est le cercle d'équation cartésienne :

$$x^2+y^2-2x=0$$

et $\mathscr{C}_2$ est le cercle de centre $I_2(2\,;2)$, de rayon 2.
1. a) Déterminer le centre I_1 du cercle $\mathscr{C}_1$ et son rayon.
b) Calculer la distance I_1I_2 et en déduire que les cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sont sécants.
c) Calculer les coordonnées des points d'intersection A_1 et A_2 des cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.
2. a) Déterminer une équation cartésienne de la médiatrice d du segment $[A_1A_2]$.
b) Démontrer de deux façons différentes que la droite d est la droite (I_1I_2).

114 $\mathscr{C}$ est le cercle de centre $I(2\,;2)$ et de rayon 1 et d_m est la droite d'équation réduite $y=mx+2-2m$ où m désigne un nombre réel.



a) Vérifier que la droite d_m passe par le point I.
b) Exprimer en fonction de m, les coordonnées des points d'intersection de la droite d_m et du cercle $\mathscr{C}$.

115 On donne les points :

$$A(-1\,;3),\ B(-2\,;5) \text{ et } C(3\,;5).$$

a) Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A.
b) Déterminer une équation cartésienne du cercle $\mathscr{C}$ circonscrit au triangle ABC, c'est-à-dire passant par A, B et C.

116 **a)** Déterminer le centre et le rayon de chacun des cercles d'équations cartésiennes :

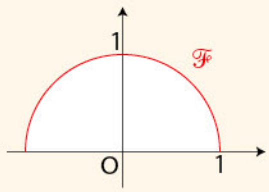
$$x^2+y^2-8x+6y=-15 \quad \text{et} \quad x^2+y^2-10x=15.$$

b) Représenter ces deux cercles. Que remarque-t-on ? Prouver cette conjecture.

S'entraîner à la logique → p. 336

117 **Implication et réciproque**

Dans un repère orthonormé d'origine O, $\mathscr{F}$ est le demi-cercle de centre O, de rayon 1 représenté ci-dessous.



M désigne un point de coordonnées $(x\,;y)$.
a) Démontrer l'implication : « Si le point M appartient à l'ensemble $\mathscr{F}$, alors $x^2+y^2=1$. »
b) La réciproque de cette implication est-elle vraie ? Justifier.

118 **Une condition nécessaire et suffisante**

Dans un repère orthonormé, d et d' sont les droites d'équations respectives $y=mx+p$ et $y=m'x+p'$.
Démontrer que d et d' sont perpendiculaires si, et seulement si, $mm'=-1$.

119 Étudier des intersections

Représenter | Calculer

Dans un repère orthonormé :

- $\mathscr{C}$ est le cercle de centre le point $A(2\ ;\ 1)$ et de rayon 3 ;
- d_1 est la droite d'équation $y = 3$;
- d_2 la droite d'équation $x = 1$.

1. Construire une figure.

2. a) Écrire une équation cartésienne de $\mathscr{C}$.

b) Déterminer les coordonnées des points d'intersection du cercle $\mathscr{C}$ et de la droite d_1.

c) Déterminer également les coordonnées des points d'intersection du cercle $\mathscr{C}$ et de la droite d_2.

120 Imaginer une stratégie

Chercher | Raisonner | Calculer

Dans un repère orthonormé, on donne les points :

$$A\left(-\frac{3}{2}\ ;\ 3\right),\quad B\left(\frac{3}{2}\ ;\ 0\right)\quad \text{et}\quad C(3\ ;\ 3).$$

Procéder de deux façons différentes pour déterminer une équation cartésienne du cercle circonscrit au triangle ABC c'est-à-dire du cercle qui passe par les trois sommets A, B, C du triangle.

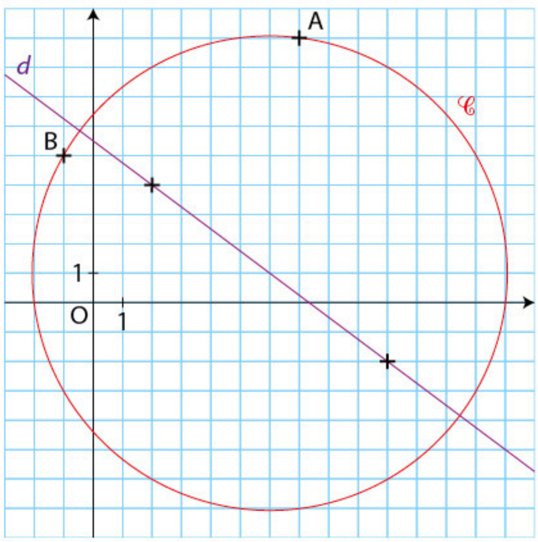
121 Déterminer le centre d'un cercle

Représenter | Raisonner | Calculer

Dans un repère orthonormé, d est la droite d'équation cartésienne :

$$3x + 4y = 22$$

$\mathscr{C}$ est un cercle centré sur d, passant par les points $A(7\ ;\ 9)$ et $B(-1\ ;\ 5)$.



Déterminer les coordonnées du centre C du cercle $\mathscr{C}$.

122 Démontrer une propriété géométrique

Chercher | Calculer | Communiquer

ABC est un triangle et I est le milieu du côté [BC].

1. a) Démontrer qu'il existe un unique point G tel que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ et que ce point est défini par $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

b) Démontrer alors que $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$.

c) En déduire que le point G appartient à la médiane (AI) issue de A.

Préciser la position du point G sur le segment [AI].

2. Démontrer que les médianes du triangle ABC concourent au point G.

G est appelé centre de gravité du triangle ABC.

3. Démontrer que pour tout point M :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$$

4. Application : On suppose que le triangle ABC est équilatéral de côté 2 cm.

a) Calculer les longueurs GA, GB et GC.

b) Déterminer l'ensemble des points M tels que :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 25$$

123 Situer deux cercles

? Problème ouvert

Chercher | Raisonner

Dans un repère orthonormé, les cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ ont pour équations cartésiennes respectives :

$$x^2 + y^2 - 8y = 0 \text{ et } x^2 + y^2 - 16x + 4y + 32 = 0.$$

Les cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sont-ils tangents ?

124 Étudier des cercles sécants

Représenter | Raisonner | Calculer

Dans un repère orthonormé, $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont les cercles d'équations respectives :

$$x^2 + y^2 - 4y - 5 = 0 \text{ et } x^2 + y^2 - 8x - 2y + 7 = 0.$$

a) Tracer ces deux cercles.

b) $M(x\ ;y)$ est un point d'intersection de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.

Expliquer pourquoi :

$$4y + 5 = 8x + 2y - 7$$

c) Exprimer alors y et y^2 en fonction de x, et en reportant dans l'équation de $\mathscr{C}$, par exemple, écrire l'équation du second degré obtenue.

d) Résoudre cette équation et donner les coordonnées des points M et N susceptibles d'être à l'intersection de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.

e) Réciproquement, vérifier que ces deux points sont bien communs à $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$. Conclure.

125 Prendre des initiatives

Chercher | Raisonner | Communiquer

ABC est un triangle quelconque.
$\mathscr{E}$ est l'ensemble des points M tels que :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$$

$\mathscr{E}'$ est l'ensemble des points M tels que :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$$

Démontrer que $\mathscr{E}$ et $\mathscr{E}'$ ont exactement deux points communs si, et seulement si :

$$0 < \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} < AB^2$$

126 Présenter la droite d'Euler

Chercher | Raisonner | Communiquer

Dans un repère orthonormé, on donne les points :

$$A(-3\,;6),\ B(-3\,;-3) \text{ et } C(6\,;0).$$

1. a) Déterminer les équations cartésiennes des médiatrices des segments $[AB]$ et $[BC]$.

b) Déterminer les coordonnées du point d'intersection O de ces deux médiatrices.

Ce point est le **centre du cercle circonscrit** à ABC.

2. a) Déterminer les équations cartésiennes des médianes du triangle ABC issues de A et de B.

b) Déterminer les coordonnées du point d'intersection G de ces deux médianes.

Ce point est le **centre de gravité** du triangle ABC.

c) Déterminer les coordonnées de l'orthocentre H de ABC.

d) Démontrer que les points O, G et H sont alignés.

La droite qui contient les points O, G et H est nommée droite d'Euler en hommage au mathématicien suisse Leonhard Euler qui énonça et démontra cette propriété.

127 Étudier une famille de cercles

Chercher | Raisonner

Dans un repère orthonormé, $\mathscr{C}_k$ est l'ensemble des points $M(x\,;y)$ tels que :

$$x^2 + y^2 - 2kx + 2x + 2ky + 6y - 10 = 0$$

où k désigne un nombre réel.

1. Déterminer les ensembles $\mathscr{C}_0$, $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$.

2. a) Démontrer que pour tout nombre réel k, $\mathscr{C}_k$ est un cercle.

b) Déterminer les coordonnées du centre I_k de $\mathscr{C}_k$ et calculer son rayon.

3. Quel est l'ensemble des points I_k lorsque k décrit $\mathbb{R}$?

4. Démontrer que tous les cercles $\mathscr{C}_k$ passent par deux points fixes A et B.

128 Représenter un ensemble

Narration de recherche

Chercher | Représenter

Rédiger les différentes étapes de la recherche, sans omettre les fausses pistes et les changements de méthode.

Problème Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(1\,;1)$ et $B(9\,;1)$.
Représenter l'ensemble des points $M(x\,;y)$ tels que :

$$-7 \leqslant \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} \leqslant 0 \text{ et } x \leqslant 7.$$

129 Étudier une famille de droites

Chercher | Raisonner

$(O\,;\vec{i},\vec{j})$ est un repère orthonormé.
On note $\mathscr{F}$ l'ensemble des droites d_m définies par l'équation :

$$mx + (1-m)y + m - 2 = 0$$

où m désigne un nombre réel.

a) Montrer que ces droites passent toutes par un point fixe A dont on précisera les coordonnées.

b) Montrer que toutes les droites passant par A sont éléments de $\mathscr{F}$ à l'exception d'une seule que l'on précisera.

c) Pour tout nombre réel m, H_m le projeté orthogonal de O sur la droite d_m.
Montrer que lorsque m décrit $\mathbb{R}$, H_m se déplace sur un cercle fixe $\mathscr{C}$ que l'on précisera sans établir son équation.

d) Justifier que H_m décrit le cercle $\mathscr{C}$ à l'exception d'un point que l'on précisera.

130 Tracer des tangentes

Chercher | Représenter | Calculer

$(O\,;\vec{i},\vec{j})$ est un repère orthonormé.
$\mathscr{C}$ est le cercle d'équation :

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$$

et T est le point de coordonnées $(3\,;4)$.

1. a) Déterminer les coordonnées du centre Ω du cercle $\mathscr{C}$ et son rayon.

b) Tracer le cercle $\mathscr{C}$ et placer le point T sur la figure.

2. On mène du point T, les deux tangentes au cercle $\mathscr{C}$ et on note A_1, A_2 les points de contact de ces tangentes avec $\mathscr{C}$.

a) Montrer que A_1 et A_2 appartiennent au cercle $\mathscr{C}'$ de diamètre $[\Omega T]$.

b) Donner une équation du cercle $\mathscr{C}'$.

c) Déterminer les coordonnées des points A_1 et A_2.

131 Tice Étudier des points équidistants

Chercher **Représenter**

Dans un repère orthonormé, $A(a\,;0)$ (avec a nombre réel) est un point mobile sur l'axe des abscisses et B est le point de coordonnées $(2\,;4)$.

a) Expliquer comment construire un point M équidistant de B et de l'axe des abscisses.

b) Réaliser une figure avec un logiciel de géométrie et représenter la trace du point M lorsque A décrit l'axe des abscisses.

c) Déterminer une équation de l'ensemble décrit par le point M.

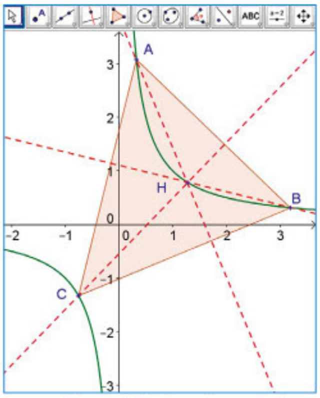
132 Tice Démontrer une propriété de l'orthocentre

Chercher **Représenter**

Dans un repère orthonormé, $\mathscr{H}$ est l'hyperbole qui représente la fonction inverse.

A et B sont deux points distincts de $\mathscr{H}$ d'abscisses positives et C est un point de $\mathscr{H}$ d'abscisse négative.

H est l'orthocentre du triangle ABC.



1. a) Réaliser une figure avec un logiciel de géométrie.

b) Déplacer les points A, B et C sur $\mathscr{H}$ et conjecturer une propriété de l'orthocentre H.

2. Démontrer cette conjecture.

Des Défis

133 Déterminer un ensemble

ABC est un triangle.

L'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ est une droite remarquable du triangle ABC.

Mais quel est l'ensemble des points M tels que :

$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}(AC^2-AB^2)\ ?$$

134 Déterminer des équations

La gaine circulaire ci-contre a pour diamètre 40 mm. Elle contient 7 fils. Déterminer une équation cartésienne de chacun des cercles représentés dans un repère orthonormé choisi.

135 Retrouver l'origine d'un repère

Les points $A(6\,;1)$, $B(-2\,;-1)$ et $C(-10\,;3)$ ont été placés dans un repère orthonormé qui a été effacé par mégarde.

Retrouver le repère.

OBJECTIF BAC

136 Déterminer des ensembles de points

35 min

D'après Bac 2008, Amérique du Sud

1. On considère deux points A et D du plan et on désigne par I le milieu du segment [AD].

a) Montrer que pour tout point M du plan :

$$\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{MA}=MI^2-IA^2$$

b) En déduire l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M du plan tels que $\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{MA}=0$.

2. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$. Les points A, B, C et D ont pour coordonnées respectives : $A(3\,;0)$, $B(0\,;6)$, $C(0\,;2{,}5)$ et $D(-5\,;0)$.

a) Vérifier que le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal à la droite (DB).

b) Déterminer une équation cartésienne de la droite (DB).

c) Déterminer une équation de l'ensemble $\mathscr{E}$ des points $M(x\,;y)$ du plan tels que $\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{MA}=0$.

137 Délimiter une zone

La situation problème

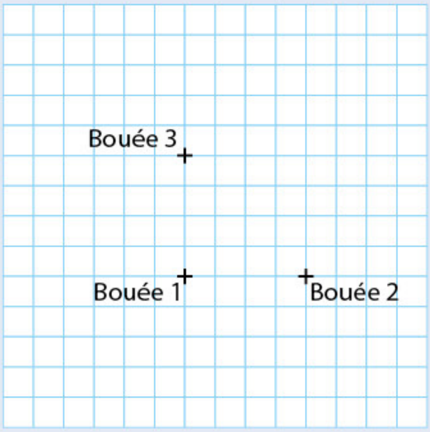
Une municipalité a décidé de délimiter une zone de pratique du pédalo sur un lac.
Utiliser les différentes informations pour calculer le coût que doit prévoir la municipalité pour délimiter cette zone.

DOC 1 La zone

La zone d'utilisation des pédalos est l'ensemble des points dont la distance à la bouée la plus proche est inférieure à 400 m.

DOC 2 Partie du lac à baliser

Échelle : 1 côté de carreau représente 100 m.



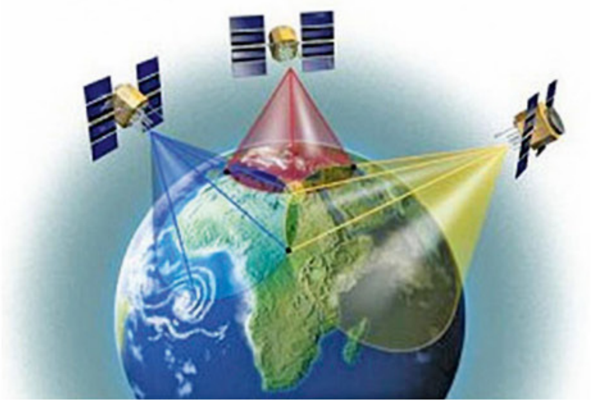
DOC 3 Les tarifs

Ligne de délimitation :
400 € les 25 m

138 Repérer une personne égarée

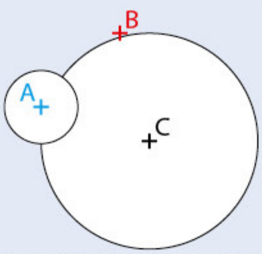
La situation problème

Victor est perdu.
Son GPS est hors service.
Il a été borné par trois satellites A, B et C.
Utiliser les différentes informations pour déterminer par le calcul la position de Victor.



DOC 1 La trilatération

La trilatération combine les mesures de différentes longueurs pour localiser un point à l'aide de quelques notions de géométrie plane.



Voici une image qui représente la trilatération en 2D avec des cercles représentant la zone observée par chaque satellite.

DOC 2 Des informations utiles

Dans un repère orthonormé, on connaît les coordonnées des centres des cercles ci-contre :

$A(1\,;0)$, $B(12\,;10)$, $C(16\,;-5)$.

Le GPS de Victor indique sa position T ; on sait que :

$TA = 5$, $TB = 10$ et $TC = 15$.

139 Study a logo

La situation problème

Use the different informations to draw the London Underground logo using equations of circles and lines.
Specify the scale used.

DOC 1 Instructions for the logo construction

The design of this cockade (called "bull's eye" until 1972) is not attributed to anyone; and this mixture of abstraction, typography and geometric forms does not symbolize anything in particular. But this logo is memorable.

DOC 2 Some informations

The blue rectangle has a length of 120 inches and a width of 20 inches. The crown has an outer diameter of 90 inches and a thickness of 15 inches.

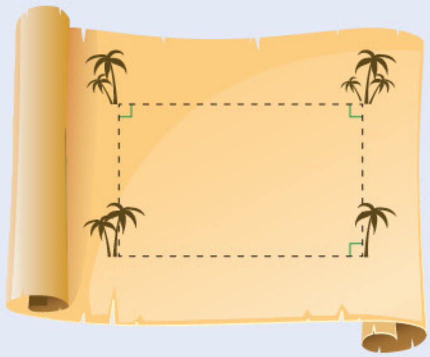
140 Chasse au trésor

La situation problème

Un groupe d'amis a trouvé deux parchemins donnant des indications sur l'emplacement d'un trésor sur une île.
Utiliser les différentes informations pour aider ce groupe d'amis à déterminer la distance du trésor au dernier palmier.

DOC 1 Le parchemin n° 1

Les emplacements des palmiers



DOC 2 Le parchemin n° 2

Le trésor est situé entre les quatre palmiers. Il est à 65 m de l'un d'eux, à 16 m de celui qui lui est opposé et à 56 m d'un troisième.