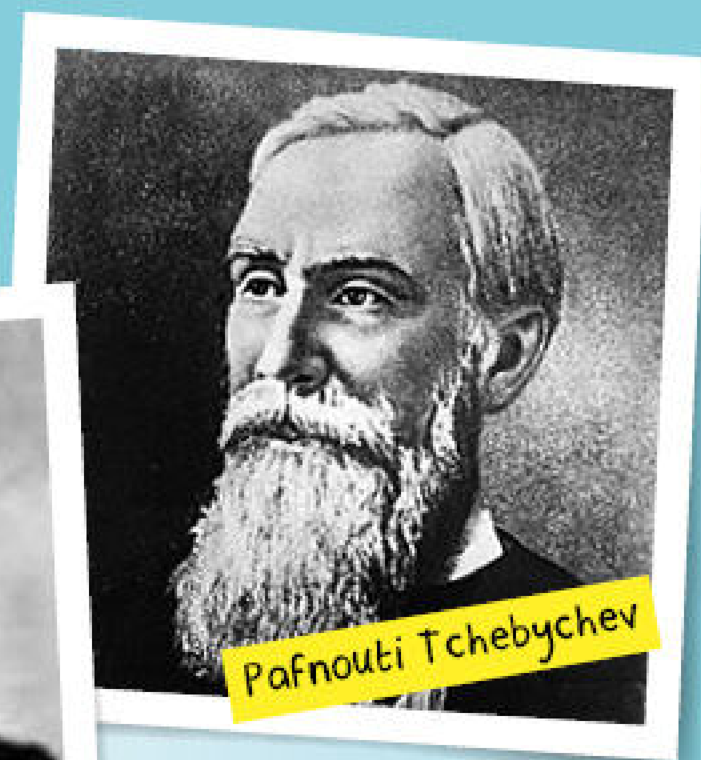
17 Concentration. Loi des grands nombres

HISTOIRE DES MATHS

En probabilités, la loi faible des grands nombres énonce que la moyenne m des valeurs d'un échantillon d'une variable aléatoire est proche de l'espérance μ de cette variable aléatoire lorsque la taille N de l'échantillon est assez grande. Plus précisément, elle affirme que ceux dont l'écart $|m - \mu|$ dépasse une valeur donnée sont de plus en plus rares lorsque N augmente. Ce phénomène est remarqué assez tôt en statistiques, en particulier dans les jeux de hasard.

Jacques Bernoulli dans son *Ars Conjectandi* publié en 1713, l'étudie dans le cas de la loi binomiale. Plus tard, **Siméon Denis Poisson** généralise les résultats obtenus par **Bernoulli** à d'autres lois de probabilité.

Au milieu du 19e siècle, **Bienaymé** et **Tchebychev** énoncent et démontrent l'inégalité qui permettra de prouver de façon rigoureuse cette loi des grands nombres.


Pafnouti Tchebychev


Irénée-Jules Bienaymé

▶ **Irénée-Jules Bienaymé** (1796-1878) est un mathématicien français.
Il contribue au développement de la statistique et à ses applications à différents domaines (calculs financiers, démographie, …).
Il traduit les travaux de son ami russe Tchebychev.

▶ **Pafnouti Tchebychev** (1821-1894) est un mathématicien russe.
Connu pour ses travaux en probabilités, il poursuit les recherches de Bernoulli et Poisson.
Il démontre des théorèmes limites comme la loi des grands nombres.

1713 N. Bernoulli publie *Ars Conjectandi* de J. Bernoulli.

1837 Poisson utilise l'expression « loi des grands nombres » dans *Sur la probabilité des jugements.*

1853 Bienaymé énonce l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

1869 Tchebychev démontre la loi des grands nombres.

1709 Grand hiver en Europe

1748 Voltaire publie *Zadig ou la Destinée*

1801 Jacquard invente le métier à tisser mécanique

1851 Première exposition universelle à Londres

1870 Bataille de Sedan face à la Prusse

1700 1750 1800 1850 1900

Flashmob rassemblant à Tournai plus de 800 élèves.

Dans une population, le sex-ratio exprime la proportion des femmes et des hommes. À la naissance, le rapport est environ de 105 garçons pour 100 filles mais ce rapport s'inverse au fil des années. On évalue cette proportion par sondages et on compare les valeurs effectives obtenues à la valeur théorique attendue.

Les contenus et capacités travaillés dans ce chapitre

	Savoir-faire	Exercices
• Inégalité de Bienaymé-Tchebychev	1 à 3	9 à 13
• Inégalité de concentration. Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour définir une taille d'échantillon	4 à 6	15 à 18, 26
• Loi des grands nombres		19, 28
• Comprendre des algorithmes de simulation d'échantillons	7, 8	14, 29

Bien démarrer

Calcul mental

Rappels utiles

• **Inégalités et intervalles**

a, x, r désignent des nombres réels avec $r > 0$.
$|x - a| < r$ équivaut à $a - r < x < a + r$,
c'est-à-dire $x \in]a - r\,;a + r[$.
$|x - a| \geqslant r$ équivaut à $x \leqslant a - r$ ou $x \geqslant a + r$,
c'est-à-dire $x \notin]a - r\,; a + r[$.

• **Loi binomiale**

On considère une expérience aléatoire à deux issues appelées succès et échec où le succès a pour probabilité p (avec $0 < p < 1$).
On répète n fois cette expérience et on note X la variable aléatoire qui donne le nombre de succès.
X suit la loi binomiale de paramètres n et p, on la note $\mathcal{B}(n, p)$.

Espérance : $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = np$
Variance : $\mathrm{V}(\mathrm{X}) = np(1 - p)$

• **Échantillon de taille n d'une loi de probabilité**

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont n variables aléatoires indépendantes, identiques, qui suivent la même loi d'espérance μ, de variance V et d'écart-type σ.
On considère les variables aléatoires :

$$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \text{ et } M_n = \frac{S_n}{n}.$$

Alors :

$$E(S_n) = n\mu,\quad V(S_n) = nV \quad \text{et} \quad \sigma(S_n) = \sigma\sqrt{n}$$
$$E(M_n) = \mu,\quad V(M_n) = \frac{V}{n} \quad \text{et} \quad \sigma(S_n) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

À l'oral — Questions-Tests

Pour chaque question, il y a une seule réponse exacte.

1 x désigne un nombre réel.

a) $|x - 2| < 0{,}1$ équivaut à :
(1) $x < 2{,}1$ **(2)** $1{,}9 < x < 2{,}1$ **(3)** $x < 1{,}9$

b) $|x - 5| \geqslant 0{,}01$ équivaut à :
(1) $x \leqslant 4{,}99$ **(2)** $x \geqslant 5{,}01$ **(3)** $x \leqslant 4{,}99$ ou $x \geqslant 5{,}01$

2 Un QCM comporte dix questions.
Pour chacune d'elles, quatre réponses sont proposées dont une seule est correcte. Un élève choisit au hasard une réponse à chaque question.
La variable aléatoire X compte le nombre de réponses correctes données par l'élève.

a) La loi de X est :
(1) la loi binomiale $\mathcal{B}\left(4, \frac{1}{10}\right)$
(2) la loi binomiale $\mathcal{B}\left(10, \frac{1}{4}\right)$
(3) la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{4}$.

b) L'espérance de X est égale à :
(1) 2,5 **(2)** 4 **(3)** 10

c) La variance de X est égale à :
(1) 0,1875 **(2)** 1,875 **(3)** 2,5

3 On donne n variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ indépendantes et identiques qui suivent la loi binomiale $\mathcal{B}\left(100, \frac{1}{5}\right)$.
On pose $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$.

a) L'espérance de S_n est égale à :
(1) 20 **(2)** $20n$ **(3)** $\frac{n}{5}$

b) La variance de S_n est égale à :
(1) 16 **(2)** $16n$ **(3)** $4\sqrt{n}$

4 X est la variable aléatoire qui donne le gain, en euro, d'un joueur à un jeu de hasard.

a	-5	0	10	50
$P(X = a)$	0,5	0,2	0,2	0,1

La variable aléatoire G donne le gain moyen du joueur au cours de 10 parties.

a) L'espérance de G est égale à :
(1) 4 **(2)** 4,5 **(3)** 7,5

b) La variance de G est égale à :
(1) 26,225 **(2)** 262,25 **(3)** 26

c) L'écart-type de G, arrondi au dixième, est égal à :
(1) 26,2 **(2)** 5,1 **(3)** 16,2

1 Vers l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

X est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = \frac{1}{2}$.

1 Déterminer l'espérance μ et la variance V de X.

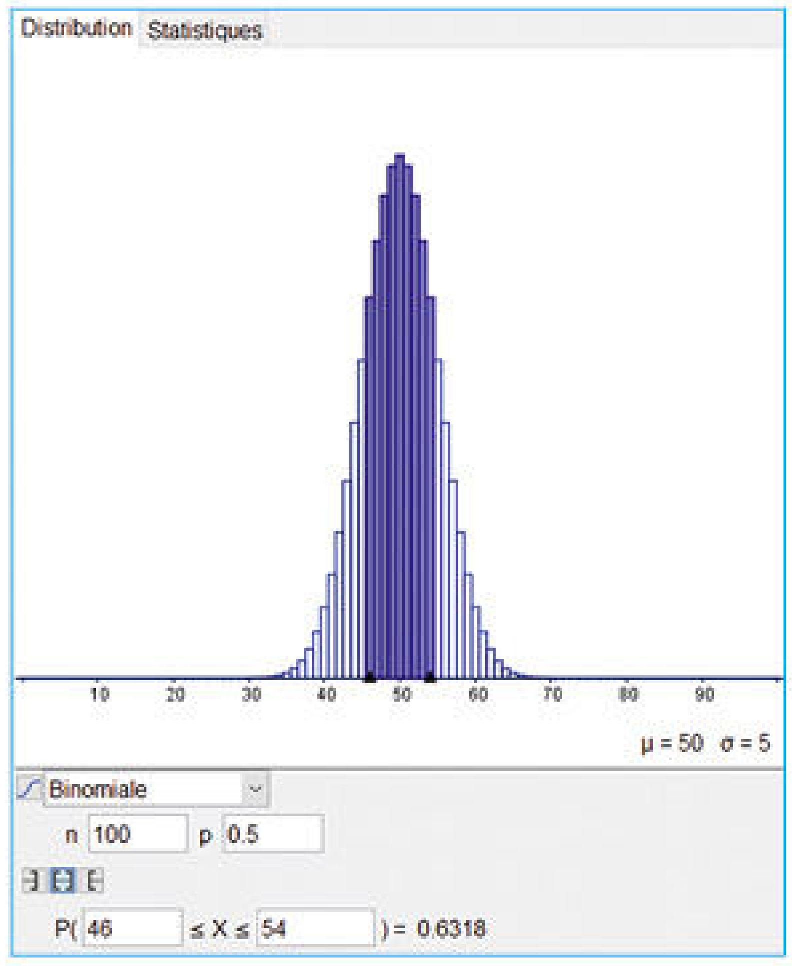
2 Dans l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on compare pour tout réel $\delta > 0$, $P(|X - \mu| \geqslant \delta)$ et $\frac{V}{\delta^2}$.

a) Recopier et compléter le tableau ci-dessous à l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel de calcul formel.

δ	5	8	10	12
$P(\lvert X - \mu\rvert \geqslant \delta)$	0,37			
$\frac{V}{\delta^2}$	1			

Arrondir au centième.

b) Effectuer d'autres essais et proposer une conjecture.



2 Calculer l'écart entre la moyenne d'un échantillon et l'espérance

On lance une pièce équilibrée deux fois de suite.
X est la variable aléatoire qui donne le nombre de Pile obtenus.

1 **a)** Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
b) Calculer l'espérance de X.

2 Voici ci-contre les fonctions **X**, **Moyenne** et **Ecart** écrites en langage Python.
a) La fonction **X** réalise une simulation de la variable aléatoire X.
Expliquer le programme.
b) Pour un échantillon de taille n de la variable aléatoire X, quel résultat chacune des fonctions **Moyenne** et **Ecart** renvoie-t-elle ?

```python
from random import *

def X():
    a=random()
    x=1
    if a<=0.25:
        x=0
    if a>=0.75:
        x=2
    return x

def Moyenne(n):
    som=0
    for i in range(n):
        som=som+X()
    m=som/n
    return m

def Ecart(n):
    d=abs(Moyenne(n)-1)
    return d
```

3 **a)** Voici des résultats renvoyés par la fonction **Ecart** :

```
>>> Ecart(100)
0.08000000000000007
>>> Ecart(1000)
0.01200000000000001
>>> Ecart(10000)
0.0020000000000000018
>>> Ecart(100000)
0.0007299999999998974
```

Commenter les valeurs obtenues.
b) Saisir le programme.
c) Exécuter la fonction **Ecart** avec des valeurs de n de plus en plus grandes et observer les résultats obtenus.

Cours

Exercices
- 1 à 3 (ci-contre)
- 9 à 14

1 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

A Inégalité et interprétation

Propriété

X est une variable aléatoire d'espérance μ et de variance V.

Pour tout réel $\delta > 0$, $$\mathbf{P}(|\mathbf{X}-\mu| \geqslant \delta) \leqslant \frac{\mathbf{V}}{\delta^2}.$$

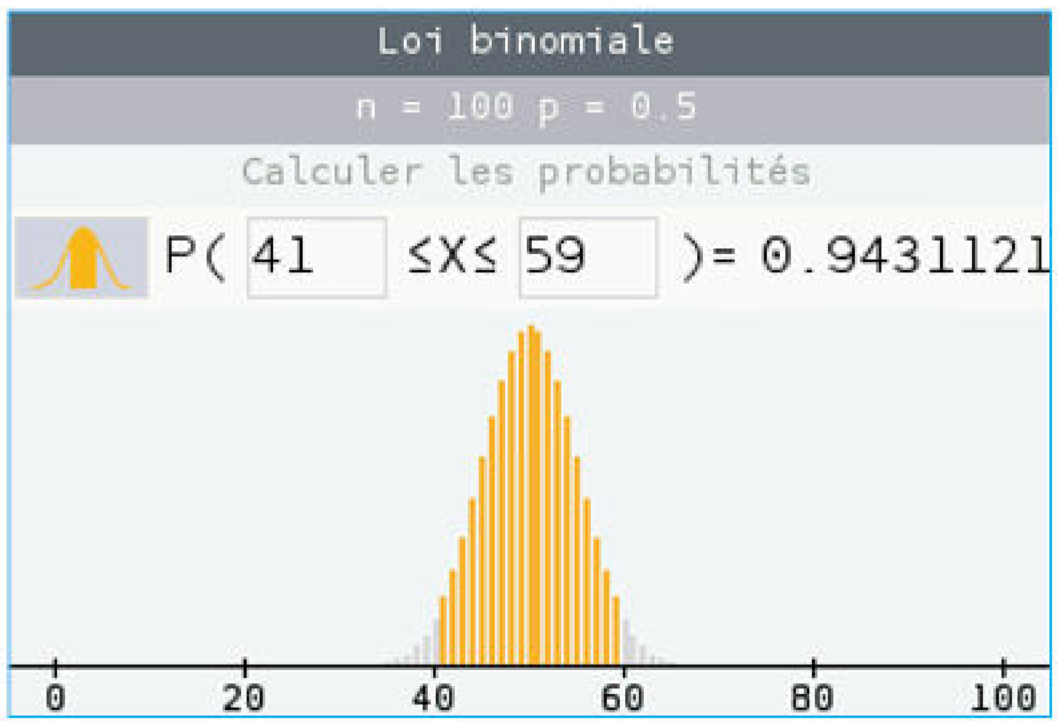
Remarques : • Pour une démonstration, voir exercice **23** page 496.

• Pour $\delta \leqslant \sigma$ où σ est l'écart-type de X, $\frac{V}{\delta^2} \geqslant 1$ et l'inégalité est évidente.

Vidéo
JaiCompris.com
Cette notion est présentée en vidéo

Exemple et interprétation

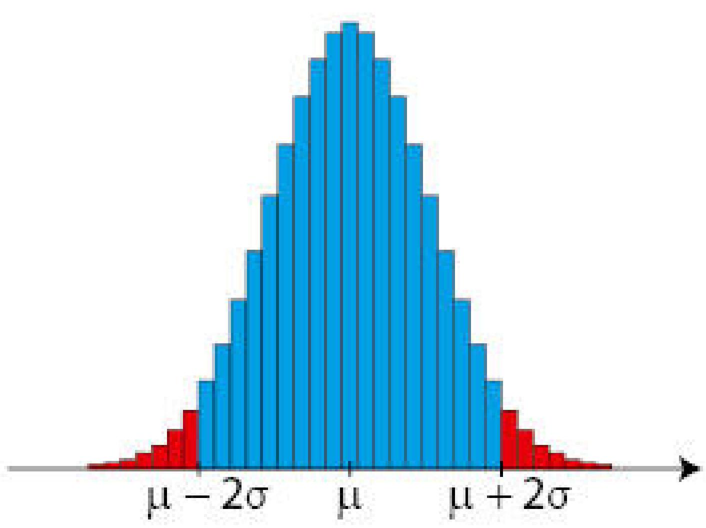
• On lance une pièce équilibrée 100 fois de suite, la variable aléatoire X donne le nombre de Pile obtenus.
X suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = \frac{1}{2}$,
l'espérance de X est $\mu = 100 \times \frac{1}{2} = 50$ et sa variance est $V = 100 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 25$.
D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, pour tout réel $\delta > 0$,
$$P(|X-50| \geqslant \delta) \leqslant \frac{25}{\delta^2}.$$
• Par exemple pour $\delta = 10$, $P(|X-50| \geqslant 10) \leqslant 0{,}25$.
La probabilité que l'écart de X à $\mu = 50$ soit supérieur ou égal à 10 est inférieure à 0,25.
Or, $P(|X-50| < 10) = 1 - P(|X-50| \geqslant 10)$,
donc $P(|X-50| < 10) \geqslant 0{,}75$.
La probabilité que X prenne une valeur dans l'intervalle $]40\,;60[$ est supérieure à 0,75.



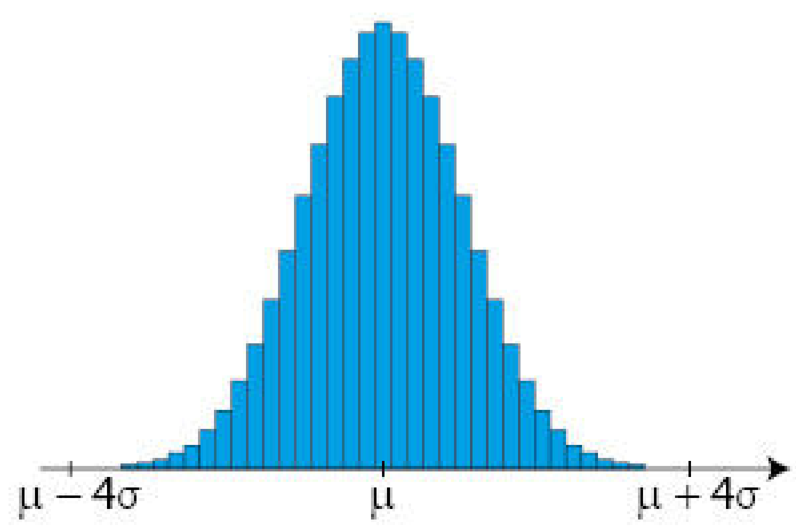
B Des situations particulières

X est une variable aléatoire d'espérance μ et d'écart-type σ.
On applique l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev avec $\delta = k\sigma$ où k est un nombre entier naturel, $k \geqslant 2$:
$$P(|X-\mu| \geqslant k\sigma) \leqslant \frac{\sigma^2}{k^2\sigma^2}, \text{ soit } P(|X-\mu| \geqslant k\sigma) \leqslant \frac{1}{k^2}.$$
Par exemple :

• $k = 2$, $\mathbf{P}(|\mathbf{X}-\mu| \geqslant 2\sigma) \leqslant \mathbf{0{,}25}$
La probabilité que l'écart de X à μ soit supérieur ou égal à 2σ est inférieure ou égale à 0,25.



• $k = 4$, $\mathbf{P}(|\mathbf{X}-\mu| \geqslant 4\sigma) \leqslant \mathbf{0{,}0625}$
Obtenir un écart de X à μ supérieur ou égal à 4σ est un événement improbable.



EXERCICE RÉSOLU

1 Simuler un échantillon de taille *n* d'une variable aléatoire

Au basket, lorsqu'elle tente un lancer franc, Claire marque le panier dans 70 % des cas.
À l'entraînement sur une série de 100 lancers, on note X le nombre de paniers réussis par Claire.

1. a) Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
b) Déterminer l'espérance μ et l'écart-type σ de X.
c) Établir à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev que :

$$P(|X-\mu| \geqslant 2\sigma) \leqslant 0{,}25.$$

2. On écrit un programme en langage Python afin de simuler un échantillon de taille *n* de la variable aléatoire X.
Interpréter le résultat renvoyé par :
a) la fonction **Distance** ; **b)** la fonction **Echantillon**.
3. a) Saisir ce programme et exécuter **Echantillon(1000)**.
b) Comparer au résultat obtenu avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

```python
from random import *

def Distance():
    e=70
    x=0
    for k in range(100):
        a=random()
        if a<=0.7:
            x=x+1
    d=abs(x-e)
    return d

def Echantillon(n):
    s=4.58
    y=0
    for j in range(n):
        if Distance()>=2*s:
            y=y+1
    p=y/n
    return p
```

Solution

1. a) La variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres 100 et 0,7.
b) $\mu = 100 \times 0{,}7 = 70$ et $\sigma = \sqrt{100 \times 0{,}7 \times 0{,}3} = \sqrt{21}$ soit $\sigma = 4{,}58$.
c) Pour tout réel $\delta > 0$, $P(|X-\mu| \geqslant \delta) \leqslant \dfrac{\sigma^2}{\delta^2}$.
Avec $\delta = 2\sigma$, on obtient $P(|X-\mu| \geqslant 2\sigma) \leqslant 0{,}25$.

2. a) Lors d'une simulation de X, la fonction **Distance** renvoie l'écart $|x-70|$ où x est la valeur prise par la variable aléatoire X.
b) Pour un échantillon de taille *n* de X, la fonction **Echantillon** renvoie la proportion des valeurs x prises par X telles que $|x-70| \geqslant 2\sigma$.
3. a) Par exemple, on obtient :

```
>>> Echantillon(1000)
0.038
>>> Echantillon(1000)
0.043
>>> Echantillon(1000)
0.048
```

b) On observe que dans moins de 5 % des cas $|x-70| \geqslant 2\sigma$.
L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne donc un résultat qui n'est pas optimal.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 1
Reprendre le travail de l'exercice 1 dans chacune des situations suivantes.

2 Claire marque le panier dans 65 % des cas.

3 Claire marque le panier dans 50 % des cas et effectue une série de 50 lancers à l'entraînement.

Exercices
- 4 à 6 (ci-contre)
- 15 à 19

2 Loi des grands nombres

On donne n variables aléatoires (avec $n \geqslant 2$) $X_1, X_2, \ldots, X_n$ indépendantes, identiques, suivant une même loi de probabilité d'espérance μ et de variance V.

On note $M_n = \dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$ la variable aléatoire moyenne.

A Inégalité de concentration

Propriété

Pour tout réel $\delta > 0$, $\mathbf{P(|M_n - \mu| \geqslant \delta) \leqslant \dfrac{V}{n\,\delta^2}}$.

Démonstration

L'espérance de M_n est $E(M_n) = \dfrac{1}{n} \times n\mu = \mu$ et sa variance est $V(M_n) = \dfrac{1}{n^2} \times nV = \dfrac{V}{n}$.

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, pour tout réel $\delta > 0$, $P(|M_n - \mu| \geqslant \delta) \leqslant \dfrac{V(M_n)}{\delta^2}$, soit $P(|M_n - \mu| \geqslant \delta) \leqslant \dfrac{V}{n\delta^2}$.

Exemple

Dans une société de démarchage par téléphone, on estime que 40 % des personnes appelées répondent effectivement.

On appelle n personnes, la variable aléatoire X_k donne 1 si la k-ième personne appelée répond et 0 sinon.

Les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont indépendantes, identiques, de même loi d'espérance $\mu = 0{,}6 \times 0 + 0{,}4 \times 1 = 0{,}4$ et de variance $V = 0{,}6 \times (0 - 0{,}4)^2 + 0{,}4 \times (1 - 0{,}4)^2 = 0{,}24$.

Alors, pour tout réel $\delta > 0$, $P(|M_n - 0{,}4| \geqslant \delta) \leqslant \dfrac{0{,}24}{n\delta^2}$.

Par exemple, pour $\delta = 0{,}1$, $P(|M_n - 0{,}4| \geqslant 0{,}1) \leqslant \dfrac{24}{n}$.

- Pour $n = 1\,000$, $P(|M_n - 0{,}4| \geqslant 0{,}1) \leqslant 0{,}024$.

On dit que l'on obtient pour M_n **une précision** de 0,1 avec **un risque** de 0,024.

Lorsqu'on appelle 1 000 personnes, la probabilité que le nombre de personnes qui répondent soit en dehors de l'intervalle $]300\,;\,500[$ est inférieure à 0,024.

B Loi des grands nombres

Propriété

Pour tout réel $t > 0$, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \mathbf{P(|M_n - \mu| \geqslant t) = 0}$.

Démonstration

Pour tout réel $t > 0$ donné, l'inégalité de concentration, permet d'écrire :

$$0 \leqslant P(|M_n - \mu| \geqslant t) \leqslant \frac{V}{nt^2}.$$

Or, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{V}{nt^2} = 0$, donc d'après le théorème des gendarmes $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} P(|M_n - \mu| \geqslant t) = 0$.

EXERCICE RÉSOLU

4 Rechercher une taille d'échantillon

Dans une ville moyenne de 20 000 habitants, lors d'une consultation portant sur la rénovation du théâtre municipal, 75 % des personnes consultées ont émis un avis positif.

1. On interroge n personnes. Pour $1 \leqslant k \leqslant n$, la variable aléatoire X_k donne 1 si la k-ième personne interrogée est favorable au projet et 0 sinon.

Donner la loi de probabilité de X_k, son espérance μ et sa variance V.

2. On note M_n la variable aléatoire moyenne de $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

a) Déterminer une taille n d'échantillon afin d'obtenir pour M_n une précision de 0,05 et un risque de 0,1, c'est-à-dire telle que $P(|M_n - \mu| \geqslant 0{,}05) \leqslant 0{,}1$.

b) De même, déterminer une taille n d'échantillon afin d'obtenir pour M_n une précision de 0,01 et un risque de 0,05. Peut-on envisager raisonnablement cette situation ?

Solution

1. La loi de probabilité de la variable aléatoire X_k est donnée par :

a	0	1
$P(X_k = a)$	0,25	0,75

Son espérance est : $\mu = 0{,}25 \times 0 + 0{,}75 \times 1 = 0{,}75$.

Sa variance est : $V = 0{,}25(0 - 0{,}75)^2 + 0{,}75(1 - 0{,}75)^2 = 0{,}1875$.

2. D'après l'inégalité de concentration, pour tout réel $\delta > 0$,

$$P(|M_n - 0{,}75| \geqslant \delta) \leqslant \frac{0{,}1\,875}{n\delta^2}.$$

L'inégalité de concentration permet de définir une taille d'échantillon n pour une précision et un risque choisis de M_n.

a) Avec $\delta = 0{,}05$, on obtient $P(|M_n - 0{,}75| \geqslant 0{,}05) \leqslant \dfrac{75}{n}$.

Il suffit de choisir n tel que $\dfrac{75}{n} \leqslant 0{,}1$, c'est-à-dire $n \geqslant 750$.

b) Avec $\delta = 0{,}01$, on obtient $P(|M_n - 0{,}75| \geqslant 0{,}01) \leqslant \dfrac{1\,875}{n}$.

Il suffit de choisir n tel que $\dfrac{1\,875}{n} \leqslant 0{,}05$, c'est-à-dire $n \geqslant 37\,500$.

La ville compte 20 000 habitants, une telle enquête ne peut donc pas être réalisée. Une précision de 0,01 et un risque de 0,05 ne peuvent donc pas être envisagés.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 4

5 Reprendre le travail de l'exercice 4 dans le cas où le nombre de personnes favorables au projet de rénovation du théâtre est de 60 %.

6 M_n est la moyenne d'un échantillon de taille n d'une variable aléatoire.

Pour tout réel $\delta > 0$, $P(|M_n - 16| \geqslant \delta) \leqslant \dfrac{24}{n\delta^2}$.

Déterminer une taille d'échantillon afin d'obtenir pour M_n, une précision de 0,5 et un risque de 0,1.

EXERCICE RÉSOLU

7 Déterminer une proportion d'échantillons

Cours 1

S_n est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;p)$ (n entier naturel, $n \geqslant 1$ et $p \in]0\,;1[$).

a) Démontrer que $P(|S_n - np| \geqslant \sqrt{n}) \leqslant p(1-p)$.

b) On a écrit ci-contre en langage Python une fonction **S** de paramètres n et p.
Quel est son rôle ? Quel résultat renvoie-t-elle ?

c) La fonction **P** permet de simuler un échantillon de taille N de la variable aléatoire S_n.
Cette fonction renvoie une proportion d'échantillons. Laquelle ?

d) Saisir ces fonctions, exécuter **P(100, 0.4, 1000)** plusieurs fois et comparer au résultat obtenu à la question **1**.

```python
from math import *
from random import *

def S(n,p):
    s=0
    for i in range(n):
        a=random()
        if a<=p:
            s=s+1
    return s

def P(n,p,N):
    b=0
    for i in range(N):
        if abs(S(n,p)-n*p)>=sqrt(n):
            b=b+1
    p=b/N
    return p
```

Solution

a) La variable aléatoire S_n a pour espérance $\mu = np$ et pour variance $V = np(1-p)$.
D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, pour tout réel $\delta > 0$, $P(|S_n - np| \geqslant \delta) \leqslant \dfrac{np(1-p)}{\delta^2}$.
Pour $\delta = \sqrt{n}$, on obtient $P(|S_n - np| \geqslant \sqrt{n}) \leqslant p(1-p)$.

b) La fonction **S** de paramètres n et p réalise une simulation de la variable aléatoire S_n.
Elle renvoie pour résultat la valeur prise par S_n.

c) Lors de la simulation d'un échantillon de taille N de S_n, on obtient N issues $s_1, s_2, \ldots, s_N$ de S_n et la fonction **P** renvoie la proportion d'échantillons tels que $|s_K - np| \geqslant \sqrt{n}$.

d)

```
>>> P(100,0.4,1000)
0.049
>>> P(100,0.4,1000)
0.047
>>> P(100,0.4,1000)
0.039
```

L'intérêt de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev est surtout théorique. Elle permet par exemple de déterminer des tailles d'échantillons par conditions suffisantes.

Avec $n = 100$ et $p = 0{,}4$, l'inégalité de la question **1** s'écrit $P(|S_{100} - 40| \geqslant 10) \leqslant 0{,}24$, elle ne présente donc pas un caractère optimal.

EXERCICE D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 7

8 On reprend le programme de l'exercice **7**.

Réaliser différentes expérimentations en changeant les valeurs de p, n et N.
Comparer les résultats obtenus à ceux que donne l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Cours 1

Questions flash — À l'oral

9 X est une variable aléatoire d'espérance $\mu = 50$.
Pour tout réel δ, laquelle de ces probabilités l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev permet-elle de majorer ?

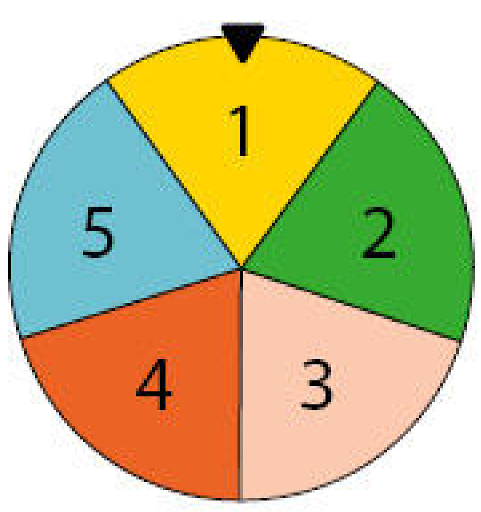
(1) $P(|X - 50| = \delta)$ **(2)** $P(|X - 50| \geqslant \delta)$
(3) $P(|X - 50| \leqslant \delta)$ **(4)** $P(|X| \leqslant 50)$

10 X est une variable aléatoire d'espérance μ et d'écart-type σ.
Laquelle de ces inégalités obtient-on avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev ?

(1) $P(|X - \mu| \geqslant 2\sigma) \leqslant 0{,}05$
(2) $P(|X - \mu| \geqslant 2\sigma) \leqslant 0{,}25$
(3) $P(|X - \mu| \leqslant 2\sigma) \leqslant 0{,}25$

11 Une variable aléatoire X a pour espérance $\mu = 250$ et pour variance $V = 125$.
a) À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, établir que :
$$P(|X - 250| \geqslant 20) \leqslant 0{,}3\,125.$$
b) En déduire alors que :
$$P(|X - 250| < 20) \geqslant 0{,}6\,875.$$
c) Interpréter cette dernière inégalité.

12 La roue équilibrée ci-contre est partagée en cinq secteurs identiques numérotés de 1 à 5.



On fait tourner la roue 100 fois de suite, X est la variable aléatoire qui donne le nombre de fois où le 1 est sorti.
a) Donner la loi de probabilité de X.
b) Déterminer l'espérance et la variance de X.
c) Justifier que pour tout réel $\delta > 0$,
$$P(|X - 20| \geqslant \delta) \leqslant \frac{16}{\delta^2}.$$
d) En déduire que la probabilité de l'événement « X prend une valeur en dehors de l'intervalle $[11\,;29]$ » est inférieure ou égale à 0,16.

Vidéo — JaiCompris.com — Cet exercice est corrigé en vidéo

13 X est une variable aléatoire d'espérance μ et d'écart-type σ.
1. Justifier que pour tout entier naturel $k \geqslant 1$,
$$P(|X - \mu| \geqslant k\sigma) \leqslant \frac{1}{k^2}.$$
2. a) Déterminer une valeur de k pour laquelle
$$P(|X - \mu| \geqslant k\sigma) \leqslant 0{,}1.$$
b) Interpréter la valeur de k obtenue.

14 Algo — python

Un service de livraison constate que 5 % des colis livrés sont abîmés.
Pendant sa journée de travail, Louis livre 100 colis. On note X le nombre de colis abîmés parmi ces 100 colis.
1. a) Donner la loi de probabilité de X.
b) Déterminer l'espérance μ et l'écart-type σ de X.
c) Établir que :
$$P(|X - 5| \geqslant 2\sigma) \leqslant 0{,}25.$$
2. Avec le programme suivant, on réalise une simulation d'un échantillon de taille n de la variable aléatoire X.

```python
from random import *
from math import *

def Ecart():
    x=0
    for k in range(100):
        a=random()
        if a<=0.05:
            x=x+1
    d=abs(x-5)
    return d

def Echantillon(n):
    s=sqrt(4.75)
    y=0
    for j in range(n):
        if Ecart()>=2*s:
            y=y+1
    p=y/n
    return p
```

Interpréter le résultat renvoyé par la fonction **Echantillon**.
3. a) Saisir le programme.
b) Exécuter plusieurs fois **Echantillon(1000)**.
Commenter les résultats obtenus.
4. Comparer les résultats obtenus par simulation avec celui donné par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Loi des grands nombres

Cours 2

Questions flash — À l'oral

15 On lance un dé n fois de suite.
La variable aléatoire X_k donne le numéro obtenu au k-ième lancer.
On pose $M_n = \dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$.
Interpréter oralement la valeur prise par la variable aléatoire M_n.

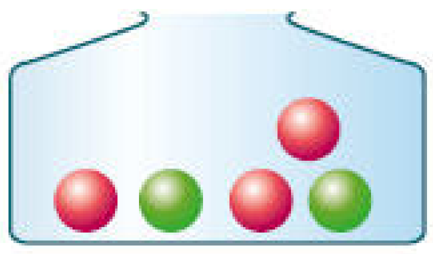
16 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont n variables aléatoires identiques, indépendantes d'espérance μ.
On pose $M_n = \dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$.
Expliquer pourquoi, pour n assez grand :

$$P(|M_n - \mu| \geqslant 0{,}1) \leqslant 10^{-3}.$$

Vidéo

JaiCompris.com — Cet exercice est corrigé en vidéo

17 Une urne contient 3 boules rouges et 2 boules vertes. On tire au hasard successivement et avec remise deux boules de l'urne.



1. X est la variable aléatoire qui donne le nombre de boules rouges tirées.
a) Donner la loi de probabilité de X.
b) Déterminer l'espérance et la variance de X.
2. On répète n fois l'expérience.
X_k donne le nombre de boules rouges tirées lors de la k-ième expérience $(1 \leqslant k \leqslant n)$.
On pose $M_n = \dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$.
a) Que représente la variable aléatoire M_n ?
Déterminer son espérance et sa variance.
b) Justifier que pour tout réel $\delta > 0$,

$$P(|M_n - 1{,}2| \geqslant \delta) \leqslant \frac{0{,}48}{n\delta^2}.$$

c) Écrire l'inégalité précédente dans le cas où $\delta = 0{,}1$ et $n = 100$. Interpréter cette inégalité.
d) On prend $\delta = 0{,}01$. Choisir alors une valeur de n telle que $P(|M_n - 1{,}2| \geqslant 0{,}01) \leqslant 0{,}48$.
Donner une interprétation de cette valeur.

18 On tire au hasard un nombre dans l'ensemble

$$E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

1. X est la variable aléatoire qui donne ce nombre.
a) Déterminer la loi de probabilité de X.
b) Vérifier que X a pour espérance 4,5 et pour variance 8,25.
2. On répète n fois l'expérience.
Les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ donnent les n nombres obtenus et on pose :

$$M_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}.$$

a) Interpréter la valeur prise par la variable aléatoire M_n.
b) Justifier que :

$$P(|M_n - 4{,}5| \geqslant 0{,}5) \leqslant \frac{33}{n}.$$

c) En déduire que :

$$P(|M_n - 4{,}5| < 0{,}5) \geqslant 1 - \frac{33}{n}.$$

3. a) Trouver une valeur de n telle que :

$$P(|M_n - 4{,}5| < 0{,}5) \geqslant 0{,}99.$$

b) Interpréter la valeur trouvée.
c) Recopier et compléter : « Pour $n \geqslant$ **…**, M_n donne une valeur de 4,5 à une précision de **…** avec un risque de **…** ».

19 Un chapeau contient cinq cartes, deux de couleur rouge, trois de couleur noire.
On tire au hasard une carte du chapeau.
1. La variable aléatoire X donne :
- 1 si la carte tirée est rouge ;
- 0 si elle est noire.

a) Donner la loi de probabilité de X.
b) Déterminer l'espérance et la variance de X.
2. On réalise n tirages.
$X_1, X_2, \ldots, X_n$ donne les n valeurs (0 ou 1) obtenues et on pose :

$$M_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}.$$

a) Justifier l'inégalité :

$$P(|M_n - 0{,}4| \geqslant 0{,}1) \leqslant \frac{24}{n}.$$

b) Démontrer que :

$$\lim_{n \to +\infty} P(|M_n - 0{,}4| \geqslant 0{,}1) = 0.$$

Interpréter ce résultat.
c) Déterminer un entier naturel N tel que pour tout entier naturel $n \geqslant N$,

$$P(|M_n - 0{,}4| \geqslant 0{,}1) \leqslant 10^{-5}.$$

d Recopier et compléter : « Pour $n \geqslant$ **…**, M_n donne une valeur de 0,4 à une **…** de 0,1 avec un **…** de 10^{-5} ».

20 QCM **Dans chaque cas, donner la réponse exacte sans justifier.**

X est une variable aléatoire d'espérance $\mu = 10$ et de variance $V = 9$

		A	B	C	D
1	Pour tout réel $\delta > 0$, $P(\|X - 10\| \geqslant \delta) \leqslant \ldots$	$\frac{3}{\delta}$	$\frac{9}{\delta}$	$\frac{3}{\delta^2}$	$\frac{9}{\delta^2}$
2	$P(\|X - 10\| \geqslant 6) \leqslant \ldots$	0,05	0,1	0,2	0,25
3	$P(5 < X < 15) \geqslant \ldots$	0,64	0,65	0,84	0,99

21 QCM **Dans chaque cas, donner la (ou les) réponse(s) exacte(s) sans justifier.**

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont n variables aléatoires indépendantes, identiques, suivant une même loi d'espérance $\mu = 6{,}5$ et de variance $V = 7{,}25$.

On note $M_n = \dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$ la variable aléatoire moyenne.

		A	B	C	D
1	$P(\|M_n - 6{,}5\| \geqslant 0{,}5) \leqslant \ldots$	$\frac{29}{n}$	$\frac{7{,}25}{n}$	$\frac{7{,}25}{n \times 0{,}5^2}$	$\frac{29}{n^2}$
2	$P(\|M_n - 6{,}5\| \geqslant 0{,}5) \leqslant 0{,}1$ pour …	$n \geqslant 10$	$n \geqslant 100$	n tel que $\frac{29}{n} \leqslant 0{,}1$	$n \geqslant 290$
3	$\lim\limits_{n \to +\infty} P(\|M_n - 6{,}5\| < 0{,}5) = \ldots$	0	0,5	1	2

22 Vrai/Faux **Dans chaque cas, dire si l'affirmation est vraie ou fausse en justifiant.**

1 X est une variable aléatoire d'espérance μ et d'écart-type σ.
Affirmation : $P(|X - \mu| \geqslant 3\sigma) \leqslant 0{,}15$.

2 X est une variable aléatoire d'espérance μ et de variance V.
Affirmation : pour tout réel $\delta > 0$, $P(|X - \mu| < \delta) \geqslant 1 - \dfrac{V}{\delta^2}$.

3 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont n variables aléatoires indépendantes suivant une même loi d'espérance μ.
Affirmation : Il existe un réel $t > 0$ tel que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,
$$P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - \mu\right| \geqslant t\right) > 10^{-10}.$$

4 S est une variable aléatoire de loi de probabilité la loi binomiale $\mathcal{B}(100\,;p)$ où p est un nombre réel de $]0\,;1[$.
Affirmation : $P(|S - 100p| < 10) \geqslant p^2 - p + 1$.

Vérifiez vos réponses : p. 529

23 Démontrer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

On a admis en cours au paragraphe **1. A** la propriété suivante :

> X est une variable aléatoire d'espérance μ et de variance V.
> Pour tout réel $\delta > 0$, $P(|X - \mu| \geqslant \delta) \leqslant \dfrac{V}{\delta^2}$.

Rédiger la démonstration de cette propriété en suivant le guide ci-dessous.

On donne un nombre réel $\delta > 0$, on note $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les valeurs prises par la variable aléatoire X et on désigne par H l'ensemble des valeurs x_k telles que $|x_k - \mu| \geqslant \delta$.

(1) Écrire la définition de la variance de X : $V = \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i)(\ldots)^2$

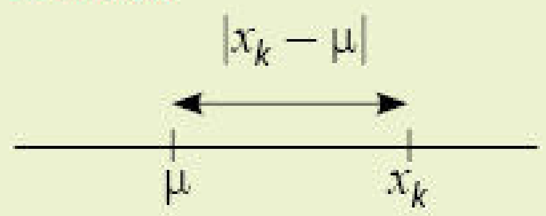
(2) Minorer V : $V \geqslant \sum_{x_k \in H} P(X = x_k)(\ldots)^2$

(3) Tirer une conséquence : $V \geqslant \ldots^2 \sum_{x_k \in H} P(X = x_k)$

(4) Compléter : Or, $\sum_{x_k \in H} P(X = x_k) = \ldots$ donc $V \geqslant \ldots$

(5) Conclure : $P(H) \leqslant \ldots$. Rédiger une phrase de conclusion.

Conseil



$x_k \in H$ si, et seulement si, $|x_k - \mu| \geqslant \delta$.

Conseil

$\sum_{x_k \in H} \ldots$ signifie qu'on effectue la somme des quantités indiquées pour chacune des valeurs x_k de H.

24 Estimer une probabilité

p est la probabilité inconnue du succès d'une épreuve de Bernoulli.
On répète 4 040 fois cette épreuve et on obtient 2 049 succès.
Voici le raisonnement qui permet d'estimer p avec une probabilité au moins égale à 0,95.

> Lorsqu'on répète 4 040 fois l'épreuve, on note F la fréquence des succès.
> L'espérance de la variable aléatoire F est égale à p.
> La variance de la variable aléatoire F est égale à $\dfrac{p(1-p)}{4\,040}$
> D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, pour tout réel $\delta > 0$,
> $$P(|F - p| < \delta) \geqslant 1 - \frac{p(1-p)}{4\,040\,\delta^2}$$
> Le maximum de la fonction $f : x \mapsto x(1-x)$ sur l'intervalle $[0\,;1]$ est $\dfrac{1}{4}$.
> On en déduit alors que pour tout réel $\delta > 0$,
> $$P(|F - p| < \delta) \geqslant 1 - \frac{1}{16\,160\,\delta^2}.$$
> Puis, on en déduit que $P(|F - p| < 0{,}05) \geqslant 0{,}95$.
> $p \approx \dfrac{2\,049}{4\,040}$ à 0,05 près avec une probabilité supérieure à 0,95.

Expliquer les passages écrits en vert.

25 Variable aléatoire de variance nulle

X est une variable aléatoire d'espérance μ dont la variance est nulle.

a) Démontrer que pour tout réel $t > 0$, $P(|X - \mu| \geqslant t) = 0$.

b) En déduire que $P(X = \mu) = 1$.

c) Interpréter ce dernier résultat pour la variable aléatoire X.

Conseil

On a aussi pour tout réel $t > 0$, $P(|X - \mu| < t) = 1$.

Utiliser les inégalités de Bienaymé-Tchebychev et de concentration

26 **PARCOURS DIFFÉRENCIÉS**

Parcours 1

On lance un dé équilibré n fois de suite ($n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$).

La variable aléatoire M_n donne la proportion de 6 sortis au cours des n lancers.

Déterminer une valeur de n telle que :

$$P\left(\left|M_n - \frac{1}{6}\right| \geqslant 0{,}05\right) \leqslant 0{,}1.$$

Parcours 2

On lance une pièce équilibrée n fois de suite, avec n nombre entier naturel, $n \geqslant 1$.

La variable aléatoire M_n donne la proportion de Pile obtenus au cours des n lancers.

a) Déterminer l'espérance et la variance de M_n.

b) Justifier que :

$$P(|M_n - 0{,}5| \geqslant 0{,}1) \leqslant \frac{25}{n}.$$

c) Déterminer une valeur de n telle que :

$$P(|M_n - 0{,}5| \geqslant 0{,}1) \leqslant 0{,}05.$$

27 On écrit au hasard une suite de n chiffres.

X est la variable aléatoire qui donne le nombre de fois où le chiffre 5 apparaît.

1. a) Donner la loi de probabilité de X.

b) Déterminer l'espérance et la variance de X.

2. F est la variable aléatoire qui donne la fréquence du chiffre 5 dans l'écriture.

a) Justifier que $F = \dfrac{X}{n}$.

b) Déterminer l'espérance de la variable aléatoire F.

c) Démontrer que la variance de F est $\dfrac{0{,}09}{n}$.

d) Que dire de la variance de F lorsque n prend des valeurs de plus en plus grandes.

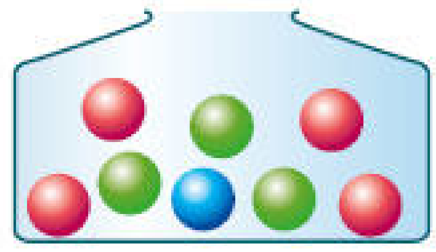
3. a) Écrire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour la variable aléatoire F.

b) En déduire que :

$$P(0{,}05 < F < 0{,}15) \geqslant 1 - \frac{36}{n}.$$

c) Déterminer n tel que la fréquence d'apparition du chiffre 5 soit comprise entre 5 % et 15 % avec une probabilité supérieure à 0,9.

28 On tire au hasard une boule de cette urne et on note sa couleur. Si la boule tirée est bleue, on gagne 10 points, si elle est verte, 2 points et on perd 1 point si la boule est rouge.



X est la variable aléatoire qui donne le nombre de points obtenus.

1. a) Donner la loi de probabilité de X.

b) Déterminer l'espérance et la variance de X.

2. On réalise n tirages. La variable aléatoire M_n donne le nombre moyen de points obtenus lors des n tirages.

Démontrer l'inégalité :

$$P(|M_n - 1{,}5| < 0{,}1) \geqslant 1 - \frac{1225}{n}.$$

3. a) Démontrer que :

$$\lim_{n \to +\infty} P(|M_n - 1{,}5| < 0{,}1) = 1$$

b) Déterminer un entier naturel n tel que

$$P(|M_n - 1{,}5| < 0{,}1) \geqslant 0{,}9.$$

29 **Algo** python

On tire au hasard et avec remise dix cartes dans un jeu de 32 cartes.

X est la variable aléatoire qui donne le nombre d'as tirés.

1. Écrire en langage Python une fonction qui simule la variable aléatoire X.

2. Programmer une fonction **Echantillon** qui simule un échantillon de taille n de X et qui renvoie la proportion des échantillons pour lesquels $|x - \mu| \geqslant 2\sigma$ où μ est la moyenne de X et σ son écart-type.

3. a) Exécuter la fonction **Echantillon** avec différentes valeurs de n.

b) Écrire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour la variable aléatoire X.

Comparer le résultat donné par cette inégalité aux proportions obtenues à la question **a)**.

S'entraîner à la logique

→ p. 525

30 **Quantificateurs**

X est une variable aléatoire d'espérance μ.

Pour chaque proposition dire si elle est vraie ou fausse. Justifier.

P : « Il existe un réel $t > 0$ tel que :

$$P(|X - \mu| \geqslant t) \leqslant 0{,}01. »$$

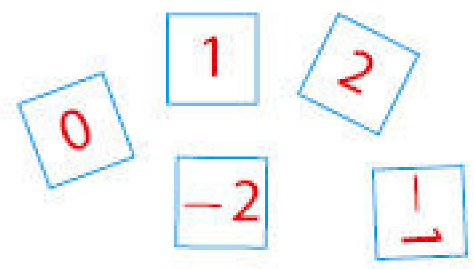
Q : « Pour tout réel $t >$,

$$P(|X - \mu| < t) \leqslant 0{,}5. »$$

Algo python

31 SIMULATION DE N ÉCHANTILLONS DE TAILLE *n* D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE. CALCUL DE L'ÉCART-TYPE DE LA SÉRIE DES MOYENNES DES ÉCHANTILLONS

Dans une enveloppe, on place cinq cartons indiscernables portant les numéros -2, -1, 0, 1 et 2. On tire au hasard un carton et on relève son numéro. La variable aléatoire X donne pour valeur le carré du numéro tiré.



1. Loi de probabilité de X

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer l'espérance μ et l'écart-type σ de X.

c) Quel résultat la fonction **X** écrite en langage Python renvoie-t-elle ?

2. Simulation d'un échantillon de taille *n* de X

La fonction **Moyenne** a pour paramètre la taille n d'un échantillon de la variable aléatoire X.

Interpréter le résultat renvoyé par cette fonction.

3. Simulation de N échantillons de taille *n* de X

On réalise une simulation de N échantillons de taille n de X, on obtient les N moyennes $m_1, m_2, \ldots, m_N$ de ces échantillons et on calcule l'écart-type de cette série de moyennes observées.

La fonction **Ecart_type** ci-contre renvoie ce résultat.

Expliquer le calcul réalisé par cette fonction.

```python
from random import *
from math import *

def X():
    a=randint(-2,2)
    x=a**2
    return x

def Moyenne(n):
    somme=0
    for i in range(n):
        somme=somme+X()
    m=somme/n
    return m

def Ecart_type(n,N):
    e=2
    v=0
    for j in range(N):
        v=v+(Moyenne(n)-e)**2
    v=v/N
    s=sqrt(v)
    return s
```

4. Comparaison de l'écart-type obtenu à $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

a) Saisir les programmes précédents.

b) Exécuter **Ecart_type(100,1000)** plusieurs fois et observer les valeurs obtenues.

c) Pour un échantillon de taille n, on note X_k la variable aléatoire qui donne le résultat de la k-ième $(1 \leqslant k \leqslant n)$ réalisation de l'expérience.

Démontrer que l'écart-type de la variable aléatoire $\dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$ est $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

En donner l'arrondi au millième pour $n = 100$.

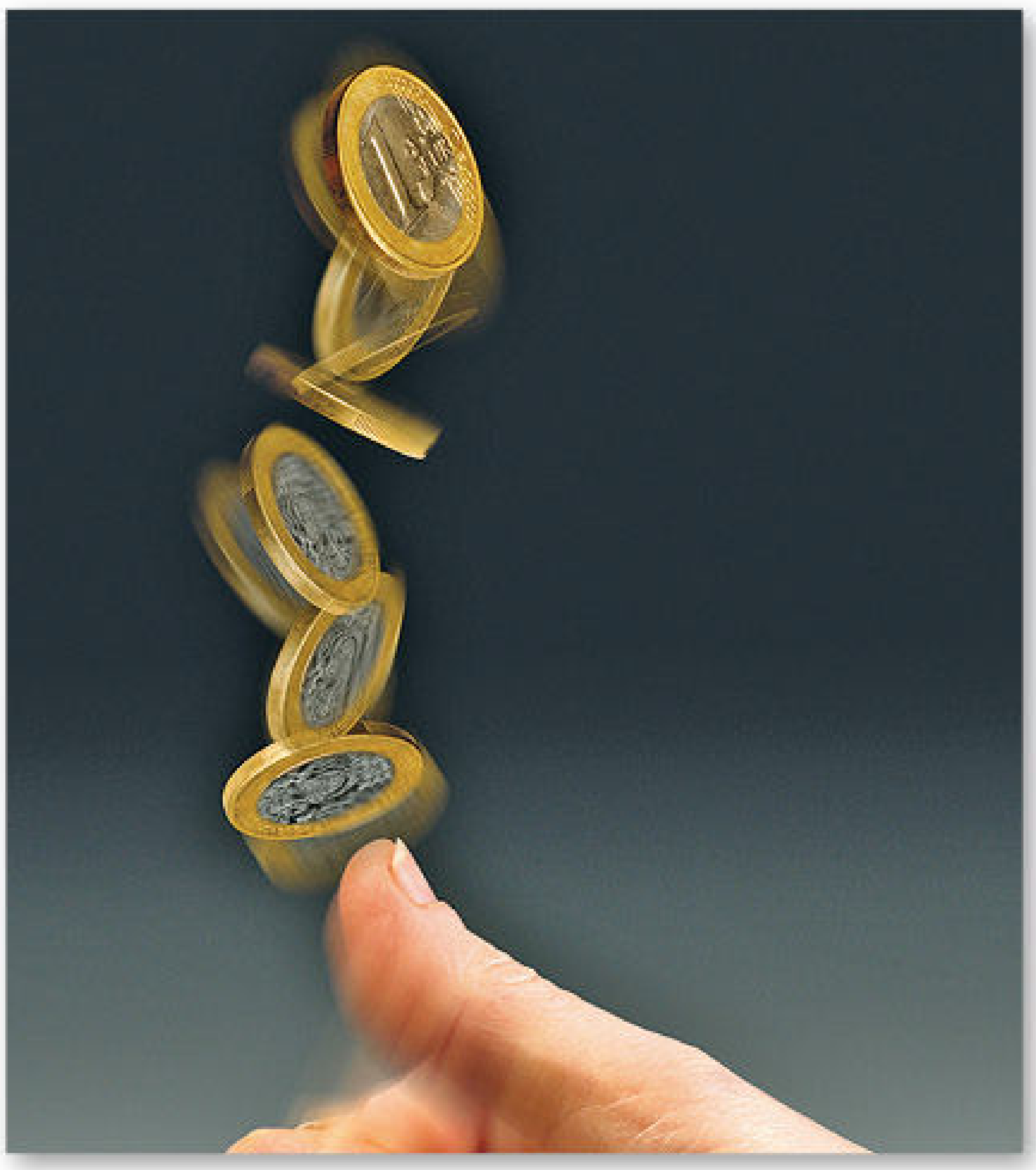
d) Comparer alors cette valeur aux écarts-type obtenus par simulation à la question **b)**.

e) Réaliser d'autres comparaisons en modifiant la taille n de l'échantillon et le nombre N d'échantillons.

32 SIMULATION DE N ÉCHANTILLONS DE TAILLE *n* D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE X. OBSERVATION DE L'ÉCART ENTRE LA MOYENNE DE L'ÉCHANTILLON ET L'ESPÉRANCE DE X

Algo python

On lance une pièce équilibrée trois fois de suite. La variable aléatoire X donne le nombre de fois où l'on obtient Face.



```
from random import *
from math import *

def X():
    x=0
    for j in range(3):
        x=x+randint(0,1)
    return x

def Ecart(n):
    somme=0
    for i in range(n):
        somme=somme+X()
    m=somme/n
    d=abs(m-1.5)
    return d

def Proportion(n,N,k):
    s=sqrt(0.75)
    l=0
    for j in range(N):
        if Ecart(n)<=k*s/sqrt(n):
            l=l+1
    p=l/N
    return p
```

1. Loi de probabilité de X

a) Déterminer la loi de probabilité de X

b) Calculer l'espérance et l'écart-type σ de X.

c) Quel résultat la fonction **X** ci-contre, écrite en langage Python renvoie-t-elle ?

2. Simulation d'un échantillon de taille *n* de X

Ecart est une fonction dont le paramètre n est la taille d'un échantillon de la variable aléatoire X. Interpréter le résultat renvoyé par cette fonction.

3. Simulation de N échantillons de taille *n* de X

On simule N échantillons de taille n de X, on obtient les N moyennes $m_1, m_2, \ldots, m_N$ de ces échantillons et les N écarts $d_1 = |m_1 - \mu|, d_2 = |m_2 - \mu|, \ldots, d_N = |m_N - \mu|$.

La fonction **Proportion** renvoie la proportion des échantillons pour lesquels $d_j \leqslant \dfrac{k\sigma}{\sqrt{n}}$.

Que représente chacune des variables s, ℓ et p ?

4. Observation des résultats

a) Saisir les fonctions précédentes.

b) On prend $k = 1$. Exécuter **Proportion(100,1000,1)** plusieurs fois de suite. Qu'observe-t-on ? Interpréter les proportions obtenues.

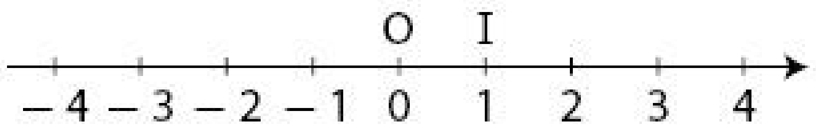
c) Réaliser le même travail que celui effectué à la question **b)** avec $k = 2$, puis $k = 3$.

d) Comparer ces résultats à ceux que donne l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

33 SIMULATION D'UNE MARCHE ALÉATOIRE

Algo python

Une puce se déplace par sauts successifs sur une droite munie d'un repère $(O ; I)$.



Au départ, elle se trouve à l'origine et à chaque étape, elle se déplace de façon aléatoire, soit d'un saut $(+1)$ vers la droite, soit d'un saut (-1) vers la gauche.

Après n sauts, on note D_n le nombre de fois où la puce a effectué un saut vers la droite et X_n l'abscisse de la puce dans le repère $(O ; I)$.

1. Étude de la variable aléatoire X_n

a) Justifier que la variable aléatoire D_n suit la loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$.

b) Exprimer l'espérance et la variance de D_n en fonction de n.

c) Expliquer pourquoi $X_n = 2D_n - n$.

d) En déduire que la variable aléatoire X_n a pour espérance $\mu = 0$ et pour écart-type $\sigma = \sqrt{n}$.

2. Simulation de Q échantillons de taille N de X_n

Voici un programme écrit en langage Python.

```python
from random import *
from math import *

def X(n):
    x=0
    for j in range(n):
        a=random()
        if a<0.5:
            x=x-1
        else:
            x=x+1
    return x

def Moyenne(n,N):
    som=0
    for i in range(N):
        som=som+X(n)
    m=som/N
    return m

def Proportion(n,N,Q,delta):
    l=0
    for j in range(Q):
        if abs(Moyenne(n,N))>=delta:
            l=l+1
    p=l/Q
    return p
```

a) Expliquer pourquoi la fonction **X** de paramètre n permet de simuler la variable aléatoire X_n.

b) On réalise une simulation d'un échantillon de taille N de X_n.
Quel résultat la fonction **Moyenne** renvoie-t-elle ?

c) Lors d'une simulation de Q échantillons de taille N de X_n, on obtient Q moyennes : $m_1, m_2, \ldots, m_Q$.
Dans le programme de la fonction **Proportion**, que représente la variable ℓ ?
Interpréter le résultat renvoyé par cette fonction.

3. Observation des résultats

a) Saisir les fonctions précédentes.

b) Exécuter **Proportion(100,100,1000,2)** plusieurs fois de suite.
Interpréter les valeurs obtenues.

c) Dans un échantillon de taille N, on note M_N la moyenne des N valeurs prises par X_n.
Démontrer, avec l'inégalité de concentration, que pour tout réel $\delta > 0$, $P(|M_N| \geqslant \delta) \leqslant \frac{n}{N\delta^2}$.

d) Comparer les résultats obtenus par simulation à celui donné par l'inégalité de concentration.

34 Minorer une probabilité

Narration de recherche

Raisonner | Communiquer

Rédiger les différentes étapes de la recherche sans omettre les fausses pistes et les changements de méthode.

Problème

X est une variable aléatoire d'espérance μ et d'écart-type σ.

Démontrer que pour tout réel $\lambda \geqslant 1$,

$$P(\mu - \lambda\sigma < X < \mu + \lambda\sigma) \geqslant \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2}.$$

35 Lancer une pièce truquée

Problème ouvert

Modéliser | Représenter | Raisonner

Un joueur dispose d'une pièce de monnaie truquée. Lorsqu'il lance la pièce, la probabilité d'obtenir Face est $\frac{1}{4}$.

Le joueur lance n fois la pièce.

Déterminer une valeur de n telle que la fréquence d'apparition de Pile soit comprise entre 70 % et 80 % avec une probabilité supérieure à 0,95.

36 Simulate hundred games

Chercher | Modéliser | Communiquer

Penny and Leonard play table football.

Penny wins eighty times out of a hundred.

They decide to play hundred consecutive games.

Let X be the random variable that counts the number of games Leonard wins.

a) Demonstrate that $P(|X - 20| \geqslant 5) \leqslant 0{,}64$.

b) Using a program written in Python programming language, simulate a sample of size n of X and obtain the proportion of the x_k values of the sample such that $|x_k - 20| \geqslant 5$.

c) Compare this proportion to the result given by the inequality of question **a)**.

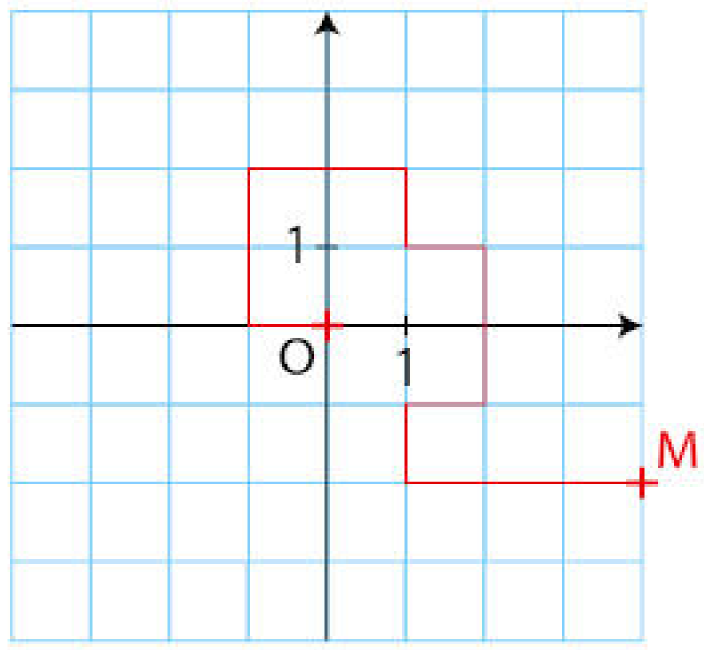
37 Algo python Imaginer une stratégie

Chercher | Modéliser

Dans le plan muni d'un repère orthonormé d'origine O, un point M se déplace sur le quadrillage ci-dessous. Au départ, il se trouve en O, puis il se déplace d'un pas (c'est-à-dire d'une unité) dans l'une des quatre directions (droite, gauche, haut, bas).

Les déplacements sont aléatoires.

Le point M s'arrête lorsqu'il atteint le bord du quadrillage et la variable aléatoire K donne le nombre de pas effectués.



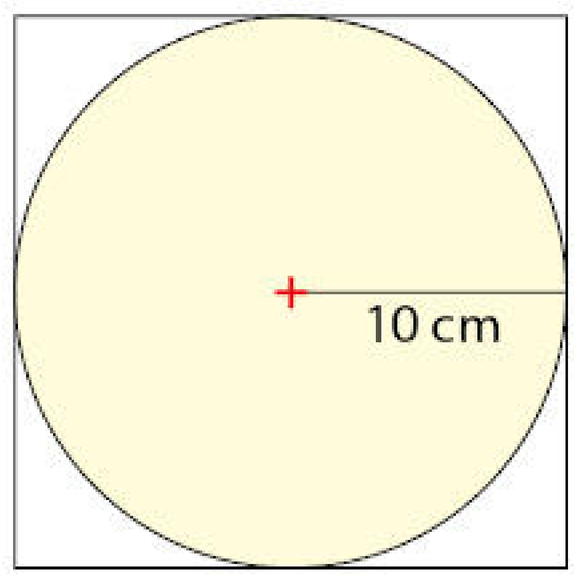
a) Écrire en langage Python une fonction **Moyenne** qui simule un échantillon de taille n de la variable aléatoire K et donne pour résultat la moyenne de cet échantillon.

b) Proposer une valeur de l'espérance de K.

38 Prendre des initiatives

Modéliser | Représenter

Un tireur tire n fois sans viser sur la cible ci-contre formée d'un carré de côté 20 cm et d'un disque de rayon 10 cm.



La variable aléatoire S_n donne le nombre de fois où le tireur atteint le disque.

On note μ l'espérance de S_n et σ son écart-type.

a) Réaliser à l'aide d'un programme écrit en langage Python, une simulation d'un échantillon de taille N de la variable aléatoire S_n.

Pour les N valeurs $s_1, s_2, \ldots, s_N$ obtenues, déterminer la proportion de celles qui sont telles que $|s_k - \mu| \geqslant 2\sigma$.

b) Exécuter plusieurs fois ce programme avec $n = 100$ et $N = 10\,000$.

Interpréter les résultats obtenus.

c) Quel majorant de $P(|S_n - \mu| \geqslant 2\sigma)$ obtient-on avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev ?

Ce majorant présente-t-il un intérêt ?

39 Étudier une variable aléatoire Algo python — 45 min

D'après Bac, Antilles-Guyane 2018

L'exploitant d'une forêt communale décide d'abattre des arbres afin de les vendre, soit aux habitants, soit à des entreprises. On admet que :

- parmi les arbres abattus, 30 % sont des chênes, 50 % sont des sapins et les autres sont des arbres d'essence secondaire (ce qui signifie qu'ils sont de moindre valeur) ;
- 45,9 % des chênes et 80 % des sapins abattus sont vendus aux habitants de la commune ;
- les trois quarts des arbres d'essence secondaire abattus sont vendus à des entreprises.

Partie A

Parmi les arbres abattus, on choisit un arbre au hasard.

On considère les événements suivants :

- C : « L'arbre abattu est un chêne » ;
- S : « L'arbre abattu est un sapin » ;
- E : « L'arbre abattu est un arbre d'essence secondaire » ;
- H : « L'arbre abattu est vendu à un habitant de la commune ».

a) Construire un arbre pondéré complet traduisant la situation.

b) Calculer la probabilité que l'arbre abattu soit un chêne vendu à un habitant de la commune.

c) Justifier que la probabilité que l'arbre abattu soit vendu à un habitant de la commune est égale à 0,5877.

d) Quelle est la probabilité qu'un arbre abattu vendu à un habitant de la commune soit un sapin ? On donnera le résultat arrondi au millième.

> **Guide de résolution**
> **c)** On calcule $P(H)$ à l'aide de la formule des probabilités totales.

Partie B

Dans un lot de 100 arbres abattus, la variable aléatoire X donne le nombre d'arbres vendus aux habitants de la commune.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale.
Quels sont ses paramètres ?

2. Déterminer l'espérance μ et la variance V de la variable aléatoire X.
On donnera le résultat de V arrondi au centième.

3. a) Démontrer avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev que :

$$P(|X-\mu| \geqslant 10) \leqslant 0{,}25.$$

b) En déduire que $P(49 \leqslant X \leqslant 68) \geqslant 0{,}75$.

> **Guide de résolution**
> **b)** $P(|X-\mu| < 10) = 1 - P(|X-\mu| \geqslant 10)$

Partie C

Avec le programme ci-contre écrit en langage Python, on réalise une simulation d'un échantillon de taille N de la variable aléatoire X.

```python
from random import *
from math import *

def X():
    x=0
    for k in range(100):
        a=random()
        if a<=0.5877:
            x=x+1
    return x

def Proportion(N):
    y=0
    for j in range(N):
        if 49<=X()<=68:
            y=y+1
    p=y/N
    return p
```

1. a) Quel est le rôle de la fonction **X** ?

b) Quel résultat la fonction **Proportion** renvoie-t-elle ?

2. On exécute **Proportion(1000)** et on obtient :

```
>>> Proportion(10000)
0.9588
```

Comparer ce résultat à celui obtenu à la question **3. b)** de la **partie B**.

40 Réaliser un sondage Algo python — 30 min

D'après Bac, Métropole – La Réunion 2018

Dans une ville, la probabilité qu'une personne choisie au hasard soit vaccinée contre la grippe est égale à 0,4.
Un laboratoire envisage d'interroger au hasard n habitants de cette ville.
On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes vaccinées parmi les n interrogées.

1. a) Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
b) Déterminer l'espérance μ et l'écart-type σ de X.
c) Avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, démontrer que :

$$P(|X - \mu| < 2\sigma) \geqslant 0{,}75.$$

2. On réalise à l'aide d'un programme une simulation d'un échantillon de taille N de la variable aléatoire X.
On note $x_1, x_2, \ldots, x_N$ les N valeurs obtenues, la fonction **Fréquence** de paramètres n et N renvoie la proportion des valeurs x_k telles que $|x_k - \mu| < 2\sigma$.
Voici quelques valeurs obtenues :

```
>>> Fréquence(500,1000)
0.962
>>> Fréquence(500,1000)
0.959
>>> Fréquence(500,1000)
0.958
```

Commenter et interpréter ces résultats dans le contexte du sondage.

3. Comparer ces fréquences observées au résultat fourni par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Commenter.

Guide de résolution
c) $P(|X - \mu| < 2\sigma)$
$= 1 - P(|X - \mu| \geqslant 2\sigma)$

Se préparer à l'oral

41 Présenter un exposé

a) Énoncer la loi des grands nombres et expliquer sa signification en précisant le rôle de chaque intervenant de cette loi.
b) Dans un exposé oral de 10 min, présenter ce travail.

42 Travailler l'oral en groupe

Résoudre cet exercice en petit groupe, puis en présenter les résultats à l'oral.

X est une variable aléatoire d'espérance $\mu = 3$ et de variance $V = 2{,}1$.
On réalise un échantillon de taille n de cette variable aléatoire et on note M_n la variable aléatoire moyenne.
Déterminer une valeur de n telle que :

$$P(|M_n - 3| < 0{,}1) \geqslant 0{,}9.$$

43 Travailler les compétences orales

▶ **ANTICIPER LES QUESTIONS DU JURY**

1. Préparation de la restitution orale (5 min)
Par groupe de 4, résoudre l'exercice ci-dessous, chaque élève travaillant sur une des quatre propositions.
2. Jeu de rôle (30 min)
Chaque élève présente son résultat à l'oral (2 min), pendant que les trois autres composent le jury. Chaque juré pose une question au candidat (5 min).

Énoncé : X est une variable aléatoire d'espérance $\mu = 80$ et de variance $V = 16$.
Répondre par vrai ou faux en justifiant.
a) $P(|X - 80| < 5) \geqslant 0{,}36$
b) $P(70 < X < 90) \leqslant 0{,}8$
c) $P(X \geqslant 88) \leqslant 0{,}25$
d) $P(X \leqslant 72) \leqslant 0{,}25$

44 Algo python **Estimation**

Partie A : exemple 1

On lance un dé plusieurs fois de suite jusqu'à ce que l'on obtienne la face numérotée 6.

X est la variable aléatoire qui donne le rang de la première apparition de cette face, on note μ son espérance.

1. On réalise une simulation d'un échantillon de taille n de X avec ce programme écrit en langage Python.

```
from random import *

def X():
    a=randint(1,6)
    x=1
    while a!=6:
        a=randint(1,6)
        x=x+1
    return x

def Moyenne(n):
    som=0
    for i in range(n):
        som=som+X()
    m=som/n
    return m
```

a) Quel est le rôle de la fonction **X** ?

b) Quel résultat la fonction **Moyenne** de paramètre n renvoie-t-elle ?

2. Lors d'une réalisation d'un échantillon de taille n de la variable aléatoire X, on obtient n valeurs effectives $x_1, x_2, \ldots, x_n$ prises par X. La moyenne $\overline{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$ de ces n valeurs est un estimateur de l'espérance μ de X.

a) Justifier que pour tout réel $t > 0$,

$$\lim_{n \to +\infty} \mathrm{P}(|\overline{x} - \mu| \geqslant t) = 0.$$

On dit que $\overline{x}$ est un estimateur convergent.

b) Interpréter ce résultat.

3. a) À l'aide du programme, donner des valeurs de l'estimateur $\overline{x}$ pour $n = 100$, $n = 1\,000$, $n = 10^4$ et $n = 10^5$.

b) Proposer alors une valeur μ de l'espérance de X.

Partie B : exemple 2

Y est la variable aléatoire qui donne le nombre de lancers d'un dé équilibré qu'il faut effectuer pour obtenir six fois le nombre 6.

a) Écrire un programme en langage Python qui réalise une simulation d'un échantillon de taille n de la variable aléatoire Y.

b) Proposer, à l'aide de ce programme, une estimation de la valeur de l'espérance de Y.

45 Algo python **Étude du sex-ratio**

Le sex-ratio est le rapport du nombre de garçons au nombre de filles. On le détermine sur une période donnée pour une population définie.

Dans un pays imaginaire, on suppose qu'il est égal à 1,05.

1. a) Dans ce pays, montrer que la probabilité, lors d'une naissance, que l'enfant soit un garçon est environ $p = 0{,}512$.

b) On observe n naissances, on note F_n la fréquence des garçons nés pendant l'étude.

Exprimer l'espérance, la variance et l'écart-type σ de la variable aléatoire F_n en fonction de n et p.

2. On réalise une simulation d'un échantillon de taille N de F_n avec le programme suivant écrit en langage Python.

```
from random import *
from math import *

def F(n):
    p=0.512
    x=0
    for i in range(n):
        a=random()
        if a<=p:
            x=x+1
        f=x/n
    return f

def Proportion(n,N):
    p=0.512
    delta=2*sqrt(p*(1-p)/n)
    m=0
    for i in range(N):
        if abs(F(n)-p)>=delta:
            m=m+1
    pr=m/N
    return pr
```

a) Quel est le rôle de la fonction **F** de paramètre n ?

b) Quel résultat la fonction **Proportion** de paramètres n et N renvoie-t-elle ?

3. a) Saisir le programme et exécuter plusieurs fois de suite **Proportion**$(\mathbf{10^6},\mathbf{100})$.

b) À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, obtenir un majorant de $\mathrm{P}(|\mathrm{F}_n - p| \geqslant 2\sigma)$.

c) Comparer et commenter ces différents résultats.

46 L'inégalité de Markov

X est une variable aléatoire dont les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont positives.

α désigne un nombre réel strictement positif.

a) Justifier l'écriture :

$$E(X) = \sum_{x_i \geqslant \alpha} P(X = x_i)x_i + \sum_{x_i < \alpha} P(X = x_i)x_i.$$

b) En déduire que $E(X) \geqslant \sum_{x_i \geqslant \alpha} x_i P(X = x_i)$.

c) Établir l'inégalité de Markov :

$$P(X \geqslant \alpha) \leqslant \frac{E(X)}{\alpha}$$

47 Une variante de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

X est une variable aléatoire d'espérance μ et d'écart-type σ.

On donne un nombre réel fixé $a > 0$.

1. Pour tout réel $\lambda \geqslant 0$, on pose $Y = X - \mu + \lambda$.

a) Démontrer que :

$$P(X - \mu \geqslant a) \leqslant P(Y^2 \geqslant (a + \lambda)^2).$$

b) Établir que :

$$E(Y^2) = \sigma^2 + \lambda^2.$$

c) En déduire avec l'inégalité de Markov (voir exercice 46) que pour tout réel $\lambda > 0$,

$$P(X - \mu \geqslant a) \leqslant \frac{\sigma^2 + \lambda^2}{(a + \lambda)^2}$$

2. φ est la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$\varphi(x) = \frac{\sigma^2 + x^2}{(a + x)^2}.$$

a) Étudier le sens de variation de la fonction φ.

b) Démontrer que φ admet un minimum en $x = \frac{\sigma^2}{a}$. Quelle est sa valeur ?

c) En déduire que :

$$P(X - \mu \geqslant a) \leqslant \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}.$$

3. a) Démontrer que :

$$P(|X - \mu| \geqslant a) \leqslant \frac{2\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}.$$

b) On rappelle l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$P(|X - \mu| \geqslant a) \leqslant \frac{\sigma^2}{a^2}.$$

Démontrer que :

$$\frac{\sigma^2}{a^2} - \frac{2\sigma^2}{\sigma^2 + a^2} = \frac{\sigma^2\left(\sigma^2 + a^2\right)}{a^2\left(\sigma^2 + a^2\right)}.$$

c) L'inégalité obtenue à la question **3. a)** est-elle meilleure que l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev ?

48 Une proportion inconnue

Une usine fabrique des roulettes en plastique dont une proportion inconnue p est défectueuse ; on souhaite trouver une valeur approchée de p.

On effectue un prélèvement de n roulettes, on assimile ce prélèvement à n tirages indépendants avec remise. On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de pièces défectueuses dans le lot.

1. a) Donner la loi de probabilité de X_n.

b) Déterminer son espérance et sa variance.

2. a) Démontrer que pour tout réel $\varepsilon > 0$,

$$P\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}.$$

b) Étudier le sens de variation de la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par $f(x) = x(1 - x)$.

En déduire que $p(1-p) \leqslant \frac{1}{4}$.

c) Démontrer alors que pour tout réel $\varepsilon > 0$,

$$P\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$

3. En déduire une condition sur n pour qu'une valeur effective de $\frac{X_n}{n}$ soit une valeur approchée de p à 10^{-2} près avec une probabilité supérieure à 95 %.

Des défis

49 Obtenir un roi ou une dame

On effectue n tirages successifs avec remise d'une carte dans un jeu de 32 cartes.

Déterminer une valeur de n telle que la fréquence d'apparition d'un roi ou d'une dame soit comprise entre 20 % et 30 % avec une probabilité supérieure à 0,8.

BAC BLANC : sujet n° 1

Corrigés des exercices

Durée de l'épreuve : 4 heures.
Le sujet comporte quatre exercices indépendants. L'usage de la calculatrice est autorisé.

Exercice 1

4 points

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points :

$$A(5\,;-5\,;2),\quad B(-1\,;1\,;0),\quad C(0\,;1\,;2)\quad \text{et}\quad D(6\,;6\,;-1).$$

1. Déterminer la nature du triangle BCD et calculer son aire, en unité d'aire.

2. a) Montrer que le vecteur $\vec{n}(-2\,;3\,;1)$ est un vecteur normal au plan (BCD).

b) Déterminer une équation cartésienne du plan (BCD).

3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d orthogonale au plan (BCD) et passant par le point A.

4. H est le projeté orthogonal du point A sur le plan (BCD). Déterminer les coordonnées du point H.

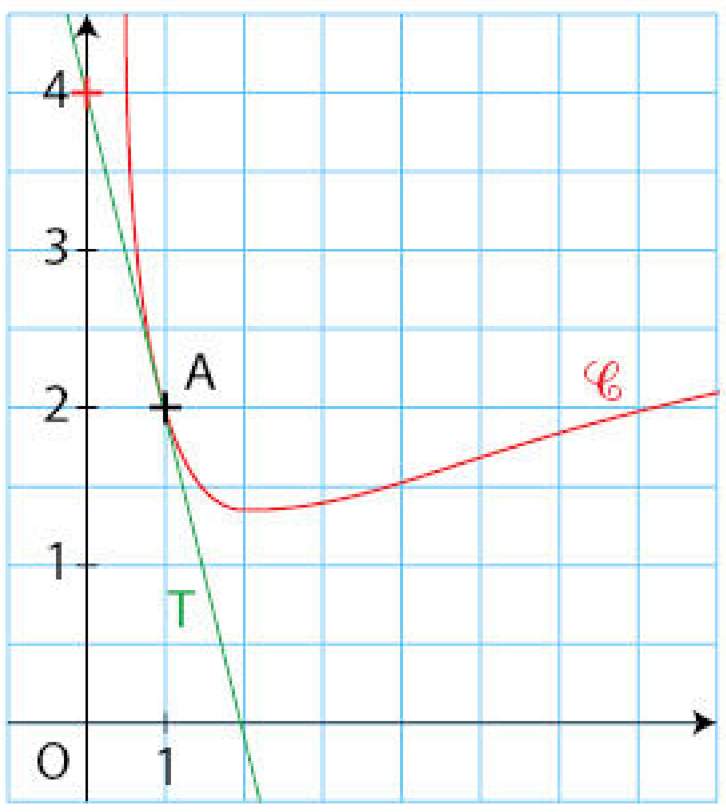
5. a) Démontrer que $AB = \sqrt{76}$ et $AC = \sqrt{61}$.

b) En déduire la mesure, en degré, de l'angle $\widehat{BAC}$. *Arrondir au dixième.*

Exercice 2

5 points

Dans le repère orthogonal ci-dessous, la courbe $\mathscr{C}$ représente une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ et T est la tangente à $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 1.



Partie A

Voici un questionnaire à choix multiples.
Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Aucune justification n'est demandée.

a) Le nombre dérivé de f en 1 est égal à :
(1) 2 **(2)** -2 **(3)** 0 **(4)** -4

b) La fonction dérivée f' est :
(1) positive sur $]0\,;+\infty[$; **(2)** négative sur $]5\,;+\infty[$;
(3) croissante sur $[1\,;3]$; **(4)** décroissante sur $[1\,;3]$.

Partie B

u est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $u(x) = \ln(x) + x - 3$.

a) Justifier que la fonction u est strictement croissante sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

b) Démontrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

c) Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

d) En déduire le signe de $u(x)$ en fonction de x.

Partie C

f est la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln(x) - 2) + 2.$$

1. Déterminer la limite de la fonction f en 0.

2. a) Justifier que pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{u(x)}{x^2}$ où u est la fonction définie dans la partie B.

b) En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

Exercice 3

4 points

Dans un supermarché, on réalise une étude sur la vente de bouteilles de jus de fruits sur une période d'un mois.

- **40 % des bouteilles vendues sont des bouteilles de jus d'orange ;**
- **25 % des bouteilles de jus d'orange vendues possèdent l'appellation "pur jus".**

Parmi les bouteilles qui ne sont pas de jus d'orange, la proportion des bouteilles de "pur jus" est notée *p*, où *p* est un nombre réel de l'intervalle $[0\,;1]$.

Par ailleurs, 20 % des bouteilles de jus de fruits vendues possèdent l'appellation "pur jus".

On prélève au hasard une bouteille de jus de fruits passée en caisse. On définit les événements suivants :

R : « La bouteille prélevée est une bouteille de jus d'orange » ;

J : « La bouteille prélevée est une bouteille de "pur jus" ».

1. a) Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.

b) Déterminer la valeur exacte de p.

c) Une bouteille passée en caisse et prélevée au hasard est une bouteille de "pur jus".

Calculer la probabilité que ce soit une bouteille de jus d'orange.

2. Afin d'avoir une meilleure connaissance de sa clientèle, le directeur du supermarché fait une étude sur un lot des 500 dernières bouteilles de jus de fruits vendues.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de bouteilles de "pur jus" dans ce lot.

On admet que le stock de bouteilles présentes dans le supermarché est suffisamment important pour que le choix de ces 500 bouteilles puisse être assimilé à un tirage au sort avec remise.

a) Déterminer la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X. Préciser ses paramètres.

b) Déterminer la probabilité pour qu'au moins 75 bouteilles de cet échantillon de 500 bouteilles soient de "pur jus". *Arrondir au millième.*

Exercice 4

7 points

a est un nombre réel non nul. Le but de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie par $u_0 = a$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = e^{2u_n} - e^{u_n}$.

1. g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{2x} - e^x - x$.

a) Pour tout réel x, justifier que $g'(x) = (e^x - 1)(2e^x + 1)$.

b) Déterminer les variations de la fonction g et donner la valeur de son minimum.

c) En remarquant que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = g(u_n)$, étudier le sens de variation de la suite (u_n).

2. Dans cette question, on suppose que $a \leqslant 0$.

a) Justifier que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = e^{u_n}(e^{u_n} - 1)$.

b) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 0$.

c) Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) est convergente.

d) Dans le cas où $a = 0$, donner la limite de la suite (u_n).

3. Dans cette question, on suppose que $a > 0$.

a) Justifier que pout entier naturel n, $u_n \geqslant a$.

b) Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n \geqslant g(a)$.

c) Démontrer par récurrence que pour tout entier n, $u_n \geqslant a + n \times g(a)$.

d) Déterminer la limite de la suite (u_n).

4. Dans cette question, on prend $a = 0{,}02$.

La fonction **Seuil** ci-contre, écrite en langage Python, a pour paramètre un réel $M > 0$ et renvoie le plus petit entier naturel n tel que $u_n > M$.

a) Indiquer ce que cache chacun des cadres colorés.

b) À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur affichée lorsque $M = 60$.

```
from math import *

def Seuil(M):
    u=0.02
    n=0
    while      :
        u=
        n=n+1
    return n
```

BAC BLANC : sujet n° 2

Corrigés des exercices

Durée de l'épreuve : 4 heures.
Le sujet comporte quatre exercices indépendants. L'usage de la calculatrice est autorisé.

Exercice 1

4 points

(u_n) **est la suite définie par** $u_0 = 2$ **et pour tout entier naturel** n, $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 3 \times 0{,}5^n$.

1. a) Recopier et compléter ce tableau de valeurs de la suite (u_n). *Arrondir au centième.*

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	2								

b) D'après ce tableau, énoncer une conjecture sur le sens de variation de la suite (u_n).

2. a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, $u_n \geqslant \frac{15}{4} \times 0{,}5^n$.

b) En déduire que pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.

c) Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

3. (v_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 10 \times 0{,}5^n$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$. Préciser son premier terme.

b) En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = -8 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n + 10 \times 0{,}5^n$, puis la limite de la suite (u_n).

Exercice 2

4 points

Une entreprise fabrique des billes en bois sphériques grâce à deux machines de production A et B.

Partie A

Une étude du fonctionnement des machines a permis d'établir les résultats suivants :

- 96 % de la production journalière est vendable ;
- la machine A fournit 60 % de la production journalière ;
- la proportion de billes vendables parmi la production de la machine A est égale à 98 %.

On choisit une bille au hasard dans la production d'un jour donné. On définit les événements suivants :

A : « La bille a été fabriquée par la machine A » ; B : « La bille a été fabriquée par la machine B » ;

V : « La bille est vendable ».

a) Déterminer la probabilité que la bille choisie soit vendable et provienne de la machine A.

b) Justifier que $P(B \cap V) = 0{,}372$ et en déduire la probabilité que la bille choisie soit vendable sachant qu'elle provient de la machine B.

c) Un technicien affirme que 70 % des billes non vendables proviennent de la machine B. A-t-il raison ?

Partie B

Les billes vendables passent ensuite dans une machine qui les teinte de manière aléatoire et équiprobable en blanc, noir, bleu, jaune ou rouge. Après avoir été mélangées, les billes sont conditionnées en sachets.

La quantité produite est suffisamment importante pour que le remplissage d'un sachet puisse être assimilé à un tirage successif avec remise de billes dans la production journalière.

Une étude montre que les enfants apprécient particulièrement les billes de couleur noire.

1. Dans cette question seulement, les sachets sont tous composés de 40 billes.

a) On choisit au hasard un sachet de billes. Déterminer la probabilité que le sachet choisi contienne exactement 10 billes noires. *Arrondir au millième.*

b) Dans un sachet de 40 billes, on a compté 12 billes noires. Ce constat permet-il de remettre en cause le réglage de la machine qui teinte les billes ?

2. Si l'entreprise souhaite que la probabilité d'obtenir au moins une bille noire dans un sachet soit supérieure ou égale à 99 %, quel nombre minimum de billes chaque sachet doit-il contenir pour atteindre cet objectif ?

Exercice 3

4 points

ABCDEFGH est le cube d'arête 1 présenté ci-contre. I, J, K et L sont les milieux respectifs des arêtes [AB], [EH], [BC] et [CG]. On munit l'espace du repère orthonormé $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.

1. a) Démontrer que la droite (FD) est orthogonale au plan (IJK).

b) En déduire une équation cartésienne du plan (IJK).

2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (FD).

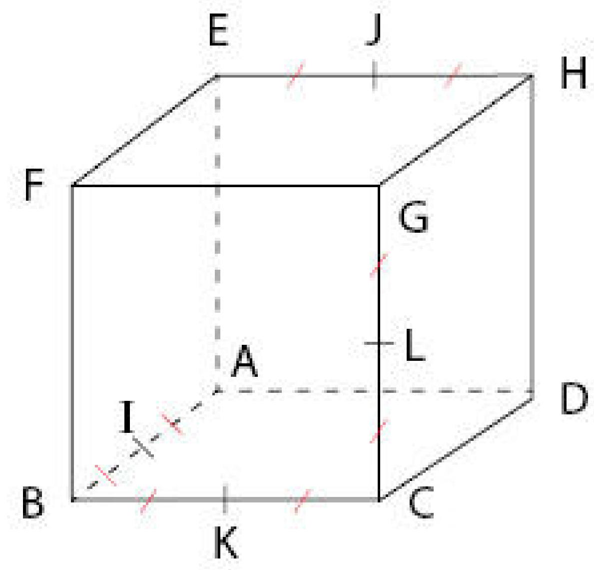
3. a) M est le projeté orthogonal du point F sur le plan (IJK).
Déterminer les coordonnées du point M.

b) En déduire la distance du point F au plan (IJK).

4. Déterminer la nature du triangle IJK et calculer son aire, en unité d'aire.

5. Calculer le volume, en unité de volume, du tétraèdre FIJK.

6. Les droites (IJ) et (KL) sont-elles sécantes ? Justifier.



Exercice 4

8 points

Partie A

1. f est la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$.

a) Étudier la limite de la fonction f en $+\infty$.

b) Pour tout réel $x \geqslant 0$, déterminer $f'(x)$, puis dresser le tableau de variations de f sur $[0\,;+\infty[$.

2. a) Pour tout réel $x \geqslant 0$, déterminer $f''(x)$.

b) Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

Partie B

On fait absorber à un animal un médicament dosé à 1 mg de principe actif. Ce médicament libère peu à peu le principe actif qui passe dans le sang. On note $g(t)$ la quantité de principe actif, exprimée en mg, présente dans le sang à l'instant t exprimé en heure ($t \geqslant 0$). On constate expérimentalement que la fonction g est solution de l'équation différentielle (**E**) : $y'+\frac{1}{2}y=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}$.

1. a) Démontrer que la fonction u définie sur $[0\,;+\infty[$ par $u(t)=\frac{1}{2}t\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}$ est solution de l'équation (**E**).

b) Montrer qu'une fonction v est solution de l'équation (**E**) si, et seulement si, la fonction $h=v-u$ est solution de l'équation différentielle $y'+\frac{1}{2}y=0$.

c) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (**E**).

2. On suppose qu'à l'instant $t=0$, la quantité de principe actif présente dans le sang est nulle.
Montrer que la solution de l'équation différentielle (**E**) qui vérifie cette condition initiale est la fonction f étudiée dans la partie A.

3. Donner l'instant t pour lequel la quantité de principe actif est maximum.

4. Voici un programme écrit en langage Python.

```
from math import *

def f(x):
    y=0.5*x*exp(-0.5*x)
    return y

n=3
while f(n)>0.1:
    n=n+1
print(n)
```

a) À l'aide de la question **1. b)** de la partie A, expliquer pourquoi il est certain que ce programme affiche une valeur en sortie.

b) Quelle est la valeur n_0 affichée à la fin de son exécution ?

c) L'absorption du médicament par l'animal a lieu un matin à 8 h.
À quelle question ce programme permet-il de répondre ?

5. Déterminer l'instant à partir duquel la diminution de principe actif ralentit.

BAC BLANC : sujet n° 3

Corrigés des exercices

Durée de l'épreuve : 4 heures.
Le sujet comporte quatre exercices indépendants. L'usage de la calculatrice est autorisé.

Exercice 1

4 points

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points :

$$A(1\,;\,-2\,;\,4),\quad B(-2\,;\,-6\,;\,5),\quad C(-4\,;\,0\,;\,-3).$$

1. a) Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

b) Démontrer que le vecteur $\vec{n}(1\,;-1\,;-1)$ est un vecteur normal au plan (ABC).

c) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

2. a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite d passant par le point O et orthogonale au plan (ABC).

b) Déterminer les coordonnées du point O′ projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC).

c) En déduire la distance du point O au plan (ABC).

3. H est le projeté orthogonal du point O sur la droite (BC) et t est le nombre réel tel que $\overrightarrow{BH} = t\overrightarrow{BC}$.

a) Démontrer que $t = \dfrac{\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2}$.

b) Déterminer les coordonnées du point H, puis en déduire la distance du point O à la droite (BC).

Exercice 2

4 points

Un groupe de 50 coureurs, portant des dossards numérotés de 1 à 50, participe à une course cycliste qui comprend 10 étapes, et au cours de laquelle aucun abandon n'est constaté. À la fin de chaque étape, un groupe de 5 coureurs est choisi au hasard pour subir un contrôle antidopage.
Ces désignations de 5 coureurs à l'issue de chacune des étapes sont indépendantes. Un même coureur peut donc être contrôlé à l'issue de plusieurs étapes.

1. À l'issue de chaque étape, combien peut-on former de groupes différents de 5 coureurs ?

2. À l'issue d'une étape, on choisit au hasard un coureur parmi les 50 participants.
Justifier que la probabilité pour qu'il subisse le contrôle prévu pour cette étape est égale à 0,1.

3. On note X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de contrôles subis par un coureur sur l'ensemble des 10 étapes de la course.

a) Déterminer la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X. Préciser ses paramètres.

b) On choisit au hasard un coureur à l'arrivée de la course.
Calculer la probabilité qu'il ait été contrôlé au moins une fois. *Arrondir au dix-millième.*

4. On choisit au hasard un coureur qui a subi un contrôle parmi les 50 coureurs. On définit les événements suivants :
T : « Le contrôle est positif » ;
D : « Le coureur est dopé ».

D'après des statistiques, on admet que $P(T) = 0{,}05$.
Le contrôle anti-dopage n'étant pas fiable à 100 %, on sait que :
- si un coureur est dopé, le contrôle est positif dans 97 % des cas ;
- si un coureur n'est pas dopé, le contrôle est positif dans 1 % des cas.

a) Calculer $P(D)$.

b) Le coureur a un contrôle positif. Quelle est la probabilité qu'il ne soit pas dopé ?

Exercice 3

4 points

1. f est la fonction définie sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x}{\ln(x)}$.

a) Étudier la limite de la fonction f en 1, puis en $+\infty$.

b) Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$.

c) En déduire que si $x \geqslant \mathrm{e}$, alors $f(x) \geqslant \mathrm{e}$.

2. (u_n) est la suite définie par $u_0=5$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=f(u_n)$.

a) Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant \mathrm{e}$.

b) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite ℓ.

3. Au début de cet algorithme, on affecte 5 à la variable u et 0 à la variable n.
Quelle est la valeur de la variable n à la fin de l'exécution de l'algorithme ?
Arrondir au millième.

```
Tant que u > 2,72
    u ← u / ln(u)
    n ← n + 1
Fin Tant que
```

Exercice 4

8 points

Partie A

f est la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $f(t)=200\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}+20$.
$\mathscr{C}$ est sa courbe représentative dans un repère.

a) Étudier la limite de la fonction f en $+\infty$. Interpréter graphiquement.

b) Pour tout réel $x \geqslant 0$, déterminer $f'(x)$, puis dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

c) Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

Partie B

La température, en degré Celsius (°C), de refroidissement d'un objet fabriqué industriellement est une fonction g du temps t exprimé en heure ($t \geqslant 0$).

On admet que g est solution de l'équation différentielle (**E**) : $y'+\dfrac{1}{2}y=10$.

1. a) Justifier que la fonction constante u définie sur $[0\,;+\infty[$ par $u(t)=20$ est solution de (**E**).

b) Montrer qu'une fonction v est solution de (**E**) si, et seulement si, la fonction $h=v-u$ est solution de l'équation différentielle $y'+\dfrac{1}{2}y=0$.

c) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (**E**).

2. On suppose qu'à l'instant $t=0$, la température de l'objet est égale à 220 °C. Montrer que la solution de l'équation différentielle (**E**) qui vérifie cette condition initiale est la fonction f étudiée dans la partie A.

3. Déterminer la valeur exacte, puis une valeur approchée, en heure et minute, du moment où la température de l'objet est égale à 50 °C.

4. Camille affirme que la diminution de la température ne fait que ralentir.
Que penser de cette affirmation ? Justifier.

Partie C

(d_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $d_n=f(n)-f(n+1)$.
Pour tout entier n, d_n représente l'abaissement de température de l'objet entre l'heure n et l'heure $n+1$.

1. a) Calculer d_0, d_1 et d_2 en °C. *Arrondir au dixième.*

b) Quelle est la limite de la suite (d_n) quand n tend vers $+\infty$?

2. Déterminer la plus petite valeur de n à partir de laquelle l'abaissement de température est inférieur à 5 °C.

BAC BLANC : sujet n° 4

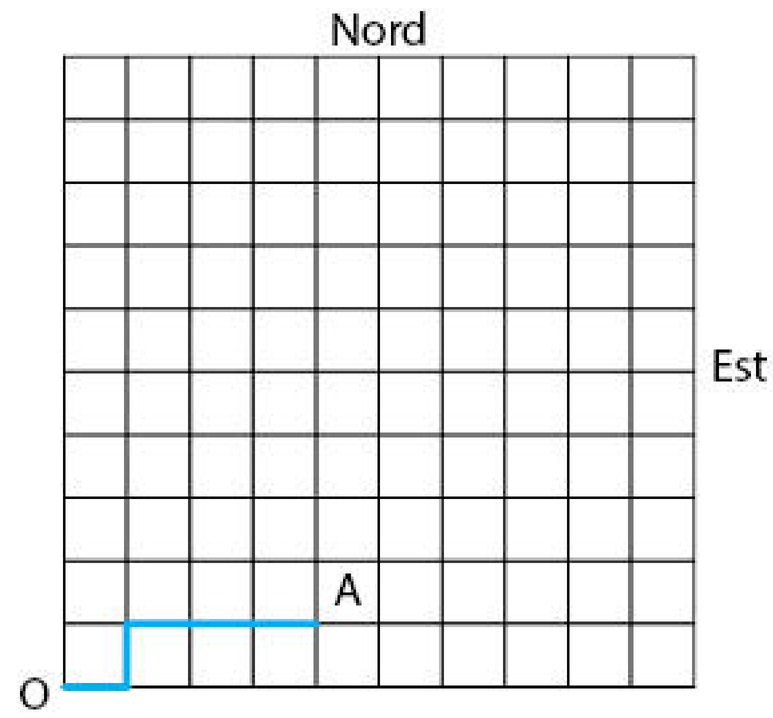
Corrigés des exercices

Durée de l'épreuve : 4 heures.
Le sujet comporte quatre exercices indépendants. L'usage de la calculatrice est autorisée.

Exercice 1

4 points

Les rues d'une ville sont toutes parallèles ou perpendiculaires. On identifie le plan de cette ville au quadrillage d'un carré de 10 unités sur 10 dans lequel on se repère avec des points à coordonnées entières qui correspondent aux carrefours.
On s'intéresse aux chemins partant de O et arrivant à un autre point M de coordonnées $(p\,;q)$ où p et q sont des entiers naturels tels que $p \leqslant 10$ et $q \leqslant 10$.
À chaque intersection, on ne peut aller que vers le nord (N) ou vers l'est (E). On décrit un chemin à l'aide d'un mot composé successivement des lettres N ou E et on appelle longueur d'un chemin le nombre de lettres employées pour le décrire.
Ainsi, le chemin ENEEE allant de $O(0\,;0)$ à $A(4\,;1)$ est de longueur 5.



1. a) Donner la liste de tous les chemins permettant de se rendre en A.

b) M est un point de coordonnées $(p\,;q)$ où p et q sont des entiers naturels tels que $p \leqslant 10$ et $q \leqslant 10$. Exprimer, en fonction de p et q, la longueur des chemins qui permettent d'arriver en M.

c) Montrer qu'il y a $\binom{p+q}{p}$ chemins différents qui permettent d'arriver en M.

d) Dénombrer les chemins qui permettent d'arriver au point C de coordonnées $(7\,;5)$.

e) Dénombrer les chemins pour arriver en C en passant par A.

2. On considère, dans cette question, que tous les chemins sont de longueur 5 et qu'à chaque intersection, un promeneur partant de O va vers le nord avec une probabilité de $\frac{2}{3}$ et va vers l'est avec une probabilité de $\frac{1}{3}$ indépendamment de son choix précédent.
On note X la variable aléatoire qui à tout chemin suivi par le promeneur associe le nombre de fois où il va vers le nord.

a) Déterminer la loi de probabilité suivie par X et préciser ses paramètres.

b) Calculer la probabilité que le promeneur arrive en A.

Exercice 2

4 points

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère le point S de coordonnées $(1\,;3\,;5)$ et le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $2x - y + 3z - 1 = 0$.
Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse. Justifier.

1. La droite d_1 de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 5 - 4t \\ z = 2 - 2t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ est incluse dans le plan $\mathscr{P}$.

2. La droite d_2 de représentation paramétrique $\begin{cases} x = -t' \\ y = 7 + 4t' \\ z = 7 + 2t' \end{cases}$ $(t' \in \mathbb{R})$ est la droite parallèle à la droite d_1 passant par le point S.

3. Le projeté orthogonal du point S sur le plan $\mathscr{P}$ a pour coordonnées $\left(-\frac{6}{7}\,;\frac{55}{14}\,;\frac{31}{14}\right)$.

4. Le plan $\mathscr{P}$ coupe la sphère de centre S et de rayon 3.

Exercice 3

4 points

Partie A

f est la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=x+\mathrm{e}^{-x}$.
Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_1=0$ et pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1}=f(u_n)$.

1. a) Recopier et compléter la fonction **U** ci-contre écrite en langage Python qui prend pour paramètre un entier naturel n et qui renvoie le terme u_n.

```
from math import *

def U(n):
    u=0
    for i in range(2,□):
        u=□
    return u
```

b) Que renvoie **U(4)** ? *Arrondir au centième.*

2. g est la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $g(x)=\ln(1+x)$.
$\mathscr{C}_g$ est sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

a) Étudier la convexité de la fonction g sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

b) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse 0.

c) En déduire que pour tout réel $x \geqslant 0$, $\ln(1+x) \leqslant x$.

3. a) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $\ln(n+1) \leqslant \ln(n)+\dfrac{1}{n}$.

b) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $f(\ln(n))=\ln(n)+\dfrac{1}{n}$.

c) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $\ln(n) \leqslant u_n$.

d) En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 4

8 points

Partie A. Résolution d'une équation différentielle

(**E**) est l'équation différentielle $y'+2y=2\mathrm{e}^{-2t}$ avec t nombre réel de l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

a) Déterminer l'ensemble des solutions sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ de l'équation différentielle $(\mathbf{E_0}) : y'+2y=0$.

b) Démontrer que la fonction h définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $h(t)=2t\,\mathrm{e}^{-2t}$ est une solution de (**E**).

c) Montrer qu'une fonction g est solution de (**E**) si, et seulement si, la fonction $u=g-h$ est solution de l'équation $(\mathbf{E_0})$.

d) En déduire l'ensemble des solutions de (**E**).

e) Déterminer la solution f de (**E**) qui prend la valeur 1 pour $t=0$.

Partie B. Étude d'une fonction

f est la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $f(t)=(1+2t)\mathrm{e}^{-2t}$.
$\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

1. a) Étudier la limite de la fonction f en $+\infty$. Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?

b) Pour tout réel $t \geqslant 0$, déterminer $f'(t)$, puis dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

2. a) Démontrer que l'équation $f(t)=0{,}25$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

b) Donner un encadrement de α au centième.

Partie C. Application

Dans les régions de production, on peut contrôler le taux de sucre des melons avec un réfractomètre à mesure rapide. Le taux de défaillance du réfractomètre, à l'instant t, en heure, est modélisé par la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $g(t)=1-f(t)=1-(1+2t)\mathrm{e}^{-2t}$.

a) Quel est le taux de défaillance du réfractomètre au bout d'une heure ? *Arrondir au centième.*

b) Pour des raisons de fiabilité, on doit changer le réfractomètre lorsque le taux de défaillance est supérieur ou égal à 0,75.
Déterminer la durée d'utilisation du réfractomètre. *Arrondir au centième.*