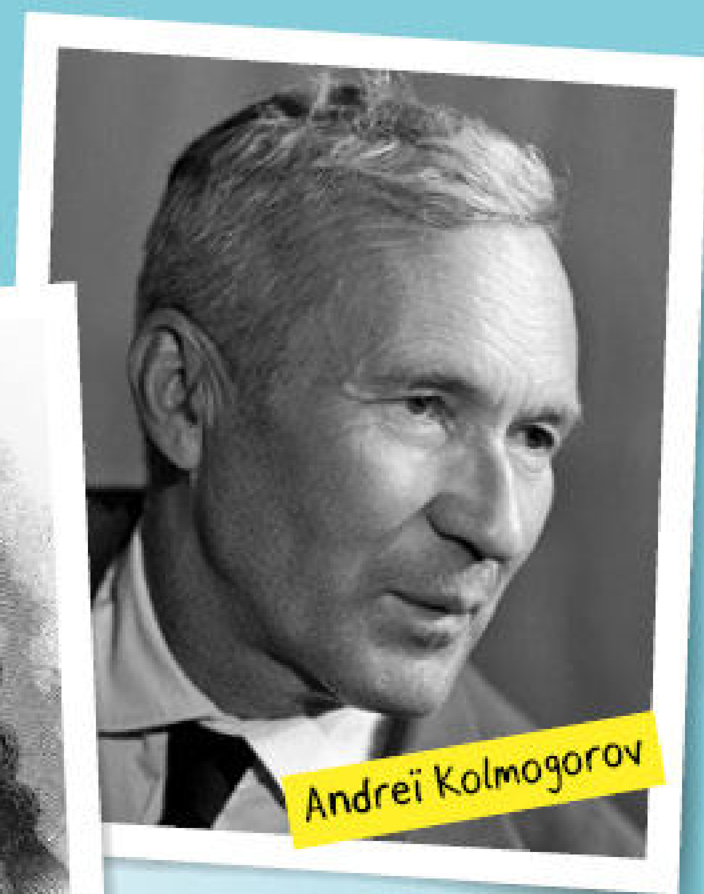
# 16 Sommes de variables aléatoires

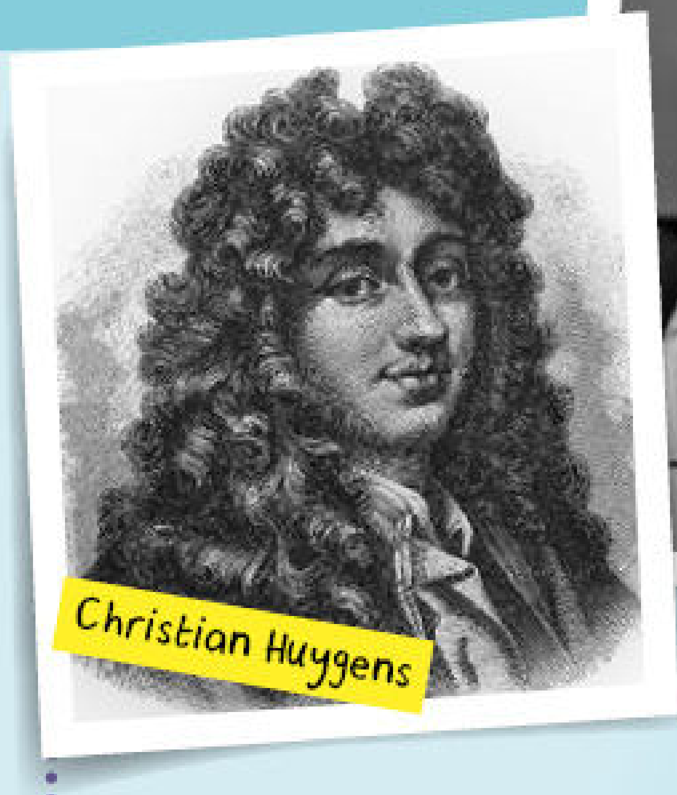
## HISTOIRE DES MATHS

En 1657, dans son traité *Raisonnement sur les jeux de hasard*, **Christian Huygens** introduit la notion fondamentale d'espérance (du latin *expectatio*, attente) dans une situation d'incertitude. Il faut attendre deux siècles plus tard pour que l'Anglais **William Whitworth** utilise la lettre E pour noter l'espérance.

La notion de variable aléatoire apparaît quelques années plus tard, en 1713, dans l'ouvrage majeur de **Jacques Bernoulli**, *Ars Conjectandi*.

En 1718, **Abraham de Moivre** étudie les sommes de variables aléatoires qui suivent des lois de Bernoulli. C'est grâce à ses travaux précurseurs que, cent ans plus tard, **Pierre-Simon de Laplace** applique des techniques d'analyse dans le domaine des probabilités dans sa *Théorie analytique*.




▶ **Christian Huygens** (1629-1695) est un mathématicien et astronome hollandais. En 1656, il découvre les anneaux de Saturne pressentis par Galilée, et son satellite Titan. On lui doit le premier traité de probabilités.

▶ **Andreï Kolmogorov** (1903-1987) est un mathématicien russe. Il est principalement connu pour avoir fondé, en 1929, dans le cadre de ses recherches en électrostatique, une théorie axiomatique des probabilités.

**1654** Le Chevalier de Méré pose à Blaise Pascal le *problème des partis*, qui donne naissance à la pensée probabiliste.

**1718** De Moivre étudie les sommes de variables aléatoires.

**1812** Laplace publie sa *Théorie Analytique des probabilités*.

**1933** Kolmogorov pose les fondements des probabilités modernes.

**1666** Création de l'Académie des sciences

**1740** Système métrique obligatoire en France

**1789** Déclaration des droits de l'homme et du citoyen

**1885** Vaccin antirabique de Louis Pasteur

1600 — 1700 — 1800 — 1900

Les ventes de CD se sont effondrées de moitié entre le début et la fin des années 2000.

En 2005, Apple lance un lecteur MP3 muni d'une nouvelle fonctionnalité : la lecture aléatoire. Jusqu'alors, on écoutait de la musique dans l'ordre décidé par l'artiste. La lecture aléatoire est un des éléments qui a ainsi révolutionné la façon d'écouter de la musique.

## Les contenus et capacités travaillés dans ce chapitre

| | Savoir-faire | Exercices |
|---|---|---|
| • Somme de deux variables aléatoires. | 1 et 3 | 16 à 18, 20 à 24 |
| • Linéarité de l'espérance. | 2 et 4 | 19, 25 à 28 |
| • Succession d'épreuves indépendantes et variables indépendantes. | 5 et 7 | 29, 33 à 35 |
| • Propriétés de la variance. | 6 et 8 | 30, 31, 36 à 40 |
| • Application à l'espérance, la variance, l'écart-type d'une loi binomiale. | | 32, 41 à 44 |
| • Échantillon de taille $n$ d'une loi de probabilité. Somme $S_n$ et moyenne $M_n$. | 9 à 15 | 45 à 50 |

Calcul mental

## Rappels utiles

**• Indépendance de deux événements**

Dire que deux événements A et B sont **indépendants** signifie que $\mathbf{P(A \cap B) = P(A) \times P(B)}$.

**• Loi de probabilité d'une variable aléatoire**

Définir la loi de probabilité d'une variable aléatoire X prenant les valeurs $a_1, a_2, \dots, a_n$, c'est associer à chaque valeur $a_i$ (avec $1 \leqslant i \leqslant n$), la probabilité $p_i = P(X = a_i)$.

| $a$ | $a_1$ | $a_2$ | ... | $a_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $P(X = a)$ | $p_1$ | $p_2$ | ... | $p_n$ |

**• Espérance d'une variable aléatoire X**

$$\mathbf{E(X) = p_1 a_1 + \dots + p_n a_n}.$$

Pour un jeu d'argent, l'espérance est le gain moyen par partie que l'on peut espérer, si l'on joue un grand nombre de fois.

Dire qu'un jeu est **équitable** signifie que $\mathbf{E(X) = 0}$.

**• Variance, écart-type d'une variable aléatoire X**

La variance :

$$\mathbf{V(X) = p_1(a_1 - E(X))^2 + \dots + p_n(a_n - E(X))^2}$$

L'écart-type : $\sigma(\mathbf{X}) = \sqrt{\mathbf{V(X)}}$.

**• Loi binomiale**

Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire à deux issues (succès, échec).

Un **schéma de Bernoulli** est la répétition de $n$ épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes dont la probabilité du succès est $p$.

La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès obtenus parmi les $n$ épreuves suit alors la **loi binomiale** $\mathcal{B}(n, p)$.

Pour tout entier naturel $k$ tel que $0 \leqslant k \leqslant n$,

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

## À l'oral — Questions-Tests

*Pour chaque question, il y a une seule réponse exacte.*

**1** A et B sont deux événements indépendants tels que $P(A) = 0{,}8$ et $P(B) = 0{,}2$.

Alors :

(1) $A \cap B$ est l'événement certain

(2) $P(A \cap B) = 0{,}16$

(3) $P(A \cup B) = 0{,}16$

**2** Un jeu de hasard consiste à piocher un jeton dans un sac qui contient 5 jetons numérotés de 1 à 5. On paie 1 € pour jouer une partie, et on reçoit 4 € si on pioche le jeton 1, on reçoit 2 € si on pioche un jeton avec un numéro pair, et rien sinon.

X est la variable aléatoire qui donne le gain (éventuellement négatif) après une partie.

**a)** Les valeurs prises par X sont :

(1) 1, 2, 3, 4 et 5 (2) 0, 2 et 4 (3) −1, 1 et 3

**b)** La loi de probabilité de X est telle que :

(1) $P(X = -1) = \frac{2}{5}$ (2) $P(X = 1) = \frac{3}{5}$ (3) $P(X = 3) = \frac{2}{5}$

**3** Voici la loi de probabilité d'une variable aléatoire X.

| $a$ | −2 | 0 | 2 |
|---|---|---|---|
| $P(X = a)$ | 0,2 | 0,5 | 0,3 |

**a)** L'espérance de X est :

(1) 0 (2) 0,7 (3) 0,2

**b)** À l'aide de la calculatrice, l'écart-type de X est environ égal à :

(1) 1,4 (2) 1,96 (3) 2

**4** Émilie effectue 10 commandes de pizzas à domicile. La probabilité qu'il y ait une erreur dans la commande est 0,1 et chaque commande est indépendante des autres. X est la variable aléatoire qui compte le nombre d'erreurs parmi ces 10 commandes.

**a)** La variable aléatoire X suit une loi :

(1) de Bernoulli (2) binomiale (3) géométrique

**b)** La probabilité qu'il n'y ait aucune erreur est :

(1) 0,9 (2) $0{,}1^{10}$ (3) $0{,}9^{10}$

## 1 Somme de deux variables aléatoires, espérance

**Alenka joue à un jeu de hasard. Elle lance un jeton dont les faces sont numérotées 1 et 2, puis un dé équilibré à quatre faces dont les sommets sont numérotés de 1 à 4.**
**Le résultat du jeu est la somme des deux numéros visibles, sur le jeton et au sommet supérieur du dé.**
**X est la variable aléatoire qui donne le numéro visible sur le jeton, et Y celle qui donne le numéro visible sur le sommet supérieur du dé.**

**1** **a)** Établir la loi de probabilité de la variable aléatoire X, puis calculer son espérance $E(X)$.
**b)** Établir la loi de probabilité de la variable aléatoire Y, puis calculer son espérance $E(Y)$.

**2** Pour modéliser le résultat de ce jeu, on note $X + Y$ la variable aléatoire qui donne la somme des deux numéros visibles.
**a)** Recopier et compléter le tableau ci-contre pour déterminer les valeurs possibles prises par $X + Y$.
**b)** Déduire du tableau précédent la loi de probabilité de la variable aléatoire $X + Y$.
**c)** Calculer l'espérance $E(X + Y)$ de la variable aléatoire somme $X + Y$.

| Jeton \ Dé | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| **1** | | | | |
| **2** | | | | |

**3** Comparer les espérances $E(X)$, $E(Y)$ et $E(X + Y)$. Qu'observe-t-on ?

## 2 Propriétés de la variance

**Amalia et Lucie disposent d'un sac opaque contenant 5 papiers portant les numéros de 1 à 5.**
**Elles doivent utiliser ce sac pour obtenir un nombre aléatoire compris entre 1 et 10.**

**1** Amalia propose de tirer deux papiers du sac, successivement et avec remise.
X est la variable aléatoire qui donne le numéro inscrit sur le premier papier, et Y celle qui donne le numéro inscrit sur le second papier.
**a)** Déterminer la loi de probabilité de X.
Utiliser la calculatrice pour déterminer la variance $V(X)$.
**b)** Que peut-on dire de la loi de probabilité de Y ? En déduire, sans aucun calcul, la variance $V(Y)$.
**c)** Sur le modèle de **Découvrir 1**, utiliser un tableau croisé pour établir la loi de probabilité de la variable aléatoire somme $X + Y$.
**d)** Utiliser la calculatrice pour déterminer la variance $V(X + Y)$.
Comparer avec les variances $V(X)$ et $V(Y)$. Que constate-t-on ?

**2** Lucie propose de tirer un unique papier du sac et de multiplier le numéro obtenu par 2.
Z est la variable aléatoire qui donne le résultat ainsi obtenu.
**a)** Exprimer la variable aléatoire Z en fonction de la variable X définie à la question **1**.
**b)** En déduire la loi de probabilité de Z.
**c)** Utiliser la calculatrice pour déterminer la variance $V(Z)$.
Comparer avec $V(X)$. Que constate-t-on ?

# Cours

**Exercices**
- **1** à **4** (ci-contre)
- **16** à **28**

# 1 Variables aléatoires X + Y et $a$X

X et Y sont deux variables aléatoires définies sur l'univers d'une expérience aléatoire.
X prend les valeurs $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et Y prend les valeurs $b_1, b_2, \ldots, b_m$ (avec $n$ et $m$ entiers naturels non nuls).

## A Variable aléatoire X + Y

**Définitions**

- La variable aléatoire X + Y prend toutes les valeurs possibles $a_i + b_j$ avec $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant m$.
- Loi de probabilité de X + Y : pour toute valeur $w$ prise par X + Y, $\mathbf{P}(\mathbf{X} + \mathbf{Y} = \boldsymbol{w})$ est la somme de toutes les probabilités $\mathbf{P}(\{\mathbf{X} = \boldsymbol{a_i}\} \cap \{\mathbf{Y} = \boldsymbol{b_j}\})$ où $a_i + b_j = w$.

**Exemple**

En période de réglage de ses machines, le contrôleur qualité d'une usine effectue de nombreux prélèvements dans la production et relève, pour chaque pièce, si elle a un défaut A, un défaut B. Compte tenu du grand nombre de pièces prélevées, les fréquences indiquées dans ce tableau peuvent être assimilées à des probabilités.

X (resp. Y) est la variable aléatoire qui compte le nombre de défauts A (resp. B). Dans le tableau figurent en rouge les valeurs prises par la variable aléatoire somme S = X + Y.

Voici ci-contre sa loi de probabilité.

| $s$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X = s)$ | 0,07 | 0,33 | 0,37 | 0,23 |

| X \ Y | 0 | 1 | 2 | Loi de X |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0<br>0,07 | 1<br>0,18 | 2<br>0,17 | 0,42 |
| 1 | 1<br>0,15 | 2<br>0,20 | 3<br>0,23 | 0,58 |
| Loi de Y | 0,22 | 0,38 | 0,40 | 1 |

## B Variable aléatoire $a$X

**Définitions**

$a$ désigne un nombre réel différent de 0.

- La variable aléatoire $a$X prend toutes les valeurs possibles $a \times a_i$ avec $1 \leqslant i \leqslant n$.
- Loi de probabilité de $a$X : pour toute valeur $w$ prise par $a$X, $\mathbf{P}(\boldsymbol{a}\mathbf{X} = \boldsymbol{w})$ est la somme de toutes les probabilités $P(\{X = a_i\})$ où $a \times a_i = w$.

**Exemple**

On lance un dé équilibré à six faces numérotées de 1 à 6. X est la variable aléatoire qui donne le numéro obtenu et Y celle qui donne le double de ce numéro. Alors Y = 2X.

## C Linéarité de l'espérance

**Propriétés (admises)**

- $\mathbf{E}(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) = \mathbf{E}(\mathbf{X}) + \mathbf{E}(\mathbf{Y})$
- $\mathbf{E}(\boldsymbol{a}\mathbf{X}) = \boldsymbol{a}\,\mathbf{E}(\mathbf{X})$, avec $a$ nombre réel, $a \neq 0$.

**Exemple**

On reprend l'exemple du paragraphe A.
$E(X) = 0{,}42 \times 0 + 0{,}58 \times 1 = 0{,}58$ et $E(Y) = 0{,}22 \times 0 + 0{,}38 \times 1 + 0{,}4 \times 2 = 1{,}18$.
Donc $E(X) + E(Y) = 1{,}76$.
$E(X + Y) = 0{,}07 \times 0 + 0{,}33 \times 1 + 0{,}37 \times 2 + 0{,}23 \times 3 = 1{,}76$. On constate que $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.

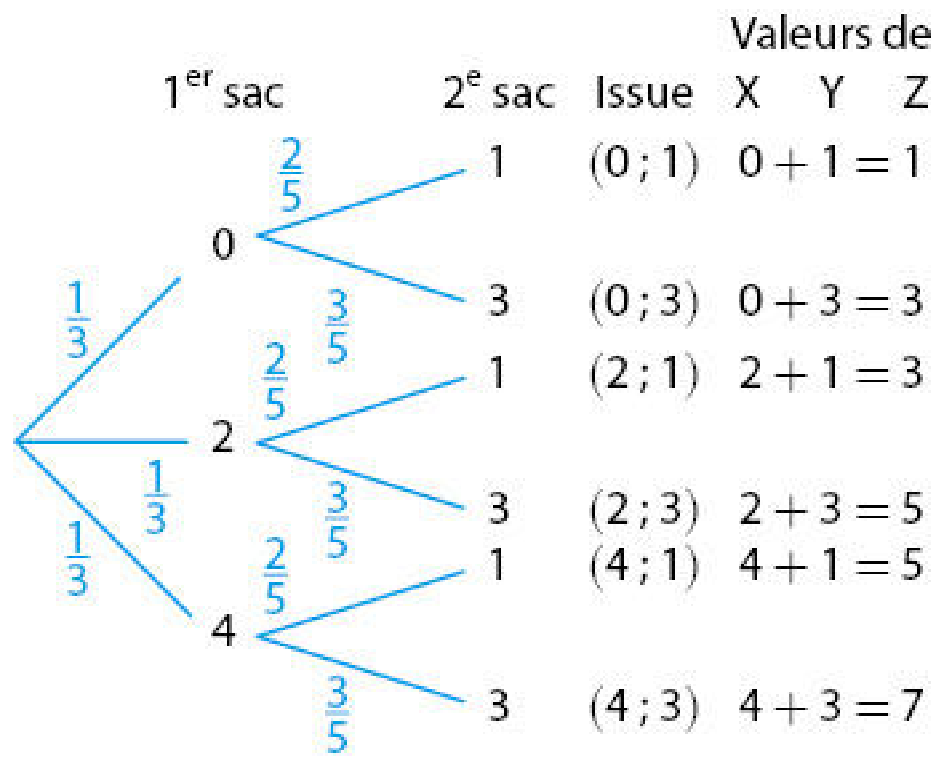
## EXERCICES RÉSOLUS

### 1 Représenter une variable comme somme de variables aléatoires

On dispose de deux sacs opaques. L'un contient trois papiers portant les numéros 0, 2 et 4, l'autre contient cinq papiers : deux portant le numéro 1 et trois portant le numéro 3.
On tire un papier de chaque sac et on additionne les numéros obtenus.
Z est la variable aléatoire qui donne le résultat.
**a)** Définir deux variables aléatoires X et Y telles que $Z = X + Y$.
**b)** Déterminer les valeurs prises par Z et sa loi de probabilité.

**Solution**

**a)** X est la variable aléatoire qui donne le numéro tiré dans le premier sac et Y est celle qui donne le numéro tiré dans le second sac.
**b)** On représente la situation par un arbre pondéré.




Les valeurs prises par Z sont donc 1, 3, 5 et 7.
$P(Z = 3) = P(\{X = 0\} \cap \{Y = 3\}) + P(\{X = 2\} \cap \{Y = 1\})$
$P(Z = 3) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{3}$
Loi de probabilité de Z : on calcule de même les autres probabilités.

| $c$ | 2 | 3 | 5 | 7 |
|---|---|---|---|---|
| $P(Z = c)$ | $\frac{2}{15}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{5}$ |

### 2 Utiliser la linéarité de l'espérance

Voici les lois de probabilité de deux variables aléatoires X et Y définies sur l'univers d'une expérience aléatoire.

| $a$ | 0 | 10 | 25 |
|---|---|---|---|
| $P(X = a)$ | 0,20 | 0,28 | 0,30 |

| $b$ | 10 | 15 |
|---|---|---|
| $P(Y = b)$ | 0,4 | 0,6 |

Déterminer l'espérance de la variable aléatoire somme $S = X + Y$.

**Solution**

$E(X) = 0{,}2 \times 0 + 0{,}28 \times 10 + 0{,}3 \times 25 = 10{,}3$
$E(Y) = 0{,}4 \times 10 + 0{,}6 \times 15 = 13$
Donc $E(S) = E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 11{,}3 + 13 = 24{,}3$.

Pour calculer l'espérance de S, il n'est pas utile de déterminer sa loi de probabilité.

## EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

**Sur le modèle de l'exercice résolu 1**

**3** José lance un jeton portant les numéros 0 et 1, puis lance un dé équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Z est la variable aléatoire qui donne la somme des deux numéros obtenus.
Déterminer la loi de probabilité de Z.

**Sur le modèle de l'exercice résolu 2**

**4** Les variables aléatoires X et Y sont définies sur un même univers. On sait que $E(X) = 2{,}5$ et $E(Y) = 3{,}4$.
Dans chaque cas, déterminer l'espérance de la variable aléatoire :
**a)** $X + Y$ **b)** $4X$ **c)** $4X + Y$

Cours

Exercices
- 5 à 8 (ci-contre)
- 29 à 44

# 2 Variables aléatoires indépendantes

## A Succession d'épreuves aléatoires indépendantes

On effectue successivement deux épreuves aléatoires indépendantes l'une de l'autre. Ainsi, l'issue de la première épreuve n'influence pas l'issue de la seconde.
On note X (resp. Y) la variable aléatoire qui donne le résultat de la première (resp. seconde) épreuve.
On dit que les variables aléatoires X et Y sont **indépendantes**.

**Conséquence** : les événements $\{X = a_i\}$ et $\{Y = b_j\}$ sont indépendants, donc :

$$\mathbf{P(\{X = a_i\} \cap \{Y = b_j\}) = P(X = a_i) \times P(Y = b_j)}.$$

**Exemple**

On lance successivement deux dés équilibrés, l'un à quatre faces numérotées de 1 à 4 et l'autre à six faces numérotées 0, 3, 3, 6, 6 et 6.
X (resp. Y) est la variable aléatoire qui donne le numéro obtenu avec le premier (resp. second) dé.
Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, car les deux lancers de dés le sont.
Ainsi, par exemple, $P(\{X = 1\} \cap \{Y = 3\}) = P(X = 1) \times P(Y = 3) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$.

## B Variance

**Propriétés (admises)**

X et Y sont deux variables aléatoires définies sur un même univers et $a$ est un nombre réel différent de 0.
Si X et Y sont **indépendantes**, alors :
- $\mathbf{V(X + Y) = V(X) + V(Y)}$
- $\mathbf{V(aX) = a^2V(X)}$

**Exemple**

X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes telles que $V(X) = 1{,}25$ et $V(Y) = 5$.
Donc, $V(X + Y) = 1{,}25 + 5 = 6{,}25$ et $V(3X) = 3^2 \times 1{,}25 = 11{,}25$.

## C Application à la loi binomiale

**Propriétés**

X est une variable aléatoire qui suit la **loi binomiale** $\mathscr{B}(n\,;p)$.
- $\mathbf{E(X) = np}$
- $\mathbf{V(X) = np(1 - p)}$
- $\mathbf{\sigma(X) = \sqrt{np(1 - p)}}$

**Démonstrations**

On note $X_i$ (avec $1 \leqslant i \leqslant n$) la variable aléatoire qui prend la valeur 1 en cas de succès à la $i$-ème épreuve et 0 sinon.

| $a$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $P(X_i = a)$ | $1 - p$ | $p$ |

Chaque variable aléatoire $X_i$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $p$.
$E(X_i) = (1 - p) \times 0 + p \times 1 = p$ et $V(X) = (1 - p)(0 - p)^2 + p(1 - p)^2 = (1 - p)(p^2 + p(1 - p)) = p(1 - p)$
Or, $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ et $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont indépendantes.
En généralisant les propriétés de l'espérance et de la variance d'une somme de deux variables au cas de $n$ variables, on obtient :
- $E(X) = E(X_1) + E(X_2) + \ldots + E(X_n) = np$
- $V(X) = V(X_1) + V(X_2) + \ldots + V(X_n) = np(1 - p)$.

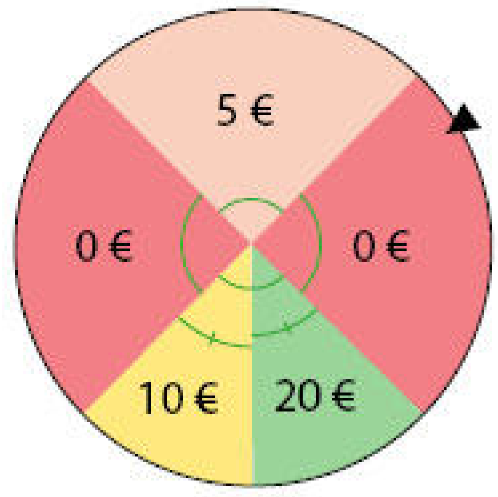
On en déduit que $\sigma(X) = \sqrt{np(1 - p)}$.

Vidéo
JAICOMPRIS.COM
Ces démonstrations sont présentées en vidéo

## EXERCICES RÉSOLUS

### 5 Reconnaître et utiliser des variables aléatoires indépendantes

Dans une fête foraine, un jeu de hasard se déroule en deux temps.
Le joueur fait d'abord tourner la roue ci-contre et gagne le montant indiqué dans le secteur obtenu. Puis, il pioche un jeton bonus dans un sac qui contient 25 jetons marqués 0 €, 20 jetons marqués 2 € et 5 jetons marqués 5 €.
Calculer la probabilité $p$ d'obtenir le même gain avec la roue et avec le jeton bonus.




**Solution**

X est la variable aléatoire qui donne le gain obtenu avec la roue.
Y est la variable aléatoire qui donne le gain obtenu avec le jeton bonus.
X et Y sont indépendantes, car les deux tirages le sont.
Il y a deux gains communs à la roue et au sac : 0 € et 5 €.

$$\mathrm{P}(\{X=0\}\cap\{Y=0\}) = \mathrm{P}(X=0)\times \mathrm{P}(Y=0) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\mathrm{P}(\{X=5\}\cap\{Y=5\}) = \mathrm{P}(X=5)\times \mathrm{P}(Y=5) = \frac{1}{4}\times\frac{1}{10} = \frac{1}{40}$$

Donc la probabilité demandée est $\frac{1}{4}+\frac{1}{40}=\frac{11}{40}$.

| $a$ | 0 | 5 | 10 | 20 |
|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(X=a)$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ |

| $b$ | 0 | 2 | 5 |
|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(Y=b)$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{1}{10}$ |

On utilise l'indépendance des variables aléatoires pour calculer chacune de ces deux probabilités.

### 6 Utiliser l'additivité de la variance

On reprend la situation de l'exercice 5.
On note Z la variable aléatoire qui donne le gain final du joueur.
Déterminer la variance de Z.

**Solution**

Z est la somme des variables aléatoires X et Y, soit $Z = X + Y$.
Avec la calculatrice, on obtient (voir ci-contre) :

$$V(X) = 43{,}75 \text{ et } V(Y) = 2{,}41.$$

Les variables X et Y sont indépendantes, donc :

$$V(Z) = V(X) + V(Y) = 43{,}75 + 2{,}41 = 46{,}16.$$

| | | |
|---|---|---|
| Effectif total | 1 | 1 |
| Minimum | 0 | 0 |
| Maximum | 20 | 5 |
| Etendue | 20 | 5 |
| Moyenne | 5 | 1.3 |
| Ecart type | 6.614378 | 1.552417 |
| Variance | 43.75 | 2.41 |

**Remarque** : la calculatrice NumWorks affiche la variance d'une série. Les autres calculatrices affichent $\sigma$ et on utilise $V = \sigma^2$.

## EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

**Sur le modèle de l'exercice résolu 5**

**7** On lance un dé équilibré à quatre faces numérotées de 1 à 4, puis un dé équilibré à six faces numérotées de 1 à 6.
Calculer la probabilité d'obtenir avec le dé à six faces le double du numéro obtenu avec le dé à quatre faces.

**Sur le modèle de l'exercice résolu 6**

**8** On lance deux dés équilibrés à 10 faces. Sur l'un, les faces sont numérotées de 1 à 10. Sur l'autre, elles sont numérotées 0, 0, 0, 0, 10, 10, 10, 20, 20 et 30.
Z est la variable aléatoire qui donne la somme des deux numéros obtenus.
Déterminer la variance de Z. Expliquer.

Exercices
- **9** à **15** (ci-contre)
- **45** à **50**

# 3 Somme et moyenne d'un échantillon

## A Échantillon de taille *n* d'une loi de probabilité

**Définition**

Un échantillon de taille $n$ d'une loi de probabilité est une liste $(X_1 ; X_2 ; \dots ; X_n)$ de $n$ variables aléatoires **indépendantes** et **identiques** qui suivent toutes cette loi.

**Exemple**

Laëtitia prend le même train cinq jours par semaine. On admet que la variable aléatoire X qui compte le nombre de retards suit la loi binomiale $\mathcal{B}(5 ; 0{,}1)$. En répétant cette expérience pendant 8 semaines, on construit un échantillon $(X_1 ; X_2 ; X_3 ; X_4 ; X_5 ; X_6 ; X_7 ; X_8)$ de taille 8 de cette loi de probabilité.

## B Somme d'un échantillon

**Définition**

$(X_1 ; X_2 ; \dots ; X_n)$ est un échantillon de taille $n$ de la loi de probabilité suivie par une variable aléatoire X.
La **somme** de cet échantillon est la variable aléatoire $\mathbf{S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n}$.

**Propriétés**

$S_n$ est la somme d'un échantillon de taille $n$ de la loi de probabilité suivie par une variable aléatoire X.

- $\mathbf{E(S_n) = nE(X)}$
- $\mathbf{V(S_n) = nV(X)}$
- $\boldsymbol{\sigma(S_n) = \sqrt{n} \times \sigma(X)}$

**Démonstrations**

- $E(S_n) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n)$. Or, les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ suivent toutes la même loi que X, et donc $E(X_1) = E(X_2) = \dots = E(X_n) = E(X)$. On en déduit que $E(S_n) = nE(X)$.
- Les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes, donc $V(S_n) = V(X_1) + V(X_2) + \dots + V(X_n) = nV(X)$.
On en déduit que $\sigma(S_n) = \sqrt{n} \times \sigma(X)$.

## C Moyenne d'un échantillon

**Définition**

$(X_1 ; X_2 ; \dots ; X_n)$ est un échantillon de taille $n$ de la loi de probabilité suivie par une variable aléatoire X.
La **moyenne** de cet échantillon est la variable aléatoire $\mathbf{M_n = \dfrac{S_n}{n}}$.

**Propriétés**

$M_n$ est la moyenne d'un échantillon de taille $n$ de la loi de probabilité suivie par une variable aléatoire X.

- $\mathbf{E(M_n) = E(X)}$
- $\mathbf{V(M_n) = \dfrac{V(X)}{n}}$
- $\boldsymbol{\sigma(M_n) = \dfrac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}}$

**Démonstrations**

- On sait que pour tout réel $a \neq 0$, $E(aX) = aE(X)$. Donc, $E(M_n) = E\left(\dfrac{1}{n}S_n\right) = \dfrac{1}{n}E(S_n) = \dfrac{1}{n} \times nE(X) = E(X)$.
- On sait aussi que pour tout réel $a \neq 0$, $V(aX) = a^2V(X)$.
Par conséquent, $V(M_n) = V\left(\dfrac{1}{n}S_n\right) = \dfrac{1}{n^2}V(S_n) = \dfrac{1}{n^2} \times nV(X) = \dfrac{V(X)}{n}$.
On en déduit que $\sigma(M_n) = \dfrac{\sqrt{V(X)}}{\sqrt{n}} = \dfrac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$.

EXERCICES RÉSOLUS

## 9 Étudier la somme d'un échantillon

Le Yam's est un jeu dans lequel on lance cinq dés équilibrés à six faces numérotées de 1 à 6, pour obtenir certaines combinaisons particulières. Pour l'une de ces combinaisons, appelée Chance, on marque la somme des numéros obtenus avec les cinq dés.
Déterminer l'espérance et l'écart-type du nombre de points que l'on peut ainsi obtenir.
*Arrondir au centième si besoin.*

**Solution**

X est la variable aléatoire qui donne le numéro obtenu avec un dé.
Voici ci-contre sa loi de probabilité.
Un lancer de cinq dés est alors un échantillon $(X_1 ; X_2 ; X_3 ; X_4 ; X_5)$ de taille 5 de la loi de probabilité suivie par X.
La variable aléatoire $S_5$ somme de cet échantillon compte ainsi le nombre total de points obtenus.
À l'aide de la calculatrice, on obtient $E(X) = 3{,}5$ et $\sigma(X) \approx 1{,}71$.
Donc $E(S_5) = 5 \times 3{,}5 = 17{,}5$ et $\sigma(S_5) \approx \sqrt{5} \times 1{,}71$ soit $\sigma(S_5) \approx 3{,}82$.

| $a$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(X = a)$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ |

Le résultat de chaque dé est indépendant des autres. Donc les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_5$ sont indépendantes.

## 10 Étudier la moyenne d'un échantillon

Pendant la fête de l'école, Constantine a prévu de jouer 10 fois au jeu de la grenouille, dans lequel elle peut gagner un certain nombre de points, noté X.
Voici la loi de probabilité de X.

| $a$ | 0 | 5 | 10 | 20 | 50 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(X = a)$ | 0,6 | 0,2 | 0,1 | 0,06 | 0,03 | 0,01 |

Déterminer l'espérance et l'écart-type du gain moyen par partie pour une série de 10 parties.

**Solution**

Les 10 parties sont indépendantes les unes des autres, donc elles constituent un échantillon $(X_1 ; X_2 ; \ldots ; X_{10})$ de taille 10 de la loi de probabilité de X. La variable aléatoire $M_{10}$ moyenne de cet échantillon modélise alors le gain moyen.
À l'aide de la calculatrice, on obtient $E(X) = 5{,}7$ et $\sigma(X) \approx 13{,}47$.
Donc $E(M_{10}) = 5{,}7$ et $\sigma(M_{10}) \approx \dfrac{13{,}47}{\sqrt{10}}$ soit $\sigma(M_{10}) \approx 4{,}26$.

Le gain moyen par partie est : $\dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_{10}}{10}$ c'est-à-dire $M_{10}$.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

**Sur le modèle de l'exercice résolu 9**

**11** Paul lance six dés tétraédriques équilibrés dont les sommets sont numérotés de 1 à 4.
Il marque la somme des numéros obtenus sur les six sommets supérieurs.
Déterminer l'espérance et l'écart-type du nombre de points qu'il peut ainsi obtenir.
*Arrondir au centième si besoin.*

**Sur le modèle de l'exercice résolu 10**

**12** Chaque jour, Damien résout une fois le Rubik's Cube. X est l'écart, en s, entre le temps qu'il réalise et son meilleur temps. Voici la loi de probabilité de X.

| $a$ | 0 | 1 | 2 | 10 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(X = a)$ | 0,5 | 0,25 | 0,1 | 0,1 | 0,05 |

Déterminer l'espérance et l'écart-type de l'écart quotidien moyen sur une série de 30 jours.

# Savoir-faire Algo python

Vidéo JAICOMPRIS.COM
Un autre exercice Algo/python résolu en vidéo

## EXERCICE RÉSOLU

### 13 Simuler un échantillon d'une loi de probabilité

Cours 3

On dispose d'un dé équilibré à six faces, sur lequel la moitié des faces sont numérotées 0, un tiers des faces sont numérotées 1 et la dernière face est numérotée 2.

X est la variable aléatoire qui donne le numéro obtenu quand on lance ce dé.

**a)** Établir la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

**b)** Voici une fonction écrite en langage Python qui simule un lancer de ce dé. Compléter les cadres rouge et vert.

```
from random import *

def X():
    r=random()
    d=1
    if r<=1/2:
        d=□
    if r>=□:
        d=2
    return d
```

**c)** Modifier ce programme afin d'obtenir un échantillon de taille n où n est un nombre entier, $n \geqslant 1$.

**d)** Saisir ce nouveau programme et l'exécuter pour $n = 5$.

**Solution**

**a)** Voici la loi de probabilité de X :

| $a$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $P(X = a)$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{6}$ |

**b)** Cadre rouge : 0 Cadre vert : $\frac{5}{6}$

Selon la valeur de $r$ comprise entre 0 et 1, on affecte la valeur de $d$ ainsi :

0 — $d = 0$ — $\frac{1}{2}$ — $d = 1$ — $\frac{5}{6}$ — $d = 2$ — 1

$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$

**c)** On effectue $n$ lancers du dé, les numéros obtenus sont rangés dans une liste L.

La fonction X de paramètre $n$ renvoie pour résultat cette liste.

**d)** On exécute **X(5)**.

Voici un affichage obtenu.

```
>>> X(5)
[0, 1, 2, 1, 0]
```

```
from random import *

def X(n):
    L=[]
    for i in range(n):
        r=random()
        d=1
        if r<=1/2:
            d=0
        if r>=5/6:
            d=2
        L=L+[d]
    return L
```

## EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

**Sur le modèle de l'exercice résolu 13**

**14** On dispose d'un dé équilibré à 10 faces, dont une face est numérotée 10, deux faces sont numérotées 20, trois faces sont numérotées 30 et les autres faces sont numérotées 40.

X est la variable aléatoire qui donne le numéro obtenu quand on lance ce dé.

**a)** Établir la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

**b)** Écrire une fonction en langage Python pour simuler un échantillon de taille $n$ de la loi de probabilité de X.

**c)** Saisir ce programme et l'exécuter pour $n = 8$.

**15** On reprend la situation de l'exercice 13

**1.** Calculer l'espérance de la variable aléatoire X.

**2.** Voici une fonction en langage Python à saisir à la suite du programme de l'énoncé de l'exercice 13.

```
12 def Moyenne(n):
13     som=0
14     for i in range(n):
15         som=som+X()
16     m=som/n
17     return m
```

**a)** Quel est son rôle ?

**b)** La saisir, puis l'exécuter pour des valeurs de $n$ de plus en plus grandes.

Qu'observe-t-on ?

## Somme de deux variables aléatoires

Cours 1

**Questions flash** À l'oral

**16** X est une variable aléatoire qui vaut 0 ou 1.
Y est une variable aléatoire qui vaut 0 ou 2.
Donner oralement les valeurs prises par la variable aléatoire somme $X + Y$.

**17** X et Y sont des variables aléatoires définies sur un même univers, qui prennent respectivement $n$ et $m$ valeurs différentes.
On suppose que toutes les valeurs prises par la somme $X + Y$ sont différentes. Dans chaque cas, indiquer oralement combien il y a de telles valeurs.
**a)** $n = 5$ et $m = 12$. **b)** $n = 15$ et $m = 6$.

**18** X et Y sont deux variables aléatoires.
Ce tableau donne les probabilités des événements $\{X = a\} \cap \{Y = b\}$ pour toutes les valeurs de $a$ prises par X et $b$ prises par Y.
Dans chaque cas, calculer mentalement la probabilité.
**a)** $P(X + Y = 0)$
**b)** $P(X + Y = 5)$
**c)** $P(X + Y = 7)$

| X \ Y | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0,3 | 0,15 | 0,15 |
| 5 | 0,2 | 0,15 | 0,05 |

**19** X et Y sont deux variables aléatoires définies sur un même univers telles que $E(X) = 8$ et $E(Y) = 0{,}5$.
Déterminer mentalement
**a)** $E(X + Y)$ **b)** $E(4Y)$ **c)** $E(X + 4Y)$

**20** Amanda lance deux pièces de monnaie, l'une de 1 €, l'autre de 2 €.
X est la variable aléatoire qui vaut 1 si elle obtient Pile avec la pièce de 1 € et 0 sinon.
Y est la variable aléatoire qui vaut 2 si elle obtient Pile avec la pièce de 2 € et 1 sinon.
**a)** Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.
**b)** Recopier ce tableau.
Compléter les pointillés rouges par les valeurs prises par la somme $X + Y$ et les pointillés noirs par les probabilités qui conviennent.

| X \ Y | 1 | 2 |
|---|---|---|
| 0 | … … | … … |
| 1 | … … | … … |

**c)** En déduire la loi de probabilité de $X + Y$.

**21** On lance un dé équilibré à quatre faces numérotées de 1 à 4.
Si l'on obtient un nombre impair, on relance le même dé, sinon on lance un autre dé équilibré à quatre faces numérotées 2, 2, 4 et 4.
X (resp. Y) est la variable aléatoire qui donne le numéro obtenu au 1^er^ (resp. 2^e^) lancer.
**a)** Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.
**b)** Réaliser un tableau croisé, analogue à celui de l'exercice **20**, afin de déterminer $P(\{X = a\} \cap \{Y = b\})$ avec $a \in \{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$, $b \in \{2 ; 4\}$.
**c)** En déduire la loi de probabilité de $X + Y$.

**22** Dans un supermarché, Dimitri prend au hasard une boisson et un sandwich.
X (resp. Y) est la variable aléatoire qui donne le prix, en euro, de la boisson (resp. du sandwich).
Voici les lois de probabilités de X et Y :

| $a$ | 1,5 | 2 | 2,5 |
|---|---|---|---|
| $P(X = a)$ | 0,2 | 0,5 | 0,3 |

| $b$ | 4,5 | 5 | 5,5 |
|---|---|---|---|
| $P(Y = b)$ | 0,4 | 0,4 | 0,2 |

**a)** Représenter cette situation par un arbre pondéré.
Faire figurer à la suite les issues, les valeurs de X, de Y, de $X + Y$ (voir exercice **1**).
**b)** Dans ce contexte, que représente la variable aléatoire $X + Y$ ? Établir la loi de probabilité de $X + Y$.

**23** Esmée lance deux dés équilibrés rouge et vert, à quatre faces numérotées de 1 à 4.
**a)** Représenter cette situation par un arbre pondéré et noter les issues.
**b)** Esmée multiplie le résultat du dé rouge par 2, le résultat du dé vert par 0,5, puis additionne ces deux nombres.
Z est la variable aléatoire qui donne la somme obtenue.
Définir deux variables aléatoires X et Y telles que $Z = X + Y$.
**c)** Compléter l'arbre du **a)** avec les valeurs de X, de Y et de $X + Y$.
**d)** Établir la loi de probabilité de Z.

**24** Anaïs a dans son porte-monnaie trois pièces de 1 € et cinq pièces de 2 €. Elle pioche deux pièces l'une après l'autre, sans remise. Z est la variable aléatoire qui donne la somme des deux montants obtenus.
**a)** Définir deux variables aléatoires X et Y telles que $Z = X + Y$.
**b)** Représenter la situation par un arbre pondéré.
**c)** Établir la loi de probabilité de Z.

**25** Lors d'une opération commerciale dans un magasin, chaque client obtient un numéro au hasard entre 1 et 50. Si le numéro est pair il gagne un bon d'achat de 5 €, et si le numéro est un multiple de 4, il gagne en plus un bon d'achat de 10 €.
Z est la variable aléatoire qui donne le gain total du client.
**a)** Définir deux variables aléatoires X et Y telles que $Z = X + Y$.
**b)** Calculer l'espérance de X et celle de Y.
**c)** En déduire l'espérance de Z.

**26** Ali appelle le service client d'un magasin en ligne. Il devra attendre une première fois avant qu'un agent prenne son appel. Ce premier temps d'attente est modélisé par une variable aléatoire X.
Il devra ensuite attendre une deuxième fois pour que l'agent consulte son dossier. Ce second temps d'attente est modélisé par une variable aléatoire Y.
Voici les lois de probabilités de X et Y, où le temps est exprimé en minute.

| $a$ | 2 | 5 | 7 | 10 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(X = a)$ | 0,1 | 0,22 | 0,28 | 0,25 | 0,15 |

| $b$ | 2 | 4 | 6 | 8 |
|---|---|---|---|---|
| $P(Y = b)$ | 0,6 | 0,25 | 0,11 | 0,04 |

Z est la variable aléatoire qui donne le temps d'attente total.
**a)** Calculer l'espérance de chacune des variables X et Y.
**b)** En déduire l'espérance de Z. Interpréter le résultat.

**27** Après un test, un professeur montre aux élèves de la classe la répartition des notes.

| Note | 4 | 6 | 8 | 9 | 10 | 12 | 13 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Fréquence | 0,05 | 0,05 | 0,1 | 0,25 | 0,2 | 0,2 | 0,1 | 0,05 |

Avant de connaître son résultat, Rayen se demande quelle note elle peut espérer. Elle considère pour cela une variable aléatoire X qui représente sa note, et dont la loi de probabilité est la distribution des notes.
**a)** Calculer l'espérance de X.
**b)** Le professeur dit : « Le test est mal réussi, je vais multiplier toutes les notes par 1,2 ». Quelle est la nouvelle valeur de l'espérance de la note de Rayen ?

**28** Dans un jeu de hasard, on doit lancer un dé équilibré à douze faces numérotées de 1 à 12, puis multiplier le numéro obtenu par 10. On définit ainsi une variable aléatoire Y.
**a)** Définir une variable aléatoire X et un nombre réel $a$ tels que $Y = aX$.
**b)** Calculer l'espérance de X et en déduire celle de Y.

## Variables aléatoires indépendantes

Cours 2

### Questions flash — À l'oral

**29** X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes définies sur un même univers.
Dans chaque cas, calculer mentalement la probabilité de l'événement $\{X = 1\} \cap \{Y = 2\}$.
**a)** $P(X = 1) = \frac{1}{4}$ et $P(Y = 2) = \frac{2}{3}$.
**b)** $P(X = 1) = 0{,}2$ et $P(Y = 2) = 0{,}4$.

**30** X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes définies sur un même univers.
Dans chaque cas, donner $V(X + Y)$.
**a)** $V(X) = 16$ et $V(Y) = 9$ **b)** $V(X) = 3{,}7$ et $V(Y) = 2{,}3$

**31** X est une variable aléatoire.
Dans chaque cas, donner $V(aX)$.
**a)** $V(X) = 10$ et $a = 2$ **b)** $V(X) = 5{,}2$ et $a = -10$

**32** Dans chaque cas, donner oralement l'espérance et la variance de la variable aléatoire X qui suit la loi binominale $\mathcal{B}(n, p)$.
**a)** $n = 5$ et $p = 0{,}2$ **b)** $n = 10$ et $p = 0{,}7$

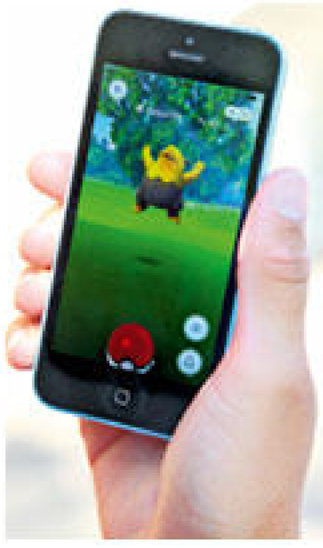
**33** On dispose d'un dé équilibré à quatre faces numérotées de 1 à 4. On lance ce dé deux fois successivement. X est le numéro obtenu au premier lancer, Y le numéro obtenu au second lancer.
**a)** Établir la loi de probabilité de X, puis de Y.
**b)** Dans le tableau croisé ci-contre, on détermine les probabilités des événements $\{X = a\} \cap \{Y = b\}$ avec $1 \leqslant a \leqslant 4$ et $1 \leqslant b \leqslant 4$.
Expliquer la probabilité indiquée dans ce tableau.

| X \ Y | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{1}{16}$ | | | |
| 2 | | | | |
| 3 | | | | |
| 4 | | | | |

**c)** Recopier et compléter ce tableau croisé.

**34** Un sac opaque contient 20 jetons : huit jetons marqués 5, sept jetons marqués 2 et cinq jetons marqués 0. On pioche successivement et avec remise deux jetons dans ce sac.
X est la variable aléatoire qui donne le premier numéro obtenu, et Y celle qui donne le second numéro.
**a)** Établir la loi de probabilité de X, puis de Y.
**b)** Dans un tableau croisé, donner les probabilités des événements $\{X = a\} \cap \{Y = b\}$ pour toutes les valeurs possibles de $a$ et $b$ dans $\{0 ; 2 ; 5\}$.

**35** Elliot joue au jeu Pokémon GO sur son téléphone. Pendant une promenade, il rencontre successivement deux Pokémons, dont les points de combats (PC) sont aléatoires. On admet que chaque Pokémon est indépendant de l'autre et on note X le nombre de PC du premier, Y le nombre de PC du second.



Voici la loi de probabilité des PC (arrondis à la centaine supérieure) d'un Pokémon choisi aléatoirement.

| $a$ | 100 | 200 | 300 | 400 | 500 | 600 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(X=a)$ | 0,4 | 0,25 | 0,15 | 0,1 | 0,07 | 0,03 |

**a)** Que peut-on dire des lois de probabilité de X et de Y ?
**b)** Calculer la variance de X, puis de Y.
**c)** En déduire la variance de $X+Y$.

**36** Le biathlon est une épreuve de sports d'hiver dans laquelle l'athlète alterne entre des courses de ski de fond et des tirs à la carabine. Lors d'un entrainement, une athlète effectue une course de 3 km suivie de 4 tirs. On considère, ici, que chaque tir raté donne une pénalité d'une minute.

X est la variable aléatoire qui donne son temps pour la course, Y celle qui donne son temps de pénalité et Z celle qui donne le temps total. Les temps sont en min.
Voici les lois de probabilité de X et Y.

| $a$ | 7,5 | 8 | 8,5 | 9 | 9,5 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(X=a)$ | 0,03 | 0,1 | 0,5 | 0,2 | 0,1 | 0,07 |

| $b$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(Y=b)$ | 0,6 | 0,2 | 0,1 | 0,05 | 0,05 |

**a)** Calculer les variances de X et Y. *Arrondir au millième.*
**b)** En déduire la variance de Z.

Vidéo

JAICOMPRIS.COM Cet exercice est corrigé en vidéo

**37** Lors d'une partie de Donjons & Dragons, Will doit lancer successivement un dé équilibré à dix faces numérotées de 1 à 10 et un dé équilibré à vingt faces numérotées de 1 à 20. Z est la variable aléatoire qui donne la somme des deux numéros obtenus.
**a)** Définir deux variables aléatoires X et Y telles que $Z=X+Y$.
**b)** Établir la loi de probabilité de X, puis de Y.
**c)** Calculer la variance de X, puis de Y.
**d)** En déduire la variance de Z.

**38** Asia et Gabriel partent à la découverte d'une ville. Ils décident de visiter un musée choisi au hasard, puis de manger dans un restaurant, lui aussi choisi au hasard. Le prix individuel d'entrée, en euro, du musée est représenté par une variable aléatoire X, dont voici la loi de probabilité :

| $a$ | 5 | 8 | 12 | 15 | 19 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(X=a)$ | 0,12 | 0,16 | 0,24 | 0,28 | 0,2 |

Le coût moyen, en euro, d'un repas pour deux dans un restaurant est représenté par une variable aléatoire Y, dont voici la loi de probabilité :

| $b$ | 25 | 30 | 35 | 40 | 50 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(Y=b)$ | 0,15 | 0,25 | 0,27 | 0,23 | 0,1 |

Z est la variable aléatoire qui donne le coût total de la journée, pour ces deux personnes.
**a)** Calculer l'espérance et la variance de X, puis de Y.
**b)** En déduire l'espérance et la variance de Z.

**39** Émeline s'interroge sur la hauteur de précipitations pour un jour du mois de décembre dans sa ville. On représente cette hauteur, en mm, par la variable aléatoire X. Voici la loi de probabilité de X :

| $a$ | 0 | 1 | 3 | 6 | 8 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(X=a)$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{2}{15}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{15}$ |

**a)** Calculer l'espérance et la variance de X.
**b)** Pour comparer avec une amie anglaise, Émeline doit convertir les hauteurs en pouce.
Sachant que 1 cm vaut environ 0,4 pouce, calculer la variance de la hauteur de précipitations en pouce.

**40** Dans un magasin, Adrien prend un bonnet au hasard dans un bac. X est la variable aléatoire qui donne le prix, en euro, de ce bonnet. Voici la loi de probabilité de X.

| $a$ | 5 | 8 | 10 | 15 | 20 | 30 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(X=a)$ | 0,25 | 0,3 | 0,28 | 0,1 | 0,05 | 0,02 |

**a)** Calculer la variance de X.
**b)** Comme on est en période de soldes, une réduction de 20 % est appliquée à la caisse.
Déterminer la variance du prix Y, en euro, payé par Adrien.

**41** On lance 200 fois une pièce équilibrée.
X est le nombre d'apparitions de Pile.
**a)** Quelle est la loi suivie par X ? Préciser ses paramètres.
**b)** Expliquer pourquoi il serait fastidieux de donner la loi de probabilité sous forme de tableau.
**c)** Calculer l'espérance de X. Interpréter le résultat.
**d)** Calculer la variance et l'écart-type de X.

**42** Un amateur de musique a une large bibliothèque musicale qui contient 80 % de titres chantés et 20 % de morceaux instrumentaux. Il écoute 20 morceaux à la suite en mode aléatoire. On considère que ces 20 morceaux sont obtenus par des tirages avec remise. X est la variable aléatoire qui compte le nombre de morceaux chantés.
**a)** Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.
**b)** Calculer l'espérance de X. Interpréter le résultat.
**c)** Calculer la variance et l'écart-type de X.

**43** Dans une grande ville de Chine, les femmes représentent 49 % de la population. Pour un projet scolaire, des élèves interrogent 50 passants dans cette ville.
On peut considérer qu'il s'agit de tirages avec remise.
X est la variable aléatoire qui compte le nombre de femmes interrogées.
**a)** Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.
**b)** Calculer l'espérance de X. Interpréter le résultat.
**c)** Calculer la variance et l'écart-type de X.

**44** Léonard joue au jeu 2048, dans lequel il faut réussir à atteindre ce nombre. Il y parvient 3 fois sur 4.
X est la variable aléatoire qui donne le nombre de réussites en 80 tentatives indépendantes.
**a)** Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.
**b)** Calculer l'espérance de X. Interpréter le résultat.
**c)** Calculer la variance et l'écart-type de X.

## Échantillons d'une loi de probabilité

Cours 3

**Questions flash** À l'oral

**45** X est une variable aléatoire.
Dans chaque cas, calculer mentalement l'espérance, la variance et l'écart-type de la somme $S_n$ d'un échantillon de taille $n$ de la loi de probabilité de X.
**a)** $E(X) = 5$, $V(X) = 25$ et $n = 100$
**b)** $E(X) = 12{,}5$, $V(X) = 9$ et $n = 400$
**c)** $E(X) = 12{,}4$, $V(X) = 45$ et $n = 20$

**46** X est une variable aléatoire dont la variance $V(X)$ est égale à 25. $M_{100}$ est la moyenne d'un échantillon de taille 100 de la loi de probabilité de X.
Dire oralement la bonne réponse.
**a)** $V(M_{100})$ est égale à : **(1)** 25 **(2)** 2,5 **(3)** 0,25
**b)** $\sigma(M_{100})$ est égal à : **(1)** 5 **(2)** 0,5 **(3)** 0,25

**47** Quand elle va au restaurant, Nelly a l'habitude de poster un avis sur un site Internet. X est la variable aléatoire qui donne le nombre d'étoiles qu'elle attribue à un restaurant. En se basant sur les statistiques de ses avis précédents, on a pu établir la loi de probabilité de X.

| $a$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(X = a)$ | 0,03 | 0,12 | 0,2 | 0,35 | 0,3 |

On considère une série de dix futurs avis, que l'on peut considérer comme un échantillon de la loi de X.
**a)** Quelle est la taille de cet échantillon ?
**b)** Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type de X.
**c)** En déduire l'espérance, la variance et l'écart-type de la somme $S_{10}$ des étoiles attribuées pour une telle série.

**48** On lance 20 fois de suite un dé équilibré à huit faces numérotées de 1 à 8. X est la variable aléatoire qui donne le résultat d'un lancer et $S_{20}$ celle qui donne la somme des numéros obtenus pour les 20 lancers.
**a)** Établir la loi de probabilité de X.
**b)** Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type de X.
**c)** En déduire l'espérance, la variance et l'écart-type de la somme $S_{20}$.

**49** Un producteur conditionne 40 mandarines par caisse. Les masses de mandarines, en gramme, sont réparties selon le tableau ci-dessous.

| Masse | 58 | 59 | 60 | 61 | 62 |
|---|---|---|---|---|---|
| Fréquence | 0,15 | 0,20 | 0,25 | 0,21 | 0,19 |

X est la variable aléatoire qui donne la masse d'une mandarine prise au hasard dans le stock.
La quantité produite est assez grande pour considérer qu'une caisse de 40 est un échantillon de taille 40 de la loi de probabilité de X.
**a)** Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type de X.
**b)** En déduire l'espérance, la variance et l'écart-type de la moyenne $M_{40}$.

**50** Dans une région, on a recensé la fréquence du nombre de personnes par foyers. Voici les résultats.

| Nombre | 1 | 2 | 3 | 4 | $\geqslant 5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Fréquence | 0,36 | 0,22 | 0,24 | 0,12 | 0,06 |

X est la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes dans un foyer pris au hasard.
On veut interroger 100 foyers de cette région, que l'on considère comme un échantillon de taille 100 de la loi de probabilité de X.
**a)** Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type de X.
**b)** En déduire l'espérance, la variance et l'écart-type de la moyenne $M_{100}$ pour un tel échantillon.

EXO Exercices interactifs



**51** QCM **Dans chaque cas, donner la réponse exacte sans justifier.**

On lance successivement un dé équilibré à dix faces numérotées de 0 à 9 et un jeton qui porte le numéro 10 d'un côté et 20 de l'autre côté. X est la variable aléatoire qui donne le numéro obtenu avec le dé, Y celle qui donne le numéro obtenu avec le jeton et Z celle qui donne la somme des deux nombres.

| | | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Les variables aléatoires vérifient … | $Z = X + 10Y$ | $Z = X + Y$ | $Z = X \times Y$ | $Z = 10X + Y$ |
| 2 | L'espérance de X est égale à … | 5 | 9 | 4,5 | 45 |
| 3 | L'espérance de Z est égale à … | 19,5 | 15 | 20 | 75 |
| 4 | Les variables aléatoires X et Y … | sont égales à Z | ont la même loi de probabilité | ne sont pas indépendantes | sont indépendantes |
| 5 | L'écart-type de Z est … | environ 4,42 | environ 5,77 | 25 | 40 |

**52** QCM **Dans chaque cas, donner la (ou les) réponse(s) exacte(s) sans justifier.**

Deux sacs contiennent des papiers numérotés de 0 à 9. On tire indépendamment un papier de chaque sac. X (resp. Y) est la variable aléatoire qui donne le numéro tiré du premier (resp. second) sac.

| | | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $E(X + 3Y)$ est égal à … | $E(X) + E(3Y)$ | $4E(X)$ | $E(X) + 3E(Y)$ | $3E(X + Y)$ |
| 2 | $\sigma(X + Y)$ est égal à … | $\sigma(X) + \sigma(Y)$ | $\sqrt{V(X+Y)}$ | $\sqrt{V(X) + V(Y)}$ | $\sqrt{\sigma^2(X) + \sigma^2(Y)}$ |
| 3 | $V(2X + 0{,}5Y)$ est égal à … | $V(X) + V(Y)$ | $2{,}5[V(X) + V(Y)]$ | $4V(X) + 0{,}25V(Y)$ | $2V(X) + 0{,}5V(Y)$ |
| 4 | Si $V(X) = V(Y)$, alors … | $V(X + Y) = 2V(X)$ | $V(X + Y) = V(X)^2$ | $\sigma(X + Y) = 2\,\sigma(X)$ | $\sigma(X + Y) = \sqrt{2}\sigma(X)$ |

**53** Vrai/Faux **Dans chaque cas, dire si l'affirmation est vraie ou fausse en justifiant.**

**1** On lance deux fois successivement un dé équilibré à six faces numérotées de 1 à 6.
Z est la somme des numéros obtenus.
**Affirmation** : $P(Z = 10) = \frac{1}{18}$.

**2** On reprend la situation de la question **1**. X est le résultat obtenu au premier lancer, Y celui du second lancer.
**Affirmation** : $P(\{X = 4\} \cap \{Y = 6\}) = \frac{1}{36}$.

**3** On considère un schéma de Bernoulli avec 12 épreuves pour lesquelles 0,3 est la probabilité de succès.
X compte le nombre de succès.
**Affirmation** : l'espérance de X est $E(X) = 3{,}6$.

**4** On constitue un échantillon de taille 50 d'une variable aléatoire X.
**Affirmation** : l'écart-type de la somme $S_{50}$ est égal à $7\sigma(X)$.

Vérifiez vos réponses : p. 529

## 54 Découvrir un autre cas

Z est une variable aléatoire définie sur un univers E.
Dire que Z est constante signifie que pour toute issue de l'expérience aléatoire, Z prend une même valeur réelle $b$. Sa loi de probabilité est alors $P(Z = b) = 1$.

> X est une variable aléatoire sur un univers E et $a$ désigne un nombre réel.
> On multiplie chaque valeur de X par $a$ et on ajoute $b$ au produit. La variable aléatoire qui prend ces nouvelles valeurs est la variable aléatoire $aX + Z$.
> Le plus souvent, par abus d'écriture, on note cette variable aléatoire $aX + b$.

On se propose de déterminer l'espérance E(Y) et la variance V(Y).

Rédiger la démonstration en suivant le guide ci-dessous.

**(1)** Déterminer E(Z) et V(Z) : $E(Z) = \ldots \times b = \ldots$ et $V(Z) = \ldots \times (b - \ldots)^2 = \ldots$
**(2)** Appliquer les formules du cours pour $aX$ : $E(aX) = \ldots$ et $V(aX) = \ldots$
**(3)** Tirer des conséquences pour Y : $E(Y) = E(aX + Z) = \ldots + \ldots = \ldots$
Les variables $aX$ et Z sont … donc $V(Y) = V(aX + Z) = \ldots + \ldots = \ldots\, V(X)$
**(4)** Conclure par une phrase.

## 55 Démontrer la formule E(X + Y) = E(X) + E(Y) dans un cas particulier

X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes définies sur un même univers.
X prend les valeurs $a_1$, $a_2$ et $a_3$, Y prend les valeurs $b_1$ et $b_2$.
Voici les lois de probabilité de X et de Y.

| $a$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ |
|---|---|---|---|
| $P(X = a)$ | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ |

| $b$ | $b_1$ | $b_2$ |
|---|---|---|
| $P(Y = b)$ | $q_1$ | $q_2$ |

Voici la démonstration de la formule $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ dans ce cas particulier.

Voici la loi de probabilité de la variable aléatoire X + Y :

| $c$ | $a_1 + b_1$ | $a_2 + b_1$ | $a_3 + b_1$ | $a_1 + b_2$ | $a_2 + b_2$ | $a_3 + b_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(X + Y) = c$ | $p_1q_1$ | $p_2q_1$ | $p_3q_1$ | $p_1q_2$ | $p_2q_2$ | $p_3q_2$ |

$$E(X+Y) = \sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{j=1}^{2}(a_i + b_j)p_iq_j\right) = \sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{j=1}^{2}(a_ip_iq_j + b_jp_iq_j)\right)$$

$$E(X+Y) = \sum_{i=1}^{3}\left(a_ip_i\sum_{j=1}^{2}q_j + p_i\sum_{j=1}^{2}b_jq_j\right) = \sum_{i=1}^{3}(a_ip_i + p_iE(Y))$$

$$E(X+Y) = \sum_{i=1}^{3}a_ip_i + E(Y)\sum_{i=1}^{3}p_i = E(X) + E(Y)$$

**a)** Justifier la loi de probabilité de X + Y.
**b)** Expliquer chacune des expressions écrites en vert.

## 56 Comprendre une erreur courante

**Énoncé** : X est une variable aléatoire telle que $V(X) = 20{,}25$. Déterminer la variance de 2X.
Voici la réponse de Jara :

$2X = X + X$ donc $V(X + X) = V(X) + V(X) = 40{,}5$.

**a)** Trouver l'erreur dans ce raisonnement.
**b)** Déterminer la valeur correcte de la variance de la variable aléatoire 2X.

Vidéo
JAICOMPRIS.COM
Toutes les démonstrations au programme en vidéo

Liste des démonstrations :
- Espérance et variance de la loi binomiale.

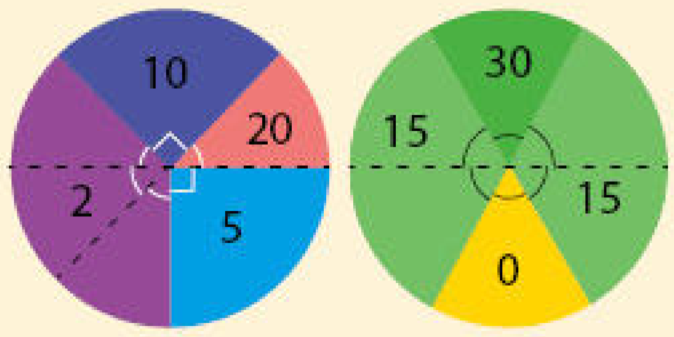
**Conseil**
- Écrire $\sum_{j=1}^{2}(a_i + b_j)p_iq_j$ sans sigma, puis de même pour $\sum_{i=1}^{3}(\ldots)$.
- Exprimer E(X + Y) sans utiliser sigma et comparer les réponses.

## Additionner deux variables aléatoires. Utiliser l'indépendance

**57** **PARCOURS DIFFÉRENCIÉS**

**Parcours 1**

Dans une fête foraine, un jeu consiste à faire tourner les deux roues ci-contre. On gagne un nombre de tickets égal à la somme des nombres obtenus, qui est représenté par la variable aléatoire Z.




Calculer l'espérance et la variance de Z.

**Parcours 2**

Dans un jeu de hasard, un palet tombe au hasard sur un numéro de la bande du haut, puis sur un numéro de la bande du bas.

Z donne la somme des deux numéros obtenus.

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 2 | 2 | 5 | 10 | 20 | 10 | 5 | 2 | 2 | 0 | 0 |

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 5 | 5 | 25 | 25 | 5 | 5 | 0 | 0 | 0 |

**a)** Définir deux variables aléatoires X et Y telles que $Z = X + Y$. Établir les lois de probabilités de X et Y.

**b)** Calculer l'espérance et la variance de X, puis de Y.

**c)** En déduire l'espérance et la variance de Z.

**58** À l'approche des fêtes de fin d'année, un confiseur propose à ses clients de constituer des lots personnalisés contenant des pralines au chocolat au lait (A) et au chocolat noir (N).

Pendant la saison 2019, il a relevé les nombres de chocolats de chaque type choisis par 50 clients pris au hasard.

| A \ N | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 40 | 1 | 2 | 0 | 1 | 0 | |
| 50 | 3 | 4 | 5 | 3 | 2 | |
| 60 | 3 | 4 | 2 | 6 | 5 | |
| 70 | 2 | 1 | 3 | 2 | 1 | |
| Total | | | | | | |

Le confiseur utilise ces statistiques pour anticiper les ventes de la nouvelle saison.

X (resp. Y) est la variable aléatoire qui donne le nombre de pralines au chocolat au lait (resp. chocolat noir).

**a)** Recopier et compléter le tableau. En déduire la loi de probabilité de X, puis de Y. Calculer E(X) et E(Y).

**b)** En déduire l'espérance du nombre de total de pralines achetées par les clients.

**59** Chaque soir, Olga communique avec ses amis par mail et par SMS. Le nombre de mails qu'elle peut recevoir en une heure est modélisé par une variable aléatoire X telle que pour tout entier naturel $k$, avec $1 \leqslant k \leqslant 12$, la probabilité qu'elle reçoive $k$ appels est :

$$P(X = k) = \frac{6^k}{k!}e^{-6}.$$

On néglige les probabilités des autres nombres d'appels.

De même, le nombre de SMS qu'elle peut recevoir en une heure est modélisé par une variable aléatoire X telle que pour tout entier naturel $m$, avec $3 \leqslant m \leqslant 18$, la probabilité qu'elle reçoive $m$ SMS est :

$$P(Y = m) = \frac{10^m}{m!}e^{-10}.$$

On néglige les probabilités des autres nombres de SMS.

On admet que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

**a)** Établir la loi de probabilité de X, puis de Y. *Arrondir au millième.*

**b)** Calculer la probabilité qu'Olga reçoive exactement 5 appels et 10 SMS.

**c)** Calculer la probabilité qu'elle reçoive exactement quatre fois plus de SMS que d'appels.

**d)** Z est la variable aléatoire qui compte le nombre total de communications, appels ou SMS, qu'elle reçoit en une heure. Calculer l'espérance et la variance de Z. *Arrondir à l'unité.*

**60** Alina joue à un jeu d'énigmes en ligne.

Chaque énigme est indépendante des autres et, pour chaque énigme, la probabilité qu'Alina la résolve est 0,8. Elle joue tant qu'elle résout les énigmes, avec un maximum de 4 énigmes.

**1.** X est la variable aléatoire qui compte le nombre d'énigmes résolues.

**a)** Représenter la situation par un arbre pondéré.

**b)** Déterminer la loi de probabilité de X.

**c)** Calculer l'espérance et la variance de X.

> **Info** : Dans ce cas, on dit que la variable aléatoire X suit une loi géométrique tronquée de paramètres $n = 4$ et $p = 0{,}8$.

**2.** Alina joue deux jours de suite, selon le principe indiqué ci-dessus. Z est la variable aléatoire qui donne le nombre d'énigmes résolues au cours de ces deux jours.

**a)** Définir deux variables aléatoires indépendantes X et Y telles que $Z = X + Y$.

**b)** Préciser la loi de probabilité de X, puis de Y.

**c)** Déterminer l'espérance et la variance de Z. *Arrondir au centième.*

**61** Alexandre affirme : « Quand on lance une fois un dé équilibré à quatre faces numérotées de 0 à 3, l'espérance et la variance du numéro obtenu sont les mêmes que si on lance trois fois une pièce de monnaie équilibrée et qu'on compte le nombre de succès ».
Pour vérifier cette affirmation, on considère deux variables aléatoires X et Y qui correspondent respectivement à ces deux expériences aléatoires.
**a)** Déterminer la loi de probabilité de X.
**b)** Calculer l'espérance et la variance de X.
**c)** Quelle est la loi de probabilité de Y ?
**d)** Calculer l'espérance et la variance de Y.
**e)** L'affirmation d'Alexandre est-elle exacte ?

**62** Une urne contient deux boules rouges et une boule jaune. On tire une boule de l'urne : le gain est de 10 € si la boule est rouge, 20 € si elle est jaune.
On réalise 10 tirages successifs avec remise.
On note X la variable aléatoire égale au gain obtenu à l'issue des 10 tirages.
On se propose de déterminer E(X) de deux manières différentes.

**1. Première méthode**
Pour tout entier $i$ tel que $1 \leqslant i \leqslant 10$, $X_i$ est la variable aléatoire égale au gain lors du $i$-ième tirage.
**a)** Calculer $E(X_i)$ pour $1 \leqslant i \leqslant 10$.
**b)** Exprimer la variable aléatoire X en fonction des $X_i$ et en déduire la valeur de E(X).

**2. Deuxième méthode**
Y est la variable aléatoire égale au nombre de boules jaunes tirées.
**a)** Justifier que $X = 10Y + 100$.
**b)** Calculer E(Y).
**c)** En déduire la valeur de E(X).

**63** Véronique joue à deux jeux d'argent dans un casino. Pour l'un de ces jeux, la probabilité de gagner une partie est 0,4, et pour chaque partie gagnée elle remporte 5 €. Pour l'autre jeu, la probabilité de gagner une partie est 0,2, et pour chaque partie gagnée elle remporte 20 €.
Z est la variable aléatoire qui donne le montant total gagné pour 10 parties du premier jeu et 8 parties du second jeu.
**a)** Définir deux variables aléatoires indépendantes X et Y telles que $Z = 5X + 20Y$.
**b)** Préciser la loi de probabilité de X, puis de Y.
**c)** En déduire l'espérance et la variance de X, puis de Y.
**d)** Calculer l'espérance et la variance de Z.

## Utiliser des échantillons d'une variable aléatoire

**64** **PARCOURS DIFFÉRENCIÉS**

**Parcours 1**

Cyprien a acheté un dé truqué, pour lequel les probabilités d'obtention des faces sont données ci-dessous.

| Face | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Probabilité | 0,04 | 0,08 | 0,08 | 0,2 | 0,2 | 0,4 |

Afin de tester le dé, il envisage de le lancer 100 fois.
$M_{100}$ est la variable aléatoire qui donne la moyenne des numéros obtenus pour 100 lancers.
Déterminer l'espérance et l'écart-type de $M_{100}$.

**Parcours 2**

Une fonction Python renvoie un nombre entier aléatoire selon les probabilités ci-dessous :

| Nombre | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Probabilité | 0,35 | 0,25 | 0,15 | 0,15 | 0,1 |

Pour tester cette fonction, on l'exécute 200 fois.
$M_{200}$ est la variable aléatoire qui donne la moyenne des numéros obtenus pour 200 exécutions.
**a)** Définir une variable aléatoire X telle que :
$M_{200} = \dfrac{1}{200}(X_1 + X_2 + \ldots + X_{200})$ où $(X_1\,;\ldots\,;X_{200})$ est un échantillon de la loi de probabilité de X.
**b)** Déterminer l'espérance et l'écart-type de X.
**c)** En déduire l'espérance et l'écart-type de $M_{200}$.

**65** Un service de streaming musical offre un catalogue de plusieurs millions de titres.
Les durées, arrondies à la minute entière, de ces titres sont réparties selon la distribution ci-dessous.

| Durée | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Fréquence | 0,12 | 0,43 | 0,18 | 0,13 | 0,09 | 0,05 |

**1.** X est la variable aléatoire qui donne la durée d'un titre pris au hasard dans ce catalogue. Calculer E(X) et $\sigma(X)$.
**2.** Calculer l'espérance et l'écart-type de la durée totale d'une playlist de 20 titres, dont certains peuvent se répéter.
**3.** On considère une playlist aléatoire de $n$ titres qui autorise les répétitions. $S_n$ est la variable aléatoire qui donne la durée totale d'une telle playlist.
**a)** Dans un repère, représenter graphiquement $E(S_n)$ en fonction de $n$. De quel type de relation s'agit-il ?
**b)** Dans un autre repère, représenter graphiquement $\sigma(S_n)$ en fonction de $n$. De quel type de relation s'agit-il ?

**66** Anissa est abonnée à un magazine. Chaque numéro contient 40 pages, et elle a remarqué que la probabilité qu'une page contienne un encart publicitaire est 0,2.
On admet que chaque page est indépendante des autres et on définit la variable aléatoire X qui compte le nombre total de pages contenant un encart publicitaire dans un numéro de ce magazine.
**a)** Quelle est la loi de probabilité suivie par X ?
**b)** Calculer la probabilité qu'un numéro ait exactement 10 pages avec un encart publicitaire.
**c)** Calculer la probabilité que, pour un numéro donné, au moins un quart des pages contient un encart publicitaire.
**d)** Calculer l'espérance et l'écart-type de X.
**e)** Anissa reçoit 52 numéros de ce magazine en une année. On admet que ces numéros sont, en ce qui concerne les pages publicitaires, indépendants les uns des autres. Déterminer l'espérance et l'écart-type du nombre total de pages publicitaires sur un tel ensemble de 52 numéros.

Vidéo

JaiCompris.com Cet exercice est corrigé en vidéo

**67** Chaque jour de la semaine, Jochen prend le train pour se rendre sur son lieu de travail.
Des études statistiques ont montré que, pour un jour donné, la probabilité que le train arrive avec 2 min de retard est égale à la probabilité qu'il arrive à l'heure, et au double de la probabilité qu'il arrive avec 5 min de retard.
On considère qu'il n'y a pas d'autres cas possibles.
X est la variable aléatoire qui donne le temps de retard pour un jour donné.
**a)** Quelle est la loi de probabilité suivie par X ?
**b)** Calculer l'espérance et l'écart-type de X.
**c)** Jochen prend le train 20 jours dans un mois.
Déterminer l'espérance et l'écart-type de son retard moyen par jour sur une telle série de 20 jours.

**68** On dispose d'une urne qui contient 10 boules indiscernables au toucher : cinq boules vertes, trois boules rouges et deux boules noires.
On pioche simultanément 3 boules de cette urne. X est la variable aléatoire qui donne la valeur absolue de la différence entre le nombre de boules rouges et le nombre de boules vertes obtenues lors du tirage.
**a)** Calculer la probabilité de l'événement $\{X = 0\}$, puis celle de l'événement $\{X = 1\}$.
**b)** Établir la loi de probabilité de X.
**c)** Calculer l'espérance et l'écart-type de X. Interpréter l'espérance.
**d)** On répète cette expérience 100 fois, en replaçant toutes les boules dans l'urne entre chaque répétition. Déterminer l'espérance et l'écart-type de la différence moyenne entre le nombre de boules rouges et le nombre de boules vertes.

## S'entraîner à la logique → p. 525

**69 Repérer et vérifier des implications réciproques**

Voici plusieurs implications, où X, Y et Z sont des variables aléatoires définies sur un même univers.
**A** : Si $Z = X + Y$, alors $E(Z) = E(X) + E(Y)$.
**B** : Si $Z = X + Y$, alors $V(Z) = V(X) + V(Y)$.
**C** : Si $E(Z) = E(X) + E(Y)$, alors $V(Z) = V(X) + V(Y)$.
**D** : Si $V(Z) = V(X) + V(Y)$, alors $E(Z) = E(X) + E(Y)$.
**E** : Si $E(Z) = E(X) + E(Y)$, alors $Z = X + Y$.
**F** : Si $V(Z) = V(X) + V(Z)$, alors $Z = X + Y$.
**a)** Associer par deux les implications qui sont réciproques l'une de l'autre.
**b)** Lesquelles, parmi ces implications, sont vraies ?

**70 Contre-exemple**

Pour chacune des affirmations ci-dessous, justifier qu'elle est fausse à l'aide d'un contre-exemple ou d'une propriété du cours.
**a)** Si X est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale, alors la variable aléatoire 2X suit une loi binomiale.
**b)** Quand on augmente la taille d'un échantillon d'une loi de probabilité, on ne modifie pas l'écart-type de la somme de cet échantillon.
**c)** Quand on augmente la taille d'un échantillon d'une loi de probabilité, on augmente l'écart-type de la moyenne de cet échantillon.

## 71 ÉCHANTILLONS DE LANCERS

Tice

**Objectif**
Observer l'impact de l'augmentation de la taille d'un échantillon.

On dispose d'un dé équilibré à six faces numérotées de 1 à 6 et on s'intéresse à l'expérience aléatoire qui consiste à le lancer et à noter le numéro obtenu.

### 1. Simuler des échantillons de taille 10

Dans la feuille de calcul ci-dessous, on a simulé 50 échantillons de 10 lancers et calculé dans chaque cas la moyenne des numéros obtenus sur ces 10 lancers.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | P | Q | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **Échantillon** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** | **11** | **12** | **13** | **14** | **15** | **16** | **17** | **18** | **19** | **20** | **21** | **22** | **23** | **24** | **25** |
| 2 | **Lancer 1** | 3 | 5 | 3 | 5 | 5 | 2 | 4 | 5 | 1 | 6 | 2 | 2 | 5 | 4 | 4 | 5 | 1 | 3 | 1 | 1 | 5 | 5 | 2 | 1 | 4 |
| 3 | **Lancer 2** | 1 | 5 | 3 | 2 | 6 | 1 | 3 | 4 | 2 | 4 | 4 | 6 | 6 | 1 | 3 | 6 | 4 | 1 | 6 | 3 | 5 | 4 | 6 | 5 | 3 |
| 4 | **Lancer 3** | 4 | 6 | 1 | 2 | 6 | 3 | 4 | 2 | 5 | 5 | 1 | 3 | 4 | 6 | 5 | 3 | 4 | 2 | 1 | 4 | 5 | 4 | 6 | 4 | 1 |
| 5 | **Lancer 4** | 6 | 6 | 6 | 5 | 3 | 1 | 2 | 4 | 3 | 4 | 3 | 6 | 2 | 6 | 4 | 2 | 1 | 3 | 4 | 6 | 2 | 3 | 2 | 6 | 5 |
| 6 | **Lancer 5** | 6 | 3 | 2 | 3 | 5 | 4 | 4 | 3 | 2 | 6 | 3 | 2 | 5 | 6 | 4 | 4 | 3 | 3 | 5 | 1 | 6 | 4 | 1 | 6 | 6 |
| 7 | **Lancer 6** | 1 | 5 | 4 | 3 | 6 | 2 | 6 | 3 | 2 | 2 | 1 | 2 | 6 | 4 | 5 | 4 | 2 | 3 | 6 | 1 | 1 | 2 | 2 | 4 | 3 |
| 8 | **Lancer 7** | 5 | 2 | 6 | 1 | 6 | 6 | 2 | 2 | 6 | 5 | 6 | 4 | 1 | 4 | 1 | 4 | 6 | 3 | 4 | 2 | 5 | 6 | 5 | 4 | 5 |
| 9 | **Lancer 8** | 6 | 2 | 3 | 5 | 6 | 6 | 1 | 2 | 2 | 1 | 5 | 4 | 5 | 5 | 4 | 2 | 6 | 5 | 6 | 3 | 2 | 6 | 4 | 3 | 6 |
| 10 | **Lancer 9** | 3 | 3 | 1 | 6 | 2 | 3 | 2 | 4 | 1 | 2 | 6 | 3 | 3 | 6 | 3 | 2 | 6 | 3 | 4 | 2 | 2 | 2 | 4 | 6 | 4 |
| 11 | **Lancer 10** | 6 | 2 | 6 | 1 | 4 | 6 | 4 | 5 | 3 | 1 | 2 | 5 | 4 | 6 | 6 | 6 | 3 | 6 | 1 | 3 | 4 | 1 | 4 | 2 | 5 |
| 12 | **Moyenne** | 4,1 | 3,9 | 3,5 | 3,3 | 4,9 | 3,4 | 3,2 | 3,4 | 2,7 | 3,6 | 3,3 | 3,7 | 4,1 | 4,8 | 3,9 | 3,8 | 3,6 | 3,2 | 3,8 | 2,6 | 3,7 | 3,7 | 3,6 | 4,1 | 4,2 |
| 13 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 14 | **Moyenne des moyennes** | | | | | 3,62 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 15 | **Écart-type des moyennes** | | | | | 0,50 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

**a)** Réaliser cette feuille de calcul.

Pour cela :

- dans la plage B1 : AY1, saisir les entiers de 1 à 50 ;
- dans la cellule B2, saisir =ALEA.ENTRE.BORNES(1;6), puis recopier jusqu'à la ligne 11 et jusqu'à la colonne AY ;
- dans la cellule B12, saisir =MOYENNE(B2:B11) et recopier vers la droite ;
- dans la cellule F14, saisir =MOYENNE(B12:AY12) et dans la cellule F15, saisir =ECARTYPEP(B12:AY12).

**b)** Réinitialiser plusieurs fois cette feuille de calcul avec la touche F9. Commenter les valeurs obtenues dans les cellules F14 et F15.

### 2. Des échantillons de taille 100, de taille 1 000

**a)** Modifier la feuille de calcul afin d'obtenir 50 échantillons de taille 100.
Réinitialiser la feuille à plusieurs reprises et commenter les valeurs affichées pour la moyenne et l'écart-type des moyennes.

**b)** Modifier la feuille de calcul afin d'obtenir 50 échantillons de taille 1 000.
Réinitialiser la feuille et commenter les valeurs affichées pour la moyenne et l'écart-type des moyennes.

### 3. Comprendre les propriétés observées

**a)** X est la variable aléatoire qui donne le numéro obtenu en lançant le dé.
Retrouver l'espérance et l'écart-type de X.

**b)** $M_{10}$ est la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille 10 de la loi de probabilité de X.
Déterminer les valeurs de l'espérance et de l'écart-type de $M_{10}$.

**c)** De même, déterminer les valeurs de l'espérance et de l'écart-type des variables aléatoires $M_{100}$ et $M_{1\,000}$, moyennes d'échantillons de taille 100 et 1 000.

**d)** Comparer les résultats théoriques à ceux obtenus avec les simulations.

## 72 LA LOI DES SÉRIES

Algo python

**Objectif**
Étudier une somme de variables aléatoires indépendantes.

On lance $n$ fois une pièce de monnaie équilibrée. Une série est une suite ininterrompue de Pile ou de Face. Par exemple, la liste de lancers F F P F F F P F P P P est constituée de six séries de longueurs respectives 2, 1, 3, 1, 1, 3.
On se propose d'étudier l'espérance du nombre de séries dans une liste de $n$ lancers.

### 1. Simulation de 10 lancers avec Python

La fonction ci-contre est écrite en langage Python.
Elle simule 10 lancers de la pièce de monnaie et renvoie pour résultat le nombre de séries.

```
1  from random import *
2
3  def Series():
4      s=1
5      p=int(random()+0.5)
6      for i in range(9):
7          r=int(random()+0.5)
8          if r!=p:
9              s=s+1
10         p=r
11     return s
```

**a)** Expliquer les formules des lignes 5 et 7.
**b)** Exécuter ce programme à la main et compléter un tableau de suivi des valeurs successives des variables $s$, $p$ et $r$.
**c)** Que représente la variable $s$ ? Pourquoi est-elle initialisée à 1 et non à 0 ?
**d)** Saisir et exécuter ce programme. Noter le résultat affiché.
**e)** Écrire une nouvelle fonction en langage Python qui simule 1 000 répétitions de 10 lancers et calcule la moyenne du nombre de séries sur ces 1 000 répétitions.
Conjecturer alors l'espérance du nombre de séries en 10 lancers.

### 2. Étude théorique pour des séries de 10 lancers

On considère une suite de 10 lancers.
Pour tout entier naturel $i$ avec $2 \leqslant i \leqslant 10$, $X_i$ est la variable aléatoire égale à 1 si l'issue du $i$-ième lancer est différente du précédent et à 0 sinon.
$S_{10}$ est la variable aléatoire qui compte le nombre de séries sur ces 10 lancers.
**a)** Quelle est la loi suivie par chacune des variables aléatoires $X_i$ ?
**b)** Calculer l'espérance de chacune des variables aléatoires $X_i$.
**c)** Justifier que $S_{10} = 1 + X_2 + \ldots + X_{10}$.
**d)** En déduire la valeur de l'espérance de $S_{10}$.

### 3. Cas général

On considère maintenant une suite de $n$ lancers.
On reprend les notations de la question précédente, avec $S_n$ la variable aléatoire qui compte le nombre de séries sur ces $n$ lancers.
**a)** Modifier la fonction écrite en langage Python de la question **1. e)** pour simuler 1 000 répétitions de $n$ lancers, où le nombre $n$ est donné en paramètre.
**b)** En exécutant plusieurs fois la nouvelle fonction, conjecturer l'expression de l'espérance du nombre de séries pour $n$ lancers, en fonction de $n$.
**c)** Démontrer cette conjecture en s'inspirant de la démonstration dans le cas de 10 lancers.

## 73 Calculer de deux façons

Narration de recherche

Calculer | Communiquer

**Rédiger les différentes étapes de la recherche, sans omettre les fausses pistes et les changements de méthode.**

**Problème**

X et Y sont deux variables aléatoires définies sur un même univers qui prennent les valeurs entières de 1 à 10, de façon équiprobable.

Déterminer l'espérance de la variable somme $X + Y$ de deux façons : à partir des espérances de X et Y, puis à partir de la loi de probabilité de $X + Y$.

## 74 Prendre des initiatives

Modéliser | Raisonner | Calculer

Aaron s'entraîne à faire des Speed Runs des deux premiers niveaux d'un jeu vidéo, c'est-à-dire qu'il essaie de réussir ces niveaux le plus rapidement possible.

Voici la loi de probabilité du temps, en minute, pour le premier niveau.

| Temps | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Probabilité | 0,12 | 0,15 | 0,25 | 0,28 | 0,2 |

Quelle doit être l'espérance du temps du deuxième niveau pour qu'il puisse espérer faire mieux que le record mondial, qui est de 7 min ?

## 75 Étudier une somme

Modéliser | Calculer

Le bilan financier quotidien d'un commerçant, en centaine d'euros, est donné dans le tableau ci-dessous.

| Montant | 3 | 4 | 5 | 7 | 9 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Probabilité | 0,13 | 0,18 | 0,18 | 0,19 | 0,17 | 0,15 |

On suppose que chaque jour est indépendant des autres. Au bout de combien de jours le commerçant peut-il espérer avoir réalisé un bilan total supérieur à 10 000 € ?

## 76 Modifier un écart-type

Problème ouvert

Modéliser | Calculer

Un institut de sondage prévoit de réaliser une enquête avant une élection, pour estimer le pourcentage de la population qui envisage de voter pour un certain candidat. On suppose que ce pourcentage, inconnu, est en fait égal à 52 %.

**a)** Calculer l'écart-type pour les échantillons de taille 1 000.

**b)** Comment faut-il modifier la taille de l'échantillon pour diviser l'écart-type par 2 ?

## 77 Algo python Écrire un programme

Raisonner | Communiquer

X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes dont les lois de probabilité sont connues.

Écrire une fonction en langage Python qui calcule la probabilité de l'événement $\{X = a\} \cap \{Y = b\}$ pour toutes les valeurs $a$ et $b$ prises respectivement par X et Y.

## 78 Estimate a probability distribution

Raisonner | Calculer | Communiquer

A six-sided die is loaded: the numbers 2, 3, 4, 5 appear with the usual probability, but the probabilities of numbers 1 and 6 are different.

Megan has done many series of 100 throws and computed the sum of the numbers obtained. She noticed that the sum is usually close to $\frac{1\,100}{3}$.

Use that information to estimate the probability distribution of this loaded die.

## 79 Résoudre le problème des chapeaux

Modéliser | Raisonner | Calculer

$n$ personnes mélangent leurs $n$ chapeaux (avec $n$ nombre entier naturel, $n \geqslant 2$).

On s'intéresse à l'espérance du nombre de personnes retrouvant leur chapeau s'ils les reprennent au hasard.

Pour cela, on numérote les personnes de 1 à $n$.

Pour tout entier naturel $i$ tel que $1 \leqslant i \leqslant n$, $X_i$ est la variable aléatoire égale à 1 si la personne retrouve son chapeau et à 0 sinon.

**a)** Déterminer la loi de probabilité des variables $X_i$, puis calculer leur espérance.

**b)** En déduire la réponse au problème posé.

## 80 Imaginer une stratégie

Raisonner | Communiquer

Voici la loi de probabilité du gain X obtenu, en euro, avec un jeu d'argent à gratter.

| Montant | 0 | 1 | 2 | 5 | 20 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Probabilité | 0,5 | 0,3 | 0,175 | 0,015 | 0,009 | 0,001 |

Un joueur régulier a remarqué que, pour des séries de 5 tickets à gratter indépendants, l'écart-type du gain moyen dépasse 1,50 €.

Quel devrait être le nombre de tickets pour que l'écart-type du gain moyen soit inférieur à 0,10 € ?

## 81 Étudier un temps de trajet

40 min

*D'après Bac, Antilles-Guyane 2017*

Romane utilise deux modes de déplacement pour se déplacer entre son domicile et son lieu de travail : le vélo ou les transports en commun.

**Partie A : choisir un mode de transport**

- Lorsque la journée est ensoleillée, Romane se déplace en vélo 9 fois sur 10.
- Lorsque la journée n'est pas ensoleillée, elle se déplace en vélo 6 fois sur 10.

La probabilité qu'une journée soit ensoleillée, dans la ville où habite Romane, est notée $p$.

Pour une journée donnée, on note :

- E l'évènement : « La journée est ensoleillée » ;
- V l'évènement : « Romane se déplace en vélo ».

**1.** Construire l'arbre pondéré représentant la situation.

**2.** Montrer que la probabilité que Romane se déplace en vélo lors d'une journée donnée est :

$$P(V) = 0{,}3p + 0{,}6.$$

**3.** On constate que dans 67,5 % des cas, c'est en vélo que Romane se déplace entre son domicile et son lieu de travail.

**a)** En déduire la valeur de $p$.

**b)** Sachant que Romane s'est déplacée en vélo, montrer que la probabilité que la journée soit ensoleillée est $\frac{1}{3}$.

**Guide de résolution**
**1.** Dans l'arbre pondéré, on inscrit la probabilité inconnue $p$ que la journée soit ensoleillée, et la probabilité $1 - p$ de l'événement contraire.

**Guide de résolution**
**3. b)** On doit calculer une probabilité conditionnelle, en utilisant la définition vue en Première.

**Partie B : calculer l'espérance et la variance du temps de trajet**

Quand Romane se déplace en vélo, son trajet est composé de deux parties indépendantes :

- une première partie sur une voie verte, qu'elle parcourt généralement sans interruption ;
- une seconde partie sur des pistes cyclables citadines, avec des feux et des croisements de routes.

X est la variable aléatoire qui donne la durée, en minute, de la première partie d'un trajet.

Y est celle qui donne la durée, en minute, de la seconde partie.

**1.** Voici la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

| $a$ | 7 | 7,25 | 7,5 | 7,75 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(X = a)$ | 0,23 | $p_1$ | 0,21 | 0,14 | $p_2$ |

**a)** La probabilité que cette partie du trajet dure 7,25 min est deux fois plus élevée que la probabilité qu'elle dure 8 min.

En déduire les valeurs des probabilités $p_1$ et $p_2$.

**b)** Calculer l'espérance et la variance de X.

**Guide de résolution**
**1. a)** La somme des probabilités est toujours égale à 1.

**2.** L'espérance et la variance de Y sont respectivement :

$$E(Y) = 5{,}3 \text{ et } V(Y) \approx 0{,}42.$$

En déduire l'espérance et la variance du temps de trajet total.

## 82 Travailler avec plusieurs variables aléatoires discrètes

40 min

*D'après Bac, Antilles-Guyane 2019*

Une grande enseigne décide d'organiser dans ses magasins un jeu permettant de gagner un bon d'achat. Le jeu se déroule en deux étapes.

- **Étape 1**

Chaque client tire au hasard une carte sur laquelle figure un nombre de 1 à 50, chaque numéro ayant la même probabilité d'être découvert.

- **Étape 2**

– Si le client découvre un numéro compris entre 1 et 15, il fait tourner une roue divisée en 10 secteurs de même taille dont 8 secteurs contiennent une étoile.
– Sinon, il fait tourner une autre roue divisée elle aussi en 10 secteurs de même taille dont un seul secteur contient une étoile.

Un bon d'achat est gagné par le client si la roue qu'il a fait tourner s'arrête sur une étoile.

### Partie A : vérifier un budget

Dans un premier temps, on peut gagner des bons d'achats de 10 €.
Pour ce jeu, le directeur de l'hypermarché a prévu un budget de 250 € par tranche de 100 clients y participant.
Pour vérifier que son budget est suffisant, il simule 100 répétitions indépendantes du jeu.
On appelle X la variable aléatoire qui, à 100 jeux simulés, associe le nombre de bons d'achat gagnés.
On admet que X suit une loi binomiale.

**1.** Préciser les paramètres de X.
**2.** Calculer la probabilité pour qu'il y ait exactement 30 bons d'achat gagnés.
**3.** Calculer la probabilité que 20 bons d'achats soient gagnés ou moins.
**4.** Calculer la probabilité qu'au moins la moitié des jeux fassent gagner un bon d'achat.
**5.** Quel est le montant moyen de la somme totale offerte en bons d'achat ? Le budget prévisionnel est-il suffisant ?

> **Guide de résolution**
> **1.** Pour calculer le paramètre $p$ de la loi binomiale, on peut s'aider d'un arbre pondéré.

### Partie B : calculer l'espérance et la variance du gain

Lors de la dernière semaine de l'action, les règles du jeu changent : on tire toujours une carte et on gagne un bon d'achat d'un montant égal à la moitié du montant indiqué.
Puis, on tourne systématiquement la roue qui n'affiche qu'une seule étoile et on gagne un bon d'achat supplémentaire d'un montant de 50 € si la roue s'arrête sur l'étoile.
X et Y sont les variables aléatoires qui donnent les montants des bons d'achat gagnés respectivement pendant la première et la deuxième étape, avec ces nouvelles règles.

**1.** Établir les lois de probabilités de X, puis de Y.
**2.** Calculer l'espérance et la variance de X et de Y. *Arrondir au centième.*
**3.** Calculer l'espérance et la variance de la somme des montants des bons d'achat obtenus.

> **Guide de résolution**
> **1.** La variable aléatoire X peut prendre 50 valeurs différentes et sa loi est équirépartie.
> La variable aléatoire Y ne peut prendre que deux valeurs distinctes.

## 83 Effectuer des sondages
40 min

*D'après Bac, Métropole 2019*

Un laboratoire pharmaceutique mène des études sur la vaccination contre la grippe dans une ville.
Après la période hivernale, on interroge au hasard 40 habitants de la ville, on admet que ce choix se ramène à $n$ tirages successifs avec remise.
On suppose que la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la ville soit vaccinée contre la grippe est égale à 0,4.
On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes vaccinées parmi les 40 interrogées.

**1. a)** Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ?
**b)** Déterminer la probabilité qu'au moins la moitié des personnes interrogées soit vaccinée. *Arrondir au centième.*
**c)** Calculer l'espérance et l'écart-type du nombre de personnes vaccinées parmi les 40 personnes interrogées. *Arrondir au centième si besoin.*

**2.** Le laboratoire effectue $n$ fois cette étude, sans enregistrer les noms des habitants interrogés.
$M_n$ est la moyenne du nombre de personnes vaccinées sur ces $n$ sondages.
**a)** Préciser l'espérance de $M_n$, puis exprimer l'écart-type de $M_n$ en fonction de $n$.
**b)** Quelle est la valeur minimum de $n$ telle que l'écart-type de $M_n$ soit inférieur à 0,5 ?

**Guide de résolution**
**2. b)** Il faut résoudre une inéquation où intervient la formule trouvée à la question **a)**.

# Se préparer À L'ORAL

## 84 Présenter un exposé

**a)** Réfléchir à des situations où interviennent des lois binomiales dans la vie de tous les jours ainsi qu'au lien entre lois binomiales et variables aléatoires indépendantes.
**b)** Dans un exposé oral de 10 min, présenter cette recherche.

## 85 Travailler l'oral en groupe

Résoudre cet exercice en petit groupe, puis présenter les résultats à l'oral.

On dispose de deux dés truqués à six faces numérotées de 1 à 6. Pour l'un des dés, les faces 1, 2, 3 ont deux fois moins de chances d'apparaître que les faces 4, 5, 6. Pour l'autre, les faces 1 et 2 ont deux fois moins de chances d'apparaître que les faces 3 et 4, et trois fois moins que les faces 5 et 6. Les faces mentionnées ensemble ont la même probabilité d'apparaître. On lance ces deux dés et on additionne les numéros obtenus.
**a)** Déterminer la loi de probabilité de chaque dé.
**b)** En déduire l'espérance et la variance de la somme des deux dés. *Arrondir au dixième si besoin.*

## 86 Travailler les compétences orales

▶ **ANTICIPER LES QUESTIONS DU JURY**

**1. Préparation de la restitution orale (5 min)**
Par groupe de 3, résoudre l'exercice ci-dessous, chaque élève travaillant sur une des trois propositions.
**2. Jeu de rôle (30 min)**
Chaque élève présente son résultat à l'oral (2 min) pendant que les deux autres composent le jury.
Chaque juré pose une question au candidat (5 min).

**Énoncé :** Un portefeuille contient cinq pièces de 1 € et trois pièces de 2 €.
On pioche simultanément, deux fois de suite, 3 pièces de ce portefeuille.
X est la somme des pièces du premier tirage, Y celle du second tirage.
Répondre par vrai ou faux. Justifier.
**a)** L'énoncé permet d'affirmer que X et Y suivent la même loi de probabilité.
**b)** L'énoncé permet d'affirmer que $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$.
**c)** L'énoncé permet d'affirmer que $V(X+Y)=V(X)+V(Y)$.

**87** **Espérance d'un produit de variables aléatoires indépendantes. Applications**

**Partie A : un exemple**

On dispose d'une pièce équilibrée dont les côtés sont marqués 1 et 2, et d'un dé équilibré à six faces numérotées 1, 1, 1, 4, 4 et 10.

X est la variable aléatoire qui donne le numéro obtenu quand on lance la pièce, Y celle qui donne le numéro obtenu avec le dé.

Dans cette partie on s'intéresse à la variable aléatoire produit XY qui prend toutes les valeurs $a \times b$ avec $a \in \{1 ; 2\}$ et $b \in \{1 ; 4 ; 10\}$.

**1. a)** Établir les lois de probabilités de X et de Y.

**b)** En déduire les espérances E(X) et E(Y) des variables aléatoires X et Y. *Donner les résultats sous forme de fractions irréductibles.*

**2. a)** Recopier et compléter le tableau croisé ci-dessous pour déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire XY.

| X \ Y | 1 | 4 | 10 |
|---|---|---|---|
| 1 | | | |
| 2 | | | |

**b)** Recopier une seconde fois le tableau ci-dessus, mais y faire apparaître la probabilité de chaque événement de la forme $\{X = a\} \cap \{Y = b\}$ pour toutes les valeurs $a$ et $b$ prises respectivement par X et Y.

**c)** Déduire des questions précédentes la loi de probabilité de la variable aléatoire XY.

**d)** Calculer l'espérance E(XY) de la variable aléatoire XY. *Donner le résultat sous forme de fraction irréductible.*

**e)** Conjecturer une relation simple entre E(XY), E(X) et E(Y).

**Partie B : preuve dans un cas particulier**

X et Y sont des variables aléatoires **indépendantes** dont voici les lois de probabilités.

| $a$ | $a_1$ | $a_2$ |
|---|---|---|
| $P(X = a)$ | $p_1$ | $p_2$ |

| $b$ | $b_1$ | $b_2$ |
|---|---|---|
| $P(X = b)$ | $q_1$ | $q_2$ |

Dans cette partie, on se propose de démontrer que l'espérance de la variable produit XY vérifie :

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

**1.** Donner les expressions des espérances E(X) et E(Y) des variables aléatoires X et Y.

**2. a)** Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire produit XY ? Dans la suite, on ne tiendra pas compte du fait que certaines de ces valeurs peuvent être égales.

**b)** $a$ est une valeur prise par X et $b$ est une valeur prise par Y.

Quel résultat du cours permet de déterminer la probabilité de l'événement $\{X = a\} \cap \{Y = b\}$ ?

**c)** Déduire des questions précédentes la loi de probabilité de la variable aléatoire XY.

**d)** Donner l'expression développée de l'espérance de la variable aléatoire XY.

**e)** Comparer cette expression à celle du produit $E(X) \times E(Y)$ et conclure.

*Dans la suite, on admet que si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, alors :*

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

**Partie C : application à la variance d'une somme de variables aléatoires**

X et Y sont des variables aléatoires **indépendantes** et $X + Y$ est la variable aléatoire somme de X et Y.

Dans cette partie, on se propose de démontrer la propriété de la variance admise p. 462 :

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y).$$

**1.** Selon la formule de Koenig-Huygens, la variance d'une variable aléatoire X est :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

Appliquer cette formule à la variable aléatoire Y.

**2.** Pour cette question, on reprend les variables aléatoires de la **partie A**.

Indiquer les valeurs prises par chacune des variables aléatoires ci-dessous :

**a)** $X^2$ **b)** $Y^2$ **c)** $X + Y$ **d)** $(X + Y)^2$ **e)** XY

**3.** Utiliser la formule de Koenig-Huygens pour exprimer la variance de la variable aléatoire $X + Y$.

**4.** En utilisant les propriétés de l'espérance pour deux variables aléatoires **indépendantes** X et Y, justifier que :

$$E((X + Y)^2) = E(X^2) + 2E(X)E(Y) + E(Y^2).$$

**5.** De même, utiliser les propriétés de l'espérance pour développer l'expression $(E(X + Y))^2$.

**6.** À l'aide des deux questions précédentes, simplifier autant que possible l'expression de $V(X + Y)$.

**7.** Conclure.

On a vu à l'exercice **56** qu'il est **incorrect** d'écrire $V(2X) = V(X + X) = V(X) + V(X) = 2V(X)$, car la variable aléatoire X n'est pas indépendante avec elle-même.
De même, il serait donc **incorrect** d'écrire $E(X^2) = E(XX) = E(X)E(X) = E(X)^2$. Si cette égalité était correcte, alors la formule de Koenig-Huygens donnerait toujours 0.

**88 Reconnaître des variables aléatoires indépendantes**

Dire que deux variables aléatoires X et Y définies sur un même univers sont indépendantes signifie que, pour toute valeur $a$ prise par X et toute valeur $b$ prise par Y,

$$P(\{X=a\}\cap\{Y=b\})=P(X=a)\times P(Y=b).$$

**1.** Le tableau croisé ci-dessous donne les probabilités des événements de la forme $\{X=a\}\cap\{Y=b\}$ pour deux variables aléatoires X et Y.

| X \ Y | 0 | 2 | 4 |
|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{24}$ |
| 3 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{12}$ |
| 5 | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{24}$ |

**a)** À l'aide du tableau croisé, établir les lois de probabilités de X et de Y.

**b)** Calculer le produit $P(X=1)\times P(Y=0)$ et comparer le résultat avec la probabilité de l'événement $\{X=1\}\cap\{Y=0\}$.

**c)** De même, comparer $P(X=a)\cap P(Y=b)$ et $P(\{X=a\}\cap\{Y=b\})$ pour tous les couples $(a\,;b)$ possibles.

**d)** Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

**2.** Dans chacun des cas ci-dessous, le tableau croisé donne les probabilités des événements de la forme $\{X=a\}\cap\{Y=b\}$ pour deux variables aléatoires X et Y.
Déterminer les cas où les variables aléatoires sont indépendantes.

**a)**

| X \ Y | 10 | 20 |
|---|---|---|
| 0 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ |
| 5 | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ |

**b)**

| X \ Y | 0 | 4 |
|---|---|---|
| 1 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{12}$ |
| 10 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{6}$ |

**c)**

| X \ Y | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 5 | $\frac{1}{20}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{10}$ |
| 10 | $\frac{3}{10}$ | $\frac{3}{20}$ | $\frac{3}{10}$ |

**d)**

| X \ Y | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{24}$ |
| 1 | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{24}$ |
| 2 | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ |

**e)**

| X \ Y | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | $\frac{3}{10}$ | $\frac{1}{20}$ | $\frac{1}{20}$ |
| 1 | $\frac{9}{20}$ | $\frac{3}{40}$ | $\frac{3}{40}$ |

**89 De la loi du couple (X ; Y) aux lois de X et Y**

Dans chaque cas, le tableau croisé donne les probabilités $P(\{X=a\}\cap\{Y=b\})$ pour deux variables aléatoires X et Y définies sur un même univers.

- Déterminer la loi de probabilité de X, puis de Y. Qu'observe-t-on ?
- Préciser si les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.
- Commenter le phénomène illustré.

**a)**

| X \ Y | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 0,1 | 0,2 | 0,2 |
| 2 | 0,1 | 0,3 | 0,1 |

**b)**

| X \ Y | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 0,1 | 0,25 | 0,15 |
| 2 | 0,1 | 0,25 | 0,15 |

## Des Défis

**90 Construire un échantillon**

Dans un pays, avant une élection, une candidate s'interroge sur ses chances d'être élue. Pour cela, elle commande un sondage auprès d'un échantillon de la population. $p$ est la proportion, inconnue, des électeurs de ce pays qui vont voter pour cette candidate.
X est la variable aléatoire qui, pour un électeur choisi au hasard, prend la valeur 1 avec la probabilité $p$ et la valeur 0 sinon.
On admet que $p$ est compris entre 0,4 et 0,6.
Quelle doit être la taille d'un échantillon de la loi de probabilité de X pour être certain que l'écart-type de la moyenne de l'échantillon soit inférieur à 0,5 % ?

**91 Étudier des combinaisons linéaires**

X et Y sont deux variables aléatoires définies sur un même univers, telles que E(X) est un nombre entier naturel et $E(Y)=5$.
Justifier que pour tous entiers naturels $a$ et $b$, $E(10aX+bY)$ est un nombre entier multiple de 5.
Que peut-on alors dire de $V(10aX+bY)$ ?

**92 Prouver une nouvelle formule**

X et Y sont des variables aléatoires indépendantes définies sur un même univers.
Justifier que les variables aléatoires $(XY)^2$ et $X^2Y^2$ ont la même loi, puis démontrer que :

$$V(XY)=V(X)V(Y)+V(X)E(Y)^2+V(Y)E(X)^2.$$