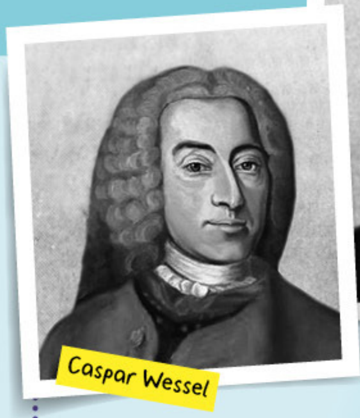
2 Nombres complexes : point de vue géométrique

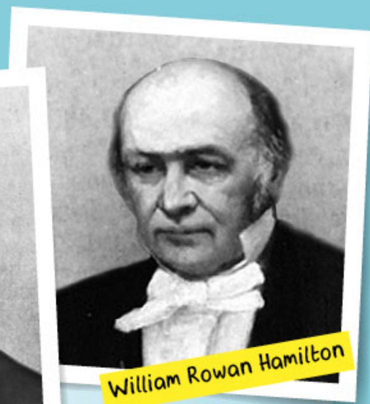
HISTOIRE DES MATHS

En 1806, le Genevois **Jean Robert Argand** publie un *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques* dans lequel il propose une interprétation géométrique des nombres complexes.

En 1811, **Carl Friedrich Gauss** écrit : « De même qu'on peut se représenter tout le domaine des réels au moyen d'une ligne droite… de même on peut se figurer les réels et les imaginaires au moyen d'un plan où chaque point déterminé par son abscisse x et son ordonnée y représente en même temps la quantité $x + iy$. »

Grâce à ces représentations, le sens un peu mystérieux des nombres imaginaires disparaît et les mathématiciens n'auront alors plus de scrupules à calculer avec le nombre i.


Caspar Wessel


William Rowan Hamilton

▶ **Caspar Wessel** (1745-1818) est un mathématicien norvégo-danois. En 1799, il décrit l'interprétation géométrique des nombres complexes comme des points du plan complexe.

▶ **William Rowan Hamilton** (1805-1865) est un mathématicien irlandais. Il découvre de nouveaux nombres : les quaternions qui généralisent les nombres réels et complexes. On leur donne une interprétation géométrique dans l'espace.

1799 Wessel propose une représentation des nombres complexes.

1806 Argand publie son *Essai* sur les quantités imaginaires.

1811 Gauss donne une définition rigoureuse des nombres complexes.

1843 Hamilton découvre les quaternions.

Vers 1845 Cauchy étudie les fonctions de la variable complexe.

1804 Napoléon 1er sacré Empereur

1816 Le docteur René Laennec invente le stéthoscope

1830 Monarchie de juillet

1842 Balzac rédige *Le Père Goriot*

1852 Début du Second Empire

1800 — 1810 — 1820 — 1830 — 1840 — 1850 — 1860

Image d'une fractale et chou romanesco.

Un ensemble de Julia est une figure fractale, c'est-à-dire une surface dont la structure est invariante par changements d'échelles. On reconnaît dans la nature (fougères, choux romanesco) des similitudes avec ces objets mathématiques.

Les contenus et capacités travaillés dans ce chapitre

	Savoir-faire	Exercices
• Image d'un nombre complexe ; affixe d'un point, d'un vecteur.	1 à 4	21 à 38
• Module d'un nombre complexe. Interprétation géométrique.	6, 8, 9	39, 40, 42, 49 à 55
• Propriétés du module.	5, 7	43 à 48
• Ensemble $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1.		41, 93
• Arguments d'un nombre complexe non nul. Interprétation géométrique.		56 à 58, 64, 68 à 72, 74 à 79
• Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul.	10 à 20	59 à 63, 65 à 67, 73

Calcul mental

Rappels utiles

$(O ; \vec{OI}, \vec{OJ})$ est un repère orthonormé direct du plan.

• Coordonnées, distance

$A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ sont deux points et $\vec{u}(x ; y)$ est un vecteur.

– Le milieu I du segment [AB] a pour coordonnées $(x_I ; y_I)$ avec :

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \text{ et } y_I = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

– Les coordonnées du vecteur $\vec{AB}$ sont $(x_B - x_A ; y_B - y_A)$.

– La norme du vecteur $\vec{u}$ est $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

– La distance entre les points A et B est :

$$AB = \|\vec{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

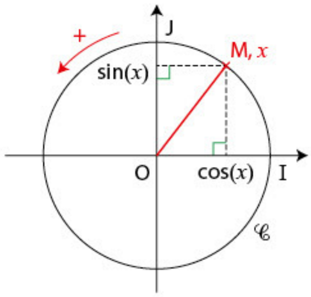
• Cosinus et sinus

$\mathscr{C}$ est le cercle trigonométrique de centre O.

– Tout réel x a un point image M sur $\mathscr{C}$.

– Si $x' - x = k \times 2\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$, alors x et x' ont le même point image sur $\mathscr{C}$.

– Si M est le point image de x sur $\mathscr{C}$, alors M est aussi le point image de tout réel $x + k2\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.



– Si M est le point image de x, alors $M(\cos(x) ; \sin(x))$.

À l'oral Questions-Tests

Pour chaque question, il y a une seule réponse exacte.

1 On donne les points $A(-5 ; 1)$ et $B(7 ; -4)$.
Le milieu I du segment [AB] a pour coordonnées :

(1) $(2 ; -3)$ (2) $\left(1 ; -\frac{3}{2}\right)$ (3) $\left(-6 ; \frac{5}{2}\right)$

2 On donne les points $E\left(-\frac{3}{2} ; 3\right)$ et $F(2 ; -1)$.

Le vecteur $\vec{EF}$ a pour coordonnées :

(1) $\left(\frac{7}{2} ; -4\right)$ (2) $\left(\frac{1}{2} ; 2\right)$ (3) $\left(-\frac{7}{2} ; 4\right)$

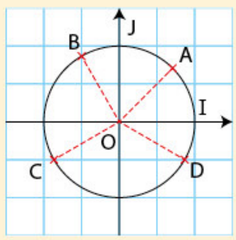
3 On donne le vecteur $\vec{u}(\sqrt{3} ; -1)$.
La norme du vecteur $\vec{u}$ est égale à :

(1) 2 (2) $\sqrt{3} + 1$ (3) 4

4 On donne les points $A(1 ; 2)$ et $B(3 ; -1)$.
La distance AB est égale à :

(1) $\sqrt{13}$ (2) 13 (3) $\sqrt{17}$

5 Sur ce cercle trigonométrique de centre O,



a) A est l'image du nombre réel :

(1) $-\frac{\pi}{4}$ (2) $\frac{\pi}{4}$ (3) $\frac{\pi}{3}$

b) B est l'image du nombre réel :

(1) $\frac{5\pi}{6}$ (2) $\frac{3\pi}{4}$ (3) $\frac{2\pi}{3}$

c) C est l'image du nombre réel :

(1) $-\frac{5\pi}{6}$ (2) $-\frac{2\pi}{3}$ (3) $\frac{4\pi}{3}$

d) D est l'image du nombre réel :

(1) $-\frac{\pi}{3}$ (2) $\frac{11\pi}{6}$ (3) $-\frac{\pi}{4}$

6 $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ est égal à :

(1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (2) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (3) $\frac{1}{2}$

7 $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ est égal à :

(1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (3) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

1 Représentation géométrique des nombres complexes

HISTOIRE DES MATHS

À la fin du 18e siècle et au début du 19e siècle, Wessel et Argand proposent de représenter le nombre complexe $z = x + iy$, avec x et y nombres réels, par le point M du plan de coordonnées $(x\,;y)$ dans un repère orthonormé.

$\left(O\,;\overrightarrow{OU},\overrightarrow{OV}\right)$ est un repère orthonormé du plan.

1 **a)** Construire le repère et placer les points A, B, C et D qui représentent respectivement les nombres complexes :
- $a = 2 - i$
- $b = 2i$
- $c = -1 + i$
- $d = -2$

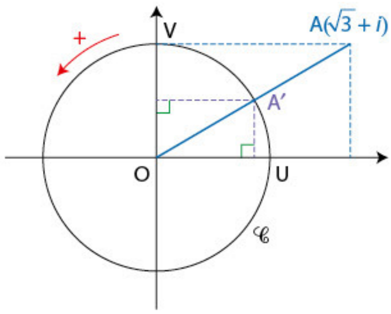
On dit que **A est le point image du nombre complexe *a*.**
b) Placer les points $E(2\,;1)$, $F(-1\,;0)$, $G(-1\,;-1)$ et $H(0\,;-2)$.
Quel nombre complexe est représenté respectivement par chacun des points E, F, G, H ?
Noter e, f, g et h ces nombres complexes.
On dit que **le nombre complexe *e* est l'affixe du point E.**

2 **a)** Construire le point M tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{HE}$. Quelle est l'affixe m du point M ?
On dit aussi que **le nombre complexe *m* est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{HE}$.**
b) Déterminer l'affixe de chacun des vecteurs :
- $\overrightarrow{AD}$
- $\overrightarrow{DF}$
- $\overrightarrow{AC}$
- $\overrightarrow{HB}$

2 Nouvelle écriture des nombres complexes

$\left(O\,;\overrightarrow{OU},\overrightarrow{OV}\right)$ est un repère orthonormé direct du plan.
$\mathscr{C}$ est le cercle trigonométrique de centre O.

1 On donne le nombre complexe $a = \sqrt{3} + i$ et on note A son point image.



a) Justifier que $OA = 2$.
b) A′ est le point tel que $\overrightarrow{OA'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$.
Déterminer les coordonnées du point A′.
c) Justifier que A′ est un point du cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ et montrer que ce point est l'image sur $\mathscr{C}$ du nombre réel $\frac{\pi}{6}$.
d) Démontrer que les coordonnées du point A peuvent s'écrire $\left(2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right);2\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$.
e) En déduire que le nombre complexe a peut s'écrire $2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$.

Cette écriture est **une forme trigonométrique** du nombre complexe a, 2 est **le module** de a et $\frac{\pi}{6}$ est **un argument** de a.

2 Obtenir de la même façon, une forme trigonométrique de chaque nombre complexe.
a) $1 + i\sqrt{3}$ **b)** $-1 + i$ **c)** $3i$ **d)** -5

Cours

Exercices
- 1 à 4 (ci-contre)
- 21 à 38

1 Le plan complexe

A Représentation géométrique

Définitions

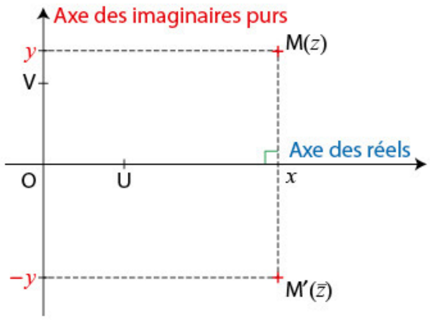
- Le **plan complexe** est le plan muni d'un repère orthonormé direct $\left(O ; \overrightarrow{OU}, \overrightarrow{OV}\right)$.
- À tout nombre complexe $z = x + iy$ avec x et y nombres réels, on associe le point M de coordonnées $(x ; y)$.

On dit que M est le **point image** de z et que $\overrightarrow{OM}$ est le **vecteur image** de z.

- Tout point M$(x ; y)$ est le point image d'un seul nombre complexe $z = x + iy$.

On dit que z est l'**affixe** du point M et du vecteur $\overrightarrow{OM}$.

Notation et vocabulaire



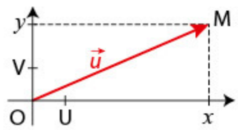
- Pour indiquer que $z = x + iy$ $(x \in \mathbb{R} ; y \in \mathbb{R})$ est l'affixe d'un point M, on note souvent M(z).
- Les nombres réels sont les affixes des points de l'axe des abscisses appelé aussi **axe des réels**.
- Les nombres imaginaires purs sont les affixes des points de l'axe des ordonnées appelé aussi **axe des imaginaires purs**.

Interprétation géométrique du conjugué

Le point M d'affixe z et le point M′ d'affixe $\overline{z}$ **sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses**.

En effet, si $z = x + iy$ $(x \in \mathbb{R} ; y \in \mathbb{R})$, alors $\overline{z} = x - iy$ donc M et M′ ont la même abscisse et des ordonnées opposées.

B Affixe d'un vecteur



Dans le plan complexe, $\vec{u}$ est un vecteur de coordonnées $(x ; y)$.

Le point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$ a pour coordonnées $(x ; y)$, donc le vecteur $\overrightarrow{OM}$ a pour affixe $x + iy$.

On dit que le vecteur $\vec{u}(x ; y)$ **a pour affixe** $x + iy$.

Des propriétés sur les coordonnées de vecteurs, on déduit les propriétés suivantes :

Propriétés

- Deux vecteurs sont égaux si, et seulement si, leurs affixes sont égales.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour affixes z et z', alors l'affixe du vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ est $z + z'$ et celle du vecteur $\lambda\vec{u}$ (λ nombre réel) est λz.

Propriétés

Deux points A et B du plan complexe ont pour affixes respectives z_A et z_B.

(1) L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $z_B - z_A$.

(2) L'affixe du milieu I du segment [AB] est $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$.

Remarque : pour une démonstration, se reporter à l'exercice **83** page 58.

Exemples

On donne les points A$(1 + i)$ et B$(-2 + 3i)$.

- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_{\overrightarrow{AB}} = -2 + 3i - (1 + i) = -3 + 2i$.
- Le milieu I du segment [AB] a pour affixe $z_I = \dfrac{1 + i - 2 + 3i}{2} = -\dfrac{1}{2} + 2i$.

EXERCICES RÉSOLUS

1 Démontrer à l'aide des affixes

Dans le plan complexe, A, B, C, D sont les points d'affixes :

$$z_A = -3 - i, \quad z_B = 1 + i, \quad z_C = 3 - 2i \quad \text{et} \quad z_D = -1 - 4i.$$

a) Placer les points A, B, C et D.

b) Démontrer que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

c) Déterminer l'affixe du point M, centre du parallélogramme ABCD.

Solution

a) Les points A, B, C et D sont placés ci-contre.

b) $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe :

$$z_B - z_A = (1+i) - (-3-i) = 4 + 2i.$$

$\overrightarrow{DC}$ a pour affixe :

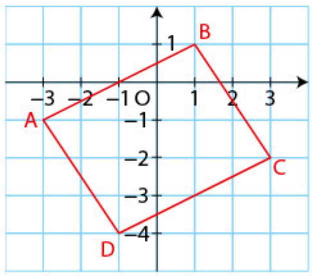
$$z_C - z_D = (3-2i) - (-1-4i) = 4 + 2i.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ ont même affixe, donc ils sont égaux et ABCD est un parallélogramme.

c) M est le milieu du segment [AC], donc son affixe est :

$$z_M = \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{-3 - i + 3 - 2i}{2}$$

soit $z_M = -\frac{3}{2}i$.



Dans le plan complexe, l'égalité de deux vecteurs se traduit par l'égalité de leurs affixes.

2 Déterminer un ensemble de points

Dans le plan complexe, on note $\mathscr{E}$ l'ensemble des points M d'affixe z tels que $Z = z^2$ soit un nombre réel. Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$, puis le représenter graphiquement dans un repère orthonormé direct $\left(O\,;\overrightarrow{OU}, \overrightarrow{OV}\right)$.

Solution

On pose $z = x + iy$ avec x et y nombres réels.

Ainsi, $Z = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$.

Z est réel si, et seulement si, $2xy = 0$, c'est-à-dire $x = 0$ ou $y = 0$.

L'ensemble $\mathscr{E}$ est la réunion de l'axe des réels et de l'axe des imaginaires purs.

On peut aussi écrire que Z est réel si, et seulement si, $Z = \overline{Z}$.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 1

3 Dans le plan complexe A, B, C et D sont les points d'affixes $z_A = -3$, $z_B = 1 + i$, $z_C = 4 - i$ et $z_D = -2i$.

a) Placer les points A, B, C et D.

b) Démontrer que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

c) Déterminer l'affixe du point M, centre du parallélogramme ABCD.

Sur le modèle de l'exercice résolu 2

4 Dans le plan complexe, $\mathscr{F}$ est l'ensemble des points M d'affixe z tels que $Z = z^2$ soit un imaginaire pur.

a) Déterminer l'ensemble $\mathscr{F}$.

b) Représenter graphiquement l'ensemble $\mathscr{F}$ dans un repère orthonormé direct $\left(O\,;\overrightarrow{OU}, \overrightarrow{OV}\right)$.

Exercices
- **5** à **9** (ci-contre)
- **39** à **55**

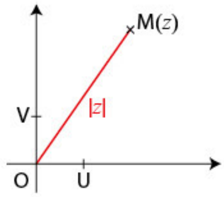
2 Module d'un nombre complexe

$(O\,;\overrightarrow{OU},\overrightarrow{OV})$ est un repère orthonormé direct du plan complexe.

A Définition et propriétés

Définition

z est un nombre complexe de forme algébrique $x+iy$ avec $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$.
Le **module** de z est le nombre **réel positif**, noté $|z|$ défini par $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$.



Interprétation géométrique
Dans le plan complexe, si M a pour affixe z, alors **OM** $=|z|$.

Remarques : • Si x est un nombre réel, le module de x est égal à la valeur absolue de x.
• $|z|=0$ équivaut à $z=0$ car $OM=0$ équivaut à $M=O$.

Propriétés

Pour tout nombre complexe z, **(1)** $|-z|=|z|$ **(2)** $|\overline{z}|=|z|$ **(3)** $z\overline{z}=|z|^2$

Démonstrations

On note $z=x+iy$ avec x et y nombres réels.
(1) et **(2)** $-z=-x+i(-y)$ et $\overline{z}=x+i(-y)$, les égalités découlent alors de la définition.
(3) $z\overline{z}=(x+iy)(x-iy)=x^2+y^2=\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2=|z|^2$.

Propriétés

Pour tous complexes z, z' et tout nombre entier naturel $n\geqslant 1$.
(1) $|zz'|=|z||z'|$ **(2)** $|z^n|=|z|^n$ **(3)** $\left|\frac{1}{z'}\right|=\frac{1}{|z'|}$ si $z'\neq 0$ **(4)** $\left|\frac{z}{z'}\right|=\frac{|z|}{|z'|}$ si $z'\neq 0$

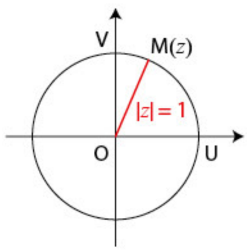
Démonstrations

(1) $|zz'|^2=zz'\times\overline{zz'}=zz'\,\overline{z}\,\overline{z'}=z\overline{z}\,z'\overline{z'}=|z|^2|z'|^2$. Or, $|zz'|$ et $|z||z'|$ sont deux réels positifs donc $|zz'|=|z||z'|$.
(2) • Pour $n=1$, $|z^1|=|z|$ et $|z|^1=|z|$.
• On suppose que pour un entier naturel $k\geqslant 1$, $|z^k|=|z|^k$. Alors $|z^{k+1}|=|zz^k|=|z||z^k|=|z||z|^k=|z|^{k+1}$.
Donc pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, $|z^n|=|z|^n$.

Remarque : les propriétés **(3)** et **(4)** sont démontrées à l'exercice **85** page 58.

B Ensemble $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1

On note $\mathbb{U}$ **l'ensemble des nombres complexes z tels que $|z|=1$.**
Dans le plan complexe, $\mathbb{U}$ est représenté par le cercle de centre O et de rayon 1.



Propriétés

Pour tous complexes z et z' de l'ensemble $\mathbb{U}$.
(1) zz' appartient à $\mathbb{U}$; **(2)** $\frac{1}{z}$ appartient à $\mathbb{U}$.

Démonstrations

(1) $|zz'|=|z||z'|$, or, $|z|=|z'|=1$ donc $|zz'|=1$ et zz' appartient à $\mathbb{U}$.
(2) $\left|\frac{1}{z}\right|=\frac{1}{|z|}$, or, $|z|=1$ donc $\left|\frac{1}{z}\right|=1$ et $\frac{1}{z}$ appartient à $\mathbb{U}$.

On dit que $\mathbb{U}$ est stable par produit et passage à l'inverse.

EXERCICES RÉSOLUS

5 Calculer le module d'un nombre complexe

1. Calculer le module de chacun des nombres complexes $\sqrt{3}+i$ et $1-2i$.

2. Déterminer alors le module de chaque nombre complexe.

a) $z_1=\left(\sqrt{3}+i\right)(1-2i)$ **b)** $z_2=\left(\sqrt{3}+i\right)^3$ **c)** $z_3=\dfrac{1}{1-2i}$ **d)** $z_4=\dfrac{\sqrt{3}+i}{1-2i}$

Solution

1. • $\left|\sqrt{3}+i\right|=\sqrt{\sqrt{3}^2+1^2}=\sqrt{3+1}=2$

• $|1-2i|=\sqrt{1^2+(-2)^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$

2. a) $|z_1|=\left|\left(\sqrt{3}+i\right)(1-2i)\right|=\left|\sqrt{3}+i\right||1-2i|=2\sqrt{5}$

b) $|z_2|=\left|\left(\sqrt{3}+i\right)^3\right|=\left|\sqrt{3}+i\right|^3=2^3=8$

c) $|z_3|=\left|\dfrac{1}{1-2i}\right|=\dfrac{1}{|1-2i|}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

d) $|z_4|=\left|\dfrac{\sqrt{3}+i}{1-2i}\right|=\dfrac{\left|\sqrt{3}+i\right|}{|1-2i|}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

On calcule $|z_1|$ avec la propriété du module d'un produit sans utiliser sa forme algébrique.

6 Interpréter géométriquement un module

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}\,;\overrightarrow{\mathrm{OU}},\overrightarrow{\mathrm{OV}}\right)$.

On donne le point A d'affixe $-1+i$.

a) M est un point d'affixe z. Déterminer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$.

b) Déterminer l'ensemble $\mathscr{F}$ des points M du plan dont l'affixe vérifie $|z+1-i|=3$.

Solution

a) A a pour affixe $-1+i$, M a pour affixe z donc l'affixe du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ est $z-(-1+i)=z+1-i$.

b) Pour tout point M d'affixe z, $\left\|\overrightarrow{\mathrm{AM}}\right\|=|z+1-i|$.

Donc $|z+1-i|=3$ équivaut à $\mathrm{AM}=3$, ainsi l'ensemble $\mathscr{F}$ est le cercle de centre le point A et de rayon 3.

Pour tout vecteur $\vec{u}$ d'affixe z : $\|\vec{u}\|=|z|$.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 5

7 **1.** Calculer le module de chacun des nombres complexes $\sqrt{2}-i$ et $4+3i$.

2. Déterminer alors le module de chaque nombre complexe.

a) $z_1=\left(\sqrt{2}-i\right)(4+3i)$

b) $z_2=\left(\sqrt{2}-i\right)^4$

c) $z_3=\dfrac{1}{4+3i}$

d) $z_4=\dfrac{\sqrt{2}-i}{4+3i}$

Sur le modèle de l'exercice résolu 6

8 On donne les points A et B d'affixes $z_A=4$ et $z_B=-3i$.

a) M est un point d'affixe z.

Déterminer l'affixe de chacun des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{BM}}$.

b) Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M du plan dont l'affixe vérifie $|z-4|=|z+3i|$.

9 Déterminer l'ensemble $\mathscr{G}$ des points M du plan dont l'affixe vérifie :

$$|z-2+3i|=5.$$

Cours

Exercices
- 10 à 17 (ci-contre)
- 56 à 79

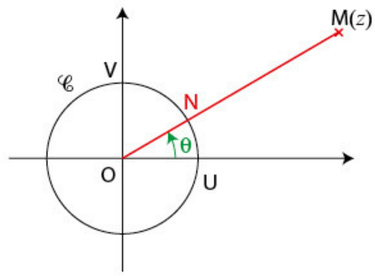
3 Arguments d'un nombre complexe non nul

$\left(O\,;\overrightarrow{OU},\overrightarrow{OV}\right)$ est un repère orthonormé direct du plan complexe.
$\mathscr{C}$ est le cercle trigonométrique de centre O.

A Définition et interprétation géométrique

Définition

z est un nombre complexe non nul de point image M dans le plan complexe, N est le point de $\mathscr{C}$ tel que $\overrightarrow{ON}=\dfrac{1}{OM}\overrightarrow{OM}$.
On appelle **argument de z** et on note **$\arg(z)$** tout nombre réel θ dont N est l'image sur $\mathscr{C}$.

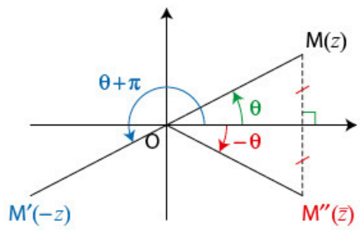


Remarques : • Un nombre complexe non nul a une infinité d'arguments ; si θ est l'un d'entre-eux, les autres s'écrivent $\theta+\boldsymbol{k2\pi}$ avec $k\in\mathbb{Z}$.
On note $\mathbf{arg}(z)=\theta$ ou $\arg(z)=\theta\,[2\pi]$ (lire « modulo 2π »).
• On dit aussi qu'une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OU}\,;\overrightarrow{OM}\right)$ est θ.

B Premières propriétés des arguments

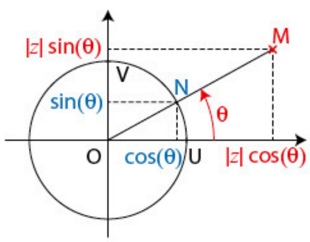
Propriétés

Pour tout complexe non nul z :
(1) $\mathbf{arg}(-z)=\mathbf{arg}(z)+\pi[2\pi]$ et $\mathbf{arg}(\bar{z})=-\mathbf{arg}(z)[2\pi]$.
(2) z est un **nombre réel**, si et seulement si, $\mathbf{arg}(z)=\mathbf{0}[\mathbf{2\pi}]$ ou $\mathbf{arg}(z)=\pi[2\pi]$.
(3) z est un nombre **imaginaire pur** si, et seulement si, $\mathbf{arg}(z)=\dfrac{\pi}{\mathbf{2}}[2\pi]$ ou $\mathbf{arg}(z)=-\dfrac{\pi}{\mathbf{2}}[2\pi]$.



C Formes trigonométriques d'un nombre complexe non nul

z est un nombre complexe non nul dont un argument est θ.
M est le point image de z et N le point tel que $\overrightarrow{ON}=\dfrac{1}{|z|}\overrightarrow{OM}$.
N est le point de $\mathscr{C}$ image de θ, donc N a pour coordonnées $(\cos(\theta)\,;\sin(\theta))$ et ainsi, l'affixe de N est $z_N=\cos(\theta)+i\sin(\theta)$.
De $\overrightarrow{OM}=|z|\overrightarrow{ON}$, on déduit que $z=|z|\,(\cos(\theta)+i\sin(\theta))$.



Définition

z est un nombre complexe non nul.
L'écriture $z=|z|(\mathbf{cos}(\theta)+\boldsymbol{i}\,\mathbf{sin}(\theta))$ où $\arg(z)=\theta\,[2\pi]$ est appelée une **forme trigonométrique** de z.

Propriétés

• Deux nombres complexes non nuls sont **égaux** si, et seulement si, ils ont **même module** et **même argument** à un multiple de 2π près.
• Si $z=r(\cos(\alpha)+i\sin(\alpha))$ avec $\boldsymbol{r>0}$, alors $|z|=r$ et $\arg(z)=\alpha\,[2\pi]$.

EXERCICES RÉSOLUS

10 Passer de la forme algébrique à une forme trigonométrique

a) Déterminer le module et un argument du nombre complexe $z=\sqrt{3}+3i$.
b) Donner une forme trigonométrique de z.

Solution

a) $|z|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+3^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

Alors $z=2\sqrt{3}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}+\dfrac{3}{2\sqrt{3}}i\right)=2\sqrt{3}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

et un argument θ de z est tel que :

$$\cos(\theta)=\frac{1}{2} \text{ et } \sin(\theta)=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Donc $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ est un argument de z.

b) Donc une forme trigonométrique de z est :

$$z=2\sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

z est un nombre complexe non nul de forme algébrique $z=x+iy$ avec x et y réels.
Pour obtenir une forme trigonométrique de z, on écrit :

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}$$

puis $$z=|z|\left(\frac{x}{|z|}+i\frac{y}{|z|}\right),$$

et $$\cos\theta=\frac{x}{|z|} \text{ et } \sin\theta=\frac{y}{|z|}.$$

11 Passer d'une forme trigonométrique à la forme algébrique

On donne le nombre complexe z de forme trigonométrique $z=2\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$.
Déterminer la forme algébrique de z.

Solution

On obtient $z=2\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+2i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Or, $\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Donc une forme algébrique de z est :

$$z=\sqrt{2}-i\sqrt{2}.$$

z est un nombre complexe non nul de forme trigonométrique $z=r(\cos(\theta)+i\sin(\theta))$.
Pour obtenir la forme algébrique de z, on développe et on remplace $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ par leurs valeurs.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 10

Pour les exercices 12 à 14,
a) déterminer le module et un argument du nombre complexe z ;
b) donner une forme trigonométrique de z.

12 **(1)** $z=3+i\sqrt{3}$ **(2)** $z=1-i$

13 **(1)** $z=2+2i$ **(2)** $z=-\sqrt{3}+i$

14 **(1)** $z=-5i$ **(2)** $z=\sqrt{3}+i$

Sur le modèle de l'exercice résolu 11

Pour les exercices 15 à 17, on donne une forme trigonométrique du nombre complexe z.
Déterminer la forme algébrique de z.

15 $z=4\left(\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)\right)$

16 $z=2\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$

17 $z=\sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$

EXERCICE RÉSOLU

18 Tracer une spirale

Cours 1. A et 3. C

$\left(O\,;\overrightarrow{OU},\overrightarrow{OV}\right)$ est un repère orthonormé direct du plan complexe.
Pour tout entier naturel n, on note M_n le point d'affixe :

$$z_n = \frac{\sqrt{2}}{n+1}\left(\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right).$$

1. Expliquer pourquoi, pour tout entier naturel n, le point M_n appartient aux axes du repère.

2. Voici une fonction **Spirale** écrite en langage Python qui trace pour une valeur $N\left(N\in\mathbb{N}^*\right)$ du paramètre la ligne brisée $M_0M_1\ldots M_N$.
Dans la boucle de ce programme, x_1, y_1 représentent les coordonnées du point M_k et x_2, y_2 celles du point M_{k+1}.

a) Compléter les lignes 8 et 9 de ce programme.

b) Saisir le programme et exécuter la fonction **Spirale** pour $N = 5$.

```
1  from math import *
2  from pylab import *
3
4  def Spirale(N):
5      for k in range(N):
6          x1=sqrt(2)/(k+1)*cos(k*pi/2)
7          y1=-sqrt(2)/(k+1)*sin(k*pi/2)
8          x2=
9          y2=
10         a=[x1,x2]
11         b=[y1,y2]
12         plot(a,b,'green')
13     show()
14     return
```

Solution

1. Si l'entier naturel n est pair alors $\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)=0$ donc z_n est un réel et M_n appartient à l'axe des réels.
Si n est impair alors $\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)=0$ donc z_n est un nombre imaginaire pur et M_n appartient à l'axe des imaginaires purs.

L'instruction **plot(a,b,'green')** trace le segment qui relie les points de coordonnées $(x_1\,;y_1)$ et $(x_2\,;y_2)$ dans la couleur indiquée.

2. a) On complète les lignes 8 et 9 de la façon suivante :

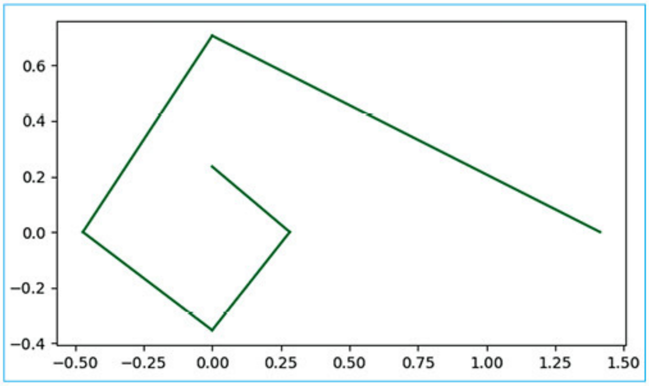
• Cadre rouge :

```
x2=sqrt(2)/(k+2)*cos((k+1)*pi/2)
```

• Cadre vert :

```
y2=-sqrt(2)/(k+2)*sin((k+1)*pi/2)
```

b) Pour $N = 5$, on obtient la spirale ci-contre.



EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 18

19 Dans chaque cas, écrire en langage Python une fonction qui permet de tracer la spirale symétrique de celle obtenue à l'exercice 18 par rapport :

a) à l'origine du repère ; **b)** à l'axe des abscisses ;
c) à l'axe des ordonnées.

20 **1.** Compléter le programme de l'exercice 18 afin d'afficher les distances successives :

$$OM_0, OM_1, \ldots, OM_N.$$

2. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = OM_n$.

a) À partir de quelle valeur de n a-t-on :

$$u_n \leqslant 0{,}1\,?$$

b) Étudier la limite de la suite (u_n).

Le plan complexe

Cours 1

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O\,;\overrightarrow{OU},\overrightarrow{OV}\right)$.

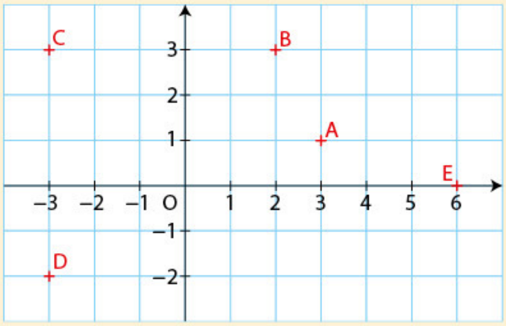
Questions flash — À l'oral

21 On donne les points :

$$A(-1\,;2)\,;B(0\,;5)\,;C\left(-\frac{1}{2}\,;\frac{3}{4}\right).$$

Citer oralement les affixes de ces points.

22 Lire les affixes des cinq points A, B, C, D et E du plan complexe ci-dessous.



23 Dans chaque cas, les affixes des points A et B sont données.
Calculer mentalement l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

a) $z_A = 1+i$, $z_B = 3-2i$

b) $z_A = \frac{1}{2}-i$, $z_B = \frac{3}{2}+i$

24 Dans chaque cas, les affixes des points M et N sont données.
Calculer mentalement l'affixe du milieu de [MN].

a) $z_M = -2+i$, $z_N = -4+3i$

b) $z_M = \frac{1}{2}+5i$, $z_N = -\frac{1}{2}-3i$

25 Dans le plan complexe, A, B, C et D sont les points d'affixes :

$$z_A = 1{,}5i,\ z_B = 3{,}5+i,\ z_C = 1-1{,}5i \text{ et } z_D = -2{,}5-i.$$

1. Placer les points A, B, C et D.

2. Démontrer que ABCD est un parallélogramme en comparant les affixes :

a) de deux vecteurs ;

b) de deux milieux.

26 Dans le plan complexe, A, B et C sont les points d'affixes :

$$z_A = 5+3i,\ z_B = 8+i \text{ et } z_C = 1-3i.$$

Déterminer l'affixe du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.

27 Dans le plan complexe, M et A sont les points d'affixes $z_M = 3-i$ et $z_A = -1+2i$.

a) Placer les points M et A.

b) Déterminer l'affixe du point M′ symétrique de M par rapport au point A.

28 Dans le plan complexe, A, B, C et D sont les points d'affixes :

$$z_A = 2+2i,\ z_B = -3,\ z_C = 4i \text{ et } z_D = 4-2i.$$

a) Placer les points A, B, C et D.

b) Déterminer les affixes des points A′, B′, C′ et D′ symétriques respectifs de A, B, C et D par rapport à O.

c) Placer les points A′, B′, C′ et D′.

29 Dans le plan complexe, A, B et C sont les points d'affixes :

$$z_A = 4+2i,\ z_B = -2+i \text{ et } z_C = -3+5i.$$

M est le point tel que $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$.

a) Calculer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

b) En déduire l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AM}$.

c) Déterminer l'affixe du point M.

30 Dans le plan complexe, A, B et C sont les points d'affixes :

$$z_A = 7-i,\ z_B = -4+10i \text{ et } z_C = -4+5i.$$

Déterminer l'affixe du point M tel que :

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC} = \vec{0}.$$

31 Dans le plan complexe, A, B et C sont les points d'affixes :

$$z_A = -2-3i,\ z_B = 5 \text{ et } z_C = 7i.$$

a) Calculer l'affixe de I milieu de [BC], J milieu de [AC] et K milieu de [AB].

b) Déterminer les affixes des points G, H et L tels que :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI},\ \overrightarrow{BH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BJ} \text{ et } \overrightarrow{CL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CK}.$$

c) Que remarque-t-on ?

32 Dans le plan complexe, A, B et C sont les points d'affixes :

$$z_A = -\frac{1}{3}-i,\ z_B = 1+2i \text{ et } z_C = \frac{7}{3}+5i.$$

a) Calculer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

b) Démontrer que les points A, B et C sont alignés.

33 Dans le plan complexe, M et N sont les points d'affixes :

$$z_M = 3-i \text{ et } z_N = x+2i \text{ (avec } x \text{ nombre réel).}$$

a) Déterminer un nombre réel λ tel que $\overrightarrow{ON} = \lambda\overrightarrow{OM}$.

b) Pour quelle valeur de x, les points O, M et N sont-ils alignés ?

34 Dans le plan complexe, A, B et C sont les points d'affixes :

$$z_A = 3+2i,\ z_B = -5+2i \text{ et } z_C = -3i.$$

a) Placer les points A, B et C.
b) Déterminer les affixes :
• du milieu A′ du segment [BC] ;
• du milieu B′ du segment [AC].
c) Déterminer l'affixe du point G défini par :

$$2\overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GA} = \vec{0}.$$

d) Démontrer que les points B, G et B′ sont alignés.

35 Dans le plan complexe, A, B et C sont les points d'affixes :

$$z_A = -4+2i,\ z_B = -1-i \text{ et } z_C = 4+i.$$

1. Placer les points A, B et C.
2. a) Déterminer l'affixe du quatrième sommet M du parallélogramme ABCM.
b) Placer le point M.
3. a) N est le quatrième sommet du parallélogramme ABNC.
Démontrer que $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CN}$.
b) En déduire l'affixe du point N et placer ce point.

36 **1.** Dans le plan complexe, déterminer et représenter :
a) l'ensemble $\mathscr{D}_1$ des points M d'affixe z tels que $\mathrm{Re}(z) = 2$;
b) l'ensemble $\mathscr{D}_2$ des points M d'affixe z tels que $\mathrm{Im}(z) = -1$.
2. Déterminer l'intersection des ensembles $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$.

37 À tout nombre complexe z, on associe le nombre complexe z' défini par $z' = iz + 2\overline{z}$.
1. On pose $z = x + iy$ avec x et y nombres réels.
Déterminer la forme algébrique de z'.
2. Déterminer et représenter dans le plan complexe l'ensemble des points M d'affixe z tels que :
a) z' est un nombre réel ;
b) z' est un nombre imaginaire pur.

38 Dans le plan complexe, on note $\mathscr{E}$ l'ensemble des points M d'affixe z tels que $Z = z^2 + z$ soit un nombre réel.
a) Chacun des points suivants appartient-il à l'ensemble $\mathscr{E}$?
• A d'affixe 5 ;
• B d'affixe $-\frac{1}{2} + 2i$;
• C d'affixe $1+i$.
b) Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$.
c) Représenter cet ensemble dans le plan complexe.

Module d'un nombre complexe

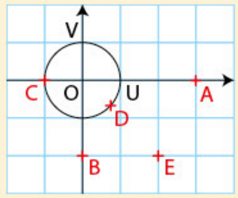
Cours 2

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O ; \overrightarrow{OU}, \overrightarrow{OV}\right)$.

Questions flash À l'oral

39 Déterminer mentalement le module de chaque nombre complexe.
a) $z_1 = 1+i$ **b)** $z_2 = 3-4i$ **c)** $z_3 = 7$
d) $z_4 = 5i$ **e)** $z_5 = -8$ **f)** $z_6 = 3-i$

40 Lire graphiquement le module de l'affixe de chacun des points A, B, C, D et E représentés ci-contre.



41 Vérifier mentalement que chaque nombre complexe appartient à l'ensemble $\mathbb{U}$.
a) $z_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ **b)** $z_2 = i$
c) $z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$ **d)** $z_4 = 0{,}6 + 0{,}8i$

42 Calculer le module de chaque nombre complexe.
a) $z_1 = 3+3i$ **b)** $z_2 = -\sqrt{3}+i$
c) $z_3 = -\frac{2}{5}i$ **d)** $z_4 = -6+6i\sqrt{3}$

43 **1.** Calculer le module de $\sqrt{3}-i$, puis de $1+5i$.
2. En déduire le module de chaque nombre complexe.
a) $\left(\sqrt{3}-i\right)(1+5i)$ **b)** $(1+5i)^4$
c) $\frac{1}{1+5i}$ **d)** $\frac{\sqrt{3}-i}{1+5i}$

Pour les exercices 44 à 47, calculer le module de chaque nombre complexe.

44 **a)** $z_1 = \frac{1}{2-3i}$ **b)** $z_2 = \frac{1-i\sqrt{3}}{5i}$

45 **a)** $z_1 = \left(\sqrt{3}+i\right)^{10}$ **b)** $z_2 = (2-i)^5$

46 **a)** $z_1 = \frac{-4+5i}{-1-i}$ **b)** $z_2 = \frac{66+77i}{66-77i}$

47 **a)** $z_1 = (5+2i)\left(\sqrt{3}+i\sqrt{6}\right)$ **b)** $z_2 = \left(\frac{\sqrt{3}-i}{4i}\right)^3$

48 **1.** Dans chaque cas, déterminer le module de z.
a) $z = 1+i$ **b)** $z = 1-i\sqrt{3}$
2. Dans chacun des cas précédents, en déduire sans calculs supplémentaires, le module de $\overline{z}$, $-z$, iz, $4z$.

49 À l'aide de la calculatrice, déterminer le module de chaque nombre complexe.

a) $z_1 = 18 + 27i$ **b)** $z_2 = -20 + 16i$ **c)** $z_3 = 117 + 13i$

Pour accéder aux outils pour les nombres complexes :
- **Casio :** OPTN F3 (COMPLEX)
- **TI :** math ▶▶ (CMPLX)
- **NumWorks :** Nombres complexes ▷

Utiliser abs pour calculer un module.

50 Dans le plan complexe, A, B et C sont les points d'affixes $z_A = 1 + i$, $z_B = 3 + 4i$ et $z_C = 4 - i$.

a) Calculer les affixes a, b et c des vecteurs $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$.

b) Déterminer les modules des nombres complexes a, b et c.

c) Démontrer que le triangle ABC est rectangle isocèle en A.

51 Dans le plan complexe, A, B et M sont les points d'affixes $z_A = -1 + 5i$, $z_B = 3 + i$ et $z_M = -5 - 3i$.

a) Calculer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$.

b) Démontrer que le point M appartient à la médiatrice du segment [AB].

52 Dans le plan complexe, I et A sont les points d'affixes $z_I = 1{,}8 - 3{,}5i$ et $z_A = -1{,}8 + 1{,}3i$.

a) Calculer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{IA}$.

b) Déterminer le rayon du cercle $\mathscr{C}$ de centre I passant par le point A.

c) Le point M d'affixe $z_M = 5{,}4 + 1{,}3i$ appartient-il au cercle $\mathscr{C}$?

53 Dans le plan complexe, A, B et C sont les points d'affixes $z_A = 2i$, $z_B = \sqrt{3} - i$ et $z_C = -\sqrt{3} - i$.

a) Calculer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.

b) Quelle est la nature du triangle ABC ?

54 On donne le point A d'affixe $-\frac{1}{2} + i$.

a) M est un point d'affixe z.
Déterminer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AM}$.

b) Déterminer l'ensemble $\mathscr{F}$ des points M du plan dont l'affixe vérifie $\left|z + \frac{1}{2} - i\right| = \sqrt{2}$.

55 On donne les points A et B d'affixes :

$$z_A = 2 + 5i \text{ et } z_B = -3i.$$

a) M est un point d'affixe z.
Déterminer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$.

b) Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M du plan dont l'affixe vérifie $|z - 2 - 5i| = |z + 3i|$.

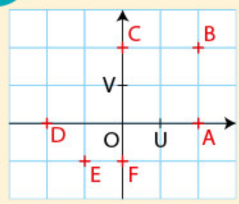
Arguments d'un nombre complexe non nul

Cours 2 et 3

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O\,;\overrightarrow{OU}, \overrightarrow{OV}\right)$.

Questions flash — À l'oral

56 Lire graphiquement un argument de l'affixe de chacun des points A, B, C, D, E et F représentés ci-contre.



57 Déterminer mentalement un argument de chaque nombre complexe.

a) $z_1 = 5$ **b)** $z_2 = 7i$ **c)** $z_3 = 1 + i$

d) $z_4 = -3i$ **e)** $z_5 = 2 - 2i$ **f)** $z_6 = -11$

58 Déterminer mentalement un argument de chaque nombre complexe.

a) $z_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ **b)** $z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

Pour les exercices 59 à 62, déterminer le module et un argument de chaque nombre complexe puis l'écrire sous forme trigonométrique.

59 **a)** $z_1 = \frac{2}{5}i$ **b)** $z_2 = 3 + 3i$

60 **a)** $z_1 = -4i$ **b)** $z_2 = -\sqrt{3} + i$

61 **a)** $z_1 = -10$ **b)** $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$

62 **a)** $z_1 = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$ **b)** $z_2 = 2 - 2i\sqrt{3}$

63 Dans chaque cas, écrire sous forme algébrique le nombre complexe z.

a) $z = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

b) $z = \sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$

c) $z = \sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$

d) $z = 8\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$

64 **1.** Dans chaque cas, déterminer un argument de z.

a) $z = 1 + i$ **b)** $z = 1 - i\sqrt{3}$

2. Dans chacun des cas précédents, en déduire, sans calculs supplémentaires, un argument de $\overline{z}$, $-z$, $4z$.

65 On donne $z = -4\left(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)$.

a) Expliquer pourquoi cette écriture n'est pas une forme trigonométrique de z.
b) Déterminer alors une forme trigonométrique de z.

66 On donne $z = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)$.

a) Expliquer pourquoi cette écriture n'est pas une forme trigonométrique de z.
b) Déterminer alors une forme trigonométrique de z.

67 Dans chaque cas, donner une forme trigonométrique du nombre complexe z.

a) $z = -2\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$

b) $z = 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)$

c) $z = 5\left(-\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)$

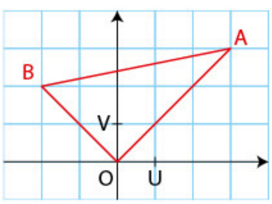
68 À l'aide de la calculatrice, déterminer un argument, en rad, du nombre complexe z. *Arrondir au centième.* (Voir exercice **49** si besoin).

a) $z_1 = 1 - 3i$ **b)** $z_2 = -5 + i$ **c)** $z_3 = -\frac{1}{4} - 7i$

```
Arg (2+5i)
            1.19028995
```

69 **a)** Dans le plan complexe, placer les points A, B, C, D d'affixes respectives $1+i, -1-i, 1-i, -1+i$.
b) Lire graphiquement un argument de chacun de ces nombres complexes.

70 **a)** Lire les affixes des points A et B placés dans le plan complexe ci-contre.
b) Déterminer un argument de l'affixe de A, puis de B.
c) En déduire la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$ et la nature du triangle AOB.



71 A, B et C sont les points du plan complexe d'affixes $z_A = 1 + i$, $z_B = 3 + \left(1 + 2\sqrt{3}\right)i$ et $z_C = 1 + \sqrt{3}$.

a) Déterminer l'affixe des points M et N tels que :
$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{AC}.$$
b) Déterminer un argument de l'affixe de chacun des points M et N.
c) Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A.

72 A et B sont les points du plan complexe d'affixes :
$$z_A = -2\sqrt{3} + 2i \text{ et } z_B = \overline{z}_A.$$
a) Déterminer un argument de l'affixe de chacun des points A et B.
b) En déduire la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$.
c) Démontrer que le triangle OAB est équilatéral.

73 **Algo** python

z est un nombre complexe non nul de forme algébrique $z = x + iy$ avec x et y nombres réels et dont une forme trigonométrique est $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ avec r, θ nombres réels et $r > 0$.

Voici une fonction **T** écrite en langage Python de paramètres x, y qui renvoie pour résultats r, $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.

```
1 from math import *
2
3 def T(x,y):
4     r=
5     c=
6     s=
7     return r,c,s
```

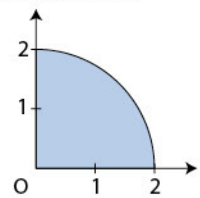
a) Compléter les lignes 4, 5 et 6 de ce programme.
b) Saisir et tester cette fonction.

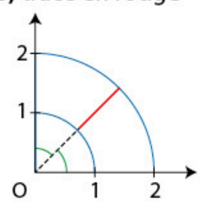
Pour les exercices 74 et 75, dans chaque cas, déterminer graphiquement l'ensemble des points M du plan complexe dont l'affixe vérifie la (ou les) condition(s) donnée(s).

74 **a)** $\arg(z) = \frac{\pi}{4}[2\pi]$ **b)** $\arg(z) = -\frac{\pi}{3}[2\pi]$

75 **a)** $\arg(z) = \frac{\pi}{6}[2\pi]$ ou $\arg(z) = -\frac{\pi}{4}[2\pi]$
b) $|z| \geqslant 2$ et $\arg(z) = \pi[2\pi]$

76 Caractériser à l'aide du module et d'un argument de son affixe z, l'appartenance d'un point M à l'ensemble :
a) coloré en bleu **b)** tracé en rouge





Pour les exercices 77 à 79, déterminer et représenter graphiquement l'ensemble des points M dont l'affixe vérifie la condition donnée.

77 **a)** $\arg(\overline{z}) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$ **b)** $\arg(-z) = \frac{5\pi}{4}[2\pi]$

78 **a)** $\arg(1+z) = \frac{\pi}{6}[2\pi]$ **b)** $\arg(z-i) = \pi[2\pi]$

79 $\arg(z+i) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$ ou $\arg(z+i) = -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

EXO Exercices interactifs

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O;\overrightarrow{OU},\overrightarrow{OV}\right)$.

80 QCM **Dans chaque cas, donner la réponse exacte sans justifier.**

		A	B	C	D
1	Les points A et B ont pour affixes : $z_A = 3-4i$ et $z_B = 5-i$. L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est égale à …	$8-5i$	$2+3i$	$-2-3i$	$2-3i$
2	Les points A et B ont pour affixes : $z_A = 6+i$ et $z_B = -4+3i$ Le milieu I du segment [AB] a pour affixe …	$-10+2i$	$-5+i$	$1+2i$	$2+4i$
3	L'ensemble des points M d'affixe z tels que $Z = i\overline{z}$ soit réel est …	la droite d'équation $y=0$	la droite d'équation $y=x$	le cercle de centre O et de rayon 2	l'axe des imaginaires purs
4	Le module du nombre complexe $z = 2-9i$ est égal à …	11	$\sqrt{11}$	85	$\sqrt{85}$
5	Les points A et B ont pour affixes : $z_A = 5+3i$ et $z_B = 7-\frac{1}{2}i$. La norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est égale à …	$\frac{\sqrt{65}}{2}$	$\frac{65}{2}$	$\frac{65}{4}$	$\frac{\sqrt{601}}{2}$

81 QCM **Dans chaque cas, donner la (ou les) réponse(s) exacte(s) sans justifier.**

		A	B	C	D
1	Un argument du nombre complexe $-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ est égal à …	$-\frac{2\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$
2	z est un nombre complexe non nul d'argument $\frac{\pi}{12}$. Un argument de $\overline{z}$ est égal à …	$-\frac{13\pi}{12}$	$-\frac{\pi}{12}$	$\frac{11\pi}{12}$	$\frac{23\pi}{12}$
3	Γ est l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\lvert z-i\rvert = 1$. Alors …	Γ est un cercle de centre A(i)	Γ est un cercle de rayon 1	Γ est une demi-droite	Γ est une droite
4	L'ensemble des points M d'affixe z tels que $\arg(z) = \frac{\pi}{8}\,[2\pi]$ est …	une droite privée de O	un cercle de centre O	une demi-droite d'origine O, O exclu	un demi-cercle de centre O

82 Vrai/Faux **Dans chaque cas, dire si l'affirmation est vraie ou fausse en justifiant.**

1 On donne le nombre complexe $z = 2\sqrt{2}(1-i)$.

Affirmation : une forme trigonométrique de z est $4\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

2 Les points A et B ont pour affixes $z_A = -1+\frac{1}{2}i$ et $z_B = 3-i$.

Affirmation : le point M d'affixe $-9+\frac{7}{2}i$ appartient à la droite (AB).

3 Les points A, B et C ont pour affixes $z_A = 3+4i$, $z_B = -1+i$ et $z_C = 5-2i$.

Affirmation : l'affixe du point M tel que $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ est $\frac{11}{2}i$.

Vérifiez vos réponses : p. 293

83 Démontrer des propriétés du cours

$\left(O;\overrightarrow{OU},\overrightarrow{OV}\right)$ est un repère orthonormé direct du plan complexe.
On donne deux points A et B du plan complexe d'affixes z_A et z_B.

1. On se propose de démontrer que l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $z_B - z_A$.

Rédiger la démonstration de cette propriété en suivant le guide ci-dessous.

(1) Écrire la relation de Chasles : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{O\ldots} - \overrightarrow{O\ldots}$

(2) Donner les affixes de chaque vecteur : $\overrightarrow{OA}$ a pour affixe ... et $\overrightarrow{OB}$ a pour affixe ...

(3) En déduire l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$:

$$z_{\overrightarrow{AB}} = \ldots$$

(4) Conclure : L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est ...

2. On note I le milieu du segment [AB].
Exprimer l'affixe z_I du point I en fonction de z_A et z_B.

84 Établir des propriétés géométriques

$\left(O;\overrightarrow{OU},\overrightarrow{OV}\right)$ est un repère orthonormé direct du plan complexe.
On donne deux points distincts A et B du plan complexe d'affixes z_A et z_B.

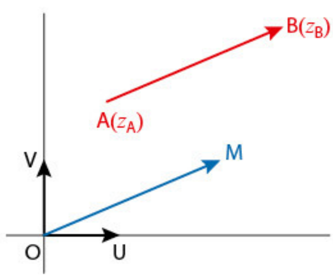
Propriétés : $AB = |z_B - z_A|$ et $\left(\overrightarrow{OU};\overrightarrow{AB}\right) = \arg(z_B - z_A)[2\pi]$

Voici une démonstration de ces propriétés.

On note M le point tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$ et z_M l'affixe de ce point. Alors :

$$z_M - 0 = z_B - z_A$$

donc $z_M = z_B - z_A$.
Ainsi, $OM = |z_M| = |z_B - z_A|$
donc $AB = |z_B - z_A|$.
De plus, $\left(\overrightarrow{OU};\overrightarrow{OM}\right) = \arg(z_M)[2\pi]$
soit $\left(\overrightarrow{OU};\overrightarrow{OM}\right) = \arg(z_B - z_A)[2\pi]$.
Or, $\left(\overrightarrow{OU};\overrightarrow{OM}\right) = \left(\overrightarrow{OU};\overrightarrow{AB}\right)$, donc $\left(\overrightarrow{OU};\overrightarrow{AB}\right) = \arg(z_B - z_A)[2\pi]$.



Justifier les égalités écrites en vert.

85 Démontrer des propriétés du module

z et z' désignent deux nombres complexes avec $z' \neq 0$.

a) À partir de l'égalité $z' \times \frac{1}{z'} = 1$, démontrer que $\left|\frac{1}{z'}\right| = \frac{1}{|z'|}$.

b) À partir de l'égalité $\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'}$, démontrer que $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$.

86 Déterminer un ensemble de points

On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|i + z| = 1 + |z|$.
On pose $z = x + iy$ avec x et y nombres réels.

a) Démontrer que M appartient à l'ensemble $\mathcal{F}$ si, et seulement si,

$$y = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

b) Déterminer alors l'ensemble $\mathcal{F}$.

Vidéo JAICOMPRIS.COM

Toutes les démonstrations au programme en vidéo

Liste des démonstrations :

- Formule $|z|^2 = z\bar{z}$.
- Module d'un produit.
- Module d'une puissance.

Conseil
Penser à la relation :
$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OI}$.

Conseil

$y = \sqrt{x^2 + y^2}$

équivaut à

$$\begin{cases} y \geqslant 0 \\ y^2 = x^2 + y^2 \end{cases}.$$

Travailler dans le plan complexe

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O ; \overrightarrow{OU}, \overrightarrow{OV}\right)$.

87 On donne les points A, B et I d'affixes :

$$z_A = -2 - i,\ z_B = 4 + i \text{ et } z_I = i.$$

Déterminer les affixes des points C et D tels que le quadrilatère ABCD soit un parallélogramme de centre I.

88 On donne les points A et B d'affixes :

$$z_A = -2 + 2i \text{ et } z_B = 2 + 4i.$$

1. D est le point d'affixe $z_D = 7 + \frac{7}{2}i$.

a) Déterminer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{OD}$ et $\overrightarrow{AB}$.

b) Démontrer que les droites (OD) et (AB) sont parallèles.

2. M est un point d'affixe $z_M = x + iy$ avec x et y nombres réels tels que $(x ; y) \neq (0 ; 0)$.

Démontrer que les droites sont (OM) et (AB) sont parallèles si, et seulement si, $2y - x = 0$.

89 On rappelle que deux vecteurs $\vec{u}(x ; y)$ et $\vec{v}(x' ; y')$ du plan complexe sont orthogonaux si, et seulement si,

$$xx' + yy' = 0.$$

1. On donne deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan complexe d'affixes respectives z et z'.

Démontrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $z\overline{z'}$ est un imaginaire pur.

2. A, B et C sont les points d'abscisses respectives :

$$z_A = 1 + i,\ z_B = \frac{9}{5} - 2i \text{ et } z_C = 11 + \frac{11}{3}i.$$

a) Déterminer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

b) À l'aide de la question **1.**, démontrer que le triangle ABC est rectangle en A.

90 A, B, C et D sont les points d'affixes respectives :

$$-3 + i,\ 2 + 2i,\ 5 - i \text{ et } -1 - 4i.$$

a) Démontrer qu'il existe un point unique G tel que :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}.$$

Quelle est son affixe ?

b) On note I, J, K et L les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD] et [DA].

Démontrer que G est le milieu de chacun des segments [IK] et [JL].

c) On considère le vecteur :

$$\vec{u} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}.$$

Calculer l'affixe du vecteur $\vec{u}$.

Vérifier que $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}\vec{u}$.

91 On se propose de déterminer l'ensemble $\mathcal{F}$ des nombres complexes non nuls z tels que les points A, N et P d'affixes respectives 1, z^2 et $\frac{1}{z}$ soient alignés.

1. On pose $z = -\frac{1}{2} + i$.

a) Déterminer la forme algébrique de z^2, puis de $\frac{1}{z}$.

b) Calculer l'affixe de chacun des vecteurs $\overrightarrow{PA}$ et $\overrightarrow{PN}$.

c) Démontrer que les points A, N et P sont alignés.

2. a) Démontrer que pour tout nombre complexe $z \neq 0$,

$$z^2 - \frac{1}{z} = \left(z^2 + z + 1\right)\left(1 - \frac{1}{z}\right).$$

b) En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{PA}$ et $\overrightarrow{PN}$ sont colinéaires si, et seulement si, $z^2 + z + 1$ est un nombre réel.

3. On pose $z = x + iy$ avec x et y nombres réels.

a) Déterminer la forme algébrique de $z^2 + z + 1$.

b) En déduire alors l'ensemble $\mathcal{F}$.

Utiliser modules et arguments

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O ; \overrightarrow{OU}, \overrightarrow{OV}\right)$.

92 On donne les points A, B et C d'affixes respectives :

$$a = \sqrt{3} + i,\ b = ia \text{ et } c = ib.$$

1. a) Démontrer que A, B et C appartiennent au cercle de centre O et de rayon 2.

b) Écrire b et c sous forme algébrique.

Que peut-on dire des points A et C ?

c) Placer précisément ces trois points dans le plan complexe.

2. a) Calculer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AC}$.

b) Démontrer que le triangle ABC est rectangle isocèle en B.

c) Déterminer l'affixe du point D tel que ABCD soit un carré.

93 On considère le nombre complexe $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1. a) Donner une forme algébrique j^2 et j^3.

b) Donner une forme trigonométrique de j, j^2 et j^3.

Vérifier que ces nombres complexes appartiennent à l'ensemble $\mathbb{U}$.

2. On note P, Q et R les points images respectifs de j, j^2 et j^3.

a) Placer ces points dans le plan complexe.

b) Démontrer que le triangle PQR est équilatéral.

94 On donne les points A et B d'affixes :

$$z_A = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } z_B = \overline{z}_A.$$

1. a) Donner une forme trigonométrique de z_A et de z_B.
b) Construire avec précision dans le plan complexe les points A et B. Laisser apparents les traits de construction.
2. On donne le point D d'affixe $z_D = \frac{7}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et on note K le milieu de [AD].
a) Calculer l'affixe du point K.
b) Placer les points K et D.
3. a) Déterminer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{KA}$ et $\overrightarrow{KB}$.
b) Démontrer que les points A, B et D appartiennent à un même cercle de centre le point K.
c) Déterminer la nature du triangle ABD.

95 On considère les nombres complexes :

$$a = 1 + i\sqrt{3} \text{ et } b = -\sqrt{3} + i.$$

On note A et B les points d'affixes respectives a et b.
1. a) Donner une forme trigonométrique du nombre complexe a, puis de b.
b) Placer précisément les points A et B dans le plan complexe.
c) Démontrer que le triangle OAB est rectangle isocèle en O.
2. K est le milieu du segment [AB].
a) Placer le point K.
b) Calculer son affixe.
3. On considère le nombre complexe :

$$c = 1 - \sqrt{3} + i\left(1 + \sqrt{3}\right).$$

On note C le point d'affixe c.
a) Montrer que K est le milieu du segment [OC].
b) Placer le point C et démontrer que le quadrilatère OACB est un carré.

96 À tout point M d'affixe $z_M = x + iy$ avec x et y nombres réels, on associe le point M′ d'affixe $z_{M'} = -iz_M$.
On désigne par I le milieu du segment [UM].
1. Dans cette question, on prend :

$$z_M = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

a) Donner la forme algébrique de z_M.
b) Déterminer la forme algébrique de $z_{M'}$ et donner l'affixe du vecteur $\overrightarrow{VM'}$.
c) Démontrer que VM′ = 2OI.
2. On revient au cas général.
a) Déterminer l'affixe du point M′ en fonction de x et y.
b) Déterminer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{VM'}$ et $\overrightarrow{OI}$.
c) Démontrer que VM′ = 2OI.

97 On donne les points A et B d'affixes :

$$z_A = 1 + i\sqrt{3} \text{ et } z_B = 2i.$$

1. a) Déterminer une forme trigonométrique de z_A et z_B.
b) Placer avec précision ces points sur une figure.
2. F est le point d'affixe $z_F = z_A + z_B$.
a) Placer F sur la figure.
b) Donner la forme algébrique de z_F.
c) Démontrer que OAFB est un losange.
3. a) Justifier que $\widehat{UOF} = \frac{5\pi}{12}$ et écrire une forme trigonométrique de z_F.
b) Démontrer alors que :

$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \text{ et } \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

98 A, B et C sont les points d'affixes :

$$z_A = 2,\ z_B = 1 + i\sqrt{3} \text{ et } z_C = 1 - i\sqrt{3}.$$

1. a) Donner une forme trigonométrique de z_B et z_C.
b) Placer les points A, B, C dans le plan complexe.
c) Déterminer et construire l'ensemble $\mathcal{D}$ des points M d'affixe z tels que $|z| = |z - 2|$.
d) Justifier que B et C appartiennent à $\mathcal{D}$.
2. À tout point M d'affixe z, avec $z \neq z_A$, on associe le point M′ d'affixe z' défini par $z' = \frac{-4}{z-2}$.
a) Déterminer les points associés à B et C.
b) Démontrer que pour tout nombre complexe $z \neq 2$,

$$|z' - 2| = \frac{2|z|}{|z-2|}.$$

c) On suppose que M est un point de $\mathcal{D}$.
Démontrer que le point M′ appartient à un cercle Γ dont on précisera le centre et le rayon.
d) Justifier que B et C appartiennent à Γ.

99 À tout point M distinct de O, d'affixe z, on associe le point M′ d'affixe z', tel que

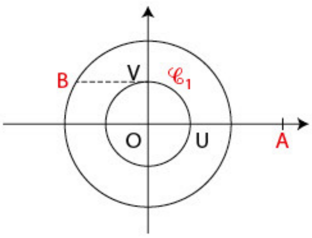
$$z' = \frac{20}{\overline{z}}.$$

1. Déterminer les points A′, B′, C′ associés respectivement aux points :
- A d'affixe $3 + 4i$;
- B d'affixe $10i$;
- C d'affixe $\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$.

2. a) Démontrer que $\overrightarrow{OM'} = \frac{20}{|z|^2}\overrightarrow{OM}$.
Qu'en déduit-on pour les points O, M, M′ ?
b) Quel est l'ensemble décrit par le point M′ lorsque M décrit le cercle Γ de centre O et de rayon 1.

100 W est le point d'affixe -1.
On note $\mathscr{E}$ l'ensemble des points du plan distincts de O, U et W.
À tout point M d'affixe z appartenant à l'ensemble $\mathscr{E}$, on associe le point N d'affixe z^2 et le point P d'affixe z^3.
1. Prouver que les points M, N et P sont deux à deux distincts.
2. a) Donner les affixes des vecteurs $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{MP}$ et $\overrightarrow{NP}$.
b) Avec le théorème de Pythagore, démontrer que le triangle MNP est rectangle en P si, et seulement si,
$$|z+1|^2+|z|^2=1.$$
c) Démontrer que $|z+1|^2+|z|^2=1$ équivaut à :
$$\left(z+\frac{1}{2}\right)\overline{\left(z+\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{4}.$$
d) En déduire l'ensemble des points M appartenant à $\mathscr{E}$ tels que le triangle MNP soit rectangle en P.

101 On considère la fonction f qui à tout point M d'affixe z non nulle associe le point $M'=f(M)$ d'affixe z' tel que $z'=\frac{z}{|z|}(2-|z|)$.
1. Tracer le cercle $\mathscr{C}_1$ de centre O et de rayon 1 sur une figure que l'on complétera au fur et à mesure des questions.



2. Pour un complexe $z\neq 0$, on note $z=r(\cos(\alpha)+i\sin(\alpha))$ avec $|z|=r$ et $\arg(z)=\alpha[2\pi]$.
Montrer que $z'=(2-r)(\cos(\alpha)+i\sin(\alpha))$.
3. A et B ont pour affixes respectives $a=3$ et $b=-\sqrt{3}+i$.
a) Déterminer les affixes a' et b' de $A'=f(A)$ et $B'=f(B)$.
b) Placer A, B, A′ et B′ sur la figure.
4. a) Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M distincts de O dont l'image par f est O.
b) Représenter $\mathscr{E}$.
5. Montrer que le cercle $\mathscr{C}_1$ est l'ensemble des points M distincts de O tels que $f(M)=M$.
6. Pour cette question, M est un point distinct de O, n'appartenant pas au cercle $\mathscr{C}_1$.
On note I le milieu du segment [MM′] où $M'=f(M)$.
a) Montrer que I appartient à $\mathscr{C}_1$.
b) Montrer que I appartient à la demi-droite [OM).
c) Expliquer une construction du point M′ image par f du point M.

102 A est le point d'affixe $1+i$.
Au point M d'affixe z, on associe le point M′ d'affixe z' telle que :
$$z'=\frac{1}{2}(z+i\overline{z}).$$
1. On pose $z=x+iy$ et $z'=x'+iy'$ avec x, y, x', y' réels.
a) Démontrer les égalités suivantes :
$$x'=\frac{1}{2}(x+y) \text{ et } y'=\frac{1}{2}(x+y).$$
En déduire que le point M′ appartient à la droite (OA).
b) Déterminer l'ensemble des points M tels que M = M′.
c) Démontrer que pour tout point M du plan, les vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{OA}$ sont orthogonaux.
2. M_1 est le point d'affixe $z_1=iz$, M_2 est le point d'affixe $z_2=\overline{z}$ et M_3 est le point d'affixe z_3 tel que le quadrilatère $OM_1M_3M_2$ soit un parallélogramme.
a) Dans cette question uniquement, M a pour affixe $4+i$, placer les points M, M_1, M_2 et M_3.
b) Exprimer z_3 en fonction de z.
c) $OM_1M_3M_2$ est-il un losange ? Justifier.
d) Vérifier que $z'-z=\frac{1}{2}iz_3$.
En déduire que $MM'=\frac{1}{2}OM_3$.
3. Démontrer que les points M, M_1, M_2 et M_3 appartiennent à un même cercle de centre O si, et seulement si, $MM'=\frac{1}{2}OM$.
Lorsque M ∉ (OA), donner la mesure, en radian, de l'angle $\widehat{M'OM}$.

S'entraîner à la logique

→ p. 290

103 **Implications**

Z est un nombre complexe non nul.
On note **P** et **Q** les propositions suivantes :
P : « Z est un nombre réel ».
Q : « $\arg(Z)=\pi[2\pi]$ ».
Dans chaque cas, dire si l'affirmation est vraie ou fausse. Justifier.
a) La proposition **P** implique la proposition **Q**.
b) La proposition **Q** implique la proposition **P**.
c) Les propositions **P** et **Q** sont équivalentes.

104 **Quantificateurs**

Dire si la proposition **P** est vraie ou fausse. Justifier la réponse.
P : « Pour tout nombre complexe z imaginaire pur, $|i+z|=1+|z|$ ».

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O\,;\overrightarrow{OU},\overrightarrow{OV}\right)$.

105 Étudier une transformation du plan complexe

Raisonner | Calculer | Communiquer

f est la fonction qui à tout point M d'affixe z, associe le point M′ d'affixe z' telle que :

$$z' = \frac{(3+4i)z+5\overline{z}}{6}.$$

1. a) A, B et C sont les points d'affixes :

$$z_A = 1+2i,\ z_B = 1 \text{ et } z_C = 3i.$$

Déterminer les affixes des points A′, B′, C′ images respectives des points A, B, C par f.

b) Placer les points A, B, C, A′, B′, C′ dans le plan complexe.

2. On pose $z = x+iy$ avec x et y nombres réels.
Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de z' en fonction de x et y.

3. Montrer que l'ensemble des points M tels que M′ = M est la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = \frac{1}{2}x$.
Tracer $\mathscr{D}$.

4. M est un point quelconque du plan et M′ est son image par f.
Démontrer que M′appartient à la droite $\mathscr{D}$.

5. a) Démontrer que pour tout nombre complexe z :

$$\frac{z'-z}{z_A} = \frac{z+\overline{z}}{6}+i\frac{z-\overline{z}}{3}.$$

b) En déduire que le nombre $\frac{z'-z}{z_A}$ est réel.

c) Prouver alors que, si M′ ≠ M, les droites (OA) et (MM′) sont parallèles.

6. Un point quelconque N étant donné, comment construire son image N′ ?

Conseil : Étudier deux cas suivant que N appartient à $\mathscr{D}$ ou non.

106 Étudier une intersection

Problème ouvert

Représenter | Raisonner | Calculer

A, B et C sont les points d'affixes :

$$z_A = 1,\ z_B = i \text{ et } z_C = 3+2i.$$

M désigne un point du plan complexe d'affixe z.

a) Écrire, en fonction de z, les normes des vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{CM}$.

b) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z, telle que : $\quad |z-1| = |z-i|$ et $|z-3-2i| \leqslant 2$.

107 Tice Déterminer un lieu géométrique

Chercher | Représenter | Raisonner

A et B sont les points d'affixes respectives :

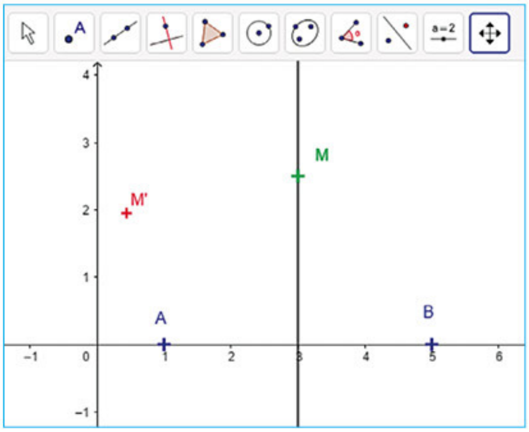
$$z_A = 1 \text{ et } z_B = 5.$$

Δ est la médiatrice du segment [AB].
À tout point M d'affixe z, différent de A, on associe le point M′ d'affixe z' telle que :

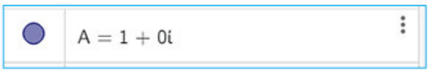
$$z' = \frac{2z-10}{z-1}.$$

On se propose de déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M′ lorsque M parcourt Δ.

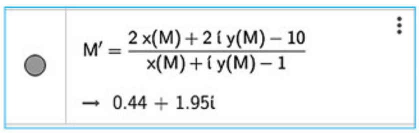
1. Conjecture avec un logiciel de géométrie



a) Réaliser la figure ci-dessus.
• Saisir par exemple :



• Créer la médiatrice Δ du segment [AB] et placer un point M sur Δ.
• Saisir :



b) Afficher la trace de M′ et déplacer le point M afin de conjecturer la nature de l'ensemble $\mathscr{E}$.

2. Démonstration

M d'affixe z est un point quelconque de Δ.

a) Justifier que $|z-5| = |z-1|$ et en déduire que $|z'| = 2$.

b) Que peut-on dire alors du point M′ et de l'ensemble $\mathscr{E}$?

c) F est un point d'affixe f avec $|f| = 2$ et $f \neq 2$.
Démontrer qu'il existe un point K d'affixe k, de la droite Δ tel que :

$$f = \frac{2k-10}{k-1}.$$

d) Déterminer alors l'ensemble $\mathscr{E}$.

108 Étudier une suite de points

Narration de recherche

Chercher | Raisonner | Calculer

Rédiger les différentes étapes de la recherche, sans omettre les fausses pistes et les changements de méthode.

Problème

A et B sont les points d'affixes respectives 4 et $4i$, C et D sont les points tels que ABCD est un carré de centre l'origine O du repère.

Pour tout entier naturel non nul n, on note M_n le point d'affixe $z_n = (1+i)^n$.

Déterminer un nombre entier naturel non nul n_0 tel que pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$, le point M_n est à l'extérieur du carré ABCD.

109 Study a real number

Raisonner | Calculer | Communiquer

n is a positive integer and z is a complex number with modulus 1 such that z^{2n} is not -1.

Show that $\dfrac{z^n}{1+z^{2n}}$ is a real number.

110 Prendre des initiatives

Chercher | Représenter | Raisonner

Les points H et O sont respectivement l'orthocentre et le centre du cercle $\mathscr{C}$ circonscrit au triangle ABC.

L'orthocentre est le point de concours des hauteurs de ABC et le centre du cercle circonscrit à ABC est le point de concours des médiatrices de ses côtés.

1. Le point M est défini par :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC}$, puis $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AC}$.

b) En déduire que $M = H$.

2. On se propose d'établir que les symétriques de H par rapport aux côtés du triangle appartiennent à $\mathscr{C}$ en utilisant les nombres complexes.

On considère le repère orthonormé $\left(O\,;\vec{u},\vec{v}\right)$ où $\vec{u} = \dfrac{1}{BC}\overrightarrow{BC}$ et on note a, b, c les affixes des points A, B, C dans le repère.

a) Exprimer l'affixe h du point H en fonction de a, b et c.

b) h' est l'affixe de H', symétrique de H par rapport à la droite (BC).

Comparer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{BH'}$ et $\overrightarrow{BH}$.

En déduire que $h' = \overline{a} + \overline{c} + b$.

c) Évaluer $\overline{c} + b$ et conclure.

111 Imaginer une stratégie

Chercher | Représenter | Raisonner

Déterminer les points M d'affixe non nulle z du plan complexe tels que z, $\dfrac{1}{z}$ et $1+z$ aient le même module.

112 Étudier une inversion

Raisonner | Calculer

À tout point M d'affixe z non nulle, on associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = -\dfrac{1}{\overline{z}}$.

1. a) Montrer que $z' = -\dfrac{z}{|z|^2}$.

b) En déduire que les points O, M, M' sont alignés.

2. Démontrer que $\overline{z'+1} = \dfrac{1}{z}(z-1)$.

3. On nomme A et B les points d'affixes respectives 1 et -1.

On désigne par Γ le cercle de centre A contenant le point O.

Γ^* désigne le cercle Γ privé du point O.

On suppose dans cette question que le point M appartient à Γ^*.

a) Justifier l'égalité $|z-1| = 1$.

Démontrer que $|z'+1| = |z'|$. Interpréter géométriquement cette égalité.

b) Déduire de ce qui précède une construction géométrique du point M' à partir du point M.

4. On désigne par $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre [AB].

On suppose dans cette question que le point M appartient à $\mathscr{C}$.

Démontrer que M' appartient à $\mathscr{C}$ et construire M'.

113 Étudier une implication et sa réciproque

Raisonner | Calculer

À tout nombre complexe z différent de $-i$, on associe le nombre complexe Z défini par :

$$Z = \frac{1+iz}{1-iz}.$$

1. Donner la forme algébrique de Z dans chacun des cas suivants :

- $z = 3$
- $z = -4$
- $z = i$
- $z = 1+i$

2. a) Démontrer que si z est un nombre réel, alors Z appartient à l'ensemble $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module égal à 1.

b) La réciproque de l'implication précédente est-elle vraie ?

Le démontrer.

114 Inégalité triangulaire pour deux nombres complexes, cas d'égalité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct.

1. Résultats préliminaires

Z désigne un nombre complexe.

a) Démontrer que $\mathrm{Re}(Z) \leqslant |Z|$.

b) Démontrer que $\mathrm{Re}(Z) = |Z|$ si, et seulement si, Z est un nombre réel positif.

CONSEIL
Envisager les cas $\mathrm{Re}(Z) \geqslant 0$ et $\mathrm{Re}(Z) < 0$.

2. Inégalité triangulaire pour deux nombres complexes

z et z' désignent deux nombres complexes.

a) À partir de l'égalité $|z+z'|^2 = (z+z')\left(\overline{z+z'}\right)$, démontrer que :

$$|z+z'|^2 = |z|^2 + 2\mathrm{Re}\left(z\overline{z'}\right) + |z'|^2.$$

b) À l'aide de l'inégalité de la question **1. a)**, démontrer que :

$$|z+z'|^2 \leqslant |z|^2 + 2|z||z'| + |z'|^2.$$

c) En déduire alors l'inégalité triangulaire :

$$|z+z'| \leqslant |z| + |z'|.$$

d) À l'aide de la question **1. b)**, démontrer que $|z+z'| = |z| + |z'|$ si, et seulement si, le nombre complexe $z\overline{z'}$ est un nombre réel positif.

Dans le plan complexe, pour $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vecteurs d'affixes respectives z et z', l'inégalité triangulaire $|z+z'| \leqslant |z| + |z'|$ se traduit par $\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\| \leqslant \left\|\vec{u}\right\| + \left\|\vec{v}\right\|$.

3. Étude géométrique du cas d'égalité

On donne la forme algébrique des nombres complexes z et z' :

$z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ avec x, y, x', y' nombres réels.

a) Exprimer $z\overline{z'}$ en fonction de x, y, x' et y'.

b) Montrer que $z\overline{z'}$ est un nombre réel positif si, et seulement si,

$$\textbf{(1)} \quad \begin{cases} xy' - x'y = 0 \\ xx' + yy' \geqslant 0 \end{cases}.$$

c) Dans le plan complexe, on note $\vec{u}$ et $\vec{v}$ les vecteurs d'affixes respectives z et z'.

Traduire le système **(1)** à l'aide du déterminant du couple $\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)$ et du produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

d) En déduire que $z\overline{z'}$ est un nombre réel positif si, et seulement si, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens.

e) Conclure l'étude.

CONSEIL
Le déterminant de $\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)$, vu en Seconde, est égal à : $xy' - x'y$.

4. Une conséquence de l'inégalité triangulaire

z et z' désignent deux nombres complexes.

a) Démontrer que $|z| \leqslant |z-z'| + |z'|$ et en déduire que $|z| - |z'| \leqslant |z-z'|$.

b) Démontrer de même que :

$$|z'| - |z| \leqslant |z-z'|.$$

c) En déduire un encadrement de $|z| - |z'|$.

d) Justifier alors l'inégalité $\big||z| - |z'|\big| \leqslant |z-z'|$.

CONSEIL
Écrire $z = (z-z') + z'$ et appliquer l'inégalité triangulaire.

Algo python

115 Suite de nombres complexes du type $z_{n+1} = az_n + b$

$\left(O ; \overrightarrow{OU}, \overrightarrow{OV}\right)$ est un repère orthonormé direct du plan complexe.
Pour la figure, on prendra pour unité 5 cm.

(z_n) est la suite de nombres complexes définie par $z_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $z_{n+1} = \frac{1}{2}(1+i)z_n - 1 + i$.
Pour tout entier naturel n, on note M_n le point du plan complexe qui a pour affixe z_n.

1. a) Déterminer la forme algébrique de z_1, z_2, z_3 et z_4.
b) Placer, dans le plan complexe, les points M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4.

2. Voici une fonction **Suite_1** écrite dans le langage Python.

```
from cmath import *

def Suite_1(n):
    z=0
    for k in range(1,n+1):
        z=(1+1j)/2*z-1+1j
    return z
```

On importe le module **cmath** pour travailler avec les nombres complexes. Les nombres complexes se notent : $1+1j$, $3j$, $-1+0j$, …

a) Saisir cette fonction et l'exécuter pour $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ et $n = 4$.
Quels résultats retrouve-t-on ainsi ?
b) Utiliser cette fonction pour obtenir z_5, z_6, z_7 et z_8.
c) Placer les points M_5, M_6, M_7 et M_8 dans le plan complexe.

3. (Z_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $Z_n = z_n + 2$.
a) Quel est le vecteur dont l'affixe est Z_n ?
b) Démontrer que pour tout entier naturel n, $Z_{n+1} = \frac{1}{2}(1+i)Z_n$.
Déterminer Z_0.
c) Écrire, en langage Python, une fonction **Suite_2** qui, pour une valeur n du paramètre renvoie le nombre complexe Z_n.
d) Saisir ce programme et à l'aide de cette fonction, conjecturer une propriété des nombres complexes Z_{4k} et Z_{4k+2} pour k nombre entier naturel.

CONSEIL
Écrire l'expression de Z_{n+1} et mettre $1+i$ en facteur.

CONSEIL
Exécuter ce programme pour des paramètres de la forme $4k$ et $4k+2$.

4. a) Démontrer que pour tout entier naturel n, $Z_n = \frac{(1+i)^n}{2^{n-1}}$.
En déduire l'expression de z_n en fonction de n.
b) Démontrer que pour tout entier naturel k, $(1+i)^{4k}$ est un nombre réel et $(1+i)^{4k+2}$ est un imaginaire pur.
Que peut-on en déduire pour les points M_{4k} et M_{4k+2} ?

5. a) Démontrer que pour tout entier naturel n, $|Z_n| = 2 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$.
b) Quelle est la limite de la suite $(|Z_n|)$ lorsque n tend vers $+\infty$?
c) Interpréter géométriquement ce résultat.

CONSEIL
Observer la nature de la suite $(|Z_n|)$.

116 Étude expérimentale de l'ensemble de Mandelbrot

Algo python

HISTOIRE DES MATHS

Benoît Mandelbrot (1924-2010) est un mathématicien franco-américain. Il découvre de nouveaux objets mathématiques qu'il nomme fractales ; l'ensemble de Mandelbrot défini dans ce problème est une fractale particulière.

Dans un article publié en 1973 dans *Les formes nouvelles du hasard dans les sciences*, Mandelbrot explique le lien entre les fractales et les fluctuations aléatoires de certains phénomènes et conçoit qu'il existe des formes de hasard différentes.

Pour tout complexe c, on définit la suite (z_n) par $z_0 = 0$ et pour tout entier naturel n,

$$z_{n+1} = z_n^2 + c.$$

L'ensemble $\mathcal{M}$ de Mandelbrot est formé des nombres complexes c tels que la suite $(|z_n|)$ des modules de z_n soit bornée.

1. Des valeurs particulières

a) On pose $c = i$. Déterminer z_1, z_2, z_3 et z_4.
Le nombre complexe i appartient-il à l'ensemble $\mathcal{M}$?

b) On pose $c = 2 + i$. Déterminer z_1, z_2, z_3 et z_4.
Conjecturer l'appartenance ou non de $2 + i$ à l'ensemble $\mathcal{M}$.

2. À l'aide d'un programme

On admet ici, que s'il existe un entier naturel n tel que $|z_n| > 2$, alors la suite $(|z_n|)$ n'est pas bornée et donc c n'appartient pas à l'ensemble $\mathcal{M}$.

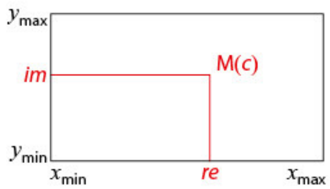
Voici ci-contre une fonction **M_1** écrite en langage Python. Cette fonction a pour paramètre le nombre complexe c, elle renvoie pour résultat un booléen m qui a la valeur **True** si c appartient certainement à l'ensemble $\mathcal{M}$ et la valeur **False** sinon.
Expliquer la programmation de cette fonction.

```
from cmath import *
from pylab import *

def M_1(c):
    k=0
    z=0+0j
    while k<=100 and abs(z)<=2:
        z=z**2+c
        k=k+1
    if abs(z)<=2:
        m=True
    else:
        m=False
    return m
```

3. Vers un tracé de l'ensemble $\mathcal{M}$

a) La fonction **M_2** ci-contre trace certains points de l'ensemble $\mathcal{M}$ dans le rectangle représenté ci-dessous.
Expliquer les différentes lignes de ce programme.

```

def M_2(Xmin,Xmax,Ymin,Ymax,N):
    for u in range(0,N+1):
        for v in range(0,N+1):
            re=Xmin+u*(Xmax-Xmin)/N
            im=Ymin+v*(Ymax-Ymin)/N
            c=re+im*1j
            if M_1(c):
                plot([re],[im],'.')
    show()
    return
```



b) Saisir l'ensemble des deux programmes et exécuter par exemple **M_2(−2, 2, −2, 2, 100)**.

c) Tester ce programme avec d'autres valeurs des paramètres.

117 Étude expérimentale des ensembles de Julia

c est un nombre réel fixé.

(z_n) est la suite définie par $z_0 = a$ avec a nombre complexe et pour tout entier naturel n,

$$z_{n+1} = z_n^2 + c.$$

L'ensemble de Julia (rempli) $\mathcal{J}_c$ est formé des nombres complexes a tels que la suite $(|z_n|)$ soit bornée.

1. Un cas particulier

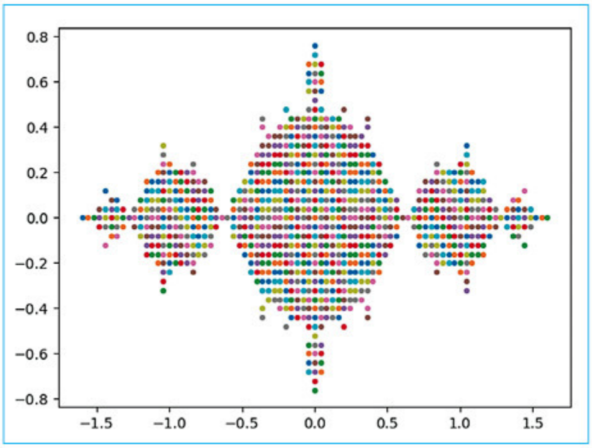
a) On pose $c = 0$.

Démontrer que pour tout entier naturel n, $z_n = a^{(2^n)}$.

b) Déterminer alors l'ensemble de Julia $\mathcal{J}_0$.

2. Vers un tracé de l'ensemble $\mathcal{J}_{-1}$

Modifier le programme de l'exercice **116** afin d'obtenir une représentation graphique approchée de l'ensemble de Julia $\mathcal{J}_{-1}$.



118 Étude des images d'ensembles

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O\,;\overrightarrow{OU},\overrightarrow{OV}\right)$.

f est la fonction définie sur $\mathbb{C} - \{i\}$ par :

$$f(z) = \frac{iz+2}{z-i}.$$

La fonction F associe à tout point M distinct de V et d'affixe z, le point M′ d'affixe $f(z)$.

1. a) Démontrer que pour tout complexe $z \neq$ i,

$$(f \circ f)(z) = z.$$

b) Traduire géométriquement cette propriété.

2. a) Vérifier que pour tout complexe z,

$$(z-1-i)(z+1-i) = z^2 - 2iz - 2.$$

b) En déduire les points M tels que F(M) = M.

3. On note $\mathcal{D}_1$ l'axe des imaginaires purs et $\mathcal{D}_1^* = \mathcal{D}_1 - \{V\}$.

a) Démontrer que si M appartient à $\mathcal{D}_1^*$, alors M′ = F(M) appartient également à $\mathcal{D}_1^*$.

b) Démontrer que l'image de $\mathcal{D}_1^*$ par F est $\mathcal{D}_1^*$.

4. On note $\mathcal{D}_2$ la droite d'équation $y = 1$ et $\mathcal{D}_2^* = \mathcal{D}_2 - \{V\}$.

a) Démontrer que si M appartient à $\mathcal{D}_2^*$, alors M′ = F(M) appartient également à $\mathcal{D}_2^*$.

b) Démontrer que l'image de $\mathcal{D}_2^*$ par F est $\mathcal{D}_2^*$.

5. a) Démontrer que pour tout nombre complexe $z \neq i$,

$$|f(z) - i| \times |z - i| = 1.$$

b) $\mathcal{C}$ est un cercle de centre V et de rayon $r\,(r > 0)$.

Déterminer l'image de $\mathcal{C}$ par la fonction F.

6. Démontrer que l'image par F d'un point dont l'affixe est réelle appartient au cercle Γ de centre le point H d'affixe $\frac{3}{2}i$ et de rayon $\frac{1}{2}$.

7. g est la fonction définie sur $\mathbb{C}$ par :

$$g(z) = z - i.$$

Déterminer une fonction h définie sur $\mathbb{C}^*$ telle que pour tout complexe $z \neq i$,

$$(g \circ f)(z) = (h \circ g)(z).$$

119 Lien entre complexes et homothétie

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O\,;\overrightarrow{OU}\,;\overrightarrow{OV}\right)$.

H est la fonction qui à tout point M d'affixe z associe le point M′ d'affixe z' tel que :

$$z' = 3z - 2 - 2i.$$

a) Démontrer que H admet un point invariant unique.

b) En déduire que H est une homothétie.

Préciser son centre et son rapport.

c) Caractériser l'homothétie réciproque H^{-1}.

La définir à l'aide des nombres complexes.

Des Défis

120 Démontrer une égalité de cubes

a, b et c sont trois nombres complexes tels que :

$$|a| = |b| = |c| = 1 \text{ et } a + b + c = 0.$$

Démontrer que $a^3 = b^3 = c^3$.

121 Généraliser l'inégalité triangulaire

Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ et tous complexes $z_1, z_2, \ldots, z_n$:

$$|z_1 + z_2 + \ldots + z_n| \leqslant |z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n|.$$