14 Calcul intégral

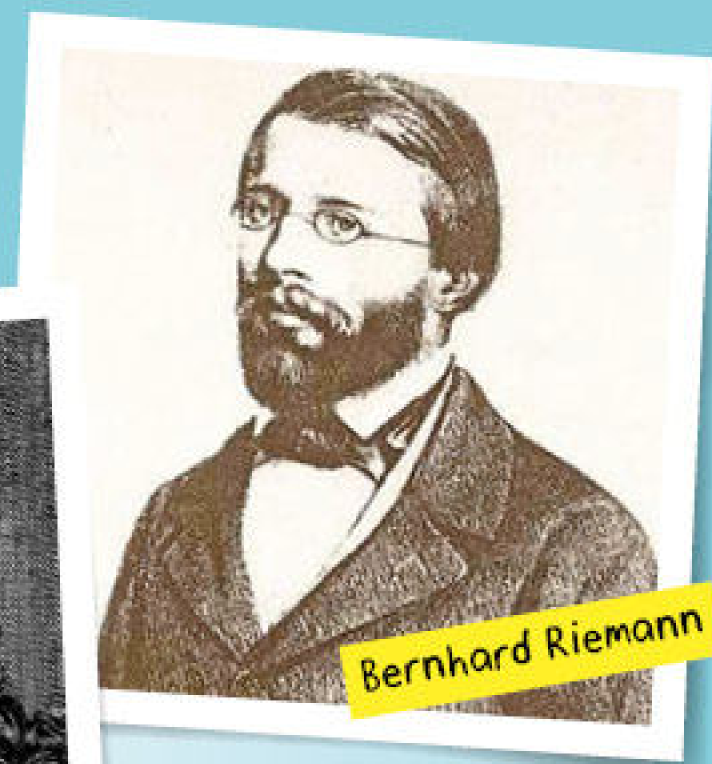
HISTOIRE DES MATHS

Dès l'Antiquité, le problème du calcul de grandeurs (aire d'une surface, longueur d'une courbe) est posé. **Archimède** développe la méthode d'exhaustion : il approche l'aire délimitée par un arc de parabole à l'aide d'aires géométriques simples. Cette méthode reste la seule connue pendant 20 siècles !

Au 17^{e} siècle, l'invention du calcul infinitésimal permet de nouvelles avancées. À l'origine du calcul intégral, il est développé par **Leibniz** et **Newton** (indépendamment l'un de l'autre). Désormais l'intégration est vue comme problème inverse de la dérivation.

Cette approche est poursuivie par de nombreux mathématiciens pendant deux siècles. La formalisation arrive avec la célèbre intégrale de **Riemann**, à l'origine des développements ultérieurs de la théorie, notamment celui de l'intégrale de **Lebesgue** au début du 20^{e} siècle. L'intégration est encore un sujet pour la recherche contemporaine.

Gottfried Wilhelm Leibniz



Bernhard Riemann

▶ **Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646-1716) est un philosophe, juriste et scientifique allemand. En philosophie, il est l'un des principaux représentants du rationalisme. Initié tardivement aux mathématiques (à 26 ans), il devient tout de même l'un des pères de l'analyse moderne.

▶ **Bernhard Riemann** (1826-1866) est un mathématicien allemand. Il est le premier à utiliser des dimensions supérieures à 3 ou 4 pour décrire la réalité physique (espace à n dimensions), ouvrant ainsi la voie aux géométries non euclidiennes et à la théorie de la relativité générale.

1629 Cavalieri invente la méthode des indivisibles.

vers 1670 Leibniz et Newton établissent un lien entre dérivée, primitive et aire sous la courbe.

1823 Cauchy travaille sur la notion d'intégrale sur un intervalle fermé.

1854 Riemann publie une théorie rigoureuse de l'intégration.

1906 Lebesgue précise l'intérêt de son intégrale pour calculer les coefficients d'une série de Fourier.

1668 1er tome des *Fables de La Fontaine*

1715 Mort de Louis XIV

1789 Révolution française

1826 Découverte de la loi d'Ohm

1876 Invention du téléphone

1914 Première Guerre mondiale

1600 — 1700 — 1800 — 1900

Vue aérienne de parcelles agricoles en Chine

Le calcul des aires (superficie d'un champ, surface d'une pièce d'eau, etc.) est l'un des problèmes mathématiques les plus anciens. Lorsque l'aire est délimitée par une forme géométrique élémentaire (triangle, trapèze, etc.) le calcul est simple, mais lorsque le contour est une courbe alors le problème est plus ardu.

Les contenus et capacités travaillés dans ce chapitre

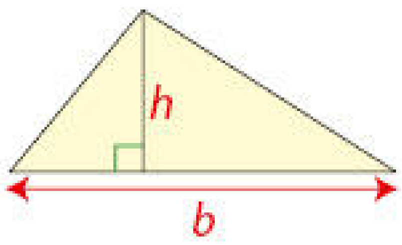
	Savoir-faire	Exercices
• Intégrale d'une fonction continue et positive sur un intervalle.	1, 3	21 à 26, 28, 29
• Calculer une intégrale à l'aide d'une primitive.	2, 4, 5, 7, 8	30 à 33, 36 à 42
• Intégrale et aire. Estimer graphiquement une intégrale. Calculer l'aire d'un domaine entre deux courbes.	6, 9, 18 à 20	27, 34, 35, 43, 44
• Propriétés des intégrales.	10 à 13	45 à 48, 51 à 61
• Valeur moyenne d'une fonction.		49, 50, 62 à 65
• Méthode d'intégration par parties.	14 à 17	66 à 72

Rappels utiles

• **Formules d'aires**

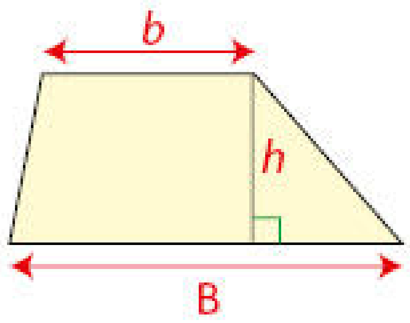
Aire d'un triangle

$$\mathscr{A} = \frac{b \times h}{2}$$



Aire d'un trapèze

$$\mathscr{A} = \frac{(b + B) \times h}{2}$$



• **Primitives d'une fonction**

• f et F sont deux fonctions définies sur un intervalle I. F est une primitive de f sur I, c'est-à-dire F est dérivable sur I et $F' = f$.

• L'ensemble des primitives de f sur I est constitué par les fonctions G définies sur I par $G(x) = F(x) + C$ où C décrit $\mathbb{R}$.

• Il existe une primitive de f sur I et une seule telle que $G(x_0) = y_0$ où x_0 est un nombre réel de I et y_0 un nombre réel donné.

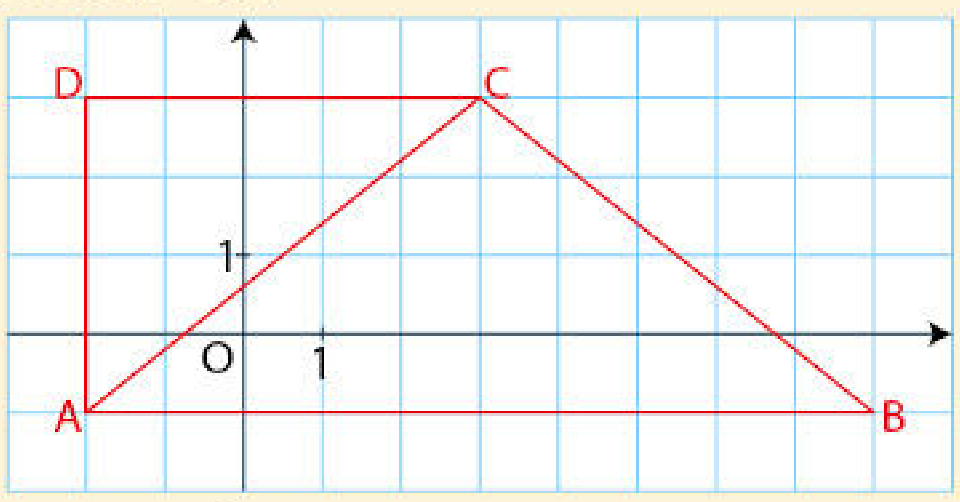
• **Quelques primitives usuelles**

$I = \ldots$	$f(x) = \ldots$	$F(x) = \ldots$
$]0\,;+\infty[$	$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$
$\mathbb{R}$	e^x	e^x
$\mathbb{R}$	$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\mathbb{R}$	$\cos(x)$	$\sin(x)$

À l'oral — Questions-Tests

Pour chaque question, il y a une seule réponse exacte.

1 L'unité graphique du repère orthonormé ci-contre est 0,5 cm.



a) L'aire, en cm^2, du triangle ABC est égale à :

(1) 5 (2) 20 (3) 40

b) L'aire, en cm^2, du trapèze ABCD est égale à :

(1) 32 (2) 8 (3) 16

2 f est la fonction définie sur $]2\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{7}{(x-2)^2}.$$

Une primitive F de la fonction f sur $]2\,;+\infty[$ est définie par :

(1) $F(x) = \frac{7}{x-2}$ (2) $F(x) = \frac{2x+3}{2-x}$

(3) $F(x) = \frac{2x+3}{x-2}$

3 g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 3x^4 - 3x^2 + 5x - 1.$$

Une primitive G de la fonction g sur $\mathbb{R}$ est définie par :

(1) $G(x) = 12x^3 - 6x + 5$

(2) $G(x) = \frac{3}{5}x^5 - x^3 + \frac{5}{2}x^2 - x + 10$

(3) $G(x) = 3x^5 - 3x^3 + 5x^2 - x$

4 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 - e^x$.

L'ensemble des primitives de la fonction f sur $\mathbb{R}$ est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par (où C est un nombre réel) :

(1) $F(x) = -e^x + C$

(2) $F(x) = x - e^x + C$

(3) $F(x) = C(x - e^x)$

5 g est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{2}{x}.$$

L'unique primitive G de la fonction g sur $]0\,;+\infty[$ telle que $G(e) = 1$ est définie par …

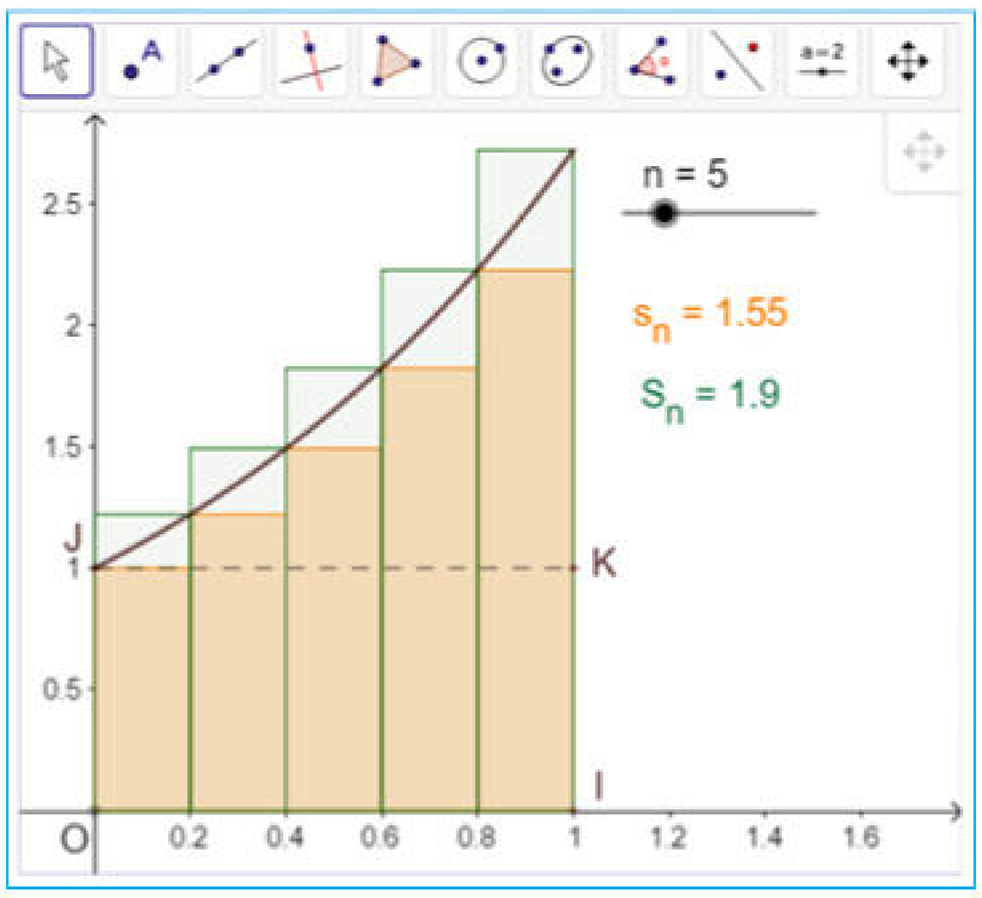
(1) $G(x) = 2\ln(x)$

(2) $G(x) = 2\ln(x) + 1$

(3) $G(x) = 2\ln(x) - 1$

1 Tice Encadrement d'une aire

On munit le plan d'un repère orthogonal $(O\,;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$.
L'unité d'aire est l'aire du rectangle OIKJ avec K(1 ; 1).
On note $\mathscr{A}$ l'aire du domaine délimité par la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto e^x$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$, $x = 1$.
Dans la suite, on réalise une construction à l'aide d'un logiciel de géométrie afin d'obtenir des encadrements de l'aire $\mathscr{A}$.



1 **a)** Pour réaliser la figure ci-contre :
- saisir $f(x)$=Fonction[exp(x), 0,1] ;
- créer un curseur allant de 1 à 20 avec pour incrément 1 ;
- saisir :

s_n = SommeInférieure(f, 0,1, n)
S_n = SommeSupérieure(f, 0,1, n)

b) Expliquer comment sont construits les rectangles obtenus à l'écran.
c) Que représentent les valeurs s_n et S_n affichées à l'écran ?

2 **a)** Déplacer le curseur jusqu'à obtenir un encadrement d'amplitude inférieure à 10^{-1} de l'aire $\mathscr{A}$.
b) En déduire une valeur approchée de l'aire $\mathscr{A}$ à 10^{-1} près.

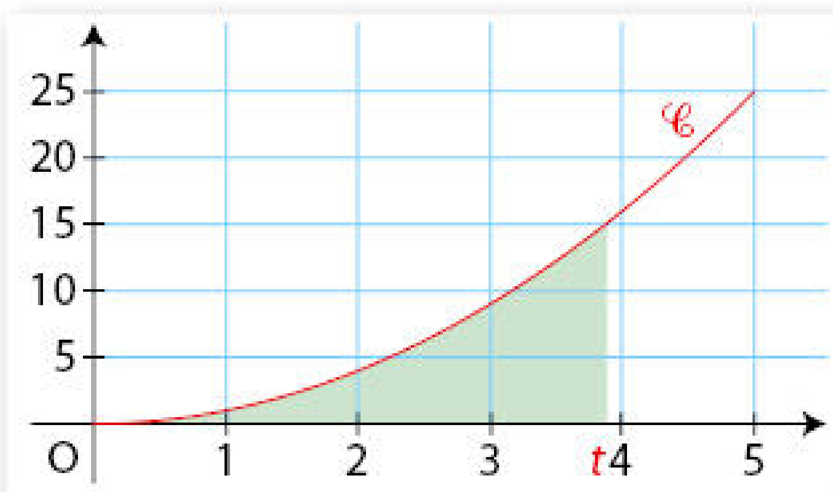
L'aire $\mathscr{A}$, exprimée en unité d'aire, est l'**intégrale de 0 à 1 de la fonction f**, on la note $\int_0^1 f(x)\,dx$.

HISTOIRE DES MATHS

La notation des intégrales est due à Leibniz (1646-1716), c'est un S étiré pour rappeler l'analogie avec les sommes.

2 Aire et primitive

La vitesse instantanée, en $m \cdot s^{-1}$, d'une particule à un instant t, en s, est donnée par $v(t) = t^2$ pour $t \in [0\,;5]$.
Dans un repère orthogonal, $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction v. Pour tout réel $t \in [0\,;5]$, on note $\mathscr{A}(t)$ l'aire du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = t$.



1 **a)** Pour t_0 et $t_0 + h$ dans $[0\,;5]$ avec $h > 0$, quel est le domaine d'aire $\mathscr{A}(t_0 + h) - \mathscr{A}(t_0)$?
Démontrer alors que $t_0^2 \leqslant \dfrac{\mathscr{A}(t_0+h)-\mathscr{A}(t_0)}{h} \leqslant (t_0+h)^2$.
b) Pour t_0 et $t_0 + h$ dans $[0\,;5]$ avec $h < 0$, démontrer de même que $(t_0+h)^2 \leqslant \dfrac{\mathscr{A}(t_0+h)-\mathscr{A}(t_0)}{h} \leqslant t_0^2$.
c) En déduire que la fonction $\mathscr{A}$ est dérivable en t_0 ($t_0 \in [0\,;5]$) et que $\mathscr{A}'(t_0) = v(t_0)$.

2 **a)** Que représente la fonction $\mathscr{A}$ pour la fonction v sur l'intervalle $[0\,;5]$?
b) Pour tout réel $t \in [0\,;5]$, interpréter $\mathscr{A}(t)$ pour le mouvement de la particule.

Cours

Exercices
- 1 à 4 (ci-contre)
- 21 à 31

1 Intégrale d'une fonction continue et positive sur un intervalle

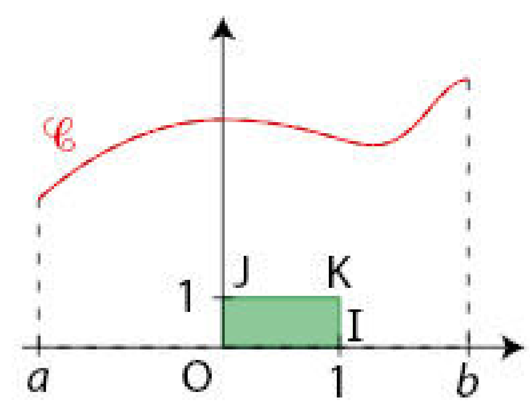
Vidéo
JaiCompris.com
Les démonstrations sont présentées en vidéo

f est une fonction **continue** et **positive** sur un intervalle $[a\,;b]$.
$\mathscr{C}$ est sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(\mathrm{O}\,;\mathrm{I},\mathrm{J})$.

A Aire sous la courbe représentative de la fonction *f*

Définitions

- **L'unité d'aire**, notée *u.a.*, est l'aire du rectangle OIKJ où K(1 ; 1).
- **Le domaine situé sous la courbe** $\mathscr{C}$ est la partie du plan délimitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.
- **L'intégrale de *a* à *b* de la fonction *f*** est l'aire, exprimée en *u.a.*, du domaine situé sous la courbe $\mathscr{C}$. On la note $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ (lire « intégrale de *a* à *b* de *f* »).

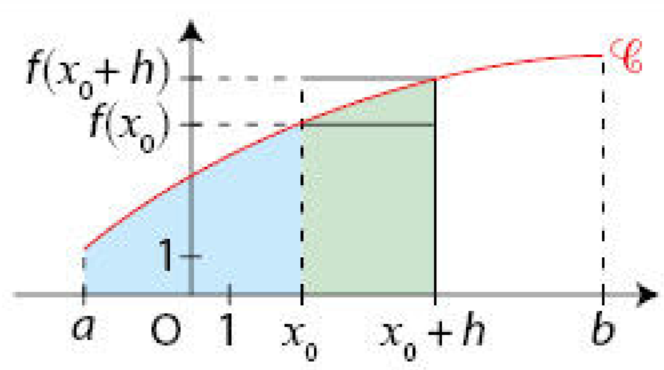


B Expression d'une primitive à l'aide d'une intégrale

Théorème

La fonction $\mathrm{F}_a : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est **la** primitive de la fonction f sur l'intervalle $[a\,;b]$ telle que $\mathrm{F}_a(a) = 0$.

Démonstration



On étudie le cas où f est croissante sur $[a\,;b]$.
x_0 et $x_0 + h$, avec $h \neq 0$, sont deux nombres réels de l'intervalle $[a\,;b]$.

- **Si $h > 0$**, alors d'après la propriété d'additivité des aires :

$$\int_a^{x_0+h} f(t)\mathrm{d}t = \int_a^{x_0} f(t)\mathrm{d}t + \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\mathrm{d}t,\ \text{soit } \mathrm{F}_a(x_0+h) - \mathrm{F}_a(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\mathrm{d}t.$$

f est croissante sur $[a\,;b]$ donc on peut encadrer $\displaystyle\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\mathrm{d}t$ par les aires des rectangles de largeur h et de hauteurs $f(x_0)$ et $f(x_0 + h)$.

Ainsi, $f(x_0) \times h \leqslant \mathrm{F}_a(x_0+h) - \mathrm{F}_a(x_0) \leqslant f(x_0+h) \times h$ et $f(x_0) \leqslant \dfrac{\mathrm{F}_a(x_0+h) - \mathrm{F}_a(x_0)}{h} \leqslant f(x_0+h)$.

- **Si $h < 0$**, alors on établit de la même façon que $f(x_0+h) \leqslant \dfrac{\mathrm{F}_a(x_0+h) - \mathrm{F}_a(x_0)}{h} \leqslant f(x_0)$.

- **Conclusion :** f est continue en x_0 donc $\lim\limits_{h \to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$ et le théorème des gendarmes permet de conclure que $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\mathrm{F}_a(x_0+h) - \mathrm{F}_a(x_0)}{h} = f(x_0)$. Ainsi, F_a est dérivable en x_0 et $\mathrm{F}_a'(x_0) = f(x_0)$. Avec la définition de l'intégrale, $\mathrm{F}_a(a) = 0$ et finalement F_a est la primitive de la fonction f sur $[a\,;b]$ telle que $\mathrm{F}_a(a) = 0$.

Propriété

Pour toute primitive F de f sur l'intervalle $[a\,;b]$, $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$.

Démonstration

F et F_a sont deux primitives de f sur l'intervalle $[a\,;b]$ donc il existe un réel C tel que pour tout réel x de $[a\,;b]$, $\mathrm{F}_a(x) = \mathrm{F}(x) + \mathrm{C}$. Or, $\mathrm{F}_a(a) = 0$ donc $\mathrm{C} = -\mathrm{F}(a)$. Alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \mathrm{F}_a(b) = \mathrm{F}(b) + \mathrm{C} = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$.

EXERCICES RÉSOLUS

1 Calculer l'aire d'un domaine sous une courbe

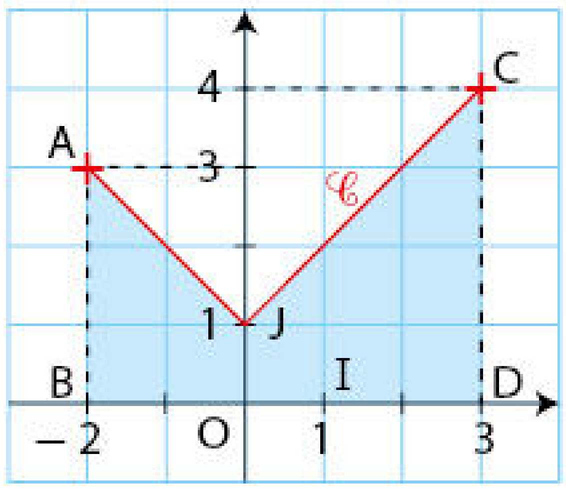
f est la fonction définie sur l'intervalle $[-2\,;3]$ par :

$$f(x)=\begin{cases}-x+1 & \text{si } -2\leqslant x\leqslant 0\\ x+1 & \text{si } 0<x\leqslant 3\end{cases}.$$

a) Tracer la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

b) Calculer $\int_{-2}^{3} f(x)\mathrm{d}x$.

Solution



a) Dans le repère (O ; I, J) ci-contre, la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f est formée des segments [AJ] et [JC].

b) f est continue et positive sur $[-2\,;3]$ donc $\int_{-2}^{3} f(x)\mathrm{d}x$ est l'aire, en unité d'aire, du domaine situé sous la courbe $\mathscr{C}$, soit la somme des aires des trapèzes rectangles OJAB et OJCD.

Donc $\int_{-2}^{3} f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{(3+1)\times 2}{2}+\dfrac{(4+1)\times 3}{2}=4+\dfrac{15}{2}=\dfrac{23}{2}$.

2 Calculer une intégrale à l'aide d'une primitive

f est la fonction définie sur l'intervalle $\mathrm{I}=[0\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x^2+6x}{(x+3)^2}$.

a) Vérifier que la fonction F définie par $\mathrm{F}(x)=\dfrac{x^2}{x+3}$ est une primitive de f sur I.

b) Calculer $\int_{1}^{3} f(x)\mathrm{d}x$.

Solution

a) La fonction F est dérivable sur I et pour tout réel x de I,

$\mathrm{F}'(x)=\dfrac{2x(x+3)-x^2\times 1}{(x+3)^2}=\dfrac{x^2+6x}{(x+3)^2}$ donc $\mathrm{F}'(x)=f(x)$.

Ainsi F est une primitive de f sur I.

b) f est continue sur I, car f est une fonction rationnelle.

De plus f est positive sur I, donc $\int_{1}^{3} f(x)\mathrm{d}x=\mathrm{F}(3)-\mathrm{F}(1)$.

Or, $\mathrm{F}(3)=\dfrac{3^2}{3+3}=\dfrac{3}{2}$ et $\mathrm{F}(1)=\dfrac{1^2}{1+3}=\dfrac{1}{4}$, donc $\int_{1}^{3} f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{4}$.

> Pour tout $x\geqslant 0$, $x^2+6x\geqslant 0$ et $(x+3)^2\geqslant 0$, donc $f(x)\geqslant 0$.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 1

3 g est la fonction définie sur $[-3\,;1]$ par :

$$g(x)=\begin{cases}x+3 & \text{si } -3\leqslant x\leqslant 0\\ -2x+3 & \text{si } 0<x\leqslant 1\end{cases}.$$

a) Tracer la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthogonal.

b) Calculer $\int_{-3}^{1} g(x)\mathrm{d}x$.

Sur le modèle de l'exercice résolu 2

4 f est la fonction définie sur $\mathrm{I}=[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{3x^2+24x}{(x+4)^2}.$$

a) Vérifier que la fonction F définie par $\mathrm{F}(x)=\dfrac{3x^2}{x+4}$ est une primitive de f sur I.

b) Calculer $\int_{2}^{4} f(x)\mathrm{d}x$.

Cours

Exercices
- 5 à 9 (ci-contre)
- 32 à 44

2 Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque sur un intervalle

A Extension de la définition de l'intégrale

Théorème

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Démonstration

On étudie le cas où $\mathrm{I} = [a\,;b]$ et où f admet un minimum m sur I.
La fonction g définie sur $[a\,;b]$ par $g(x) = f(x) - m$ est continue et positive sur $[a\,;b]$.
D'après le théorème du § B p. 402, la fonction $\mathrm{G}_a : x \mapsto \int_a^x g(t)\mathrm{d}t$ est une primitive de la fonction g sur l'intervalle $[a\,;b]$.
La fonction F définie sur $[a\,;b]$ par $\mathrm{F}(x) = \mathrm{G}_a(x) + mx$ est une primitive de f sur $[a\,;b]$. En effet, pour tout réel x de $[a\,;b]$, $\mathrm{F}'(x) = \mathrm{G}'_a(x) + m = g(x) + m = f(x)$.
Ainsi, la fonction f admet des primitives sur $[a\,;b]$.

Définition

f est une fonction **continue** de signe quelconque sur un intervalle I.
Pour a et b deux nombres réels de I, **l'intégrale de a à b de f** est le nombre réel $\mathbf{F}(b) - \mathbf{F}(a)$ où F est une primitive de f sur I. On la note encore $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Remarque : la valeur de l'intégrale ne dépend pas de la primitive choisie F de f sur I.

Notation : on écrit $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = [\mathrm{F}(x)]_a^b = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$.

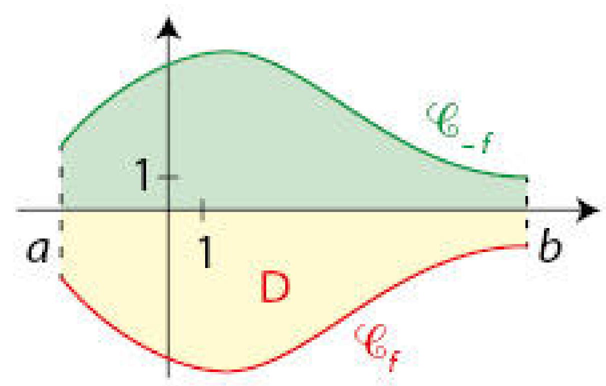
Conséquence : pour tous réels a et b de I, $\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

En effet, si F est une primitive de f sur I, alors $\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = \mathrm{F}(a) - \mathrm{F}(b) = -(\mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)) = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

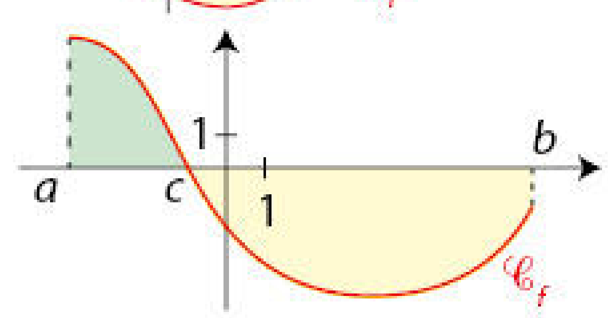
B Intégrale et aire

f est une fonction définie et continue sur un intervalle $[a\,;b]$.
Dans un repère orthogonal, D est le domaine délimité par la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$, $x = b$.

Si f est négative sur $[a\,;b]$, alors l'aire de D est $\mathscr{A}(\mathrm{D}) = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.



En effet, par symétrie par rapport à l'axe des abscisses, l'aire de D est égale à l'aire du domaine situé sous la courbe de $-f$.
Si F est une primitive de f sur $[a\,;b]$, alors $-$ F est une primitive de $-f$ sur $[a\,;b]$ et $\mathscr{A}(\mathrm{D}) = \int_a^b -f(x)\mathrm{d}x = [-\mathrm{F}(x)]_a^b = -(\mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)) = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.



Remarque : dans la situation représentée ci-contre, la fonction f change de signe sur $[a\,;b]$ et l'aire de D est $\mathscr{A}(\mathrm{D}) = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x - \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$.

EXERCICES RÉSOLUS

5 Calculer une intégrale

Calculer $\int_0^2 (e^x - 2x - 1)dx$.

Solution

La fonction F : $x \mapsto e^x - x^2 - x$ est une primitive de la fonction $f : x \mapsto e^x - 2x - 1$ sur $\mathbb{R}$.

Alors $\int_0^2 (e^x - 2x - 1)dx = [F(x)]_0^2 = F(2) - F(0)$.

Or, $F(0) = e^0 = 1$ et $F(2) = e^2 - 2^2 - 2 = e^2 - 6$,

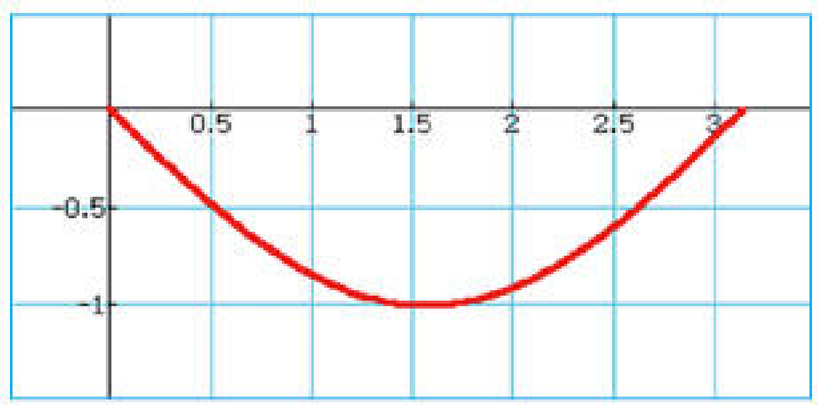
donc $\int_0^2 (e^x - 2x - 1)dx = e^2 - 6 - 1 = e^2 - 7$.

Pour calculer $\int_a^b f(x)dx$, on détermine d'abord une primitive F de f sur $[a ; b]$ et on écrit :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

6 Calculer une aire

Voici, affichée à l'écran d'une calculatrice, la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; \pi]$ par $f(x) = \sin(x + \pi)$.



a) Justifier que pour tout réel x de $[0 ; \pi]$, $f(x) \leqslant 0$.

b) On note D le domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$, $x = \pi$.

Calculer l'aire $\mathscr{A}$, en unité d'aire, du domaine D.

Solution

a) Pour tout réel x de $[0 ; \pi]$, $\pi \leqslant x + \pi \leqslant 2\pi$ donc $\sin(x + \pi) \leqslant 0$, c'est-à-dire $f(x) \leqslant 0$.

b) La fonction f est continue et négative sur l'intervalle $[0 ; \pi]$ donc l'aire de D, en unité d'aire, est :

$$\mathscr{A} = -\int_0^{\pi} f(x)dx.$$

La fonction $x \mapsto -\cos(x + \pi)$ est une primitive de f sur $[0 ; \pi]$

donc $\int_0^{\pi} f(x)dx = [-\cos(x + \pi)]_0^{\pi} = -\cos(2\pi) + \cos(\pi) = -2$.

Ainsi, $\mathscr{A} = -(-2)$ *u.a.* $= 2$ *u.a.*

La fonction $g : x \mapsto \cos(x + \pi)$ est de la forme $\cos(u)$ avec pour tout réel x, $u(x) = x + \pi$.
Pour tout réel x,
$g'(x) = \cos'(u(x)) \times u'(x)$
$g'(x) = -\sin(x + \pi) \times 1$,
soit $g'(x) = -\sin(x + \pi)$.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 5

7 Calculer $\int_{-2}^0 (2e^x + x)dx$.

8 Calculer chacune des intégrales.

a) $\int_{-1}^1 (1 - t - e^t)dt$

b) $\int_{-2}^1 (e^{2u} - u - 2)du$

c) $\int_0^2 (-3e^{-x} + 1)dx$

Sur le modèle de l'exercice résolu 6

9 f est la fonction définie sur $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$f(x) = \cos(x + \pi).$$

$\mathscr{C}$ est la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.

a) Justifier que pour tout réel x de $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$, $f(x) \leqslant 0$.

b) Calculer, en *u.a.*, l'aire $\mathscr{A}$ du domaine D délimité par $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$.

Cours

Exercices
- 10 à 13 (ci-contre)
- 45 à 65

3 Propriétés des intégrales

f et g sont des fonctions continues sur un intervalle $[a\,;b]$.

A Propriétés algébriques

Propriété : linéarité de l'intégrale

- $\int_a^b (f+g)(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$
- Pour tout réel λ, $\int_a^b \lambda f(x)\mathrm{d}x = \lambda\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$

Ces propriétés découlent immédiatement de l'écriture de primitives de $f+g$ et λf.

Propriété : relation de Chasles

Pour tous réels c, d, e de l'intervalle $[a\,;b]$, $\int_c^d f(x)\mathrm{d}x + \int_d^e f(x)\mathrm{d}x = \int_c^e f(x)\mathrm{d}x.$

Démonstration

On note F une primitive de la fonction f sur $[a\,;b]$. Alors :

$\int_c^d f(x)\mathrm{d}x + \int_d^e f(x)\mathrm{d}x = F(d)-F(c)+F(e)-F(d) = F(e)-F(c) = \int_c^e f(x)\mathrm{d}x.$

B Intégrales et inégalités

Propriété : positivité

- Si pour tout réel x de $[a\,;b]$, $f(x) \geqslant 0$, alors $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$.
- Si pour tout réel x de $[a\,;b]$, $f(x) \leqslant 0$, alors $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant 0$.

Ces propriétés découlent immédiatement de la définition de l'intégrale.

Propriété : intégration des inégalités

Si pour tout réel x de $[a\,;b]$, $f(x) \leqslant g(x)$, alors $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$

Démonstration

Si pour tout réel x de $[a\,;b]$, $f(x) \leqslant g(x)$, alors $g(x)-f(x) \geqslant 0$.

Donc $\int_a^b (g(x)-f(x))\mathrm{d}x \geqslant 0$ et par linéarité $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$

C Valeur moyenne d'une fonction

Définition

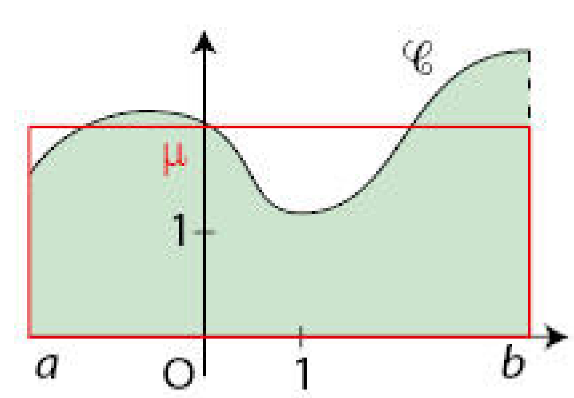
La valeur moyenne d'une fonction f continue sur un intervalle $[a\,;b]$ est le nombre réel μ défini par :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Interprétation graphique dans le cas où f est positive sur $[a\,;b]$

Dans un repère orthogonal, $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction f.

Alors $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \mu(b-a)$, donc l'aire du domaine situé sous la courbe $\mathscr{C}$ est égale à l'aire du rectangle de dimensions μ et $b-a$.



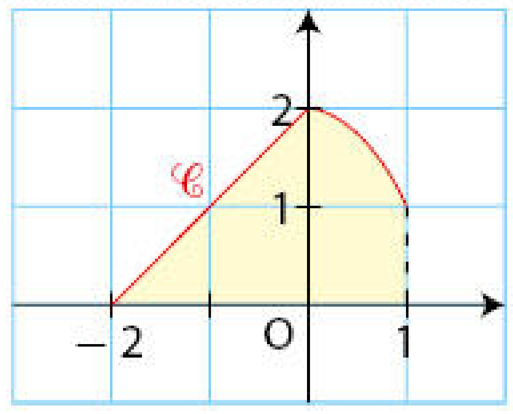
EXERCICES RÉSOLUS

10 Utiliser la relation de Chasles

f est la fonction définie sur l'intervalle $[-2\,;1]$ par :

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & \text{si} \quad -2 \leqslant x \leqslant 0 \\ 2-x^2 & \text{si} \quad 0 < x \leqslant 1 \end{cases}.$$

Voici la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f dans un repère orthonormé.
Calculer l'aire, en unité d'aire, du domaine D situé sous la courbe $\mathscr{C}$.



Solution

L'aire du domaine D situé sous la courbe $\mathscr{C}$ est, en *u.a.*, $\mathscr{A}(\mathrm{D})=\int_{-2}^{1} f(x)\mathrm{d}x$.

D'après la relation de Chasles : $\int_{-2}^{1} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-2}^{0} f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x$.

$$\int_{-2}^{0}(x+2)\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-2}^{0}=0-(-2)=2 \text{ et } \int_{0}^{1}(2-x^2)\mathrm{d}x=\left[2x-\frac{1}{3}x^3\right]_{0}^{1}=\frac{5}{3}-0=\frac{5}{3}$$

Donc $\int_{-2}^{1} f(x)\mathrm{d}x=2+\frac{5}{3}=\frac{11}{3}$ et $\mathscr{A}(\mathrm{D})=\frac{11}{3}$ *u.a.*

11 Encadrer une intégrale

a) Démontrer que pour tout réel $x \geqslant 1$, $0 \leqslant \mathrm{e}^{-x^2} \leqslant \mathrm{e}^{-x}$.

b) En déduire que $0 \leqslant \int_{1}^{2} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x \leqslant \frac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}^2}$.

Solution

a) Pour tout réel $x \geqslant 1$, $x2 \geqslant x$ donc $-x2 \leqslant -x$.
La fonction exp est croissante et positive sur $\mathbb{R}$ donc pour tout réel $x \geqslant 1$, $0 \leqslant \mathrm{e}-^{x}2 \leqslant \mathrm{e}-^{x}$.

b) Les propriétés de positivité et d'intégration des inégalités permettent d'écrire :

$$0 \leqslant \int_{1}^{2} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x \leqslant \int_{1}^{2} \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x.$$

Or, $\int_{1}^{2} \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=[-\mathrm{e}^{-x}]_1^2=-\mathrm{e}^{-2}+\mathrm{e}^{-1}=\frac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}^2}$

donc $0 \leqslant \int_{1}^{2} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x \leqslant \frac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}^2}$.

> Avec la calculatrice :
>
> $\int_1^2 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$
>
> 0.135257258
>
> • **TI** : math 9 (intégrFonct)
> • **Casio** : F4 (MATH) F6 (▷) F1 ($\int$ dx)
> • **NumWorks** : paste Calcul▷ int (f(x),a,b) OK
>
> puis, on saisit l'intégrale.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 10

12 g est la fonction définie sur $[-2\,;2]$ par :

$$g(x)=\begin{cases} -x+1 & \text{si} \quad -2 \leqslant x \leqslant 1 \\ x^2-1 & \text{si} \quad 1 < x \leqslant 2 \end{cases}$$

a) Tracer la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction g dans un repère orthonormé.

b) Calculer l'aire, en *u.a.*, du domaine D situé sous la courbe $\mathscr{C}$.

Sur le modèle de l'exercice résolu 11

13 **a)** Démontrer que tout réel x de $[0\,;\pi]$,

$$0 \leqslant x^2\sin(x) \leqslant x^2.$$

b) En déduire que :

$$0 \leqslant \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{7\pi^3}{192}.$$

Exercices
- **14** à **17** (ci-contre)
- **66** à **72**

4 Intégration par parties

A La méthode d'intégration par parties

Théorème

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I.
On suppose leurs fonctions dérivées u' et v' **continues** sur I.
Alors, pour tous réels a et b de I :

$$\int_a^b \boldsymbol{u(x)v'(x)dx} = [\boldsymbol{u(x)v(x)}]_a^b - \int_a^b \boldsymbol{u'(x)v(x)dx}.$$

Démonstration

Les fonctions u et v sont dérivables sur I donc le produit uv est dérivable sur I et $(uv)' = u'v + uv'$.
Les fonctions u, u', v, v' étant continues sur I, les fonctions $u'v$, uv', $(uv)'$ le sont également.

Pour tous réels a et b : $\int_a^b (uv)'(x)\mathrm{d}x = \int_a^b (u'(x)v(x) + u(x)v'(x))\mathrm{d}x$

et d'après la propriété de linéarité : $\int_a^b (uv)'(x)\mathrm{d}x = \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x + \int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x.$

La fonction uv est une primitive de la fonction $(uv)'$ donc :

$$\int_a^b (uv)'(x)\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b.$$

On obtient alors $[u(x)v(x)]_a^b = \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x + \int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x$

et donc $\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x.$

Vidéo
JAICOMPRIS.COM
Cette démonstration est présentée en vidéo

B Un exemple d'application de la méthode

Avec la méthode d'intégration par parties, on calcule $\mathrm{I} = \int_0^\pi x\sin(x)\mathrm{d}x$.
Pour tout réel x de l'intervalle $\mathrm{I} = [0\,;\pi]$, on pose :

$$u(x) = x \qquad u'(x) = 1$$
$$v'(x) = \sin(x) \qquad v(x) = -\cos(x)$$

Les fonctions u et v sont dérivables sur I, les fonctions u' et v' sont continues sur I.
D'après la formule d'intégration par parties :

$$\int_0^\pi u(x)v'(x)\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_0^\pi - \int_0^\pi u'(x)v(x)\mathrm{d}x$$

$$\int_0^\pi x\sin(x)\mathrm{d}x = [-x\cos(x)]_0^\pi - \int_0^\pi 1\times(-\cos(x))\mathrm{d}x$$

$$\int_0^\pi x\sin(x)\mathrm{d}x = [-x\cos(x)]_0^\pi - [-\sin(x)]_0^\pi$$

$$\int_0^\pi x\sin(x)\mathrm{d}x = -\pi\cos(\pi) - [-\sin(\pi) + \sin(0)]$$

$$\int_0^\pi x\sin(x)\mathrm{d}x = -\pi\times(-1) - [-0 + 0]$$

$$\int_0^\pi x\sin(x)\mathrm{d}x = \pi.$$

EXERCICES RÉSOLUS

14 Calculer une intégrale à l'aide d'une intégration par parties

Appliquer la méthode d'intégration par parties pour calculer $\int_1^e (2x-1)\ln(x)dx$.

Solution

Pour tout réel x de $I = [1\,;\,e]$, on pose :

$u(x) = \ln(x)$ $\quad u'(x) = \frac{1}{x}$

$v'(x) = 2x - 1$ $\quad v(x) = x^2 - x$

Les fonctions u et v sont dérivables sur I, les fonctions u' et v' sont continues sur I.

D'après la formule d'intégration par parties :

$$\int_1^e (2x-1)\ln(x)dx = [(x^2-x)\ln(x)]_1^e - \int_1^e (x-1)dx$$

$$\int_1^e (2x-1)\ln(x)dx = [(x^2-x)\ln(x)]_1^e - \left[\frac{1}{2}x^2 - x\right]_1^e$$

Donc $\int_1^e (2x-1)\ln(x)dx = (e^2 - e) - \left(\frac{1}{2}e^2 - e - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}$.

Lorsqu'on applique la méthode d'intégration par parties, il faut veiller à choisir $u(x)$ et $v'(x)$ de la façon la plus pertinente.
Ici, le choix $u(x) = 2x - 1$ et $v'(x) = \ln(x)$ ne permet pas d'aboutir car ln ne fait pas partie des fonctions usuelles dont on connaît une primitive sur $]0\,;+\infty[$.

15 Déterminer une primitive à l'aide d'une intégration par parties

a) x est un nombre réel strictement positif.

À l'aide de la méthode d'intégration par parties, calculer $\int_1^x \ln(t)dt$.

b) En déduire une primitive de la fonction logarithme népérien sur $]0\,;+\infty[$.

Solution

a) Pour tout réel t de $I =]0\,;+\infty[$, on pose :

$u(t) = \ln(t)$ $\quad u'(t) = \frac{1}{t}$

$v'(t) = 1$ $\quad v(t) = t$

Les fonctions u et v sont dérivables sur I, les fonctions u' et v' sont continues sur I.

D'après la formule d'intégration par parties, pour tout réel $x > 0$,

$$\int_1^x \ln(t)dt = [t\ln(t)]_1^x - \int_1^x \frac{1}{t}\times t dt = [t\ln(t)]_1^x - [t]_1^x = [t\ln(t) - t]_1^x = x\ln(x) - x + 1.$$

b) Par exemple, la fonction $x \mapsto x\ln(x) - x$ est une primitive de la fonction ln sur $]0\,;+\infty[$.

Ici, pour appliquer la méthode, on pense à écrire $\ln(t) = 1 \times \ln(t)$

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 14

16 Appliquer la méthode d'intégration par parties pour calculer chacune des intégrales.

a) $\int_1^e (-x+3)\ln(x)dx$

b) $\int_1^e x^2\ln(x)dx$

Sur le modèle de l'exercice résolu 15

17 **a)** x est un nombre réel strictement positif.
À l'aide de la méthode d'intégration par parties, calculer $\int_1^x \frac{\ln(t)}{t^2}dt$.

b) En déduire une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x^2}$ sur $]0\,;+\infty[$.

Vidéo
JAICOMPRIS.COM
Un autre exercice Algo/python résolu en vidéo

EXERCICE RÉSOLU

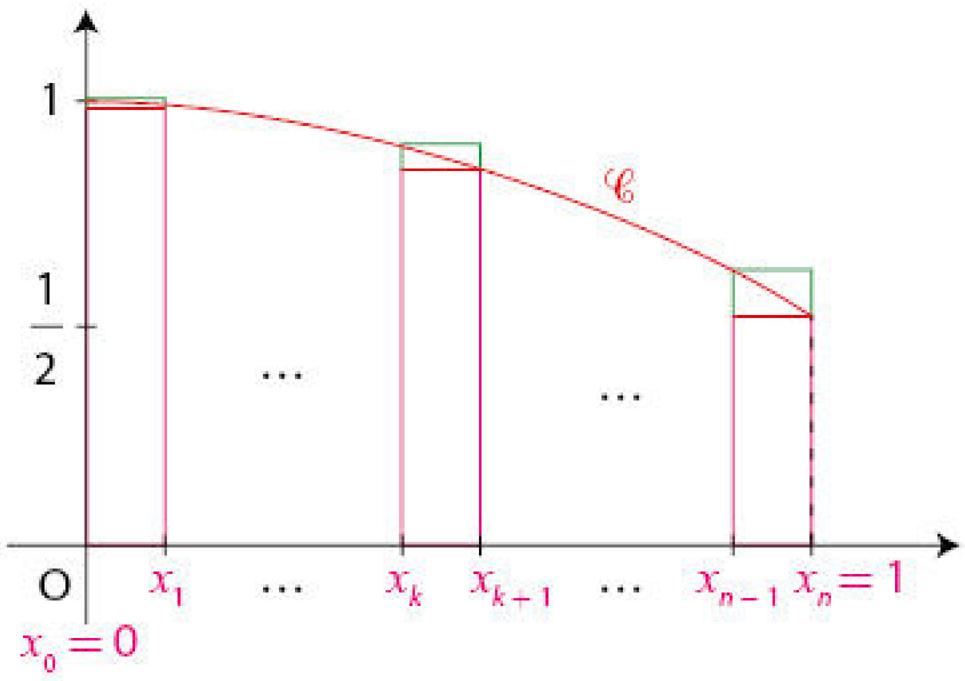
18 Appliquer la méthode des rectangles

f est la fonction définie sur $[0\,;1]$ par $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$.

$\mathscr{C}$ est la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.

On découpe l'intervalle $[0\,;1]$ en n intervalles ($n \in \mathbb{N}^*$) à l'aide des nombres $x_0=0, \ldots, x_k=\dfrac{k}{n}, \ldots, x_n=1$ (avec $0 \leqslant k \leqslant n$).

Sur chaque intervalle $[x_k\,;x_{k+1}]$, on construit les rectangles indiqués sur la figure.



1. a) Interpréter ces sommes S et S′, en termes d'aires.

$$S=\frac{1}{n}(f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n))$$

$$S'=\frac{1}{n}(f(x_0)+f(x_1)+\ldots+f(x_{n-1}))$$

b) Justifier l'encadrement $S \leqslant \displaystyle\int_0^1 f(x)dx \leqslant S'$.

2. Voici ci-contre une fonction **Rectangles** écrite en langage Python.

a) Quelles sont les valeurs des variables Som1 et Som2 renvoyées par cette fonction ?

b) Donner à l'aide de cette fonction un encadrement d'amplitude 0,01 de $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

```python
from math import *

def f(x):
    y=1/(1+x**2)
    return y

def Rectangles(n):
    Som=0
    for k in range(1,n):
        Som=Som+f(k/n)
    Som1=1/n*(Som+f(1))
    Som2=1/n*(Som+f(0))
    return Som1,Som2
```

Solution

1. a) S est la somme des aires des rectangles représentés en rose sur la figure, S′ est celle des aires des rectangles représentés en vert sur la figure.

b) Les rectangles roses se trouvent au-dessous de $\mathscr{C}$ et les rectangles verts au-dessus donc l'aire, en *u.a.*, du domaine sous la courbe $\mathscr{C}$ est comprise entre S et S′, soit $S \leqslant \displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \leqslant S'$.

$S=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$ et S′ sont des valeurs approchées de $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

2. a) À la sortie de la boucle, on obtient $\text{Som}=f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_{n-1})$, donc la fonction **Rectangles** renvoie Som1 = S et Som2 = S′.

b) D'après l'affichage ci-contre : $0{,}78 \leqslant \displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \leqslant 0{,}79$.

```
>>> Rectangles(100)
(0.7828939967307822, 0.7878939967307822)
```

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 18

19 g est la fonction définie sur $[1\,;2]$ par :

$$g(x)=\frac{1}{1+x^2}.$$

a) Adapter la fonction **Rectangles** de l'exercice **18** à cette nouvelle fonction g.

b) Donner un encadrement d'amplitude 0,01 de $\displaystyle\int_1^2 g(x)\mathrm{d}x$.

20 h est la fonction définie sur $[-1\,;0]$ par :

$$h(x)=\mathrm{e}^{-x^2}.$$

Remarquer que la fonction h est croissante sur l'intervalle $[-1\,;0]$.

a) Adapter la fonction **Rectangles** de l'exercice **18** à cette nouvelle fonction h.

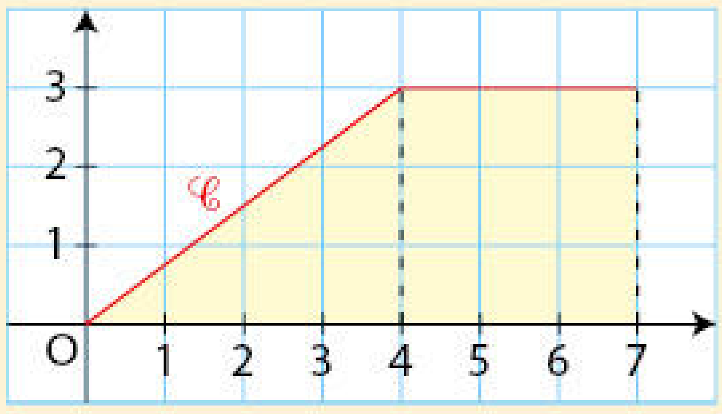
b) Donner un encadrement d'amplitude 0,001 de $\displaystyle\int_{-1}^0 h(x)\mathrm{d}x$.

Intégrale d'une fonction continue et positive sur un intervalle

Cours 1

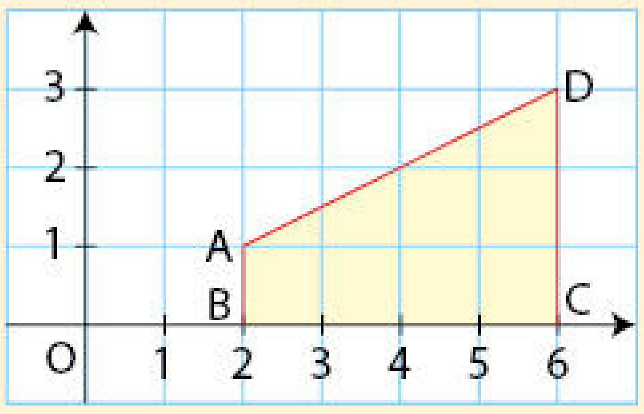
Questions flash — À l'oral

21 Dans un repère orthonormé, voici la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f sur l'intervalle $[0\,;7]$.



Calculer mentalement la valeur de $\int_0^7 f(x)\mathrm{d}x$.

22 Dans un repère orthonormé, A et D sont les points d'abscisses respectives 2 et 6 de la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x$.



Exprimer oralement l'aire du trapèze ABCD, en unité d'aire, à l'aide d'une intégrale.

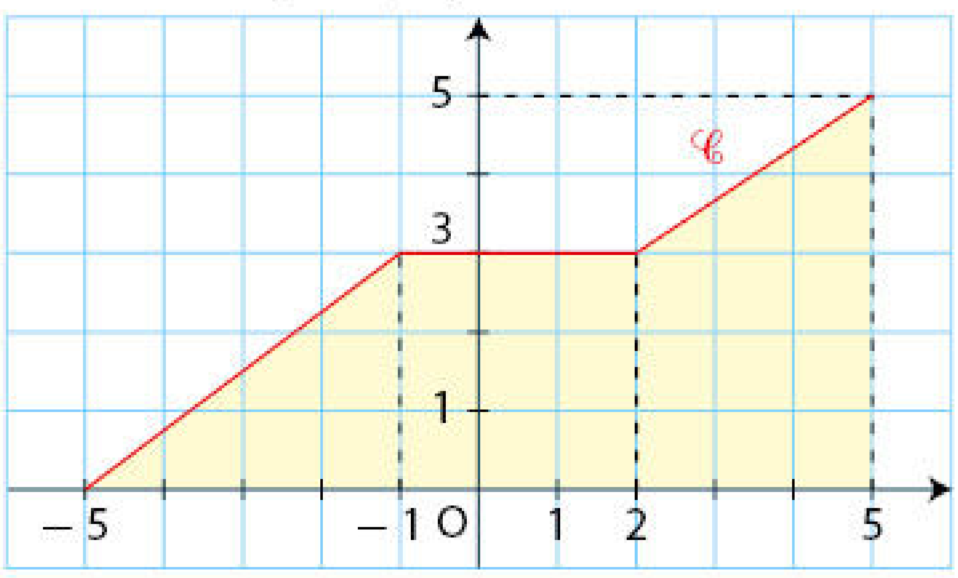
23 Déterminer mentalement la valeur de :

$$\mathrm{I} = \int_0^1 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x.$$

24 Dans chaque cas, dire si l'égalité est vraie ou fausse.

a) $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$ **b)** $\int_{-1}^1 x^2\mathrm{d}x = 0$

25 Dans le repère orthonormé ci-dessous, on a tracé la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-5\,;5]$.



a) Déterminer l'aire, en *u.a.*, du domaine D situé sous la courbe $\mathscr{C}$.

b) Exprimer cette aire à l'aide d'une intégrale.

26 f est la fonction définie sur $[-2\,;1]$ par :

$$f(x) = |x|.$$

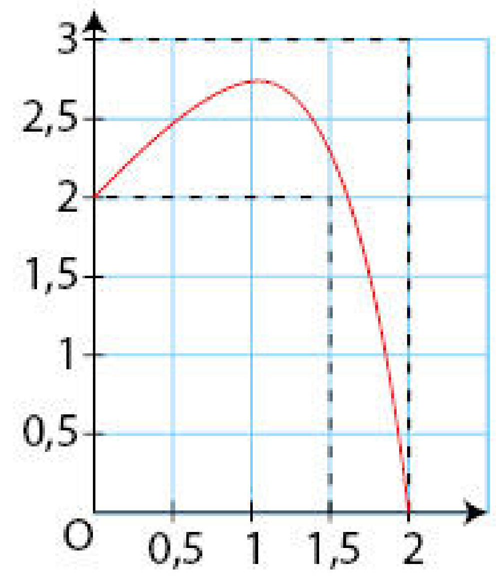
$\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

a) Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

b) Déterminer l'aire, en *u.a.*, du domaine D situé sous la courbe $\mathscr{C}$.

27 f est la fonction définie sur $[0\,;2]$ par $f(x) = (2-x)\mathrm{e}^x$.

Dans un repère orthogonal, voici la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f.



On s'intéresse au nombre :

$$\mathrm{I} = \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x.$$

a) Proposer un encadrement du nombre I par deux nombres entiers.

b) Déterminer le nombre I avec la calculatrice.

28 g est la fonction définie sur $[-3\,;4]$ par :

$$g(x) = \begin{cases} -x+2 & \text{si} \quad -3 \leqslant x \leqslant 1 \\ 3x-2 & \text{si} \quad 1 < x \leqslant 4 \end{cases}.$$

a) Tracer la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthogonal.

b) La fonction g est-elle positive, continue sur l'intervalle $[-3\,;4]$? Justifier graphiquement.

c) Déterminer $\int_{-3}^4 g(x)\mathrm{d}x$.

29 F est la fonction définie sur $[1\,;+\infty[$ par :

$$\mathrm{F}(x) = \int_1^x \ln(t)\mathrm{d}t.$$

a) Donner une interprétation graphique du nombre $\mathrm{F}(x)$.

b) Déterminer la dérivée de la fonction F.

c) Quel est le sens de variation de la fonction F ?

30 f est la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}.$$

a) Vérifier que la fonction $\mathrm{F} : x \mapsto \frac{x^2}{x+1}$ est une primitive de la fonction f sur $[0\,;+\infty[$.

b) Déterminer $\int_0^5 f(x)\mathrm{d}x$.

31 Dans chaque cas, déterminer l'intégrale à l'aide d'une primitive.

a) $\int_1^2 x^3\mathrm{d}x$ **b)** $\int_{-1}^1 \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ **c)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\mathrm{d}x$

Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque

Cours 2

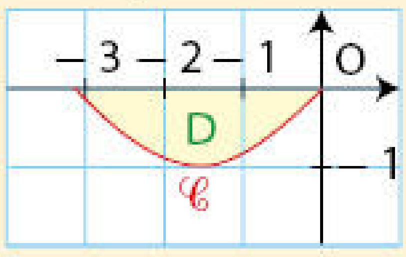
Questions flash — À l'oral

32 Calculer mentalement la valeur de :

$$\int_0^1 (e^x + 1)dx$$

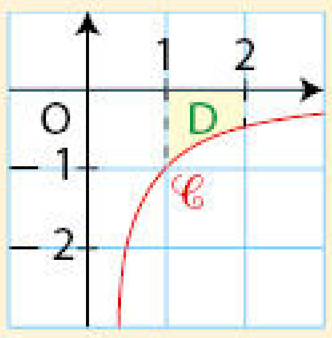
33 Justine affirme que $\int_{-1}^{1} x^5 dx = 0$.
A-t-elle raison ?

34 Dans le repère orthonormé ci-dessous, $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction sinus sur l'intervalle $[-\pi\,;0]$.



Exprimer l'aire, en u.a., du domaine D à l'aide d'une intégrale.

35 Dans un repère orthonormé, $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction $x \mapsto -\frac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.



Calculer mentalement l'aire, en u.a., du domaine D délimité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$, $x = 2$.

Pour les exercices 36 à 39, calculer chaque intégrale à l'aide d'une primitive.

36 a) $\int_{-2}^{2} (3x^2 + x - 4)dx$ b) $\int_{-2}^{-1} t(t^2 - 1)dt$

37 a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x) - \cos(x))dx$ b) $\int_{-\pi}^{0} \cos(2x)dx$

38 a) $\int_{-1}^{1} (1 - e^{2x})dx$ b) $\int_{-2}^{0} e^{1-2x}dx$

39 a) $\int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(-u + \frac{1}{u}\right)du$ b) $\int_{\frac{1}{3}}^{1} \frac{\ln(x)}{x}dx$

40 Avec sa calculatrice, Marie a obtenu une valeur approchée d'une intégrale :

```
∫_{-1}^{0} 3xe^{x²} dx
                -2.577422743
```

Déterminer la valeur exacte de cette intégrale.

41 Voici un écran de calcul formel.
Vérifier les résultats obtenus aux lignes 2 et 3.
À la ligne 2, la borne inférieure de l'intégrale est $\frac{3}{2}$.

1. $f(x) := x + 2 - \frac{2}{x-1}$
   → $f(x) := x + 2 - \frac{2}{x-1}$
2. $\int_{\frac{3}{2}}^{2} f(x)\,dx$
   → $\frac{-16\ \ln(2) + 15}{8}$
3. $\int_{3}^{4} f(x)\,dx$
   → $\frac{4\ \ln(2) - 4\ \ln(3) + 11}{2}$

42 L'intensité du courant qui circule dans un circuit est donnée, en ampère, en fonction du temps t, en s, par :

$$i(t) = 1{,}5 - 1{,}5e^{-50t}.$$

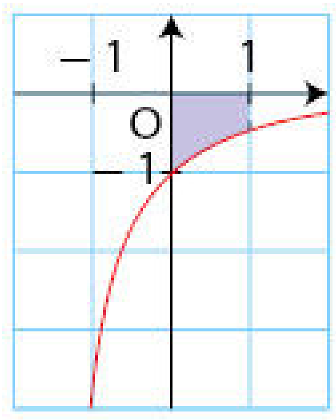
a) Déterminer l'instant t_0 auquel l'intensité est égale à 0,75 A.

b) Calculer la quantité d'électricité Q, exprimée en coulomb, mise en jeu entre les instants 0 et t_0, c'est-à-dire :

$$Q = \int_0^{t_0} i(t)dt.$$

43 f est la fonction définie sur l'intervalle $]-2\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{-4}{(x+2)^2}.$$



Sa courbe représentative est tracée dans le repère ci-dessus (*unité* : 0,5 cm sur chaque axe).

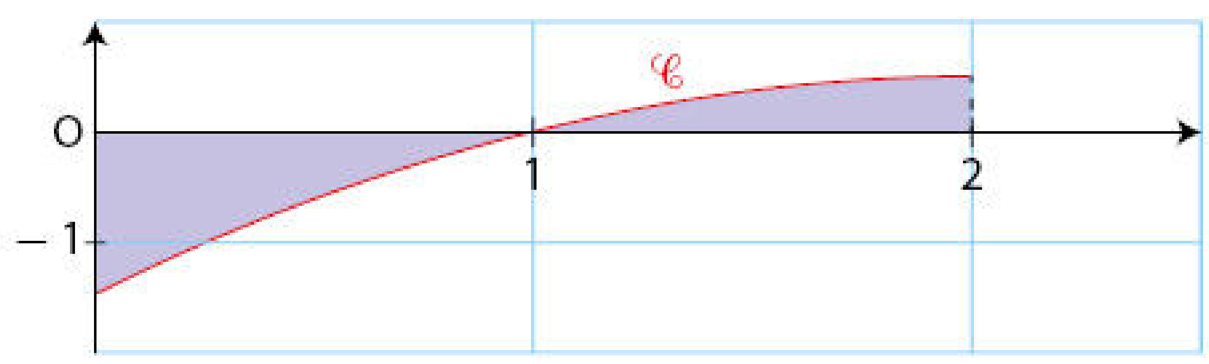
a) Déterminer, en unité d'aire, l'aire du domaine coloré en violet.

b) Exprimer cette aire en cm^2.

44 f est la fonction définie sur $[0\,;2]$ par :

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2}.$$

La courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f est tracée dans le repère ci-dessous.



Calculer l'aire $\mathscr{A}$, en unité d'aire, du domaine coloré.

Propriétés des intégrales

Cours 3

Questions flash — À l'oral

45 Voici un écran de calcul formel

En déduire mentalement la valeur de chaque intégrale.

1	$\int_1^2 \frac{1}{1+x}\,dx$ $\rightarrow \ln\left(\frac{3}{2}\right)$
2	$\int_1^2 \frac{3}{3+x}\,dx$ $\rightarrow 3\,(-\ln(4)+\ln(5))$

a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{3}{1+x}\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_1^2 \left(\frac{3}{1+x}+\frac{3}{3+x}\right)\mathrm{d}x$

46 f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\int_{-5}^{0} f(t)\mathrm{d}t = 3,\quad \int_{0}^{5} f(t)\mathrm{d}t = 4 \text{ et } \int_{0}^{10} f(t)\mathrm{d}t = 9$$

Déterminer mentalement :

a) $\displaystyle\int_{-5}^{5} f(t)\mathrm{d}t$ **b)** $\displaystyle\int_{-5}^{10} f(t)\mathrm{d}t$ **c)** $\displaystyle\int_{5}^{10} f(t)\mathrm{d}t$

47 Donner mentalement le signe de chaque intégrale.

a) $\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$ **b)** $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} x\ln(x)\mathrm{d}x$ **c)** $\displaystyle\int_{-\pi}^{0} x^2\sin(x)\mathrm{d}x$

48 **a)** x est un nombre réel de l'intervalle $[0\,;1]$. Ranger par ordre croissant les nombres x, x^2, x^3.

b) En déduire mentalement un rangement par ordre croissant des nombres :

- $\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int_0^1 x^3\mathrm{d}x$

49 Dans un repère orthonormé, on trace la courbe représentative d'une fonction f définie et continue sur l'intervalle $[1\,;9]$.

Déterminer mentalement la valeur moyenne de f sur $[1\,;9]$.

50 Déterminer mentalement la valeur moyenne de la fonction sinus sur l'intervalle $[0\,;\pi]$.

51 f et g sont deux fonctions continues sur l'intervalle $[-1\,;3]$ telles que :

$$\int_{-1}^{3} f(x)\mathrm{d}x = 2 \text{ et } \int_{-1}^{3} g(x)\mathrm{d}x = -2.$$

Déterminer $\displaystyle\int_{-1}^{3}(3f(x)+4g(x))\mathrm{d}x$.

52 Voici deux intégrales :

$$A = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^x\cos^2(x)\mathrm{d}x \text{ et } B = \int_0^{\pi}\mathrm{e}^x\sin^2(x)\mathrm{d}x.$$

Calculer A + B (sans calculer ni A ni B).

53 On pose $\displaystyle I_1 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ et $\displaystyle I_2 = \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}\mathrm{d}x$

a) À l'aide d'une primitive, démontrer que $I_1 = \frac{1}{2}\ln(2)$.

b) Calculer $I_1 + I_2$. En déduire la valeur de I_2.

54 Utiliser la relation de Chasles pour calculer :

$$I = \int_{-3}^{4} |x|\mathrm{d}x.$$

55 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x \leqslant 1 \\ 2+x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}.$$

a) Justifier la continuité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

b) Calculer $\displaystyle\int_{-2}^{3} f(x)\mathrm{d}x$ avec la relation de Chasles.

56 **1.** Étudier le signe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - x - 2$.

2. Dans chaque cas, en déduire le signe de l'intégrale.

a) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} f(x)\mathrm{d}x$ **b)** $\displaystyle\int_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x$ **c)** $\displaystyle\int_{3}^{5} f(x)\mathrm{d}x$

57 Dans chaque cas, déterminer le signe de l'intégrale sans la calculer.

a) $\displaystyle\int_{-1}^{0}(x+1)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ **b)** $\displaystyle\int_{-2}^{0} x(x^2+1)\mathrm{d}x$

58 On donne le tableau de variations suivant :

x	-4	-1	0	1	5
$f(x)$	2	-1	0	2	1

1. Dans chaque cas, déterminer le signe de l'intégrale.

a) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{0} f(x)\mathrm{d}x$ **b)** $\displaystyle\int_{0}^{3} f(x)\mathrm{d}x$

2. Dans chaque cas, déterminer un encadrement de l'intégrale.

a) $\displaystyle\int_{-4}^{-1} f(x)\mathrm{d}x$ **b)** $\displaystyle\int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x$

59 **a)** Démontrer que pour tout réel x de $[0\,;1]$,
$$\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{1+x^2} \leqslant 1.$$
b) En déduire un encadrement de $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

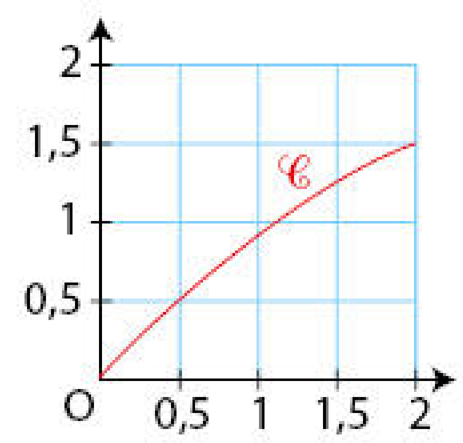
60 **a)** Démontrer que pour tout réel t de $[-1\,;1]$,
$$0 \leqslant t^2 \mathrm{e}^t \leqslant \mathrm{e} \times t^2.$$
b) En déduire un encadrement de $\int_{-1}^1 t^2 \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$.

61 f est la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;1]$ par :
$$f(x) = \frac{3x+2}{x+1}.$$
a) Étudier les variations de la fonction f sur $[0\,;1]$.
b) Démontrer que tout réel x de $[0\,;1]$,
$$2 \leqslant f(x) \leqslant \frac{5}{2}.$$
c) En déduire un encadrement de $\int_0^1 f(x)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

62 Dans chaque cas, calculer la valeur moyenne de la fonction sur l'intervalle I donné.
a) $f(x) = -x^2 + x - 3 \quad \mathrm{I} = [-2\,;0]$
b) $g(x) = \dfrac{x}{x^2+1} \quad \mathrm{I} = [0\,;1]$
c) $h(x) = \mathrm{e}^{-3x+1} \quad \mathrm{I} = [-1\,;1]$

63 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = x^2 + x - 2.$$
a) Calculer la valeur moyenne μ de f sur $[0\,;1]$.
b) Déterminer un nombre réel c de $[0\,;1]$ tel que $f(c) = \mu$.

64 Pour tout réel x, $f(x) = x\mathrm{e}^{-\frac{x}{10}}$.
$\mathscr{C}$ est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.
a) À l'aide du graphique ci-contre, donner un encadrement de la valeur moyenne μ de f sur l'intervalle $[0\,;2]$.
b) Déterminer le nombre μ avec la calculatrice.



65 Dans une usine, un four cuit des céramiques à la température de 1 000 °C. On note t le temps, en heure, écoulé depuis l'instant où le four a été éteint.
La température du four (en °C) à l'instant t est :
$$f(t) = 980\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}} + 20.$$
Calculer la température moyenne du four sur les 15 premières heures de refroidissement.

Intégration par parties

Cours 4

Questions flash — À l'oral

66 Julie calcule une intégrale avec la méthode d'intégration par parties :
$$\int_0^\pi x\cos(x)\mathrm{d}x = [x\sin(x)]_0^\pi - \int_0^\pi \boxed{}\,\mathrm{d}x$$
Compléter oralement la formule écrite par Julie.

67 Afin de calculer $\int_0^x t\mathrm{e}^{3t}\mathrm{d}t$ (avec $x \in \mathbb{R}$), Bernard pose pour tout réel t :
$u(t) = t \qquad u'(t) = 1$
$v'(t) = \boxed{} \qquad v(t) = \boxed{}$
Compléter oralement les choix de Bernard.

Pour les exercices 68 et 69, calculer chaque intégrale en intégrant par parties.

68 **a)** $\int_0^\pi x\cos(x)\mathrm{d}x$ **b)** $\int_{-1}^3 (t+2)\mathrm{e}^t\mathrm{d}t$

69 **a)** $\int_0^2 (3x+1)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ **b)** $\int_1^{\mathrm{e}} (2x+1)\ln(x)\mathrm{d}x$

Vidéo — JAICOMPRIS.COM — Cet exercice est corrigé en vidéo

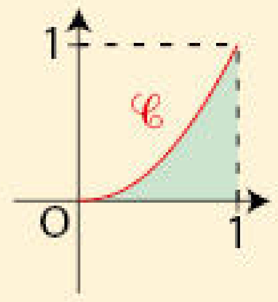
70 On pose $\mathrm{I} = \int_0^1 x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$ et $\mathrm{J} = \int_0^1 x^2\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.
a) À l'aide d'une première intégration par parties, établir que $\mathrm{J} = \mathrm{e} - 2\mathrm{I}$.
b) Calculer I à l'aide d'une deuxième intégration par parties.
c) En déduire la valeur de l'intégrale J.

71 Voici un écran de calcul formel.
Vérifier ce résultat en appliquant deux fois successivement la méthode d'intégration par parties.

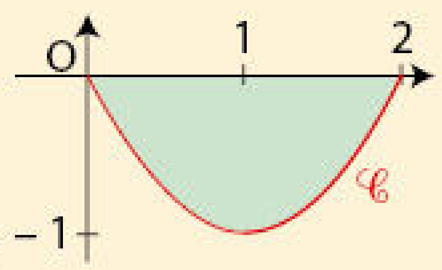
1 $\quad \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos(x)\,\mathrm{d}x \;\rightarrow\; \frac{\pi^2 - 8}{4}$

72 **a)** x est un nombre réel strictement positif.
À l'aide de la méthode d'intégration par parties, calculer :
$$\int_1^x t^2\ln(t)\mathrm{d}t$$
b) En déduire une primitive de la fonction $x \mapsto x^2\ln(x)$ sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

73 **QCM** **Dans chaque cas, donner la réponse exacte sans justifier.**

		A	B	C	D
1	$\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction $x \mapsto x^2$ sur $[0\,;1]$ dans un repère orthonormé. L'aire, en *u.a.*, du domaine coloré est égale à … 	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$
2	L'intégrale $\int_0^2 (e^x + x - 3)\mathrm{d}x$ est égale à …	$e^2 - 1$	$e^2 - 3$	$e^2 - 5$	$e^2 + 5$
3	La valeur moyenne de la fonction $t \mapsto \frac{1}{2+t}$ sur l'intervalle $[-1\,;1]$ est égale à …	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}\ln(3)$	$\ln(3)$

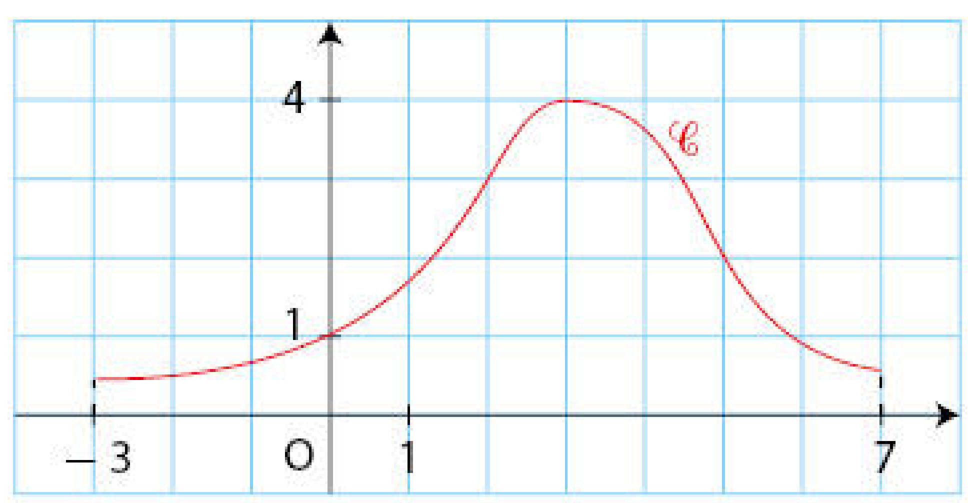
74 **QCM** **Dans chaque cas, donner la (ou les) réponse(s) exacte(s) sans justifier.**

		A	B	C	D
1	$\mathscr{C}$ est la courbe représentative de $g : x \mapsto x^2 - 2x$ sur $[0\,;2]$ dans un repère orthonormé. L'aire, en *u.a.*, du domaine coloré est égale à … 	$\int_0^2 g(x)\mathrm{d}x$	$-\int_0^2 g(x)\mathrm{d}x$	$\frac{4}{3}$	$-\frac{4}{3}$
2	Sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$, la fonction $\mathrm{F} : x \mapsto \int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t$ …	est positive	est croissante	est décroissante	change de sens de variation
3	f est une fonction telle que pour tout réel x de $[1\,;2]$, $0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{x}$. Alors $\mathrm{I} = \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$ vérifie …	$\mathrm{I} \geqslant 0$	$\mathrm{I} < 0$	$\mathrm{I} \leqslant \ln(2)$	$\mathrm{I} \leqslant 1$

75 **Vrai/Faux** **Dans chaque cas, dire si l'affirmation est vraie ou fausse en justifiant.**

1 La courbe $\mathscr{C}$ ci-contre représente une fonction h dans un repère orthonormé.

Affirmation : $13 \leqslant \int_{-3}^{7} h(x)\mathrm{d}x \leqslant 23$



2 f est une fonction continue sur l'intervalle $[0\,;2]$.

Affirmation : $\int_0^2 (f(x) + 3)\mathrm{d}x = \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x + 3$

3 g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (1 - 2x)e^{-x}$.

Affirmation : $\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x = \frac{3 - e}{e}$

Vérifiez vos réponses : p. 529

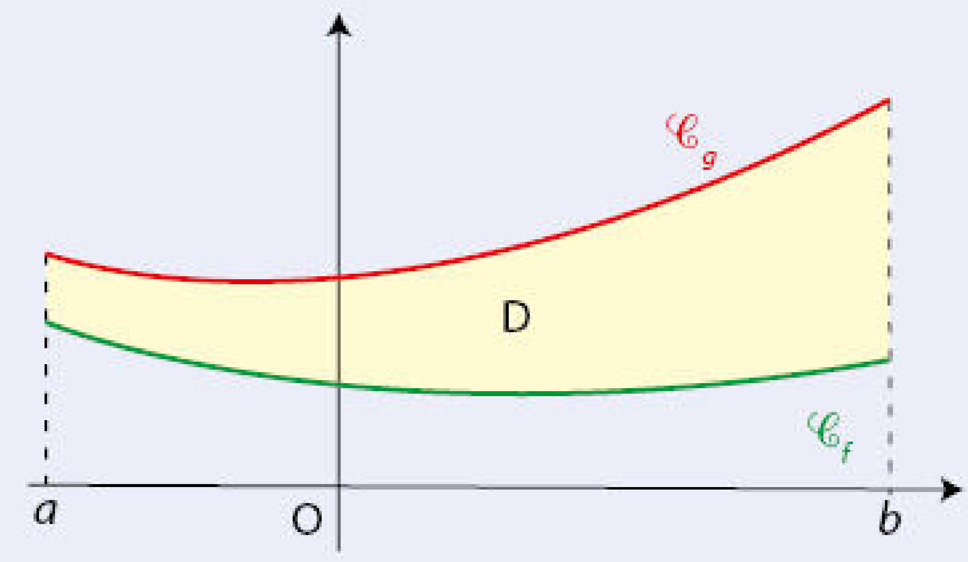
76 Distinguer les étapes d'une démonstration

f et g sont deux fonctions définies et continues sur un intervalle $[a\,;b]$.
On suppose que pour tout réel x de l'intervalle $[a\,;b]$, $f(x) \leqslant g(x)$.
$\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthogonal.
On se propose d'établir une formule afin de calculer l'aire, en unité d'aire, du domaine D compris entre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équations $x = a$, $x = b$.

1. Quelle est la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$?

2. Première étape

On suppose dans cette question que la fonction f est positive sur l'intervalle $[a\,;b]$.



a) Écrire l'aire, en *u.a.*, de chacun des domaines situés sous la courbe $\mathscr{C}_g$ et sous la courbe $\mathscr{C}_f$ à l'aide d'une intégrale.

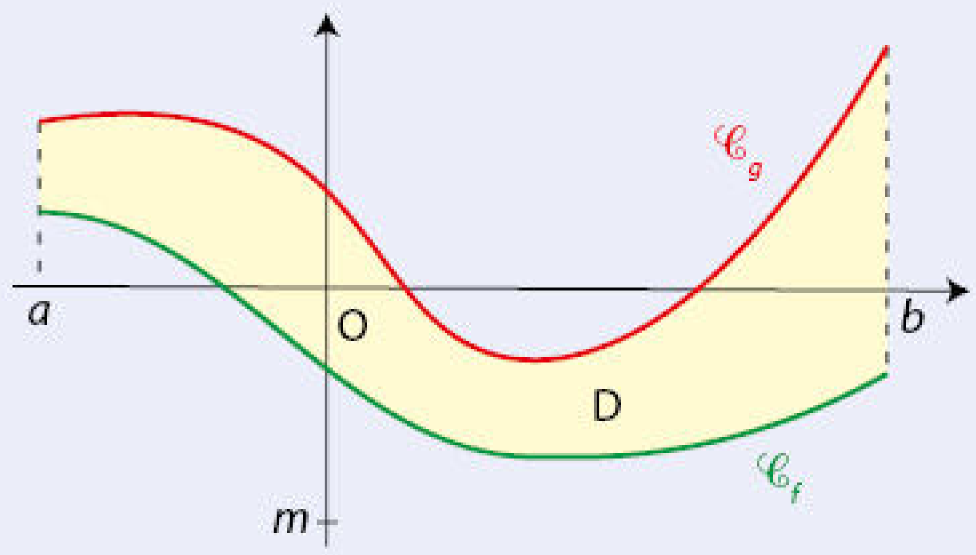
b) Justifier alors que l'aire, en *u.a.*, du domaine D est donnée par :

$$\mathscr{A}(\mathrm{D}) = \int_a^b (g(x) - f(x))\mathrm{d}x.$$

3. Deuxième étape

On abandonne l'hypothèse concernant le signe de la fonction f.
On admet l'existence d'un nombre m tel que pour tout réel x de $[a\,;b]$,

$$f(x) \geqslant m.$$



On définit les fonctions f_1 et g_1 sur l'intervalle $[a\,;b]$ par :
$f_1(x) = f(x) - m$ et $g_1(x) = g(x) - m$.

a) Justifier que l'aire, en *u.a.*, du domaine D_1 délimité par $\mathscr{C}_{f_1}$, $\mathscr{C}_{g_1}$ et les droites d'équations $x = a$, $x = b$ est égale à l'aire du domaine D.

b) Vérifier que la fonction f_1 est positive sur l'intervalle $[a\,;b]$.

c) À l'aide du résultat de la question **2** appliqué aux fonctions f_1 et g_1, démontrer qu'en u.a. :

$$\mathscr{A}(\mathrm{D}) = \int_a^b (g(x) - f(x))\mathrm{d}x.$$

77 Intégration et parité

I est un intervalle centré en 0 et f est une fonction définie et continue sur I.

φ est la fonction définie sur I par $\varphi(x) = \displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\mathrm{d}t$.

1. On note F la primitive de f sur I telle que $\mathrm{F}(0) = 0$.

a) Justifier que pour tout réel x de I, $\varphi(x) = \mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(-x)$.

b) Démontrer que φ est dérivable sur I et que pour tout x de I, $\varphi'(x) = f(x) + f(-x)$.

2. On suppose que f est une fonction impaire sur I.
Démontrer que pour tout réel x de I, $\varphi(x) = 0$.

3. On suppose que f est une fonction paire sur I.
Démontrer que pour tout réel x de I, $\displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\mathrm{d}t = 2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$

Vidéo

JAICOMPRIS.COM

Toutes les démonstrations au programme en vidéo

Liste des démonstrations :

- La fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est une primitive de f.
- La relation $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$.
- Intégration par parties.

Conseil
3. a) Le domaine D_1 est l'image du domaine D par une translation.

Conseil
1. b) La primitive F de f sur I telle que $\mathrm{F}(0) = 0$ est définie par :

$$\mathrm{F}(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t.$$

Calculer une intégrale

78 PARCOURS DIFFÉRENCIÉS

Parcours 1

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = x\cos(x) + \sin(x).$$
On pose $\mathrm{I} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x$.
Calculer I.

Parcours 2

g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$g(x) = 2x\cos(x) - x^2\sin(x).$$
a) Démontrer que la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{G}(x) = x^2\cos(x)$ est une primitive de g sur $\mathbb{R}$.
b) En déduire $\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)\mathrm{d}x$.

79 f et g sont les fonctions définies sur $\left]\frac{1}{2} ; +\infty\right[$ par :
$$f(x) = \frac{3}{2x-1} \text{ et } g(x) = \frac{9-6x}{4x-2}.$$
1. Calculer $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$.
2. a) Vérifier que pour tout réel x de $\left]\frac{1}{2} ; +\infty\right[$,
$$g(x) - f(x) = -\frac{3}{2}.$$
b) En déduire la valeur de $\int_1^2 g(x)\mathrm{d}x$.

80 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{3\mathrm{e}^x + 8}{\mathrm{e}^x + 4}$.
a) Vérifier que pour tout réel x, $f(x) = 2 + \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 4}$.
b) Calculer $\int_{-1}^0 f(x)\mathrm{d}x$.

81 Voici un écran de calcul formel.

1	$\int x^3 \ln(x)\,dx$
	$\rightarrow \frac{1}{4}x^4 \ln(x) - \frac{1}{16}x^4 + c_1$

a) Interpréter et vérifier le résultat affiché.
b) F est la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par :
$$\mathrm{F}(x) = \int_1^x t^3 \ln(t)\mathrm{d}t.$$
Déterminer l'expression explicite de $\mathrm{F}(x)$.

82 Démontrer l'égalité :
$$\int_{-1}^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x = \sqrt{5} - \sqrt{2}.$$

83 f est la fonction définie sur $]-\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty[$ par :
$$f(x) = \frac{x^3 - 6x^2 + x}{1-x}.$$
1. a) Déterminer des nombres réels a, b, c et d tels que pour tout réel $x \neq 1$,
$$f(x) = ax^2 + bx + c + \frac{d}{1-x}.$$
b) Calculer $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\mathrm{d}x$.
2. Calculer, à l'aide de la méthode d'intégration par parties, l'intégrale :
$$\mathrm{I} = \int_0^{\frac{1}{2}} (3x^2 - 12x + 1)\ln(1-x)\mathrm{d}x.$$

84 On pose :
$$\mathrm{I} = \int_0^1 \frac{x\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}\mathrm{d}x \text{ et } \mathrm{J} = \int_0^1 \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x.$$
1. À l'aide de la méthode d'intégration par parties, exprimer I en fonction de J.
2. a) Démontrer que pour tout réel x,
$$\frac{1}{1+\mathrm{e}^x} = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x}+1}.$$
b) En déduire la valeur de J.
3. Déterminer alors la valeur de I.

85 On souhaite calculer $\mathrm{I} = \int_0^2 x^3\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$.
a) Déterminer une primitive F sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto x^3\mathrm{e}^{2x}$ telle que $\mathrm{F}(x) = \mathrm{P}(x)\mathrm{e}^{2x}$ où P est un polynôme de degré 3.
b) En déduire la valeur de I.

86 La hauteur, en mètre, d'une ligne électrique peut être modélisée par la fonction h définie sur $[-100 ; 100]$ par :
$$h(x) = 68{,}5\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{137}} + \mathrm{e}^{-\frac{x}{137}}\right).$$
Déterminer la hauteur moyenne de la ligne électrique.

87 Une maladie épizootique s'est développée dans un cheptel de bovins. Une zoologiste a modélisé le nombre de bêtes atteintes par cette maladie, t jours après l'apparition de celle-ci, par $\mathrm{N}(t) = 30t^2 - t^3$ pour $0 \leqslant t \leqslant 30$.
a) Calculer le nombre moyen de bovins malades durant les dix premiers jours.
b) Calculer le nombre moyen de bovins malades durant les dix jours où il y a eu le plus de malades.

Calculer une aire

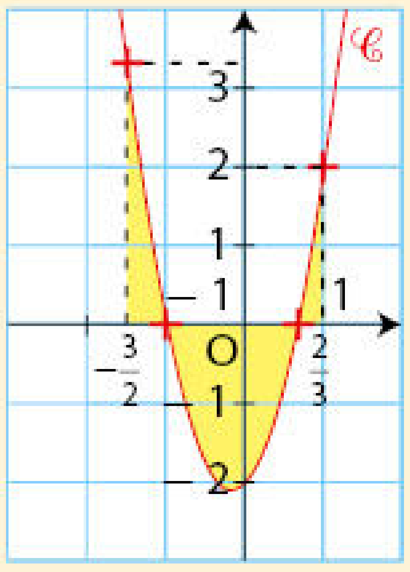
88 **PARCOURS DIFFÉRENCIÉS**

Parcours 1

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3x^2 + x - 2.$$

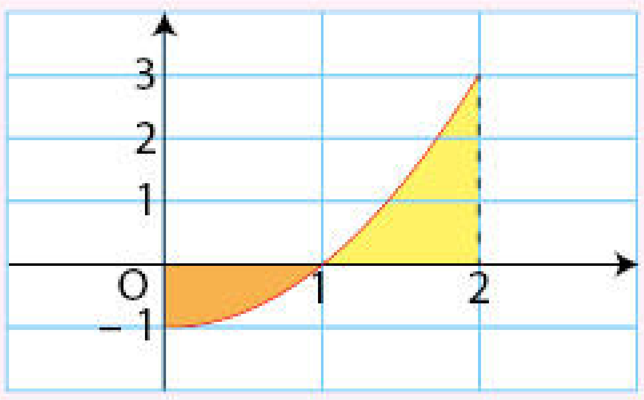
Voici la courbe présentative de la fonction f dans un repère orthonormé.



On note $\mathscr{D}$ le domaine coloré sur le graphique. Calculer l'aire de $\mathscr{D}$ en unité d'aire.

Parcours 2

Voici la courbe représentative de la fonction g définie sur $[0 ; 2]$ par $g(x) = x^2 - 1$.



Calculer l'aire, en u.a., du domaine.

a) coloré en orange ;

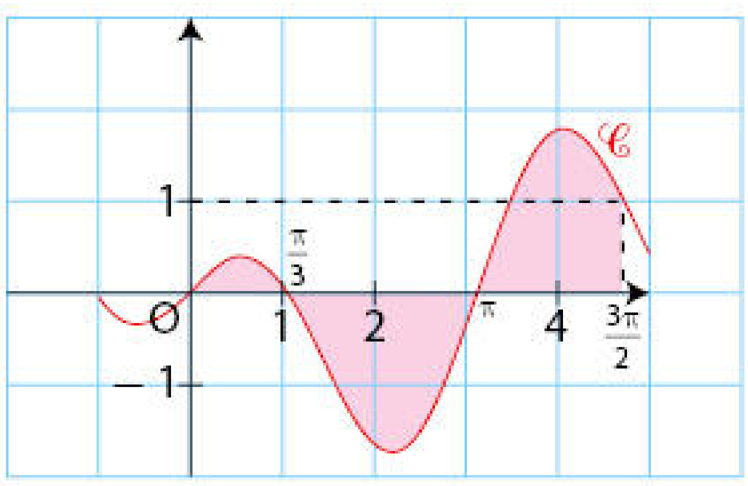
b) coloré en jaune ;

c) coloré en orange et en jaune.

89 g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = (2\cos(x) - 1)\sin(x).$$

Voici la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthogonal.



Calculer l'aire, en unité d'aire, du domaine coloré sur le graphique.

90 f et g sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 4 - x^2 \text{ et } g(x) = 1 - \frac{1}{4}x^2.$$

$\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont les courbes représentatives de f et g dans un repère orthogonal.

1. a) Déterminer les points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

b) Démontrer que pour tout réel x de $[-2 ; 2]$,

$$g(x) \leqslant f(x).$$

2. Calculer l'aire, en unité d'aire, du domaine délimité par les courbes $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équations $x = -2$, $x = 2$.

91 f et g sont les fonctions définies sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln(x) \text{ et } g(x) = \frac{2}{\mathrm{e}}\sqrt{x}.$$

1. h est la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$h(x) = g(x) - f(x).$$

a) Dresser le tableau de variations de la fonction h.

b) En déduire que pour tout réel $x > 0$, $f(x) \leqslant g(x)$.

2. Démontrer que les fonctions $x \mapsto x\ln(x) - x$ et $x \mapsto \frac{4}{3\mathrm{e}}x\sqrt{x}$ sont respectivement des primitives de f et g sur $]0 ; +\infty[$.

3. $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthogonal.

D est le domaine délimité par $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équations $x = 1$, $x = \mathrm{e}^2$.

a) Justifier que l'aire, en *u.a.*, de D est donnée par :

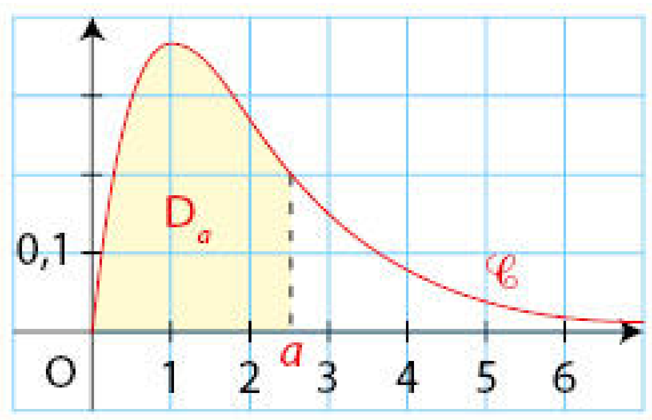
$$\mathscr{A}(\mathrm{D}) = \int_1^{\mathrm{e}^2} (g(x) - f(x))\mathrm{d}x.$$

b) Calculer $\mathscr{A}(\mathrm{D})$.

92 f est la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x}.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.



a) Justifier que la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de l'axe des abscisses.

b) Pour tout réel $a \geqslant 0$, on note D_a le domaine situé sous la courbe $\mathscr{C}$ sur l'intervalle $[0 ; a]$.

À l'aide d'une intégration par parties, exprimer l'aire, en *u.a.*, du domaine D_a en fonction de a.

c) Déterminer la limite de cette aire lorsque a tend vers $+\infty$.

Majorer, minorer une intégrale. Étudier une suite d'intégrales

93 **PARCOURS DIFFÉRENCIÉS**

Parcours 1

f est la fonction définie sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x)=x^2 e^{\cos(x)}$.

On pose $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x$.

Démontrer l'encadrement : $\frac{\pi^3}{24} \leqslant I \leqslant \frac{e\pi^3}{24}$.

Parcours 2

g est la fonction définie sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ par $g(x) = xe^{\sin(x)}$.

On pose $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)\mathrm{d}x$.

a) Démontrer que pour tout réel x de $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$,

$$x \leqslant g(x) \leqslant e \times x.$$

b) En déduire un encadrement de l'intégrale J.

94 **a)** Démontrer que pour tout réel t :

$$1 - t^2 \leqslant \frac{1}{1+t^2} \leqslant 1.$$

b) En déduire un encadrement de l'intégrale :

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

c) À l'aide de la calculatrice, obtenir la valeur exacte de I.

95 g est la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{e^x}{x^2}.$$

a) Étudier le sens de variation de la fonction g.

b) Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[1 ; 2]$,

$$\frac{e^2}{4} \leqslant g(x) \leqslant e.$$

c) En déduire un encadrement de $\int_1^2 g(x)\mathrm{d}x$.

96 Yolanda a affiché à l'écran de sa calculatrice les courbes représentatives des fonctions $f : x \mapsto \frac{\sin x}{x}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ et $x \mapsto -\frac{1}{x}$ sur l'intervalle $I = \left[\frac{\pi}{2} ; 2\pi\right]$.

a) Elle écrit que pour tout réel x de I,

$$-\frac{1}{x} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{x}.$$

Justifier cet encadrement.

b) En déduire un encadrement de $\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} f(x)\mathrm{d}x$.

97 Pour tout entier naturel n non nul, on pose :

$$I_n = \int_0^1 e^{-nt}\mathrm{d}t.$$

a) Pour tout entier naturel n, déterminer une primitive de la fonction $t \mapsto e^{-nt}$ sur $[0 ; 1]$, puis en déduire l'expression de I_n en fonction de n.

b) Déterminer la limite de la suite (I_n).

Vidéo

JaiCompris.com — Cet exercice est corrigé en vidéo

98 (u_n) est la suite définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par : $u_n = \int_0^1 t^n e^t \mathrm{d}t$.

a) Justifier que pour tout $n \geqslant 1$, $u_n \geqslant 0$.

b) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

c) Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

d) À l'aide de la calculatrice, donner l'arrondi au centième de u_{10}.

99 Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose :

$$I_n = \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\mathrm{d}x.$$

a) Démontrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n+1} \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n}$.

b) La suite (I_n) est-elle convergente ?

S'entraîner à la logique → p. 525

100 **Implication, équivalence**

f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a ; b]$ $(a < b)$. Dans chaque cas, justifier :
– si la proposition P implique la proposition Q ;
– si la proposition Q implique la proposition P ;
– si les propositions P et Q sont équivalentes.

a) P : « f est une fonction positive sur $[a ; b]$ ».
Q : « $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$ ».

b) P : « $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$ ».
Q : « Pour tout réel x de $[a ; b]$, $f(x) = 0$ ».

c) P : « Pour tout réel t de $[a ; b]$, $f(t) \geqslant 0$ ».
Q : « Pour tout réel x de $[a ; b]$, $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \geqslant 0$ ».

101 **Contre-exemple**

f est une fonction continue sur un intervalle $I = [a ; b]$ et μ est sa valeur moyenne sur I.
Dans chaque cas, utiliser un contre-exemple pour montrer que l'égalité est fausse.

a) $\mu = \frac{f(a)+f(b)}{2}$ **b)** $\mu = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$

102 UN ALGORITHME DE BROUNCKER

Algo python

f est la fonction définie sur l'intervalle $[1\,;2]$ par $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

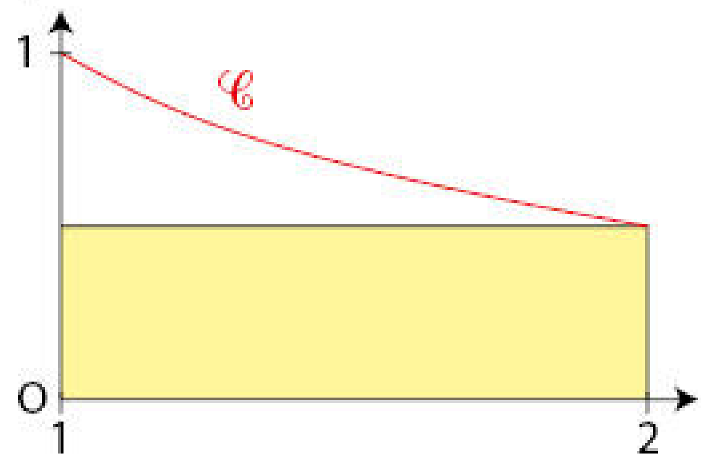
$\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

On se propose d'estimer $\ln(2)$ en utilisant l'aire sous une hyperbole.

1. Premières étapes

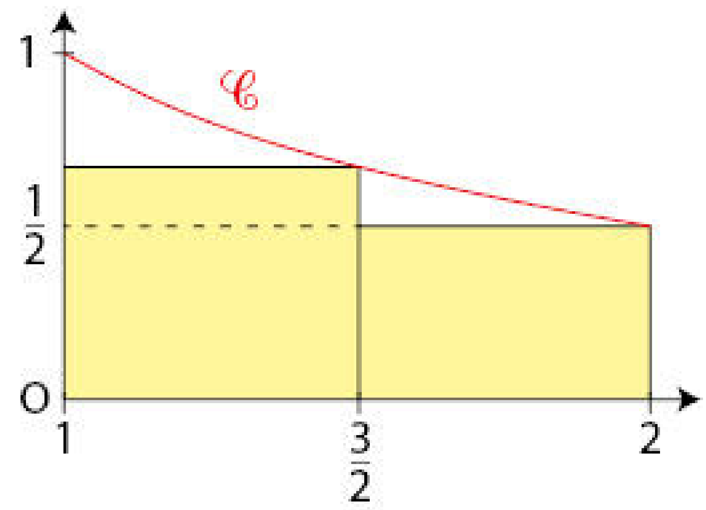
À chacune des étapes i ($i \in \{1, 2, 3, 4\}$) suivantes, S_i désigne la somme des aires, en u.a., des rectangles coloriés sur la figure.

a) Étape 1



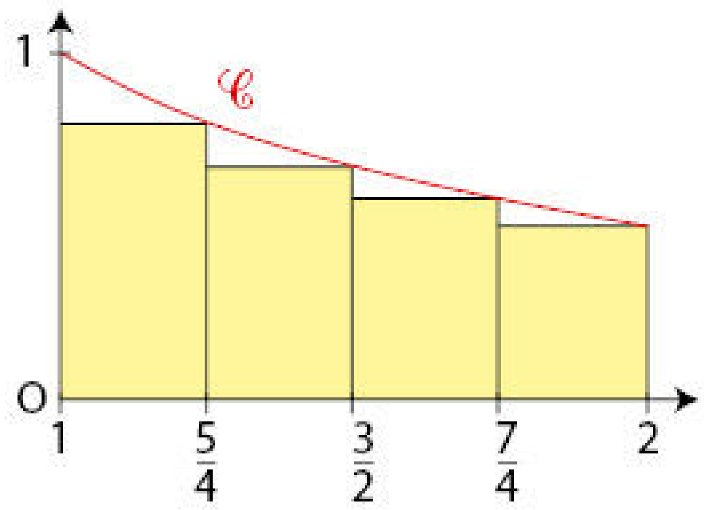
• Justifier que $S_1 = \dfrac{1}{1\times 2}$

b) Étape 2



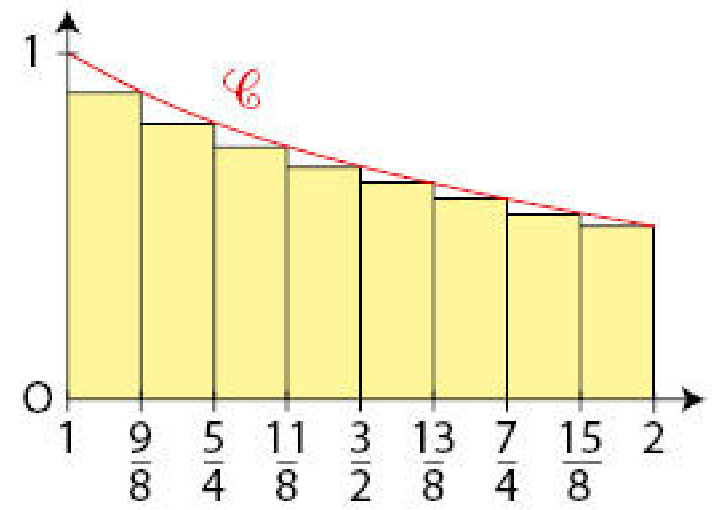
• Établir que $S_2 = S_1 + \dfrac{1}{3\times 4}$

c) Étape 3



• Établir que $S_3 = S_2 + \dfrac{1}{5\times 6} + \dfrac{1}{7\times 8}$

d) Étape 4



• Établir que $S_4 = S_3 + \dfrac{1}{9\times 10} + \dfrac{1}{11\times 12} + \dfrac{1}{13\times 14} + \dfrac{1}{15\times 16}$

2. Une fonction en langage Python

On poursuit la construction précédente, on obtient pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$S_n = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{3\times 4} + \frac{1}{5\times 6} + \ldots + \frac{1}{(2^n-1)\times 2^n}.$$

a) Justifier que la suite (S_n) converge vers $\ln(2)$.

b) Voici une fonction **Br** écrite en langage Python.

Expliquer que, pour une valeur donnée n du paramètre, la fonction **Br** renvoie pour résultat S_n.

c) Saisir et exécuter cette fonction pour les valeurs suivantes du paramètre :

• $n = 5$ • $n = 10$ • $n = 20$

À chaque passage dans la boucle, le compteur k est incrémenté de 2.

```
def Br(n):
    S=0
    for k in range(2,2**n+1,2):
        S=S+1/((k-1)*k)
    return S
```

HISTOIRE DES MATHS

William Brouncker (1620-1684) est un mathématicien anglais. Ses travaux portent en particulier sur la rectification, c'est-à-dire le calcul des longueurs de certaines courbes. Il étudie également la mesure des aires délimitées par l'hyperbole.

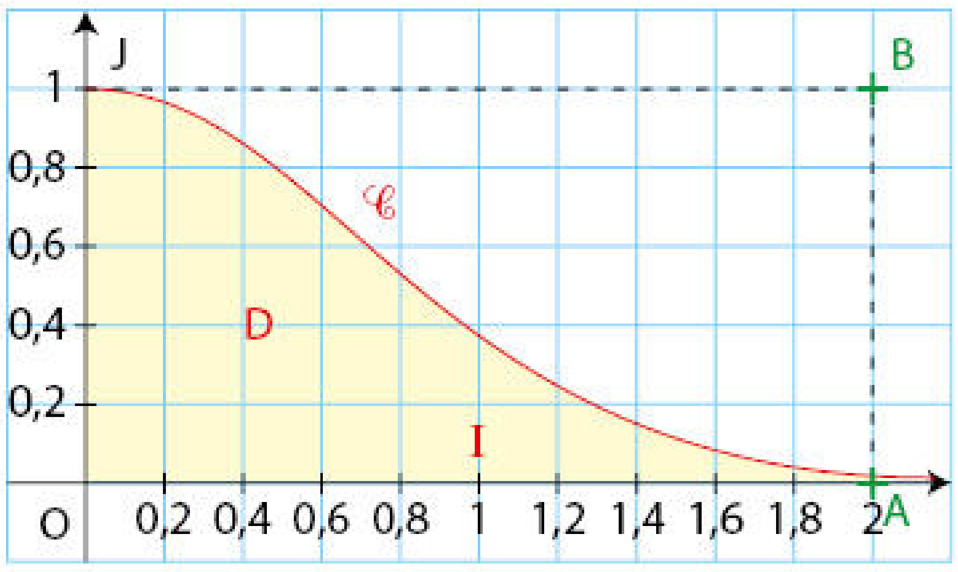
103 LA MÉTHODE DE MONTE-CARLO

Algo python

f est la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;2]$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$.

$\mathscr{C}$ est sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\ \overrightarrow{\mathrm{OI}}, \overrightarrow{\mathrm{OJ}})$ et D est le domaine situé sous la courbe $\mathscr{C}$.

On note A et B les points de coordonnées respectives $(2\,;0)$ et $(2\,;1)$.



Voici une fonction **M_C** écrite en langage Python.

Elle effectue N choix au hasard d'un point dans le rectangle OABJ et compte le nombre L de points qui sont situés dans le domaine D.

Le rapport $\dfrac{\mathrm{L}}{\mathrm{N}}$ est alors une approximation du rapport de l'aire du domaine D à l'aire du rectangle OABJ.

```
1  from math import *
2  from random import *
3
4  def M_C(N):
5      L=0
6      for k in range(1,N+1):
7          x= 2*random()
8          y=random()
9          if y<=exp(-x**2):
10             L=L+1
11     I=2*L/N
12     return I
```

1. Étudier un programme

a) Que représentent les variables x et y dans le contexte de la méthode décrite.

b) Expliquer le rôle de la condition $y \leqslant \mathrm{e}^{-x^2}$ du test de la ligne 9 du programme.

c) La fonction **M_C** renvoie pour résultat le contenu de la variable I.

Que représente-t-il ?

2. Obtenir des résultats

a) Saisir ce programme.

b) Exécuter la fonction avec des valeurs du paramètre N de plus en plus grandes.

Comparer les résultats à la valeur de $\displaystyle\int_0^2 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ obtenue ci-contre avec une calculatrice.

$$\int_0^2 e^{-x^2}\,dx \qquad 0.8820813908$$

HISTOIRE DES MATHS

La méthode de Monte-Carlo permet en particulier de déterminer une valeur approchée d'une aire à l'aide d'un programme qui effectue des choix aléatoires de points dans le plan.

Elle est donc basée sur des principes probabilistes et s'applique à d'autres situations : calculs de volumes, physique des particules, calcul du risque en statistique …

Le nom de cette méthode rappelle les jeux de hasard pratiqués au casino de Monte-Carlo ; elle a été inventée en 1947 par le physicien gréco-américain Nicholas Metropolis.

104 Étudier la convergence d'une suite

Raisonner **Calculer**

(u_n) est la suite définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} \mathrm{d}x$.

1. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante et minorée.

2. a) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$u_{n+1} + u_n = \frac{1}{n+1}.$$

b) En déduire que la suite (u_n) converge vers 0.

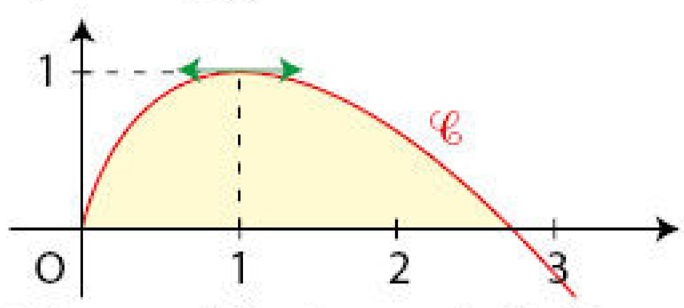
105 Calculer une aire

Raisonner **Calculer**

f est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = x(1 - \ln(x)).$$

Voici la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f dans un repère orthonormé.



1. a) Conjecturer les variations et le signe de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

b) Démontrer les conjectures émises au **a)**.

2. a est un nombre réel strictement positif.

On note $\mathscr{A}(a)$ l'aire, en unité d'aire, du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$, $x = \mathrm{e}$.

a) Justifier que $\mathscr{A}(a) = \left|\int_a^{\mathrm{e}} f(x)\mathrm{d}x\right|$ en distinguant les cas $a \leqslant \mathrm{e}$ et $a > \mathrm{e}$.

b) À l'aide de la méthode d'intégration par parties, exprimer $\mathscr{A}(a)$ en fonction de a.

c) Pour quelle(s) valeur(s) de a, a-t-on $\mathscr{A}(a) = \frac{\mathrm{e}^2}{4}$?

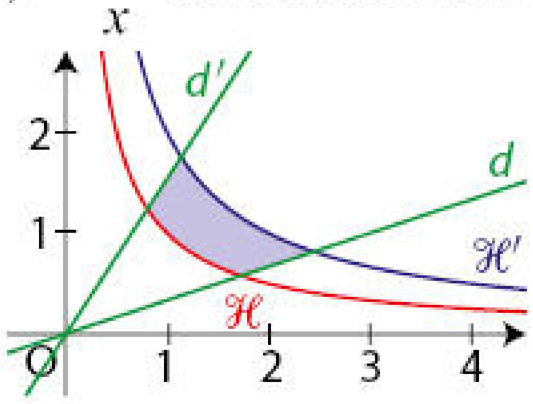
106 Prendre des initiatives

Chercher **Raisonner** **Calculer**

a et b sont deux nombres réels strictement positifs tels que $a < b$. On considère les droites d et d' d'équations respectives $y = ax$ et $y = bx$ dans un repère orthonormé.

f et g sont les fonctions définies sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = \frac{2}{x}$ de courbes respectives $\mathscr{H}$ et $\mathscr{H}'$.

Exprimer en fonction de a et b l'aire, en unité d'aire, du domaine coloré en violet ci-contre.



107 Chercher une parabole

Narration de recherche

Chercher **Raisonner** **Calculer**

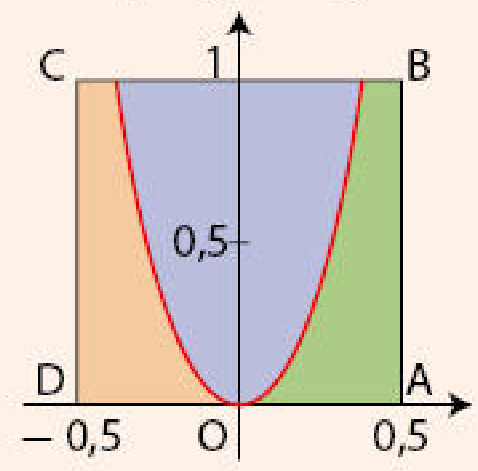
Rédiger les différentes étapes de la recherche, sans omettre les fausses pistes et les changements de méthode.

Problème

Dans un repère orthonormé d'origine O, on donne :

$$\mathrm{A}\left(\frac{1}{2}\,;0\right),\ \mathrm{B}\left(\frac{1}{2}\,;1\right),\ \mathrm{C}\left(-\frac{1}{2}\,;1\right) \text{ et } \mathrm{D}\left(-\frac{1}{2}\,;0\right).$$

Déterminer la fonction dont la courbe est la parabole de sommet O et qui sépare le carré ABCD en trois parties d'aires $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$.



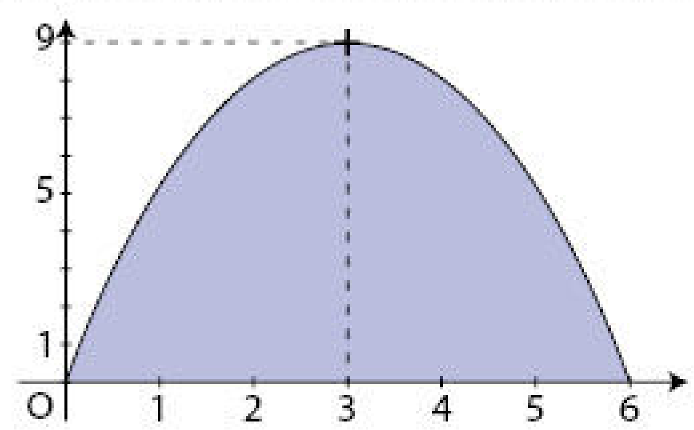
108 Imaginer une stratégie

Chercher **Raisonner** **Calculer**

Dans un repère orthogonal, on a tracé la courbe représentative de la fonction f définie sur $[0\,;6]$ par :

$$f(x) = x(6 - x).$$

$\mathscr{A}$ est l'aire du domaine coloré, en unité d'aire.



Pour tout réel m, on note $\mathscr{D}_m$ la droite d'équation $y = mx$.

Déterminer, si elles existent, les valeurs de m pour lesquelles l'aire du domaine compris entre $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}_m$ est égale à un huitième de $\mathscr{A}$.

109 Approcher une courbe

? Problème ouvert

Chercher **Calculer** **Communiquer**

f est la fonction définie sur $[0\,;1]$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-\sin(\pi x)}$.

$\mathscr{C}$ est sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

a) Déterminer une fonction polynôme du second degré g dont la courbe $\mathscr{P}$ « approche » $\mathscr{C}$ sur $[0\,;1]$.

b) En déduire une valeur approchée de $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

110 Find a limit

Calculer **Communiquer**

(u_n) is the sequence defined for n in $\mathbb{N}$ by :

$$u_n = \int_0^q nx^n \mathrm{d}x$$

where q is a real positive number.

Find $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

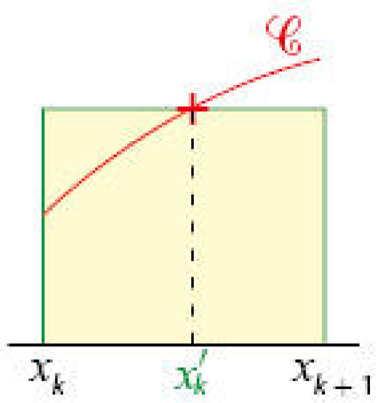
Pour les exercices 111 et 112, f est une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;b]$.
$\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction f.
On découpe l'intervalle $[a\,;\,b]$ en n intervalles ($n \in \mathbb{N}^*$) de même longueur $\dfrac{b-a}{n}$ à l'aide des nombres réels $x_0, x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n$.

111 Algo python La méthode des milieux

Raisonner **Calculer**

On note $x'_0, x'_1, \ldots, x'_{n-1}$ les milieux respectifs des intervalles $[x_0\,;\,x_1]$, $[x_1\,;x_2], \ldots, [x_{n-1}\,;x_n]$.

Sur chaque intervalle $[x_k\,;\,x_{k+1}]$ (avec $0 \leqslant k \leqslant n-1$), on construit le rectangle de dimensions $\dfrac{b-a}{n}$ et $f(x'_k)$.



La somme I_n des aires des rectangles est donnée par :

$$\mathrm{I}_n = \frac{b-a}{n}\left[f(x'_0) + f(x'_1) + \ldots + f(x'_{n-1})\right].$$

Cette somme est une approximation de l'aire, en *u.a.*, du domaine sous la courbe $\mathscr{C}$, c'est-à-dire de $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Voici une fonction **Milieux** écrite en langage Python qui renvoie pour résultat la somme I_n des aires des rectangles.

```
1  from math import *
2
3  def f(x):
4      y=exp(x)
5      return y
6
7  def Milieux(a,b,n):
8      p=(b-a)/n
9      I=0
10     for k in range(0,n):
11         I=I+f(a+(2*k+1)*p/2)
12     I=p*I
13     return I
```

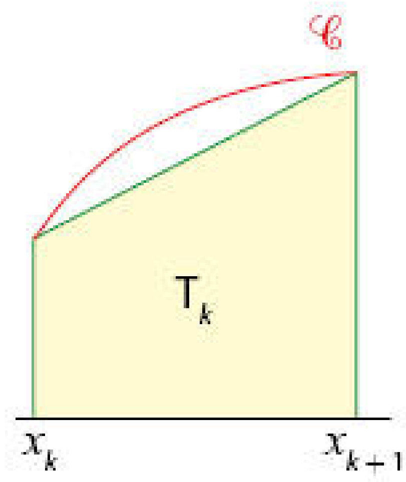
a) Expliquer le calcul de la variable I et en particulier l'instruction d'affectation de la ligne 11.

b) Saisir et tester cette fonction dans différentes situations.

112 Algo python La méthode des trapèzes

Raisonner **Calculer**

Sur chaque intervalle $[x_k\,;\,x_{k+1}]$ (avec $0 \leqslant k \leqslant n-1$), on construit le trapèze T_k comme le montre la figure ci-contre.



1. a) Déterminer l'aire du trapèze T_k.

b) Démontrer que la somme des aires des trapèzes T_k est donnée par :

$$\mathrm{K}_n = \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2}\right].$$

Cette somme est une approximation de l'aire, en *u.a.*, du domaine sous la courbe $\mathscr{C}$, c'est-à-dire de $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

2. La fonction **Trapèzes** écrite en langage Python renvoie pour résultat la somme K_n des aires des trapèzes.

```
from math import *

def f(x):
    y=exp(x)
    return y

def Trapèzes(a,b,n):
    p=(b-a)/n
    K=(f(a)+f(b))/2
    for k in range(1,n):
        K=K+f(a+k*p)
    K=p*K
    return K
```

a) Expliquer le calcul de la variable K.

b) Saisir et tester cette fonction dans différentes situations.

113 Évaluer une quantité constante

Raisonner **Calculer**

a est un nombre réel strictement positif.

Dans un repère orthonormé, $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{1-x}$.

A est le point de coordonnées $(a\,;0)$ et B le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse a.

On note $\mathscr{A}_1$ l'aire du domaine limité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = a$.

La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en B coupe l'axe des abscisses en C et on note $\mathscr{A}_2$ l'aire du triangle ABC.

Démontrer que $\mathscr{A}_1 + 2\mathscr{A}_2$ est indépendant de a.

114 Calculer une longueur, puis une aire

45 min

D'après Bac, Métropole-La Réunion 2019

On considère la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels par :

$$f(x) = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x}).$$

On admet que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions sur $\mathbb{R}$: $-\alpha$ et α avec $\alpha \approx 1{,}92$.

Partie A

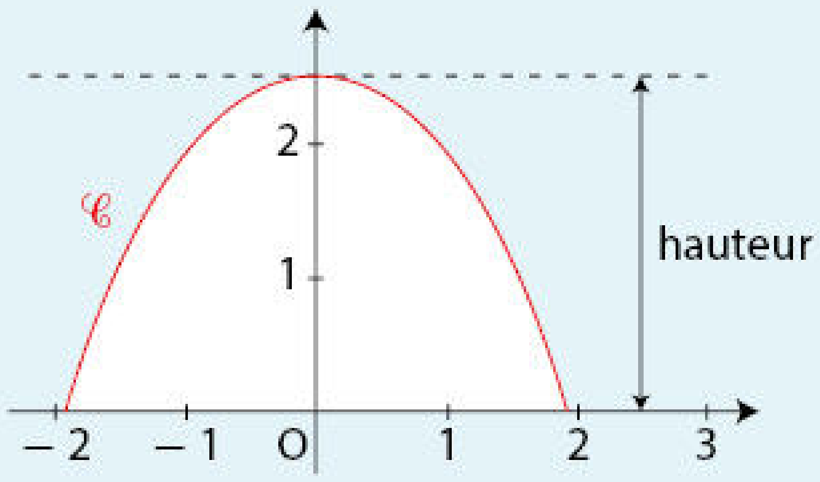
Les **serres en forme de tunnel** sont fréquemment utilisées pour la culture des plantes fragiles ; elles limitent les effets des intempéries ou des variations de température.

Elles sont construites à partir de plusieurs arceaux métalliques identiques qui sont ancrés au sol et supportent une bâche en plastique.

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (unité : 1 m).

On modélise un arceau de serre par la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f sur l'intervalle $[-\alpha\,;\alpha]$.

On admettra que la courbe $\mathscr{C}$ admet l'axe des ordonnées pour axe de symétrie.



1. Calculer la hauteur d'un arceau.

2. On admet que la longueur, en mètre, de la courbe $\mathscr{C}$ sur l'intervalle $[0\,;\alpha]$ est donnée par l'intégrale $I = \int_0^{\alpha} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$.

a) Montrer que pour tout réel x, $1 + (f'(x))^2 = \frac{1}{4}(e^{x} + e^{-x})^2$.

b) En déduire l'expression de l'intégrale I en fonction de α.

Justifier que la longueur d'un arceau, en mètre, est égale à $e^{\alpha} - e^{-\alpha}$.

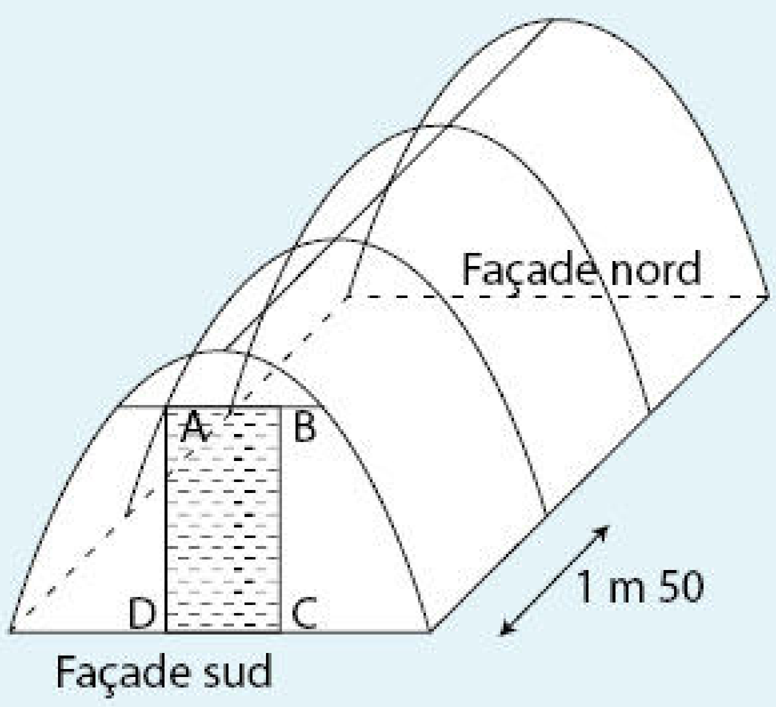
Guide de résolution
1. b) La courbe $\mathscr{C}$ admet l'axe des ordonnées pour axe de symétrie car la fonction f est paire.

Partie B

On souhaite construire une serre de jardin en forme de tunnel.

On fixe au sol quatre arceaux métalliques, dont la forme est celle décrite dans la partie précédente, espacés de 1,5 mètre, comme indiqué sur le schéma ci-contre.

Sur la façade sud, on prévoit une ouverture modélisée sur le schéma par le rectangle ABCD de largeur 1 mètre et de longueur 2 mètres.



On souhaite connaître la quantité, exprimée en m², de bâche plastique nécessaire pour réaliser cette serre.

Cette bâche est constituée de trois parties, l'une recouvrant la façade nord, l'autre la façade sud (sauf l'ouverture), la troisième partie de forme rectangulaire recouvrant le toit de la serre.

1. Montrer que, la quantité de bâche nécessaire pour recouvrir les façades sud et nord est donnée, en m², par $\mathscr{A} = 4\int_0^{\alpha} f(x)\,dx - 2$.

2. Déterminer, au m² près, l'aire totale de la bâche plastique nécessaire pour réaliser cette serre. *On prendra 1,92 pour valeur approchée de α.*

Guide de résolution
1. La quantité de bâche nécessaire pour recouvrir la façade nord est l'aire sous la courbe $\mathscr{C}$ sur $[-\alpha\,;\alpha]$, soit $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx = 2\int_0^{\alpha} f(x)\,dx$.
2. L'aire de la forme rectangulaire est donnée par :
$4{,}5 \times (e^{\alpha} - e^{-\alpha})$.

115 Étudier la limite d'une suite Algo

30 min

D'après Bac, Polynésie 2019

On considère la suite (I_n) définie par $I_0 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x}dx$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

$$I_n = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}dx.$$

1. Montrer que $I_0 = \ln(2)$.

2. Calculer $I_0 - I_1$. En déduire I_1.

3. a) Montrer que pour tout entier naturel n, $I_n - I_{n+1} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1}$.

b) Proposer un algorithme permettant de déterminer, pour un nombre entier naturel non nul donné n, la valeur de I_n.

4. Soit n un nombre entier naturel non nul.

On admet que si x appartient à l'intervalle $\left[0\ ;\ \frac{1}{2}\right]$, alors $0 \leqslant \frac{x^n}{1-x} \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$.

a) Montrer que $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2^n}$.

b) En déduire la limite de la suite (I_n).

5. Pour tout entier naturel non nul n, on pose $S_n = \frac{1}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3} + \ldots + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n}$.

a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $S_n = I_0 - I_n$.

b) En déduire la limite de la suite (S_n).

Se préparer À L'ORAL

116 Présenter un exposé

a) Rappeler la formule d'intégration par parties et ses conditions d'utilisation.

b) Dans un exposé oral de 10 min, présenter cette formule et un exemple d'application.

117 Travailler l'oral en groupe

Résoudre cet exercice en petit groupe, puis en présenter les résultats à l'oral.

F est la fonction dérinie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \int_x^{2x} te^t dt$$

On note G la primitive de la fonction $t \mapsto te^t$ sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

a) Expliquer pourquoi pour tout réel x,

$$F(x) = G(2x) - G(x).$$

b) En déduire que la fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa dérivée F′.

118 Travailler les compétences orales

▶ ANTICIPER LES QUESTIONS DU JURY

1. Préparation de la restitution orale (5 min)

Par groupe de 4, résoudre l'exercice ci-dessous, chaque élève travaillant sur une des quatre propositions.

2. Jeu de rôle (30 min)

Chaque élève présente son résultat à l'oral (2 min), pendant que les trois autres composent le jury. Chaque juré pose une question au candidat (5 min).

Énoncé : (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx.$$

Répondre par Vrai ou Faux en justifiant.

a) $u_1 = 1 - 2e^{-1}$.

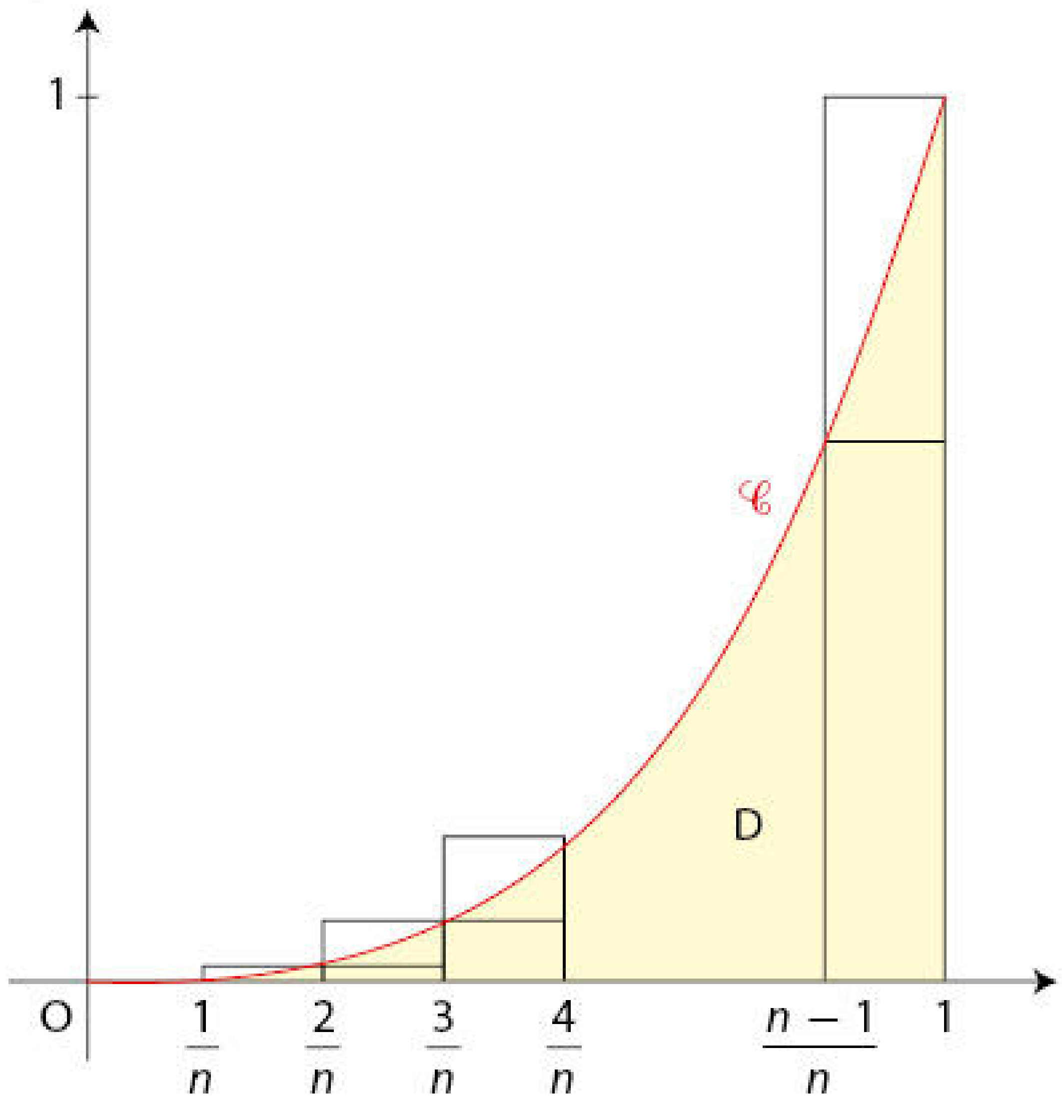
b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant 0$.

c) La suite (u_n) est croissante.

d) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leqslant \frac{1}{n+1}$.

119 **Avec des suites adjacentes**

f est la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par $f(x) = x^3$. $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé et on note $\mathscr{A}$ l'aire, en unité d'aire, du domaine D situé sous la courbe $\mathscr{C}$.



Pour un nombre entier naturel $n \geqslant 2$, on découpe l'intervalle $[0\,;\,1]$ à l'aide des nombres $a_k = \dfrac{k}{n}$ avec $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$.

Sur chaque intervalle $[a_k\,;\,a_{k+1}]$ (avec $0 \leqslant k \leqslant n-1$), on construit le rectangle R_k de hauteur $f(a_k)$ et le rectangle R'_k de hauteur $f(a_{k+1})$.

On note u_n la somme des aires des rectangles R_k et v_n la somme des aires des rectangles R'_k.

1. Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$:

a) Justifier que $u_n \leqslant \mathscr{A} \leqslant v_n$;

b) Vérifier que $u_n = \dfrac{1}{n^4}(1^3 + 2^3 + \ldots + (n-1)^3)$ et $v_n = \dfrac{1}{n^4}(1^3 + 2^3 + \ldots + n^3)$.

2. a) Démontrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}^*$,

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

b) En déduire une expression de u_n et v_n en fonction de n (avec $n \geqslant 2$).

3. Démontrer que :

a) la suite (u_n) est croissante ;

b) la suite (v_n) est décroissante ;

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$.

On dit, dans cette situation, que les suites (u_n) et (v_n) sont **adjacentes**.

3. a) Établir que les suites (u_n) et (v_n) convergent et ont même limite.

b) Interpréter cette limite en terme d'aire.

120 **Algo** python

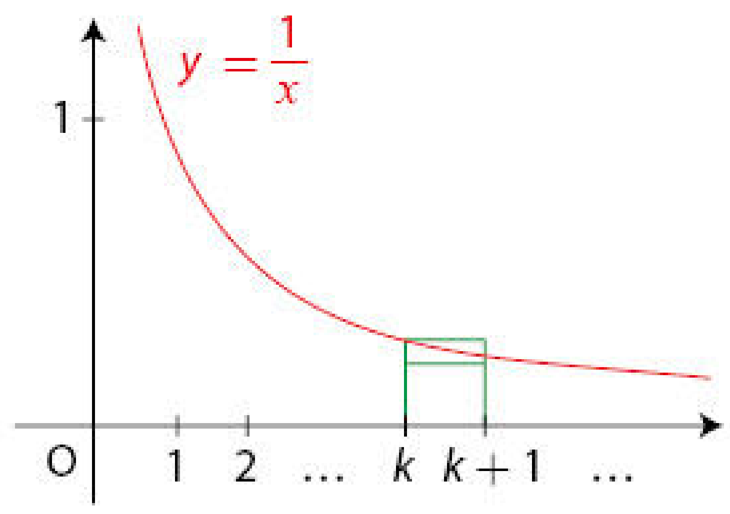
Étude de la somme $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$

La suite (H_n) est définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par :

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

1. a) À l'aide de la figure ci-dessous, justifier que pour tout entier naturel $k \geqslant 1$,

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{x}\right) dx \leqslant \frac{1}{k} \quad \textbf{[1]}$$



b) En effectuant la somme membre à membre des termes des inégalités **[1]** obtenues pour $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, démontrer que :

$$\int_1^{n+1} \left(\frac{1}{x}\right) dx \leqslant H_n \leqslant \int_1^{n+1} \left(\frac{1}{x}\right) dx + \frac{n}{n+1}.$$

c) En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$\ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant \ln(n+1) + \frac{n}{n+1}.$$

d) Démontrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} H_n = +\infty$.

2. Voici une fonction **H** écrite en langage Python.

```
1 def H(n):
2     u=0
3     for k in range(1,n+1):
4         u=u+□
5     return u
```

Cette fonction renvoie pour une valeur n du paramètre, le terme H_n.

a) Compléter la ligne 4 du programme.

b) Saisir et tester cette fonction.

Donner une valeur de n pour laquelle $H_n \geqslant 10$.

121 **Algo** python

La formule de Wallis

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\,dx.$$

1. Calculer I_1 et I_2.

2. n est un nombre entier naturel tel que $n \geqslant 3$.

a) Démontrer que $I_n = (n-1)\,(I_{n-2} - I_n)$.

b) Exprimer I_n en fonction de I_{n-2}.

3. k est un nombre entier naturel tel que $k \geqslant 1$.

a) Exprimer I_{2k} en fonction de k ;

b) Exprimer I_{2k+1} en fonction de k.

4. a) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ et tout réel x de $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$,

$$0 \leqslant \sin^{2n+1}(x) \leqslant \sin^{2n}(x) \leqslant \sin^{2n-1}(x).$$

b) En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$1 \leqslant \frac{\mathrm{I}_{2n}}{\mathrm{I}_{2n+1}} \leqslant \frac{2n+1}{2n}.$$

c) Démontrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\mathrm{I}_{2n}}{\mathrm{I}_{2n+1}} = 1$.

5. (u_n) est la suite définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par :

$$u_n = \left[\frac{1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \ldots \times (2n)}\right]^2 (2n+1).$$

Démontrer que la suite (u_n) converge vers $\frac{2}{\pi}$.

> Ce résultat est connu sous le nom de formule de Wallis. Il a permis le calcul de valeurs approchées du nombre π.

6. Voici une fonction écrite en langage Python.

```python
def W(n):
    w=1
    k=1
    while k<=2*n-1:
        w=w*(k/(k+1))**2
        k=k+2
    w=w*(2*n+1)
    return w
```

a) Justifier que pour une valeur n du paramètre, elle renvoie le terme u_n défini à la question **5**.

b) Saisir et tester cette fonction.

122 Irrationnalité du nombre e

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note :

$$\mathrm{I}_n = \int_0^1 x^n \mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x.$$

1. Calculer I_1.

2. n est un nombre entier naturel tel que $n \geqslant 1$.

a) Démontrer que pour tout réel x de $[0\,;1]$,

$$x^n \leqslant x^n \mathrm{e}^{1-x} \leqslant \mathrm{e}x^n.$$

b) En déduire que :

$$\frac{1}{n+1} \leqslant \mathrm{I}_n \leqslant \frac{\mathrm{e}}{n+1}.$$

3. À l'aide de la méthode d'intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$\mathrm{I}_{n+1} = (n+1)\,\mathrm{I}_n - 1.$$

4. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note :

$$k_n = n!\,\mathrm{e} - \mathrm{I}_n.$$

a) Exprimer k_{n+1} en fonction de k_n.

b) Calculer k_1. Démontrer par récurrence que pour tout nombre n de $\mathbb{N}^*$, k_n est un nombre entier naturel.

c) Avec les questions **4. b)** et **2. b)**, démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, le nombre $n!\,\mathrm{e} = k_n + \mathrm{I}_n$ n'est pas un entier naturel.

5. a) p et q sont deux nombres entiers naturels non nuls.

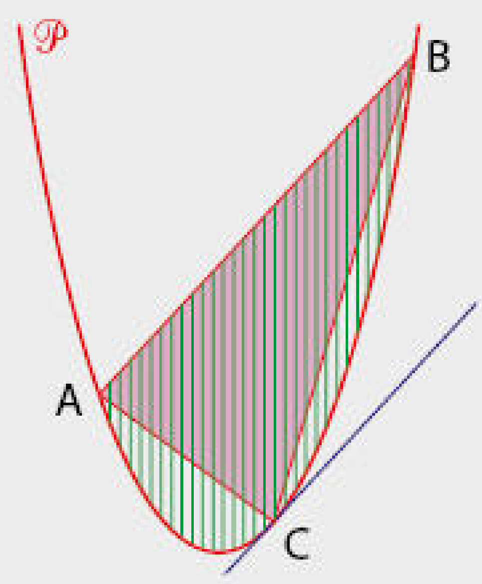
Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant q$, le nombre $\frac{n!\,p}{q}$ est un entier naturel.

b) En déduire alors que le nombre e est irrationnel.

> La découverte des nombres irrationnels (ou incommensurables) remonte sans doute à l'époque de Pythagore avec le calcul de la longueur de la diagonale du carré de côté 1, cette longueur étant égale à $\sqrt{2}$. L'irrationnalité du nombre e a été prouvée par Leonhard Euler en 1737.

Des Défis

123 Calculer l'aire d'un segment de parabole



Archimède a mis en place de nouvelles méthodes pour étudier l'aire sous un arc de parabole. Dans un repère orthonormé, $\mathscr{P}$ est la parabole représentative de la fonction $x \mapsto \alpha x^2$ où α désigne un nombre réel non nul.

A et B sont deux points de $\mathscr{P}$ d'abscisses respectives a et b avec $a < b$.

C est le point de $\mathscr{P}$ en lequel la tangente à $\mathscr{P}$ est parallèle à la droite (AB).

Démontrer que l'aire, en unité d'aire, du segment de parabole ACBA (hachuré) est égale aux $\frac{4}{3}$ de l'aire du triangle ABC (rose).

On pourra s'aider d'un logiciel de calcul formel.

124 Calculer une intégrale

Calculer l'intégrale $\mathrm{I} = \int_0^{2\pi} (\pi - |2x - \pi|)\sin(x)\,\mathrm{d}x$.