6 Fonction exponentielle

Avant

▶ Les études faites par Pierre et Marie Curie sur la radioactivité ont permis de mettre en évidence qu'un atome peut se casser. La conception des scientifiques sur la matière est alors définitivement modifiée.

À présent

▶ Les physiciens du CERN étudient la matière qui nous entoure, à l'aide notamment du plus grand accélérateur de particules au monde situé à Genève. Les particules ont une vitesse proche de la lumière et la croissance de l'énergie des faisceaux accélérés est exponentielle.

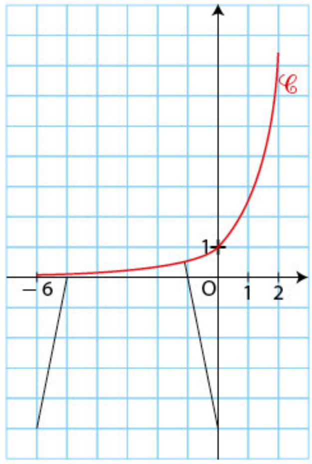
Les capacités travaillées dans ce chapitre

	Exercices
• Transformer une expression en utilisant les propriétés algébriques de la fonction exponentielle.	9, 11 à 13, 21 à 34
• Dériver les fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto e^{ax+b}$.	1 à 8, 37 à 49
• Étudier les variations des fonctions où interviennent $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto e^{ax+b}$.	16 à 20, 50 à 57
• Étudier la suite géométrique (e^{na}).	10, 14, 15, 35, 36
• Représenter graphiquement les fonctions $t \mapsto e^{-kt}$ et $t \mapsto e^{kt}$.	58 à 62
• Modéliser une situation par une croissance ou une décroissance exponentielle.	63 à 68

1 Tice La fonction exponentielle

Un fabricant souhaite créer une nouvelle chaise.
Il cherche à modéliser la coupe de l'assise en forme de coque par une fonction *f*. Pour cela, il a tracé dans le repère ci-dessous une allure possible de la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction *f* sur l'intervalle $[-6\ ;\ 2]$.

1 Déterminer graphiquement $f(0)$.



2 Pour des raisons esthétiques, l'artisan souhaite qu'en tout point M de $\mathscr{C}$ d'abscisse x, le coefficient directeur de la tangente soit égal à l'image de x par *f*.
Par quelle égalité se traduit cette contrainte ?

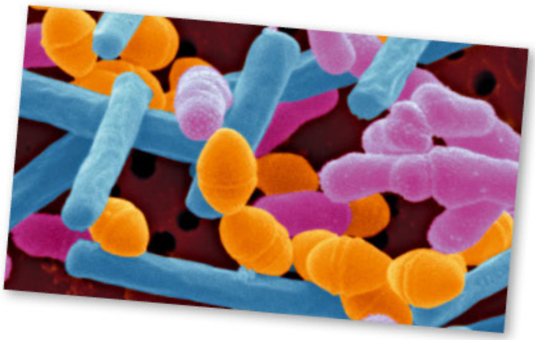
3 **a)** Avec un logiciel de géométrie, créer un curseur *a* allant de 1 à 4 avec un incrément de 0,0001, puis taper dans la zone de saisie :

f(x)=Fonction(a^x,-6,2)

b) Dans la zone de saisie, taper :
- **f'(x)=Fonction(f'(x),-6,2)**
- **M=(1,f(1))**
- **M'=(1,f'(1))**

c) Faire varier le curseur *a* et donner une valeur approchée au dix-millième du nombre *a* pour lequel les deux courbes représentatives se superposent.
Le nombre *a* obtenu se note e en mathématiques et la fonction *f* est appelée la **fonction exponentielle**.

2 Découvrir des propriétés de la fonction exponentielle



On étudie l'évolution d'une colonie de bactéries dans un milieu renouvelé. Le nombre de bactéries, en centaine, en fonction du temps *t*, en h, est modélisé par la fonction N définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :

$$N(t) = e^t$$

où e désigne le nombre réel défini à l'activité 1.

1 Recopier et compléter le tableau suivant en utilisant la touche exp de la calculatrice. *Arrondir au millième si besoin.*

t	0	1	2	3	4	5	6	7
$N(t)$								

2 **a)** Calculer les produits $N(2)\times N(3)$, $N(3)\times N(4)$, $N(1)\times N(5)$.
b) Que remarque-t-on en observant ces résultats et le tableau ?
Conjecturer une formule donnant le produit $e^a \times e^b$ où *a* et *b* désignent deux nombres réels.

3 **a)** Calculer les quotients $\dfrac{N(7)}{N(1)}$, $\dfrac{N(5)}{N(4)}$, $\dfrac{N(6)}{N(2)}$.
b) Que remarque-t-on en observant ces résultats et le tableau ?
Conjecturer une formule donnant le quotient $\dfrac{e^a}{e^b}$ où *a* et *b* désignent deux nombres réels.

1 Définition et premières conséquences

A La fonction exponentielle

Propriété

Si f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$, alors f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

Démonstration (facultative)

φ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = f(x) \times f(-x)$. La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x :

$$\varphi'(x) = f'(x) \times f(-x) + f(x) \times [-f'(-x)] = f(x) \times f(-x) - f(x) \times f(-x) = 0$$

Donc φ est une fonction constante sur $\mathbb{R}$. Or, $\varphi(0) = f(0) \times f(0) = 1$ donc, pour tout nombre réel x, $\varphi(x) = 1$ et $f(x) \times f(-x) = 1$. Donc pour tout nombre réel x, $f(x) \neq 0$.

Propriété - Définition

Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.
Cette fonction, notée **exp**, est appelée **fonction exponentielle**.

Démonstration (facultative)

- **Existence** : Conformément au programme, on admet l'existence d'une telle fonction.
- **Unicité** : Si g est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $g' = g$ et $g(0) = 1$, la fonction $h = \dfrac{g}{f}$ est définie (f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ d'après la propriété précédente) et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$h' = \dfrac{g'f - gf'}{f^2}$ est la fonction nulle car $f' = f$ et $g' = g$, donc la fonction h est constante sur $\mathbb{R}$.

Or, $h(0) = \dfrac{g(0)}{f(0)} = 1$ donc, pour tout nombre réel x, $h(x) = 1$, c'est-à-dire $g(x) = f(x)$. Ainsi $g = f$.

B Premières conséquences

Conséquences

- La fonction exp est définie sur $\mathbb{R}$ et $\mathbf{exp(0) = 1}$.
- La fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout nombre réel x, $\mathbf{exp'(x) = exp(x)}$.

En effet, cela découle directement de la définition de la fonction exponentielle.

Propriétés

Pour tout nombre réel x : • $\mathbf{exp}(x) \neq \mathbf{0}$ • $\mathbf{exp}(-x) = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{exp}(x)}$

En effet, cela découle directement de la propriété du A et de sa démonstration.

C Dérivée de la fonction $x \mapsto \exp(ax + b)$

Propriété

a et b désignent deux nombres réels.
La fonction $g : x \mapsto \exp(ax + b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout nombre réel x, $\boldsymbol{g'(x) = a \times \exp(ax + b)}$.

En effet, on a vu page 96 que si f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, alors la fonction $g : x \mapsto f(ax + b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = a \times f'(ax + b)$.

Exemple : g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \exp(2x + 5)$. Alors, g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = 2 \times \exp(2x + 5)$.

2 Propriétés de la fonction exponentielle

A Relation fonctionnelle et conséquences

Propriété

Pour tous nombres réels x et y, $\mathbf{exp}(x+y)=\mathbf{exp}(x)\times\mathbf{exp}(y)$.

Démonstration (facultative)

y est un nombre réel donné et f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{\exp(x+y)}{\exp(x)}$.

f est le quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x,

$f'(x)=\dfrac{\exp(x+y)\times\exp(x)-\exp(x+y)\times\exp(x)}{[\exp(x)]^2}=0$. Donc f est une fonction constante sur $\mathbb{R}$.

Or, $f(0)=\dfrac{\exp(y)}{\exp(0)}=\exp(y)$ donc, pour tout nombre réel x, $f(x)=\exp(y)$.

On obtient $\dfrac{\exp(x+y)}{\exp(x)}=\exp(y)$, c'est-à-dire $\exp(x+y)=\exp(x)\times\exp(y)$.

Conséquence (admise)

Pour tout nombre réel x et tout nombre entier relatif n, $\mathbf{exp}(nx)=[\mathbf{exp}(x)]^n$.

Exemples

- $\exp(5x)=[\exp(x)]^5$
- $\exp(-2x)=[\exp(x)]^{-2}$

Propriété

La fonction exponentielle est **strictement positive** sur $\mathbb{R}$.

Démonstration

Pour tout nombre réel x, $\exp(x)=\exp\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{2}\right)=\left[\exp\left(\dfrac{x}{2}\right)\right]^2$. Or, $\exp\left(\dfrac{x}{2}\right)\neq 0$, donc $\exp(x)>0$.

Conséquence

Pour tous nombres réels x et y, $\mathbf{exp}(x-y)=\dfrac{\mathbf{exp}(x)}{\mathbf{exp}(y)}$.

Démonstration

Pour tous nombres réels x et y, $\exp(x-y)=\exp(x)\times\exp(-y)=\exp(x)\times\dfrac{1}{\exp(y)}=\dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$.

B Une nouvelle notation

- Le nombre e est l'image de 1 par la fonction exponentielle.

Ainsi $\mathbf{exp}(\mathbf{1})=\mathbf{e}$ et avec la calculatrice $\mathbf{e}\approx\mathbf{2{,}718}$.

e^1
2.718281828

Cette notation e est due au mathématicien suisse Leonhard Euler (1731).

- Pour tout nombre entier relatif n, $\exp(n)=\exp(n\times 1)=[\exp(1)]^n=\mathrm{e}^n$. Par extension, on convient de noter pour tout nombre réel x, $\mathbf{exp}(x)=\mathbf{e}^x$ (lire « exponentielle x » ou « e exposant x »).

Nouvelles écritures des propriétés

Pour tous nombres réels x et y, pour tout nombre entier relatif n,

- $\mathbf{e}^0=1$
- $\mathbf{e}^x>0$
- $\mathbf{exp}'(x)=\mathbf{e}^x$
- $\mathbf{e}^{-x}=\dfrac{1}{\mathbf{e}^x}$
- $\mathbf{e}^{x+y}=\mathbf{e}^x\times\mathbf{e}^y$
- $\mathbf{e}^{x-y}=\dfrac{\mathbf{e}^x}{\mathbf{e}^y}$
- $(\mathbf{e}^x)^n=\mathbf{e}^{nx}$

3 Étude de la fonction exponentielle

A Sens de variation de la fonction exponentielle

Propriété

La fonction exponentielle est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

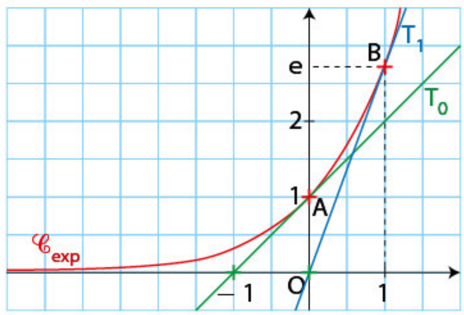
Démonstration

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout nombre réel x, $\exp'(x) = e^x$.
Or, pour tout nombre réel x, $e^x > 0$, donc la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

B Courbe représentative de la fonction exponentielle

• Voici le tableau de variations de la fonction exponentielle.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$\exp'(x)$		+		
$\exp(x)$	↗	1	e	↗



• Équation de la tangente T_0 à $\mathscr{C}_{\exp}$ au point A $(0\,;\,1)$:

$$y = \exp'(0)(x-0) + \exp(0) = 1 \times x + 1$$

Ainsi T_0 a pour équation $y = x + 1$.

• Équation de la tangente T_1 à $\mathscr{C}_{\exp}$ au point B $(1\,;\,e)$:

$$y = \exp'(1)(x-1) + \exp(1) = e \times (x-1) + e$$

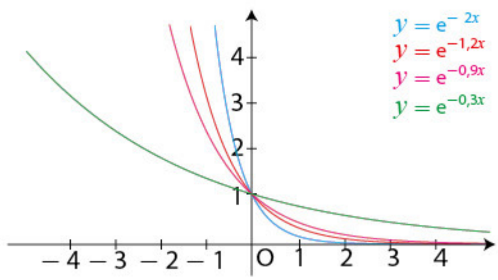
Ainsi T_1 a pour équation $y = ex$.

C Les fonctions $t \mapsto e^{-kt}$ et $t \mapsto e^{kt}$ avec $k > 0$

k est un nombre réel strictement positif donné.

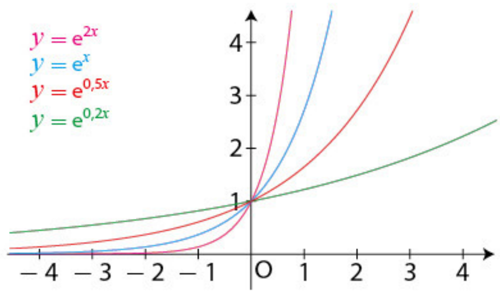
• La fonction $f_k : t \mapsto e^{-kt}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout nombre réel t, $f_k'(t) = -ke^{-kt}$, donc $f_k'(t) < 0$.
La fonction f_k est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

t	$-\infty$	0	$+\infty$
$f_k'(t)$		$-$	
$f_k(t)$	↘	1	↘



• La fonction $g_k : t \mapsto e^{kt}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout nombre réel t, $g_k'(t) = ke^{kt}$, donc $g_k'(t) > 0$.
La fonction g_k est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

t	$-\infty$	0	$+\infty$
$g_k'(t)$		+	
$g_k(t)$	↗	1	↗



EXERCICES RÉSOLUS

1 Dériver une fonction où intervient exp

→ Cours 1. B

Déterminer la fonction dérivée de la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x+2)\mathrm{e}^x$.

Solution

f est le produit de deux fonctions $u : x \mapsto x+2$ et $v : x \mapsto \mathrm{e}^x$ dérivables sur $\mathbb{R}$ donc *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout nombre réel x,

$u(x)=x+2 \qquad u'(x)=1$

$v(x)=\mathrm{e}^x \qquad v'(x)=\mathrm{e}^x$

$f'(x)=1\times\mathrm{e}^x+(x+2)\times\mathrm{e}^x$

$f'(x)=(1+(x+2))\mathrm{e}^x=(x+3)\mathrm{e}^x$

On utilise la formule de dérivée : $\exp'(x)=\mathrm{e}^x$

On factorise par le facteur commun e^x.

2 Dériver une fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{ax+b}$

→ Cours 1. C

Déterminer la fonction dérivée de chaque fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

a) $f(x)=\mathrm{e}^{5x}$ **b)** $g(x)=6{,}7\mathrm{e}^{-0{,}1x}$

Solution

a) *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout nombre réel x, $f'(x)=5\times\mathrm{e}^{5x}=5\mathrm{e}^{5x}$.

b) *g* est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout nombre réel x :

$$g'(x)=6{,}7\times(-0{,}1)\times\mathrm{e}^{-0{,}1x}=-0{,}67\mathrm{e}^{-0{,}1x}$$

On utilise le fait que si $f(x)=e^{ax+b}$, alors $f'(x)=ae^{ax+b}$.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 1

3 Déterminer la fonction dérivée de la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=(5+x)\mathrm{e}^x$$

4 Déterminer la fonction dérivée de chaque fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

a) $f(x)=(2x-5)\mathrm{e}^x$

b) $g(t)=t\mathrm{e}^t$

5 Déterminer la fonction dérivée de chaque fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

a) $f(t)=4\mathrm{e}^t-1$

b) $g(x)=(-4x-5)\mathrm{e}^x+10$

6 Déterminer la fonction dérivée de chaque fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

a) $f(x)=x^2\mathrm{e}^x$

b) $g(x)=(x^2+5x-3)\mathrm{e}^x$

Sur le modèle de l'exercice résolu 2

7 Déterminer la fonction dérivée de chaque fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

a) $f(x)=\mathrm{e}^{7x}$

b) $g(x)=1{,}5\mathrm{e}^{0{,}4x}$

c) $h(t)=-70\mathrm{e}^{-0{,}1t}$

8 *f* est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=-0{,}001\,82\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{7}x}$$

La fonction dérivée de *f* a été obtenue à l'aide d'un logiciel de calcul formel.

Justifier le résultat affiché sur la ligne 2.

1	$\mathrm{f(x) := -0.00182 \cdot exp\left(-\frac{1}{7}x\right)}$ $\to \mathbf{f(x) := -\frac{91}{50000}\ e^{-\frac{1}{7}x}}$
2	Dérivée(f) $\to \mathbf{\frac{13}{50000}\ e^{-\frac{1}{7}x}}$

EXERCICES RÉSOLUS

9 Transformer une expression

→ Cours 2. B

x désigne un nombre réel.
Écrire chaque expression avec une seule exponentielle.

a) $A = e^{4x-3} \times e^{2x-1}$ **b)** $B = \dfrac{e^{6x}}{e^{x-2}}$ **c)** $C = (e^{1-5x})^3$

Solution

a) $A = e^{4x-3} \times e^{2x-1} = e^{(4x-3)+(2x-1)} = e^{6x-4}$

b) $B = \dfrac{e^{6x}}{e^{x-2}} = e^{6x-(x-2)} = e^{6x-x+2} = e^{5x+2}$

c) $C = (e^{1-5x})^3 = e^{(1-5x)\times 3} = e^{3-15x}$

On utilise les formules :
- $e^x \times e^y = e^{x+y}$
- $\dfrac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$
- $(e^x)^n = e^{nx}$

10 Étudier une suite géométrique

→ Cours 2. B

(u_n) est la suite définie pour tout nombre n de $\mathbb{N}$ par $u_n = e^{5n}$.
a) Démontrer que la suite (u_n) est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme u_0.
b) Calculer la valeur exacte de la somme $S = u_0 + u_1 + u_2 + u_3$.

Solution

a) Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$:
$u_{n+1} = e^{5(n+1)} = e^{5n+5} = e^{5n} \times e^5 = e^5 \times u_n$
La suite (u_n) est donc géométrique de raison $q = e^5$.
Son premier terme est $u_0 = e^{5\times 0} = e^0 = 1$.

b) $S = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 1 + e^5 + (e^5)^2 + (e^5)^3 = \dfrac{1-(e^5)^{3+1}}{1-e^5}$.
Donc $S = \dfrac{1-e^{20}}{1-e^5}$.

Pour tout nombre réel a et tout nombre entier naturel n, la suite (e^{na}) est une suite géométrique de premier terme 1 et de raison e^a.

On utilise la formule (p. 22) donnant $1 + q + q^2 + \ldots + q^n$, ici avec $n = 3$.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 9

11 x désigne un nombre réel.
Écrire chaque expression avec une seule exponentielle.
a) $A = e^{10x-8} \times e^{1-2x}$ **b)** $B = \dfrac{e^{x+1}}{e^{4x+3}}$
c) $C = (e^{5x+2})^2$

12 x désigne un nombre réel.
Écrire chaque expression avec une seule exponentielle.
a) $A = e^{-2,5x} \times e \times e^{0,5x-1}$ **b)** $B = \dfrac{(e^x)^2}{e^{-2} \times e^{9x}}$

13 a désigne un nombre réel.
Simplifier l'expression :
$$A = e^{-2a}(e^{4a} - 1) - (e^{-a} + e^a)^2$$

Sur le modèle de l'exercice résolu 10

14 (u_n) est la suite définie pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, par $u_n = e^{3n}$.
a) Démontrer que la suite (u_n) est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme u_0.
b) Calculer la valeur exacte de la somme :
$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_5$$

15 (u_n) est la suite définie pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, par $u_n = 2e^{-0,5n}$.
a) Démontrer que la suite (u_n) est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme u_0.
b) (v_n) est la suite définie pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, par $v_n = u_n^{\ 2}$. Exprimer v_n en fonction de n.
Quelle est la nature de la suite (v_n) ? Justifier.

EXERCICES RÉSOLUS

16 Dresser un tableau de variations

→ Cours 2. B

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x+3)e^x$.

a) Déterminer la fonction dérivée f' de f.

b) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

Solution

a) Pour tout nombre réel x,

$f'(x) = 2 \times e^x + (2x+3) \times e^x$

$f'(x) = (2+2x+3)e^x = (2x+5)e^x$.

b) $f'(x) = (5+2x)e^x$.

On sait que pour tout x, $e^x > 0$,

donc $f'(x)$ est du signe de $5+2x$.

On complète ci-contre le signe de $f'(x)$.

$f(-2{,}5) = (2 \times (-2{,}5)+3)e^{-2{,}5} = -2e^{-2{,}5}$

x	$-\infty$		$-2{,}5$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$-2e^{-2{,}5}$	$\nearrow$	

Dans un tableau de variations, on écrit des valeurs exactes.

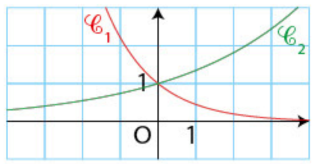
17 Identifier une fonction

→ Cours 3. C

Dans le repère ci-contre, on a représenté graphiquement les fonctions :

$$f : t \mapsto e^{-0{,}8t} \text{ et } g : t \mapsto e^{0{,}3t}.$$

Déterminer les variations de chacune des fonctions et identifier les deux courbes sur le graphique.



Solution

• Pour tout nombre réel t, $f(t) = e^{-0{,}8t}$ donc $f'(t) = -0{,}8e^{-0{,}8t}$.
Or pour tout réel t, $e^{-0{,}8t} > 0$, ainsi $f'(t) < 0$ et f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

• Pour tout nombre réel t, $g(t) = e^{0{,}3t}$ donc $g'(t) = 0{,}3e^{0{,}3t}$.
Or pour tout réel t, $e^{0{,}3t} > 0$, ainsi $g'(t) > 0$ et g est croissante sur $\mathbb{R}$.

• La courbe $\mathscr{C}_1$ est donc celle de la fonction f et $\mathscr{C}_2$ celle de la fonction g.

On utilise le fait que si $f(x) = e^{ax+b}$, alors $f'(x) = ae^{ax+b}$.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 16

18 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (5x+10)e^x$$

a) Déterminer la fonction dérivée f' de f.

b) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

19 g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = -xe^x$$

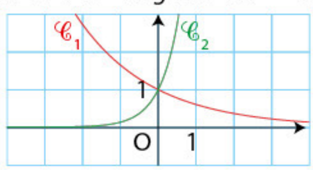
a) Déterminer la fonction dérivée g' de g.

b) Dresser le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$.

Sur le modèle de l'exercice résolu 17

20 Dans le repère ci-dessous, on a représenté graphiquement les fonctions :

$$f : t \mapsto e^{2t} \text{ et } g : t \mapsto e^{-0{,}5t}.$$



Déterminer les variations de chacune des fonctions et identifier les deux courbes sur le graphique.

Transformations d'expressions

→ Cours 2. B

Questions Flash

21 Simplifier mentalement les nombres en les écrivant avec une seule exponentielle.

a) $e^3 \times e^{-1}$ **b)** $\dfrac{(e^4)^3}{e^2}$

22 $A = \dfrac{e^{4x+6}}{e^{3-x}}$ où x est un nombre réel.
Laquelle de ces affirmations est exacte ?
(1) $A = e^{3x+9}$ **(2)** $A = e^{5x+3}$ **(3)** $A = e^{4x+2}$

23 $B = (e^{5x+1})^2$ où x est un nombre réel.
Florent affirme : « B est égal à e^{10x+1}. »
Que peut-on en penser ?

24 Dans chaque cas, écrire avec une seule exponentielle.

a) $e^4 \times e^6 \times e^{-5}$ **b)** $e \times (e^3)^4$

c) $\dfrac{(e^{1,5})^2}{e}$ **d)** $\dfrac{e^{-0,4} \times e^3}{e^{2,2}}$

25 Recopier et compléter avec le nombre qui convient.

a) $e^{\cdots} \times e^6 = e^{18}$ **b)** $e^{-1} \times e^{\cdots} = (e^4)^2$

c) $\dfrac{e^{\cdots}}{e^{1,5} \times e^3} = e^{10}$ **d)** $e \times \dfrac{1}{e^{\cdots}} = e^{-0,5}$

26 Manon a simplifié l'expression :

$$A = \frac{e^2 \times e^5}{e^{-5}} \times \frac{1}{e^{-7}}$$

Elle obtient comme résultat $A = e^5$.
Que peut-on en penser ?

27 Justifier les résultats des deux calculs obtenus à l'écran de la calculatrice ci-dessous.

$$\frac{e^{5.6} * e^{-4}}{e^1} * \frac{1}{(e^{0.3})^2}$$
1

$$(1-e^{-3})^2 - e^{-5}(e^5 - 2e^2 + e^{-1})$$
0

28 x désigne un nombre réel.
Simplifier chaque expression.

a) $A = e^{1-x} \times e^{3x-2}$ **b)** $B = e^{2x} \times e^{3-5x} \times e$

c) $C = (e^x)^2 \times e^{7+4x}$ **d)** $D = (e^{2x})^3 \times e^{-3}$

29 t désigne un nombre réel.
Simplifier chaque expression.

a) $A = (e^{t+1})^3$ **b)** $B = (e^{-2-3t})^{10}$

b) $C = (e^{0,6+1,4t})^2$ **d)** $D = (e^{t^2+t-1})^2$

30 a désigne un nombre réel.
Simplifier chaque expression.

a) $A = \dfrac{e^{5a+7}}{e^{3a}}$ **b)** $B = \dfrac{e^{4a+1}}{e^{-9}}$

c) $C = \dfrac{e^{-3a}}{e^{1-4a}}$ **d)** $D = \dfrac{e^{2a+1}}{e^{1-a}}$

31 x désigne un nombre réel.
Simplifier chaque expression.

a) $A = \dfrac{e^x \times e^{3x}}{e^{-x} \times e^{4x}}$ **b)** $B = \dfrac{(e^{-x})^3}{e^{x+4}}$

c) $C = (e^{0,5x})^2 \times \dfrac{1}{e^x}$ **d)** $D = \dfrac{e^{3x} \times e^6}{e \times e^{4x}} \times e^{-5}$

32 Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Justifier.

a) Pour tout nombre réel x, $e^x \times e^x = e^{(x^2)}$.

b) $e^0 \times e = e^0$

c) Pour tout nombre réel x, $\dfrac{1}{e^x \times e^{-2}} \times e^x = e^{-2}$.

d) Pour tout nombre réel x, $\dfrac{1}{e^{3x}} = e^{-3x}$.

33 t désigne un nombre réel.
Développer et réduire chaque expression.

a) $A = (e^t - 1)^2$

b) $B = e^{2t}(e^t - e^{-2t})$

c) $C = 3e^t(e^t - e^{-t}) - 5e^{2t}$

34 x désigne un nombre réel.
Écrire avec un seul quotient et simplifier chaque expression.

a) $1 - \dfrac{(e^x - 1)^2}{e^{2x}}$ **b)** $\dfrac{1}{e^x} + \dfrac{3 - e^x}{e^{2x}}$

35 (u_n) est la suite définie, pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, par $u_n = -3e^{1,1n}$.
Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme u_0.

36 (v_n) est la suite définie, pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, par $v_n = \dfrac{1}{3}e^{5-0,6n}$.
La suite (v_n) est-elle une suite géométrique ?
Justifier.

Dérivée de la fonction $x \mapsto e^x$

→ Cours 1. B

Questions flash

37 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^x + 1$$

Déterminer mentalement la fonction dérivée de f.

38 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -0{,}1e^x + 4$$

Laquelle de ces affirmations est exacte ?

(1) Pour tout nombre réel x, $f'(x) = -0{,}1e^x + 4$.

(2) Pour tout nombre réel x, $f'(x) = -0{,}1e^x$.

(3) Pour tout nombre réel x, $f'(x) = e^x$.

39 Déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

a) $f(x) = e^x + 4$ **b)** $g(x) = 2{,}7e^x + 8$

c) $h(x) = 5e^x + x$ **d)** $i(x) = 3x - 3e^x$

e) $j(x) = 5x^3 - 9e^x$ **f)** $k(x) = e - e^x$

40 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = (1-t)e^t$$

Justifier que la fonction dérivée de f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f'(t) = -te^t$$

41 Déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

a) $f(x) = (2x-7)e^x$

b) $g(x) = xe^x$

c) $h(x) = (3x^2 - 2)e^x$

42 f est la fonction définie sur l'intervalle $[0{,}5\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{e^x}{x}$$

Justifier le résultat obtenu ci-contre à la ligne 2 avec un logiciel de calcul formel.

1	$f(x) := \frac{\exp(x)}{x}$ → $\mathbf{f(x) := \frac{e^x}{x}}$
2	Factoriser(Dérivée(f)) → $e^x \cdot \frac{x-1}{x^2}$

43 Déterminer la fonction dérivée de chaque fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

a) $f(x) = \dfrac{3x+1}{e^x}$

b) $f(t) = \dfrac{1+e^t}{e^t}$

Dérivée de la fonction $x \mapsto e^{ax+b}$

→ Cours 1. C

Questions flash

44 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{5x}$$

Déterminer mentalement la fonction dérivée de f.

45 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{-5{,}8x+1}$$

Laquelle de ces affirmations est exacte ?

(1) Pour tout nombre réel x, $f'(x) = -5{,}8e^{-5{,}8x}$.

(2) Pour tout nombre réel x, $f'(x) = e^{-5{,}8x}$.

(3) Pour tout nombre réel x, $f'(x) = -5{,}8e^{-5{,}8x+1}$.

46 Déterminer la fonction dérivée de chaque fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

a) $f(x) = e^{0{,}7x-8}$

b) $g(x) = 6e^{2x} + x$

c) $h(x) = (2x+1)e^{-0{,}2x}$

47 Recopier et relier chaque expression d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ de la colonne de gauche à sa dérivée de la colonne de droite.

$f(x)$	$f'(x)$
e^{2x} •	• $4e^{2x}$
$2e^x$ •	• $2e^{-2x}$
$2e^{2x}$ •	• $2e^{2x}$
$-e^{-2x}$ •	• $2e^x$

48 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = 4{,}1e^{-\frac{7}{3}t}$$

La fonction dérivée de f a été obtenue à l'aide d'un logiciel de calcul formel.

Justifier le résultat affiché.

1	$f(t) := 4.1 \cdot \exp\left(-\frac{7}{3}t\right)$ → $\mathbf{f(t) := \frac{41}{10} e^{-\frac{7}{3}t}}$
2	Dérivée(f) → $-\frac{287}{30} e^{-\frac{7}{3}t}$

49 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{e^{-2x+1}}{e^{5x-4}}$$

Amélia affirme : « Pour dériver f, j'utilise la formule de dérivée de $\frac{u}{v}$. »

a) Procéder comme Amélia pour déterminer $f'(x)$.

b) Proposer un procédé plus rapide pour déterminer $f'(x)$.

Étude des variations d'une fonction exponentielle

→ Cours 3. c

Questions flash

50 Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse.

a) La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x}$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

b) La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-3x}$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

51 La fonction dérivée d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est $f'(x) = 6{,}3e^{-2x}$.

Pauline affirme : « La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$. »

Que peut-on en penser ?

52 g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 5e^{-4{,}5x} + 6$$

Démontrer que la fonction g est décroissante sur $\mathbb{R}$.

53 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (6x - 2)e^{x}$$

a) Déterminer la fonction dérivée f' de f.

b) Étudier le signe de $f'(x)$.

c) En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.

54 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (4 - 3x)e^{x}$$

a) Justifier le résultat obtenu ci-contre à la ligne 2 avec un logiciel de calcul formel.

```
1  f(x) := (4 − 3x)exp(x)
   → f(x) := (−3 x + 4) e^x
2  Factoriser(Dérivée(f))
   → −e^x (3 x − 1)
```

b) Étudier le signe de $f'(x)$.

c) En déduire le tableau de variations de f.

55 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x^2 - 4)e^{x}$$

Dresser le tableau de variations de f.

56 g est la fonction définie sur l'intervalle $[1 ; 3]$ par $g(t) = \dfrac{e^t}{2t}$.

Dresser le tableau de variations de g.

57 h est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = \frac{x^2 + 2x}{e^x}$$

Dresser le tableau de variations de h.

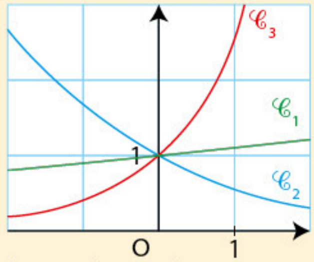
Représentation graphique d'une fonction exponentielle

→ Cours 3. c

Questions flash

58 Voici, dans un repère, les courbes représentatives des trois fonctions définies sur l'intervalle $[-2 ; 2]$ par :

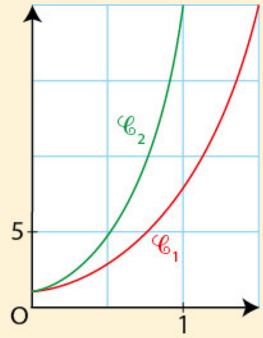
$f(x) = e^{x}$,
$g(x) = e^{-0{,}5x}$,
$h(x) = e^{0{,}1x}$.



Associer chacune des fonctions à sa courbe représentative.

59 Voici, dans un repère, les courbes représentatives des deux fonctions définies sur l'intervalle $[0 ; 1{,}5]$ par :

$f(t) = e^{2t}$,
$g(t) = e^{3t}$.



Associer chacune des fonctions à sa courbe représentative.

60 f est la fonction définie sur l'intervalle $[-3 ; 3]$ par :

$$f(x) = e^{0{,}82x}$$

a) Quel est le sens de variation de la fonction f ?

b) Recopier et compléter le tableau de valeurs ci-dessous.

Arrondir au centième si besoin.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$							

c) Tracer, dans un repère orthonormé, la courbe représentative de la fonction f (*unité* : 1 cm).

61 Tracer, dans un même repère orthonormé, la courbe représentative de chacune des fonctions ci-dessous définies sur l'intervalle $[-3 ; 3]$ (*unité* : 1 cm).

$f : t \mapsto e^{-0{,}5t}$ $\qquad$ $g : t \mapsto e^{-4t}$

$h : t \mapsto e^{0{,}1t}$ $\qquad$ $i : t \mapsto e^{2t}$

62 h est la fonction définie sur l'intervalle $[-3 ; 1]$ par :

$$h(x) = (5 - 4x)e^{x}$$

a) Déterminer la fonction dérivée h' de h.

b) Dresser le tableau de variations de h.

c) Tracer, dans un repère orthonormé, la courbe représentative de h (*unité* : 1 cm).

Modélisation à l'aide d'une fonction exponentielle

→ Cours 1. C, 2. B, 3. C

Questions flash

63 On injecte dans le sang un médicament A. Pendant l'élimination naturelle, la quantité de médicament A, en mg, restant dans le sang, à l'instant t, en h, est modélisée par la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 24]$ par :

$$f(t) = 100e^{-0,4t}$$

On donne $f(5) \approx 13,5$.

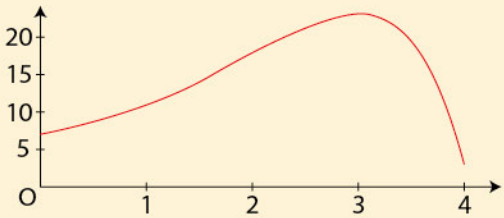
Stéphane affirme : « Au bout de 13 h 30 min la quantité de médicament dans le sang est de 5 mg. »

Que peut-on en penser ?

64 On a représenté, dans le repère ci-dessous, la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 4]$ par :

$$f(x) = (4 - x)e^{x} + 3$$

Une société vend entre 0 et 4 tonnes de produits par mois. f modélise le bénéfice mensuel de la société, en milliers d'euros, obtenu par la vente de x tonnes de produit.



Laquelle des affirmations suivantes est exacte ?

Le bénéfice maximum de la société est d'environ :

(1) 23 000 € **(2)** 3 000 € **(3)** 4 000 €

65 Pour de faibles valeurs de l'altitude, les scientifiques ont démontré que la pression atmosphérique, en hectopascal, à l'altitude x, en km, est modélisée par la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 10]$ par :

$$f(x) = 1\,013,25e^{-0,12x}$$

a) Décrire les variations de la pression atmosphérique en fonction de l'altitude.

b) On a tabulé la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 10]$.

Quel est le plus grand nombre entier n tel qu'à partir de l'altitude n km, la pression atmosphérique reste inférieure à 350 hectopascals ?

X	Y1
0	1013.3
1	898.67
2	797.05
3	706.92
4	626.98
5	556.08
6	493.2
7	437.43
8	387.97
9	344.1
10	305.19

66 Un carrossier fait l'acquisition d'une machine au prix de 10 000 €. Un modèle pour décrire l'évolution de la valeur de la machine au cours des dix prochaines années est donné par la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 10]$ par $f(t) = 10e^{-0,1t}$.

a) Préciser les unités utilisées pour cette modélisation.

b) Avec la calculatrice, tabuler f avec le pas 0,1 et estimer le temps au bout duquel la machine perd la moitié de sa valeur initiale.

67 Une entreprise congèle des frites dans un tunnel de congélation avant de les conditionner en sachets. La température, en degré Celsius, des frites dans le tunnel de congélation est modélisée, t heures après leur entrée, par la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 5]$ par $f(t) = 35e^{-1,6t} - 30$.

Le cahier des charges impose que les frites aient une température inférieure ou égale à -24°C.

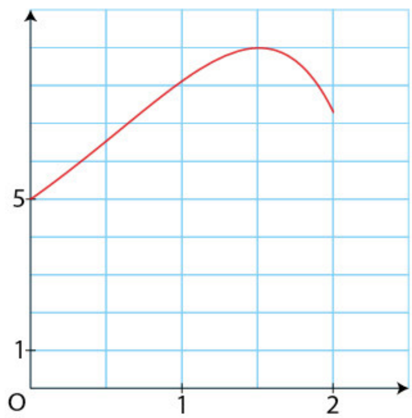
a) Quelle est la température des frites à l'entrée du tunnel de congélation ?

b) Décrire les variations de la température des frites en fonction du temps.

c) Si les frites sont laissées une heure et demie dans le tunnel de congélation, la température des frites sera-t-elle conforme au cahier des charges ?

68 Une entreprise fabrique et vend entre 0 et 200 parois de douche par jour. Le bénéfice journalier, en milliers d'euros, réalisé par la vente de x centaines de parois de douche, est modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 2]$ par $f(x) = (5 - 2x)e^{x}$.

On a représenté ci-dessous la fonction f.



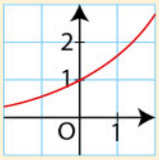
a) Estimer le nombre de parois de douche à produire et à vendre par jour pour que l'entreprise réalise un bénéfice maximum.

b) Calculer alors ce bénéfice maximum, en euro. *Arrondir à l'unité.*

QCM interactifs

Pour se tester

69 Dans chaque cas, donner la réponse exacte sans justifier.

		A	B	C	D
1	Le nombre $\dfrac{e^3 \times e^{-1}}{e^{-2}}$ est égal à …	1	e^{-1}	e^4	e^{-5}
2	Pour tout nombre réel x, $(e^{3x})^2 \times e^{5x}$ est égal à …	e^{5x}	e^{11x}	e^{16x}	e^{30x}
3	f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 0{,}5e^{-0{,}1x}$ Pour tout nombre réel x, $f'(x)$ est égal à …	$-0{,}05e^{-0{,}1x}$	$-0{,}5e^{-0{,}1x}$	$-0{,}1e^{-0{,}1x}$	$0 \times e^{-0{,}1x}$
4	f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (2x+3)e^x$ Pour tout nombre réel x, $f'(x)$ est égal à …	$2e^x$	$(2x+3)e^x$	$(2x+5)e^x$	$(2x+1)e^x$
5	Dans ce repère, la courbe tracée peut représenter la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par … 	$f(x) = e^{-0{,}5x}$	$f(x) = 2e^{0{,}5x}$	$f(x) = 2e^{-0{,}5x}$	$f(x) = e^{0{,}5x}$

70 Dans chaque cas, donner la (ou les) réponse(s) exacte(s) sans justifier.

		A	B	C	D
1	f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$ Pour tout nombre réel x, $f'(x)$ est égal à …	$\dfrac{1}{e^x}$	$\dfrac{e^x(1-x)}{(e^x)^2}$	$\dfrac{1-x}{e^x}$	$e^{-x}(1-x)$
2	f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -3{,}1e^{0{,}1x}$ On peut affirmer que …	f est décroissante sur $[0\ ;\ 1]$	f est croissante sur $\mathbb{R}$	f est positive sur $[0\ ;+\infty[$	$f(0) = -3{,}1$
3	f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Pour tout nombre réel x : $f'(x) = (2x-4)e^x$ On peut affirmer que …	f est décroissante sur $[0\ ;\ 2]$	f est croissante sur $[4\ ;\ 5]$	f est croissante sur $[0\ ;\ 5]$	f admet un maximum en $x = 2$

71 Dans chaque cas, dire si l'affirmation est vraie ou fausse en justifiant.

1 g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{e^x \times (e^{-x+1})^2}{e^{-x+4}}$.
Affirmation : la fonction g est constante sur $\mathbb{R}$.

2 (u_n) est la suite définie, pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, par $u_n = 5e^{0{,}1n-1}$.
Affirmation : la suite (u_n) est géométrique de raison $e^{0{,}1}$ et de premier terme $u_0 = \dfrac{5}{e}$.

3 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (4x+2)e^x$.
Affirmation : la fonction f admet un minimum en $x = -2$.

4 **Affirmation** : $e^{-1\,000}$ est égal à 0.

Vérifiez vos réponses : p. 340

72 Transformer une expression

x désigne un nombre réel. Écrire chacun des nombres avec une seule exponentielle.

a) $e^6 \times e^4$ b) $(e^{-1,5})^4$ c) $\frac{e^{11}}{e^6}$

d) $e^{5x+6} \times e^{-8x}$ e) $(e^{4x-3})^2$ f) $\frac{e^{7x}}{e^{x+5}}$

AIDE

e) f) Lorsqu'on multiplie une expression algébrique par un nombre ou lorsqu'on soustrait une expression algébrique, il faut penser à l'écrire entre parenthèses.

73 Dériver une fonction exponentielle

Dériver chaque fonction définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression :

a) $f(x) = 5e^x + 4$ b) $g(x) = 3{,}6e^{-0,5x}$

c) $h(x) = (3x+5)e^x$ d) $i(x) = \frac{2x}{e^x}$

AIDE

c) $h = u \times v$. Préciser $u(x)$, $v(x)$, $u'(x)$, $v'(x)$.

d) $i = \frac{u}{v}$. Préciser $u(x)$, $v(x)$, $u'(x)$, $v'(x)$.

74 Étudier les variations d'une fonction

Étudier le sens de variation de la fonction f dont la fonction dérivée sur $\mathbb{R}$ est :

$$f'(x) = (25 - 10x)e^x$$

AIDE

Déterminer le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.

75 Représenter une fonction exponentielle

Tracer, dans un même repère orthonormé, les courbes représentatives de chacune des fonctions définies ci-dessous sur l'intervalle $[-2 ; 2]$ (*unité* : 2 cm).

a) $f(x) = e^{-0,2x}$ b) $g(x) = e^{0,3x}$

AIDE

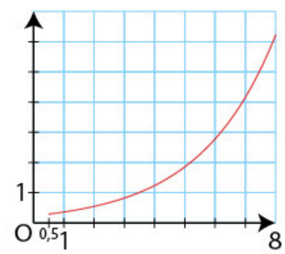
On connaît l'allure de telles courbes, on place quelques points et on les relie en donnant ces allures.

76 Modéliser à l'aide d'une fonction exponentielle

Un site est spécialisé dans la diffusion de courtes vidéos sur Internet.
La durée de chargement des vidéos, en seconde, en fonction du nombre d'internautes connectés simultanément, en millier, est modélisée par la fonction f définie sur l'intervalle $[0,5 ; 8]$ par :

$$f(x) = 0{,}25 \times e^{0,4x}$$

Dans le repère ci-contre, on a représenté graphiquement la fonction f.
Estimer à partir de combien de personnes connectées simultanément la durée de chargement dépasse 2 s.



EXERCICE RÉSOLU

77 Déterminer un seuil

Un atelier fabrique des jouets.
Pour un prix n, en euro, le nombre de jouets vendus par semaine, en centaines, est :

$$u_n = 10e^{-0,22n}$$

Le responsable de l'atelier a pour objectif de vendre 400 jouets ou plus par semaine.

a) Exécuter l'algorithme ci-contre, en complétant un tableau de suivi des variables.
Ajouter autant de colonnes que nécessaire et arrondir au centième.

$u \geqslant 4$		Vrai	Vrai	…
n	0	1	…	…
u	10	8,03	…	…

```
n ← 0
u ← 10
Tant que u ⩾ 4
    n ← n + 1
    u ← 10e^(−0,22n)
Fin Tant que
```

b) Quelle est la valeur de la variable n obtenue à la fin de l'exécution de l'algorithme ?
Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

Solution

a)

$u \geqslant 4$		Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Faux
n	0	1	2	3	4	5	
u	10	8,03	6,44	5,17	4,15	3,33	

b) La valeur de n obtenue à la fin de l'algorithme est $n = 5$.
Cela signifie que le nombre de jouets vendus devient inférieur à 400 dès que le prix du jouet dépasse 5 €.

Pour calculer les valeurs de u, on tabule la suite avec la calculatrice.

La variable u représente le nombre de centaines de jouets vendus, la variable n représente le prix du jouet.

À VOTRE TOUR

78 Un ventilateur permet de réguler la température de l'eau d'un moteur thermique.
La température de l'eau, en degré Celsius, n minutes après que le ventilateur se soit mis en marche, est :

$$t_n = 100e^{-0,11n}$$

Le ventilateur s'arrête lorsque la température redevient inférieure à $50°C$.

a) Exécuter l'algorithme ci-contre en complétant un tableau de suivi des variables.
Arrondir au dixième.

```
n ← 0
t ← 100
Tant que t ⩾ 50
    n ← n + 1
    t ← 100e^(−0,11n)
Fin Tant que
```

b) Quelle est la valeur de la variable n obtenue à la fin de l'exécution de l'algorithme ?
Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

79 À la suite d'un incident, de l'eau de mer pénètre dans un réservoir contenant de l'eau potable. L'eau n'est plus utilisable lorsque sa salinité dépasse $3{,}9\ g \cdot L^{-1}$.
La salinité de l'eau, en gramme par litre, n minutes après le début de l'incident, est :

$$s_n = 39 - 38{,}88e^{-0,01n}$$

a) Exécuter l'algorithme ci-contre en complétant un tableau de suivi des variables.
Arrondir au centième.

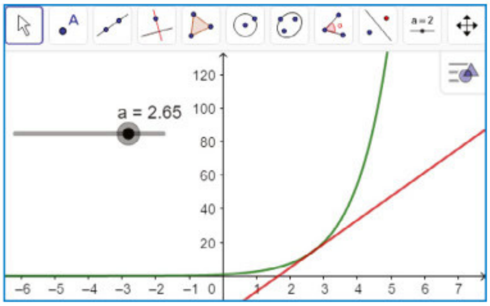
```
n ← 0
s ← 0,12
Tant que s ⩽ 3,9
    n ← n + 1
    s ← 39 − 38,88e^(−0,01n)
Fin Tant que
```

b) Quelle est la valeur de la variable n obtenue à la fin de l'exécution de l'algorithme ? Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

EXERCICE RÉSOLU

80 Étudier la position relative de deux courbes

Avec un logiciel de géométrie, on a créé un curseur a allant de -5 à 5, avec un incrément de 0,01.
On a tracé la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction exponentielle f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x$, puis la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a.



1. Réaliser cette figure, déplacer le curseur a et conjecturer la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la tangente T.

2. a) Déterminer une équation de la tangente T.

b) a désigne un nombre réel et d est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $d(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^a(x-a) - \mathrm{e}^a$.
Dresser le tableau de variations de d sur $\mathbb{R}$ et en déduire le signe de $d(x)$ sur $\mathbb{R}$.

c) En déduire, pour tout nombre réel a, la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la tangente T.

Solution

1. Il semble que, quel que soit le nombre réel a, la courbe $\mathscr{C}$ soit située au-dessus de la tangente T.

2. a) Une équation de la tangente T est $y = f'(a)(x-a) + f(a)$, c'est-à-dire $y = \mathrm{e}^a(x-a) + \mathrm{e}^a$.

b) La fonction d est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $d'(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^a$.
$d'(x) \geqslant 0$ si, et seulement si, $\mathrm{e}^x \geqslant \mathrm{e}^a$ c'est-à-dire $x \geqslant a$ (car la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$).

x	$-\infty$		a		$+\infty$
$d'(x)$		$-$	0	$+$	
$d(x)$		↘	0	↗	

Ainsi pour tout nombre réel x, $d(x) \geqslant 0$.

c) Quel que soit le nombre réel a et pour tout nombre réel x, $\mathrm{e}^x \geqslant \mathrm{e}^a(x-a) + \mathrm{e}^a$.
Ainsi quel que soit le nombre réel a, la courbe $\mathscr{C}$ est située au-dessus de la tangente T.

Quelquefois, pour étudier le signe d'une fonction, il est utile de dresser son tableau de variations puis de lire son signe sur ce tableau. C'est ce que l'on fait ici pour étudier le signe de $d(x)$.

À VOTRE TOUR

81 **1.** Avec un logiciel de géométrie, conjecturer la position relative de la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$ et de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a (avec a nombre réel).

2. a) Déterminer une équation de la tangente T.

b) d est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$d(x) = \mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-a}(x-a) - \mathrm{e}^{-a}$$

Dresser le tableau de variations de d sur $\mathbb{R}$ et en déduire le signe de $d(x)$ sur $\mathbb{R}$.

c) En déduire, pour tout nombre réel a, la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la tangente T.

82 **1.** Avec un logiciel de géométrie, conjecturer la position relative de la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2 - \mathrm{e}^x$ et de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a (avec a nombre réel).

2. a) Déterminer une équation de la tangente T.

b) d est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$d(x) = -\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^a(x-a) + \mathrm{e}^a$$

Dresser le tableau de variations de d sur $\mathbb{R}$ et en déduire le signe de $d(x)$ sur $\mathbb{R}$.

c) En déduire, pour tout nombre réel a, la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la tangente T.

Démontrer et raisonner

83 **Prouver une égalité**

Méthode
Pour démontrer une égalité $A = B$, soit on transforme l'écriture de A pour arriver à B (ou inversement), soit on établit que $A - B = 0$, soit on établit que $A = C$ et que $B = C$.

Montrer que pour tout nombre réel x,

$$\frac{(e^x - 1)(e^x + 1)}{e^{2x}} = 1 - e^{-2x}$$

84 **Étudier la position relative de deux courbes**

Méthode
Pour étudier la position relative des courbes représentatives de deux fonctions f et g, on résout l'inéquation $f(x) \geqslant g(x)$. Pour cela, on peut étudier le signe de la différence $f(x) - g(x)$.

a et b désignent deux nombres réels.
f et g sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = e^{at} \text{ et } g(t) = e^{bt}$$

$\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont les courbes représentatives de ces deux fonctions dans un repère.
Étudier la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ suivant les valeurs de a et b.

85 **Critiquer des affirmations**

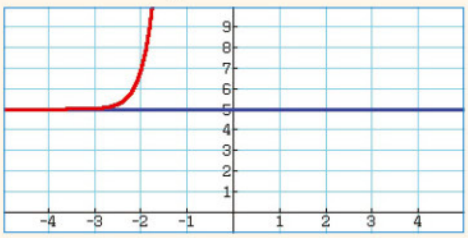
Des élèves ont cherché à résoudre l'équation :

$$5(1 + e^{4x+7}) = 5$$

Lire les deux productions ci-dessous, les critiquer puis résoudre cette équation.

Christophe

Avec la calculatrice, j'ai obtenu l'écran ci-dessous.



Conclusion : $\mathscr{S} =]-\infty\ ;\ -3]$.

Fatima

$5(1 + e^{4x+7}) = 5$, c'est-à-dire $1 + e^{4x+7} = 1$, soit $e^{4x+7} = 0$.
Ainsi $4x + 7 = 0$ et $x = \dfrac{-7}{4} = -1{,}75$.
L'équation a donc une seule solution qui est $-1{,}75$.

Utiliser la fonction $x \longmapsto e^x$

86 g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

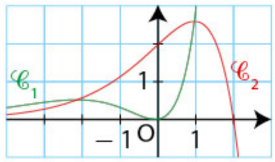
$$g(x) = (3 - x)e^x$$

$\mathscr{C}_g$ est sa courbe représentative dans un repère.
a) Déterminer $g'(x)$ pour tout nombre réel x.
b) Dresser le tableau de variations de g.
c) Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse 0.
d) Tracer, dans un même repère, cette tangente ainsi que la courbe $\mathscr{C}_g$.

87 f et g sont deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (2 - x)e^x \text{ et } g(x) = x^2 e^x.$$

On a représenté ci-dessous ces deux fonctions dans un repère.



a) Déterminer $f'(x)$ et $g'(x)$ pour tout nombre réel x.
b) Étudier le signe de $f'(x)$ puis celui de $g'(x)$.
c) Associer sa courbe à chaque fonction.

88 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{e^x}$$

a) Démontrer que pour tout nombre réel x :

$$f'(x) = \frac{-(x - 1)^2}{e^x}$$

b) En déduire le sens de variation de la fonction f.

89 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (-20x^2 + 43x - 2{,}1)e^x$$

Le professeur de Mathilde lui demande d'étudier le signe de $f(x)$. Elle affiche la courbe représentative de la fonction f à l'écran de sa calculatrice.
Voici l'écran obtenu.

Elle conjecture alors que $f(x) \geqslant 0$ pour $x \in [0\ ;\ 2]$ et $f(x) < 0$ sinon.
Que peut-on en penser ? Justifier.

90 f est la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 3]$ par :

$$f(x) = 5 + \frac{1}{4}(x-4)\mathrm{e}^{x}$$

$\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction f dans un repère.

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse. Justifier les réponses.

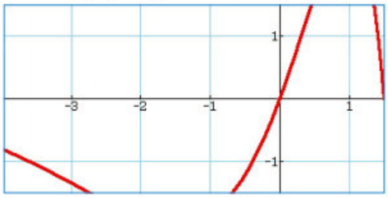
a) f est décroissante sur l'intervalle $[0\ ;\ 3]$.

b) La tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 a pour équation $y = -x + 4$.

c) La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2 est l'axe des abscisses.

91 Patrick a tracé la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[-4\ ;\ 1{,}5]$ par :

$$f(x) = (-2x^2 + 3x)\mathrm{e}^{x}$$



L'affichage ne lui permet pas de visualiser les extremums de f. Proposer, à l'aide d'un calcul, une fenêtre graphique adéquate.

Utiliser les fonctions $x \longmapsto \mathrm{e}^{ax+b}$

92 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1{,}5\mathrm{e}^{1{,}6x}$.

a) Déterminer $f'(x)$ pour tout nombre réel x.

b) Étudier le sens de variation de la fonction f.

c) Déterminer le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

93 g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(t) = 0{,}2\mathrm{e}^{-t} - 2$$

$\mathscr{C}$ est la courbe représentative de g dans un repère.

a) Déterminer $g'(t)$ pour tout nombre réel t.

b) Étudier le sens de variation de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

c) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

d) Tracer, dans un même repère, la tangente T et la courbe $\mathscr{C}$.

94 f est la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ par :

$$f(x) = 3 - 2\mathrm{e}^{-5x}$$

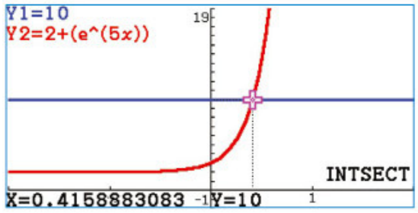
a) Calculer $f(0)$.

b) Étudier le sens de variation de f sur $[0\ ;\ 1]$.

c) Déterminer le signe de $f(x)$ sur $[0\ ;\ 1]$.

d) Résoudre l'équation $f(x) = 3$ dans l'intervalle $[0\ ;\ 1]$.

95 **1.** John a obtenu l'écran de calculatrice ci-dessous.



a) Quelle équation a-t-il voulu résoudre ?

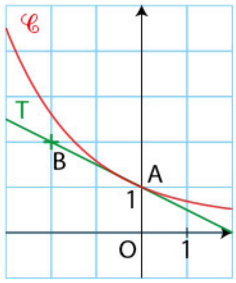
b) Donner un encadrement d'amplitude 0,01 de la solution obtenue.

2. Utiliser la calculatrice pour trouver l'arrondi au dixième de la solution de l'équation $\mathrm{e}^{-0{,}55x-4} = 2$.

96 Voici, dans un repère, la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par une expression de la forme :

$g(t) = \mathrm{e}^{kt}$ où k désigne un nombre réel.

La tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point $A(0\ ;\ 1)$ passe par le point $B(-2\ ;\ 2)$.



a) Déterminer graphiquement $g'(0)$.

b) Exprimer $g'(t)$ en fonction de t et de k.

c) En déduire la valeur de k et l'expression de la fonction g.

97 Un écrivain a publié en 2012 un nouveau roman.

Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, le nombre d'exemplaires de ce roman, en milliers, vendus l'année $2012 + n$ est donné par :

$$u_n = 5\mathrm{e}^{-0{,}2n}$$

a) Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Justifier.

b) Calculer la valeur exacte, puis l'arrondi au millième de la somme :

$$S = u_0 + u_1 + \ldots + u_6$$

Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Modéliser une situation

98 f est la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 5]$ par :

$$f(t) = 10(1 - e^{-0,3t})$$

Partie A. Étude de la fonction

a) Calculer $f(1)$.

b) Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ 5]$.

c) L'équation $f(t) = 10$ admet-elle des solutions ? Justifier.

d) On admet que l'équation $f(t) = 5$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[0\ ;\ 5]$.
Tabuler la fonction f avec la calculatrice, puis donner un encadrement d'amplitude 0,01 de α.

Partie B. Exploitation des résultats

Un incendie a ravagé, pendant t jours, $(t \in [0\ ;\ 5])$, une forêt de 50 hectares dans une région. La superficie, en hectare, brûlée par les flammes au bout de t jours, est modélisée par la fonction f étudiée dans la **partie A**.
Répondre aux questions suivantes en utilisant les résultats de la **partie A**.

a) Quelle est la superficie de forêt brûlée après une journée ? *Arrondir au dixième.*

b) Un journaliste affirme : « 20 % de la superficie de la forêt a été ravagée par l'incendie. » A-t-il raison ?

c) Au bout de combien de jours 5 ha de cette forêt ont-ils été brûlés ?

99 Au 1er janvier 2018, un village comptait 1 000 habitants. Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, le nombre d'habitants u_n, en millier, n années après le 1er janvier 2018 vérifie la relation :

$$u_{n+1} = u_n \times e^{0,02}$$

1. a) Déterminer la nature de la suite (u_n).

b) Montrer que pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $u_n = e^{0,02n}$.

c) Afficher à l'écran de la calculatrice la représentation graphique de la suite (u_n).

2. a) Afficher à l'écran de la calculatrice la courbe de la fonction $f : x \mapsto e^{0,02x}$. Que constate-t-on ?

b) On admet que la fonction f modélise le nombre d'habitants, en milliers, x années après le 1er janvier 2018, où x désigne un nombre réel positif.
Déterminer le nombre d'habitants au 1er juillet 2018, au 1er juillet 2019 et au 1er février 2024.

100 Emma a étudié la croissance de son chiot depuis qu'elle l'a adopté.

La hauteur de son chien, en centimètre, t mois après l'adoption, est modélisée par la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;+\infty[$ par :

$$f(t) = \frac{120e^t}{e^t + 3}$$

a) Calculer la hauteur du chiot le jour de l'adoption.

b) Démontrer que pour tout nombre réel t de l'intervalle $[0\ ;+\infty[$:

$$f'(t) = \frac{360e^t}{(e^t + 3)^2}$$

c) Étudier le signe de $f'(t)$ sur $[0\ ;+\infty[$.

d) En déduire le tableau de variations de f.

e) Déterminer, à l'aide de la calculatrice, au bout de combien de mois le chiot dépassera 1 m.

S'entraîner à la logique → p. 336

101 Quantificateurs

Pour chacune des propositions suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse. Justifier les réponses.

a) Pour tous nombres réels x et y :

$$\frac{e^x + e^y}{e^{x+y}} = e^{-x} + e^{-y}$$

b) Pour tout nombre réel x positif, $e^{-4x-5} \leqslant 1$.

c) Il existe un nombre réel x négatif tel que $e^x > 1$.

d) Il existe deux nombres réels x et y tels que :

$$e^x + e^y > e^{x+y}$$

e) Il existe un nombre réel a tel que pour tout nombre réel x, $e^{x+3} = e^x \times a$.

102 Implication

Dans chaque cas, indiquer si l'implication est vraie ou fausse.

a) Si $x = y$, alors $e^x = e^y$.

b) Si $e^x \leqslant e^y$, alors $x \leqslant y$.

c) Si $x < 0$, alors $e^{-x} < 1$.

103 Contre-exemple et négation

Chacune des propositions suivantes est fausse.
Dans chaque cas, trouver un contre-exemple, puis écrire la négation de la proposition.

a) Pour tout nombre réel x, $e^x > 0,001$.

b) Pour tout nombre réel a, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = e^{at}$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

104 Étudier une suite

Chercher | Calculer

On considère la suite (u_n) définie pour tout nombre entier naturel n par :

$$u_n = 2\frac{e^{2,8n}}{e^{0,8n-1}}$$

Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique. Préciser son premier terme et sa raison.

105 Modéliser une situation

Problème ouvert

Chercher | Communiquer

Une entreprise fabrique entre 0 et 3 000 cafetières par jour. Le bénéfice quotidien, en dizaine de milliers d'euros, lorsque l'entreprise fabrique et vend x milliers de cafetières est donné par la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 3]$ par :

$$f(x) = (0{,}22x^2 - 1{,}6x + 3)e^x$$

Quelle quantité de cafetières l'entreprise doit-elle fabriquer afin de réaliser un bénéfice maximum ?

Arrondir à l'unité.

106 Résoudre une équation

Chercher | Raisonner

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^x - e^{4x-1}$$

On admet que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

a) Donner à l'aide de la calculatrice l'arrondi au millième de α.

b) Justifier que pour tous nombres réels x et y, $e^x = e^y$ équivaut à $x = y$.

c) Résoudre l'équation $f(x) = 0$ et donner la valeur exacte de α.

107 Résoudre une inéquation

Narration de recherche

Chercher | Calculer | Communiquer

Rédiger les différentes étapes de la recherche sans omettre les fausses pistes et les changements de méthode.

Problème f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (2 - 0{,}5x)e^x$$

Démontrer que pour tout nombre réel x :

$$f(x) \leqslant 11$$

108 Prendre des initiatives

Calculer | Raisonner

Voici le tableau de variations d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par une expression de la forme :

$$f(x) = (ax + b)e^x$$

où a et b désignent deux nombres réels.

x	$-\infty$		6		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	e^6	$\searrow$	

Utiliser les informations données dans le tableau de variations pour déterminer les nombres réels a et b.

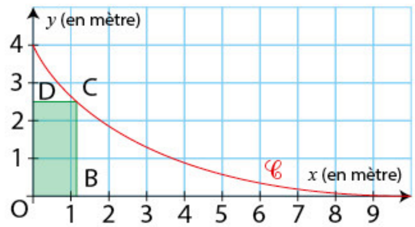
109 Imaginer une stratégie *(d'après BAC)*

Chercher | Raisonner | Calculer

Un publicitaire envisage la pose d'un panneau rectangulaire sous une partie de rampe de skateboard. Le profil de cette rampe est modélisé, dans un repère, par la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 10]$ par :

$$f(x) = 4e^{-0{,}4x}$$

Cette courbe $\mathscr{C}$ est tracée ci-dessous dans un repère d'origine O.



Le rectangle OBCD représente le panneau publicitaire et répond aux contraintes suivantes :

- le point B appartient à l'axe des abscisses ;
- le point D appartient à l'axe des ordonnées ;
- le point C appartient à la courbe $\mathscr{C}$.

Parmi tous les panneaux publicitaires qui répondent aux contraintes de l'énoncé, quelles sont les dimensions, en m, de celui dont l'aire est maximum ?

Arrondir au centième.

110 Conjecturer puis démontrer

Chercher | Calculer

f et g sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 0{,}1e^{x^2-6} \text{ et } g(x) = 0{,}1e^{-x}.$$

a) Avec la calculatrice, conjecturer la position relative des courbes représentatives de f et g.

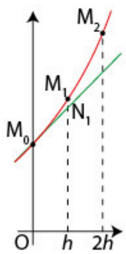
b) Démontrer cette conjecture à l'aide de $\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

111 Algo Comprendre la méthode d'Euler

Représenter **Raisonner** **Calculer**

Dans un repère, $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction exponentielle f. On sait alors que $f' = f$ et $f(0) = 1$. Grâce à cette relation, la méthode d'Euler permet d'approcher la courbe $\mathscr{C}$ point par point sans connaître la valeur des images par f. Pour un nombre réel h donné et un nombre n de $\mathbb{N}$, on note M_n le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse $n \times h$ à approcher. On a alors $M_0(0\ ;\ 1)$.

1. Le premier point



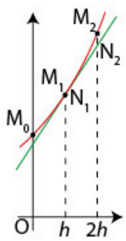
M_1 est le point de coordonnées $(h\ ;\ f(h))$. Ne connaissant pas $f(h)$, on approche M_1 par le point N_1 d'abscisse h de la tangente à $\mathscr{C}$ en M_0.

a) Déterminer l'équation de cette tangente.

b) Vérifier alors que les coordonnées de N_1 sont $(h\ ;\ 1 + h)$.

On suppose alors, par la suite, que h est très petit et que donc M_1 et N_1 ont les mêmes coordonnées.

2. Le deuxième point



De même, on approche M_2 par le point N_2 d'abscisse $2h$ de la tangente à $\mathscr{C}$ en M_1.

a) Déterminer l'équation de cette tangente en supposant que $f(h) = 1 + h$.

b) Vérifier alors que les coordonnées de N_2 sont $(2h\ ;\ (1 + h)^2)$.

3. Ainsi de suite

De même, on peut démontrer que pour passer d'un point au suivant, on ajoute h à l'abscisse et on multiplie par $1 + h$ l'ordonnée.

a) Compléter la fonction Expo ci-contre écrite en langage Python qui a pour paramètres le nombre N de points à placer et le pas h et qui affiche les points de la courbe approchant celle de la fonction exponentielle.

```
from pylab import *

def Expo(N,h):
    x=0
    y=1
    plot(x,y,'r.')
    for k in range(1,☐):
        x=☐
        y=☐
        plot(x,y,'r.')
    show()
    return()
```

b) Saisir le programme et tester la commande Expo(400,0.01).

c) Quelle valeur donner à h pour que la courbe précédente soit tracée sur l'intervalle $[-4\ ;\ 0]$?

112 Algo Approcher e par la suite $\left(\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right)$

Chercher **Raisonner** **Représenter**

L'exercice précédent permet de montrer que pour un nombre réel h très petit, $e^{nh} \approx (1 + h)^n$.

a) Pour n nombre très grand de $\mathbb{N}$, on pose $h = \dfrac{1}{n}$.

Remplacer h par cette expression dans l'approximation rappelée ci-dessus.

De quelle suite le nombre e est-il la limite ?

b) Donner les valeurs, arrondies au centième, affichées par cet algorithme lorsque N = 10.

> Pour k allant de 1 à N
>
> | Afficher $\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^k$
>
> Fin Pour

113 Study the variations of a function

Chercher **Calculer**

f is a function defined over $\mathbb{R}$.

Its variation table is drawn below.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↘	-1	↗

Which of the following functions is f? Explain.

(1) $x \mapsto e^{1,5x} - 2$ **(2)** $x \mapsto e^x(x - 1)$ **(3)** $x \mapsto e^x - e$

114 Utiliser une fonction intermédiaire

Chercher **Calculer** **Raisonner**

Chaque mois, une entreprise peut extraire entre 500 et 3 000 tonnes de minerai. Le résultat de l'exploitation, en centaine de milliers d'euros, est modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle $[0,5\ ;\ 3]$ par :

$$f(x) = (6x - 4)e^{-x+2} + 2x$$

1. g est la fonction définie sur l'intervalle $[0,5\ ;\ 3]$ par :

$$g(x) = (10 - 6x)e^{-x+2} + 2$$

a) Déterminer $g'(x)$ pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0,5\ ;\ 3]$.

b) Dresser le tableau de variations de la fonction g.

c) Calculer $g(2)$.

d) En déduire le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $[0,5\ ;\ 3]$.

2. a) Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0,5\ ;\ 3]$.

b) En déduire la quantité de minerai à extraire pour obtenir un résultat d'exploitation maximum.

115 Étudier la décroissance radioactive

Chercher Raisonner

On étudie une population de noyaux radioactifs de carbone 14 au cours du temps.
À l'instant $t = 0$, la population est composée de N_0 noyaux radioactifs de carbone 14.
On modélise le nombre de noyaux radioactifs de carbone 14 à l'instant t, exprimé en milliers d'années, par la fonction N définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :

$$N(t) = N_0 e^{-0{,}121t}$$

1. Étudier les variations de la fonction N sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

2. a) On appelle demi-vie du carbone 14 le temps T au bout duquel la population de noyaux radioactifs a diminué de moitié.

Justifier que $e^{-0{,}121T} = \frac{1}{2}$.

b) Déterminer avec la calculatrice l'arrondi au millième de la demi-vie T du carbone 14.

3. a) Démontrer que $N(2T) = \frac{N_0}{4}$.

b) En déduire au bout de combien de temps le nombre de noyaux radioactifs de carbone 14 n'est plus égal qu'au quart de sa valeur initiale.

Des défis

116 Résoudre une équation

Déterminer tous les nombres réels x tels que :

$$e^{x-1} \times e^{2x-5} = \frac{e}{e^x}$$

117 Calculer un produit

Déterminer la valeur exacte du produit :

$$e^1 \times e^2 \times e^3 \times \ldots \times e^{100}$$

118 Une relation fonctionnelle

Trouver une fonction f définie sur $\mathbb{R}$, telle que :
- $f(1) = 3$;
- pour tous nombres réels x et y :

$$f(x+y) = f(x) \times f(y)$$

119 Une équation du second degré

(**E**) est l'équation $e^{2x} + 2e^x - 3 = 0$.
Julie affirme : « Pour résoudre (**E**), je me suis ramenée à une équation du second degré. »
Imaginer le procédé de Julie et résoudre (**E**).

OBJECTIF BAC

120 Étudier une température — 35 min

D'après Bac 2017, Métropole

Une entreprise fabrique des pièces de fonte GS (graphite sphéroïdal) qui sont utilisées dans l'industrie automobile. Ces pièces sont coulées dans des moules de sable à la sortie du four. Elles sont entreposées dans un local dont la température ambiante est maintenue à une température de 30 °C.
Ces pièces peuvent être démoulées dès lors que leur température est inférieure à 650 °C.
La température en degré Celsius d'une pièce de fonte est une fonction du temps t, en h, depuis sa sortie du four. On admet que cette fonction f est définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(t) = 1\,370e^{-0{,}065t} + 30$$

1. Calculer la température de la pièce à la sortie du four.

2. a) Étudier mathématiquement le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

b) Pourquoi ce résultat était-il prévisible ?

3. La pièce de fonte peut-elle être démoulée après avoir été entreposée 5 h dans le local ?
Justifier par un calcul.

4. Déterminer au bout de combien de temps, en h, au minimum la pièce pourra être démoulée.
Arrondir à la minute.

5. a) La pièce de fonte peut-elle atteindre une température de 25 °C ?
Justifier par un calcul.

b) Pourquoi ce résultat était-il prévisible ?

121 Dater un fragment de charbon

La situation problème

Des fragments de charbon de bois provenant de lampes ont été découverts dans la grotte de Lascaux en 1950. Une des premières datations au carbone 14 a alors été effectuée.
Des mesures ont été faites sur quelques grammes de charbon de bois retrouvé dans la grotte et ont été comparées à celles obtenues à partir d'un même bois vivant.
Utiliser les différentes informations pour retrouver la datation des fragments de charbon de bois.

DOC 1 La désintégration radioactive

À l'instant t, en milliers d'années, le nombre de noyaux radioactifs de carbone 14 est donné par la formule :

$$N(t) = N_0 \times e^{-0{,}121t}$$

où N_0 est le nombre de noyaux radioactifs de carbone 14 à l'instant initial $t = 0$.

DOC 2 Les mesures obtenues

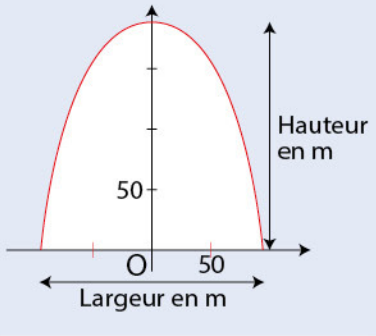
Les fragments de charbon de bois retrouvés dans la grotte ne contiennent plus que 12,5 % de la masse de carbone 14 contenue dans le bois vivant.

122 Déterminer des dimensions

La situation problème

La Gateway Arch est un monument situé dans le centre-ville de Saint-Louis, dans l'état du Missouri aux États-Unis.
Cette arche a la forme d'une chaînette.
Un ingénieur a modélisé la forme de cette arche par la courbe représentative d'une fonction f dans un repère.
Utiliser les différentes informations pour trouver la particularité des dimensions de la Gateway Arch en déterminant la hauteur et la largeur de l'arche.

DOC 1 Allure de la modélisation



DOC 2 Modélisation de l'arche

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 209{,}6 - 8{,}81(e^{-0{,}033x} + e^{0{,}033x})$$

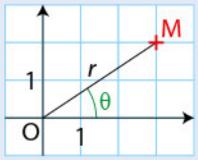
123 Tice Étudier la spirale logarithmique

La situation problème

La courbe appelée spirale logarithmique fut étudiée par de grands mathématiciens dont Jacques Bernoulli (1654-1705) qui l'a fait graver sur sa tombe.
Utiliser les différentes informations pour :
- représenter la spirale d'équation polaire $r = e^{0,17\theta}$;
- expliquer ce qui est écrit sur la tombe et l'erreur du graveur.

DOC 1 Une construction

Pour construire une courbe d'équation polaire $r = f(\theta)$, on calcule, pour des valeurs de θ en radian, la distance $r = f(\theta)$ et on place le point M comme indiqué sur le schéma ci-contre.



DOC 2 GeoGebra

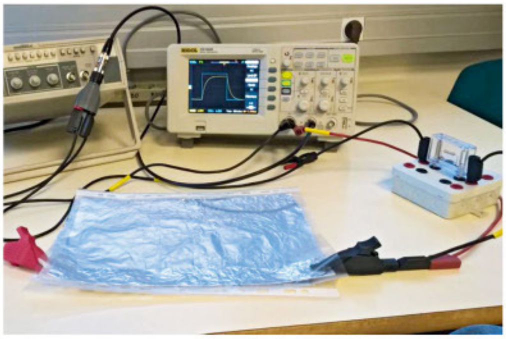
Pour tracer une courbe d'équation polaire $r = f(\theta)$ avec GeoGebra, on saisit :
Courbe((f(θ);θ),θ,0,1000)

124 Étudier un dipôle RC

La situation problème

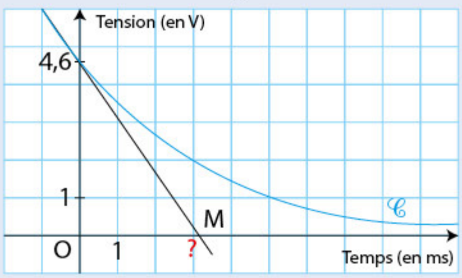
Un condensateur de capacité $C = 3{,}2 \times 10^{-3}$F (farad) et une résistance $R = 10^3\,\Omega$ sont branchées en série. Le condensateur est chargé avec une tension à ses bornes égale à 4,6 V.
- À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur et le condensateur se décharge.
- À long terme le condensateur a une tension quasi nulle.

La tension f vérifie alors, pour tout $t \geqslant 0$, $f'(t) = \dfrac{-1}{RC} f(t)$.
La courbe $\mathscr{C}$ de f étant tracée dans un repère, sa tangente au point d'abscisse 0 coupe l'axe des abscisses en un point M.
Utiliser les différentes informations pour déterminer l'abscisse de M.



DOC 1 La tension

Voici la courbe représentative de la tension f du condensateur dans un repère.



DOC 2 Solutions d'une équation

a étant un nombre réel, les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$, vérifiant l'équation $f' = af$ sont de la forme :
$f(t) = Ae^{at} + B$ où A et B sont à déterminer.

DOC 3 Limite

Si t est très grand et a est négatif, alors e^{at} est quasi nul.