10 Continuité des fonctions d'une variable réelle

HISTOIRE DES MATHS

Au 16e siècle, le principe de continuité (« si a et b sont tels que $p(a) \times p(b) < 0$, alors le polynôme p admet un zéro entre a et b ») est considéré comme géométriquement évident. Un exemple simple concerne les courbes que l'on trace *sans lever le crayon*. Cette première approche ne suffit pas pour définir la continuité.

En 1769, **Joseph-Louis Lagrange** propose deux démonstrations du principe de continuité, mais ces preuves ne sont pas convaincantes. C'est près de 50 ans plus tard, en 1817, que **Bernard Bolzano** donne la première définition moderne d'une fonction continue.

En 1821, **Augustin Cauchy** énonce à son tour le principe connu de nos jours sous le nom de théorème des valeurs intermédiaires. Mais il invoque comme preuve l'évidence géométrique (ce qui déplaît à Bolzano) et repousse en fin d'ouvrage une démonstration analytique.

▶ **Bernard Bolzano** (1781-1848) est un mathématicien qui vécut à Prague. Également philosophe et théologien, il est aussi considéré comme un des fondateurs de la logique moderne. Ses recherches, pourtant novatrices, restent souvent méconnues de ses contemporains.

▶ **Augustin Cauchy** (1789-1857) est le mathématicien français le plus prolifique de l'histoire, avec près de 800 articles et 7 ouvrages. Son œuvre a fortement influencé le développement des mathématiques au 19e siècle.

1817 Bolzano donne la première définition moderne d'une fonction continue.

1821 Cauchy formalise le théorème des valeurs intermédiaires.

1861 Weierstrass démontre le théorème des valeurs extrêmes (une fonction continue possède un minimum et un maximum sur un segment).

1874 Dedekind publie sa construction des réels dans son article *Continuité et nombres irrationnels*.

1804 Sacre de Napoléon 1er

1815 Défaite de Waterloo

1830 Hernani de Victor Hugo

1848 Abolition de l'esclavage

1870 Guerre franco-prussienne

1882 École laïque, gratuite et obligatoire (lois Ferry)

1800 — 1825 — 1850 — 1875 — 1900

Massif du Mont-Blanc, France.

La notion de continuité est très intuitive. Un alpiniste qui part du refuge du Goûter à 3 835 m d'altitude pour le sommet du Mont-Blanc à 4 809 m, sait bien qu'il passera au moins une fois à toute altitude entre 3 835 m et 4 809 m. La notion de fonction **continue** a été formalisée au 19^e siècle en particulier par Bernard Bolzano.

Les contenus et capacités travaillés dans ce chapitre

	Savoir-faire	Exercices
• Fonction continue en un point (définition par les limites), sur un intervalle. Toute fonction dérivable est continue.	1 à 4	19 à 29
• Image d'une suite convergente par une fonction continue. Pour une fonction continue f de I dans I, étudier une suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$	5 à 8	30 à 42
• Théorème des valeurs intermédiaires.	9 à 12	43 à 50
• Cas des fonctions continues strictement monotones. Étudier les solutions d'une équation du type $f(x) = k$: existence, unicité, encadrement.	13 à 18	51 à 57

Bien démarrer

Calcul mental

Rappels utiles

• Limite d'une fonction en un réel

ℓ et a désignent des nombres réels. f est une fonction définie sur un intervalle I tel que $a \notin \mathrm{I}$.

Si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x) = \ell$, alors la fonction f admet une limite en a et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$.

• Dérivée et sens de variation

f est une fonction dérivable sur un intervalle I.

Si pour tout réel x de I, $f'(x)$ **est strictement positif** (resp. négatif) **ou s'annule seulement en un nombre fini de points**, alors f **est strictement croissante** (resp. décroissante) **sur I.**

• Suites convergentes

Dire qu'une suite est **convergente** signifie qu'elle admet une limite et que sa limite est un réel.

Si une suite est **croissante et majorée** (ou **décroissante et minorée**), alors cette suite est **convergente**.

• Suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$

f est une fonction définie sur un intervalle I tel que **pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f(x) \in \mathrm{I}$.**

On peut définir alors une suite (u_n) par la donnée d'un nombre réel u_0 de I et par la relation de récurrence : pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

À l'oral — Questions-Tests

Pour chaque question, il y a une seule réponse exacte.

1 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x < 0 \\ -3x+4 & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

a) La limite de la fonction f lorsque x tend vers 0 par valeurs négatives est : **(1)** 4 **(2)** 1 **(3)** 0

b) La limite de la fonction f lorsque x tend vers 0 par valeurs positives est : **(1)** 4 **(2)** 1 **(3)** 0

c) La limite de la fonction f en 0 :

(1) est 4 **(2)** est 1 **(3)** n'existe pas

2 g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = x^3 + x^2 - x + 1.$$

a) D'après cet écran de calcul formel, le tableau de signes de $g'(x)$ est :

2 g'(x)
Factoriser: (x + 1) (3 x − 1)

(1)

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	−	0	+	

(2)

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	−	0	+	

(3)

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$g'(x)$		−	0	+	0	−	

b) g est strictement monotone sur l'intervalle :

(1) $\mathbb{R}$ **(2)** $\left[-1 ; \frac{1}{3}\right]$ **(3)** $[-1 ; +\infty[$

3 (u_n) est la suite sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = \frac{n-1}{n+1}.$$

a) D'après cet écran de calcul formel, la suite (u_n) est :

u(n + 1) − u(n)
2 Factoriser: $\frac{2}{(n+1)\,(n+2)}$

(1) non monotone
(2) décroissante
(3) croissante

b) La suite (u_n) est : **(1)** majorée par 1 **(2)** minorée par 0 **(3)** majorée par -1

c) La suite (u_n) converge vers :

(1) -1 **(2)** 0 **(3)** 1

4 $u_0 = -1$

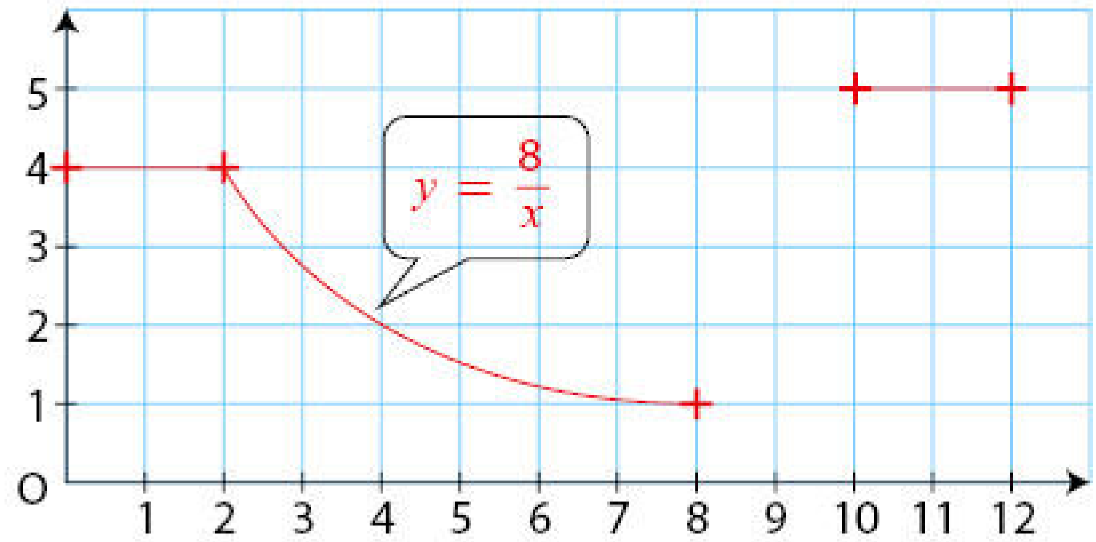
On définit une suite (u_n) avec pour relation de récurrence :

pour tout entier naturel n, u_{n+1} est égal à :

(1) $\frac{1}{u_n} + 1$ **(2)** $\frac{1}{u_n} - 2$ **(3)** $u_n^2 + \frac{1}{u_n}$

1 Notion de fonction continue sur un intervalle

Une municipalité a commencé l'installation d'une nouvelle piste de skateboard. Ce graphique modélise la partie de la piste installée.



Cette piste ne doit pas avoir de coupure c'est-à-dire que l'on doit pouvoir la représenter ci-dessus sur l'intervalle $[0 ; 12]$ sans lever le crayon.

1 Lesquelles des équations de courbes données permettent de compléter la piste sur l'intervalle $[8 ; 10]$?

(1) $y = 2x - 15$ **(2)** $y = \frac{1}{64}x^2$ **(3)** $y = -\frac{160}{x} + 21$ **(4)** $y = 0{,}01x^3 - 5$

2 **a)** En fait les organisateurs souhaitent compléter la piste sur l'intervalle $[8 ; 10]$ par une courbe d'équation $y = a(x - 8)^2 + b$. Déterminer les nombres réels a et b.

b) Réaliser le graphique ci-dessus et le compléter par la courbe obtenue à la question **a)**.

c) Écrire l'expression de la fonction f ainsi représentée sur l'intervalle $[0 ; 12]$.

On dit que cette fonction ***f* est continue sur l'intervalle $[0 ; 12]$** pour indiquer que sa courbe représentative se trace sans lever le crayon.

2 Vers le théorème des valeurs intermédiaires

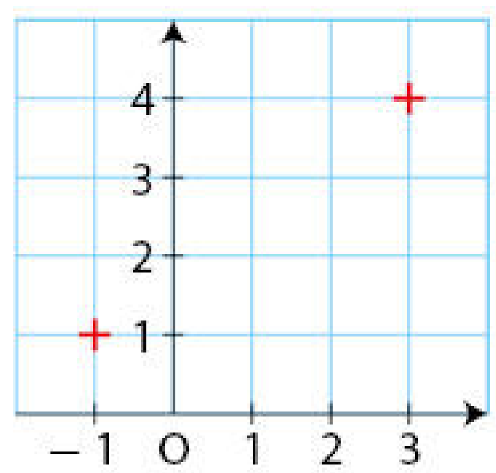
1 f est une fonction définie sur l'intervalle $I = [-1 ; 3]$ telle que $f(-1) = 1$ et $f(3) = 4$.
Dans chaque cas, dans un repère tel que celui proposé ci-contre, tracer une courbe représentative possible de la fonction f sachant que :

a) l'équation $f(x) = 2$ a trois solutions dans l'intervalle I ;

b) l'équation $f(x) = 2$ n'a pas de solution dans l'intervalle I ;

c) l'équation $f(x) = 2$ a une seule solution dans l'intervalle I ;

d) pour tout nombre réel k compris entre $f(-1)$ et $f(3)$, l'équation $f(x) = k$ a une seule solution dans l'intervalle I.



2 g est une fonction définie sur un intervalle $I = [a ; b]$ avec a et b nombres réels tels que $a < b$.
Dans chaque cas, imposer des conditions à la fonction g afin que pour tout réel k compris entre $g(a)$ et $g(b)$:

a) l'équation $g(x) = k$ ait au moins une solution dans l'intervalle I ;

b) l'équation $g(x) = k$ ait une seule solution dans l'intervalle I.

Cours

Exercices
- 1 à 4 (ci-contre)
- 19 à 29

Vidéo
JaiCompris.com
Cette notion est présentée en vidéo

1 Langage de la continuité

A Continuité sur un intervalle

Définitions

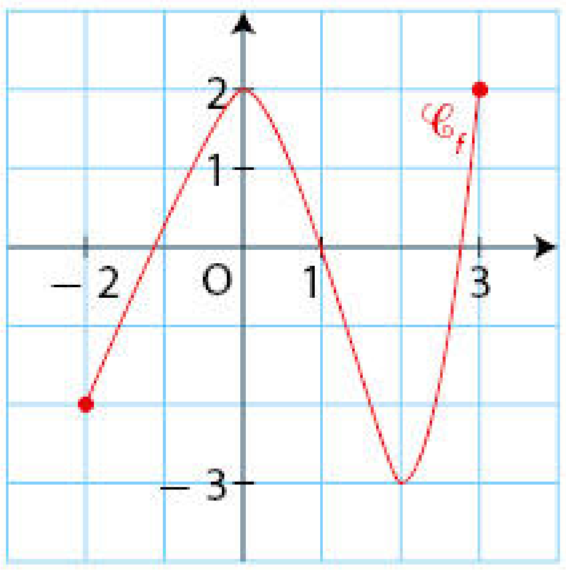
f est une fonction définie sur un intervalle I et a est un nombre réel de I.
- Dire que f est **continue en a** signifie que f a une limite en a égale à $f(a)$, soit $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- Dire que f est **continue sur l'intervalle I** signifie que f est continue en tout réel a de I.

Vocabulaire : une fonction non continue en a est dite **discontinue** en a.

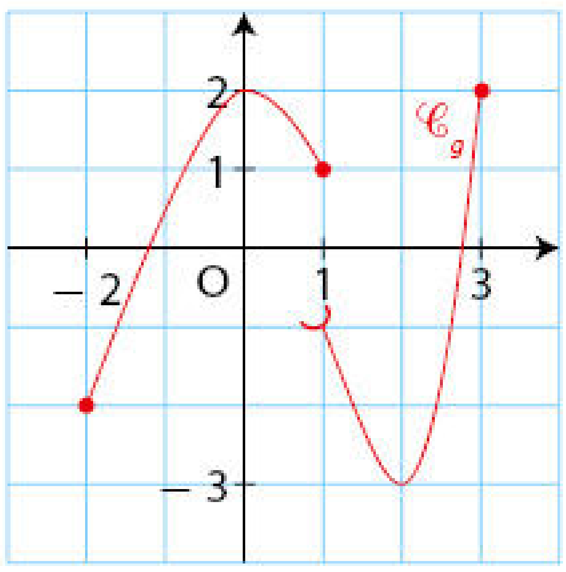
Graphiquement, la continuité d'une fonction f sur un intervalle I se traduit par le fait que la courbe représentative de f sur I peut se tracer **sans lever le crayon**.

Exemples

- La fonction f représentée ci-dessous est continue sur l'intervalle $[-2 ; 3]$.



- La fonction g représentée ci-dessous n'est pas continue sur l'intervalle $[-2 ; 3]$.



En effet, g est discontinue en 1 car g n'a pas de limite en 1 :

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} g(x) = 1$

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} g(x) = -1$

Propriétés (admises)

f est une fonction définie sur un intervalle I et a est un nombre réel de I.
- Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.
- Si f est dérivable sur I, alors f est continue sur I.

Remarque : une fonction peut être continue en a sans être dérivable en a. Par exemple, la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue en 0 car $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x} = \sqrt{0} = 0$ mais n'est pas dérivable en 0.

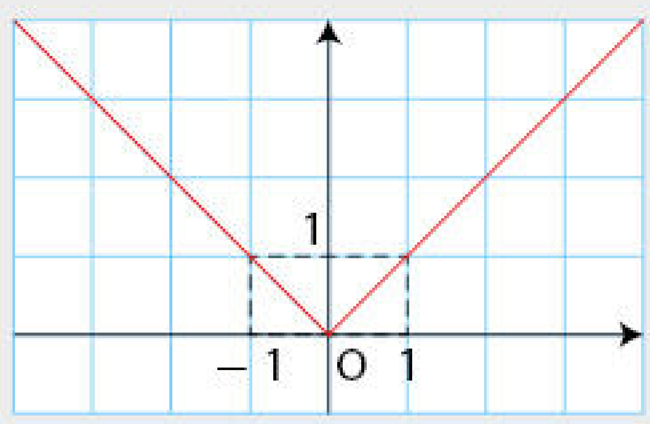
B Continuité des fonctions usuelles

Propriétés (admises)

- Les fonctions **polynômes** sont **continues sur** $\mathbb{R}$.
- La fonction **exponentielle** est **continue sur** $\mathbb{R}$.
- La fonction **racine carrée** est **continue sur** $[0 ; +\infty[$.
- Toute fonction définie sur un intervalle I et obtenue par opérations ou composition à partir des fonctions précédentes est continue sur I.

En particulier, les fonctions **rationnelles** (quotients de deux polynômes) sont **continues** sur tout intervalle contenu dans leur ensemble de définition.

- La fonction **valeur absolue** est **continue sur** $\mathbb{R}$.



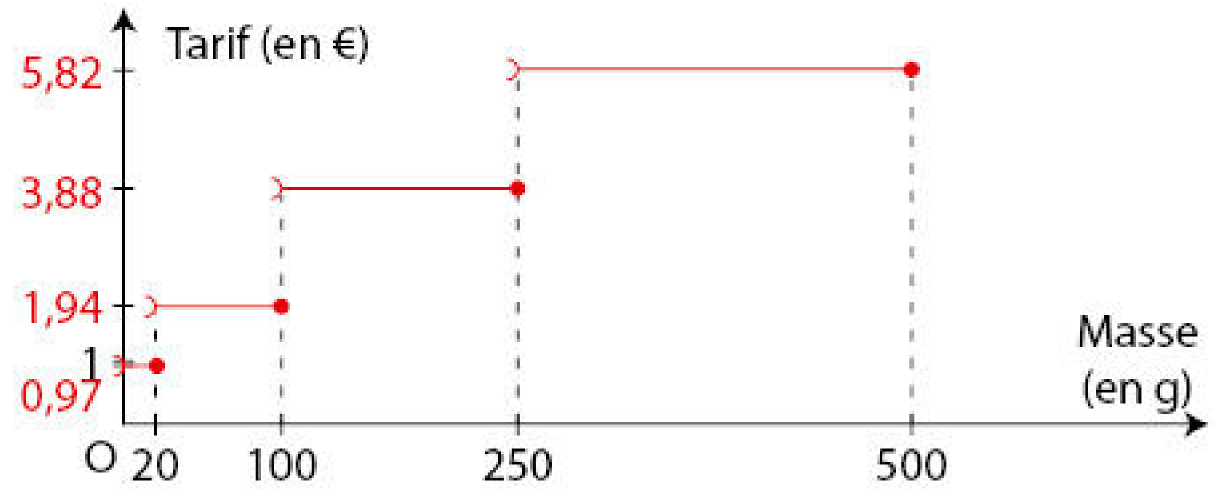
Exemple

La fonction f définie sur l'intervalle $]5 ; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4e^x + 1}{x - 5}$ est le quotient des fonctions $x \mapsto 4e^x + 1$ et $x \mapsto x - 5$ continues sur $]5 ; +\infty[$ donc f est continue sur $]5 ; +\infty[$.

EXERCICES RÉSOLUS

1 Étudier graphiquement la continuité d'une fonction

Ce graphique représente les tarifs postaux 2020 en France métropolitaine pour une lettre verte.
À toute masse x, en gramme, on associe le tarif d'envoi $f(x)$, en euro.
Étudier graphiquement la continuité de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;500]$.



Solution

Pour tracer la courbe représentative de la fonction f, on doit lever le crayon pour $x = 20$, $x = 100$, $x = 250$. Donc la fonction f n'est pas continue sur l'intervalle $]0\,;500]$.

Plus précisément, la fonction f est discontinue en 20, 100 et 250, mais elle est continue sur chacun des intervalles $]0\,;20[$, $]20\,;100[$, $]100\,;250[$ et $]250\,;500]$.

Sur le graphique, le codage indique que l'image de 20 est 0,97 (•) et non pas 1,94 (>–).

2 Comprendre la notion de continuité

m désigne un nombre réel et f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leqslant 0 \\ x+m & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

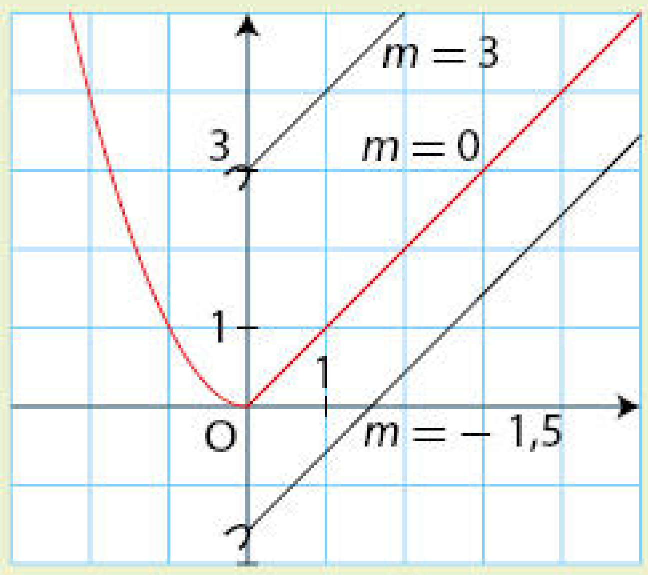
Déterminer la valeur de m pour laquelle la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

Solution

- La fonction $x \mapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur l'intervalle $]-\infty\,;0]$.
La fonction affine $x \mapsto x+m$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} x^2 = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} (x+m) = m$.
Donc, la fonction f est continue en 0 dans le seul cas où $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x) = f(0)$, c'est-à-dire $m = 0$.

Conclusion : la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ lorsque $m = 0$.

Ce graphique illustre le fait que pour $m \neq 0$, la fonction f est discontinue en 0.



EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 1

3 f est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = -1$ si $x < 1$ et $f(x) = 0$ si $x \geqslant 1$.
Étudier graphiquement la continuité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Vidéo
JAICOMPRIS.COM Cet exercice est corrigé en vidéo

Sur le modèle de l'exercice résolu 2

4 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = -2x$ si $x < 2$ et $f(x) = mx - 6$ si $x \geqslant 2$.
Pour quelle valeur de m la fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Cours

Exercices
- 5 à 8 (ci-contre)
- 30 à 42

2 Fonctions continues et suites convergentes

A Image d'une suite par une fonction

Définition

(u_n) est une suite définie sur $\mathbb{N}$.
f est une fonction définie sur un intervalle I contenant tous les termes u_n.
L'image de la suite (u_n) par la fonction f est la suite $(f(u_n))$.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{N} & \xrightarrow{(u_n)} & \mathrm{I} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & u_n & \longmapsto & f(u_n) \end{array}$$

Exemple

(u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 2n + 1$ et f est la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.
Pour tout entier naturel n, $2n + 1 \in [1\,;+\infty[$ et $[1\,;+\infty[\subset [0\,;+\infty[$.
Ainsi, l'image de la suite (u_n) par la fonction f est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $f(u_n) = \sqrt{2n+1}$.

B Image d'une suite convergente par une fonction continue

Propriété (admise)

(u_n) est une suite qui **converge** vers un nombre réel ℓ.
I est un intervalle tel que $\ell \in \mathrm{I}$ et pour tout entier naturel n, $u_n \in \mathrm{I}$.
Pour toute fonction f définie sur l'intervalle I et **continue en ℓ**, la **suite $(f(u_n))$ converge** vers le nombre réel $f(\ell)$.

Exemple

(v_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n = \cos\left(\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{1}{n}\right)$.

- Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \dfrac{1}{n}$ et on note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos\left(\dfrac{\pi}{3} + x\right)$.

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $\dfrac{1}{n} \in \,]0\,;+\infty[$ et $]0\,;+\infty[\subset \mathbb{R}$, donc $v_n = f(u_n)$.

- $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, la suite (u_n) converge vers $\ell = \mathbf{0}$. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ donc en particulier en $\mathbf{0}$.

Ainsi, la suite (v_n) converge vers $f(\mathbf{0})$: $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$.

C Suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$

f est une fonction définie et **continue** sur un intervalle I tel que **pour tout réel $x \in \mathrm{I}$, $f(x) \in \mathrm{I}$.**
(u_n) est une suite définie par la donnée de $u_0 \in \mathrm{I}$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.
Lorsque la suite (u_n) converge vers un nombre réel ℓ **de I**, alors, d'après le paragraphe **B**, la suite $(f(u_n))$ converge vers le nombre réel $f(\ell)$.
Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \ell$ (la suite (u_{n+1}), excepté u_0, prend les mêmes valeurs que la suite (u_n) : $u_1, u_2, \ldots$).
Donc, l'unicité de la limite d'une suite permet d'affirmer que $\ell = f(\ell)$.

Ainsi, **si la suite (u_n) converge vers un réel ℓ de I et si f est continue sur I**, donc en particulier **en ℓ, alors $\ell = f(\ell)$**. Autrement dit, ℓ est une solution dans I de l'équation $f(x) = x$.

EXERCICES RÉSOLUS

5 Étudier une suite du type $(f(u_n))$

(v_n) est la suite définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, par $v_n = \sqrt{\dfrac{1}{n^2} + 1}$.

Expliquer pourquoi la suite (v_n) est du type $(f(u_n))$ et étudier sa limite.

Solution

- On note, pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = \dfrac{1}{n^2} + 1$ et f la fonction racine carrée définie sur $\mathrm{I} = [0\,;+\infty[$.

Pour $n \geqslant 1$, $\dfrac{1}{n^2} \geqslant 0$, soit $u_n \geqslant 1$. Ainsi, pour tout $n \geqslant 1$, $u_n \in \mathrm{I}$, donc $v_n = f(u_n)$.

- $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$. Ainsi, la suite (u_n) converge vers $\ell = 1$.

La fonction f est continue sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ donc la suite (v_n) converge vers $f(\ell)$ c'est-à-dire $\sqrt{1}$.
Ainsi, $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 1$.

6 Étudier une suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$

(u_n) est la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$.

a) Expliquer pourquoi cette suite est du type $u_{n+1} = (f(u_n))$.

b) On admet ici (voir exercice 70 p. 308) que la suite (u_n) converge vers un réel $\ell \geqslant 0$. Déterminer ℓ.

Solution

a) f est la fonction définie sur l'intervalle $\mathrm{I} = [0\,;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{3x+4}$.

- Pour tout réel $x \geqslant 0$, $\sqrt{3x+4} \geqslant 0$, c'est-à-dire $f(x) \in \mathrm{I}$.
- $u_0 = 0$ donc $u_0 \in \mathrm{I}$.

Donc pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

> Pour établir qu'une suite est du type $u_{n+1} = f(u_n)$, il suffit de montrer que f est définie sur un intervalle I tel que pour tout x de I, $f(x) \in \mathrm{I}$ et que $u_0 \in \mathrm{I}$ (voir exercice 66 p. 216).

b) La fonction f est continue sur I donc en particulier en ℓ. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = f(\ell)$.

Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \ell$, donc d'après l'unicité de la limite d'une suite, $\ell = f(\ell)$, c'est-à-dire ℓ est une solution dans l'intervalle I de l'équation $f(x) = x$, c'est-à-dire $\sqrt{3x+4} = x$.

Dans l'intervalle I, $\sqrt{3x+4} = x$ équivaut à $3x + 4 = x^2$, c'est-à-dire $x^2 - 3x - 4 = 0$.

$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 25$ donc $x = \dfrac{3+5}{2} = 4$ ou $x = \dfrac{3-5}{2} = -1$. Or, $-1 \notin \mathrm{I}$ donc $\ell = 4$.

Ainsi, la suite (u_n) converge vers $\ell = 4$.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 5

7 (v_n) est la suite pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, par :

$$v_n = \mathrm{e}^{\frac{2}{n}+1}.$$

a) Expliquer pourquoi cette suite est du type $f((u_n))$.

b) Étudier la limite de la suite (v_n).

Sur le modèle de l'exercice résolu 6

8 (u_n) est la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}(1 + u_n^2)$.

a) Pourquoi cette suite est-elle du type $u_{n+1} = f(u_n)$?

b) On admet ici que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ. Déterminer ce réel ℓ.

Exercices
- 9 à 12 (ci-contre)
- 43 à 50

3 Théorème des valeurs intermédiaires

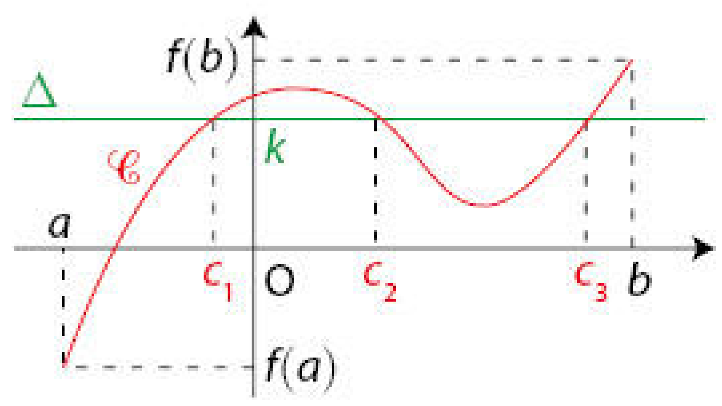
A Propriété fondamentale des fonctions continues

Théorème des valeurs intermédiaires (admis)

f est une fonction **continue** sur un intervalle I.
a et *b* désignent deux nombres réels de I avec $a < b$.
Pour tout réel $\boldsymbol{k}$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, **il existe au moins** un réel $\boldsymbol{c}$ compris entre *a* et *b* tel que $\boldsymbol{f(c) = k}$.

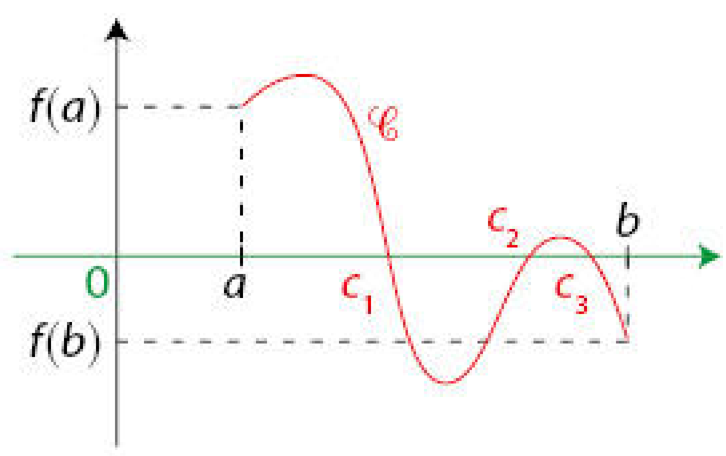
Remarque : en d'autres termes, si x varie entre *a* et *b* avec $a < b$ et si la fonction *f* est continue sur I, alors $f(x)$ prend au moins une fois toute valeur intermédiaire comprise entre $f(a)$ et $f(b)$.
Une démonstration de ce théorème est proposée à l'exercice **95** page 316.

Interprétation graphique : on note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction *f* dans un repère.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, la droite d'équation $y = k$ coupe **au moins une fois** la courbe $\mathscr{C}$ en un point d'abscisse comprise entre *a* et *b*.



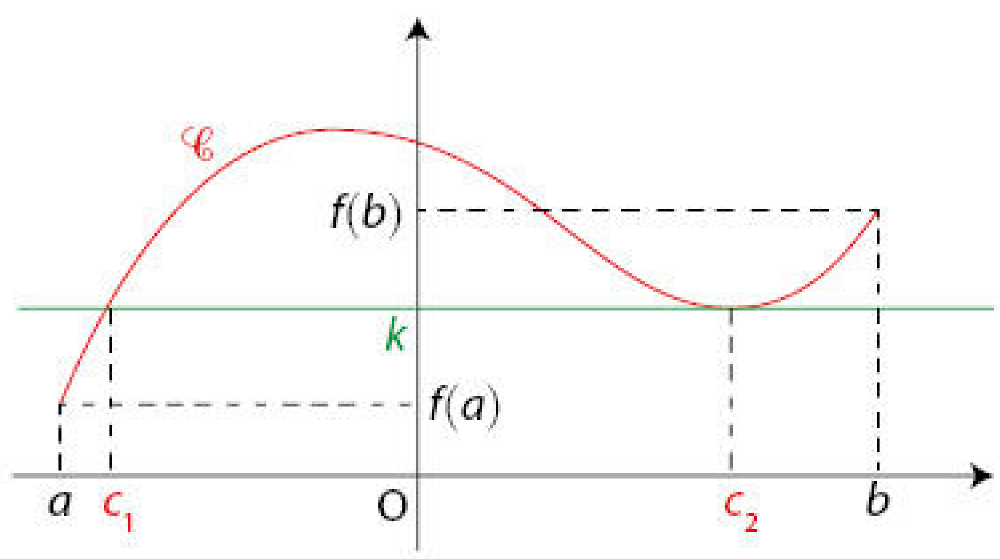
Conséquence : théorème de Bolzano

f est une fonction **continue** sur un intervalle I.
a et *b* désignent deux nombres réels de I avec $a < b$.
Si **0** est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, c'est-à-dire si $\boldsymbol{f(a)}$ **et** $\boldsymbol{f(b)}$ **sont de signes contraires**, alors **il existe au moins** un réel $\boldsymbol{c}$ compris entre *a* et *b* tel que $\boldsymbol{f(c) = 0}$.



B Application aux équations

f est une fonction **continue** sur un intervalle I.
a et *b* désignent deux nombres réels de I avec $a < b$.
Le théorème des valeurs intermédiaires permet alors d'affirmer que pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, **l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution c comprise entre a et b.**



Remarques :
- Le théorème des valeurs intermédiaires est un théorème d'existence : il affirme l'existence d'au moins une solution d'une équation $f(x) = k$ mais il ne permet pas de connaître ni le nombre exact de solutions ni les valeurs exactes de ces solutions.
- Lorsqu'on ne peut pas déterminer algébriquement les solutions d'une équation $f(x) = k$, on obtient des valeurs approchées de ces solutions avec des méthodes algorithmiques (voir exercices **16**, **81**, **82**).

EXERCICES RÉSOLUS

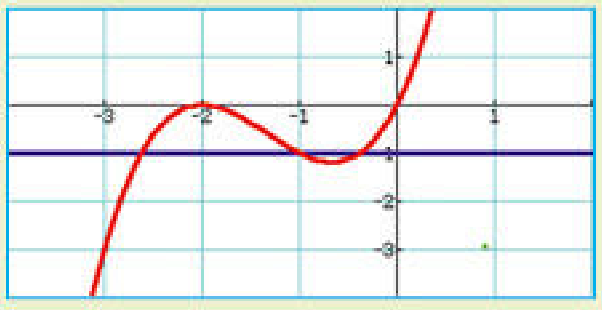
9 Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 4x^2 + 4x$.
Démontrer qu'il existe au moins un réel c compris entre -3 et 0 tel que $f(c) = -1$.

Solution

- La fonction f est une fonction polynôme, donc f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
- $f(-3) = (-3)^3 + 4 \times (-3)^2 + 4 \times (-3) = -3$
$f(0) = 0$
Ainsi, -1 est compris entre $f(-3)$ et $f(0)$.
- Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins un réel c compris entre -3 et 0 tel que $f(c) = -1$.

La calculatrice permet de visualiser cette situation.
L'équation $f(x) = -1$ a en fait trois solutions exactement (voir exercice 13).



10 Se ramener à une équation du type $f(x) = 0$

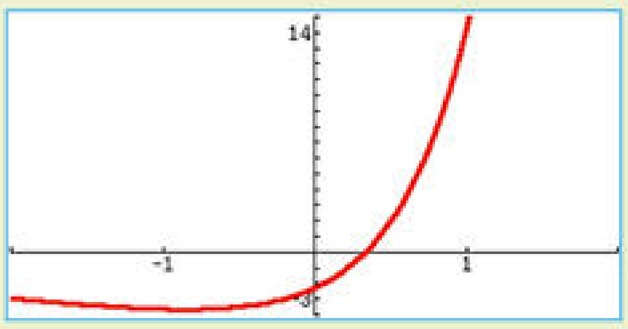
Démontrer que l'équation $e^{2x+1} = x + 5$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.

Solution

L'équation $e^{2x+1} = x + 5$ est équivalente à l'équation $e^{2x+1} - (x+5) = 0$.
On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x+1} - (x+5)$.

- La fonction f est la différence des fonctions $x \mapsto e^{2x+1}$ (composée de la fonction exponentielle et d'une fonction affine) et $x \mapsto x + 5$ continues sur $\mathbb{R}$ donc la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.
- $f(0) = e^1 - 5$ et $f(0) \approx -2{,}3$.
$f(1) = e^3 - 6$ et $f(1) \approx 14{,}1$.
Donc 0 est compris entre $f(0)$ et $f(1)$.
- Ainsi, d'après le théorème de Bolzano, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[0\,;1]$.
Donc l'équation $e^{2x+1} = x + 5$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.

On détermine deux nombres réels a et b tels que **$f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires**. La calculatrice aide à faire ce choix.



EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 9

11 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = 2 + 3e^{-x}.$$
Démontrer qu'il existe au moins un réel c compris entre 0 et 1 tel que $f(c) = 4$.

Sur le modèle de l'exercice résolu 10

12 Démontrer que l'équation :
$$x^3 - x = 2x^2 - 1.$$
admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.
Conseil : s'aider de la calculatrice.

Exercices
- 13 à 18 (ci-contre)
- 51 à 57

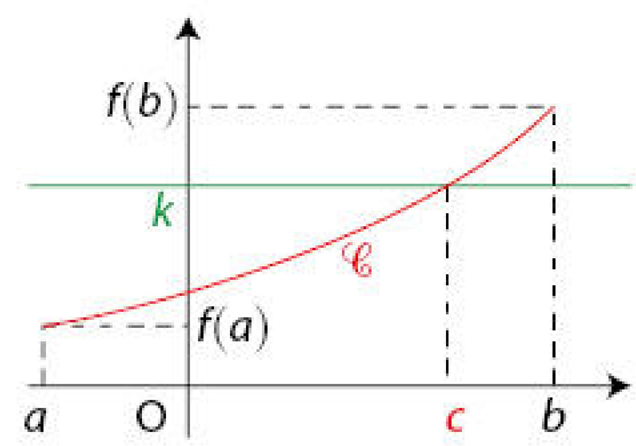
Vidéo JAICOMPRIS.COM
Cette notion est présentée en vidéo

4 Fonctions continues et strictement monotones

A Localisation d'une solution d'une équation dans un intervalle

Propriété

Si f est une fonction **continue** et **strictement monotone** sur un intervalle $[a\,;b]$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet **une unique solution** dans l'intervalle $[a\,;b]$.



Démonstration

Cas où f est continue et **strictement croissante** sur l'intervalle $[a\,;b]$.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins un réel c de l'intervalle $[a\,;b]$ tel que $f(c) = k$.
f est strictement croissante sur l'intervalle $[a\,;b]$ donc,
- si x est un réel de $[a\,;b]$ tel que $x < c$, alors $f(x) < f(c)$, c'est-à-dire $f(x) < k$,
- si x est un réel de $[a\,;b]$ tel que $x > c$, alors $f(x) > f(c)$, c'est-à-dire $f(x) > k$.

Donc, c est l'unique réel de l'intervalle $[a\,;b]$ solution de l'équation $f(x) = k$.

x	a	c	b
$f(x)$	$f(a)$ ↗	k	↗ $f(b)$

Remarque : on démontre cette propriété de façon analogue lorsque f est strictement décroissante sur l'intervalle $[a\,;b]$.

Exemple

L'équation $e^x = 2$ a une unique solution dans l'intervalle $I = [0\,;1]$. En effet :
- la fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur l'intervalle I,
- 2 est compris entre e^0 $(= 1)$ et e^1 $(\approx 2{,}718)$.

x	0	c	1
e^x	1 ↗	2	↗ e

Conséquence

Si f est une fonction **continue** et **strictement monotone** sur un intervalle $[a\,;b]$ et si $f(a) \times f(b) < 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet **une unique solution** dans l'intervalle $[a\,;b]$.

B Extensions à d'autres types d'intervalles

La propriété précédente admet diverses extensions dans le cas où la fonction est continue et strictement monotone sur un intervalle I ouvert ou semi-ouvert, borné ou non. Voici trois exemples.

- $I = [a\,;+\infty[$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

x	a	c	$+\infty$
$f(x)$	$f(a)$ ↗	k	↗ $+\infty$

Pour tout réel k tel que $k \geqslant f(a)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution c dans l'intervalle $[a\,;+\infty[$.

- $I = [a\,;b[$

$\lim\limits_{x \to b} f(x) = \ell$

x	a	c	b
$f(x)$	$f(a)$ ↗	k	↗ ℓ ‖

Pour tout réel k dans $[f(a)\,;\ell[$ l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution c dans l'intervalle $[a\,;b[$.

- $I =]-\infty\,;b[$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x \to b} f(x) = -\infty$

x	$-\infty$	c	b
$f(x)$	ℓ ↘	k	↘ $-\infty$ ‖

Pour tout réel k tel que $k < \ell$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution c dans l'intervalle $]-\infty\,;b[$.

EXERCICE RÉSOLU

13 Localiser une solution d'une équation

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 4x^2 + 4x$.

a) Étudier le sens de variation de la fonction *f*.

b) Étudier la limite de la fonction *f* en $+\infty$, puis en $-\infty$. Dresser le tableau de variations de *f*.

c) Démontrer que l'équation $f(x) = -1$ admet exactement trois solutions dans $\mathbb{R}$.

d) Avec la calculatrice, donner la valeur exacte ou l'arrondi au centième de chaque solution.

Solution

a) *f* est une fonction polynôme donc *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x, $f'(x) = 3x^2 + 8x + 4$.

$\Delta = 8^2 - 4 \times 3 \times 4 = 16$ donc les racines de f' sont $x_1 = \dfrac{-8+4}{6} = -\dfrac{2}{3}$ et $x_2 = \dfrac{-8-4}{6} = -2$.

Donc, $f'(x) \geqslant 0$ pour $x \leqslant -2$ ou pour $x \geqslant -\dfrac{2}{3}$ et $f'(x) \leqslant 0$ pour $-2 \leqslant x \leqslant -\dfrac{2}{3}$.

Ainsi, la fonction *f* est strictement croissante sur chacun des intervalles $]-\infty\,;-2]$ et $\left[-\dfrac{2}{3}\,;+\infty\right[$,
la fonction *f* est strictement décroissante sur l'intervalle $\left[-2\,;-\dfrac{2}{3}\right]$.

b) Pour tout réel $x \neq 0$, $f(x) = x^3\left(1 + \dfrac{4}{x} + \dfrac{4}{x^2}\right)$.

$\lim\limits_{x \to +\infty}\left(1 + \dfrac{4}{x} + \dfrac{4}{x^2}\right) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{x \to -\infty}\left(1 + \dfrac{4}{x} + \dfrac{4}{x^2}\right) = 1$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$

donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$. D'où le tableau de variations de la fonction *f*.

x	$-\infty$		-2		$-\dfrac{2}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗ -1	0	↘ -1	$-\dfrac{32}{27}$	↗ -1	$+\infty$

c) D'après le tableau de variations :

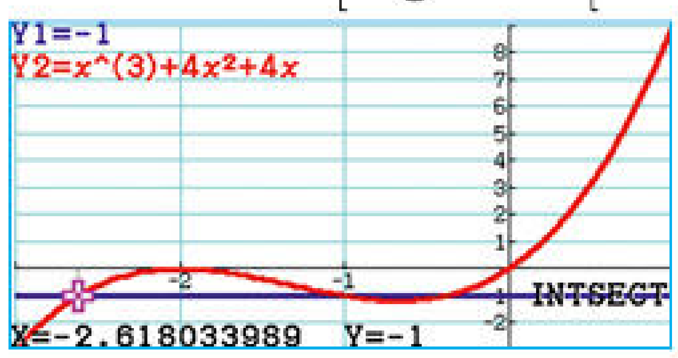
$-1 \in]-\infty\,;0]$ donc l'équation $f(x) = -1$ a une unique solution α dans l'intervalle $]-\infty\,;-2]$.

$-1 \in \left[-\dfrac{32}{27}\,;0\right]$ donc l'équation $f(x) = -1$ a une unique solution β dans l'intervalle $\left[-2\,;-\dfrac{2}{3}\right]$.

$-1 \in \left[-\dfrac{32}{27}\,;+\infty\right[$ donc l'équation $f(x) = -1$ a une unique solution γ dans l'intervalle $\left[-\dfrac{2}{3}\,;+\infty\right[$.

d) Avec la calculatrice (*fenêtre* : $-3 \leqslant X \leqslant 1$, pas 1 et $-3 \leqslant Y \leqslant 9$, pas 1), on obtient :

- $\alpha \approx -2{,}62$
- $\beta = -1$
- $\gamma \approx -0{,}38$



EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 13

14 *f* est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = x^3 - 3x + 1.$$
a) Dresser le tableau de variations de *f*.

b) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[0\,;1]$.

15 g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$g(x) = \mathrm{e}^x - (x+2).$$
a) Dresser le tableau de variations de g.

b) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$.

c) Avec la calculatrice, donner l'arrondi au millième de chaque solution.

Savoir-faire **Algo** python

Vidéo JAICOMPRIS.COM
Un autre exercice Algo/python résolu en vidéo

EXERCICE RÉSOLU

16 Utiliser un algorithme de dichotomie

Cours 4. B

L'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ admet une unique solution x_0 dans l'intervalle $[-1\,;1]$ (voir exercice **14**).

L'algorithme ci-contre permet d'obtenir une valeur approchée de x_0 à 10^{-n} près où n est un nombre entier naturel.

a) Exécuter cet algorithme pas à pas en complétant un tableau de valeurs lorsqu'on affecte au début la valeur -1 à la variable a, la valeur 1 à la variable b et la valeur 1 à la variable n. Interpréter la valeur de la variable m à la fin de l'exécution de l'algorithme.

b) Coder cet algorithme en langage Python.

Saisir et exécuter le programme obtenu avec $n = 4$ et interpréter le résultat renvoyé.

```
Tant que b − a > 10^(−n)
    m = (a + b)/2
    Si f(a) × f(m) < 0 alors
        b = m
    sinon
        a = m
    Fin Si
Fin Tant que
```

Solution

a)

a	-1	0	0	0,25	0,25	0,312 5
b	1	1	0,5	0,5	0,375	0,375
$b - a > 10^{-1}$	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Faux
m	0	0,5	0,25	0,375	0,312 5	
$f(a) \times f(m) < 0$	Faux	Vrai	Faux	Vrai	Faux	

Avec la calculatrice, on détermine les signes de $f(a)$ et $f(m)$.

Lorsqu'à la dernière étape, $b - a \leqslant 10^{-1}$ (ici, $0{,}375 - 0{,}312\,5 = 0{,}062\,5$) l'algorithme renvoie la valeur de m obtenue à l'étape précédente. Donc, ici l'algorithme renvoie $m = $ **0,312 5**.

Cela signifie qu'une valeur approchée de x_0 à 10^{-1} près est 0,312 5.

b)

```python
def f(x):
    y=x**3-3*x+1
    return y

def Dichotomie(n):
    a=-1
    b=1
    while b-a>10**(-n):
        m=(a+b)/2
        if f(a)*f(m)<0:
            b=m
        else:
            a=m
    return m
```

Le résultat, renvoyé ci-contre par le programme, fournit une valeur approchée au dix-millième près de x_0.

```
>>> Dichotomie(4)
0.34735107421875
```

Le mot « dichotomie » provient du grec *dikhotomia* qui signifie « division en deux parties ».
L'algorithme de dichotomie consiste à répéter le partage en deux d'un intervalle à l'aide de son centre puis à sélectionner celui des deux « demi-intervalles » dans lequel est localisée la solution x_0.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 16

17 Adapter, puis exécuter le programme Python de l'exercice **16** pour déterminer une valeur approchée à 10^{-6} près de l'unique solution de l'équation $e^x - x - 2 = 0$ dans l'intervalle $[0\,;2]$.

18 **(E)** est l'équation $3x^3 - x^2 - 3 = 0$.

a) Démontrer que cette équation **(E)** a une unique solution x_0 dans $\mathbb{R}$, puis que $1 < x_0 < 2$.

b) Utiliser un programme de dichotomie pour donner une valeur approchée à 10^{-3} près de x_0.

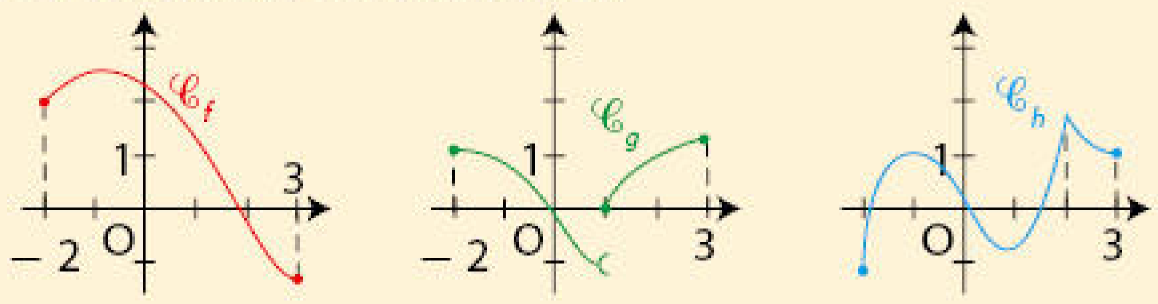
Langage de la continuité

Cours 1

Questions flash — À l'oral

19 Maryna affirme : « La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue en 0. »
Expliquer oralement l'erreur de Maryna.

20 Dans un repère, $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$, $\mathscr{C}_h$ sont les courbes respectives des fonctions f, g, h sur l'intervalle $[-2\,;3]$.
Décrire oralement la continuité de chacune de ces fonctions sur cet intervalle.



21 Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse. Expliquer.

a) La fonction $x \mapsto x^3 - x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$.

b) La fonction $x \mapsto e^x$ est continue sur $[0\,;1]$.

c) La fonction racine carrée est continue sur $\mathbb{R}$.

d) La fonction $x \mapsto \dfrac{x}{x-1}$ est continue sur $[0\,;2]$.

22 La **fonction de Heaviside**, notée H, du nom d'un physicien anglais (1850-1925) est couramment utilisée en automatisme.

Pour tout réel x, $\mathrm{H}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$.

a) Dans un repère, tracer la courbe représentative de la fonction H.

b) Sur quels intervalles, les plus grands possibles, la fonction H est-elle continue ?

23 La **fonction porte**, notée Π, est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\Pi(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < -\dfrac{1}{2} \text{ ou } x > \dfrac{1}{2} \\ 1 \text{ si } -\dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

a) Dans un repère, tracer la courbe de la fonction Π.

b) Sur quels intervalles, les plus grands possibles, la fonction Π est-elle continue ?

24 Une médiathèque a fixé ses tarifs annuels en fonction de l'âge de ses adhérents.

Âge (en année)	< 7	$[7\,;18[$	$[18\,;25[$	$[25\,;65[$	$\geqslant 65$
Tarif (en euro)	0	5	10	20	15

Ce tableau définit une fonction T qui à tout âge associe le tarif annuel payé à cet âge-là.

a) Dans un repère, tracer la courbe de cette fonction T.

b) Étudier graphiquement la continuité de la fonction T sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

25 La partie entière d'un nombre réel x, notée $\mathrm{E}(x)$, est l'unique entier relatif n tel que :

$$n \leqslant x < n+1.$$

1. Déterminer :

a) $\mathrm{E}(2{,}6)$ **b)** $\mathrm{E}(0{,}3)$ **c)** $\mathrm{E}(4)$ **d)** $\mathrm{E}(-1{,}2)$

2. Déterminer $\mathrm{E}(x)$ pour tout réel x de l'intervalle :

a) $[0\,;1[$ **b)** $[1\,;2[$ **c)** $[-1\,;0[$ **d)** $[-2\,;-1[$

3. a) Dans un repère, tracer la courbe représentative de la fonction E sur l'intervalle $[-5\,;5[$.

b) Étudier graphiquement la continuité de la fonction E sur l'intervalle $[-5\,;5[$.

c) De façon plus générale, en quels nombres réels la fonction E est-elle discontinue ?

26 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 - 2x & \text{si } x \geqslant 2 \\ e^{x-2} - 4 & \text{si } x < 2 \end{cases}.$$

a) Expliquer pourquoi la fonction f est continue sur l'intervalle $]2\,;+\infty[$, puis sur l'intervalle $]-\infty\,;2[$.

b) Expliquer pourquoi :

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} f(x) = -3 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} f(x) = -3.$$

Que peut-on en déduire pour la fonction f ?

c) Conclure pour la continuité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

27 g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \begin{cases} 2 + x & \text{si } x < -1 \\ x^2 - x & \text{si } x \geqslant -1 \end{cases}.$$

a) Expliquer pourquoi la fonction g est continue sur l'intervalle $]-\infty\,;-1[$, puis sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$.

b) Expliquer pourquoi :

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} g(x) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} g(x) = 2.$$

Que peut-on en déduire pour la fonction g ?

c) Conclure pour la continuité de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

28 **Algo** python

Voici une fonction écrite en langage Python.

```
from math import *

def F(x):
    if x<0:
        y=exp(x)
    else:
        if x<=1:
            y=x**2
        else:
            y=2*x-1
    return y
```

a) Déterminer l'image par la fonction F de chacun des nombres réels :

- 0
- -2
- 5
- 1
- 0,5

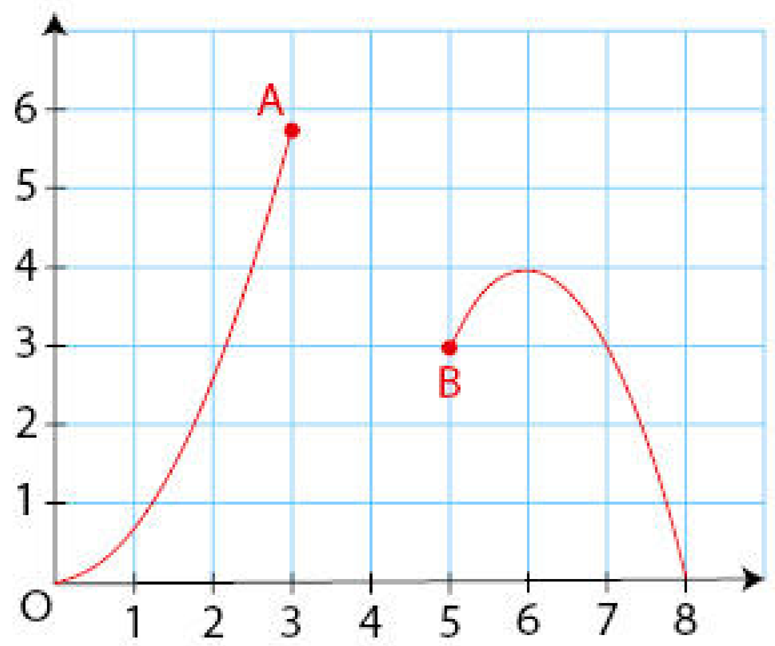
b) Recopier et compléter :

$$F(x) = \begin{cases} \dots \text{ si } x < \dots \\ \dots \text{ si } \dots \leqslant x \leqslant \dots \\ \dots \text{ si } x > \dots \end{cases}$$

c) La fonction F est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Expliquer.

d) Sur quels intervalles, les plus grands possibles, la fonction F est-elle continue ?

29 Un designer a dessiné une partie d'un logo dans le repère ci-dessous.



Ce logo est la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;8]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}64x^2 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 3 \\ ax+b & \text{si } 3 < x < 5\,. \\ 4-(x-6)^2 & \text{si } 5 \leqslant x \leqslant 8 \end{cases}$$

a) Déterminer les nombres réels a et b afin que la fonction f soit continue sur l'intervalle $[0\,;8]$.

b) Déterminer le nombre dérivé en 3 de la fonction polynôme $x \mapsto 0{,}64x^2$, puis de la fonction affine $x \mapsto -1{,}38x + 9{,}9$.

La fonction f est-elle dérivable en 3 ?

c) Étudier la dérivabilité de la fonction f en 5.

Fonctions continues et suites convergentes

Cours 2

Questions flash — À l'oral

30 (v_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$v_n = \sqrt{n^2+1}.$$

Expliciter une suite (u_n) et une fonction f telles que pour tout entier naturel n, $v_n = f(u_n)$.

31 (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \frac{1}{n^2} + 1.$$

f est la fonction exponentielle.

Expliquer oralement pourquoi la suite $f(u_n)$ est convergente et préciser sa limite.

32 (u_n) est la suite définie par $u_0 = -1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 1$.

On admet que cette suite converge vers un nombre réel ℓ.

Expliquer oralement pourquoi ℓ est solution de l'équation $x = \frac{1}{2}x - 1$. Déterminer ℓ.

Pour les exercices 33 à 35, expliquer pourquoi l'on peut définir l'image (v_n) de la suite (u_n) donnée par la fonction f donnée. Exprimer v_n en fonction de n.

33 Pour tout entier naturel n, $u_n = \pi n - \frac{\pi}{4}$.

f est la fonction sinus.

34 Pour tout entier naturel $n \geqslant 4$, $u_n = n - 4$.

f est la fonction racine carrée.

35 Pour tout entier naturel n, $u_n = 2n + 5$.

f est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

Pour les exercices 36 et 37, expliquer pourquoi la suite donnée est de la forme $(f(u_n))$ en précisant une suite (u_n) et une fonction f qui conviennent.

36 Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $v_n = e^{\frac{1}{n}+3}$.

37 Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$,

$$v_n = 1 + \sqrt{n^2-4}.$$

38 (v_n) est la suite définie pour tout entier naturel $n \geqslant 2$ par $v_n = \sqrt{\dfrac{n+1}{n-1}}$.

a) Proposer une suite (u_n) et une fonction f telles que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, $v_n = f(u_n)$.

b) Démontrer que la suite (v_n) est convergente et préciser sa limite.

39 (w_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$w_n = \cos\left(\frac{\pi n^2 - 1}{n^2 + 1}\right).$$

a) Proposer une suite (u_n) et une fonction f telles que pour tout entier naturel n, $w_n = f(u_n)$.

b) Démontrer que la suite (w_n) est convergente et préciser sa limite.

40 (u_n) est la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 4$.

a) Tabuler la suite (u_n) avec la calculatrice et conjecturer le comportement de cette suite.

b) Démontrer par récurrence que la suite (u_n) :
- est croissante ;
- est majorée par 8.

c) En déduire que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ.

d) Expliquer pourquoi ℓ est solution de l'équation $x = \dfrac{1}{2}x + 4$. Déterminer ℓ.

41 f est la fonction définie sur $\mathrm{I} = [1\,;2]$ par :

$$f(x) = 5 - \frac{16}{3+x}.$$

1. a) Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle I et dresser son tableau de variations.

b) Vérifier que pour tout réel x de I, $f(x) \in \mathrm{I}$.

2. (u_n) est la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Démontrer par récurrence que la suite (u_n) :
- est décroissante ;
- est minorée par 1.

b) En déduire que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ.

c) Expliquer pourquoi ℓ est solution dans I de l'équation $f(x) = x$. Déterminer ℓ.

42 (u_n) est la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n \mathrm{e}^{-u_n}$.

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n,

a) $u_n \in [0\,;1]$; **b)** $u_{n+1} \leqslant u_n$.

2. En déduire que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ. Déterminer ℓ en résolvant une équation.

Théorème des valeurs intermédiaires

Cours 3

Questions flash À l'oral

43 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 1.$$

Expliquer oralement pourquoi il existe au moins un réel c compris entre -2 et 1 tel que $f(c) = -0{,}5$.

44 Expliquer oralement pourquoi l'équation $\cos(x) = 0{,}7$ admet au moins une solution comprise entre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$.

45 Expliquer oralement pourquoi l'équation $x^3 - 4x - 1 = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[-2\,;3]$.

46 Dans chaque cas, démontrer que l'équation a au moins une solution dans l'intervalle $[0\,;1]$.

a) $x^3 - x^2 + 3x = 1$ **b)** $x^3 = 5x - 2$

c) $\dfrac{1}{(x+1)^2} = x + 0{,}5$ **d)** $x - \cos(x) = 0{,}25$

47 Démontrer que l'équation $\mathrm{e}^x = x + 2$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[-2\,;2]$.

48 Démontrer que l'équation $x\sin(x) = 1$ admet au moins une solution dans l'intervalle $\left[-\pi\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

49 f est la fonction définie sur l'intervalle $[-4\,;4]$ par :

$$f(x) = x^3 - 12x.$$

a) Justifier que la fonction f est continue sur l'intervalle $[-4\,;4]$.

b) Démontrer que pour tout réel k tel que $-16 \leqslant k \leqslant 16$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[-4\,;4]$.

50 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^4 - x^3 + x^2 - 5.$$

a) À l'aide de la calculatrice, déterminer deux nombres réels a et b tels que $f(a) \times f(b) < 0$.

b) Augustin affirme : « L'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$. »
A-t-il raison ? Expliquer.

Fonctions continues et strictement monotones

Cours 4

Questions flash — À l'oral

51 Voici le tableau de variations d'une fonction f continue sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f(x)$	-2	↗	3	↘	-1	↗	$\frac{1}{2}$

Manon affirme : « L'équation $f(x)=0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$. »
A-t-elle raison ? Expliquer oralement.

52 Jason affirme : « L'équation $x^3 = 10{,}25$ a une unique solution dans l'intervalle $[2\,;3]$. »
A-t-il raison ? Expliquer oralement.

53 Elias a tabulé ci-contre une fonction g avec sa calculatrice. Il affirme « L'équation $g(x)=0$ a une seule solution comprise entre 2,6 et 2,7. »
Quelles conditions doit vérifier la fonction g pour qu'Elias ait obligatoirement raison ?

X	Y1
2	19
2.1	16.888
2.2	14.544
2.3	11.956
2.4	9.112
2.5	6
2.6	2.608
2.7	-1.076
2.8	-5.064
2.9	-9.368
3	-14

54 **Résoudre par balayage**

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 3x + 1.$$

a) Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[-2\,;-1]$.

b) À l'aide de la calculatrice, tabuler la fonction f sur l'intervalle $[-2\,;-1]$ avec le pas 0,1.
En déduire un intervalle I de longueur 0,1 auquel α appartient.

c) Tabuler la fonction f sur l'intervalle I avec le pas 0,01 et en déduire un encadrement d'amplitude 0,01 de α.

d) Tabuler la fonction f sur un intervalle convenable avec le pas 0,001 et en déduire un encadrement d'amplitude 0,001 de α.

e) Poursuivre ce procédé afin d'obtenir un encadrement d'amplitude 10^{-6} de α.

55 Algo python

Algorithme de balayage

a) L'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[-2\,;-1]$ (voir exercice **54**).
Ce programme incomplet se propose d'obtenir par balayage un encadrement d'amplitude 10^{-n} (avec $n \in \mathbb{N}^*$) de α.

```
def f(x):
    y=
    return y

def Balayage(n):
    s=3
    while f(s)<=  :
        s=s+10**(-n)
    s=round(s,n)
    t=round(          ,n)
    return t,s
```

Compléter ce programme et le saisir. L'exécuter avec $n=6$ et interpréter les résultats obtenus.

b) g est la fonction exponentielle.
Adapter le programme précédent pour obtenir un encadrement d'amplitude 10^{-4} de l'unique solution de l'équation $g(x)=10$ dans l'intervalle $[2\,;3]$.

c) h est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = -x^3 + x + 2.$$

Afficher la courbe de h à l'écran de la calculatrice, puis adapter le programme du **a)** pour obtenir un encadrement d'amplitude 10^{-5} de l'unique solution de l'équation $h(x)=0$ dans l'intervalle $[1\,;2]$.

56 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

a) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

b) Démontrer que l'équation $f(x)=2$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

c) Expliquer pourquoi $1 < \alpha < 2$.

d) Avec le menu G-Solv (ou calculs ou …) de la calculatrice, déterminer l'arrondi au centième de α.

57 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x.$$

Voici le tableau de variations de la fonction f.

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-19	↗	13	↘	8	↗	$+\infty$

a) Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet deux solutions α et β dans $\mathbb{R}$ avec $\alpha < \beta$.

b) Donner la valeur exacte de β et un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α à l'aide de la calculatrice.

58 QCM Dans chaque cas, donner la réponse exacte sans justifier.

		A	B	C	D
1	Une fonction continue sur $\mathbb{R}$ est …	$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \dfrac{e^x}{x^2+1}$	$x \mapsto \dfrac{e^x}{x-2}$	$x \mapsto \dfrac{1}{x}$
2	Pour tout entier naturel n, $u_n = n^2 + 1$. Pour tout réel x, $f(x) = \cos(x)$. Alors, pour tout n, $f(u_n)$ est égal à …	$\cos^2(n) + 1$	$\cos(n^2) + 1$	$\cos^2(n^2 + 1)$	$\cos(n^2 + 1)$
3	La suite définie pour tout entier naturel $n > 1$ par $u_n = \sqrt{\dfrac{n+3}{n-1}}$ …	diverge vers $+\infty$	converge vers 0	n'a pas de limite	converge vers 1
4	f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que $f(-1) = 2$ et $f(2) = 5$. Alors, il est certain que l'équation $f(x) = 4$ …	n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$	a au moins une solution dans l'intervalle $]-1\,;2[$	a une unique solution dans l'intervalle $]-1\,;2[$	a au moins une solution dans l'intervalle $]2\,;5[$
5	D'après ce tableau de variations, dans $]-\infty\,;4[$, l'équation $f(x) = -1$ … $\begin{array}{c\|ccccc} x & -\infty & & 0 & & 4 \\ \hline f(x) & -2 & \nearrow & 2{,}7 & \searrow & -\infty \end{array}$	n'a pas de solution	a une unique solution	a exactement deux solutions	a exactement trois solutions

59 QCM Dans chaque cas, donner la (ou les) réponse(s) exacte(s) sans justifier.

		A	B	C	D
1	Pour qu'une fonction f définie sur un intervalle I soit continue en un nombre réel a, il est nécessaire que …	$a \in \mathrm{I}$	f admette une limite en a	$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a$	$\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$
2	La fonction inverse est continue sur l'intervalle …	$]-\infty\,;1]$	$[-1\,;2]$	$[10\,;100]$	$]0\,;+\infty[$
3	La suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{1+u_n}$, est convergente. Sa limite est …	$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$	0,6	$\dfrac{-(\sqrt{5}+1)}{2}$	0,618 03

60 Vrai/Faux Dans chaque cas, dire si l'affirmation est vraie ou fausse en justifiant.

Voici le tableau de variations d'une fonction f continue sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{array}{c|ccccccc} x & -\infty & & -7 & & 10 & & +\infty \\ \hline f(x) & +\infty & \searrow & -1 & \nearrow & 30 & \searrow & 0 \end{array}$$

1 **Affirmation :** l'équation $f(x) = k$ admet exactement deux solutions négatives pour tout réel k de l'intervalle $[-1\,;0]$.

2 **Affirmation :** l'équation $f(x) = k$ admet exactement trois solutions pour tout réel k de $]0\,;30]$.

3 **Affirmation :** l'équation $f(x) = k$ admet une seule solution pour tout réel $k > 30$.

Vérifiez vos réponses : p. 529

61 Suivre un guide pour rédiger une démonstration

On a admis en cours au paragraphe **1. A** la propriété suivante :

> f est une fonction définie sur un intervalle I et a est un nombre réel de I.
> **Si** f est dérivable en a, **alors** f est continue en a.

Rédiger la démonstration de cette propriété en suivant le guide ci-dessous.

(1) Préciser l'hypothèse : f est **...** en a.

(2) Traduire l'hypothèse à l'aide d'une définition : $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ldots.$

(3) Tirer des conséquences : pour tout réel x de I avec $x \neq a$, on pose :

$$\varphi(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a).$$

Alors $f(x) - f(a) = \ldots$ avec $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = \ldots.$

(4) Conclure : expliquer pourquoi alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ et rédiger une phrase de conclusion.

62 Comprendre les rôles d'une implication et de sa contraposée

1. La propriété admise au paragraphe **2. B** peut s'énoncer de la façon suivante :

> f est une fonction définie sur un intervalle I et ℓ est un nombre réel de I.
> **Si** la fonction f est continue en ℓ,
> **alors** pour toute suite (u_n) qui prend ses valeurs dans I et qui **converge** vers ℓ, la **suite** $(\boldsymbol{f(u_n)})$ **converge vers** $\boldsymbol{f(\ell)}$.

Énoncer **la contraposée** de cette propriété.

2. Problème 1 : (v_n) est la suite définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par :

$$v_n = \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{3}{n^2}\right).$$

a) Entre la propriété rappelée ci-dessus et sa contraposée, laquelle est la mieux adaptée pour étudier la convergence de la suite (v_n) ?

b) Conclure sur la convergence de la suite (v_n) en rédigeant la réponse.

3. Problème 2 : on se propose de démontrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$ n'est pas continue en 0.

a) Entre la propriété rappelée ci-dessus et sa contraposée, laquelle est la mieux adaptée pour résoudre ce problème ?

b) Considérer la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par $u_n = \dfrac{1}{n}$ et rédiger la démonstration.

P et Q désignent des propositions.
La contraposée de l'implication « Si P, alors Q » est l'implication « Si (non Q), alors (non P) ».
Une implication et sa contraposée sont équivalentes (toutes les deux vraies ou toutes les deux fausses), mais elles n'ont pas le même rôle dans une démonstration.

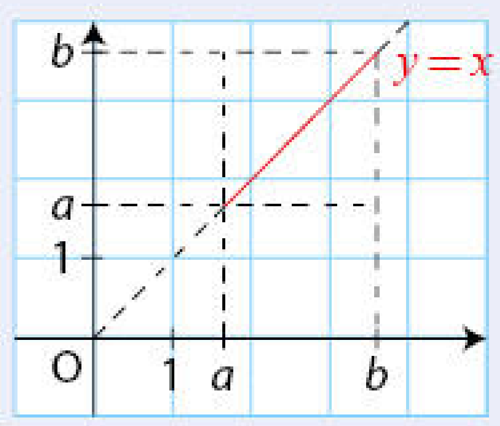
63 Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires dans une démonstration

f est une fonction définie et continue sur un intervalle $[a\,;b]$ et à valeurs dans l'intervalle $[a\,;b]$.

a) Semble-t-il possible de tracer la courbe d'une telle fonction f dans un repère orthonormé sans couper le segment d'équation $y = x$ avec $a \leqslant x \leqslant b$?

b) Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[a\,;b]$.

c) Énoncer le théorème ainsi démontré (il s'agit d'un **théorème du point fixe**).



Conseil
Considérer la fonction g définie sur l'intervalle $[a\,;b]$ par $g(x) = x - f(x)$.

Étudier la continuité

64 **PARCOURS DIFFÉRENCIÉS**

Parcours 1

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{|x|}{x} \text{ si } x \neq 0 \quad \text{et} \quad f(x) = 0 \text{ si } x = 0.$$

Étudier la continuité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Parcours 2

g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} g(x) = x - 1 & \text{si } x < 0 \\ g(0) = 0 & \\ g(x) = -x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

a) Expliquer pourquoi g est continue sur chacun des intervalles $]-\infty\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$.

b) Déterminer les limites de g en 0 par valeurs inférieures et par valeurs supérieures.

La fonction g est-elle continue en 0 ?

c) Conclure l'étude de la continuité de g sur $\mathbb{R}$ par une phrase.

65 g est la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} \text{ si } x > 0 \quad \text{et} \quad g(0) = \frac{1}{2}.$$

a) Expliquer pourquoi pour tout réel $x > 0$,

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x} + 1}.$$

b) Étudier alors la continuité de g sur $[0\,;+\infty[$.

66 h est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = \frac{x^3 + 1}{x + 1} \text{ si } x \neq -1 \quad \text{et} \quad h(-1) = 1.$$

a) Expliquer pourquoi pour tout réel $x \neq -1$,

$$h(x) = x^2 - x + 1.$$

b) Étudier alors la continuité de la fonction h sur $\mathbb{R}$.

67 k est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$k(x) = \begin{cases} x^2 - 3x & \text{si } x \leqslant -1 \\ ax + b & \text{si } -1 < x < 3 \text{ avec } a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}. \\ x^3 - 1 & \text{si } x \geqslant 3 \end{cases}$$

Déterminer a et b pour que la fonction k soit continue sur $\mathbb{R}$.

68 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x < 2 \\ x^2 - 8 & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases}.$$

1. a) Afficher, à l'écran de la calculatrice, la courbe représentative de la fonction f.

- **TI** : f(x) math sélectionner avec les flèches **B↓parmorceaux(** entrer
Renseigner la boîte de dialogue avec le nombre de « morceaux » de la fonction, puis OK.
Saisir la fonction (<, ⩾, … sont dans tests).
- **Casio** : saisir **Y1≡-x², [-10,2]** [—] puis EXE
Saisir l'autre « morceau » dans Y2.
- **NumWorks** : *à ce jour, ne trace pas les fonctions définies par morceaux.*

b) Conjecturer :
- la continuité de f en 2,
- la dérivabilité de f en 2.

2. Démontrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

3. a) Justifier que la fonction f est dérivable :
- sur $]-\infty\,;2[$,
- sur $]2\,;+\infty[$.

b) g et h sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = -x^2 \quad \text{et} \quad h(x) = x^2 - 8.$$

- Déterminer $g'(2)$ et $h'(2)$.
- En déduire que la courbe représentative de f n'admet pas une tangente au point d'abscisse 2.
- Conclure sur la dérivabilité de la fonction f en 2.

Étudier une suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$

69 **PARCOURS DIFFÉRENCIÉS**

Parcours 1

(u_n) est la suite définie par $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 1$.

Démontrer que la suite (u_n) est décroissante et minorée par 1, puis étudier sa limite.

Parcours 2

(v_n) est la suite définie par $v_0 = -3$ et pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 0{,}5v_n - 1$.

a) Déterminer une fonction f telle que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = f(v_n)$.

b) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant -2$.

c) En déduire que (v_n) converge vers un réel ℓ.

Déterminer ℓ en résolvant une équation.

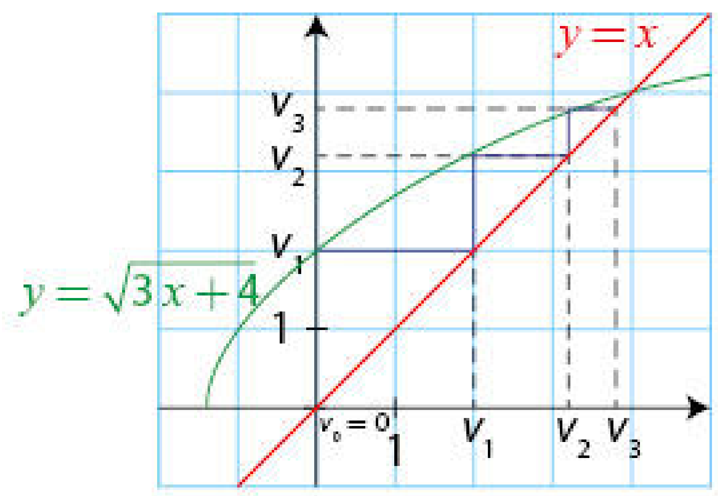
Vidéo

JaiCompris.com — Cet exercice est corrigé en vidéo

70 (v_n) est la suite définie par $v_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = \sqrt{3v_n + 4}$.

1. a) Déterminer une fonction f définie sur l'intervalle $\left[-\frac{4}{3}\,;+\infty\right[$ telle que pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_{n+1} = f(v_n)$.

b) Dans ce repère orthonormé, voici la courbe de la fonction f et la droite d'équation $y = x$.



Observer ce graphique et expliquer comment représenter v_1, v_2, v_3 sur l'axe des abscisses.

2. a) Imaginer poursuivre ces constructions et conjecturer le sens de variation et un majorant de la suite (v_n).

b) Démontrer par récurrence les deux conjectures émises à la question **2. a)**.

3. En déduire que la suite (v_n) est convergente et déterminer algébriquement sa limite ℓ.

71 Algo python

f est la fonction définie sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^2}{2x-1}.$$

1. a) Dresser le tableau de variations de f.

b) En déduire que pour tout réel $x \geqslant 1$, $f(x) \geqslant 1$.

2. (u_n) est la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Démontrer que (u_n) est décroissante et minorée.

b) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer algébriquement sa limite ℓ.

3. a) Au début de cet algorithme, on affecte 2 à la variable U, 0 à N et un entier naturel à p.

```
Tant que U − 1 > 10^(−p)
    U ← f(U)
    N ← N + 1
Fin Tant que
```

Il renvoie les valeurs de N et U en fin d'exécution. Quel est son rôle ?

b) Coder cet algorithme en langage Python, saisir le programme, puis l'exécuter pour $p = 6$.
Interpréter le résultat obtenu.

72 (w_n) est la suite définie par $w_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $w_{n+1} = 0{,}3w_n - 2$.

1. a) Afficher la représentation graphique de la suite (w_n) à l'écran de la calculatrice (*fenêtre :* $-4 \leqslant X \leqslant 1$, pas 1 et $-4 \leqslant Y \leqslant 1$, pas 1).

Conseil : si besoin, voir exercice **56** p. 214.

b) Conjecturer son sens de variation et un minorant.

2. a) Démontrer les deux conjectures émises à la question **1. b)**.

b) En déduire que la suite (w_n) converge vers un réel ℓ.

c) Expliquer pourquoi ℓ est solution de l'équation $x = 0{,}3x - 2$. Déterminer ℓ.

73 (a_n) est la suite définie par $a_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1 + a_n^2}$.

a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n$.

b) En déduire que (a_n) converge et déterminer sa limite.

Localiser des solutions d'équations

74 PARCOURS DIFFÉRENCIÉS

Parcours 1

(E) est l'équation $\dfrac{x^3}{x+1} = 5$ avec $x \in \,]-1\,;+\infty[$.

Démontrer que l'équation **(E)** admet une unique solution α dans l'intervalle $]-1\,;+\infty[$.

Parcours 2

(F) est l'équation $x^3 - 2x^2 + x = 3$ avec $x \in \mathbb{R}$.

1. g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = x^3 - 2x^2 + x.$$

a) Étudier les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

b) Étudier la limite de g en $+\infty$, puis en $-\infty$.

Conseil : mettre x^3 en facteur dans l'expression de $g(x)$.

c) Dresser le tableau de variations de g.

2. a) Expliquer pourquoi l'équation **(F)** n'a pas de solution dans l'intervalle $\left]-\infty\,;\frac{4}{3}\right]$.

b) Expliquer pourquoi l'équation **(F)** a une unique solution α dans l'intervalle $\left[\frac{4}{3}\,;+\infty\right[$.

c) Avec le menu **G-Solv** (ou **calculs** ou …) de la calculatrice, déterminer l'arrondi au centième de α.

75 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 4x^3 - 12x^2 + 4.$$

a) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet trois solutions α, β, γ dans $\mathbb{R}$ avec $\alpha < \beta < \gamma$.

b) Expliquer pourquoi :

- $-1 < \alpha < 0$
- $0 < \beta < 1$
- $2 < \gamma < 3$

c) Utiliser la calculatrice pour déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de chaque solution.

76 Algo python

g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \sqrt{1 + e^x}.$$

1. a) Démontrer que l'équation $g(x) = 7$ admet une unique solution x_0 dans $\mathbb{R}$.

b) Expliquer pourquoi $0 < x_0 < 5$.

2. Voici un programme écrit en langage Python.

À la ligne 7, la fonction **round** renvoie l'arrondi du nombre avec p chiffres après la virgule.

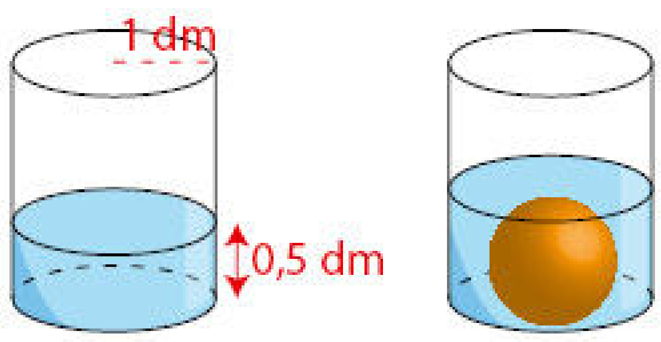
```
1 from math import *
2 
3 p=int(input("p ="))
4 a=0
5 while sqrt(1+exp(a))<7:
6     a=a+10**(-p)
7 a=round(a,p)
8 print(a)
```

a) Expliquer le rôle de ce programme.

b) Saisir ce programme et l'exécuter avec $p = 6$. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-6} de x_0.

77 Un vase cylindrique de base un disque de rayon 1 dm, contient de l'eau sur une hauteur de 0,5 dm.

On plonge une bille de diamètre d dm dans ce cylindre et on constate que le niveau de l'eau est tangent à la bille.



1. a) Exprimer en fonction de d le volume, en dm^3 :

- d'eau versé initialement,
- de la bille.

b) Exprimer de deux façons différentes le volume du cylindre de hauteur d contenu dans le vase après avoir plongé la bille.

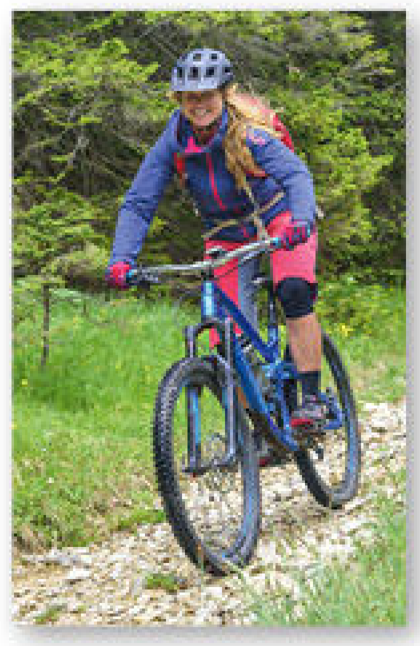
c) En déduire que d vérifie $0 < d < 2$ et :

$$d^3 - 6d + 3 = 0.$$

2. a) Démontrer que l'équation $x^3 - 6x + 3 = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $]0\,;2[$.

b) À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} du diamètre d de la bille.

78 Algo python



Une randonneuse roule à vélo dans une descente rectiligne et très longue.

Sa vitesse, en m.s^{-1}, à l'instant t, en s, est donnée sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$v(t) = 30\left(1 - e^{-\frac{t}{10}}\right).$$

On considère que la vitesse de la randonneuse est stabilisée lorsque son accélération est inférieure à 0,1 m.s^{-2}.

a) Démontrer qu'il existe un instant t_0 à partir duquel la vitesse de la randonneuse est stabilisée.

L'accélération de la randonneuse à l'instant t est $v'(t)$.

b) Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous afin qu'en affectant la valeur 0 à la variable t au début, il renvoie une valeur approchée de t_0 au dixième de seconde près.

Tant que ... > ...
  $t \leftarrow$ ...
Fin Tant que

c) Coder cet algorithme en langage Python, saisir le programme et l'exécuter. Interpréter le résultat.

S'entraîner à la logique

→ p. 525

79 Conjonction et négation

f est une fonction définie sur un intervalle I et a est un nombre réel de I.

Dans chaque cas, dire s'il existe une fonction f pour laquelle la proposition est vraie. Si oui, donner un exemple à l'aide d'un graphique, si non, justifier à l'aide d'une propriété énoncée en cours.

a) f est continue en a et dérivable en a.

b) f est continue en a et non dérivable en a.

c) f est discontinue en a et non dérivable en a.

d) f est discontinue en a et dérivable en a.

80 Réciproque d'une implication

On sait que « Si une fonction f est continue sur un intervalle I, alors pour tous réels a et b de I avec $a < b$ et tout $k \in\,]f(a)\,;f(b)[$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution $c \in\,]a\,;b[$ ».

a) Énoncer la réciproque de cette implication.

b) Cette réciproque est fausse. En donner un contre-exemple graphique.

Pour les exercices 81 et 82, f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a\,;b]$ (avec a et b nombres réels) telle que $f(a) \times f(b) < 0$. Donc, d'après la conséquence énoncée p. 298, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[a\,;b]$.

81 MÉTHODE DE LA SÉCANTE

Algo python

Objectif
Présenter un procédé algorithmique, la méthode de la sécante, qui permet d'obtenir des approximations de plus en plus proches de α.

Principe de la méthode

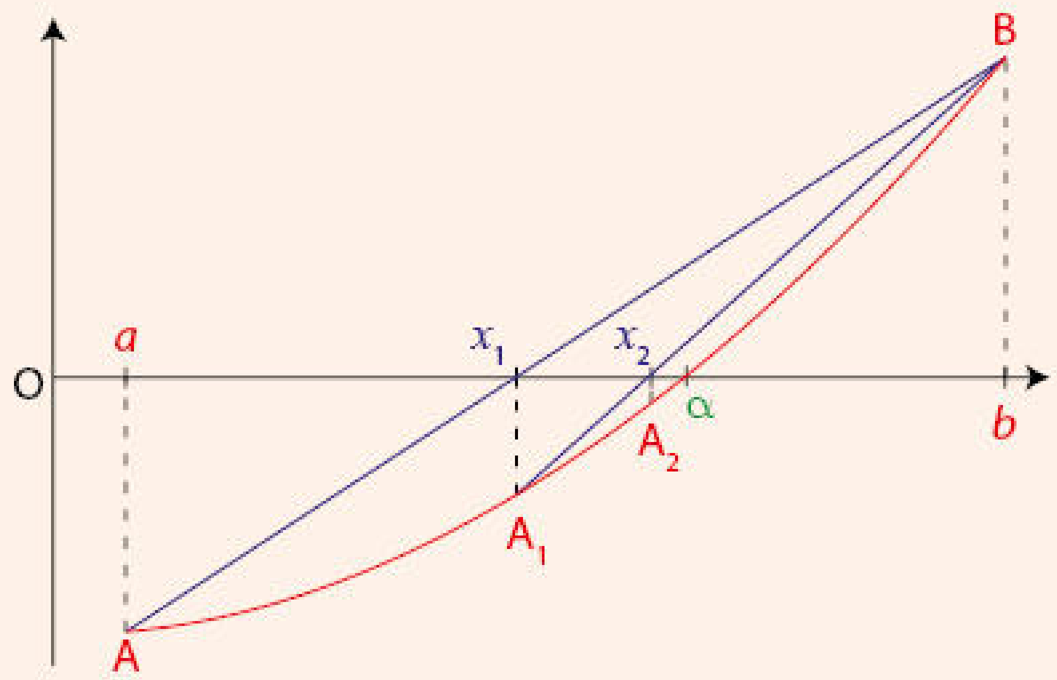
On suppose ici que **$f(a) < 0$, $f(b) > 0$ et f strictement croissante et convexe sur l'intervalle** $[a\,;b]$.

Dans le repère orthonormé ci-contre, la courbe rouge représente la fonction f et $A(a\,;f(a))$, $B(b\,;f(b))$.

1$^{\text{re}}$ étape : on trace le segment $[AB]$, il coupe l'axe des abscisses en un point d'abscisse x_1.

2$^{\text{e}}$ étape : On trace le segment $[A_1B]$ où $A_1(x_1\,;f(x_1))$, il coupe l'axe des abscisses en un point d'abscisse x_2.

⋮



On note x_n l'abscisse du point A_n. On définit ainsi une suite (x_n) de réels de $[a\,;b]$ et on admet que pour tout entier naturel n, $f(x_n) \leqslant 0$.

1. Relation entre x_{n+1} et x_n

a) Justifier qu'une équation de la droite (A_nB) est $y = (x - x_n)\dfrac{f(b) - f(x_n)}{b - x_n} + f(x_n)$.

b) En déterminant le point d'intersection de (A_nB) avec l'axe des abscisses, justifier que

$$x_{n+1} = x_n - \frac{b - x_n}{f(b) - f(x_n)} f(x_n).$$

2. Étude de la suite (x_n)

(x_n) est la suite définie par $x_0 = a$ et pour tout entier naturel n, $x_{n+1} = x_n - \dfrac{b - x_n}{f(b) - f(x_n)} f(x_n)$.

a) Démontrer que la suite (x_n) est croissante et majorée.

b) En déduire que la suite (x_n) est convergente et déterminer algébriquement sa limite.

3. Un programme en langage Python

Voici un programme incomplet écrit en langage Python qui met en œuvre la suite (x_n) définie ci-dessus.

On choisit $|f(x_n)| \leqslant 10^{-p}$ pour critère d'arrêt où p désigne un entier naturel non nul donné.

```
def f(x):
    y=
    return y

def Secante(a,b,p):
    X=
    n=0
    while abs(f(X))>10**(-p):
        X=
        n=n+1
    return n,X
```

a) Indiquer les expressions cachées par les deux cadres verts.

b) f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x - 1$.

Vérifier que f est strictement croissante et convexe sur $[0\,;1]$ et que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0\,;1]$.

c) Saisir le programme pour cette fonction f et l'exécuter avec $p = 6$.

4. Complément

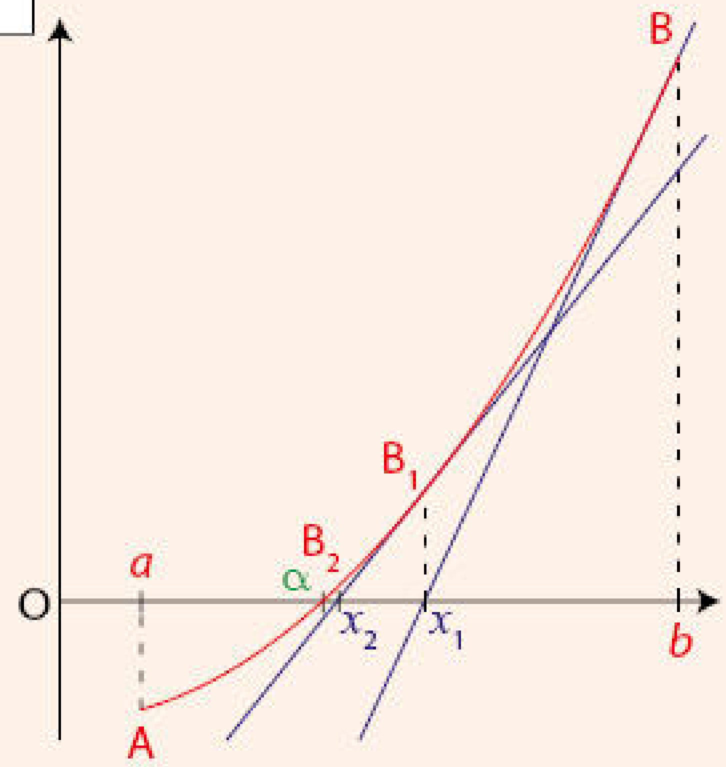
Adapter la suite (x_n) dans le cas où : $f(a) > 0$, $f(b) < 0$, f strictement décroissante et convexe sur $[a\,;b]$.

82 MÉTHODE DE NEWTON

Algo python

Objectif
Présenter un procédé algorithmique, la méthode de Newton, qui permet d'obtenir des approximations de plus en plus proches de α.

Principe de la méthode
On suppose ici que **$f(a) < 0$, $f(b) > 0$, f dérivable, strictement croissante et convexe sur l'intervalle $[a\,;b]$ ainsi que $f'(\alpha) \neq 0$.**
Dans le repère orthonormé ci-contre, la courbe rouge représente la fonction f et $\mathrm{A}(a\,;f(a))$, $\mathrm{B}(b\,;f(b))$.



1re étape : on trace la tangente en B à la courbe, elle coupe l'axe des abscisses en un point d'abscisse x_1.
2e étape : on trace la tangente en $\mathrm{B}_1(x_1\,;f(x_1))$ à la courbe, elle coupe l'axe des abscisses en un point d'abscisse x_2. ⋮

⋮

On note x_n l'abscisse du point B_n. On définit ainsi une suite (x_n) de réels de $[a\,;b]$ et on admet que pour tout entier naturel n, $f(x_n) \leqslant 0$.

1. Relation entre x_{n+1} et x_n
On note x_n l'abscisse du point B_n.
a) Justifier qu'une équation de la tangente à la courbe en B_n est $y = f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n)$.
b) En déterminant le point d'intersection de la tangente en B_n avec l'axe des abscisses, justifier que $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

2. Étude de la suite (x_n)
(x_n) est la suite définie par $x_0 = b$ et pour tout entier naturel n, $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.
a) Démontrer que la suite (x_n) est décroissante et minorée.
b) En déduire que la suite (x_n) est convergente et déterminer algébriquement sa limite.

3. Un programme en langage Python
Voici un programme incomplet écrit en langage Python qui met en œuvre la suite (x_n) définie ci-dessus. On choisit $|f(x_n)| \leqslant 10^{-p}$ pour critère d'arrêt où p désigne un entier naturel non nul donné.

```
def f(x):
    y=
    return y

def df(x):
    y=
    return y

def Newton(a,b,p):
    X=b
    n=0
    while abs(f(X))>10**(-p):
        X=
        n=n+1
    return n,X
```

a) Indiquer l'expression cachée par le cadre vert.
b) f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x - 1$.
L'équation $f(x) = 0$ a une unique solution α dans l'intervalle $[0\,;1]$ (voir **81** question **3. b)**).
Saisir le programme pour cette fonction f et l'exécuter avec $p = 6$. Comparer éventuellement le nombre d'étapes nécessaires avec les méthodes de Newton et de la sécante.
La méthode de Newton converge, en général, plus rapidement que la méthode la sécante.

HISTOIRE DES MATHS

Cette méthode de Newton est présentée en 1736, après sa mort, dans son ouvrage *Method of Fluxions*.

Bien que Joseph Raphson ait déjà utilisé cette méthode en 1690, il semble que Newton ait écrit cet ouvrage en 1671.

Tous deux n'appliquent cette méthode qu'à des polynômes, c'est Thomas Simpson qui la généralise en 1740.

83 Étudier le signe d'une fonction

Narration de recherche

Chercher | Raisonner | Calculer

Rédiger les différentes étapes de la recherche, sans omettre les fausses pistes et les changements de méthode.

Problème

f est la fonction définie sur $[-10\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=(x+1)e^x-3.$$

Étudier le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.

84 Imaginer une stratégie

Chercher | Raisonner

Un polynôme P de degré n, avec $n\in\mathbb{N}$ et $n\geqslant 1$, est défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots a_1x+a_0$$

où $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ désignent des nombres réels et $a_n\neq 0$.

Démontrer que pour tout polynôme P de degré impair, l'équation $P(x)=0$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.

Conseil : envisager les cas $a_n>0$ et $a_n<0$.

85 Study the evolution of a population

Raisonner | Calculer | Communiquer

Biologists estimate that the evolution of an animal population that settles in a new environment obeys the law:

$u_{n+1}=1{,}5u_n-0{,}01u_n^2$ where u_n is the population size in the year n.

It is assumed that the initial size is $u_0=40$.

a) f is the function defined on $[0\,;+\infty[$ by $f(x)=1{,}5x-0{,}01x^2$. Demonstrate that for every x in $[40\,;50]$, $f(x)$ also belongs to $[40\,;50]$.

b) Demonstrate that the sequence (u_n) is growing and increased.

c) Study the convergence of the sequence (u_n) and interpret its limit for the situation.

86 Imaginer une fonction

Problème ouvert

Chercher | Représenter | Raisonner

Proposer une fonction f continue en 0 telle que f' soit continue en 0 et f'' soit discontinue en 0.

87 Étudier un modèle de croissance

Modéliser | Calculer | Communiquer

Un cultivateur repique des plants de 10 cm de haut sous une serre. Ces plants pourront atteindre jusqu'à 1 m de haut.

On modélise cette situation par la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $f(t)=\dfrac{1}{Ce^{-at}+1}$ où t désigne la durée, en jour, et $f(t)$ la hauteur, en m, de la plante (a et C désignent des constantes).

1. Expliquer pourquoi $C=9$.

2. Le cultivateur observe qu'au bout de 15 jours, la plante mesure 19 cm de haut.

a) En déduire que $e^{-15a}=\dfrac{9}{19}$.

b) Démontrer que l'équation $e^{-15x}=\dfrac{9}{19}$ admet une unique solution dans l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

c) Avec la calculatrice, déterminer l'arrondi de a au centième. Par la suite, on prend cet arrondi pour a.

2. a) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

b) Le cultivateur souhaite savoir à partir de quel jour, la plante dépassera 90 cm de haut.

Démontrer que l'équation $f(t)=0{,}9$ admet une unique solution dans l'intervalle $[0\,;+\infty[$ et répondre au souhait du cultivateur.

La fonction f est une **fonction logistique**.
Ce type de fonction a été introduit vers 1840 par le mathématicien belge Pierre François Verhulst pour modéliser l'évolution d'une population.

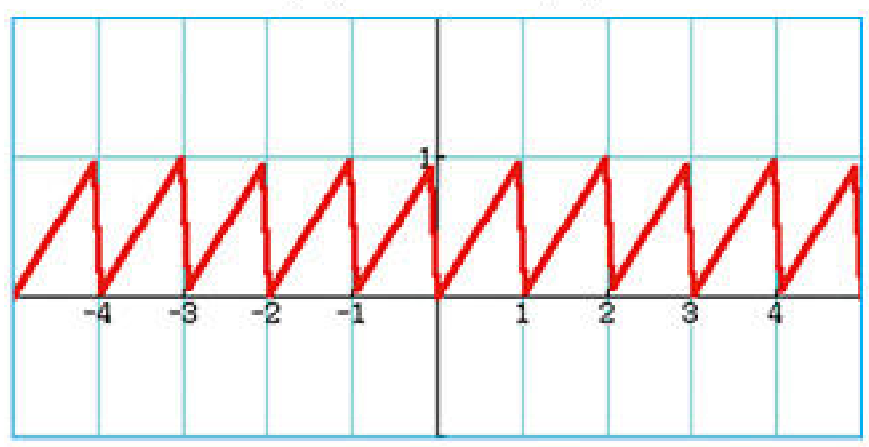
88 Prendre des initiatives

Représenter | Raisonner | Communiquer

La partie entière d'un réel x, notée $E(x)$, est l'unique entier relatif n tel que $n\leqslant x<n+1$.

Gabin a affiché ci-dessous, à l'écran de sa calculatrice, la courbe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=x-E(x).$$



a) Critiquer cette courbe.

b) Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

89 Étudier deux modélisations Algo

40 min

D'après Bac, Asie 2019

La loi de refroidissement de Newton stipule que le taux d'évolution de la température d'un corps est proportionnel à la différence entre la température de ce corps et celle du milieu ambiant.
Une tasse de café est servie à une température initiale de 80 °C dans un milieu dont la température exprimée en degré Celsius, supposée constante, est notée M.
Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Dans cette partie, pour tout entier naturel n, on note T_n la température du café à l'instant n, avec T_n exprimé en degré Celsius et n en minute. On a ainsi $T_0 = 80$.
On modélise la loi de Newton entre deux minutes consécutives quelconques n et $n+1$ par l'égalité $T_{n+1} - T_n = -0{,}2(T_n - 10)$.

1. D'après le contexte, peut-on conjecturer le sens de variation de la suite (T_n) ?

2. Montrer que pour tout entier naturel n, $T_{n+1} = 0{,}8T_n + 2$.

3. a) Démontrer que la suite (T_n) est décroissante et minorée.

b) En déduire que la suite (T_n) est convergente et déterminer sa limite.

4. On considère l'algorithme ci-contre.

```
Tant que T ⩾ 40
    T ← 0,8T + 2
    n ← n + 1
Fin Tant que
```

a) Au début, on affecte la valeur 80 à la variable T et la valeur 0 à la variable n. Quelle est la valeur de la variable n à la fin de l'exécution de l'algorithme ?

b) Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

Guide de résolution
3. a) Sens de variation : utiliser un raisonnement par récurrence.
Minorant : penser au signe de T_n qui exprime une température dans le milieu ambiant.

Partie B

Dans cette partie, pour tout réel t positif ou nul, on note $\theta(t)$ la température du café à l'instant t, avec $\theta(t)$ exprimé en degré Celsius et t en minute.
On a ainsi $\theta(0) = 80$.
Dans ce modèle, plus précis que celui de la **partie A**, on suppose que θ est une fonction dérivable sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ et que, pour tout réel t de cet intervalle, la loi de Newton se modélise par l'égalité :

$$\theta'(t) = -0{,}2(\theta(t) - M) \text{ où M est une constante réelle.}$$

1. Dans cette question, on choisit $M = 0$. On cherche alors une fonction θ dérivable sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ vérifiant $\theta(0) = 80$ et, pour tout réel t de cet intervalle : $\theta'(t) = -0{,}2\theta(t)$.

a) Si θ est une telle fonction, on pose pour tout t de l'intervalle $[0\,;+\infty[$, $f(t) = \dfrac{\theta(t)}{e^{-0{,}2t}}$. Montrer que la fonction f est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et que, pour tout réel t de cet intervalle, $f'(t) = 0$.

b) En conservant l'hypothèse du **a)**, calculer $f(0)$. En déduire, pour tout réel t de l'intervalle $[0\,;+\infty[$, une expression de $f(t)$, puis $\theta(t)$.

c) Vérifier que la fonction θ trouvée au **b)** est solution du problème.

2. Dans cette question, on choisit $M = 10$. On admet qu'il existe une unique fonction g dérivable sur $[0\,;+\infty[$, modélisant la température du café à tout instant positif t, et que pour tout t de l'intervalle $[0\,;+\infty[$, $g(t) = 10 + 70e^{-0{,}2t}$, où t est exprimé en minute et $g(t)$ en degré Celsius.
Une personne aime boire son café à 40 °C.
Montrer qu'il existe un unique réel t_0 dans $[0\,;+\infty[$ tel que $g(t_0) = 40$. Donner l'arrondi de t_0 à la seconde.

Guide de résolution
1. b) Une fonction f dont la dérivée est nulle sur $I = [0\,;+\infty[$ est une fonction constante. Pour tout réel t de I, $f(t) = f(0)$.
1. c) Vérifier que $\theta(0) = 80$ et, pour tout réel $t \geqslant 0$:
$\theta'(t) = -0{,}2\,\theta(t)$.

90 Relier les probabilités et les suites

40 min

D'après Bac, Métropole – La Réunion 2019

Une plateforme informatique propose deux types de jeux vidéo : un jeu de type A et un jeu de type B.

Partie A

On admet que, dès que le joueur achève une partie, la plateforme lui propose une nouvelle partie selon le modèle suivant :

– si le joueur achève une partie A, la plateforme lui propose de jouer à nouveau une partie de type A avec une probabilité de 0,8 ;

– si le joueur achève une partie B, la plateforme lui propose de jouer à nouveau une partie de type B avec une probabilité de 0,7.

Pour un entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note A_n et B_n les événements :

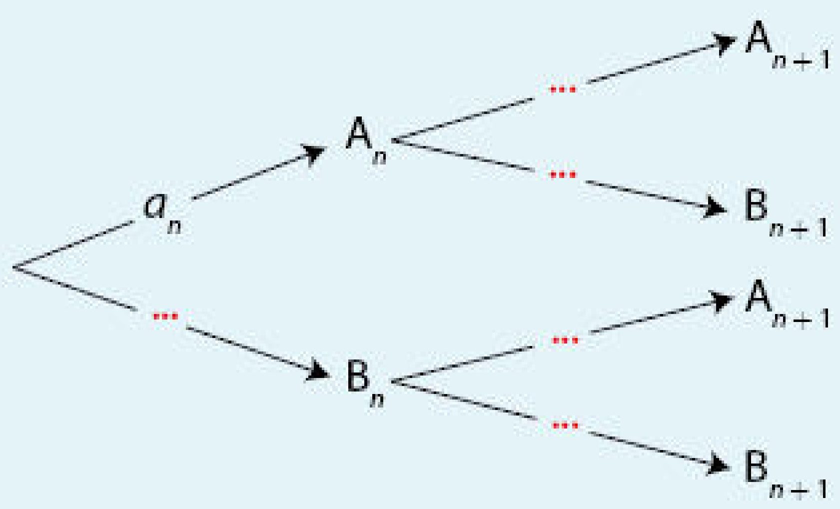
A_n : « La n-ième partie est une partie du type A. »

B_n : « La n-ième partie est une partie du type B. »

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note a_n la probabilité de l'événement A_n.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre.

2. Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $a_{n+1} = 0{,}5a_n + 0{,}3$.



> **Guide de résolution**
> **2.** Utiliser la formule des probabilités totales.

Partie B

Dans la suite de l'exercice, on note a la probabilité que le joueur joue au jeu A lors de sa première partie, où a est un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0\,;1]$. La suite (a_n) est donc définie par $a_1 = a$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

$$a_{n+1} = 0{,}5a_n + 0{,}3.$$

1. Étude d'un cas particulier

Dans cette question, on suppose que $a = 0{,}5$.

a) Démontrer par récurrence, que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $0 \leqslant a_n \leqslant 0{,}6$.

b) Montrer que la suite (a_n) est croissante.

c) Montrer que la suite (a_n) converge vers un réel ℓ.

d) Expliquer pourquoi ℓ est solution de l'équation $x = 0{,}5x + 0{,}3$.

Déterminer ℓ.

> **Guide de résolution**
> **1. b)** Étudier le signe de $a_{n+1} - a_n$.

2. Étude du cas général

Dans cette question, le réel a appartient à l'intervalle $[0\,;1]$.

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par $u_n = a_n - 0{,}6$.

a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique.

b) En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$a_n = (a - 0{,}6) \times 0{,}5^{n-1} + 0{,}6.$$

c) Déterminer la limite de la suite (a_n). Cette limite dépend-elle de la valeur de a ?

d) La plateforme insère une publicité en début de chacune des parties de type A et de type B.

Quelle devrait être la publicité la plus vue par un joueur s'adonnant intensivement aux jeux vidéo ?

> **Guide de résolution**
> **2. b)** Exprimer d'abord u_n en fonction de n.

> **Guide de résolution**
> **2. d)** Étudier la limite de la suite (a_n) et interpréter le résultat.

91 Étudier un taux d'alcoolémie Algo

30 min

D'après Bac, Polynésie 2016

Paul, étudiant de 19 ans, de corpulence moyenne et jeune conducteur, boit deux verres de rhum. La concentration C d'alcool dans son sang (taux d'alcoolémie), en $g \cdot L^{-1}$, est modélisée en fonction du temps t, exprimé en heure, par la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(t) = 2te^{-t}$.

1. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

2. À quel instant la concentration d'alcool dans le sang de Paul est-elle maximale ? Quelle est alors sa valeur ? *Arrondir au centième.*

3. Déterminer la limite de $f(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$. Interpréter le résultat.

4. Paul veut savoir au bout de combien de temps il peut prendre sa voiture (taux d'alcoolémie maximal de 0,2 $g \cdot L^{-1}$ pour un jeune conducteur).

a) Démontrer qu'il existe deux nombres réels t_1 et t_2 tels que $f(t_1) = f(t_2) = 0{,}2$.

b) Quelle durée minimale (en min) doit-il attendre avant de prendre le volant ?

5. a) La concentration minimale d'alcool détectable dans le sang est estimée à $5 \times 10^{-3}\ g \cdot L^{-1}$. Justifier qu'il existe un instant T à partir duquel l'alcool dans le sang n'est plus détectable.

b) Au début de l'algorithme ci-contre, on affecte 3,5 à t, 0,21 à C et on prend $p = 0{,}25$. Quelle est la valeur de la variable t à la fin de l'exécution de cet algorithme ? L'interpréter dans le contexte de l'exercice.

```
Tant que C > 5 × 10^(−3)
    t ← t + p
    C ← f(t)
Fin Tant que
```

Guide de résolution
1. Déterminer $f'(t)$ et étudier son signe.
2. Rappeler $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{e^t}{t}$ et en déduire la limite de $f(t)$.

Guide de résolution
4. a) Utiliser une extension de la propriété énoncée au § B p. 298.

Se préparer À L'ORAL

92 Présenter un exposé

a) Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires. Quelle est son utilité dans la résolution des équations ?

b) Exposer oralement ses réponses durant 10 min et proposer un exemple d'application.

93 Travailler l'oral en groupe

Résoudre cet exercice en petit groupe, puis en présenter les résultats à l'oral.

(u_n) est la suite à termes positifs définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 12}$.

1. a) Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 4$.

b) Démontrer que pour tout entier naturel n,

- $u_{n+1} - 4 \leqslant \dfrac{1}{4}(u_n - 4)$
- $0 \leqslant u_n - 4 \leqslant \dfrac{1}{4^n}$.

c) En déduire la convergence de (u_n) et sa limite.

2. Imaginer une autre méthode pour étudier la convergence de la suite (u_n).

94 Travailler les compétences orales

▶ **ANTICIPER LES QUESTIONS DU JURY**

1. Préparation de la restitution orale (5 min)
Par groupe de 4, résoudre l'exercice ci-dessous, chaque élève travaillant sur une des quatre propositions.

2. Jeu de rôles (30 min)
Chaque élève présente son résultat à l'oral (2 min), pendant que les trois autres composent le jury. Chaque juré pose une question au candidat (5 min).

Énoncé : f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 3 & \text{si } x \leqslant 1 \\ \dfrac{x-5}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}.$$

Répondre par Vrai ou Faux en justifiant.

a) f est continue sur $\mathbb{R}$.

b) L'équation $f(x) = 0$ admet exactement 3 solutions.

c) Dans un repère orthonormé, les droites d'équations $x = 0$ et $y = 1$ sont asymptotes à la courbe de f.

95 Démonstration par dichotomie du théorème des valeurs intermédiaires

f est une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$.

On se propose de démontrer le théorème des valeurs intermédiaires (paragraphe 3 A p. 296) en deux étapes.

Partie A : première étape

On suppose ici, que :

- $k=0$
- $f(a)<0$ et $f(b)>0$

On définit par dichotomie deux suites (u_n) et (v_n) par $u_0=a$ et $v_0=b$ et pour tout entier naturel n :

- $u_{n+1}=u_n$ et $v_{n+1}=\dfrac{u_n+v_n}{2}$ si $f\left(\dfrac{u_n+v_n}{2}\right)\geqslant 0$;
- $u_{n+1}=\dfrac{u_n+v_n}{2}$ et $v_{n+1}=v_n$ si $f\left(\dfrac{u_n+v_n}{2}\right)<0$.

1. a) Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes (voir exercice 102 p. 226).

Conseil : pour établir que la limite de la suite (u_n-v_n) est 0, démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n-v_n=\dfrac{a-b}{2^n}$.

b) En déduire que les suites (u_n) et (v_n) ont la même limite. On note c cette limite.

2. a) Démontrer que la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(c)$, puis que $f(c)\leqslant 0$.

b) Démontrer que la suite $(f(v_n))$ converge vers $f(c)$, puis que $f(c)\geqslant 0$.

c) En déduire qu'il existe au moins un réel c de l'intervalle $[a\,;b]$ tel que $f(c)=0$.

Partie B : seconde étape

1. On suppose ici, que :

- $f(a)<f(b)$
- $f(a)<k<f(b)$

On note g la fonction définie sur l'intervalle $[a\,;b]$ par :

$$g(x)=f(x)-k.$$

a) Expliquer pourquoi la fonction g est continue sur l'intervalle $[a\,;b]$.

b) Justifier avec la **partie A** qu'il existe au moins un réel c de l'intervalle $[a\,;b]$ tel que $f(c)=k$.

2. Reprendre la question **1.** dans le cas où :

- $f(a)>f(b)$
- $f(a)>k>f(b)$

Conseil : on peut considérer la fonction $h=-f$.

La dichotomie intervient en biologie, en économie, en philosophie, … En médecine, c'est le partage clandestin d'honoraires entre professionnels de santé (interdit par le Code de la santé publique).

96 Fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(x+y)=f(x)+f(y)$

Problème

Déterminer l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$, continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant la propriété (**P**) :
pour tous réels x et y, $f(x+y)=f(x)+f(y)$.

Méthode : raisonnement par analyse-synthèse

- Dans la partie « **analyse** », on suppose qu'il existe une fonction f solution du problème et on trouve des conditions nécessaires que doit vérifier f.
- Dans la partie « **synthèse** », on prouve l'existence en vérifiant que le type de fonctions trouvées dans la première partie est bien solution du problème.

1. Analyse

On suppose que f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et qui vérifie la propriété (**P**).

a) Avec $x=0$ et $y=0$, démontrer que $f(0)=0$.

b) Avec $y=-x$, démontrer que $f(-x)=-f(x)$.
Que peut-on dire alors de la fonction f ?

c) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $f(nx)=nf(x)$.

d) Démontrer que pour tout entier relatif k,

$$f(kx)=kf(x).$$

Conseil : d'après **c)**, il reste à envisager le cas $k<0$. Pour cela, poser $k=-n$ avec $n\in\mathbb{N}^*$ et utiliser **b)**.

e) Démontrer que pour tout entier relatif p et tout entier naturel q non nul,

$$f\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{p}{q}f(1).$$

Conseil : utiliser **c)** avec $n=q$ et $x=\dfrac{p}{q}$, puis **d)**.

f) *On admet que tout réel x est la limite d'une suite (u_n) de nombres rationnels.*

- Étudier la limite de la suite $(f(u_n))$:
  – en utilisant **e)** ; – avec la continuité de f en x.
- En déduire que, pour tout réel x, $f(x)=xf(1)$.

g) En déduire que si f est continue sur $\mathbb{R}$ et vérifie (**P**), alors f est d'un type particulier. Lequel ?

2. Synthèse

a) Vérifier que toutes les fonctions linéaires sont bien solutions du problème initial.

b) Conclure en répondant au problème par une phrase.

97 Prolongement par continuité

1. Exemple 1

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x < 0 \\ 2x + 3 & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

a) Dans un repère orthonormé, tracer la courbe représentative de la fonction f.

b) Déterminer les limites de f en 0 par valeurs inférieures et par valeurs supérieures.

c) Existe-t-il une fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ a & \text{si } x = 0 \end{cases} \text{ avec } a \in \mathbb{R}$$

qui soit continue en 0 ?

2. Exemple 2

h est la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par :

$$h(x) = \begin{cases} e^{x-1} & \text{si } x < 1 \\ 3x - 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}.$$

a) Dans un repère orthonormé, tracer la courbe représentative de la fonction h.

b) Déterminer les limites de h en 1 par valeurs inférieures et par valeurs supérieures.

c) Existe-t-il une fonction k définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$k(x) = \begin{cases} h(x) & \text{si } x \neq 1 \\ a & \text{si } x = 1 \end{cases} \text{ avec } a \in \mathbb{R}$$

qui soit continue en 1 ?

3. Cas général

x_0 est un nombre réel et f est une fonction définie sur $\mathbb{R} - \{x_0\}$.

Si f admet une limite réelle ℓ en x_0, alors on peut prolonger f par une fonction continue en x_0 en posant :

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ \ell & \text{si } x = x_0 \end{cases}.$$

On dit que **g est le prolongement par continuité de f en x_0**.

Application

f est la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{(x - 2)e^x}.$$

Peut-on prolonger f par continuité en 2 ?

98 Utiliser une dérivée seconde

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2 + 4x.$$

1. Déterminer la fonction dérivée f' et la fonction dérivée seconde f'' de la fonction f.

2. a) Étudier les variations de la fonction f'.

b) Dresser le tableau de variations de f' et en déduire que l'équation $f'(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]-\infty\,;-1]$.

c) À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

3. a) Déterminer le signe de la fonction f'.

b) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

c) Expliquer pourquoi $f(\alpha) = \frac{3}{4}\alpha(4 - \alpha)$.

d) Déterminer le nombre de racines du polynôme f.

99 Résoudre une équation

g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 577x^3 - 816x^2 - 1\,154x + 1\,632.$$

Combien l'équation $g(x) = 0$ a-t-elle de solutions ? Donner les valeurs exactes des solutions éventuelles.

Conseil : on peut remarquer que $1\,154 = 2 \times 577$ et que $1\,632 = 2 \times 816$.

Des Défis

100 Avec la fonction partie entière

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = [x - E(x)][x - E(x) - 1].$$

(voir exercice 25 pour la définition de la fonction E).

La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

101 Un nombre inconnu

A est le nombre défini par l'écriture illimitée :

$$A = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \dots}}}}$$

Déterminer ce nombre A.