3 Nombres complexes et trigonométrie

HISTOIRE DES MATHS

C'est **Ptolémée** qui établit, dans son œuvre magistrale *L'Almageste*, vers 150, la formule d'addition :

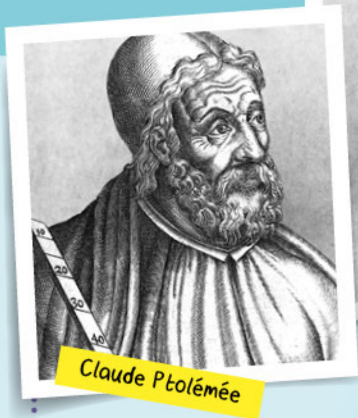
$\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$.

Aux 17e et 18e siècles, la connaissance des nombres complexes continue de se développer, les opérations usuelles sont désormais bien comprises.

En 1738, **Abraham de Moivre** démontre la formule :

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

Vers la fin du 17e siècle, la fonction exponentielle $z \mapsto e^z$ et ses propriétés sont connues. **Leonhard Euler** s'appuie sur les travaux d'Abraham de Moivre pour écrire en 1748, l'égalité qui relie cette fonction de la variable complexe aux fonctions trigonométriques cosinus et sinus : $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.


Claude Ptolémée


Abraham de Moivre

▶ **Claude Ptolémée** (vers 100-168) est un astronome et géographe grec. Il décrit un système géocentrique des planètes. Sa trigonométrie est proche de la nôtre.

▶ **Abraham de Moivre** (1667-1754) est un mathématicien français. Après la révocation de l'édit de Nantes, il émigre en Angleterre. Il sera reconnu pour ses travaux en géométrie analytique et en probabilités et deviendra membre de la Royal Society de Londres, puis des Académies des sciences de Paris et Berlin.

150 Ptolémée établit des formules de trigonométrie.

1738 De Moivre démontre la formule qui porte son nom.

1748 Euler fait le lien entre l'exponentielle et les fonctions trigonométriques.

1823 Les nombres complexes sortent du cadre mathématique et interviennent en optique avec Fresnel.

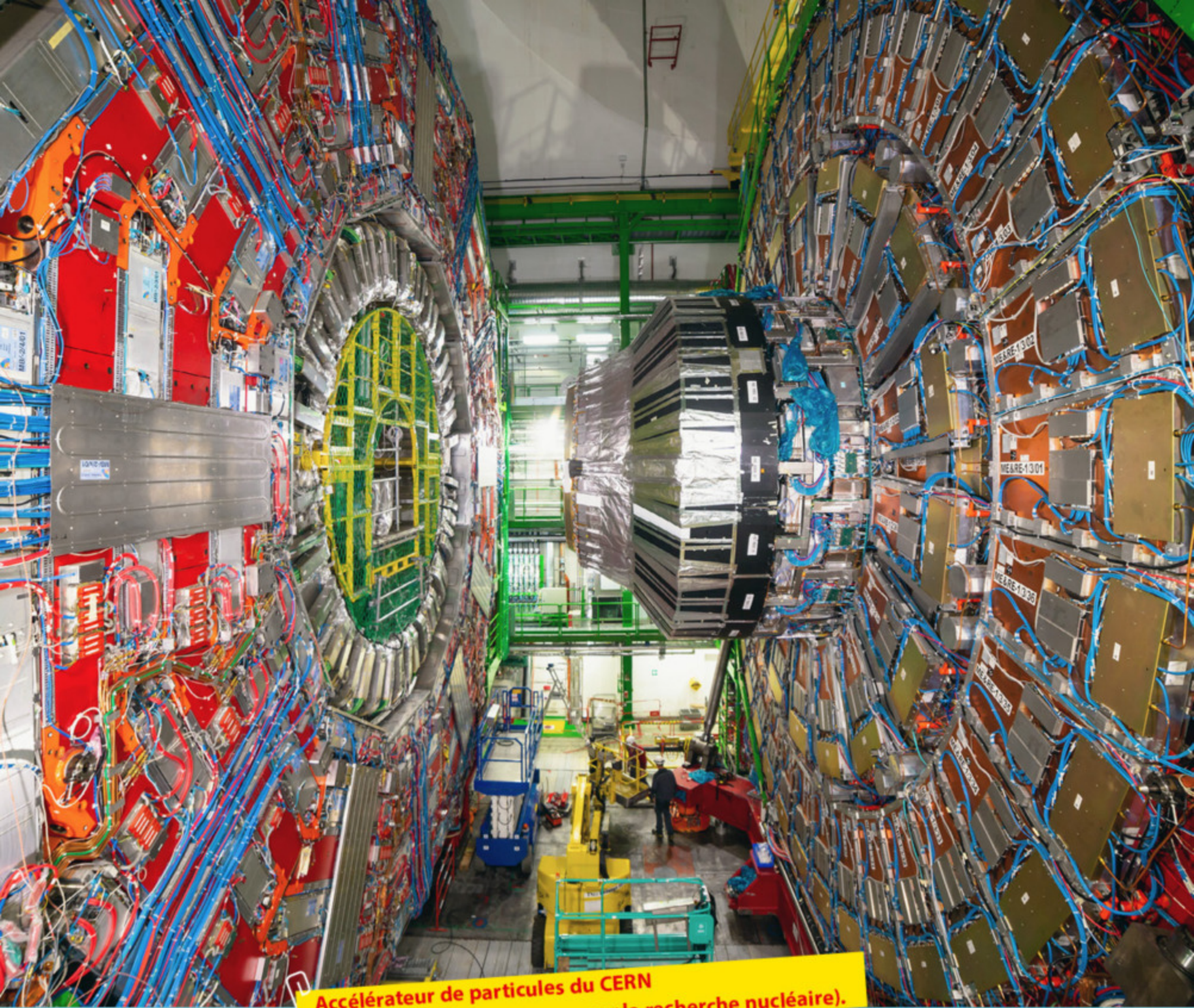
1728 Invention du thermomètre à mercure par Fahrenheit

1748 Abolition des galères par Louis XV

1752 Franklin invente le paratonnerre

1820 Découverte de la Vénus de Milo par Dumont d'Urville

100 — 1700 — 1750 — 1800 — 1850



Accélérateur de particules du CERN (organisation européenne pour la recherche nucléaire).

Les chercheurs spécialisés dans les systèmes physiques atomiques ou subatomiques utilisent une théorie appelée mécanique quantique. Cette théorie repose notamment sur les équations dites de Schrödinger qui s'écrivent avec les **nombres complexes.**

Les contenus et capacités travaillés dans ce chapitre

	Savoir-faire	Exercices
• Formules d'addition et de duplication. Propriétés de l'argument.	1 à 4	15 à 27
• Notation $e^{i\theta}$, propriétés. Passer de la forme algébrique d'un nombre complexe à sa forme trigonométrique ou exponentielle et inversement.	5 à 8	28 à 43
• Propriétés de $e^{i\theta}$. Formules de Moivre et d'Euler.	9 à 14	44 à 58, 61 à 66
• Utiliser les formules d'Euler et de Moivre pour transformer des expressions dans des contextes divers, calculer des puissances de nombres complexes.		59, 60, 67 à 69, 88, 92
• Effectuer des calculs sur les nombres complexes en choisissant une forme adaptée.		81, 103

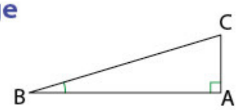
Bien démarrer

Calcul mental

Rappels utiles

• La trigonométrie du Collège

ABC est un triangle rectangle en A.



$$\cos\left(\widehat{ABC}\right)=\frac{\text{longueur du côté adjacent à }\widehat{ABC}}{\text{longueur de l'hypoténuse}}=\frac{AB}{BC}$$

$$\sin\left(\widehat{ABC}\right)=\frac{\text{longueur du côté opposé à }\widehat{ABC}}{\text{longueur de l'hypoténuse}}=\frac{AC}{BC}$$

• Formes algébrique et trigonométrique d'un nombre complexe

La **forme algébrique** d'un nombre complexe z est :

$z=x+iy$ (avec x et y nombres réels)

Le **module** de z est : $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$.

Le **conjugué** de z est : $\overline{z}=x-iy$

Une **forme trigonométrique** d'un nombre complexe z non nul est :

$$z=r(\cos(\theta)+i\sin(\theta))$$

où $r=|z|$ et $\theta=\arg(z)[2\pi]$.

Pour obtenir une forme trigonométrique de $z=x+iy$ avec x, y réels et $(x\,;y)\neq(0\,;0)$:

- on calcule le module de z ;
- on écrit $z=|z|\left(\frac{x}{|z|}+i\frac{y}{|z|}\right)$;
- on détermine θ tel que $\cos(\theta)=\frac{x}{|z|}$ et $\sin(\theta)=\frac{y}{|z|}$.

• Propriétés de l'exponentielle

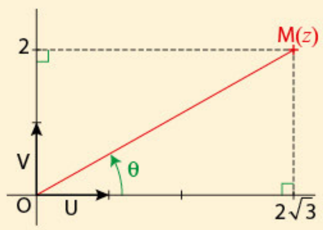
Pour tous réels a, b et pour tout entier relatif n,

$$e^a\times e^b=e^{a+b}\qquad \frac{e^a}{e^b}=e^{a-b}\qquad \left(e^a\right)^n=e^{a\times n}$$

À l'oral — Questions-Tests

Pour chaque question, il y a une seule réponse exacte.

1 Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $\left(O\,;\overrightarrow{OU},\overrightarrow{OV}\right)$ on a représenté le point M d'affixe $z=2\sqrt{3}+2i$ et d'argument θ.



a) $\cos(\theta)$ est égal à :

(1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (2) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (3) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

b) $\sin(\theta)$ est égal à :

(1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\sqrt{3}$

c) θ est égal à :

(1) $\frac{\pi}{6}\,[2\pi]$ (2) $\frac{\pi}{4}\,[2\pi]$ (3) $\frac{\pi}{3}\,[2\pi]$

2 On donne $z=3i(1+i)$.

a) La forme algébrique de z est :

(1) $3i(1+i)$ (2) $-3-3i$ (3) $-3+3i$

b) Le conjugué de z est :

(1) $3-3i$ (2) $-3+3i$ (3) $-3-3i$

3 On donne $z=2+2i$ et $z'=i$.

a) Le module de z est :

(1) 4 (2) $2\sqrt{2}$ (3) 8

b) Le module de z' est :

(1) 1 (2) 0 (3) i

c) Une forme trigonométrique de z est :

(1) $2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ (2) $2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$

(3) $8\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$

d) Une forme trigonométrique de z' est :

(1) $\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ (2) $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$

(3) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)$

4 **a)** $(e^3)^2\times e^5$ est égal à : (1) e (2) e^{10} (3) e^{11}

b) $\frac{e^{10}\times e^{-4}}{e^3}$ est égal à : (1) e^3 (2) e^9 (3) e^{11}

5 Pour tous réels x et y,

a) $\left(e^x\times e^y\right)^2$ est égal à : (1) e^{2xy} (2) $e^{2(x+y)}$ (3) $e^{(x+y)^2}$

b) $\frac{e^{2x+1}}{e^{2x-1}}$ est égal à : (1) e^2 (2) e^{-2} (3) e^{4x}

1 Un argument d'un produit, d'un quotient

On se propose de conjecturer des formules sur les arguments d'un produit, d'un quotient de nombres complexes non nuls.
On donne les nombres complexes $z = 2+2i$ et $z' = \sqrt{3}+i$.

1 Déterminer le module et l'argument dans l'intervalle $[0\,;2\pi[$, de chacun des nombres complexes z et z'.

2 **Un argument de zz'.**
a) Déterminer la forme algébrique de zz'. Calculer $|zz'|$.
b) On note θ_1 l'argument dans l'intervalle $[0\,;2\pi[$ du nombre complexe zz'.
Déterminer la valeur exacte de : • $\cos(\theta_1)$ • $\sin(\theta_1)$
c) Calculer $\arg(z)+\arg(z')$.
d) Utiliser l'écran de calculatrice ci-contre afin de remarquer une relation entre $\arg(zz')$, $\arg(z)$ et $\arg(z')$.

$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$	
	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
$\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$	
	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

3 **Un argument de $\frac{z}{z'}$.**
a) Déterminer la forme algébrique de $\frac{z}{z'}$. Calculer $\left|\frac{z}{z'}\right|$.
b) On note θ_2 l'argument dans l'intervalle $[0\,;2\pi[$ du nombre complexe $\frac{z}{z'}$.
Déterminer la valeur exacte de : • $\cos(\theta_2)$ • $\sin(\theta_2)$
c) Calculer $\arg(z)-\arg(z')$.
d) Utiliser l'écran de calculatrice ci-contre afin de remarquer une relation entre $\arg\left(\frac{z}{z'}\right)$, $\arg(z)$ et $\arg(z')$.

$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$	
	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$	
	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

2 La formule de Moivre

On se propose de conjecturer une formule, dite de Moivre, à partir d'exemples.
On donne les nombres complexes $z_1 = 1-i\sqrt{3}$, $z_2 = 3+3i$ et $z_3 = 2\sqrt{3}+2i$.

1 **a)** Calculer le module de chacun des nombres complexes z_1, z_2 et z_3.
b) Déterminer un argument de chacun des nombres complexes z_1, z_2 et z_3.

2 **a)** Utiliser les résultats affichés ci-contre afin de déterminer un argument de chacun des nombres complexes :
• z_1^4 • z_2^3 • z_3^5
b) En déduire une relation :
• entre les arguments de z_1^4 et z_1,
• entre les arguments de z_2^3 et z_2,
• entre les arguments de z_3^5 et z_3.

$(1-i\sqrt{3})^4$	
	$-8+8\sqrt{3}i$
$(3+3i)^3$	
	$-54+54i$
$(2\sqrt{3}+2i)^5$	
	$-512\sqrt{3}+512i$

3 Pour un nombre complexe non nul z et un nombre entier naturel non nul n, conjecturer une expression de $\arg(z^n)$ en fonction de $\arg(z)$.

Exercices
- 1 à 4 (ci-contre)
- 15 à 27

1 Formules d'addition et de duplication. Propriétés de l'argument

A Formules d'addition

Propriétés

Pour tous réels a et b,

(1) $\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$ **(2)** $\cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$

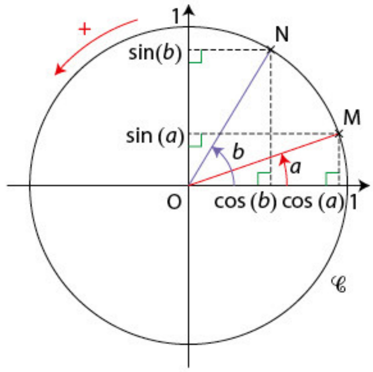
(3) $\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\sin(b)\cos(a)$ **(4)** $\sin(a-b)=\sin(a)\cos(b)-\sin(b)\cos(a)$

Démonstration

(2) Le plan est muni d'un repère orthonormé direct d'origine O.

$\mathscr{C}$ est le cercle trigonométrique de centre O.

a et b sont deux nombres réels. M et N sont les points de $\mathscr{C}$ tels que M$(\cos(a)\,;\sin(a))$ et N$(\cos(b)\,;\sin(b))$.



- D'une part, $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=OM\times ON\times\cos\left(\widehat{MON}\right)=OM\times ON\times\cos(b-a)$

Or, pour tout x, $\cos(-x)=\cos(x)$ donc $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=OM\times ON\times\cos(a-b)$.

Donc $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=1\times1\times\cos(a-b)=\cos(a-b)$.

- D'autre part, $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$.
- Finalement, $\cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$.

Remarque : (4) se déduit de **(2)** avec $\sin(a-b)=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-(a-b)\right)$, ensuite pour **(1)** et **(2)** on remplace b par $-b$.

B Formules de duplication

Propriétés

Pour tout réel a,

(1) $\cos(2a)=\cos^2(a)-\sin^2(a)=1-2\sin^2(a)=2\cos^2(a)-1$ **(2)** $\sin(2a)=2\sin(a)\cos(a)$

Démonstrations

(1) $\cos(2a)=\cos(a+a)=\cos(a)\cos(a)-\sin(a)\sin(a)=\cos^2(a)-\sin^2(a)$.

Or, $\cos^2(a)+\sin^2(a)=1$, donc $\cos(2a)=2\cos^2(a)-1=1-2\sin^2(a)$.

(2) $\sin(2a)=\sin(a+a)=\sin(a)\cos(a)+\cos(a)\sin(a)=2\sin(a)\cos(a)$

C Propriétés de l'argument

Propriétés

Pour tous complexes non nuls z et z' et tout entier naturel $n\geqslant 1$,

(1) $\arg(zz')=\arg(z)+\arg(z')\ [2\pi]$ **(2)** $\arg(z^n)=n\arg(z)\ [2\pi]$

(3) $\arg\left(\dfrac{1}{z'}\right)=-\arg(z')\ [2\pi]$ **(4)** $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right)=\arg(z)-\arg(z')\ [2\pi]$

Démonstration

(1) $z=|z|(\cos(\theta)+i\sin(\theta))$ et $z'=|z'|(\cos(\theta')+i\sin(\theta'))$, donc :

$zz'=|z||z'|(\cos(\theta)\cos(\theta')-\sin(\theta)\sin(\theta')+i(\sin(\theta)\cos(\theta')+\sin(\theta')\cos(\theta)))$ et avec les formules d'addition :

$zz'=|zz'|(\cos(\theta+\theta')+i\sin(\theta+\theta'))$. Donc $\arg(zz')=\theta+\theta'\ [2\pi]$, soit $\arg(zz')=\arg(z)+\arg(z')\ [2\pi]$.

Remarque : (2), **(3)**, **(4)** sont démontrées à l'exercice **74** p. 84.

EXERCICES RÉSOLUS

1 Utiliser deux écritures d'un nombre complexe

On donne $z = 1 + i\sqrt{3}$ et $z' = 1 - i$.

a) Déterminer un argument de z, puis de z'.

b) En déduire un argument de zz'.

c) Déterminer la forme algébrique de zz'. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et de $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Solution

a) • $|z| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$. Ainsi, $z = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$ et $\arg(z) = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

• $|z'| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$. Ainsi, $z' = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$ et $\arg(z') = -\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$.

b) D'après les propriétés de l'argument :

$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$, donc $\arg(zz') = \frac{\pi}{3} + \left(-\frac{\pi}{4}\right)\ [2\pi]$, soit $\arg(zz') = \frac{\pi}{12}\ [2\pi]$

c) $zz' = \left(1 + i\sqrt{3}\right)(1 - i) = 1 - i + i\sqrt{3} - i^2\sqrt{3} = 1 + \sqrt{3} + i\left(-1 + \sqrt{3}\right)$

$|zz'| = |z||z'| = 2\sqrt{2}$. Donc, d'après **b)**, une forme trigonométrique de zz' est : $zz' = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$.

En identifiant les formes algébrique et trigonométrique, on obtient $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

2 Déterminer z^n

On donne $z = \sqrt{3} + i$.

a) Déterminer un argument de z.

b) En déduire que le nombre complexe $z^{2\,022}$ est un nombre réel.

Solution

a) $|z| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$. Ainsi, $z = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$ et $\arg(z) = \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$.

b) D'après les propriétés de l'argument :

$\arg\left(z^{2\,022}\right) = 2\,022 \times \arg(z)\ [2\pi]$

$\arg\left(z^{2\,022}\right) = 2\,022 \times \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$. Or, $2\,022 \times \frac{\pi}{6} = 337\pi = 168 \times 2\pi + \pi$.

Ainsi, $\arg\left(z^{2\,022}\right) = \pi\ [2\pi]$.

On en déduit que $z^{2\,022}$ est un nombre réel.

> Z est un nombre complexe non nul.
> • Z est réel si, et seulement si, $\arg(Z) = 0\ [2\pi]$ ou $\arg(Z) = \pi\ [2\pi]$.
> • Z est imaginaire pur, si, et seulement si, $\arg(Z) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ ou $\arg(Z) = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 1

3 On donne $z = 1 + i$ et $z' = 1 + i\sqrt{3}$.

a) Déterminer un argument de z, puis de z'.

b) En déduire un argument de zz'.

c) Déterminer la forme algébrique de zz'. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et de $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

Sur le modèle de l'exercice résolu 2

4 On donne $z = 1 - i$.

a) Déterminer un argument de z.

b) En déduire que le nombre complexe :

• $Z = z^8$ est un nombre réel ;

• $Z' = z^{10}$ est un nombre imaginaire pur.

Exercices
- 5 à 8 (ci-contre)
- 28 à 43

2 La notation exponentielle

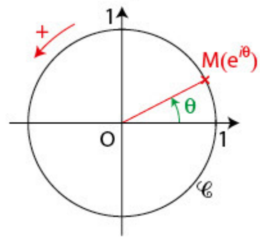
A La fonction $\theta \mapsto \cos(\theta)+i\sin(\theta)$

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(\theta)=\cos(\theta)+i\sin(\theta)$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$.
(1) Pour tous réels θ et θ', $f(\theta+\theta')=f(\theta)f(\theta')$.
En effet, $f(\theta)f(\theta')=(\cos(\theta)+i\sin(\theta))(\cos(\theta')+i\sin(\theta'))$
$f(\theta)f(\theta')=\cos(\theta+\theta')+i\sin(\theta+\theta')$
d'après les formules d'addition du paragraphe **1. A**.
Donc $f(\theta)f(\theta')=f(\theta+\theta')$ et la fonction f vérifie une relation fonctionnelle analogue à celle de la fonction exponentielle.
(2) Les fonctions cos et sin sont dérivables sur $\mathbb{R}$. On admet qu'alors la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel θ, $f'(\theta)=\cos'(\theta)+i\sin'(\theta)$.
Ainsi, pour tout réel θ, $f'(\theta)=-\sin(\theta)+i\cos(\theta)$ et donc $f'(\theta)=i(i\sin(\theta)+\cos(\theta))=if(\theta)$.
Cette propriété est à rapprocher du fait que si $g(x)=e^{kx}$, alors g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x)=kg(x)$.

Notation : ces analogies avec la fonction exponentielle ont amené à adopter l'écriture suivante (due à Euler en 1748) :

pour tout réel θ, $\mathbf{e^{i\theta}=\cos(\theta)+i\sin(\theta)}$.

Ainsi, $e^{i\theta}$ **désigne le nombre complexe de module 1 dont un argument est θ.**



En d'autres termes, le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ de centre l'origine O du repère est l'ensemble des points d'affixes $e^{i\theta}$ où θ décrit $\mathbb{R}$.

Exemples
- $e^{i0}=e^{i2\pi}=1$
- $e^{i\pi}=-1$
- $e^{i\frac{\pi}{2}}=i$
- $e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}=-i$
- $e^{i\frac{2\pi}{3}}=\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

B Formes exponentielles

Tout nombre complexe $z\neq 0$ admet une forme trigonométrique $z=|z|(\cos(\theta)+i\sin(\theta))$, avec $\theta=\arg(z)\ [2\pi]$, on peut donc écrire $z=|z|e^{i\theta}$.

Définition

Une **forme exponentielle** d'un nombre complexe $z\neq 0$ dont un argument est θ, est l'écriture $z=|z|\mathbf{e}^{i\theta}$.

Exemple

Le nombre complexe $z=-2e^{i\frac{\pi}{3}}$ n'est pas écrit sous forme exponentielle (car $-2<0$).
Pour l'écrire sous forme exponentielle, on peut utiliser le fait que $e^{i\pi}=-1$.
Alors : $z=2e^{i\pi}e^{i\frac{\pi}{3}}=2e^{i\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)}=2e^{i\frac{4\pi}{3}}$.

C Différentes formes d'un nombre complexe

On sait désormais que tout complexe non nul peut s'écrire sous trois formes :
- sa **forme algébrique** $z=x+iy$ avec x et y nombres réels ;
- sa **forme trigonométrique** $z=|z|(\cos(\theta)+i\sin(\theta))$ avec $\arg(z)=\theta\ [2\pi]$;
- sa **forme exponentielle** $z=|z|e^{i\theta}$ avec $\arg(z)=\theta\ [2\pi]$.

EXERCICES RÉSOLUS

5 Passer d'une forme exponentielle à une forme trigonométrique ou à la forme algébrique

a) Écrire sous forme trigonométrique chacun des nombres complexes : • $z = 5e^{-i\frac{\pi}{3}}$ • $z' = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

b) Écrire sous forme algébrique le nombre complexe $z_1 = \sqrt{5}e^{i\frac{\pi}{6}}$.

Solution

a) • $z = 5e^{-i\frac{\pi}{3}} = |z|e^{i\theta}$ avec $|z| = 5$ et $\theta = -\frac{\pi}{3}$ $[2\pi]$.

Donc une forme trigonométrique de z est $z = 5\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$.

• $z' = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = |z'|e^{i\theta'}$ avec $|z'| = \sqrt{2}$ et $\theta' = \frac{\pi}{4}$ $[2\pi]$.

Donc une forme trigonométrique de z' est $z' = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

b) $z_1 = \sqrt{5}e^{i\frac{\pi}{6}} = |z_1|e^{i\theta_1}$ avec $|z_1| = \sqrt{5}$ et $\theta_1 = \frac{\pi}{6}$ $[2\pi]$.

Donc $z_1 = \sqrt{5}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \sqrt{5}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \times \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{15}}{2} + i\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Pour passer de la forme exponentielle de z_1 à une forme algébrique, on commence par écrire z_1 sous forme trigonométrique.

6 Passer d'une forme trigonométrique ou de la forme algébrique à une forme exponentielle

a) Écrire sous forme exponentielle le nombre complexe $z = 5\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$.

b) Écrire sous forme exponentielle chacun des nombres complexes : • $z' = -10i$ • $z'' = 4 + 4i$.

Solution

a) $z = 5\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ avec $|z| = 5$ et $\theta = -\frac{\pi}{3}$ $[2\pi]$.

Donc une forme exponentielle de z est $z = 5e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

b) • On sait que $-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$ donc $z' = -10i = 10e^{-i\frac{\pi}{2}}$.

• $z'' = 4 + 4i$ donc $|z''| = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$.

Donc $z'' = 4\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = 4\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

Ainsi, une forme exponentielle de z'' est : $z'' = 4\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Pour passer de la forme algébrique de z'' à une forme exponentielle, on commence par écrire z sous forme trigonométrique.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 5

7 **a)** Écrire sous forme trigonométrique chacun des nombres complexes :

• $z = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ • $z' = 5e^{-i\frac{4\pi}{11}}$

b) Écrire sous forme algébrique le nombre complexe $z_1 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

Sur le modèle de l'exercice résolu 6

8 **a)** Écrire sous forme exponentielle le nombre complexe $z = 4\left(\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)\right)$.

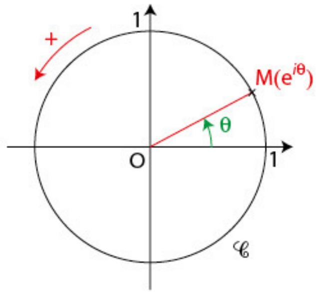
b) Écrire sous forme exponentielle chacun des nombres complexes :

• $z' = -7$ • $z'' = 2 - 2i\sqrt{3}$

Exercices
- 9 à 12 (ci-contre)
- 44 à 69

3 Propriétés de $e^{i\theta}$

A Module et arguments de $e^{i\theta}$



Propriétés

Pour tout réel θ,
- $|e^{i\theta}| = 1$
- $\arg(e^{i\theta}) = \theta\ [2\pi]$

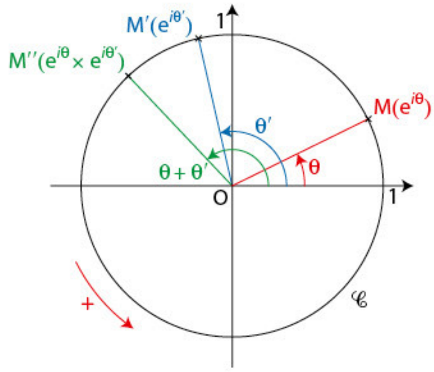
Exemple

$e^{i\frac{\pi}{3}}$ est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{3}$.

Propriété

Pour tous réels θ et θ′, $e^{i\theta} = e^{i\theta'}$ si, et seulement si, $\theta = \theta'\ [2\pi]$.

B Propriétés algébriques



Propriétés

Pour tous réels θ, θ′ et tout entier naturel $n \geqslant 1$,

(1) $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$

(2) Formule de Moivre : $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$

(3) $\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{i(-\theta)} = \overline{e^{i\theta}}$

(4) $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$

Ces propriétés traduisent les propriétés de l'argument (C page 72).

Remarque : on sait que $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$, donc la formule de Moivre peut s'écrire :

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

Exemples

- $e^{i\frac{\pi}{4}} \times e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)} = e^{i\frac{7\pi}{12}}$
- $\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^8 = e^{i\times 8\times\frac{\pi}{4}} = e^{i2\pi} = 1$
- $-2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2e^{i\pi} \times e^{i\frac{\pi}{3}} = 2e^{i4\frac{\pi}{3}}$

C Formules d'Euler

Propriétés

Pour tout réel θ, $\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.

Démonstrations

$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ et $e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos(\theta) - i\sin(\theta)$.

Ainsi, $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos(\theta)$ donc $\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin(\theta)$ donc $\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.

Conséquence

Pour tout complexe non nul z tel que $z = |z|e^{i\theta}$, $|z|\cos(\theta) = \frac{z + \overline{z}}{2}$ et $|z|\sin(\theta) = \frac{z - \overline{z}}{2i}$.

EXERCICES RÉSOLUS

9 Utiliser les propriétés de $e^{i\theta}$

On donne $z=-2+2i$ et $z'=7e^{-i\frac{\pi}{5}}$.

a) Écrire z sous forme exponentielle.

b) Écrire sous forme exponentielle chacun des nombres complexes : • zz' • $\frac{z}{z'}$ • z^6

Solution

a) $z=-2+2i$ donc $|z|=\sqrt{(-2)^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.

Ainsi, $z=2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)=2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)=2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

b) • $zz'=2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}\times 7e^{-i\frac{\pi}{5}}=14\sqrt{2}e^{i\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{5}\right)}=14\sqrt{2}e^{i\frac{11\pi}{20}}$

• $\frac{z}{z'}=\frac{2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}}{7e^{-i\frac{\pi}{5}}}=\frac{2\sqrt{2}}{7}e^{i\left(\frac{3\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right)}=\frac{2\sqrt{2}}{7}e^{i\frac{19\pi}{20}}$

• $z^6=\left(2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)^6=(2\sqrt{2})^6e^{i\times 6\times\frac{3\pi}{4}}=512e^{i\frac{9\pi}{2}}=512e^{i\frac{\pi}{2}}$

Pour obtenir une forme exponentielle de ces complexes, on comprend tout l'intérêt d'avoir commencé par écrire z sous forme exponentielle au **a)**.

10 Linéariser $\cos^3(x)$

x désigne un nombre réel.

Utiliser une formule d'Euler pour exprimer $\cos^3(x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\cos(3x)$.

Solution

Pour tout réel x, $\cos(x)=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$, donc $\cos^3(x)=\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3=\frac{\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)^3}{2^3}$

$\cos^3(x)=\frac{1}{8}\left(\left(e^{ix}\right)^3+3\left(e^{ix}\right)^2\times e^{-ix}+3e^{ix}\times\left(e^{-ix}\right)^2+\left(e^{-ix}\right)^3\right)$

$\cos^3(x)=\frac{1}{8}\left(e^{3ix}+3e^{2ix}\times e^{-ix}+3e^{ix}\times e^{i(-2x)}+e^{-3ix}\right)$

$\cos^3(x)=\frac{1}{8}\left(\left(e^{3ix}+e^{-3ix}\right)+3\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)\right)$

$\cos^3(x)=\frac{1}{8}(2\cos(3x)+3\times 2\cos(x))$

et finalement $\cos^3(x)=\frac{1}{4}(\cos(3x)+3\cos(x))$.

Pour tous nombres complexes a et b, $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

Linéariser une puissance d'un cosinus ou d'un sinus, c'est l'écrire comme somme de cosinus ou sinus.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 9

11 On donne $z=2+2i\sqrt{3}$ et $z'=4e^{i\frac{\pi}{8}}$.

a) Écrire z sous forme exponentielle.

b) Écrire sous forme exponentielle chacun des nombres complexes :

• zz' • $\frac{z}{z'}$ • z^{10}

Sur le modèle de l'exercice résolu 10

12 x désigne un nombre réel.

Utiliser une formule d'Euler pour exprimer $\sin^3(x)$ en fonction de $\sin(x)$ et $\sin(3x)$.

Savoir-faire Algo python

EXERCICE RÉSOLU

13 Étudier une suite de nombres complexes

Cours 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}\,;\overrightarrow{\mathrm{OU}},\overrightarrow{\mathrm{OV}}\right)$ (*unité* : 0,5 cm).

(r_n) est la suite géométrique de premier terme $r_0 = 4$ et de raison $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.

(θ_n) est la suite arithmétique de premier terme $\theta_0 = 0$ et de raison $\frac{\pi}{2}$.

Pour tout entier naturel n, on note M_n le point d'affixe $z_n = r_n\mathrm{e}^{i\theta_n}$.

1. a) Justifier que, pour tout entier naturel n, $r_n\mathrm{e}^{i\theta_n}$ est une forme exponentielle de z_n.

b) Écrire chacun des nombres complexes z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, sous forme exponentielle.

c) Placer dans le repère les points M_0, M_1, M_2, M_3, M_4.

2. Voici une fonction **D** écrite en langage Python.

a) Expliquer le rôle de cette fonction.

Pour une valeur donnée du paramètre **Rayon**, interpréter géométriquement l'entier naturel n qu'elle renvoie.

b) Saisir et exécuter la fonction **D** pour **Rayon** = 0,001.

Quelle est la valeur n_0 renvoyée ?

c) Montrer que le point M_{n_0} appartient à l'axe des ordonnées.

```python
from math import *

def D(Rayon):
    n=0
    r=4
    while r>Rayon:
        r=r*exp(-1/2)
        n=n+1
    return(n)
```

Solution

1. a) Pour tout entier naturel n, $r_n = 4\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right)^n = 4\mathrm{e}^{-\frac{n}{2}}$ et $\theta_n = n\frac{\pi}{2}$.

Or, $r_n > 0$ donc $r_n\mathrm{e}^{i\theta_n}$ est une forme exponentielle de z_n.

b) $z_0 = r_0\mathrm{e}^{i\theta_0} = 4\mathrm{e}^0 = 4$;

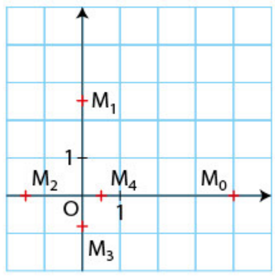
$z_1 = r_1\mathrm{e}^{i\theta_1} = 4\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} \times \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}$;

$z_2 = r_2\mathrm{e}^{i\theta_2} = 4\mathrm{e}^{-1} \times \mathrm{e}^{i\pi}$;

$z_3 = r_3\mathrm{e}^{i\theta_3} = 4\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}} \times \mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{2}}$;

$z_4 = r_4\mathrm{e}^{i\theta_4} = 4\mathrm{e}^{-2} \times \mathrm{e}^{2i\pi} = 4\mathrm{e}^{-2}$.

c) Voir figure ci-contre.



2. a) Pour une valeur donnée du paramètre **Rayon**, cette fonction renvoie le plus petit indice n_0 pour lequel le module r_n de z_n est inférieur ou égal à **Rayon**.

Autrement dit, n_0 est le plus petit entier naturel n tel que $|z_n| \leqslant$ **Rayon**.

b) Dans la console, on lit $n_0 = 17$.

```
>>> D(0.001)
17
```

c) Le point M_{17} a pour affixe $z_{17} = r_{17}\mathrm{e}^{i\frac{17\pi}{2}} = r_{17}\mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{2}+4\times 2\pi\right)} = r_{17}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}} = i\,r_{17}$.

Or, r_{17} est un nombre réel, donc z_{17} est un nombre imaginaire pur.

Ainsi M_{17} appartient à l'axe des ordonnées.

EXERCICE D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 13

14 a) Adapter le programme Python de l'exercice 13 pour les suites :

(r_n) géométrique telle que $r_0 = 3$ et de raison $\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}$;

(θ_n) arithmétique telle que $\theta_0 = 0$ et de raison $\frac{\pi}{4}$.

b) Saisir et exécuter la fonction **D** pour **Rayon** = 0,025.

c) Quelle est la valeur n_0 renvoyée ?

Interpréter cette valeur.

d) Montrer que le point M_{n_0} appartient à l'axe des réels.

Formules d'addition et de duplication Propriétés de l'argument

Cours 1

Questions flash À l'oral

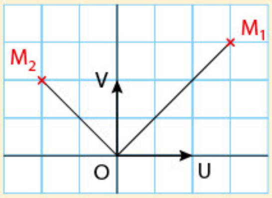
15 z_1, z_2 et z_3 sont trois nombres complexes non nuls tels que :

- $\arg(z_1) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$
- $\arg(z_2) = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$
- $\arg(z_3) = \frac{3\pi}{4}\ [2\pi]$

Déterminer mentalement un argument de chaque nombre complexe.

a) $z_1 z_2$ **b)** $\frac{1}{z_3}$ **c)** $\frac{z_3}{z_1}$

16 Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\overrightarrow{\mathrm{OU}},\overrightarrow{\mathrm{OV}})$ ci-contre.



M_1 est le point d'affixe z_1 et M_2 le point d'affixe z_2.

Kylian affirme : « $\frac{\pi}{2}$ est un argument de $z_1\, z_2$ et $-\frac{\pi}{2}$ est un argument de $\frac{z_1}{z_2}$ ». A-t-il raison ? Justifier.

17 z est un nombre complexe non nul tel que :

$$\arg(z) = \frac{\pi}{10}\ [2\pi].$$

a) Déterminer mentalement un argument de :

- z^2
- z^4
- $\frac{1}{z^2}$

b) Justine affirme : « $z^{2\,020}$ est un nombre réel ». A-t-elle raison ? Justifier oralement.

18 **a)** En remarquant que $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{12}$, calculer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$, puis de $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

b) En déduire la valeur exacte de : • $\cos\left(\frac{5\pi}{24}\right)$ • $\sin\left(\frac{5\pi}{24}\right)$

19 Démontrer que pour tout réel x,

$$\sin(x)+\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)=0.$$

20 Déterminer un nombre réel θ tel que pour tout réel x, $\cos(x)-\sqrt{3}\sin(x)=2\cos(x+\theta)$.

21 x désigne un nombre réel tel que :

$$0<x<\frac{\pi}{2} \text{ et } \cos(x)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

a) Calculer $\cos(2x)$.

b) En déduire la valeur exacte de x.

22 z est un nombre complexe non nul tel que :

$$\arg(z)=\frac{2\pi}{7}\ [2\pi].$$

1. Déterminer un argument de chaque nombre complexe.

a) iz **b)** $\frac{z}{i}$ **c)** $\frac{i}{z}$

2. Démontrer que z^{21} est un nombre réel.

23 On donne $z=5+5i$ et $z'=2-2i\sqrt{3}$.

a) Utiliser l'écran de calculatrice ci-dessous pour déterminer un argument de zz'.

```
Arg (5+5i)
                    1/4 π
Arg (2-2i√3)
                   -1/3 π
```

b) Déterminer la forme algébrique de zz'.

c) En déduire la valeur exacte de :

- $\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)$
- $\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)$

24 On donne $z=8-8i$.

a) Déterminer un argument de z.

b) Démontrer que :

- z^{12} est un nombre réel ;
- z^{14} est un nombre imaginaire pur.

25 On donne $z=\sqrt{2+\sqrt{2}}-i\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

a) Déterminer la forme algébrique de z^2.

b) En déduire le module et un argument de z^2.

c) En déduire le module et un argument de z.

On justifiera soigneusement le calcul d'un argument de z.

d) Dans chaque cas, déterminer la valeur exacte.

- $\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)$
- $\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)$

26 (w_n) est la suite définie par $w_0=1-i\sqrt{3}$ et pour tout entier naturel n, $w_{n+1}=iw_n$.

Déterminer un argument de w_1, w_2, w_3.

27 (z_n) est la suite définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par :

$$z_n=\frac{1}{(2i)^n}.$$

a) Déterminer un argument de $\frac{1}{2i}$.

b) Démontrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

- z_{2n} est un nombre réel ;
- z_{2n+1} est un nombre imaginaire pur.

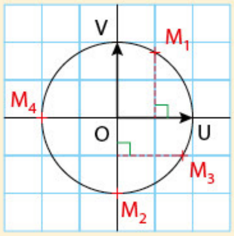
La notation exponentielle

Cours 2

Questions flash À l'oral

28 À la fin d'un raisonnement, Camille affirme :
« Une forme exponentielle de z est $-5e^{i\frac{\pi}{4}}$ ».
Expliquer oralement son erreur.

29 Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $\left(O\,;\overrightarrow{OU},\overrightarrow{OV}\right)$ ci-contre.
Déterminer oralement une forme exponentielle de l'affixe de chacun des points :



- U • V • M_1
- M_2 • M_3 • M_4

30 Dans chaque cas, déterminer oralement une forme trigonométrique du nombre complexe.

a) $z_1 = 5e^{-i\frac{\pi}{4}}$ **b)** $z_2 = 3e^{i\frac{\pi}{7}}$ **c)** $z_3 = 10e^{2i\frac{\pi}{5}}$

31 On donne $z = 6\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$.
Déterminer oralement :
a) une forme exponentielle de z.
b) une forme algébrique de z.

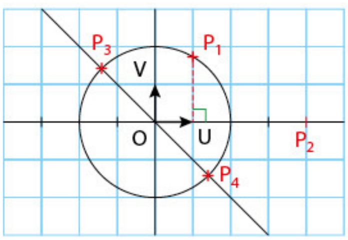
32 Déterminer oralement une forme exponentielle de chaque nombre complexe.

a) i **b)** 1 **c)** $-i$
d) -2 **e)** $2i$ **f)** $-5i$

33 Déterminer la forme algébrique de chaque nombre complexe.

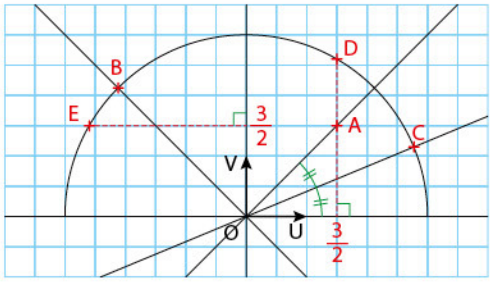
a) $z_1 = 10e^{i\frac{\pi}{2}}$ **b)** $z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$ **c)** $z_3 = 5e^{i\pi}$

34 Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $\left(O\,;\overrightarrow{OU},\overrightarrow{OV}\right)$ ci-dessous.



Déterminer une forme exponentielle de l'affixe de chacun des points P_1, P_2, P_3, P_4.

35 Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $\left(O\,;\overrightarrow{OU},\overrightarrow{OV}\right)$.



a) Déterminer, par lecture graphique, le module de l'affixe de chacun des points A, B, C, D, E.
b) Déterminer, par lecture graphique, un argument appartenant à $]-\pi\,;\pi]$, de l'affixe de chacun des points A, B, C, D, E.
c) En déduire une forme exponentielle de l'affixe de chacun des points A, B, C, D, E.

Pour les exercices 36 à 38, écrire sous forme trigonométrique, puis sous forme algébrique chaque nombre complexe.

36 **a)** $5e^{i\frac{\pi}{3}}$ **b)** $10e^{\frac{-3i\pi}{4}}$

37 **a)** $e^{i\pi}$ **b)** $e^{-i\frac{\pi}{2}}$

38 **a)** $\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}$ **b)** $\sqrt{2}e^{\frac{5i\pi}{6}}$

39 (v_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$v_n = 5e^{in\frac{\pi}{4}}.$$
Déterminer la forme algébrique des six premiers termes de cette suite.

Pour les exercices 40 à 42, écrire sous forme trigonométrique, puis sous forme exponentielle chaque nombre complexe.

40 **a)** $17i$ **b)** $1 + i\sqrt{3}$

41 **a)** $\frac{\sqrt{2}}{5} - i\frac{\sqrt{2}}{5}$ **b)** $3\sqrt{3} + 3i$

42 **a)** $\frac{1+i}{1-i}$ **b)** $\left(1 - i\sqrt{3}\right)^2$

43 (w_n) est la suite définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par $w_n = \left(2\sqrt{3} - 2i\right)^n$.
a) Déterminer un argument de $2\sqrt{3} - 2i$.
b) Déterminer une forme exponentielle des trois premiers termes de cette suite.

Propriétés de $e^{i\theta}$

Cours 3

Questions flash À l'oral

44 On donne $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_2 = 5e^{i\frac{3\pi}{4}}$.
Déterminer mentalement une forme exponentielle de chacun des nombres complexes.
a) $z_1 z_2$ **b)** z_1^3 **c)** z_2^2

45 On donne $z_1 = 15e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_2 = 3e^{i\frac{\pi}{6}}$.
Déterminer mentalement une forme exponentielle de chacun des nombres complexes.
a) $\dfrac{1}{z_1}$ **b)** $\dfrac{z_1}{z_2}$ **c)** $\dfrac{z_2}{z_1}$

46 On donne $z = 4e^{-i\frac{\pi}{6}}$.
Jules affirme : « Une forme exponentielle de $\overline{z}$ est donc $4e^{i\frac{\pi}{6}}$ ».
A-t-il raison ? Justifier oralement.

47 On donne $z_1 = 4e^{i\pi}$, $z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{5}}$ et $z_3 = e^{-i\frac{\pi}{10}}$.
Dans chaque cas, choisir oralement la bonne réponse parmi **(1)**, **(2)** ou **(3)**.
a) Une forme exponentielle de $z_1 z_2$ est :
(1) $8e^{i\frac{6\pi}{5}}$ **(2)** $4e^{i\frac{6\pi}{5}}$ **(3)** $16e^{i\frac{6\pi}{5}}$
b) Le nombre complexe z_3^5 est égal à :
(1) $-i$ **(2)** 0 **(3)** i
c) Le nombre complexe z_3^{20} est égal à :
(1) -1 **(2)** 0 **(3)** 1

48 On donne $z = \cos\left(\dfrac{\pi}{7}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{7}\right)$.
Utiliser la formule de Moivre pour en déduire mentalement une forme trigonométrique de chacun des nombres complexes.
a) z^2 **b)** z^5 **c)** z^7

Pour les exercices 49 à 51, donner une forme exponentielle de zz', de $\dfrac{z}{z'}$, puis de z^5.

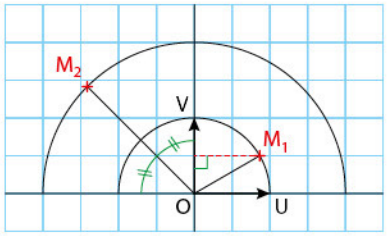
49 On donne $z = 2e^{i\frac{\pi}{7}}$ et $z' = 5e^{i\pi}$.

50 On donne $z = 3e^{-i\frac{\pi}{10}}$ et $z' = 6e^{i\frac{\pi}{4}}$.

51 On donne $z = e^{-\frac{2i\pi}{3}}$ et $z' = 10e^{-i\frac{\pi}{2}}$.

52 On donne :
$$z_1 = 3e^{i\frac{\pi}{4}},\ z_2 = 5e^{-i\frac{\pi}{6}} \text{ et } z_3 = \sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}.$$
Écrire sous forme exponentielle, puis sous forme algébrique chacun des nombres complexes.
a) $\dfrac{z_1 z_3}{z_2}$ **b)** $\dfrac{z_1 z_2}{z_3}$ **c)** z_2^3

53 Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $\left(O\,;\overrightarrow{OU}, \overrightarrow{OV}\right)$.
z_1 et z_2 sont les affixes des points M_1 et M_2.



a) Déterminer une forme exponentielle de z_1 et z_2.
b) En déduire une forme exponentielle de chacun des nombres complexes.
• $z_1 z_2$ • $\dfrac{z_1}{z_2}$ • $\dfrac{z_2}{z_1}$

54 **a)** Déterminer une forme exponentielle de $1 + i\sqrt{3}$.
b) En déduire une forme exponentielle de :
• $\left(1+i\sqrt{3}\right)^4$ • $\overline{1+i\sqrt{3}}$ • $\dfrac{2}{\left(1+i\sqrt{3}\right)^3}$

55 **a)** Déterminer une forme exponentielle de $1 - i$.
b) En déduire une forme exponentielle de :
• $(1-i)^5$ • $\overline{1-i}$ • $\dfrac{5}{(1-i)^2}$

56 On donne $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_2 = 2 + 2i$.
a) Déterminer une forme exponentielle de z_1 et z_2.
b) En déduire une forme exponentielle de :
• $\overline{z_1}$ • $\dfrac{1}{z_2}$ • $z_1^2 z_2^3$

57 On donne $z_1 = 3 - 3i$ et $z_2 = -\sqrt{3} + i$.
a) Déterminer une forme trigonométrique, puis une forme exponentielle de :
• z_1 • z_2 • $z_1 z_2$
b) En déduire les valeurs exactes de :
• $\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$ • $\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$

58 On donne $z = (1+i)^4$.
Donner une forme exponentielle de $\overline{z}$, puis de $\dfrac{1}{z}$.

59 x désigne un nombre réel.

a) Justifier que $e^{i\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} = e^{i\frac{\pi}{2}} \times e^{-ix}$.

En déduire l'expression de $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, puis de $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

b) Justifier que $e^{i\left(\frac{\pi}{2}+x\right)} = e^{i\frac{\pi}{2}} \times e^{ix}$. En déduire l'expression de $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$, puis de $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

60 x désigne un nombre réel.

a) À l'aide de $e^{i(\pi-x)} = e^{i\pi} \times e^{-ix}$, déterminer l'expression de $\cos(\pi-x)$, puis de $\sin(\pi-x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

b) À l'aide de $e^{i(\pi+x)} = e^{i\pi} \times e^{ix}$, déterminer l'expression de $\cos(\pi+x)$, puis de $\sin(\pi+x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

61 On donne $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

a) Déterminer une forme exponentielle de j.

b) En déduire une forme exponentielle, puis la forme algébrique de j^2.

c) Démontrer que $1 + j + j^2 = 0$.

d) Déterminer une forme exponentielle de chacun des nombres complexes.

- $\overline{j}$
- j^3
- j^{15}

62 (u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $q = e^{-i\frac{\pi}{2}}$.

a) n désigne un nombre entier naturel.

Déterminer une forme exponentielle de u_n.

b) Démontrer que :

- pour tout entier naturel n pair, u_n est un nombre réel,
- pour tout entier naturel n impair, u_n est un nombre imaginaire pur.

63 (v_n) est la suite géométrique de premier terme $v_0 = 1 + i$ et de raison $q = 1 + i\sqrt{3}$.

a) Déterminer une forme exponentielle de v_0, puis de q.

b) Pour tout entier naturel n, donner l'expression de v_n en fonction de n sous forme exponentielle.

64 (w_n) est la suite géométrique de premier terme $w_0 = 2$ et de raison $q = 1 + i$.

a) Déterminer une forme exponentielle de q.

b) Pour tout entier naturel n, donner l'expression de w_n en fonction de n sous forme exponentielle.

c) On note $S = w_0 + w_1 + ... + w_9$.

Déterminer S sous forme algébrique.

65 (θ_n) est la suite arithmétique de premier terme $\theta_0 = 0$ et de raison $r = \frac{\pi}{3}$.

(u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 5e^{i\theta_n}$.

a) Pour tout entier naturel n, exprimer θ_n en fonction de n.

b) Démontrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

c) Lorsque n est un multiple de 3, que peut-on dire de u_n ?

66 **Algo** (r_n) est la suite géométrique de raison e^{-2} et de premier terme $r_0 = 8$.

(θ_n) est la suite arithmétique de raison $\frac{\pi}{2}$ et de premier terme $\theta_0 = 0$.

Pour tout entier naturel n, on note $z_n = r_n e^{i\theta_n}$.

a) Justifier que pour tout entier naturel n, $r_n e^{i\theta_n}$ est une forme exponentielle du nombre complexe z_n.

b) Voici un algorithme.

Au début de cet algorithme, on affecte 8 à la variable r et 0 à la variable θ.

Pour i allant de 1 à 10
  $r \leftarrow r \times e^{-2}$
  $\theta \leftarrow \theta + \frac{\pi}{2}$
Fin pour
$z \leftarrow r \times e^{i\theta}$

Expliquer le rôle de cet algorithme.

c) Déterminer par le calcul le nombre complexe z obtenu à la fin de l'algorithme.

67 **a)** Rappeler les formules d'Euler donnant $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

b) Démontrer que pour tout réel x,

$$\sin(x)\cos^2(x) = \frac{\sin(3x) + \sin(x)}{4}.$$

68 Utiliser les formules d'Euler pour démontrer que pour tout réel x,

$$\cos(x)\sin^2(x) = \frac{-\cos(3x) + \cos(x)}{4}.$$

69 Utiliser les formules d'Euler pour démontrer que pour tout réel x,

$$\cos(2x)\sin^2(x) = -\frac{1}{4}\cos(4x) + \frac{1}{2}\cos(2x) - \frac{1}{4}.$$

70 QCM **Dans chaque cas, donner la réponse exacte sans justifier.**

		A	B	C	D
1	La forme algébrique de $z=10e^{i\frac{3\pi}{4}}$ est …	$10\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$	$-5\sqrt{2}+5i\sqrt{2}$	$5\sqrt{2}-5i\sqrt{2}$	$10e^{-i\frac{\pi}{4}}$
2	La forme exponentielle de $z=2-2i$ est …	$2(1-i)$	$2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$	$2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$
3	$z_1=2e^{-i\frac{\pi}{8}}$ et $z_2=3e^{i\frac{\pi}{2}}$. Un argument de z_1z_2 est …	-6	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{8}$	$-\frac{3\pi}{8}$
4	$z=3\left(\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)$. Un argument de z est …	$\frac{5\pi}{7}$	$\frac{5i\pi}{7}$	$\frac{\pi}{7}$	$\frac{3\pi}{7}$

71 QCM **Dans chaque cas, donner la (ou les) réponse(s) exacte(s) sans justifier.**

		A	B	C	D
1	On donne $z=-2e^{-i\frac{\pi}{6}}$. z admet pour forme …	trigonométrique : $2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$	algébrique : $-\sqrt{3}+i$	exponentielle : $2e^{i\frac{\pi}{6}}$	exponentielle : $2e^{i\frac{5\pi}{6}}$
2	On peut affirmer que …	$5=5e^{2i\pi}$	$2i=e^{i\pi}$	$i=e^{i\frac{\pi}{2}}$	$-7i=7e^{-i\frac{\pi}{2}}$
3	$z_1=e^{i\pi}$ et $z_2=e^{-i\frac{\pi}{2}}$. Alors …	$z_1^5\in\mathbb{R}$	$z_1z_2\in\mathbb{R}$	$\frac{z_1}{z_2}\in\mathbb{R}$	$z_2^4\in\mathbb{R}$
4	On note θ un argument de $z=3-2i$. Alors …	$\cos(\theta)=\frac{z+\overline{z}}{2\|z\|}$	$\sin(\theta)=\frac{z-\overline{z}}{2\|z\|}$	$\cos(\theta)=\frac{6}{\sqrt{13}}$	$\sin(\theta)=-\frac{2}{\sqrt{13}}$
5	On donne $z_1=5e^{i\frac{\pi}{15}}$ et $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=-\frac{3\pi}{5}\ [2\pi]$. Alors …	$\arg(z_2)=\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$	$\arg(z_2)=-\frac{8\pi}{15}\ [2\pi]$	$\arg(z_2)=-\frac{4\pi}{3}\ [2\pi]$	$\arg(z_2)=\frac{8\pi}{15}\ [2\pi]$

72 Vrai/Faux **Dans chaque cas, dire si l'affirmation est vraie ou fausse en justifiant.**

1 **Affirmation :** la forme exponentielle du nombre complexe $10-10i$ est $10e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

2 **Affirmation :** $-5e^{i\frac{\pi}{6}}$ est la forme exponentielle d'un nombre complexe.

3 (z_n) est une suite géométrique de raison $e^{i\frac{3\pi}{2}}$ telle que $z_0=2i$.
Affirmation : z_8 est un nombre imaginaire pur.

4 On a $\frac{19\pi}{12}=\frac{5\pi}{4}+\frac{\pi}{3}$.

Affirmation : $\cos\left(\frac{19\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{4}$

Vérifiez vos réponses : p. 293

73 Retrouver les formules d'addition avec la forme exponentielle

Les formules d'addition données au paragraphe A page 72 sont les suivantes.

Pour tous réels a et b,
① $\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$
② $\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\sin(b)\cos(a)$
③ $\cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$
④ $\sin(a-b)=\sin(a)\cos(b)-\sin(b)\cos(a)$

On se propose d'établir ces formules à l'aide de la forme exponentielle.

1. Les formules ① et ②

Rédiger la démonstration de ces formules en suivant le guide ci-dessous.

a et b désignent des nombres réels.

(1) Utiliser une propriété de $e^{i\theta}$: $e^{ia}\times e^{ib}=\ldots$.

(2) Utiliser des formes trigonométriques :

$e^{ia}=\ldots+i\ldots$ $\quad$ $e^{ib}=\ldots+i\ldots$ $\quad$ $e^{i(a+b)}=\ldots+i\ldots$

(3) Déterminer une forme trigonométrique de $e^{ia}\times e^{ib}$:

$$e^{ia}\times e^{ib}=(\ldots+\ldots)(\ldots+\ldots)=\ldots$$

(4) Conclure : expliquer comment retrouver les formules ① et ② à l'aide de ce qui précède.

2. Les formules ③ et ④

Établir les formules ③ et ④ de deux façons différentes :

a) Remplacer b par $-b$ dans les formules ① et ② ;

b) Reprendre le raisonnement de la question **1**.

▷ Vidéo

JAICOMPRIS.COM

Toutes les démonstrations au programme en vidéo

Liste des démonstrations :
- Démonstration d'une des formules d'addition

Conseil
On peut également retrouver les formules de duplication à partir de l'égalité :
$$e^{ia}\times e^{ia}=e^{i(2a)}$$
Voir l'exercice 84.

74 Démontrer les propriétés de l'argument

Au paragraphe C page 72, on a démontré la propriété **(1)** :

Pour tous nombres complexes non nuls z et z', $\arg(zz')=\arg(z)+\arg(z')\ [2\pi]$.

On se propose de déduire de ce résultat les propriétés **(2)**, **(3)**, **(4)**.

z et z' désignent deux nombres complexes non nuls.

1. a) À partir de l'égalité $z'\times\dfrac{1}{z'}=1$, démontrer que :

$$\arg\left(\frac{1}{z'}\right)=-\arg(z')\ [2\pi].$$

b) À partir de l'égalité $\dfrac{z}{z'}=z\times\dfrac{1}{z'}$, démontrer que :

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right)=\arg(z)-\arg(z')\ [2\pi].$$

2. On démontre par récurrence que pour tout entier naturel $n\geqslant 1$,

$$\arg(z^n)=n\arg(z)\ [2\pi].$$

a) Vérifier que l'égalité est vraie pour $n=1$.

b) On suppose que pour un entier naturel $k\geqslant 1$ donné, $\arg(z^k)=k\arg(z)\ [2\pi]$.
À partir de $z^{k+1}=z\times z^k$, démontrer que l'égalité est vraie au rang $k+1$.

c) Conclure le raisonnement.

75 Déterminer un argument

Déterminer une valeur du nombre réel θ tel que pour tout entier naturel n multiple de 4, le nombre complexe $e^{in\theta}$ soit réel.

Utiliser la forme exponentielle

76 Dans chaque cas, déterminer la forme algébrique, puis une forme exponentielle des nombres complexes z^2 et $\frac{1}{z}$.

a) $z=i$
b) $z=-2i$
c) $z=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$
d) $z=-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$

77 **1.** On donne les nombres complexes :

$$z_1=e^{i\frac{\pi}{3}},\ z_2=e^{-i\frac{\pi}{4}} \text{ et } z_3=e^{i\frac{\pi}{12}}.$$

a) Démontrer que $z_1z_2=z_3$.
b) Déterminer la forme algébrique de z_1 et z_2.
c) En déduire la forme algébrique de z_3.
d) En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et de $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

2. On donne les nombres complexes :

$$z_1=e^{i\frac{\pi}{3}},\ z_2=e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ et } z_3=e^{i\frac{7\pi}{12}}.$$

Reprendre les étapes de la question **1.** afin de donner les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

3. Déterminer les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ en remarquant que $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{12}$.

78 On pose :

$$z_1=(1+i)\left(2+2i\sqrt{3}\right)$$
$$\text{et } z_2=(1-i)\left(2\sqrt{3}-2i\right).$$

a) Écrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.
b) En déduire l'écriture sous forme exponentielle de chacun des nombres complexes.

- z_1z_2
- $\frac{z_1}{z_2}$
- iz_1
- $-i\overline{z}_2$

79 Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. On considère $z=3+i\sqrt{3}$.
Proposition 1 : pour tout entier naturel non nul n, z^{3n} est un imaginaire pur.

2. z est un nombre complexe non nul.
Proposition 2 : si $\frac{\pi}{2}$ est un argument de z, alors :

$$|1+z|=1+|z|.$$

3. z est un nombre complexe non nul.
Proposition 3 : si le module de z est égal à 1, alors $z^2+\frac{1}{z^2}$ est un nombre réel.

80 f est la fonction qui à tout complexe non nul z, associe le nombre complexe $f(z)$ défini par :

$$f(z)=z+\frac{1}{z}.$$

1. Dans chaque cas, déterminer une forme exponentielle de a, puis la forme algébrique de $f(a)$.

a) $a=-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$
b) $a=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. Démontrer que pour tout complexe z de module 1, $f(z)$ est un nombre réel.

81 On donne $z=-2e^{i\frac{\pi}{4}}$.

a) Écrire z sous forme algébrique.
b) Écrire z sous forme exponentielle.
c) Choisir la forme la plus adaptée pour calculer, le plus rapidement possible, chacun des nombres.

- $A=z^8$
- $B=(z+\overline{z})^2$
- $C=\left(z+i\sqrt{2}\right)^2$

82 On donne $z=e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z'=e^{i\frac{2\pi}{3}}$.
Déterminer la forme algébrique du nombre complexe :

$$A=(z+z')^4.$$

Conseil : $(z+z')^4=(z+z')^2\times(z+z')^2$.

83 On donne $z=\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}$ et $z'=2-2i\sqrt{3}$.

a) À l'aide de l'écran de calculatrice ci-dessous, donner une forme exponentielle de z, puis de z'.

```
Arg (√(2+√2) + i√(2-√2))
                          1/8 π
Arg (2-2i√3)
                         -1/3 π
```

b) En déduire une forme exponentielle de zz'.
c) Déterminer les valeurs exactes de :

- $\cos\left(-\frac{5\pi}{24}\right)$
- $\sin\left(-\frac{5\pi}{24}\right)$
- $\tan\left(-\frac{5\pi}{24}\right)$

d) En déduire les valeurs exactes de :

- $\cos\left(\frac{19\pi}{24}\right)$
- $\sin\left(\frac{19\pi}{24}\right)$
- $\tan\left(\frac{19\pi}{24}\right)$

84 a désigne un nombre réel.
À l'aide de l'égalité $\left(e^{ia}\right)^2=e^{2ia}$, retrouver les formules de duplication énoncées au paragraphe **B** page 72.

85 Pour chacune des affirmations ci-dessous, indiquer si elle est vraie ou fausse. Justifier.

Affirmation 1

L'équation $z - i = -i(z-1)$ a pour solution $\sqrt{2}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$.

Affirmation 2

Pour tout réel $x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$, le nombre complexe $1+\mathrm{e}^{2ix}$ admet pour forme exponentielle $2\cos(x)\mathrm{e}^{-ix}$.

Affirmation 3

Le nombre complexe $2-\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{5}}$ a pour module 1.

Affirmation 4

Le nombre complexe $3-\left(2\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+2i\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)$ a pour forme exponentielle $\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{7}}$.

86 On pose $j = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}$.

1. a) Vérifier que $j^3 = 1$.

b) Démontrer que $j^2 = -1-j$.

2. a, b, c désignent des nombres complexes tels que :

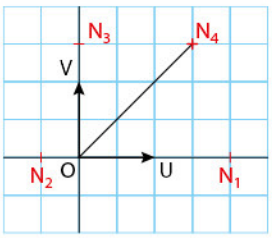
$$a + jb + j^2c = 0.$$

a) Démontrer que $a - c = j(c-b)$.

b) Démontrer que $a - b = j^2(b-c)$.

87 Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\overrightarrow{\mathrm{OU}},\overrightarrow{\mathrm{OV}})$ ci-dessous.

z_1, z_2, z_3, z_4 sont les affixes des points N_1, N_2, N_3, N_4.



a) Déterminer la forme exponentielle de chacun des nombres complexes z_1, z_2, z_3, z_4.

b) Dans chaque cas, déterminer le plus petit nombre entier naturel $n \geqslant 2$ qui vérifie la condition :

- z_1^n est un nombre réel positif ;
- z_2^n est un nombre réel négatif ;
- z_3^n est un nombre réel positif ;
- z_4^n est un nombre imaginaire pur.

c) Déterminer les nombres entiers naturels $n \geqslant 1$ tels que z_1^n, z_2^n, z_3^n, z_4^n soient des nombres réels positifs.

d) Existe-t-il des nombres entiers naturels $n \geqslant 1$ tels que z_1^n, z_2^n, z_3^n, z_4^n soient des imaginaires purs ?

Résoudre avec les nombres complexes

88 (z_n) est la suite définie par $z_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $z_{n+1} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}+i\right)z_n$.

a) Écrire $-\frac{\sqrt{3}}{3}+i$ sous forme exponentielle.

b) Démontrer que pour tout entier naturel n,

$$z_n = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^n \mathrm{e}^{\frac{2in\pi}{3}}.$$

c) Pour tout entier naturel n, on pose $d_n = |z_n|$.
Démontrer que la suite (d_n) est géométrique de raison $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

d) Calculer la somme $S = d_0 + d_1 + \ldots + d_{10}$.

89 On considère l'équation :

$$(\mathbf{E}) : z^3 - 2z^2 + 2z - 4 = 0.$$

a) Vérifier que 2 est solution de l'équation (**E**).

b) Vérifier que, pour tout complexe z,

$$z^3 - 2z^2 + 2z - 4 = (z-2)\left(z+i\sqrt{2}\right)\left(z-i\sqrt{2}\right).$$

c) En déduire toutes les solutions de (**E**).
Donner ces solutions sous forme exponentielle.

90 **Algo** python

(z_n) est la suite définie par $z_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $z_{n+1} = (1-i)z_n + i$.

1. Voici une fonction **Suite** écrite en langage Python.

```python
from cmath import *

def Suite():
    z=2
    n=0
    while abs(z)<=100:
        z=(1-1j)*z+1j
        n=n+1
    return n
```

a) Expliquer le rôle de cette fonction.

b) Saisir et exécuter cette fonction.
Quelle valeur de n renvoie-t-elle ?

2. (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = z_n - 1$.

a) Démontrer que la suite (u_n) est géométrique.
Donner son premier terme et sa raison sous forme exponentielle.

b) Pour tout entier naturel n, exprimer u_n, puis z_n en fonction de n.

c) Calculer $|z_{13}|$ et $|z_{14}|$ afin de retrouver le résultat donné par la fonction **Suite**.

91 On note $\lambda = e^{i\theta}$ avec $\theta \in]0\,;\pi[$.

(z_n) est la suite définie par $z_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $z_{n+1} = \lambda z_n + i$.

1. a) Justifier que $z_1 = i$, $z_2 = (1+\lambda)i$ et $z_3 = \left(1+\lambda+\lambda^2\right)i$.

b) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n,

$$z_n = \frac{1-\lambda^n}{1-\lambda}i.$$

2. Dans cette question, $\theta = \frac{\pi}{2}$.

a) Calculer z_4.

b) Pour tout entier naturel n, exprimer z_{n+4} en fonction de z_n.

3. Dans cette question, $\theta = \frac{3\pi}{2}$.

a) Calculer z_4.

b) Pour tout entier naturel n, exprimer z_{n+4} en fonction de z_n.

92 **1.** a et b désignent deux nombres réels. Développer $(a+b)^4$.

2. a) À l'aide d'une formule d'Euler, démontrer que pour tout réel x,

$$\cos^4(x) = \frac{1}{8}(\cos(4x) + 4\cos(2x) + 3).$$

b) Justifier cet affichage obtenu à la calculatrice.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\ (x))^4 dx$$

0.5890486225

3. a) x désigne un nombre réel.

Exprimer $\sin^4(x)$ en fonction de $\cos(2x)$ et $\cos(4x)$.

b) Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4(x)\mathrm{d}x$.

Vérifier le résultat à la calculatrice.

93 **1. a)** x désigne un nombre réel.

Rappeler la formule de duplication qui exprime $\sin(2x)$ en fonction de $\sin(x)$ et $\cos(x)$.

b) À l'aide de cette formule, calculer l'intégrale :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\sin(x)\mathrm{d}x.$$

c) Proposer une autre méthode pour calculer cette intégrale.

2. a) x désigne un nombre réel.

Démontrer que $\sin^2(x)\cos^2(x) = \frac{1}{4}\left(\frac{e^{i2x} - e^{-i2x}}{2i}\right)^2$.

En déduire que $\sin^2(x)\cos^2(x) = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos(4x)$.

b) Calculer l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)\sin^2(x)\mathrm{d}x$.

94 **Algo** python

(z_n) est la suite géométrique de premier terme $z_0 = 1$ et de raison $q = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

1. Voici une fonction **S** écrite en langage Python.

```python
from cmath import *

def S(n):
    z=1
    S=z
    for k in range(1,n+1):
        z=z*(sqrt(2)+sqrt(2)*1j)
        S=S+z
    return S
```

a) Expliquer le rôle de cette fonction.

b) Saisir et tester cette fonction pour :

- $n = 4$
- $n = 10$

Dans chaque cas, donner le résultat qu'elle renvoie.
Arrondir au dixième.

2. Pour tout entier naturel n, on note :

$$S_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n.$$

a) Écrire q sous forme exponentielle.

b) Exprimer S_n en fonction de n.

c) Retrouver par le calcul les résultats obtenus à la question **1. b)**.

S'ENTRAÎNER À LA LOGIQUE → p. 290

95 **Contre-exemple**

Chacune des affirmations ci-dessous est fausse. Utiliser un contre-exemple pour la contredire.

Affirmation 1

La forme exponentielle d'un nombre imaginaire pur de module 1 est $e^{i\frac{\pi}{2}}$.

Affirmation 2

La forme exponentielle d'un nombre réel de module 5 est $5e^{2i\pi}$.

Affirmation 3

Deux nombres complexes qui ont le même argument ont la même forme exponentielle.

96 **Implication et réciproque**

Pour chaque question, dire si :

- l'implication : « Si **P**, alors **Q** » est vraie.
- la réciproque : « Si **Q**, alors **P** » est vraie.

Justifier.

a) P : « $z = 3e^{-\frac{i\pi}{4}}$ ». **Q** : « z^8 est un nombre réel ».

b) P : « $e^{i\theta}$ est un nombre imaginaire pur ».
Q : « $e^{2i\theta}$ est un nombre réel ».

c) P : « $(1+i)z = e^{i\frac{7\pi}{12}}$ ».
Q : « $\arg(z) = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ ».

97 Calculer une somme de termes

Raisonner | Calculer

(z_n) est la suite définie par $z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$ et pour tout entier naturel n,

$$z_{n+1} = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}z_n + 2 - i.$$

1. Déterminer, sous forme algébrique, les trois premiers termes de la suite (z_n).

2. (u_n) est la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = z_n + 1 + 2i.$$

a) Démontrer que la suite (u_n) est géométrique de raison $1 - i$.

Préciser la forme algébrique de son premier terme.

b) Pour tout entier naturel n, exprimer u_n en fonction de n, puis z_n en fonction de n.

3. Exprimer en fonction de n la somme :

$$S_n = z_0 + z_1 + z_2 + \ldots + z_n.$$

98 Prendre des initiatives

Chercher | Raisonner

Pour tout entier naturel n, on pose :

$$S_n = (1+i)^n + (1-i)^n.$$

Démontrer que pour tout entier naturel n, S_n est un nombre réel.

99 Résoudre une équation trigonométrique

Raisonner | Calculer

1. x est un nombre réel.

a) Exprimer en fonction de x, la forme algébrique et une forme exponentielle du nombre complexe.

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)e^{ix}.$$

b) En déduire la résolution dans $]-\pi\,;\pi]$ de l'équation :

$$\sqrt{3}\cos(x) + \sin(x) = \sqrt{2}.$$

2. Résoudre dans l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$ chaque équation.

a) $\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) = \sqrt{3}$

b) $\cos(x) - \sin(x) = 1$

c) $\cos(x) + \sin(x) = -\sqrt{2}$

100 Démontrer une égalité

Chercher | Calculer

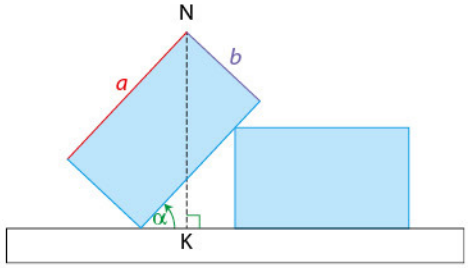
Démontrer l'égalité suivante :

$$e^{i\frac{\pi}{14}} \times e^{i\frac{\pi}{7}} \times e^{i\frac{3\pi}{14}} \times e^{i\frac{2\pi}{7}} \times e^{i\frac{5\pi}{14}} \times e^{i\frac{3\pi}{7}} = -i.$$

101 Trouver l'angle

Chercher | Raisonner | Calculer

Deux rectangles identiques de dimensions $a = \sqrt{3}$ et $b = 1$ sont disposés comme indiqué ci-dessous.



On se propose de déterminer la valeur de α pour laquelle la distance NK est égale à $\sqrt{2}$.

1. Démontrer que $\mathrm{NK} = a\sin(\alpha) + b\cos(\alpha)$.

2. a) Écrire sous forme exponentielle le nombre complexe :

$$Z = e^{i\alpha}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

b) Écrire la forme algébrique de Z.

c) Déduire de ce qui précède, la résolution dans $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ de l'équation $\sqrt{3}\sin(\alpha) + \cos(\alpha) = \sqrt{2}$.

Conclure.

102 Utiliser des propriétés

? Problème ouvert

Raisonner | Calculer

Calculer la valeur exacte de chacun des nombres suivants :

- $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$
- $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$
- $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$
- $\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)$
- $\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right)$
- $\sin\left(\frac{7\pi}{8}\right)$

103 Choisir la forme appropriée

Raisonner | Calculer

Un nombre complexe z est donné sous forme algébrique :

$$z = 1 - i.$$

a) Écrire z sous forme exponentielle.

b) Choisir la forme appropriée de z pour déterminer la forme algébrique de chacun des nombres suivants :

- $A = z^{12} + z^4 + 2$
- $B = 4(z+i)^{10} - 5$
- $C = (z + \bar{z})^6$
- $D = 1 + z + z^2 + \ldots + z^7$

104 Find a real number

Raisonner | Calculer | Communiquer

n is a positive integer and z is a complex number with modulus 1 such that z^{2n} is not -1.

Show that $\dfrac{z^n}{1+z^{2n}}$ is a real number.

105 Trouver une solution d'une équation

Raisonner | Calculer

a) z est un nombre complexe différent de 1.
Justifier que :

$$1+z+z^2+...+z^9=\frac{z^{10}-1}{z-1}.$$

b) En déduire un nombre complexe z, écrit sous forme exponentielle, qui est solution de l'équation :

$$1+z+z^2+...+z^9=0.$$

106 Calculer la longueur d'une spirale

Représenter | Raisonner | Calculer

(a_n) est la suite définie par $a_0=1$ et pour tout entier naturel n, $a_{n+1}=(2+2i)a_n$.
Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}\,;\overrightarrow{\mathrm{OU}},\overrightarrow{\mathrm{OV}}\right)$, on note A_n le point d'affixe a_n.

1. a) Déterminer une forme exponentielle de chacun des termes a_1 à a_5 de la suite.

b) Placer les points A_0 à A_5 dans le plan complexe.

2. On se propose de calculer la longueur de la spirale $\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3\mathrm{A}_4\mathrm{A}_5$.

a) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$a_{n+1}-a_n=(2+2i)(a_n-a_{n-1}).$$

b) Pour tout entier naturel n, on pose $\ell_n=|a_{n+1}-a_n|$.
Interpréter géométriquement le nombre ℓ_n.
Démontrer que (ℓ_n) est une suite géométrique. Préciser son premier terme et sa raison.

c) Calculer $\mathrm{S}=\ell_0+\ell_1+\ell_2+\ell_3+\ell_4$.
Interpréter le résultat obtenu.

107 Démontrer une égalité

Narration de recherche

Chercher | Calculer | Communiquer

Rédiger les différentes étapes de la recherche, sans omettre les fausses pistes ou les changements de méthode.

Problème
Déterminer tous les nombres entiers naturels n pour lesquels :

$$\left(1+i\sqrt{3}\right)^n=\left(1-i\sqrt{3}\right)^n.$$

108 Algo python
Étudier une suite de modules

Raisonner | Calculer

(z_n) est la suite définie par $z_0=\sqrt{3}-i$ et pour tout entier naturel n, $z_{n+1}=\sqrt{2}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}z_n$.

1. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n=|z_n|$.

a) Calculer u_0.

b) Démontrer que (u_n) est une suite géométrique. Quelle est sa raison ?

c) Pour tout entier naturel n, exprimer u_n en fonction de n.

d) Déterminer la limite de la suite (u_n).

2. Étant donné un nombre réel positif p, on souhaite déterminer, à l'aide d'une fonction **L**, la plus petite valeur de n telle que $u_n>p$.

a) Voici cette fonction écrite en langage Python. Compléter le programme.

```
from math import *

def L(p):
    u=2
    n=0
    while u<=p:
        u=
        n=
    return n
```

b) Saisir la fonction et l'exécuter afin de trouver la valeur cherchée de l'entier naturel n :

- lorsque $p=200$,
- lorsque $p=10\,000$.

3. a) Déterminer la forme algébrique de z_1.

b) Déterminer la forme exponentielle de chacun des nombres complexes :

- $1+i$
- z_0
- z_1

c) Déduire des questions précédentes la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

109 Imaginer une stratégie

Raisonner | Calculer

Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on pose :

$$\mathrm{S}_n=\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)+\ldots+\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right).$$

a) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$,

$$\mathrm{S}_n=\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)}.$$

b) Quelle est la limite de la suite (S_n) ?

110 Calculer la longueur d'une ligne brisée

Algo python

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O\,;\overrightarrow{OU},\overrightarrow{OV}\right)$.
On pose $z_0 = 8$ et pour tout entier naturel n :

$$z_{n+1} = \frac{3 - i\sqrt{3}}{4} z_n.$$

On note A_n le point du plan d'affixe z_n.

1. a) Vérifier que :

$$\frac{3 - i\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-i\frac{\pi}{6}}.$$

b) En déduire l'écriture de chacun des nombres complexes z_1, z_2 et z_3 sous forme exponentielle et vérifier que z_3 est un imaginaire pur dont on précisera la partie imaginaire.

c) Représenter graphiquement les points A_0, A_1, A_2 et A_3 : prendre pour unité le centimètre.

2. a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n,

$$z_n = 8 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n e^{-in\frac{\pi}{6}}.$$

b) Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = |z_n|$.
Déterminer la nature et la limite de la suite (u_n).

3. a) Démontrer que pour tout entier naturel k,

$$\frac{z_{k+1} - z_k}{z_{k+1}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} i.$$

En déduire que pour tout entier naturel k, $A_kA_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{3}} OA_{k+1}$.

b) Pour tout entier naturel n, on note ℓ_n la longueur de la ligne brisée reliant dans cet ordre les points A_0, A_1, A_2, …, A_n.
Ainsi $\ell_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \ldots + A_{n-1}A_n$.
Démontrer que la suite (ℓ_n) est convergente et déterminer sa limite.

4. On souhaite représenter graphiquement la ligne brisée reliant les points A_0 à A_{24} à l'aide d'un programme. Voici ce programme incomplet, écrit en langage Python.

```python
from math import *
from pylab import *

for k in range(0,25):
    x1=8*(sqrt(3)/2)**k*cos(-k*pi/6)
    y1=
    x2=
    y2=
    a=[x1,x2]
    b=[y1,y2]
    plot(a,b,'red')
show()
```

a) Compléter les cases colorées de ce programme.

b) Saisir ce programme et l'exécuter.

111 Utiliser les coordonnées polaires

Partie A

1. Utiliser la forme exponentielle des nombres complexes pour démontrer la formule d'addition suivante :

pour tous réels a et b, $\cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$.

2. Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}\,;\overrightarrow{\mathrm{OU}},\overrightarrow{\mathrm{OV}}\right)$.
On note $\mathscr{D}$ la droite d'équation : $y=-x+2$.

a) θ désigne un nombre réel.
Montrer que si θ appartient à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right[$, alors $\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)>0$.

b) Exprimer $\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.

CONSEIL
2. a) Placer θ sur un cercle trigonométrique, puis $\theta-\frac{\pi}{4}$ afin de visualiser la situation. Pour justifier la réponse, commencer la démonstration par :
$$-\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{3\pi}{4}\ldots$$

3. M désigne un point du plan complexe d'affixe non nulle z.
On note $\rho=|z|$ le module de z et $\theta=\arg(z)$ un argument de z.
Les nombres ρ et θ sont appelés les **coordonnées polaires** du point M.

a) Montrer que si le point M appartient à la droite $\mathscr{D}$, alors ses coordonnées polaires vérifient :

$$(*)\quad \rho=\frac{\sqrt{2}}{\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)} \text{ avec } \theta\in\left]-\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right[.$$

b) Réciproquement, montrer que si les coordonnées polaires de M vérifient la relation (*), alors le point M appartient à la droite $\mathscr{D}$.

4. Tracer la droite $\mathscr{D}$ dans le repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}\,;\overrightarrow{\mathrm{OU}},\overrightarrow{\mathrm{OV}}\right)$.
Placer le point M pour chacune des valeurs :

- $\theta=0$
- $\theta=\frac{\pi}{4}$
- $\theta=\frac{\pi}{2}$

Dans chaque cas, calculer ρ.

Partie B

On se propose de déterminer les coordonnées du point de la droite $\mathscr{D}$ le plus proche de l'origine O du repère en utilisant deux méthodes.

1. Première méthode : à l'aide des résultats de la **partie A**

a) M est un point de la droite $\mathscr{D}$.
Pour quelle valeur de θ la distance OM est-elle minimum ?

b) En déduire les coordonnées du point cherché.

2. Seconde méthode : à l'aide des coordonnées

a) $\mathrm{M}(x\,;y)$ est un point de la droite $\mathscr{D}$.
Exprimer OM^2 en fonction de x.

b) Pour tout réel x, on pose $f(x)=\mathrm{OM}^2$.
Déterminer le minimum de la fonction f.

c) En déduire les coordonnées du point cherché.

Partie C

On se propose de déterminer les points M de la droite $\mathscr{D}$ dont la distance à l'origine O du repère est inférieure ou égale à 2.
Appliquer les deux méthodes vues dans la **partie B** pour déterminer ces points.

112 Étudier une suite de nombres complexes

Algo python

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O\,;\overrightarrow{OU},\overrightarrow{OV}\right)$.
On considère la suite de nombres complexes (z_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$z_n = \frac{1+i}{(1-i)^n}.$$

Pour tout entier naturel n, on note A_n le point d'affixe z_n.

Partie A : étude de la suite (z_n)

1. a) Déterminer une forme exponentielle de chacun des nombres complexes $1+i$ et $1-i$.
b) En déduire, pour tout entier naturel n, une forme exponentielle de z_n.

2. a) Déterminer la forme algébrique de chacun des nombres complexes z_0, z_1, z_2, z_3 et z_4.
b) Représenter graphiquement les points A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4 : prendre 4 cm pour unité.

3. n désigne un nombre entier naturel.
a) Démontrer que $\frac{z_{n+4}}{z_n}$ est un nombre réel.
b) En déduire que les points O, A_n et A_{n+4} sont alignés.

4. n désigne un nombre entier naturel.
a) Démontrer que $\frac{z_{n+2}}{z_n}$ est un nombre imaginaire pur.
b) En déduire que les droites (OA_n) et (OA_{n+2}) sont perpendiculaires.

5. Déterminer les valeurs du nombre entier naturel n telles que :
a) z_n est un nombre réel ;
b) z_n est un nombre imaginaire pur.

CONSEIL
3. b) On démontre à l'aide du résultat précédent que les vecteurs $\overrightarrow{OA_n}$ et $\overrightarrow{OA_{n+4}}$ sont colinéaires.

CONSEIL
4. b) D'après le résultat précédent, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $z_{n+2} = \lambda i z_n$. On calcule alors le produit scalaire $\overrightarrow{OA_n} \cdot \overrightarrow{OA_{n+2}}$.

Partie B : étude de la suite des modules

Pour tout entier naturel n, on pose :

$$d_n = |z_n| \text{ et } S_n = d_0 + d_1 + \ldots + d_n.$$

1. a) Pour tout entier naturel n, exprimer d_n en fonction de n.
b) Préciser la nature de la suite (d_n).

2. a) Pour tout entier naturel n, exprimer S_n en fonction de n.
b) Calculer S_4.
c) Déterminer la limite ℓ de la suite (S_n).

Partie C : avec un programme

p désigne un nombre réel strictement positif.
a) Écrire, en langage Python, une fonction **Seuil** de paramètre p qui renvoie pour résultat le plus petit entier naturel n tel que $|S_n - \ell| < p$.
b) Saisir et tester cette fonction pour des valeurs de p de plus en plus petites.

113 Les intégrales de Wallis

Les intégrales de Wallis sont définies pour tout nombre entier naturel n par :

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Des exemples

a) Calculer les deux premières intégrales de Wallis, c'est-à-dire W_0 et W_1.

b) Exprimer $\sin^2(t)$ en fonction de $\cos(2t)$.
Calculer W_2.

c) Exprimer $\sin^3(t)$ en fonction de $\sin(3t)$ et $\sin(t)$.
Calculer W_3.

2. Résultats préliminaires

Démontrer que pour tout entier naturel p,

- $2p(2p-2)\times\ldots\times 2 = 2^p p!$
- $(2p-1)(2p-3)\times\ldots\times 1 = \dfrac{(2p)!}{2p(2p-2)\times\ldots\times 2}$
- $\dfrac{(2p+2)!}{2(p+1)(2p+1)!} = 1$

3. Cas général

a) À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel n,

$$W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n.$$

b) En déduire que pour tout entier naturel p,

- $W_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \times \dfrac{\pi}{2}$
- $W_{2p+1} = \dfrac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$.

c) Démontrer que la suite (C_n) définie pour tout entier naturel n par $C_n = (n+1)W_{n+1} \times W_n$ est constante.

Conseil : penser à utiliser le résultat de la question **2. b)**.

d) En déduire que pour tout nombre entier naturel n,

$$W_{n+1} \times W_n = \frac{\pi}{2(n+1)}.$$

HISTOIRE DES MATHS

Mathématicien anglais, John Wallis (1616-1703) est également connu pour ses travaux sur l'orthophonie et l'éducation des malentendants.

114 Formule du binôme

1. On note $z = 1 + i$ et $\overline{z}$ son conjugué.

a) Déterminer une forme trigonométrique, puis une forme exponentielle de z, puis de $\overline{z}$.

b) Pour tout entier naturel n, on pose :

$$S_n = z^n + \overline{z}^n.$$

Démontrer que pour tout entier naturel n,

$$S_n = \lambda_n \cos\left(n\frac{\pi}{4}\right)$$

où λ_n est un nombre réel dépendant de n, dont on donnera l'expression.

c) Pour quelles valeurs de n a-t-on $S_n = 0$?

d) Démontrer que si n est pair, alors S_n est un nombre entier relatif.

2. On suppose que n est un nombre entier naturel pair et on pose $n = 2p$ (avec $p \in \mathbb{N}$).

a) Utiliser la formule du binôme pour écrire les développements de $(1+i)^{2p}$ et $(1-i)^{2p}$ à l'aide des puissances de i, que l'on ne cherchera pas à simplifier dans cette question.

b) Simplifier chacune des expressions :

- $i^{2p+1} + (-i)^{2p+1}$
- $i^{2p} + (-i)^{2p}$

c) Dans cette question, $n = 24$.

Justifier que $\displaystyle\sum_{k=0}^{12} (-1)^k \binom{24}{2k} = 2^{12}$.

Des Défis

115 Comparer des aires

Quelle est la plus grande aire : l'aire du domaine bleu ou l'aire du domaine violet ?