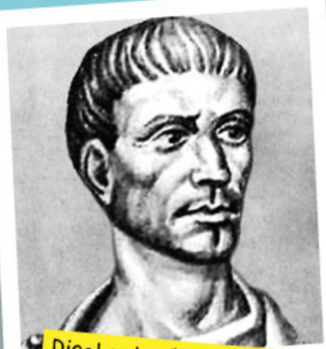
6 Divisibilité et congruences dans $\mathbb{Z}$

HISTOIRE DES MATHS

Au 3^{e} millénaire avant notre ère, les Égyptiens et les Mésopotamiens utilisent les opérations usuelles, en particulier la division qui apparaît dans les situations courantes.

Plus tard, vers 300 avant notre ère, **Euclide** rédige à Alexandrie un traité formé de treize livres qui rassemblent les *Éléments* mathématiques connus à l'époque. En particulier, les livres VII à IX contiennent un exposé de l'arithmétique, mais il s'agit d'une approche géométrique car les mathématiciens grecs voient les nombres comme des grandeurs (distances, aires, ...).

Étudiées pour la première fois par Gauss au début du 19^{e} siècle, les congruences liées à la notion de division, offrent un langage efficace pour résoudre certains problèmes d'arithmétique et mènent à l'arithmétique modulaire.



Diophante d'Alexandrie

Hypatie

- **Diophante d'Alexandrie** (vers 3^{e} avant notre ère) est un mathématicien grec, auteur des *Arithmétiques*, ouvrage de grande influence dans l'histoire des mathématiques. Il y résout plus de 100 problèmes à l'aide d'équations dont les solutions sont des rationnels positifs. Il nomme *arithme* l'inconnue.
- **Hypatie d'Alexandrie** (vers 350-415) est l'une des premières mathématiciennes, professeur de renom de philosophie et d'astronomie. On lui attribue un commentaire sur les *Arithmétiques* de Diophante.

Vers –300
Euclide rédige les *Éléments*.

Vers –250
Archimède s'attaque au problème de la rectification du cercle.

Vers 100
Théon de Smyrne approche les nombres irrationnels.

Vers 200
Nicomaque écrit *Introduction à l'arithmétique*.

–331 Alexandre le Grand fonde Alexandrie

Vers –250 Première guerre punique

–52 Défaite de Vercingétorix face à Jules César à la bataille d'Alésia

Vers 120 Apogée de l'Empire Romain

Vers 310 Changement de Lutèce en Paris

–400 –300 –200 –100 100 200 300 400

Code barre par l'artiste David Ferreira.

Les codes numériques (codes-barres, code Insee, RIB, …) sont apparus pour réaliser le traitement informatique des données ; leur validité est souvent assurée par une clé de contrôle.

Le calcul de cette clé, réalisé par un algorithme à partir des données du code, repose sur des principes arithmétiques.

Les contenus et capacités travaillés dans ce chapitre

	Savoir-faire	Exercices
• Divisibilité dans $\mathbb{Z}$.	1 à 4	23 à 38
• Déterminer les diviseurs, les multiples d'un entier.		20 à 22
• Division euclidienne d'un élément de $\mathbb{Z}$ par un élément de $\mathbb{N}^*$.	5 à 10, 16, 18	39 à 53
• Congruences dans $\mathbb{Z}$, compatibilité avec les opérations.	11 à 15, 17, 19	54 à 82
• Établir et utiliser des tests de divisibilité.		82, 119

Calcul mental

Rappels utiles

• Division euclidienne

Effectuer la **division euclidienne** d'un nombre entier naturel a par un nombre entier naturel b avec $b \neq 0$, c'est trouver deux nombres entiers naturels, le quotient q et le reste r tels que :

$$\begin{array}{l|l} a & b \\ \hline r & q \end{array}$$

$$\boldsymbol{a = b \times q + r} \text{ avec } \boldsymbol{r < b}.$$

• Multiples d'un nombre

a désigne un nombre entier relatif et b un nombre entier naturel avec $b \neq 0$.

Dire que a est **un multiple** de b signifie qu'il existe un nombre k de $\mathbb{Z}$ tel que :

$$a = k \times b.$$

• Nombres pairs, impairs

Les nombres pairs sont les nombres n de $\mathbb{Z}$ qui peuvent s'écrire $n = 2k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Les nombres impairs sont les nombres n de $\mathbb{Z}$ qui peuvent s'écrire $n = 2k + 1$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

• Tests de divisibilité

Un nombre entier relatif est divisible :

– par 2, lorsque son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8 ;

– par 5, lorsque son chiffre des unités est 0 ou 5 ;

– par 3, lorsque la somme de ses chiffres est divisible par 3 ;

– par 9, lorsque la somme de ses chiffres est divisible par 9.

À l'oral — Questions-Tests

Pour chaque question, il y a une seule réponse exacte.

1 Dans la division euclidienne de 93 par 18,

a) le quotient est :

(1) 6 (2) 5 (3) 5,1

b) le reste est :

(1) –15 (2) 1,2 (3) 3

2 Un nombre multiple de 13 est :

(1) 41 (2) 76 (3) 91

3 Le nombre de multiples de 5 entre –27 et 31 est égal à :

(1) 11 (2) 12 (3) 13

4 Le nombre de couples $(a\,;b)$ d'entiers naturels tels que $a \times b = 21$ est :

(1) 4 (2) 2 (3) 1

5 Le nombre de diviseurs dans $\mathbb{N}$ de l'entier 32 est égal à :

(1) 4 (2) 5 (3) 6

6 Laquelle de ces affirmations est exacte ?

(1) La somme de deux nombres pairs est un nombre pair.

(2) La somme de deux nombres impairs est un nombre impair.

(3) La somme d'un nombre pair et d'un nombre impair est un nombre pair.

7 Laquelle de ces affirmations est exacte ?

(1) Le carré d'un nombre pair est un nombre pair.

(2) Le carré d'un nombre impair est un nombre pair.

(3) Le produit d'un nombre pair et d'un nombre impair est impair.

8 Le nombre 75 648 est divisible par :

(1) 3 (2) 5 (3) 9

9 $N = \underbrace{11\ldots1}_{\text{12 répétitions de 1}}$

Ce nombre est divisible par :

(1) 2 (2) 3 (3) 5

1 Écriture d'un nombre et divisibilité

Louise : « Choisis un nombre entier naturel de trois chiffres et écris-le deux fois côte à côte pour former un nombre de six chiffres. Donne-moi ce nombre. »
Paul : « J'ai choisi 342 342. »
Louise : « Ton nombre est divisible par 91 ! »
Paul vérifie avec sa calculatrice :
« Tu as raison ! Quel est ton truc ? ».

1 Conjecture
a) Former de tels nombres. Sont-ils divisibles par 91 ?
b) Énoncer une conjecture.

2 Démonstration
On note $\overline{abcabc}$ (avec $a \neq 0$) un tel nombre.
a) Montrer à l'aide de l'information ci-contre que :

$$\overline{abcabc} = 100\,100\,a + 10\,010\,b + 1\,001\,c$$

b) En déduire que $\overline{abcabc}$ est divisible par 91.

3 D'autres diviseurs
Donner d'autres diviseurs des nombres proposés par Louise.

En arithmétique, l'écriture :

$$\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$$

où a_n, a_{n-1}, …, a_1, a_0 sont des chiffres avec $a_n \neq 0$ représente un nombre entier naturel à $n+1$ chiffres.
Ce nombre est :

$$a_n \times 10^n + \ldots + a_2 \times 10^2 + a_1 \times 10 + a_0.$$

2 Le vocabulaire des congruences

L'année 2020 est bissextile, on numérote les 366 jours de cette année de 1 à 366 et on repère ainsi chaque jour de l'année par un numéro.
Le 1[er] janvier 2020, jour numéroté 1, est un mercredi.

1 **a)** Parmi les jours numérotés 134, 166, 267, 343, quels sont ceux qui correspondent à un mercredi ?
b) Comment reconnaître qu'un jour numéroté n correspond à un mercredi ?
c) De même, comment reconnaître qu'un jour numéroté n correspond à un dimanche ? un mardi ?

2 **a)** n et m sont deux nombres entiers naturels compris entre 1 et 366. Voici deux propositions :
P : « Les jours numérotés n et m correspondent à un même jour de la semaine. »
Q : « n et m ont le même reste dans la division euclidienne par 7. »
Justifier que ces propositions sont équivalentes.
Lorsque P et Q sont vraies, on dit que n et m sont congrus modulo 7 et on note :

$$n \equiv m\ [7].$$

b) Dans chacun des cas suivants, dire si les jours numérotés n et m correspondent à un même jour de la semaine.
- $n = 149$ et $m = 289$
- $n = 259$ et $m = 329$
- $n = 78$ et $m = 359$

Exercices
• 1 à 4 (ci-contre)
• 20 à 38

1 Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des nombres entiers naturels.
$\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des nombres entiers relatifs.

A Multiples et diviseurs d'un nombre entier relatif

Définition

a et b désignent des nombres entiers relatifs.
Dire que ***a* divise *b*** signifie qu'il existe un **nombre entier relatif** k tel que $b = k \times a$.

Vocabulaire : on dit aussi que « a est un diviseur de b » ou que « b est un multiple de a ».

Exemples

- 23 divise -276. En effet, $-276 = (-12) \times 23$.
- Pour tout nombre entier relatif n, $n-1$ divise $n^2 + 3n - 4$.
En effet, $n^2 + 3n - 4 = (n+4)(n-1)$ et $n+4 \in \mathbb{Z}$.

Conséquences immédiates

- Tout nombre entier relatif a divise 0. En effet, $0 = 0 \times a$.
- Si a divise b et $b \neq 0$, alors $|a| \leqslant |b|$.

En effet, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $b = k \times a$, donc $|b| = |k| \times |a|$, comme $b \neq 0$, alors $|k| \neq 0$, ainsi $|k| \geqslant 1$ et $|b| \geqslant |a|$.

- Tout nombre entier relatif non nul b admet un nombre fini de diviseurs.

En effet, les diviseurs de b sont compris entre $-|b|$ et $|b|$.

B Propriétés de la divisibilité dans $\mathbb{Z}$

Propriétés

a, b et c désignent des nombres entiers relatifs.
Si a divise b et c, alors a divise $b+c$, $b-c$ et plus généralement, pour tous nombres entiers relatifs u et v, a divise $bu + cv$.

Démonstration

a divise b et c, donc il existe des nombres entiers relatifs k et k' tels que :

$$b = k \times a \text{ et } c = k' \times a.$$

Alors, pour tous nombres entiers relatifs u et v, $bu + cv = a(ku + k'v)$ avec $ku + k'v \in \mathbb{Z}$.
Donc a divise $bu + cv$.

Vocabulaire : on dit que $bu + cv$ est une **combinaison linéaire** de b et c.

Conséquence : si a divise b et c, alors a divise $b + c \,(u = v = 1)$ et $b - c$ $(u = 1,\ v = -1)$.

Exemple

n désigne un nombre entier relatif.
a désigne un nombre entier relatif qui divise $n-3$ et $2n+1$.
Alors, a divise la combinaison linéaire $1 \times (2n+1) - 2 \times (n-3)$ de ces deux nombres.
$1 \times (2n+1) - 2(n-3) = 2n + 1 - 2n + 6 = 7$, donc a divise 7.

EXERCICES RÉSOLUS

1 Utiliser les propriétés de la divisibilité

Déterminer les nombres entiers relatifs n tels que $n-1$ divise $n+5$.

Solution

• Si $n-1$ divise $n+5$, comme $n-1$ divise $n-1$, alors $n-1$ divise toute combinaison linéaire de $n+5$ et $n-1$.
En particulier $n-1$ divise $(n+5)-(n-1)$, soit $n-1$ divise 6.
• Réciproquement, si $n-1$ divise 6, comme $n-1$ divise $n-1$, alors $n-1$ divise la somme $(n-1)+6$, soit $n-1$ divise $n+5$.

Conclusion
$n-1$ divise $n+5$ **si, et seulement si,** $n-1$ divise 6.
Les diviseurs de 6 sont -6 ; -3 ; -2 ; -1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 6.
Donc l'ensemble des nombres entiers relatifs cherché est $\{-5 ; -2 ; -1 ; 0 ; 2 ; 3 ; 4 ; 7\}$.

E est l'ensemble des $n \in \mathbb{Z}$ tels que $n-1$ divise $n+5$.
F est l'ensemble des $n \in \mathbb{Z}$ tels que $n-1$ divise 6.
On démontre :
• si $n \in$ E, alors $n \in$ F, ainsi E $\subset$ F
• réciproquement, si $n \in$ F, alors $n \in$ E, ainsi F $\subset$ E.
Conclusion : E = F.

2 Résoudre une équation

Déterminer les nombres entiers relatifs x et y tels que $x^2 - y^2 = 7$.

Solution

L'équation (**E**) : $x^2 - y^2 = 7$ s'écrit $(x+y)(x-y) = 7$.
• Si le couple $(x ; y)$ avec $x \in \mathbb{Z}$ et $y \in \mathbb{Z}$ est solution de l'équation (**E**), alors $x+y$ et $x-y$ sont des diviseurs associés de 7.
Or, les diviseurs associés de 7 sont : -7 ; -1 ; 1 ; 7.
• On résout alors :

$$\begin{cases} x+y=-7 \\ x-y=-1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x+y=-1 \\ x-y=-7 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x+y=1 \\ x-y=7 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x+y=7 \\ x-y=1 \end{cases}, \text{ soit :}$$

$$\begin{cases} 2x=-8 \\ x-y=-1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 2x=-8 \\ x-y=-7 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 2x=8 \\ x-y=7 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 2x=8 \\ x-y=1 \end{cases}$$

Alors $(x ; y) = (-4 ; -3)$ ou $(x ; y) = (-4 ; 3)$ ou $(x ; y) = (4 ; -3)$ ou $(x ; y) = (4 ; 3)$.
• Réciproquement, on vérifie que chacun de ces quatre couples est solution de l'équation (**E**).

Conclusion
L'ensemble des couples solutions de (**E**) est : $\{(-4 ; -3) ; (-4 ; 3) ; (4 ; -3) ; (4 ; 3)\}$.

Ici, pour résoudre l'équation :
$p \times q = n$,
• on détermine les diviseurs associés u, v de n ;
• on résout chaque système $\begin{cases} p=u \\ q=v \end{cases}$;
• on vérifie, réciproquement, que les solutions obtenues conviennent.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 1

3 Déterminer les nombres entiers relatifs n tels que $n+1$ divise $n+7$.

Sur le modèle de l'exercice résolu 2

4 Déterminer les nombres entiers relatifs x et y tels que $x^2 - y^2 = 11$.

Exercices
- 5 à 10 (ci-contre)
- 39 à 53

2 Division euclidienne

A Division euclidienne d'un nombre de $\mathbb{Z}$ par un nombre de $\mathbb{N}^*$

Propriété

a désigne un nombre entier relatif et b un nombre entier naturel non nul.
Il existe un unique couple de nombres entiers relatifs $(q\,;r)$ tel que :

$$\boldsymbol{a = bq + r} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{0 \leqslant r < b}$$

Démonstration

- **Existence du couple $(q\,;r)$**

La suite des multiples de b est :

$$\ldots;-kb\,;\ldots;-2b\,;-b\,;0\,;b\,;2b\,;\ldots kb\,;\ldots \text{ avec } k \in \mathbb{N}.$$

<u>1^er^ cas</u> : a est un multiple de b.
Alors a est l'un des termes de la suite ci-dessus et il existe un nombre entier relatif q tel que $a = bq$.
<u>2^e^ cas</u> : a n'est pas un multiple de b.
Il existe des multiples de b inférieurs à a et d'autres supérieurs à a.
On peut écrire $bq < a < b(q+1)$ où $b(q+1)$ est le plus petit multiple de b supérieur à a.

Finalement, pour tout $a \in \mathbb{Z}$, il existe un entier relatif q tel que $bq \leqslant a < b(q+1)$,
c'est-à-dire $0 \leqslant a - bq < b$.
On pose $r = a - bq$, on obtient $a = bq + r$ et $0 \leqslant r < b$.

- **Unicité du couple $(q\,;r)$**

On suppose qu'il existe deux couples de nombres entiers relatifs $(q\,;r)$ et $(q'\,;r')$ tels que $a = bq + r$, $a = bq' + r'$ et $0 \leqslant r < b$, $0 \leqslant r' < b$.
Alors, par différence $0 = b(q - q') + r - r'$, soit $r - r' = b(q' - q)$, donc $r - r'$ est un multiple de b.
De plus, $0 \leqslant r < b$ et $-b < -r' \leqslant 0$, donc $-b < r - r' < b$.
Or, 0 est le seul multiple de b strictement compris entre $-b$ et b, donc $r - r' = 0$, soit $r = r'$.
On en déduit que $b(q' - q) = 0$; comme $b \neq 0$, $q' - q = 0$, soit $q = q'$.
L'unicité du couple $(q\,;r)$ est ainsi prouvée.

Définitions

a désigne un nombre entier relatif et b un nombre entier naturel non nul.
Effectuer la division euclidienne de a par b, c'est trouver le couple $(q\,;r)$ de nombres entiers relatifs tels que $a = bq + r$ et $0 \leqslant r < b$.
a est le **dividende**, b le **diviseur**, q le **quotient** et r le **reste**.

$$\begin{array}{r|l} a & b \\ \hline r & q \end{array}$$

Exemples

- $a = 80$; $b = 17$: $80 = 17 \times 4 + 12$ et $0 \leqslant 12 < 17$ donc $q = 4$ et $r = 12$.
- $a = -95$; $b = 12$: $-95 = 12 \times (-8) + 1$ et $0 \leqslant 1 < 12$ donc $q = -8$ et $r = 1$.

B Écriture d'un nombre entier relatif quelconque

Les restes possibles de la division euclidienne d'un nombre entier relatif a par un entier naturel non nul b sont : $0\,;1\,;2\,;\ldots;b-1$.
Donc tout entier naturel a peut s'écrire :

$$bk \text{ ou } bk+1 \text{ ou } bk+2 \text{ ou } \ldots \text{ ou } bk+(b-1) \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

EXERCICES RÉSOLUS

5 Déterminer le reste d'une division euclidienne

n désigne un nombre entier naturel.
Déterminer le reste de la division euclidienne de $7n+16$ par $2n+3$.

Solution

Pour tout entier naturel n, $7n+16=3(2n+3)+n+7$.
Il s'agit de la division euclidienne de $7n+16$ par $2n+3$ si, et seulement si, $0 \leqslant n+7 < 2n+3$, c'est-à-dire $n > 4$.
Donc pour $n \geqslant 5$, le reste de la division euclidienne de $7n+16$ par $2n+3$ est $n+7$.
Pour les premières valeurs de n, on obtient les résultats suivants :

n	$7n+16$	$2n+3$	reste
0	16	3	1
1	23	5	3
2	30	7	2
3	37	9	1
4	44	11	0

- **Casio :** OPTN F6 (▷) F4 (NUMERIC) F6 (▷) F4 (MOD)
- **TI :** math ▶ (NBRE) 0 (reste) entrer
- **NumWorks :** paste Arithmétique ▷ rem(p,q)

```
MOD(37,9)
                    1
```

6 Raisonner suivant les restes possibles

n désigne un nombre entier naturel et on note $A=n\left(n^2+5\right)$.
Démontrer que, pour tout entier naturel n, A est divisible par 3.

Solution

Le reste de la division euclidienne de l'entier naturel n par 3 est 0 ; 1 ou 2.
Donc n s'écrit $3k$, $3k+1$ ou $3k+2$ avec $k \in \mathbb{N}$.

- Si $n=3k$, alors $A=3k\left(9k^2+5\right)=3K_1$ où $K_1 \in \mathbb{N}$.
- Si $n=3k+1$, alors $A=(3k+1)\left(9k^2+6k+6\right)=3(3k+1)\left(3k^2+2k+2\right)=3K_2$ où $K_2 \in \mathbb{N}$.
- Si $n=3k+2$, alors $A=(3k+2)\left(9k^2+12k+9\right)=3(3k+2)\left(3k^2+4k+3\right)=3K_3$ où $K_3 \in \mathbb{N}$.

Ainsi, quel que soit l'entier naturel n, le nombre A est divisible par 3.

On raisonne alors par **disjonction des cas.**

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 5

7 n désigne un nombre entier naturel.
Déterminer le reste de la division euclidienne de $9n+17$ par $2n+1$.

8 n désigne un nombre entier naturel.
On pose $a=2n^2+12n+22$ et $b=2n+5$.
a) Vérifier que $a=b\times(n+3)+n+7$.
b) En déduire le reste de la division euclidienne de a par b.

Sur le modèle de l'exercice résolu 6

9 n désigne un nombre entier naturel et on note :
$$A=n\left(n^2+11\right).$$
Démontrer que, pour tout entier naturel n, A est divisible par 3.

10 n désigne un nombre entier naturel.
Démontrer que $n(n+2)(n+4)$ est divisible par 3.

Exercices
- 11 à 15 (ci-contre)
- 54 à 82

3 Congruences dans $\mathbb{Z}$

a et b désignent deux nombres entiers relatifs et n un nombre entier naturel, $n \geqslant 2$.

A Congruences

Définition

Dire que a et b sont congrus modulo n signifie que a et b ont le même reste dans la division euclidienne par n.
On note $a \equiv b\ [n]$ ou $a \equiv b\ (n)$ ou $a \equiv b\ (\bmod n)$.

Conséquences immédiates

- $a \equiv a\ [n]$
- Si $a \equiv b\ [n]$, alors $b \equiv a\ [n]$
- Si $a \equiv b\ [n]$ et $b \equiv c\ [n]$, alors $a \equiv c\ [n]$.
- Si r est le reste de la division euclidienne de a par n, alors $a \equiv r\ [n]$.
- $a \equiv 0\ [n]$ si, et seulement si, a est divisible par n.

Exemple

$-5 \equiv 3\ [2]$ car -5 et 3 ont pour reste 1 dans la division euclidienne par 2.

B Une propriété fondamentale

Propriété

$a \equiv b\ [n]$ si, et seulement si, $a-b$ est un multiple de n.
En d'autres termes, $a \equiv b\ [n]$ si, et seulement si, il existe $k \in \mathbb{Z}$, tel que $a-b=kn$.

Démonstration

- Si $a \equiv b\ [n]$, alors il existe des nombres entiers relatifs q, q', r tels que $a=nq+r$, $b=nq'+r$ et $0 \leqslant r < n$.
Alors $a-b=n(q-q')$ où $q-q' \in \mathbb{Z}$ donc $a-b$ est un multiple de n.
- Réciproquement, si $a-b$ est un multiple de n alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a-b=kn$, soit $a=b+kn$.
Or, il existe deux entiers relatifs q', r' tels que $b=nq'+r'$ et $0 \leqslant r' < n$, donc $a=n(k+q')+r'$.
Ainsi, r' est le reste de la division euclidienne de a par n.
Donc a et b ont le même reste r' dans la division euclidienne par n.

Exemple

$a \equiv 1\ [5]$ signifie qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a=1+5k$.

C Compatibilité avec les opérations

c et d désignent également des nombres entiers relatifs.

Propriétés

Si $a \equiv b\ [n]$ et $c \equiv d\ [n]$ alors :
- $a+c \equiv b+d\ [n]$
- $a-c \equiv b-d\ [n]$
- $ac \equiv bd\ [n]$
- pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $a^p \equiv b^p\ [n]$.

Démonstrations

$a \equiv b\ [n]$ et $c \equiv d\ [n]$ signifie qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ et $k' \in \mathbb{Z}$ tels que $a-b=kn$ et $c-d=k'n$.
- $(a+c)-(b+d)=(k+k')n$ où $k+k' \in \mathbb{Z}$, donc $a+c \equiv b+d\ [n]$.
- $(a-c)-(b-d)=(k-k')n$ où $k-k' \in \mathbb{Z}$, donc $a-c \equiv b-d\ [n]$.
- $ac-bd=(kd+k'b+kk'n)n$ où $kd+k'b+kk'n \in \mathbb{Z}$, donc $ac \equiv bd\ [n]$.
- Avec un raisonnement par récurrence, on démontre que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $a^p \equiv b^p\ [n]$.
(Voir exercice 88, page 156).

EXERCICES RÉSOLUS

11 Raisonner avec les congruences

a) x désigne un nombre entier relatif.
Démontrer que si x n'est pas multiple de 3, alors $x^2 \equiv 1\ [3]$.

b) Démontrer que, pour tous entiers relatifs a et b, le nombre $N = ab(a^2 - b^2)$ est divisible par 3.

Solution

a) On suppose que x n'est pas multiple de 3, alors $x \equiv 1\ [3]$ ou $x \equiv 2\ [3]$.
- Si $x \equiv 1\ [3]$, alors $x^2 \equiv 1\ [3]$.
- Si $x \equiv 2\ [3]$, alors $x^2 \equiv 4\ [3]$, or $4 \equiv 1\ [3]$, donc $x^2 \equiv 1\ [3]$.

Dans les deux cas, $x^2 \equiv 1\ [3]$.

> Les restes possibles dans la division par 3 sont 0 ; 1 ou 2. Donc pour tout $x \in \mathbb{Z}$, $x = 3k$ ou $x = 3k + 1$ ou $x = 3k + 2$ avec $k \in \mathbb{Z}$, c'est-à-dire $x \equiv 0\ [3]$ ou $x \equiv 1\ [3]$ ou $x \equiv 2\ [3]$.

b) Si a ou b est un multiple de 3, c'est-à-dire $a \equiv 0\ [3]$ ou $b \equiv 0\ [3]$, alors d'après la propriété du produit $N \equiv 0\ [3]$.
Si a et b ne sont pas multiples de 3, alors d'après **a)**, $a^2 \equiv 1\ [3]$ et $b^2 \equiv 1\ [3]$, donc $a^2 - b^2 \equiv 0\ [3]$ et $N \equiv 0\ [3]$.
Pour tous entiers relatifs a et b, $N \equiv 0\ [3]$, c'est-à-dire N est divisible par 3.

12 Déterminer le reste d'une division Tice

Quel est le reste de la division euclidienne de 23^{137} par 7 ?

Solution

On observe les restes de la division de 23^n par 7 pour les premières valeurs de l'entier naturel n à l'aide du tableur.

	A	B
1	***n***	**Reste**
2	0	1
3	1	2
4	2	4
5	3	1

> Dans ce type d'exercice, on essaie de déterminer un exposant k tel que $x^k \equiv 1\ [n]$ (lorsque c'est possible).

Ainsi $23^3 \equiv 1\ [7]$.
D'où l'idée de diviser 137 par 3.
Il vient $137 = 45 \times 3 + 2$.
Donc $23^{137} = (23^3)^{45} \times 23^2$.
D'après les propriétés de comptabilité des congruences avec les opérations $23^{137} \equiv 1^{45} \times 23^2\ [7]$.
Or, $23^2 \equiv 4\ [7]$ donc $23^{137} \equiv 4\ [7]$.
Ainsi, le reste de la division de 23^{137} par 7 est 4.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 11

13 **a)** x désigne un nombre entier relatif.
Démontrer que si x n'est pas multiple de 7, alors :
$$x^6 + 6 \equiv 0\ [7].$$
b) Démontrer que pour tout entier relatif n, $n^7 + 6n$ est divisible par 7.

Sur le modèle de l'exercice résolu 12

14 Quel est le reste de la division euclidienne de 23^{143} par 7 ?

15 Donner le reste de la division euclidienne de N par 9 lorsque :
a) $N = 35^{113}$ **b)** $N = 58^{227}$

EXERCICES RÉSOLUS

16 Compléter et tester un programme

Cours 2. A

La fonction **Divise** écrite en langage Python renvoie pour résultats le quotient q et le reste r de la division euclidienne de a par b ($a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^*$).

a) Compléter la ligne 3 du programme.

b) Saisir et tester cette fonction.

```
1 def Divise(a,b):
2     r=a%b
3     
4     return q,r
```

Solution

a) La division s'écrit $a = bq + r$ avec $0 \leqslant r < b$, donc $q = \frac{a-r}{b}$.

On complète le programme avec `3    q=(a-r)/b`.

a%b renvoie le reste de la division euclidienne de a par b.

b) Par exemple :

```
>>> Divise(2314,7)
(330.0, 4)
```

```
>>> Divise(65987,51)
(1293.0, 44)
```

```
>>> Divise(-5648,13)
(-435.0, 7)
```

17 Conjecturer, puis démontrer

Cours 1 et 3

Voici une fonction **Test** écrite en langage Python. Le paramètre n de cette fonction désigne un nombre entier naturel.

1. a) Pour une valeur de n, expliquer ce que représente le booléen renvoyé par cette fonction.

b) Saisir et exécuter plusieurs fois cette fonction.
Énoncer alors une conjecture.

2. Démontrer, par disjonction des cas, que pour tout entier naturel n, $n(n+1)(n+5)$ est divisible par 6.

```
def Test(n):
    a=n*(n+1)*(n+5)
    if a%6==0:
        bool=True
    else:
        bool=False
    return bool
```

Solution

1. a) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a = n(n+1)(n+5)$. Si a est divisible par 6 alors, la fonction **Test** renvoie le booléen **True** sinon elle renvoie le booléen **False**.

b) Avec différentes valeurs de n, on observe que cette fonction renvoie **True**. On conjecture que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)(n+5)$ est divisible par 6.

2. Le tableau de congruences modulo 6 ci-contre montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a \equiv 0[6]$, c'est-à-dire $n(n+1)(n+5)$ est divisible par 6.

n	0	1	2	3	4	5
$n+1$	1	2	3	4	5	0
$n+5$	5	0	1	2	3	4
a	0	0	0	0	0	0

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 16

18 La fonction **R** renvoie pour résultat le reste de la division de $a-b$ par 7 ($a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}$).

a) Compléter la ligne 3.

b) Saisir et tester cette fonction.

```
1 def R(a,b):
2     d=a-b
3     
4     return r
```

Sur le modèle de l'exercice résolu 17

19 **1. a)** Modifier le programme de l'exercice 17 en prenant $a = 5n^3 + n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

b) À l'aide de ce programme, énoncer une conjecture.

2. Démontrer que pour tout entier naturel n, $5n^3 + n$ est divisible par 6.

Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

Cours 1

Questions flash À l'oral

20 Énoncer la liste des diviseurs de 28 dans $\mathbb{N}$.

21 Louise affirme qu'il y a 15 multiples de 7 entre -50 et 50.
A-t-elle raison ? Justifier.

22 Citer un nombre compris entre 20 et 50 qui est à la fois divisible par 3 et 5.

23 Déterminer des nombres entiers relatifs a, b, c tels que a divise bc sans que a divise b et a divise c.

24 **a)** On appelle **diviseur strict** d'un nombre entier naturel tout diviseur positif autre que le nombre lui-même.
Déterminer les diviseurs stricts de 220.
b) On appelle **nombres amiables** deux nombres entiers naturels tels que chacun d'entre-eux soit égal à la somme des diviseurs stricts de l'autre.
Vérifier que 220 et 284 sont des nombres amiables.
c) On appelle **nombre parfait** un nombre égal à la somme de ses diviseurs stricts.
Déterminer deux nombres parfaits inférieurs à 30.

On ne connaît pas de formule ou de méthode générale pour déterminer les nombres amiables (ou amicaux). Des recherches par ordinateur ont permis de trouver de tels nombres jusqu'à 12 chiffres, mais on ne sait pas s'il en existe une infinité.

25 n désigne un nombre entier naturel $n \geqslant 2$, on pose :
$$A = n^4 - 1.$$
Démontrer que $n-1$, $n+1$, n^2+1 sont des diviseurs de A.

26 Démontrer que la somme de trois nombres entiers relatifs consécutifs est divisible par 3.
Conseil : trois nombres entiers relatifs consécutifs peuvent s'écrire n, $n+1$, $n+2$ ou $n-1$, n, $n+1$…

27 a et b désignent deux nombres entiers relatifs.
a) Développer $(a+b)^3$.
b) Démontrer que 3 divise $(a+b)^3$ si, et seulement si 3 divise a^3+b^3.

28 k désigne un nombre entier naturel.
On pose $a = 9k+2$ et $b = 12k+1$.
a) Déterminer la valeur de la combinaison linéaire $4a-3b$.
b) En déduire que les seuls diviseurs positifs possibles et communs à a et b sont 1 et 5.

29 k désigne un nombre entier naturel.
On pose $a = 6k+5$ et $b = 8k+3$.
Démontrer que les seuls diviseurs possibles et communs à a et b sont 1 et 11.

30 a et n désignent des nombres entiers relatifs.
a) Démontrer que si a divise $3n-5$ et a divise $2n+3$, alors a divise 19.
Conseil : utiliser une combinaison linéaire de a et b.
b) La réciproque est-elle vraie ?

31 Déterminer tous les nombres entiers naturels n tels que $n+8$ est un multiple de n.

32 n désigne un nombre entier relatif.
a) Démontrer que $n+3$ divise $n+10$ si, et seulement si, $n+3$ divise 7.
b) En déduire les valeurs de n telles que $n+3$ divise $n+10$.

33 n désigne un nombre entier relatif.
a) Démontrer que $n+7$ divise $3n+1$ si, et seulement si, $n+7$ divise 20.
b) En déduire les valeurs de n telles que $n+7$ divise $3n+1$.

34 Déterminer les nombres entiers relatifs n tels que $3n+1$ divise $n+2$.

35 Déterminer les nombres entiers relatifs x et y tels que :
$$x^2 - y^2 = 13.$$

36 Déterminer les nombres entiers relatifs x et y tels que :
$$x^2 - 2xy = 15.$$

37 n est un nombre entier naturel relatif tel que $n-4$ est divisible par 5.
Démontrer que n^2-1 est également divisible par 5.

38 n est un nombre entier naturel relatif tel que $n-2$ est divisible par 7.
Démontrer que n^3-1 est également divisible par 7.

Acquérir des automatismes

Division euclidienne

Cours 2

Questions flash — À l'oral

39 Dans chaque cas, effectuer mentalement la division euclidienne de a par b.

a) $a = 513$; $b = 2$ **b)** $a = 68$; $b = 3$
c) $a = -104$; $b = 5$ **d)** $a = 1025$; $b = 10$

40 Dans chacun des cas suivants, calculer mentalement le nombre manquant.

a) $\begin{array}{r|l} 561 & \boxed{} \\ \hline 1 & 7 \end{array}$ **b)** $\begin{array}{r|l} \boxed{} & 12 \\ \hline 11 & 8 \end{array}$ **c)** $\begin{array}{r|l} 817 & 9 \\ \hline 7 & \boxed{} \end{array}$

41 Quels sont les restes possibles d'une division euclidienne dont le diviseur est 7 ?

42 Le quotient de la division euclidienne d'un nombre entier naturel par 5 est 12.
Déterminer mentalement les dividendes possibles.

43 Justifier chacun des affichages suivants obtenus à l'aide de la calculatrice.

```
MOD(2020,15)
                10
MOD(1522,19)
                 2
MOD(-527,13)
                 6
```

44 Dans chaque cas, effectuer la division euclidienne de a par b :

a) $a = 224$; $b = 15$ **b)** $a = 1990$; $b = 37$
c) $a = -2\,013$; $b = 12$ **d)** $a = -237$; $b = 14$

45 **1.** Vérifier que $123\,658 = 256 \times 481 + 522$.
2. Sans utiliser la calculatrice, effectuer la division euclidienne de 123 658 :
a) par 256 **b)** par 481

46 Déterminer tous les nombres entiers naturels n qui, dans la division par 4, donnent un quotient égal au reste.

47 b est un nombre entier naturel non nul.
Dans la division euclidienne de 990 par b, le quotient est 39.
a) Démontrer que $39b \leqslant 990 < 40b$.
b) En déduire b et le reste r.

48 Dans la division euclidienne de 524 par un nombre entier naturel non nul b, le quotient est 15 et le reste r.
Déterminer b et r.

49 La somme de deux nombres entiers naturels non nuls a et b est 434. La division euclidienne de a par b donne 4 pour quotient et 64 pour reste.
Déterminer a et b.

50 Dans la cellule D2 de la feuille de calcul ci-dessous, on a saisi la formule :

=MOD(B2;C2)

	A	B	C	D
1	**n**	**(2n+2)²**	**n+2**	**Reste**
2	0	4	2	0
3	1	16	3	1
4	2	36	4	0
5	3	64	5	4
6	4	100	6	4
7	5	144	7	4
8	6	196	8	4
9	7	256	9	4

1. Quelle conjecture peut-on émettre ?
2. a) Vérifier que pour tout nombre entier naturel n,
$$(2n+2)^2 = 4n(n+2)+4.$$
b) Démontrer alors la conjecture de la question **1.**

51 n désigne un nombre entier naturel.
Déterminer le reste de la division euclidienne :
a) de $4n-3$ par $n+3$ **b)** de $5n+21$ par $n+3$

52 Algo python

Voici une fonction **D** écrite en langage Python.
Son paramètre n désigne un nombre entier naturel.

```python
def D(n):
    a=n**3-n
    r1=a%2
    r2=a%3
    return r1,r2
```

1. a) Quels résultats la fonction **D** renvoie-t-elle ?
b) Saisir et exécuter cette fonction avec plusieurs valeurs de n.
c) Énoncer alors une conjecture.
2. Démontrer par disjonction des cas, que pour tout entier naturel n, $n^3 - n$ est divisible par 2 et par 3.

53 **a)** Quels sont les restes possibles de la division euclidienne d'un nombre entier naturel impair par 4 ?
b) Démontrer que, si n est un nombre entier naturel impair, alors $n^2 - 1$ est divisible par 8.

Congruences dans $\mathbb{Z}$

Cours 3

Questions flash À l'oral

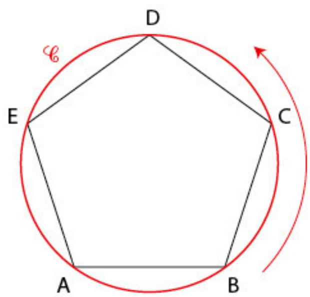
54 Chacune des congruences suivantes est-elle vraie ou fausse ?
Justifier la réponse.
a) $35 \equiv 2\ [3]$ **b)** $25 \equiv 1\ [5]$ **c)** $102 \equiv 2\ [5]$
d) $-13 \equiv 1\ [7]$ **e)** $-7 \equiv 5\ [6]$ **f)** $-25 \equiv 3\ [11]$

55 Dans chaque cas, déterminer mentalement le nombre entier naturel x tel que :
$$a \equiv x\ [7] \text{ et } 0 \leqslant x < 7.$$
a) $a = 18$ **b)** $a = 73$ **c)** $a = 84$
d) $a = -2$ **e)** $a = -12$ **f)** $a = -77$

56 Déterminer mentalement le reste de la division euclidienne de 12^{15} par 11.

57 Alice affirme : « $15^5 - 3^5 \equiv 0\ [12]$. »
A-t-elle raison ? Justifier.

58 Le pentagone régulier ABCDE ci-contre est inscrit dans le cercle $\mathscr{C}$. Les points de ce pentagone découpent le cercle $\mathscr{C}$ en cinq arcs identiques. Un point mobile M décrit le cercle $\mathscr{C}$ en partant de A.



Déterminer le point d'arrivée de M lorsque M franchit 15 123 arcs consécutifs dans le sens :
a) de la flèche ; **b)** inverse de la flèche.

59 Quelle heure indique l'horloge :
a) 113 heures après avoir indiqué 2 h ?
b) 156 heures avant d'indiquer 6 h ?

60 **a)** Démontrer que $5^2 \equiv -1\ [13]$, puis que $5^4 \equiv 1\ [13]$.
b) n désigne un nombre entier naturel.
Démontrer que $5^{4n} \equiv 1\ [13]$.

61 Résoudre dans $\mathbb{N}$, l'équation :
$$x \equiv -3\ [5].$$

62 Résoudre dans $\mathbb{Z}$, le système :
$$\begin{cases} x+4 \equiv -1\ [7] \\ -50 \leqslant x \leqslant 100 \end{cases}.$$

63 Déterminer le reste de la division euclidienne par 7 du nombre :
$$78^{115} + 92^{23} + 106^{35}.$$

64 On donne $A = 877 + 59^{43}$ et on souhaite déterminer le reste de la division euclidienne de A par 7.
a) Justifier que $59 \equiv 3\ [7]$ et $3^6 \equiv 1\ [7]$.
b) Effectuer la division de 43 par 6 et en déduire que $3^{43} \equiv 3\ [7]$.
c) Quel est finalement le reste cherché ?

65 On donne $A = 30^{10} \times 125^{17}$.
Déterminer le reste de la division de A par 7.

66 Le nombre A est défini par :
$$A = 1^{2021} + 2^{2021} + 3^{2021} + 4^{2021}.$$
a) Justifier que $3 \equiv -2\ [5]$ et $4 \equiv -1\ [5]$.
b) En déduire que le nombre A est divisible par 5.

67 À l'aide du tableur, on observe les restes de la division euclidienne de 17^n par 13 pour les premières valeurs de l'entier naturel n.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	n	0	1	2	3	4	5	6
2	17^n	1	17	289	4 913	83 521	1 419 857	24 137 569
3	Reste	1	4	3	12	9	10	1

Déterminer le reste de la division euclidienne :
a) de 17^{2020} par 13 ;
b) de 17^{2021} par 13 ;
c) de $17^{2020} + 3 \times 17^{2021}$ par 13.

68 **1. a)** Justifier que $6^{10} \equiv 1\ [11]$.
b) Démontrer que pour tout nombre entier naturel k,
$$6^{10k} \equiv 1\ [11].$$
2. a) Déterminer suivant les valeurs du nombre entier naturel n, le reste de la division euclidienne de 6^n par 11.
b) En déduire le reste de la division euclidienne de 6^{1003} par 11.

69 **a)** Vérifier que 999 est divisible par 37.
b) Démontrer que pour tout nombre entier naturel n,
$$10^{3n} \equiv 1\ [37].$$
c) En déduire le reste de la division euclidienne de :
$$10^{1000} \text{ par } 37.$$

70 **a)** Démontrer que pour tout nombre entier naturel n,
$$3^{3n} \equiv 1\ [13].$$
b) En déduire que pour tout nombre entier naturel n,
$$A = 3^{6n+2} + 3^{3n+1} + 1$$
est un multiple de 13.

71 n désigne un nombre entier naturel.

1. Déterminer suivant les valeurs de n, le reste de la division euclidienne de 2^n par 5.

2. Dans chaque cas, déterminer suivant les valeurs de n, le reste de la division euclidienne de A par 5.

a) $A = 2^{2n+1} - 2^{n+1} + 1$ **b)** $A = 2^{2n+1} + 2^{n+1} + 1$

72 n désigne un nombre entier naturel.

Déterminer les restes de la division euclidienne :

a) de n^2 par 5 ; **b)** de n^2 par 7 ;

c) de n^3 par 3 ; **d)** de n^3 par 5.

Conseil : raisonner par disjonction des cas à l'aide d'un tableau de congruences.

73 À l'aide d'un tableau de congruences, démontrer que pour tout entier naturel n,

$$n^7 + 6n \equiv 0[7].$$

74 À l'aide d'un tableau de congruences, démontrer que pour tout entier naturel n,

$$n^5 - n \equiv 0\ [5].$$

75 **a)** n désigne un nombre entier naturel. À l'aide d'un tableau de congruences, déterminer les restes de la division euclidienne de $(n^2-1)(n^2-4)$ par 5.

b) Démontrer que si l'entier naturel n n'est pas divisible par 5, alors $(n^2-1)(n^2-4)$ est divisible par 5.

76 **a)** n désigne un nombre entier relatif.

Déterminer les restes de la division euclidienne de n^2 par 8, puis ceux de la division de $2n^2$ par 8.

b) x et y désignent deux nombres entiers relatifs.

Déterminer les restes possibles de la division euclidienne de $2x^2 + y^2$ par 8.

c) x et y désignent deux nombres entiers relatifs.

Montrer que l'équation $2x^2 + y^2 = 805$ n'a pas de couple solution.

77 **a)** n désigne un nombre entier relatif.

Déterminer les restes de la division euclidienne de n^3 par 7, puis ceux de la division de $2n^3$ par 7.

b) x et y désignent deux nombres entiers relatifs.

Déterminer les restes possibles de la division euclidienne de $7x^2 + 2y^3$ par 7.

c) x et y désignent deux nombres entiers relatifs.

Montrer que chacune des équations n'a pas de couple solution.

- $7x^2 + 2y^3 = 1\,081$
- $7x^2 + 2y^3 = 3\,697$

78 **a)** x désigne un nombre entier relatif.

Réaliser et compléter le tableau de congruences modulo 9 ci-dessous.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x^3									

b) En déduire que pour tout entier relatif x, x^3 est divisible par 9 si, et seulement si, x est divisible par 3.

79 x désigne un nombre entier relatif.

On pose $n = x^2 + x - 2$.

a) Déterminer l'ensemble E_1 des nombres entiers relatifs x tels que n est divisible par 7.

b) Déterminer l'ensemble E_2 des nombres entiers relatifs x tels que n est divisible par 3.

c) k désigne un nombre entier relatif.

Vérifier que si $x = 1 + 21k$ ou $x = -2 + 21k$, alors n est divisible par 3 et par 7.

80 (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = 5n^3 + n.$$

1. a) Vérifier que pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} - u_n = 15n(n+1) + 6.$$

b) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, u_n est divisible par 6.

2. Proposer une démonstration du résultat obtenu à la question **1.** en utilisant les congruences.

81 Algo python

(v_n) est la suite définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par :

$$v_n = 22^n + 6n - 1.$$

1. a) Écrire un programme en langage Python qui pour $N \in \mathbb{N}^*$ donné, calcule et affiche $v_1, v_2, \ldots, v_N$.

b) Saisir et tester ce programme.

2. Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, v_n est divisible par 9.

82 $N = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$ avec $a_n \neq 0$, est le nombre entier naturel à $n+1$ chiffres tel que :

$$N = a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \ldots + a_1 \times 10 + a_0.$$

a) Justifier que $10 \equiv -1\ [11]$.

b) En déduire que :

$$N \equiv a_0 - a_1 + a_2 - \ldots + (-1)^n a_n\ [11].$$

c) Énoncer un critère de divisibilité d'un nombre entier naturel non nul par 11.

d) Prouver, à l'aide de ce test que le nombre entier 1 370 259 est divisible par 11.

EXO Exercices interactifs

83 QCM **Dans chaque cas, donner la réponse exacte sans justifier.**

		A	B	C	D
1	Le nombre d'entiers relatifs multiples de 3 compris entre -100 et 100 est égal à …	33	34	66	67
2	L'ensemble des nombres entiers naturels n tels que n divise $n+21$ est …	$\{1;3;7\}$	$\{3;7;21\}$	$\{1;3;7;21\}$	$\{21;42\}$
3	Le quotient de la division euclidienne de $x \in \mathbb{N}$ par 3 est 12. Les valeurs possibles de x sont …	12, 13, 14	15, 16, 17	36, 37, 38	39, 40
4	Le reste de la division euclidienne de 5^{142} par 13 est égal à …	12	8	5	1

84 QCM **Dans chaque cas, donner la (ou les) réponse(s) exacte(s) sans justifier.**

		A	B	C	D
1	n est un nombre entier naturel. Le reste de la division de $5n+27$ par $n+4$ est …	1 pour $n=2$	0 pour $n=3$	7 pour $n \geqslant 4$	7 pour tout n
2	x est un nombre entier relatif tel que $257 \equiv x\ [11]$. Une valeur possible de x est …	-7	3	4	15
3	x est un nombre entier relatif tel que $x+5 \equiv 2\ [7]$ et $32 < x < 53$. Une valeur possible de x est …	33	39	46	51
4	n est un nombre entier naturel. On divise n^3 par 8, un reste possible est …	0	3	6	8
5	n est un nombre entier naturel. On divise 3^n+7 par 11, un reste possible est …	0	1	7	10

85 Vrai/Faux **Dans chaque cas, dire si l'affirmation est vraie ou fausse en justifiant.**

1 **Affirmation :** le nombre $50^{60} - 100^{99}$ est divisible par 7.

2 **Affirmation :** il n'existe pas de nombre entier naturel n tel que $n^2 - 3n + 6$ soit divisible par 5.

3 **Affirmation :** pour tout entier naturel n, $5^{2n} \equiv 14^n\ [11]$.

4 **Affirmation :** la somme des cubes de trois nombres entiers naturels consécutifs est divisible par 9.

Vérifiez vos réponses : p. 293

86 Résoudre une congruence $ax \equiv b\ [n]$

a et b désignent des nombres entiers relatifs et n un nombre entier naturel, $n \geqslant 2$.

1. Résolution dans $\mathbb{Z}$ de la congruence $ax \equiv b\ [n]$

On suppose qu'il existe un nombre entier relatif a' tel que $aa' \equiv 1\ [n]$.

Rédiger cette démonstration en suivant le guide ci-dessous.

x désigne un nombre entier relatif.

(1) Une condition nécessaire : on suppose que $ax \equiv b\ [n]$.
Alors $a'(ax) \equiv \ldots\ [n]$, soit $(a'a)x \equiv \ldots\ [n]$.
Or, $aa' \equiv 1\ [n]$ donc $(aa')x \equiv \ldots\ [n]$ et on en déduit que $x \equiv a'b\ [n]$.

(2) Une condition suffisante : on suppose que $x \equiv a'b\ [n]$.
Alors $ax \equiv \ldots\ [n]$, soit $ax \equiv \ldots\ [n]$.
Or, $aa' \equiv 1\ [n]$ donc $(aa')b \equiv b\ [n]$ et on en déduit que ....

(3) Conclusion : Pour tout $x \in \mathbb{Z}$, $ax \equiv b\ [n]$ équivaut à ....
L'ensemble des solutions de l'équation (**E**) est formé des nombres $x = \ldots$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

2. Applications

Vérifier que $5 \times 2 \equiv 1\ [9]$. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ chaque congruence.

a) $5x \equiv 3\ [9]$ **b)** $5x \equiv 7\ [9]$

> **Conseil**
> Le raisonnement par **analyse synthèse** se déroule en deux temps.
> **1. Analyse :** on suppose le problème résolu et on en déduit une (ou des) condition(s) **nécessaire(s)**.
> **2. Synthèse :** on montre que cette (ou ces) condition(s) obtenue(s) sont **suffisantes** et on résout le problème.

87 Démontrer par l'absurde

x et n désignent des nombres entiers naturels avec $n \geqslant 4$.
On se propose de démontrer par l'absurde la proposition **P** : « L'équation $x^2 + 9 = 2^n$ n'a pas de solution ».

Rédiger la démonstration en suivant le guide de résolution ci-dessous.

(1) Supposer que la proposition **P** est fausse : on suppose donc que l'équation $x^2 + 9 = 2^n$ admet ....

(2) En tirer des conséquences : x^2 est un nombre impair car ....
Donc x est un nombre impair car ....

(3) Traduire avec une congruence : il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $x = 2k + 1$.
Donc $x^2 + 9 = \ldots = 2 + 4(\ldots)$, soit $x^2 + 9 \equiv \ldots\ [4]$.

(4) Aboutir à une contradiction : $2^n = \ldots \times 2^{n-2}$ donc $2^n \equiv \ldots\ [4]$.

(5) Conclure : rédiger une phrase de conclusion.

> **Conseil**
> Pour démontrer qu'une proposition **P** est vraie, on peut **raisonner par l'absurde** :
> - on suppose que P est fausse.
> - on démontre que l'on aboutit à une contradiction.

88 Démontrer par récurrence

a et b désignent des nombres entiers relatifs et n un entier naturel avec $n \geqslant 2$.
On suppose que $a \equiv b\ [n]$. On se propose de démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $p \geqslant 1$, $a^p \equiv b^p\ [n]$.

Rédiger la démonstration en suivant le guide de résolution ci-dessous.

(1) Initialisation : pour $p = \ldots$, $a^{\cdots} \equiv b^{\cdots}\ [n]$, c'est-à-dire ....

(2) Hérédité : on suppose que pour un entier naturel $k \geqslant 1$, ...
On démontre qu'alors $a^{\cdots} \equiv b^{\cdots}\ [n]$.
De l'hypothèse de récurrence et de l'hypothèse $a \equiv b\ [n]$, on déduit que $a^k \times a \equiv \ldots \times \ldots\ [n]$ d'après la propriété .... Donc ....

(3) Conclure : rédiger une phrase de conclusion.

Résoudre des problèmes de divisibilité

89 Tice On se propose de déterminer tous les nombres entiers naturels n qui vérifient la propriété :

P : « $n^2 + 11$ est divisible par $n + 11$ ».

1. À l'aide du tableur ou de la calculatrice, déterminer tous les nombres entiers naturels n, $n \leqslant 121$ qui vérifient la propriété **P**.

2. a) Simplifier l'expression $n^2 + 11 - (n+11)(n-11)$.

b) En déduire que tous les nombres entiers naturels n qui vérifient la propriété **P** sont inférieurs ou égaux à 121.

c) Conclure.

90 n désigne un nombre entier naturel.
On pose $A = 3n^4 + 5n + 13$.

a) Démontrer que A est un entier naturel impair.

b) Le nombre A peut-il être divisible par $(n+1)(n+2)$?

91 **a)** Démontrer par récurrence, que pour tout entier naturel n, $n^3 + 5n$ est divisible par 6.

b) En déduire que les nombres entiers naturels suivants sont des multiples de 6.

- $A = n^4 + 5n^2 + 12$
- $B = n^3 + 17n + 18$
- $C = n^3 + 2\,009n$
- $D = \left(n^2 + n\right)\left(n^2 + 5\right)$

92 n et k désignent deux nombres entiers naturels non nuls.

a) Justifier l'égalité :

$$1 + (4k+1) + (4k+1)^2 + \ldots + (4k+1)^{n-1} = \frac{(4k+1)^n - 1}{4k}.$$

b) En déduire que $(4k+1)^n - 1$ est divisible par 4.

c) Justifier alors que $5^n - 1$ et $13^n - 1$ sont divisibles par 4.

93 Algo **1.** Voici un algorithme où n désigne un nombre entier naturel non nul.

```
Pour k allant de 1 à n
    x ← 6^k − 1
    Afficher x
Fin Pour
```

a) Quels sont les nombres affichés par cet algorithme pour $n = 6$?

b) Conjecturer une propriété des nombres affichés par cet algorithme.

2. a) Démontrer que pour tout entier naturel non nul n,

$$6^n - 1 = 5\left(1 + 6 + 6^2 + \ldots + 6^{n-1}\right).$$

b) En déduire que pour tout entier naturel non nul n, $6^n - 1$ est divisible par 5.

Effectuer des divisions euclidiennes

94 (u_n) est la suite qui à tout nombre entier naturel n associe le reste r de la division de n par 4.

a) Démontrer que la suite (u_n) est périodique.

b) Construire la représentation graphique de la suite (u_n) pour $0 \leqslant n \leqslant 11$.

95 **a)** a, b et h désignent des nombres entiers naturels avec $b > 0$.
On note q le quotient de la division euclidienne de a par b.
Pour quelles valeurs de h, le quotient de la division euclidienne de $a + h$ par b reste-t-il égal à q ?

b) Application numérique : $a = 135$, $b = 19$.

96 a et b désignent des nombres entiers naturels tels que $0 < b^2 < a$. On note c et r respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b.

1. a) Démontrer que $b \leqslant c$.

b) Démontrer que dans la division euclidienne de a par c, le quotient est b et le reste est toujours r.

2. Trouver un contre-exemple qui montre que dans le cas où $0 < a \leqslant b^2$, il peut arriver que le quotient de la division euclidienne de a par c ne soit pas b.

97 a et b désignent deux nombres entiers naturels avec $b \neq 0$.
On suppose que dans la division euclidienne de a par b, le reste est supérieur ou égal au quotient q.

a) On divise a par $b + 1$, démontrer que le quotient est toujours q.

b) Donner des exemples de cette situation.

98 Algo (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = 10n + 3.$$

1. Voici un algorithme où n désigne un nombre entier naturel.

```
Pour k allant de 0 à n
    u ← 10k + 3
    r ← reste de la division de u par 6
    Afficher r
Fin Pour
```

a) Quels sont les nombres affichés par cet algorithme pour $n = 8$?

b) Que remarque-t-on ?

2. Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel n, le reste de la division euclidienne de u_n par 6.

Travailler avec les congruences

99 x et y désignent des nombres entiers relatifs et n un nombre entier naturel.
On note (**E**) l'équation :
$$3x^2+7y^2=10^{2n}.$$
On se propose de démontrer que l'équation (**E**) n'a pas de couple solution.
a) Justifier que $100 \equiv 2\ [7]$.
Démontrer que si $(x\,;y)$ est solution de (**E**), alors :
$$3x^2 \equiv 2^n\ [7].$$
b) Réaliser et compléter le tableau suivant :

Reste de la division de x par 7							
Reste de la division de $3x^2$ par 7							

c) Démontrer que 2^n est congru à 1, 2 ou 4 modulo 7.
d) Conclure alors que l'équation (**E**) n'a pas de solution.

100 **a)** Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $2^{3n}-1$ est divisible par 7.
b) En déduire que, pour tout entier naturel n, $2^{3n+1}-2$ et $2^{3n+2}-4$ sont des multiples de 7.
c) Déterminer alors les restes de la division euclidienne par 7 des puissances de 2.
d) Donner le reste de la division euclidienne par 7 de chaque nombre.
- $2^{2\,020}$
- $3\times 2^{2\,021}$
- $2^{2\,023}-2^{2\,022}$

101 Pour tout entier naturel n, $n \geqslant 1$, on pose :
$$u_n = 1+3+3^2+\ldots+3^{n-1}.$$
1. n désigne un nombre entier naturel n, $n \geqslant 1$.
a) On suppose que $u_n \equiv 0\ [7]$.
Démontrer alors que $3^n \equiv 1\ [7]$.
b) Réciproquement, on suppose que $3^n \equiv 1\ [7]$.
Démontrer que $2u_n \equiv 0\ [7]$, puis à l'aide d'un tableau de congruence, en déduire que $u_n \equiv 0\ [7]$.
2. En déduire les valeurs du nombre entier naturel n, telles que u_n est divisible par 7.

102 On se propose de résoudre l'équation (**E**) dans l'ensemble des nombres entiers naturels :
$$(\mathbf{E}) : n\times 7^n + 4n + 1 \equiv 0\ [8].$$
1. a) Justifier que pour tout entier naturel pair,
$$7^n \equiv 1\ [8].$$
b) L'équation (**E**) admet-elle des entiers naturels pairs pour solutions ?
2. Déterminer les entiers naturels impairs solutions de l'équation (**E**).

103 (u_n) est une suite arithmétique de premier terme 4 et de raison 9.
(v_n) est une suite géométrique de premier terme 1 et de raison 7.
a) Démontrer que pour tout entier naturel k,
$$7^{3k+2} \equiv 4\ [9].$$
b) En déduire que les suites (u_n) et (v_n) ont une infinité de termes égaux.

104 **a)** Déterminer pour tout entier naturel n, le reste de la division de 7^n par 4.
b) Résoudre dans l'ensemble des nombres entiers naturels, la congruence $7^{n+1}-(n+1)7^n-1 \equiv 0\ [4]$.

105 **1. a)** x désigne un nombre entier relatif.
Déterminer le reste de la division euclidienne de x^3 par 9 suivant les valeurs de x.
b) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{Z}$, on a les équivalences :
$x^3 \equiv 0\ [9]$ si, et seulement si $x \equiv 0\ [3]$;
$x^3 \equiv 1\ [9]$ si, et seulement si $x \equiv 1\ [3]$;
$x^3 \equiv 8\ [9]$ si, et seulement si $x \equiv 2\ [3]$.
2. x, y et z sont trois nombres entiers relatifs tels que $x^3+y^3+z^3$ soit divisible par 9.
Démontrer que l'un des nombres x, y, z est divisible par 3.

106 **Algo** python
(u_n) est la suite définie par $u_0 = 14$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 5u_n - 6$.
1. Voici une fonction **Restes** écrite en langage Python.
Le paramètre n est un entier naturel non nul.

```
def Restes(n):
    u=14
    for i in range(1,n+1):
        u=5*u-6
    r=u%100
    return r
```

a) Expliquer le rôle de cette fonction.
b) Saisir et appliquer cette fonction pour $n = 20$ et $n = 21$.
2. a) Démontrer que pour tout entier naturel n,
$$u_{n+2} \equiv u_n\ [4].$$
b) En déduire que pour tout entier naturel k,
$$u_{2k} \equiv 2[4] \text{ et } u_{2k+1} \equiv 0\ [4].$$
3. a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $2u_n = 5^{n+2}+3$.
b) En déduire que pour tout entier naturel n,
$$2u_n \equiv 28\ [100].$$
c) Déterminer les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de u_n suivant les valeurs de n.

107 (u_n) est la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = 10u_n + 21.$$

1. Calculer u_1, u_2, u_3.

2. a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $3u_n = 10^{n+1} - 7$.

b) En déduire pour tout entier naturel n, l'écriture décimale de u_n.

3. Démontrer que pour tout entier naturel n, u_n n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5.

4. a) Démontrer que, pour tout entier naturel n,

$$3u_n \equiv 4 - (-1)^n \ [11].$$

b) En déduire que pour tout entier naturel n, u_n n'est pas divisible par 11.

c) Existe-t-il un entier naturel n tel que u_n soit divisible par 7 ? Justifier la réponse.

108 n désigne un nombre entier naturel.

a) Déterminer suivant les valeurs de n, le reste de la division de 7^n par 10.

b) On pose :

$$A = 1 + 7 + 7^2 + \ldots + 7^n.$$

Déterminer suivant les valeurs de n, le chiffre des unités de l'entier naturel A.

109 On se propose de chercher des couples $(a\,;b)$ de nombres entiers naturels qui vérifient la relation :

$$(\mathbf{E}) : a^2 - 250\,507 = b^2$$

1. X désigne un nombre entier naturel.

Dans un tableau, donner les restes possibles de X, puis de X^2 dans la division euclidienne par 9.

2. On suppose que le couple $(a\,;b)$ vérifie la relation $(\mathbf{E})$.

a) Déterminer les restes possibles dans la division euclidienne par 9 de :

- $a^2 - 250\,507$
- a^2.

b) Montrer que les restes possibles de la division euclidienne de a par 9 sont 1 et 8.

3. On suppose que le couple $(a\,;b)$ vérifie la relation $(\mathbf{E})$.

a) Justifier que $a \geqslant 501$.

Démontrer qu'il n'existe pas de solution de la forme $(501\,;b)$.

b) Démontrer que $a \equiv 503\ [9]$ ou $a \equiv 505\ [9]$.

c) Déterminer le plus petit entier naturel k tel que le couple $(505 + 9k\,;b)$ vérifie la relation $(\mathbf{E})$, puis donner le couple solution correspondant.

4. Proposer une écriture de 250 507 en un produit de deux facteurs.

110 On se propose de déterminer les couples $(n\,;m)$ de nombres entiers naturels non nuls qui vérifient la relation :

$$(\mathbf{E}) : 7^n - 3 \times 2^m = 1.$$

1. On suppose $n \leqslant 4$.

Démontrer qu'il y a exactement deux couples solutions.

2. On suppose maintenant que $n \geqslant 5$.

a) Démontrer que si le couple $(n\,;m)$ vérifie la relation $(\mathbf{E})$, alors :

$$7^n \equiv 1\ [32].$$

b) En étudiant les restes de la division par 32 des puissances de 7, démontrer que si le couple $(n\,;m)$ vérifie la relation $(\mathbf{E})$, alors n est divisible par 4.

c) En déduire que si le couple $(n\,;m)$ vérifie la relation $(\mathbf{E})$, alors :

$$7^n \equiv 1\ [5].$$

d) Pour $n \geqslant 5$, existe-t-il des couples $(n\,;m)$ de nombres entiers naturels non nuls qui vérifient la relation $(\mathbf{E})$?

3. Conclure, c'est-à-dire déterminer l'ensemble des couples de nombres entiers naturels non nuls qui vérifient la relation $(\mathbf{E})$.

S'ENTRAÎNER À LA LOGIQUE → p. 290

111 Quantificateurs

Chacune des propositions suivantes est-elle vraie ou fausse ? Justifier la réponse.

a) Pour tout entier naturel non nul n, le reste de la division euclidienne de $3n + 20$ par $n + 5$ est 5.

b) Il existe un entier naturel n non nul tel que la fraction $\dfrac{n+2}{n+1}$ soit égale à un entier.

c) Il existe un entier naturel n tel que :

$$13^n \equiv 5\ [10].$$

d) Pour tout entier naturel impair n :

$$3n^2 + 5 \equiv -4\ [12].$$

112 Implication et réciproque

n désigne un nombre entier naturel.

a) Démontrer l'implication :

« Si n est multiple de 6, alors $2^n - 1$ est divisible par 9. »

b) Énoncer la réciproque.

Cette réciproque est-elle vraie ?

113 Démontrer de différentes façons

Raisonner Calculer

1. Avec la définition

Chaque lettre a, b, c, d désigne l'un des chiffres 0, 1, …, 9 avec $a \neq 0$.

$$\overline{abcdabcd} = a\times 10^7 + b\times 10^6 + c\times 10^5 + d\times 10^4 + a\times 10^3 + b\times 10^2 + c\times 10 + d.$$

Factoriser cette somme et démontrer que tout nombre de la forme $\overline{abcdabcd}$ avec $a \neq 0$ est divisible par 137.

2. Avec la division euclidienne

On se propose de déterminer les valeurs du nombre entier naturel n telles que $2n+3$ divise $5n+3$.

a) Déterminer les entiers naturels q et r tels que :

$$5n+3 = q(2n+3)+r \text{ et } 0 \leqslant r < 2n+3.$$

Conseil : envisager les cas $n<3$ et $n \geqslant 3$.

b) Conclure.

3. Avec une combinaison $au+bv$

On se propose de déterminer les entiers naturels n tels que $n+1$ divise n^2+3n+7.

a) Déterminer $n^2+3n+7-(n+1)(n+2)$.

b) Démontrer que $n+1$ divise n^2+3n+7 si, et seulement si, $n+1$ divise 5.

c) Conclure.

4. Avec les congruences

a) Justifier que $2^4 \equiv 1\ [5]$.

b) En déduire que pour tous entiers naturels k et r,

$$2^{4k+r} \equiv 2^r\ [5].$$

c) n désigne un entier naturel.

Quels sont les restes possibles de la division de 2^n par 5 ?

d) Démontrer que pour tout entier naturel $p \geqslant 1$, $17^{4p+2} + 32^{4p+3} + 3$ est divisible par 5.

114 Math in english

Raisonner Calculer Communiquer

1. Let x be an integer. Prove that :

a) $3x \equiv 8\ [10]$ if, and only if, $x \equiv 6\ [10]$.

b) $x^2 \equiv 6\ [10]$ if, and only if, $x \equiv 4\ [10]$ or $x \equiv 6\ [10]$.

2. Let n be a natural number. Prove that :

$n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 \equiv 0\ [10]$ if and only if,

$$(n+1)^2 \equiv 6\ [10].$$

115 Prendre des initiatives

Chercher Raisonner Calculer

n désigne un nombre entier naturel.

Quel est le reste de la division par 1 001 de :

$$10^{9n} + 2\times 10^{6n} + 2\times 10^{3n} + 1 \text{ ?}$$

116 Résoudre une congruence

Chercher Raisonner Calculer

Étant donné un nombre entier naturel $n \geqslant 2$, on se propose d'étudier l'existence de trois nombres entiers naturels x, y et z tels que :

$$x^2+y^2+z^2 \equiv 2^n - 1\ [2^n].$$

Partie A : étude de deux cas particuliers

1. Dans cette question on suppose $n=2$.

Montrer que 1, 3 et 5 satisfont à la condition précédente.

2. Dans cette question on suppose $n=3$.

a) m désigne un nombre entier naturel.

Réaliser et compléter le tableau ci-dessous donnant le reste r de la division euclidienne de m par 8 et le reste R de la division euclidienne de m^2 par 8.

r	0	1	2	3	4	5	6	7
R								

b) Peut-on trouver trois entiers naturels x, y et z tels que :

$$x^2+y^2+z^2 \equiv 7\ [8] \text{ ?}$$

Partie B : étude du cas général où $n \geqslant 3$

On suppose qu'il existe trois entiers naturels x, y et z tels que :

$$x^2+y^2+z^2 \equiv 2^n - 1\ [2^n].$$

1. Justifier le fait que les trois entiers naturels x, y et z sont tous impairs ou que deux d'entre eux sont pairs.

2. On suppose que x et y sont pairs et que z est impair. On pose alors $x=2q$, $y=2r$, $z=2s+1$ où q, r, s sont des nombres entiers naturels.

a) Montrer que :

$$x^2+y^2+z^2 \equiv 1\ [4].$$

b) En déduire une contradiction.

3. On suppose que x, y, z sont impairs.

a) Prouver que, pour tout entier naturel k non nul, k^2+k est divisible par 2.

b) En déduire que :

$$x^2+y^2+z^2 \equiv 3\ [8].$$

c) Conclure.

117 Imaginer une stratégie

Chercher Raisonner

n désigne un nombre entier naturel.

Démontrer que si n est le carré d'un nombre entier naturel et le cube d'un autre nombre entier naturel, alors :

$$n \equiv 0\ [7] \text{ ou } n \equiv 1\ [7].$$

118 Démontrer des propriétés de divisibilité

Raisonner | Calculer

On se propose de montrer qu'il existe une infinité d'entiers naturels qui vérifient une certaine propriété.

1. Vérifier que 111 est divisible par 3.

2. n désigne un nombre entier naturel supérieur ou égal à 3.

u_n est le nombre dont l'écriture décimale est constituée uniquement de 1 :

$$u_n = \underbrace{11\ldots11}_{n \text{ chiffres } 1}$$

a) Démontrer que $\dfrac{10^n - 1}{9}$ est un nombre entier naturel.

b) Vérifier que pour tous réels a et b :

$$a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right).$$

c) Démontrer que $10^{3n} - 1$ est divisible par $10^n - 1$.

d) En déduire que le nombre entier naturel u_{3n} est divisible par le nombre entier naturel u_n.

e) Démontrer que $10^{2n} + 10^n + 1$ est divisible par 3.

f) Démontrer que u_{3n} est divisible par $3u_n$.

3. Démontrer qu'il existe une infinité de nombres entiers naturels dont l'écriture décimale est constituée exactement de n chiffres 1 et qui sont divisibles par n.

119 Démontrer un critère de divisibilité

Chercher | Raisonner

n désigne un nombre entier naturel non nul.

Démontrer que n est divisible par 6 si, et seulement si, la somme du chiffre des unités et de quatre fois la somme des autres chiffres est un multiple de 6.

120 Changer de couleur ou non

Problème ouvert

Chercher | Raisonner

Problème

Dans une île, 45 caméléons peuvent prendre l'une des trois couleurs : jaune, vert ou bleu.

Un jour donné, il y a 17 caméléons jaunes, 15 verts et 13 bleus.

Lorsque deux caméléons se rencontrent, ils cherchent à avoir la même couleur. Ainsi, soit ils sont de la même couleur et ils la conservent, soit ils ont des couleurs différentes et ils prennent alors tous les deux la troisième couleur.

Est-il possible, qu'après un certain nombre de rencontres, tous les caméléons soient de la même couleur ?

121 Chercher des points à coordonnées entières

Narration de recherche

Chercher | Raisonner

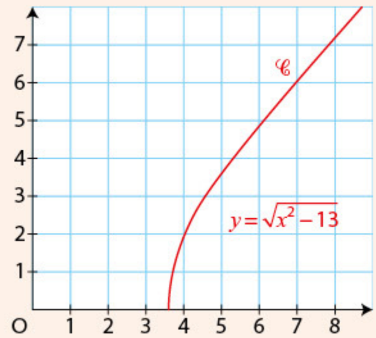
Rédiger les différentes étapes de la recherche sans omettre les fausses pistes et les changements de méthode.

Problème

f est la fonction définie sur $\left[\sqrt{13}\,; +\infty\right[$ par :

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 13}.$$

On a tracé sa courbe représentative $\mathscr{C}$ dans le repère orthonormé ci-dessous.



a) Vérifier que le point M(7 ; 6) est un point à coordonnées entières de la courbe $\mathscr{C}$.

b) Existe-t-il d'autres points de $\mathscr{C}$ à coordonnées entières ?

122 Résoudre un système

Raisonner | Calculer

Trouver tous les couples $(a\,;b)$ d'entiers naturels tels que :

$$\begin{cases} 8a + b \equiv 51\ [100] \\ \quad\quad b \equiv 27\ [100] \end{cases}$$

avec $0 \leqslant a \leqslant 99$ et $0 \leqslant b \leqslant 99$.

123 Étudier des congruences modulo 10

Raisonner | Calculer

a) n désigne un nombre entier naturel.

On pose :

$$\mathrm{A}(n) = n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2.$$

Démontrer que A(n) est divisible par 10 si et, seulement si, $n \equiv 3\ [10]$ ou $n \equiv 5\ [10]$.

b) Déterminer les nombres entiers naturels multiples de 10 qui sont la somme des carrés de trois entiers consécutifs.

124 Étude d'un code-barre

Algo

Le code-barres EAN-13 (European Article Numbering) est le système de codage le plus utilisé pour identifier un produit. Il est composé de treize chiffres représentés par des barres et lus par un lecteur.
Le dernier chiffre d'un code EAN-13 est un chiffre contrôle, ou clé, déterminé à partir des douze chiffres précédents.

3 987654 321095

3 chiffres pour identifier le pays

5 chiffres pour identifier le fabricant

5 chiffres pour identifier le produit

1 seul chiffre pour la clé de contrôle

Partie A : calcul de la clé

On attribue un rang à chacun des douze premiers chiffres du code-barres :

Rang	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Chiffre	3	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	9

La clé K est alors déterminée par l'algorithme ci-contre.

a) Vérifier la clé du code-barres précédent.

b) Voici le code ISBN et le code-barres associé d'un manuel scolaire des éditions Nathan.

ISBN 978-2-09-172905-3

9 782091 729053

Vérifier également dans ce cas la clé du code EAN-13.

```
A ← Somme des chiffres de rang impair
B ← Somme des chiffres de rang pair
S ← A + 3B
R ← Reste de la division de S par 10
Si R = 0 alors
   K ← 0
   sinon
   K ← 10 − R
Fin Si
```

Le code ISBN (International Standard Book Number) permet d'identifier chaque livre de manière unique.

Partie B : exemples de détection d'erreurs

On note C_1, C_2,…, C_{12} les douze premiers chiffres d'un code EAN-13.

1. Cas où l'erreur porte sur un chiffre de rang impair

On suppose que le chiffre $C_{2k+1}(0 \leqslant k \leqslant 5)$ a été remplacé par le chiffre α.
Comme dans l'algorithme, on note S la somme associée au bon code, S' celle associée au code erroné, R et R' les restes des divisions respectives de S et S' par 10.

a) Justifier que $S' = S + \alpha - C_{2k+1}$.

b) En déduire que $R' = R$ si, et seulement si, $\alpha - C_{2k+1} \equiv 0\ [10]$.

c) Montrer alors que l'erreur est détectée par la clé.

2. Cas où l'erreur porte sur un chiffre de rang pair

On suppose que le chiffre $C_{2k}(1 \leqslant k \leqslant 6)$ a été remplacé par le chiffre β.

a) Justifier que $S' = S + 3(\beta - C_{2k})$.

b) En déduire que $R' = R$ si, et seulement si, $3(\beta - C_{2k}) \equiv 0\ [10]$.

c) L'erreur est-elle à nouveau détectée par la clé ?

125 Calcul de la clé RIB

Algo python

Le numéro d'un compte bancaire au format RIB comporte 23 chiffres et se décompose de la façon ci-contre.

Code Banque	Code Guichet	Numéro de Compte	Clé RIB
11907	00840	40319431098	73
B	G	C	K

N : numéro de compte bancaire

La clé RIB est formée de deux chiffres et permet de vérifier la validité du numéro du compte bancaire ; elle est calculée à partir du code banque, du code guichet et du numéro de compte.
Lorsque des lettres figurent dans ces données, elles sont remplacées par un équivalent numérique :
A,J : 1 ; B,K,S : 2 ; C,L,T : 3 ; D,M,U : 4 ; E,N,V : 5 ; F,O,W : 6 ; G,P,X : 7 ; H,Q,Y : 8 ; I,R,Z : 9.

1. Définition de la clé
Si N est le nombre entier constitué par les 23 chiffres du numéro du compte bancaire, alors la clé K est telle que $N \equiv 0\ [97]$ avec $01 \leqslant K \leqslant 97$.
a) Justifier que $N = K + C \times 10^2 + G \times 10^{13} + B \times 10^{18}$.
b) En déduire que $N \equiv K + 3C + 15G + 89B\ [97]$.
c) On note alors R le reste de la division euclidienne de $3C + 15G + 89B$ par 97.
Démontrer que $K = 97 - R$.

2. Des exemples
a) Vérifier la clé 73 du numéro du compte bancaire donné en exemple.
b) Voici un numéro de compte bancaire dont la clé a été effacée :

Code Banque	Code Guichet	Numéro de Compte	Clé RIB
20041	01015	4251358Z027	••

Retrouver cette clé.

3. Avec un programme
Écrire une fonction en langage Python qui donne pour résultat la clé K à partir de B, G et C.

126 Le numéro Insee

Le numéro Insee d'un individu est constitué de 13 chiffres auxquels s'ajoutent deux chiffres d'une clé de contrôle.

1. Définition de la clé de contrôle
Si A est le nombre entier formé par les treize premiers chiffres et r le reste de la division euclidienne de A par 97, la clé de contrôle est $K = 97 - r$.
Démontrer que cette clé est un entier naturel non nul d'au plus deux chiffres.

2. Calcul de la clé de contrôle
a) Vérifier que $10^2 \equiv 3\ [97]$.
b) Écrire A sous la forme $A = 10^6 \times B + C$ et démontrer que $27B + C \equiv r\ [97]$.
c) À l'aide de la calculatrice, vérifier que 84 est bien la clé du numéro Insee de la carte vitale ci-dessus.
d) Déterminer la clé de contrôle du numéro Insee : 1 88 02 63 113 095.

127 Étude de nombres particuliers

Les nombres entiers naturels 1, 11, 111, 1 111,… sont des **rep-units**.
On appelle ainsi les nombres entiers naturels qui ne s'écrivent qu'avec des 1.
Pour tout nombre entier naturel p non nul, on note N_p le rep-unit qui s'écrit avec p fois le chiffre 1 :

$$N_p = \underbrace{11\ldots1}_{p \text{ répétitions du chiffre } 1} = \sum_{k=0}^{p-1} 10^k.$$

On étudie dans la suite quelques propriétés des rep-units.

Partie A : divisibilité des rep-units dans quelques cas particuliers
Dans toute cette partie, p désigne un nombre entier naturel non nul.
1. Justifier que N_p n'est divisible ni par 2 ni par 5.
2. Dans cette question, on étudie la divisibilité de N_p par 3.
a) Démontrer que pour tout entier naturel j, $10^j \equiv 1\ [3]$.
b) En déduire que $N_p \equiv p\ [3]$.
c) Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que le rep-unit N_p soit divisible par 3.
3. Dans cette question, on étudie la divisibilité de N_p par 7.
a) Démontrer que $10^p \equiv 1\ [7]$ si, et seulement si, p est un multiple de 6.
b) Justifier que $N_p = \dfrac{10^p - 1}{9}$.
c) Démontrer que si 7 divise N_p, alors 7 divise $9N_p$.
On admet la réciproque de cette implication.
d) Démontrer que N_p est divisible par 7 si, et seulement si, p est un multiple de 6.

Partie B : un rep-unit strictement supérieur à 1 n'est jamais un carré parfait
1. n désigne un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2.
On suppose que l'écriture décimale de n^2 se termine par le chiffre 1, c'est-à-dire $n^2 \equiv 1\ [10]$.
a) Recopier et compléter le tableau de congruences ci-dessous.

$n \equiv \ldots\ [10]$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$n^2 \equiv \ldots\ [10]$										

b) En déduire qu'il existe un entier naturel m tel que $n = 10m + 1$ ou $n = 10m - 1$.
c) Conclure que $n^2 \equiv 1\ [20]$.
2. p désigne un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2.
Quel est le reste de la division euclidienne de N_p par 20 ?
3. En déduire que, pour p entier naturel supérieur ou égal à 2, le rep-unit N_p n'est pas le carré d'un entier.

HISTOIRE DES MATHS

Les rep-units ont été étudiés par de nombreux mathématiciens au 19e siècle.

Ils permettent de mettre en évidence les tendances cycliques du développement décimal périodique.

Dans les années 1960, les ordinateurs ont permis des avancées dans l'étude des propriétés des rep-units.

128 **Système de numération de base b**

1. Écriture d'un entier naturel

b désigne un nombre entier naturel, $b \geqslant 2$.
N désigne un nombre entier naturel non nul.
On effectue les divisions euclidiennes successives :

$$\begin{array}{l|l}
N & b \\ \hline
r_0 & q_0 \;\;\begin{array}{|l}
b \\ \hline
\end{array}
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
N & \vert\; b & & \\
r_0 & \vert\; q_0 & \vert\; b & \\
 & r_1 & \vert\; q_1 & \vert\; b \\
 & & r_2 & \vert\; q_2 \;\ddots
\end{array}$$

a) Justifier que la suite (q_n) des quotients est strictement décroissante.

b) Expliquer pourquoi, après un certain nombre de divisions, on obtiendra $q_n = 0$.

c) Démontrer alors que :

$$N = r_n b^n + r_{n-1} b^{n-1} + \ldots + r_1 b + r_0 \quad \mathbf{(1)}$$

avec pour tout $i = 0, 1, \ldots, n$, $0 \leqslant r_i < b$ et $r_n \neq 0$.

d) Réciproquement, démontrer que si **(1)** est réalisé, alors $r_0, r_1, \ldots, r_n$ sont obtenus à l'aide de la succession des divisions euclidiennes précédentes.

Avec **(1)**, on note $N = \overline{r_n r_{n-1} \ldots r_1 r_0}$ et on obtient ainsi l'écriture du nombre entier naturel non nul N dans le système de numérotation de base b.

2. Des exemples

a) Écrire le nombre entier naturel $N = 2\,020$ dans le système de numération de base :

- $b = 3$
- $b = 5$

b) Un nombre entier naturel N s'écrit $N = \overline{2\,765}$ dans le système de numération de base $b = 8$. Quel est ce nombre entier ?

c) Dans le système de numération de base 12, on note les chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, α, β.

- Écrire $N = 20112$ dans le système de base $b = 12$.
- Un nombre N s'écrit $N = \overline{85\beta 1}$ dans le système de base 12. Quel est ce nombre entier ?

HISTOIRE DES MATHS

- Les Babyloniens (2 000 ans avant notre ère) utilisaient une numération en base soixante (système sexagésimal). L'avantage de la base soixante réside dans le fait que 60 a de nombreux diviseurs. Le découpage des heures en minutes, secondes est issu de cette numération.
- Les systèmes de numération de base 2 (binaire) et de base 16 (hexadécimal) sont utilisés en informatique pour représenter les nombres entiers naturels.

129 **Algo** python

Observer puis démontrer une périodicité

a et b désignent deux nombres entiers naturels et p un nombre entier naturel, $p \geqslant 2$.
(u_n) est la suite définie pour tout entier naturel n, par :

$$u_n = an + b.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note r_n le reste de la division euclidienne de u_n par p.

1. Voici une fonction **Restes** écrite en langage Python.

```
def Restes(a,b,p):
    R=[]
    for n in range(21):
        u=a*n+b
        r=u%p
        R=R+[r]
    return R
```

a) Expliquer le rôle de cette fonction.
Quel résultat renvoie-t-elle ?

b) Saisir cette fonction.

c) La tester dans les situations suivantes :

- $u_n = 12n + 5$, $\quad p = 15$
- $u_n = 5n + 3$, $\quad p = 7$

Effectuer éventuellement d'autres essais.

d) Conjecturer une propriété de la suite (r_n) des restes.

2. Démonstration

a) Démontrer que, parmi les nombres $u_0, u_1, \ldots, u_p$, il en existe deux ayant le même reste dans la division euclidienne par p.

b) On note n_0 et $n_0 + T$ (T entier naturel, $T \geqslant 1$) les rangs de ces deux nombres.
Démontrer que aT est un multiple de p.

c) En déduire que pour tout entier naturel k,

$$r_{k+T} = r_k.$$

d) Démontrer alors la conjecture émise à la question **1. d)**.

3. Des exemples

a) Combien de termes différents la suite (r_n) possède-t-elle au maximum ?

b) Ce nombre de termes peut-il être strictement inférieur à p ?

E est un ensemble à n éléments ($n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$).
On peut affirmer que, dans une liste formée de $n+1$ éléments de l'ensemble E, deux au moins sont égaux.
Ce principe de raisonnement utilisé dans la question **2. a)** est très utile.