5 Utilisation des nombres complexes en géométrie

HISTOIRE DES MATHS

C'est à partir du 19^{e} siècle que les nombres complexes sont utilisés en géométrie. En 1806, **Jean-Robert Argand** publie son *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires par des constructions géométriques*. Plus tard, **Gauss** et **Cauchy** adoptent ce point de vue et développent les outils mis en place par Argand.

En 1831, Gauss utilise les nombres complexes pour étudier les polygones réguliers constructibles à la règle et au compas.

En 1872, **Klein** propose, dans son « programme d'Erlangen », une étude des différentes géométries développées durant le 19^{e} siècle, en particulier la géométrie euclidienne et la récente géométrie des nombres complexes.


Augustin Fresnel


Félix Klein

▶ **Augustin Fresnel** (1788-1827) est un ingénieur et physicien français, fondateur de l'optique moderne. Dès 1823, il utilise les nombres complexes en optique pour étudier les angles des rayons incident et réfracté.

▶ **Félix Klein (1849-1925)** est un mathématicien allemand. À seulement 23 ans, il est nommé professeur à l'université d'Erlangen et y donne une conférence, dite « programme d'Erlangen ».

1806 Argand relie nombres complexes et géométrie.

1823 Fresnel utilise les nombres complexes en optique.

1831 Gauss étudie les polygones réguliers grâce aux nombres complexes.

1872 Klein expose son programme d'Erlangen.

1893 Kennely utilise les nombres complexes en électricité.

1800 Portrait de *Madame Récamier* par David

1835 Passage de la comète de Halley en France

1862 Victor Hugo écrit *Les Misérables*

1869 Ouverture du canal de Suez

1897 *Cyrano de Bergerac* d'E. Rostand est joué au théâtre pour la première fois

1800 — 1825 — 1850 — 1875 — 1900

Sécurité des échanges Internet.

Afin de sécuriser davantage les échanges d'informations et les transactions financières sur Internet, les chercheurs en cryptologie développent de nouveaux outils basés sur les courbes elliptiques : des objets géométriques qui peuvent être définis à partir des nombres complexes.

Les contenus et capacités travaillés dans ce chapitre

	Savoir-faire	Exercices
• Interprétation géométrique du module et d'un argument de $b-a$ et $\frac{c-a}{b-a}$.	1, 3	13 à 20, 25 à 28, 30 à 36, 38 à 41
• Description de l'ensemble $\mathbb{U}_n$ des racines n-ièmes de l'unité.	5, 7, 8	52 à 61, 65, 66
• Utiliser les nombres complexes pour étudier des configurations du plan.	2, 4	21 à 24, 29, 37, 42 à 51
• Utiliser les racines de l'unité dans l'étude de configurations liées aux polygones réguliers.	6, 9 à 12	62 à 64, 80, 81

Calcul mental

Rappels utiles

• Écritures d'un nombre complexe

Un nombre complexe non nul z peut s'écrire sous différentes formes.

• Forme algébrique :

$$z = a + ib \text{ avec } a \text{ et } b \text{ nombres réels.}$$

• Forme trigonométrique :

$$z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) \text{ avec } r > 0 \text{ et } \theta \text{ un nombre réel.}$$

• Forme exponentielle :

$$z = re^{i\theta} \text{ avec } r > 0 \text{ et } \theta \text{ un nombre réel.}$$

• Module et arguments

Le module de $z = a + ib$ avec a et b réels est :

$$|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Un argument de z est :

$$\arg(z) = \theta\ [2\pi] \text{ avec } \cos(\theta) = \frac{a}{r} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{b}{r}.$$

• Formule de Moivre, suite géométrique

• Pour tout réel θ et tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta},$$

soit $(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$.

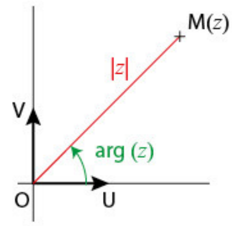
• Pour tout complexe $u \neq 1$,

$$1 + u + u^2 + \ldots + u^n = \frac{1 - u^{n+1}}{1 - u}.$$

• Interprétation géométrique

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O\,;\overrightarrow{OU}, \overrightarrow{OV}\right)$.

Pour tout complexe non nul z de point image M : $OM = |z|$ et $\left(\overrightarrow{OU}\,;\overrightarrow{OM}\right) = \arg(z)\ [2\pi]$



À l'oral — Questions-Tests

Pour chaque question, il y a une seule réponse exacte.

1 **a)** La forme algébrique de $(1 + i)i - 5$ est :

(1) $-5 + i(1 + i)$ (2) $-6 + i$ (3) $-4 + i$

b) Une forme trigonométrique du nombre complexe $1 + i$ est :

(1) $2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

(2) $\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

(3) $\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

2 Une forme exponentielle du nombre complexe $2i$ est :

(1) $2e^{i\frac{\pi}{2}}$ (2) $e^{i\frac{\pi}{2}}$ (3) $-2e^{-i\frac{\pi}{2}}$

3 **a)** Le module du nombre complexe $2 + 3i$ est :

(1) 5 (2) 13 (3) $\sqrt{13}$

b) Le module du nombre complexe $e^{-i\frac{\pi}{4}}$ est :

(1) 1 (2) -1 (3) $-\frac{\pi}{4}$

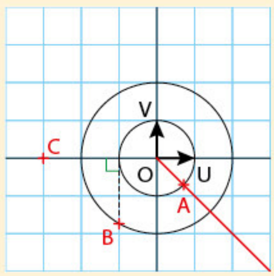
c) Un argument du nombre complexe $10e^{-i\frac{\pi}{3}}$ est :

(1) 10 (2) $-\frac{10\pi}{3}$ (3) $-\frac{\pi}{3}$

4 On pose $z = e^{i\frac{2\pi}{5}}$.

(1) $z^3 = 1$ (2) $z^5 = 1$ (3) $z^{12} = 1$

5 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O\,;\overrightarrow{OU}, \overrightarrow{OV}\right)$.



a) L'affixe du point A est :

(1) $e^{-i\frac{\pi}{4}}$ (2) $\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ (3) $e^{i\frac{\pi}{4}}$

b) L'affixe du point B est :

(1) $-\sqrt{3} + i$ (2) $-1 - i\sqrt{3}$ (3) $1 - i\sqrt{3}$

c) Un argument de l'affixe du point C est :

(1) 0 (2) π (3) $\frac{\pi}{2}$

6 On pose $S = 1 + i + i^2 + \ldots + i^{11}$. Alors :

(1) $S = 1 + i$ (2) $S = i$ (3) $S = 0$

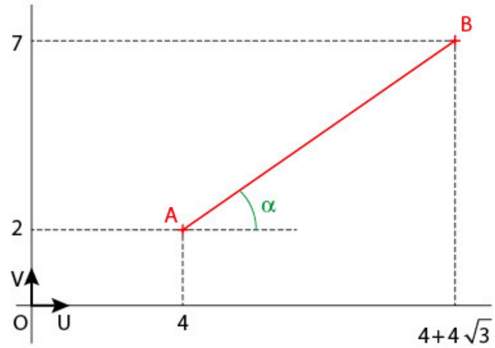
1 Module et arguments de l'affixe d'un vecteur

Un avion est en phase de décollage. La piste et l'avion sont schématisés ci-après par l'axe des abscisses et le segment $[AB]$ dans le repère orthonormé direct $\left(O\,;\overrightarrow{OU},\overrightarrow{OV}\right)$. L'unité est de 9 m.

1 Utiliser la géométrie euclidienne

a) Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
En déduire la longueur AB de l'avion. *Arrondir au m.*

b) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{OU}\cdot\overrightarrow{AB}$.
En déduire la mesure α, en radian, de l'angle que l'avion forme avec l'horizontale. *Arrondir au centième.*



2 Faire le lien avec les nombres complexes

a) Déterminer l'affixe a du point A et l'affixe b du point B.

b) Calculer $b-a$.
Comparer avec les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ trouvées au **1 a)**.
Le nombre complexe $b-a$ est appelé **affixe** du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

c) Calculer $|b-a|$. Comparer avec la longueur AB trouvée au **1 a)**.

d) Déterminer un argument du nombre complexe $b-a$.
Comparer avec la mesure α trouvée au **1 b)**.

2 Racines *n*-ièmes de l'unité

On se propose de résoudre l'équation $z^n=1$ d'inconnue le nombre complexe z dans les cas particuliers où $n=2$, $n=3$ et $n=4$.
$\left(O\,;\overrightarrow{OU},\overrightarrow{OV}\right)$ est un repère orthonormé direct du plan complexe.

1 Cas $n=2$

a) Résoudre l'équation $z^2=1$. Donner les solutions sous forme algébrique.
Ces solutions sont appelées **racines carrées de l'unité**.

b) Représenter dans le plan les points d'affixes ces solutions.

2 Cas $n=4$

a) Résoudre l'équation $z^4=1$. Donner les quatre solutions sous forme algébrique.
Ces solutions sont appelées **racines quatrièmes de l'unité**.

b) Représenter dans le plan les points d'affixes ces solutions.

3 Cas $n=3$

a) Déterminer les trois valeurs de θ dans l'intervalle $[0\,;2\pi]$ et telles que $\left(e^{i\theta}\right)^3=1$.

b) En déduire les trois solutions, écrites sous forme algébrique, de l'équation $z^3=1$.
Ces solutions sont appelées **racines troisièmes (ou cubiques) de l'unité**.

c) Représenter dans le plan les points d'affixes ces solutions.

Exercices
- 1 à 4 (ci-contre)
- 13 à 51

1 Interprétations géométriques

(O ; U, V) est un repère orthonormé direct du plan complexe.

A Mesures d'un angle orienté de vecteurs non nuls

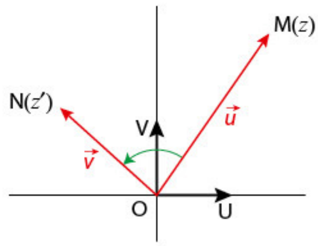
Définitions

- M et N sont deux points distincts de O d'affixes respectives z et z'.

On pose : $\left(\overrightarrow{OU};\overrightarrow{OM}\right)=\arg(z)\ [2\pi]$ et $\left(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{ON}\right)=\arg(z')-\arg(z)\ [2\pi]$.

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls et tels que $\vec{u}=\overrightarrow{OM}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{ON}$.

On pose : $(\vec{u};\vec{v})=\left(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{ON}\right)\ [2\pi]$.



Propriétés

- Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et :

– de **même sens** si, et seulement si, $(\vec{u};\vec{v})=\mathbf{0}\ [2\pi]$;

– de **sens contraires** si, et seulement si,

$$(\vec{u};\vec{v})=\pi\ [2\pi].$$

- **Relation de Chasles :** pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ non nuls,

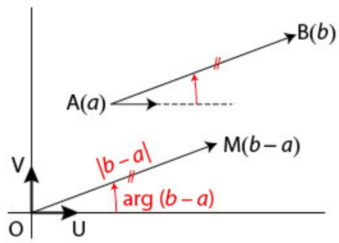
$$(\vec{u};\vec{v})+(\vec{v};\vec{w})=(\vec{u};\vec{w})\ [2\pi]$$

B Module et argument de $b-a$

Propriétés

A et B sont deux points d'affixes respectives a et b.

- $\mathbf{AB}=|b-a|$
- Si A ≠ B, alors $\left(\overrightarrow{OU};\overrightarrow{AB}\right)=\arg(b-a)\ [2\pi]$.



Démonstration

On note M le point tel que $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{AB}$. Alors M a pour affixe $b-a$.

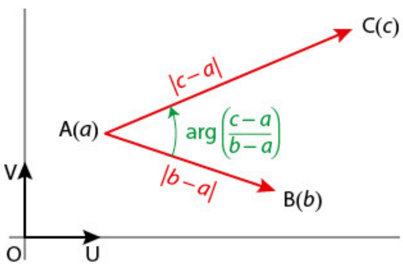
Ainsi, $AB=OM=|b-a|$ et $\left(\overrightarrow{OU};\overrightarrow{AB}\right)=\left(\overrightarrow{OU};\overrightarrow{OM}\right)=\arg(b-a)\ [2\pi]$.

C Module et argument de $\dfrac{c-a}{b-a}$

Propriétés

A, B, C sont trois points d'affixes a, b, c avec $a\neq b$ et $a\neq c$.

- $\dfrac{AC}{AB}=\left|\dfrac{c-a}{b-a}\right|$.
- $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right)\ [2\pi]$



Démonstrations

- $\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{|c-a|}{|b-a|}=\left|\dfrac{c-a}{b-a}\right|$ (voir paragraphe A, p. 48).
- $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\left(\overrightarrow{OU};\overrightarrow{AC}\right)-\left(\overrightarrow{OU};\overrightarrow{AB}\right)=\arg(c-a)-\arg(b-a)=\arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right)\ [2\pi]$ (voir paragraphe C, p. 72).

Conséquences

A, B, C sont trois points d'affixe a, b, c avec $a\neq b$ et $a\neq c$.

- $\left|\dfrac{c-a}{b-a}\right|=1$ équivaut à $AC=AB$.
- $\arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right)=0\ [\pi]$ équivaut à A, B, C alignés.
- $\arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right)=\dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$ équivaut à (AB) et (AC) orthogonales.

EXERCICES RÉSOLUS

1 Déterminer un ensemble de points

Dans chaque cas, déterminer et construire l'ensemble des points M du plan complexe dont l'affixe z vérifie la relation donnée.

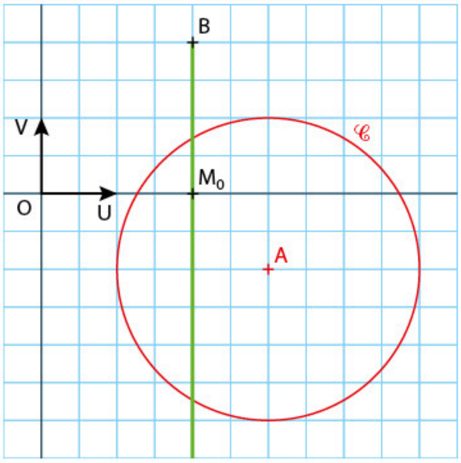
a) $|z-3+i|=2$

b) $\arg(z-2-2i)=-\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$ avec $z\neq 2+2i$

Solution

a) On note A le point d'affixe $3-i$.
Ainsi, $|z-3+i|=2$ équivaut à $|z-(3-i)|=2$, c'est-à-dire $AM=2$.
L'ensemble des points M est le cercle $\mathscr{C}$ de centre A et de rayon 2.

b) On note B le point d'affixe $2+2i$.
Ainsi, $\arg(z-2-2i)=-\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$ équivaut à
$\arg(z-(2+2i))=-\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$, c'est-à-dire $\left(\overrightarrow{OU};\overrightarrow{BM}\right)=-\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.
L'ensemble des points M est la demi-droite $]BM_0)$ où M_0 est le point d'affixe 2.



2 Étudier la nature d'une figure

Dans le plan complexe, A, B, C sont les points d'affixes $a=1-2i$, $b=5+i$ et $c=-2+2i$.
Démontrer que le triangle ABC est isocèle rectangle en A.

Solution

$$\frac{c-a}{b-a}=\frac{-2+2i-(1-2i)}{5+i-(1-2i)}=\frac{-3+4i}{4+3i}=\frac{(-3+4i)(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)}$$

$$\frac{c-a}{b-a}=\frac{-12+12+9i+16i}{4^2+3^2}=\frac{25i}{25}=i$$

Ainsi, $\left|\dfrac{c-a}{b-a}\right|=|i|=1$ donc $|c-a|=|b-a|$, soit $AC=AB$ et le triangle ABC est isocèle en A.

De plus, $\arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right)=\arg(i)=\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$, soit $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et le triangle ABC est rectangle en A.

On calcule $\dfrac{c-a}{b-a}$, puis on utilise son module et un argument pour conclure avec les conséquences énoncées au paragraphe C du cours.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 1

3 Dans chaque cas, déterminer et construire l'ensemble des points M du plan complexe dont l'affixe z vérifie la relation donnée.

a) $|z-1-i|=3$

b) $\arg(z+2-i)=\dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$

Sur le modèle de l'exercice résolu 2

4 Dans le plan complexe, A, B, C, D sont les points d'affixes :

$a=-2-i$, $b=4+4i$, $c=-12+11i$ et $d=-13$.

a) Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A.

b) Démontrer que le triangle ACD est isocèle en D.

Exercices
- 5 à 9 (ci-contre)
- 52 à 66

2 Racines n-ièmes de l'unité

n désigne un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2.

A Ensemble $\mathbb{U}_n$ des racines n-ièmes de l'unité

Définition

Une **racine n-ième de l'unité** est une solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = 1$.

Notation :
L'ensemble des racines n-ièmes de l'unité est noté $\mathbb{U}_n$.

Exemple

i est une racine quatrième de l'unité, en effet $i^4 = 1$.

Propriété

Les racines n-ièmes de l'unité s'écrivent $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ avec k nombre entier relatif, $0 \leqslant k < n$.
Ainsi, l'ensemble $\mathbb{U}_n$ compte n éléments.

Démonstration

On pose $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

$z^n = 1$ équivaut à $r^n e^{in\theta} = 1$, soit $\begin{cases} r^n = 1 \\ n\theta = 0\ [2\pi] \end{cases}$, c'est-à-dire $\begin{cases} r = 1 \\ \theta = \dfrac{k2\pi}{n} \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$.

Or, tout entier relatif k peut s'écrire $k = nq + s$ avec s, q dans $\mathbb{Z}$ tels que $0 \leqslant s < n$.

Ainsi, $\dfrac{k2\pi}{n} = q \times 2\pi + \dfrac{s2\pi}{n}$, soit $\dfrac{k2\pi}{n} = \dfrac{s2\pi}{n}\ [2\pi]$.

Finalement, l'équation $z^n = 1$ possède n solutions : les nombres complexes $e^{i\frac{s2\pi}{n}}$ avec $0 \leqslant s < n$.

B Représentation des racines n-ièmes de l'unité

$(O\,;\overrightarrow{OU}, \overrightarrow{OV})$ est un repère orthonormé direct du plan complexe.

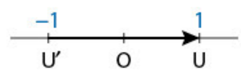
Propriété (admise)

Pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, les racines n-ièmes de l'unité sont les affixes des sommets du polygone régulier à n sommets inscrit dans le cercle de centre O et de rayon 1 et dont l'un des sommets est le point U.

Exemples

- **Cas $n = 2$**

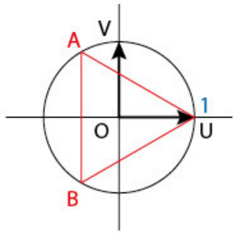
Les racines deuxièmes (ou **racines carrées**) de l'unité sont 1 et -1, c'est-à-dire les affixes des points U et U'.



- **Cas $n = 3$**

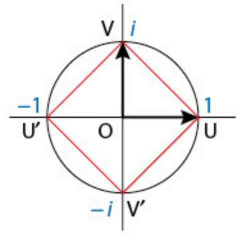
Les racines troisièmes (ou **racines cubiques**) de l'unité sont $\mathbf{1}$, $\mathbf{e^{i\frac{2\pi}{3}}}$ et $\mathbf{e^{i\frac{4\pi}{3}}}$, c'est-à-dire les affixes des points U, A et B.

On note parfois $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.



- **Cas $n = 4$**

Les **racines quatrièmes** de l'unité sont $\mathbf{1}$, $\boldsymbol{i}$, $\mathbf{-1}$ et $\boldsymbol{-i}$, c'est-à-dire les affixes des points U, V, U', V'.



EXERCICES RÉSOLUS

5 Déterminer des racines *n*-ièmes de l'unité

Déterminer les racines sixièmes de l'unité. Écrire les résultats sous forme algébrique.

Solution

Les racines sixièmes de l'unité sont les solutions de l'équation $z^6 = 1$.

D'après la propriété énoncée au paragraphe **2. A**, elles s'écrivent $e^{i\frac{2k\pi}{6}}$ avec k entier relatif, $0 \leqslant k \leqslant 5$.

Les racines sont donc :

- $z_1 = e^{0i} = 1$,
- $z_2 = e^{i\frac{2\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$,
- $z_3 = e^{i\frac{2\times2\pi}{6}} = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$,
- $z_4 = e^{i\frac{2\times3\pi}{6}} = e^{i\pi} = -1$,
- $z_5 = e^{i\frac{2\times4\pi}{6}} = e^{i\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$,
- $z_6 = e^{i\frac{2\times5\pi}{6}} = e^{i\frac{5\pi}{3}} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

6 Représenter dans un repère les racines *n*-ièmes de l'unité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O ; \overrightarrow{OU}, \overrightarrow{OV}\right)$.
Représenter dans ce repère le polygone dont les sommets ont pour affixes les racines cinquièmes de l'unité.

Solution

Les racines cinquièmes de l'unité sont :

$z_1 = 1$

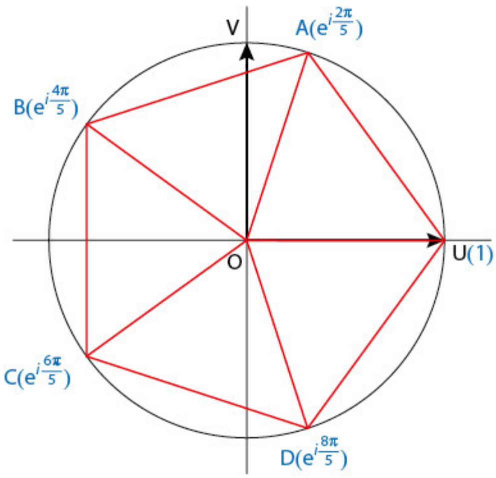
$z_2 = e^{i\frac{2\pi}{5}} = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

$z_3 = e^{i\frac{4\pi}{5}} = \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)$

$z_4 = e^{i\frac{6\pi}{5}} = \cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{6\pi}{5}\right)$

$z_5 = e^{i\frac{8\pi}{5}} = \cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{8\pi}{5}\right)$

Ces racines sont les affixes des sommets du pentagone régulier UABCD inscrit dans le cercle de centre O et de rayon 1.



Dans cet exercice, on utilise les valeurs approchées :

$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \approx 0{,}31$

$\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) \approx 0{,}95$

pour placer le point A, puis construire le pentagone régulier. La construction à la règle et au compas sera vue à l'exercice **97** p. 138.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 5

7 Déterminer les racines septièmes de l'unité. Écrire les résultats sous forme exponentielle.

8 Déterminer les solutions de l'équation $z^4 = 1$. Écrire les résultats sous forme algébrique.

Sur le modèle de l'exercice résolu 6

9 Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $\left(O ; \overrightarrow{OU}, \overrightarrow{OV}\right)$.
Construire, à la règle et au compas, le polygone régulier dont les sommets ont pour affixes les racines sixièmes de l'unité (voir exercice **5**).

EXERCICE RÉSOLU

10 Utiliser les racines *n*-ièmes de l'unité pour tracer un polygone régulier

Cours 2

On se propose de tracer, grâce à un programme, un octogone régulier inscriptible dans un cercle de rayon 2, en utilisant les racines *n*-ièmes de l'unité.

a) Déterminer le nombre entier naturel a tel que $a^8 = 256$.

b) z et Z sont deux nombres complexes tels que $Z = 2z$. Démontrer que $Z^8 = 256$ si, et seulement si, $z^8 = 1$.

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^8 = 1$. En déduire les solutions de l'équation $Z^8 = 256$.

d) Saisir et exécuter un programme en langage Python qui permet de construire les sommets d'un octogone régulier inscriptible dans un cercle de rayon 2.

Solution

a) $a = 2$. En effet, $2^8 = 256$.

b) On pose $Z = 2z$. Ainsi, $Z^8 = 1$ équivaut à $(2z)^8 = 256$, soit $256z^8 = 256$, c'est-à-dire $z^8 = 1$.

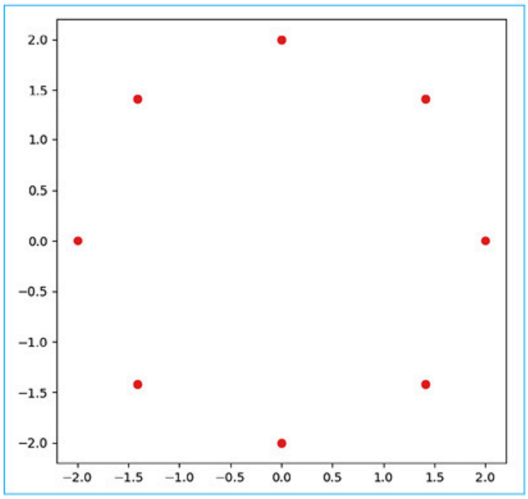
c) Les solutions de l'équation $z^8 = 1$ sont les racines huitièmes de l'unité, c'est-à-dire : 1 ; $e^{i\frac{\pi}{4}}$; $e^{i\frac{\pi}{2}}$; $e^{i\frac{3\pi}{4}}$; $e^{i\pi}$; $e^{i\frac{5\pi}{4}}$; $e^{i\frac{3\pi}{2}}$; $e^{i\frac{7\pi}{4}}$.

Les solutions de l'équation $Z^8 = 256$ sont donc : 2 ; $2e^{i\frac{\pi}{4}}$; $2e^{i\frac{\pi}{2}}$; $2e^{i\frac{3\pi}{4}}$; $2e^{i\pi}$; $2e^{i\frac{5\pi}{4}}$; $2e^{i\frac{3\pi}{2}}$; $2e^{i\frac{7\pi}{4}}$.

d) Les racines huitièmes de l'unité sont les affixes des sommets d'un octogone régulier inscriptible dans un cercle de rayon 1, donc les solutions de l'équation $Z^8 = 256$ (qui sont toutes de module 2) sont les affixes des sommets d'un octogone régulier inscriptible dans un cercle de rayon 2.
On obtient alors le programme ci-dessous.

```python
from pylab import *
from cmath import *

for k in range(0,8):
    z=2*exp(1j*2*k*pi/8)
    plot(z.real,z.imag,'r.',markersize=12)
show()
```



EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 10

11 **a)** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^7 = 1$.
b) Saisir et exécuter un programme en langage Python qui permet de construire les sommets d'un heptagone régulier inscriptible dans un cercle de rayon 3.

12 **a)** n désigne un nombre entier naturel, $n \geqslant 3$. Écrire, en langage Python, une fonction **Polygone** de paramètre n, qui permet de construire les sommets d'un polygone régulier inscriptible dans un cercle de rayon 1.
b) Saisir et exécuter cette fonction :
- pour $n = 10$
- pour $n = 15$

Interprétation géométrique du module et d'un argument

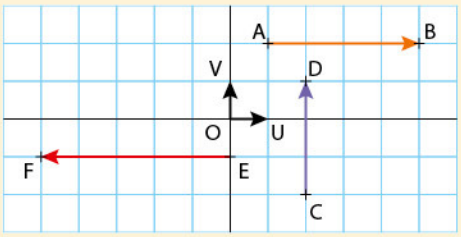
Cours 1

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O\,;\overrightarrow{OU},\overrightarrow{OV}\right)$.

Questions flash — À l'oral

13 Déterminer, par lecture graphique, le module et un argument de l'affixe de chacun des vecteurs :

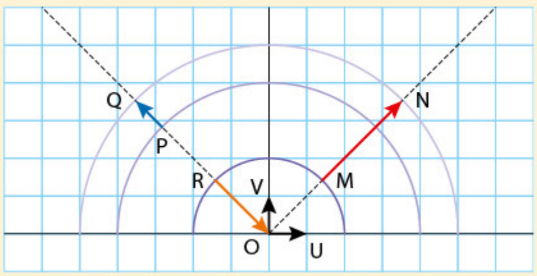
- $\overrightarrow{AB}$
- $\overrightarrow{CD}$
- $\overrightarrow{EF}$



14 Les demi-cercles tracés ci-dessous ont pour rayons 2, 4, 5 et pour centre O.

Déterminer, par lecture graphique, le module et un argument de l'affixe de chacun des vecteurs :

- $\overrightarrow{MN}$
- $\overrightarrow{PQ}$
- $\overrightarrow{RO}$



15 L'affixe d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $z = 4e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Déterminer oralement :

- AB
- $\left(\overrightarrow{OU}\,;\overrightarrow{AB}\right)$

16 L'affixe d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $z = 1+i$.

Kenza affirme : « La longueur AB est égale à 2 et une mesure de l'angle entre $\overrightarrow{OU}$ et $\overrightarrow{AB}$ est $\frac{\pi}{4}$ ».

A-t-elle raison ? Justifier oralement.

17 A, B, C sont trois points distincts d'affixes respectives a, b, c. Déterminer oralement la nature du triangle ABC dans chaque cas.

a) $\left|\dfrac{c-a}{b-a}\right| = 1$ **b)** $\arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$

Pour les exercices 18 à 20, déterminer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$, puis en déduire la longueur AB et une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OU}\,;\overrightarrow{AB}\right)$.

18 $z_A = 2+3i$, $z_B = 3+2i$

19 $z_A = -5+i\sqrt{3}$, $z_B = -4+2i\sqrt{3}$

20 $z_A = 1+\sqrt{3}+2i$, $z_B = 1+i$

21 Dans le plan complexe A, B et C sont les points d'affixes respectives :

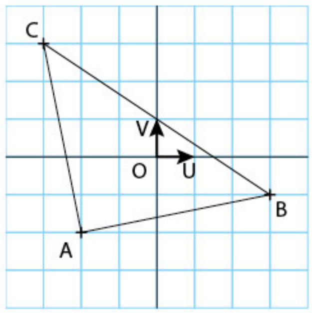
$$z_A = 1+i,\ z_B = 3+4i,\ z_C = 4-i.$$

a) Calculer les affixes a, b et c des vecteurs $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$.

b) Calculer $|a|$, $|b|$ et $|c|$.

En déduire la nature du triangle ABC.

22 ABC est le triangle représenté ci-dessous.



a) Conjecturer la nature du triangle ABC.

b) Déterminer les affixes a, b et c des vecteurs $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$.

c) Calculer $|a|$, $|b|$ et $|c|$.

Démontrer la conjecture émise au **a)**.

23 M, N, P, Q sont les points d'affixes :

$$m = 5-i,\ n = -2+3i,\ p = -3-5i,\ q = 4-9i.$$

a) Représenter le quadrilatère MNPQ dans le repère $\left(O\,;\overrightarrow{OU},\overrightarrow{OV}\right)$. Conjecturer la nature de ce quadrilatère.

b) Calculer $|m-n|$, $|n-p|$, $|p-q|$, $|q-m|$.

Démontrer la conjecture émise au **a)**.

24 A, B, C sont les points d'affixes :

$$a = 7+5i,\ b = -1-i,\ c = -2+3i.$$

Parmi ces trois points, un seul n'appartient pas au cercle $\mathscr{C}$ de rayon 5 et de centre M d'affixe $m = 3+2i$.

Indiquer lequel. Justifier.

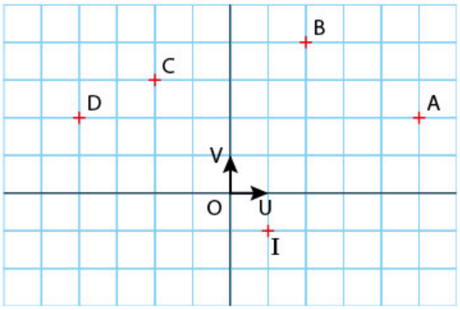
25 A est le point d'affixe $a = 1+2i$.

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z telle que :

$$|z-(1+2i)| = 3.$$

Acquérir des automatismes

26 On note $\mathscr{C}$ le cercle de centre I et de rayon 5. Parmi les points A, B, C et D, indiquer ceux qui appartiennent au cercle $\mathscr{C}$ en utilisant les nombres complexes.



Pour les exercices 27 et 28, déterminer l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie la relation donnée.

27 **a)** $|z-2-i|=4$ **b)** $|z+1-i|=5$

28 **a)** $|z-5i|=1$ **b)** $|z+3-2i|=\sqrt{7}$

29 A, B, M, N sont les points d'affixes :
$$a=-6-3i,\ b=-2-i,\ m=1-12i,\ n=-7+3i.$$
a) Déterminer l'affixe de chacun des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$.
b) Comparer les modules de ces affixes.
Que peut-on en déduire pour le point M ?
c) Déterminer l'affixe de chacun des vecteurs $\overrightarrow{AN}$ et $\overrightarrow{BN}$.
d) Démontrer que le point N n'appartient pas à la médiatrice de [AB].

Pour les exercices 30 et 31, déterminer l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie la relation donnée.

30 **a)** $|z-2i|=|z+1-i|$ **b)** $|z-1+i|=|z+3|$

31 **a)** $|z-4+i|=|z-3-2i|$ **b)** $|z-1|=|z-i|$

32 A est le point d'affixe $a=1+2i$.
M est un point d'affixe $z\neq a$, telle que :
$$\arg(z-a)=\frac{\pi}{5}\ [2\pi].$$
a) Déterminer $\left(\overrightarrow{OU}\,;\overrightarrow{AM}\right)$.
b) Préciser la position d'un tel point M.

Pour les exercices 33 et 34, déterminer l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie la relation donnée.

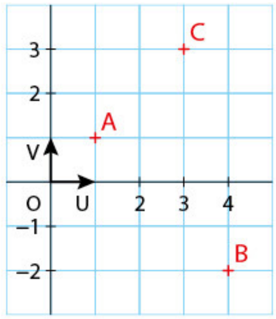
33 **a)** $\arg(z-3-i)=\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$
b) $\arg(z-i)=\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

34 **a)** $\arg(z+1+2i)=-\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$
b) $\arg(z-2i)=-\frac{\pi}{5}\ [2\pi]$

35 **a)** z est un nombre complexe non nul.
Démontrer que :
$$\arg(iz)=-\frac{\pi}{6}\ [2\pi] \text{ équivaut à } \arg(z)=-\frac{2\pi}{3}\ [2\pi].$$
b) En déduire l'ensemble des points M d'affixe z ($z\neq 0$) telle que $\arg(iz)=-\frac{\pi}{6}\ [2\pi]$.

36 **a)** z est un nombre complexe non nul.
Démontrer que :
$$\arg\left(\frac{1}{iz}\right)=\pi\ [2\pi] \text{ équivaut à } \arg(z)=-\frac{3\pi}{2}\ [2\pi].$$
b) En déduire l'ensemble des points M d'affixe z ($z\neq 0$) telle que $\arg\left(\frac{1}{iz}\right)=\pi\ [2\pi]$.

37 **a)** Lire les affixes des points A, B et C du plan complexe ci-contre.
b) Déterminer un argument de : $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$.
c) En déduire une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)$, puis la nature du triangle ABC.



Pour les exercices 38 à 41, A, B, C sont trois points distincts d'affixes a, b, c.
Déterminer la nature du triangle ABC.

38 $\dfrac{c-a}{b-a}=e^{-\frac{i\pi}{4}}$

39 $\dfrac{c-a}{b-a}=e^{i\frac{\pi}{3}}$

40 $\dfrac{c-a}{b-a}=2e^{i\frac{3\pi}{2}}$

41 $\dfrac{c-a}{b-a}=e^{-\frac{i\pi}{2}}$

42 On donne les points A, B, C d'affixes :
$$a=-4+3i,\ b=9-2i,\ c=-17+8i.$$
a) Calculer $\dfrac{c-a}{b-a}$.
b) Déterminer un argument de $\dfrac{c-a}{b-a}$.
c) En déduire que les points A, B, C sont alignés.

43 On donne les points M, N, P d'affixes :
$$m=8+6i,\ n=3+4i,\ p=-12-2i.$$
a) Calculer $\dfrac{m-n}{p-n}$.
b) Que peut-on en déduire pour les points M, N, P ?

44 **Algo** A, B, C sont trois points distincts d'affixes a, b et c.

a) Démontrer que les points A, B, C sont alignés si, et seulement si, $\dfrac{c-a}{b-a}$ est un nombre réel.

b) L'algorithme ci-dessous indique si trois points distincts A, B, C d'affixes a, b, c sont alignés ou non.
On saisit au début les affixes a, b, c.

```
Z ← (c − a) / (b − a)
Si arg(Z) = 0 [π] alors
  | ...
  | sinon
  | ...
Fin Si
```

Recopier cet algorithme et compléter les pointillés.

c) Tester cet algorithme avec :
- $a=3+5i$, $b=-4+4i$, $c=-11+3i$;
- $a=i$, $b=8$, $c=-7+2i$;
- $a=1-i$, $b=5+i$, $c=-1-2i$.

45 M, N, P sont les points d'affixes :

$$m=-12+4i,\ n=-7+\frac{3}{2}i,\ p=-5+\frac{11}{2}i.$$

a) Déterminer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{NM}$ et $\overrightarrow{NP}$.

b) Déterminer un argument de $\dfrac{m-n}{p-n}$.

c) Que peut-on en déduire pour les droites (MN) et (NP) ?

46 **Algo** A, B, C sont trois points distincts d'affixes a, b et c.

a) Démontrer que les droites (AB) et (AC) sont orthogonales si, et seulement si, $\dfrac{c-a}{b-a}$ est un imaginaire pur.

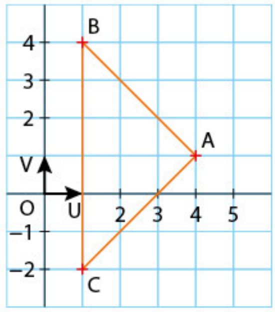
b) L'algorithme ci-dessous indique si les droites (AB) et (AC) sont orthogonales ou non.
On saisit au début les affixes a, b, c.

```
Z ← (c − a) / (b − a)
Si arg(Z) = π/2 [π] alors
  | ...
  | sinon
  | ...
Fin Si
```

Recopier cet algorithme et compléter les pointillés.

c) Tester cet algorithme avec :
- $a=6+5i$, $b=10+6i$, $c=8-3i$;
- $a=2+\frac{3}{2}i$, $b=-2-i$, $c=5-\frac{7}{2}i$;
- $a=1-i$, $b=4+2i$, $c=11-11i$.

47 A, B, C sont les points représentés dans le repère ci-contre.



a) Déterminer le module et un argument de :

$$Z=\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}.$$

b) En déduire la nature du triangle ABC.

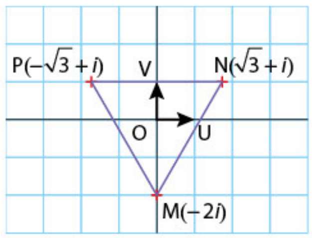
48 E, F, G, H sont les points d'affixes :

$$e=-6+2i,\ f=2+4i,\ g=3,\ h=-5-2i.$$

a) Déterminer l'affixe de chacun des vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{HG}$.
Que peut-on en déduire pour le quadrilatère EFGH ?

b) Déterminer un argument de $\dfrac{f-e}{h-e}$.
Déterminer la nature du quadrilatère EFGH.

49 M, N, P sont les points représentés dans le repère ci-dessous.



a) Démontrer que les points M, N, P appartiennent à un même cercle de centre O dont on déterminera le rayon.

b) Démontrer que le triangle MNP est équilatéral.

c) On note Q le milieu du segment [ON].
Déterminer l'affixe ℓ du point L tel que le quadrilatère MOQL soit un parallélogramme.

50 A, B, C et D sont les points d'affixes :

$$z_A=5+5i,\ z_B=3+2i,\ z_C=9-2i\ \text{et}\ z_D=11+i.$$

a) Déterminer l'affixe de chacun des vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$.

b) Déterminer un argument de $\dfrac{z_B-z_A}{z_D-z_A}$.

c) En déduire la nature du quadrilatère ABCD.

51 **a)** Construire l'ensemble des points M d'affixe m telle que $\arg(m-1-i)=\dfrac{\pi}{6}\ [2\pi]$.

b) Construire l'ensemble des points N d'affixe n telle que

$$|n-1-i|=2.$$

c) Construire le point P dont l'affixe p vérifie :

$$p-1-i=2e^{i\frac{\pi}{6}}.$$

Racines n-ièmes de l'unité

Cours 2

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O\,;\overrightarrow{OU},\overrightarrow{OV}\right)$.

Questions flash — À l'oral

52 Donner oralement les racines carrées de l'unité.

53 Déterminer oralement les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^4 = 1$.

54 Pour chaque question, choisir la bonne réponse parmi **(1)**, **(2)** ou **(3)**.

a) u est une racine cinquième de l'unité.
u peut être égale à :

(1) $e^{i\frac{\pi}{5}}$ **(2)** $e^{\frac{4i\pi}{5}}$ **(3)** -1

b) Une solution de l'équation $z^3 = 1$ est :

(1) $e^{-\frac{2i\pi}{3}}$ **(2)** -1 **(3)** $e^{-\frac{i\pi}{3}}$

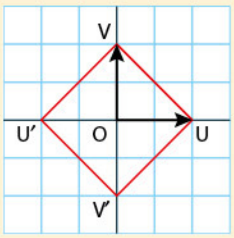
c) L'équation $z^6 - 1 = 0$ possède :

(1) une solution

(2) trois solutions

(3) six solutions

55 a, b, c, d sont les affixes des sommets du carré UVU'V' de centre O ci-contre.
Indiquer oralement une équation dont a, b, c et d sont les solutions.



56 n désigne un nombre entier naturel.
Écrire les racines n-ièmes de l'unité :

- pour $n = 2$;
- pour $n = 3$;
- pour $n = 4$;
- pour $n = 7$.

57 (**E**) est l'équation $(z-2)^5 = 1$.

a) On pose $Z = z - 2$. Que devient l'équation (**E**) avec la nouvelle inconnue Z ? Résoudre l'équation obtenue.

b) En déduire les solutions de l'équation (**E**).

Pour les exercices 58 et 59, résoudre les équations.

58 **a)** $(z-3)^4 = 1$ **b)** $(z+i)^3 = 1$

59 **a)** $(z+2i)^5 = 1$ **b)** $(z+1-i)^8 - 1 = 0$

60 **a)** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^6 = 1$.

b) Indiquer, parmi les solutions de cette équation :

- deux solutions opposées,
- deux solutions conjuguées,
- quatre solutions dont la somme est nulle.

61 Calculer la somme des racines cubiques de l'unité.

62 **a)** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (**E**) : $z^3 - 1 = 0$.

b) Dans le repère $\left(O\,;\overrightarrow{OU},\overrightarrow{OV}\right)$ (*unité* : 4 cm), construire, à la règle et au compas, les points dont les affixes sont les solutions de l'équation (**E**).

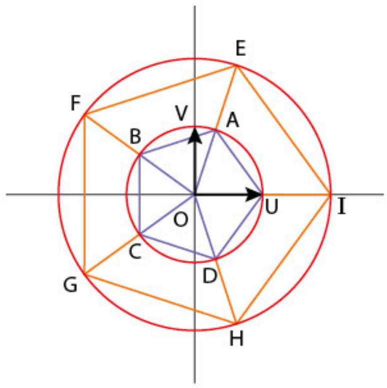
63 **a)** Déterminer les racines quatrièmes de l'unité.

b) Déterminer les racines huitièmes de l'unité.

c) Dans le repère $\left(O\,;\overrightarrow{OU},\overrightarrow{OV}\right)$ (*unité* : 4 cm), placer les points dont les affixes sont les racines quatrièmes de l'unité.

d) Sur la même figure, construire, à la règle et au compas les points dont les affixes sont les racines huitièmes de l'unité.

64 UABCD et IEFGH sont les deux pentagones de centre O inscrits dans les cercles de rayons 1 et 2 représentés ci-dessous.



a) Déterminer les affixes des points U, A, B, C, D.

b) Déterminer les affixes des points I, E, F, G, H.

65 **a)** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 = 1$.

b) Calculer 3^4, puis 5^4.

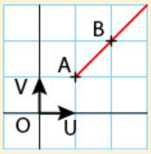
c) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de chacune des équations :

- $u^4 = 81$
- $v^4 = 625$

66 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^{12} = 1$.
Donner les solutions sous forme trigonométrique, puis algébrique.

67 QCM **Dans chaque cas, donner la réponse exacte sans justifier.**

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O\,;\overrightarrow{OU},\overrightarrow{OV}\right)$.

		A	B	C	D
1	$M\left(-1+2i\sqrt{3}\right)$ et $N\left(3-2i\sqrt{3}\right)$. $\left(\overrightarrow{OU}\,;\overrightarrow{MN}\right)$ est égal à …	$\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{3}$
2	L'ensemble des points $M(z)$ tels que $\lvert z-3+i\rvert=2$ est le cercle de centre I et de rayon R avec …	$z_I=3-i$ et $R=2$	$z_I=-3+i$ et $R=2$	$z_I=3-i$ et $R=4$	$z_I=-3+i$ et $R=4$
3	Les points de la demi-droite]AB) ont pour affixe z avec : 	$\arg(z)=\frac{\pi}{4}\,[2\pi]$	$\arg(z+1+i)=\frac{\pi}{4}\,[2\pi]$	$\arg(z-1-i)=\frac{\pi}{4}\,[2\pi]$	$\arg\left(z-\frac{\pi}{4}\right)=0\,[2\pi]$

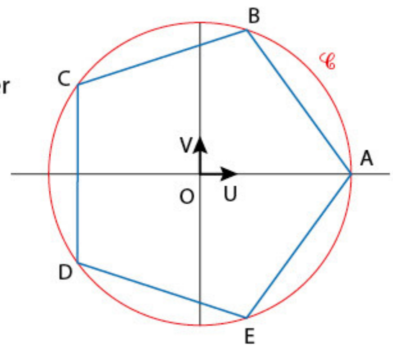
68 QCM **Dans chaque cas, donner la (ou les) réponse(s) exacte(s) sans justifier.**

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O\,;\overrightarrow{OU},\overrightarrow{OV}\right)$.

		A	B	C	D
1	a, b, c sont les affixes des points A, B, C. Le triangle ABC est isocèle rectangle en A lorsque …	$\frac{b-a}{c-a}=i$	$\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)=\frac{\pi}{2}\,[2\pi]$	$\frac{c-a}{b-a}=-i$	$\left\lvert\frac{c-a}{b-a}\right\rvert=1$
2	$e^{\frac{2i\pi}{3}}$ est …	une racine troisième de l'unité	une racine sixième de l'unité	une solution de l'équation $z^5=1$	une solution de l'équation $z^3-1=0$
3	Une solution de l'équation $z^5-32=0$ est …	$32e^{\frac{4i\pi}{5}}$	2	$2e^{-\frac{2i\pi}{5}}$	$2e^{\frac{2i\pi}{5}}$

69 Vrai/Faux **Dans chaque cas, dire si l'affirmation est vraie ou fausse en justifiant.**

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O\,;\overrightarrow{OU},\overrightarrow{OV}\right)$.
$\mathscr{C}$ est le cercle de centre O et de rayon 4.
$a=4$, b, c, d, e sont les affixes respectives des sommets du pentagone régulier ABCDE inscrit dans $\mathscr{C}$.



1. **Affirmation :** l'affixe b du point B est égale à $e^{\frac{2i\pi}{5}}$.
2. **Affirmation :** $\arg(c-a)=\frac{2\pi}{5}\,[2\pi]$
3. **Affirmation :** $\left\lvert\frac{d-e}{a-b}\right\rvert=1$
4. **Affirmation :** $\frac{d}{c}=e^{\frac{2i\pi}{5}}$

Vérifiez vos réponses : p. 293

70 Étudier la somme des racines n-ièmes de l'unité

On se propose de démontrer la propriété suivante :

> **Propriété**
> n désigne un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2.
> La somme des racines n-ièmes de l'unité est égale à zéro.

Rédiger la démonstration de cette propriété en suivant le guide ci-dessous.

(1) Écrire les racines n-ièmes de l'unité : $u_0 = \dots$; $u_1 = e^{i\frac{2\pi}{n}}$; $u_2 = \dots$; … ; $u_{n-1} = \dots$

(2) Déterminer la somme des racines n-ièmes de l'unité :

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} = 1 + u_1 + u_1^{\cdots} + \dots + u_1^{\cdots} = \frac{\dots}{\dots}$$

(3) Conclure : or, $u_1^n = \dots$, donc la somme S_n est égale à ….

Vidéo
JAICOMPRIS.COM
Toutes les démonstrations au programme en vidéo

Liste des démonstrations :
- Détermination de l'ensemble $\mathbb{U}_n$

Conseil
Pour $q \neq 1$, et $p \in \mathbb{N}^*$, $1 + q + q^2 + \dots + q^p = \dfrac{1 - q^{p+1}}{1 - q}$.

71 S'appuyer sur ses connaissances de géométrie pour démontrer

On a admis au paragraphe **2. B** la propriété suivante :

> n désigne un nombre entier naturel, $n \geqslant 3$ et $\left(O ; \overrightarrow{OU}, \overrightarrow{OV}\right)$ est un repère orthonormé direct du plan.
> Les racines n-ièmes de l'unité sont les affixes des sommets du polygone régulier à n sommets inscrit dans le cercle de centre O et de rayon 1 et dont l'un des sommets est le point U.

Justifier les passages écrits en vert dans la démonstration ci-dessous.

> - L'affixe du point U est une racine n-ième de l'unité.
> - On note $M_0 = U$, M_1, M_2, …, M_{n-1} les points dont les affixes respectives u_0, u_1, u_2, …, u_{n-1} sont les racines n-ièmes de l'unité.
>
> Pour tout entier naturel k compris entre 0 et $n - 1$, $|u_k| = 1$.
> On en déduit que le point M_k appartient au cercle de centre O et de rayon 1.
> Pour tout entier naturel k compris entre 0 et $n - 2$, $\arg\left(\dfrac{u_{k+1}}{u_k}\right) = \dfrac{2\pi}{n}$ $[2\pi]$.
> On en déduit que $\left(\overrightarrow{OM_k} ; \overrightarrow{OM_{k+1}}\right) = \dfrac{2\pi}{n}$ $[2\pi]$ et que les points $M_0 = M_1$, M_2, …, M_{n-1} sont les sommets du polygone régulier à n sommets inscrit dans le cercle de centre O et de rayon 1, dont l'un des sommets est U.

Conseil
Un polygone convexe est régulier lorsqu'il est inscriptible dans un cercle de centre O et que les angles au centre de sommet O ont tous même mesure.

72 Démontrer des propriétés en utilisant ses connaissances

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O ; \overrightarrow{OU}, \overrightarrow{OV}\right)$.
A, B, C, D sont quatre points d'affixes respectives a, b, c, d telles que $a \neq b$ et $c \neq d$.

1. a) Recopier et compléter en utilisant les nombres complexes :
- AB = …
- CD = …

b) Démontrer que $\dfrac{CD}{AB} = \left|\dfrac{d - c}{b - a}\right|$.

2. a) Recopier et compléter en utilisant les nombres complexes :
- $\left(\overrightarrow{OU} ; \overrightarrow{AB}\right) = \dots$
- $\left(\overrightarrow{OU} ; \overrightarrow{CD}\right) = \dots$

b) Démontrer que $\left(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{CD}\right) = \arg\left(\dfrac{d - c}{b - a}\right)$ $[2\pi]$.

Étudier des configurations du plan

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O\,;\overrightarrow{OU},\overrightarrow{OV}\right)$.

73 M, N, P, Q sont les points d'affixes :

$$m=7,\ n=3+6i,\ p=-3+2i,\ q=1-4i.$$

On note A le point d'intersection des diagonales [MP] et [NQ] du quadrilatère MNPQ et a son affixe.
On se propose de démontrer que le quadrilatère MNPQ est un carré, en utilisant trois méthodes différentes.

Méthode 1

a) Écrire les nombres complexes $Z=\dfrac{m-n}{p-n}$ et $Z'=\dfrac{n-p}{q-p}$ sous forme exponentielle.

b) En déduire la nature des triangles MNP et NPQ.

c) Conclure.

Méthode 2

a) Déterminer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AQ}$.

b) Calculer les modules de ces affixes.
En déduire la nature du quadrilatère MNPQ.

c) Déterminer un argument de $\dfrac{n-a}{m-a}$.

d) Conclure.

Méthode 3

a) Déterminer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{QP}$.
En déduire la nature du quadrilatère MNPQ.

b) Déterminer la forme exponentielle de $\dfrac{n-p}{q-p}$.

c) Conclure.

74 On considère les nombres complexes $a=1+i\sqrt{3}$ et $b=-\sqrt{3}+i$.
On note A et B les points d'affixes respectives a et b.

1. a) Déterminer une forme exponentielle de a et b.

b) Placer les points A et B (*unité* : 3 cm).

c) Démontrer que le triangle OAB est rectangle isocèle en l'origine O du repère.

d) K est le milieu du segment [AB].
Placer K et déterminer son affixe k.

2. On considère le nombre complexe :

$$c=\left(1-\sqrt{3}\right)+i\left(1+\sqrt{3}\right)$$

et on note C le point du plan d'affixe c.

a) Montrer que K est le milieu du segment [OC], puis placer C.

b) Démontrer que le quadrilatère OACB est un carré.
Quelle est la longueur de son côté ?

3. a) Construire le carré OA′C′B′ symétrique du carré OACB par rapport au point O.

b) Indiquer les affixes des points A′, B′, C′ et du centre K′ de ce carré.

75 On considère la suite de points (M_n) et la suite (z_n) des affixes définie par $z_0=8$ et pour tout entier naturel n,

$$z_{n+1}=\frac{1+i\sqrt{3}}{4}z_n.$$

1. Calculer le module et un argument du nombre complexe $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{4}$.
L'écrire sous forme trigonométrique.

2. Calculer z_1, z_2 et z_3 et vérifier que z_3 est réel.
Placer dans le plan les points M_0, M_1, M_2 et M_3.

3. Pour tout entier naturel n :

a) calculer le rapport $\dfrac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}}$;

b) en déduire que le triangle OM_nM_{n+1} est rectangle et que $M_nM_{n+1}=\sqrt{3}\,OM_{n+1}$.

76 Dans chaque cas, construire dans le repère $\left(O\,;\overrightarrow{OU},\overrightarrow{OV}\right)$, le (ou les) point(s) d'affixe z qui vérifie(nt) l'égalité indiquée.

a) $z-3+i=4e^{\frac{2i\pi}{3}}$

b) $|z-4+i|=|z-1+2i|=3$

77 (z_n) est la suite définie par $z_0=1$ et pour tout entier naturel n :

$$z_{n+1}=\frac{1}{3}z_n+\frac{2}{3}i.$$

(u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n=z_n-i$.
Pour tout entier naturel n, on note A_n le point d'affixe z_n et B_n le point d'affixe u_n.

1. Pour tout entier naturel n, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

2. Démontrer que pour tout entier naturel n,

$$u_n=\left(\frac{1}{3}\right)^n(1-i).$$

3. a) Pour tout entier naturel n, exprimer $|u_n|$ en fonction de n.

b) Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}|z_n-i|=0$.
Interpréter géométriquement ce résultat.

4. a) Pour tout entier naturel n, déterminer un argument de u_n.

b) Démontrer que, lorsque n décrit l'ensemble des nombres entiers naturels, tous les points B_n sont alignés.

c) Démontrer que pour tout entier naturel n, le point A_n appartient à la droite d'équation $y=-x+1$.

5. a) Pour tout entier naturel n, exprimer la distance VA_n en fonction de n.

b) Déterminer la plus petite valeur de n pour laquelle :
- $VA_n\leqslant 10^{-3}$
- $VA_n\leqslant 10^{-10}$

Utiliser les racines n-ièmes de l'unité

78 n désigne un nombre entier naturel, $n \geqslant 2$.

1. Dans chaque cas, démontrer la propriété.

a) Si $u \in \mathbb{U}_n$, alors $\overline{u} \in \mathbb{U}_n$.

b) Si $u \in \mathbb{U}_n$, alors $\dfrac{1}{u} \in \mathbb{U}_n$.

c) Si $u \in \mathbb{U}_n$ et $u' \in \mathbb{U}_n$ alors $uu' \in \mathbb{U}_n$.

d) Si $u \in \mathbb{U}_n$ et $u' \in \mathbb{U}_n$ alors $\dfrac{u}{u'} \in \mathbb{U}_n$.

2. Dylan affirme : « Si u et u' sont deux racines n-ièmes de l'unité, alors $u + u'$ est aussi une racine n-ième de l'unité ».

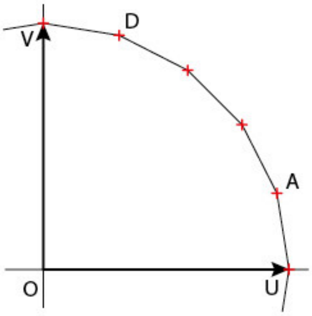
Que penser de cette affirmation ? Justifier.

79 Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O\,;\overrightarrow{OU},\overrightarrow{OV}\right)$ (*unité* : 4 cm).

Construire, à la règle et au compas, les points dont les affixes sont $e^{\frac{ik\pi}{3}}$ pour k entier naturel allant de 0 à 5.

80 Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O\,;\overrightarrow{OU},\overrightarrow{OV}\right)$.

Dans le repère ci-dessous, on a tracé une partie du polygone régulier à 20 côtés, de centre O et dont quatre sommets sont les points U, A, D et V.



a) De quelle équation les affixes des vingt sommets de ce polygone sont-elles les solutions ?

b) Déterminer l'affixe de chacun des points A et D.

Donner les résultats sous forme exponentielle.

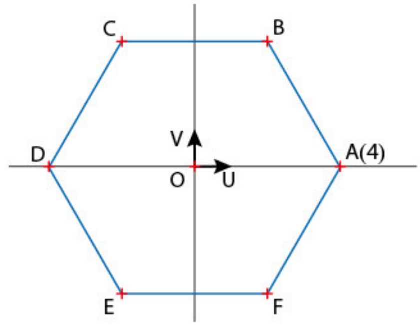
c) Utiliser l'affichage de calcul formel ci-dessous pour déterminer la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{\pi}{10}\right)$.

1	$\sin\left(\dfrac{\pi}{10}\right)$
	$\rightarrow \dfrac{1}{4}\left(\sqrt{5}-1\right)$

d) En déduire la forme algébrique de l'affixe de chacun des points A et D.

81 Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O\,;\overrightarrow{OU},\overrightarrow{OV}\right)$. ABCDEF est l'hexagone régulier de centre O construit ci-dessous.

Le point A appartient à la droite (OU).



Démontrer que les affixes des sept points marqués en rouge sont les solutions de l'équation $z^7 - 4\,096z = 0$.

82 **a)** Écrire $-i$ sous forme exponentielle.

En déduire les solutions de l'équation $z^5 = -i$.

b) Résoudre l'équation $1 + iz - z^2 - iz^3 + z^4 = 0$.

Conseil : poser $Z = iz$.

S'entraîner à la logique → p. 290

83 **Propositions équivalentes ou non**

Dans chaque cas, dire si les propositions **P** et **Q** sont équivalentes. Justifier.

a) $A(z_A)$, $B(z_B)$ et $C(z_C)$ sont des points deux à deux distincts.

P : « $\arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = 0\ [2\pi]$ »

Q : « A, B, et C sont alignés ».

b) (**E**) est l'équation $z^7 = 1$.

z_0 est un nombre complexe.

P : « z_0 est solution de (**E**) ».

Q : « $\overline{z_0}$ est solution de (**E**) ».

84 **Quantificateur universel, existentiel**

Dire, pour chacune des affirmations si elle est vraie ou fausse.

Affirmation 1 : pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, l'équation $z^n = 1$ possède une solution réelle.

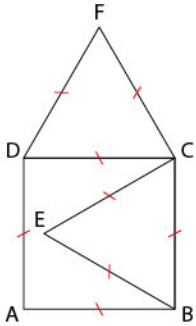
Affirmation 2 : il existe un entier naturel $n \geqslant 2$, tel que l'équation $z^n = 1$ possède au moins deux solutions imaginaires pures.

Affirmation 3 : pour tout entier naturel pair, $n \geqslant 2$, l'équation $z^n = 1$ possède au moins deux solutions réelles.

85 Proposer une méthode

Raisonner | Calculer

ABCD est un carré de sens direct de côté 1.
On trace les triangles équilatéraux BCE et DCF comme indiqué sur la figure ci-contre.



1. Déterminer les affixes a, b, c et d des points A, B, C et D dans le repère orthonormé direct $\left(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$.
e est l'affixe du point E et Z le nombre complexe :
$$Z=\frac{e-c}{b-c}.$$
2. a) Déterminer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{CB}\,;\overrightarrow{CE}\right)$.
b) Déterminer la valeur du quotient $\frac{CE}{CB}$.
c) Déduire de ce qui précède :
- une forme exponentielle de Z,
- la forme algébrique de Z.

3. Proposer une méthode permettant de déterminer la forme algébrique de f affixe du point F.
4. a) Déterminer l'affixe de chacun des vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AF}$.
b) Démontrer que les points A, E, F sont alignés.

86 Imaginer une stratégie

Raisonner | Calculer

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct.
n est un nombre entier naturel non nul et z un nombre complexe de module 1 tels que $z^{2n}\neq -1$.
A est le point d'affixe -1 et pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, on note M_n le point d'affixe z^n.
a) Démontrer que pour tout entier naturel $n\geqslant 1$,
$$\frac{z^n}{1+z^{2n}}\text{ est un nombre réel.}$$
b) Démontrer que les droites (OM_n) et (AM_{2n}) sont parallèles.

87 Find solutions

Raisonner | Calculer | Communiquer

The purpose of this problem is to solve the following equation (**E**) :
$$z^6-9z^3+8=0.$$
a) Let $u=z^3$.
Show that the equation (**E**) is equivalent to the equation (**F**) : $u^2-9u+8=0$.
b) Solve the equation (**F**).
c) Deduce from question **b)** the solutions of (**E**).

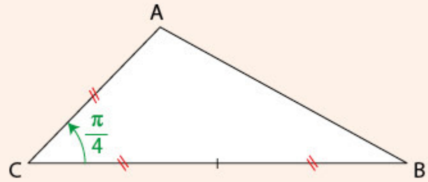
88 Déterminer une affixe

Narration de recherche

Chercher | Raisonner | Calculer

Rédiger les différentes étapes de la recherche, sans omettre les fausses pistes et les changements de méthode.

Problème
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct. ABC est le triangle dessiné ci-dessous.



On sait que les affixes des points A et B sont $a=3-i$ et $b=-2+2i$.
Déterminer l'affixe du point C.

89 Résoudre une équation

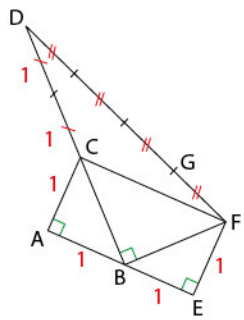
Raisonner | Calculer

Résoudre dans $\mathbb{C}^*$ l'équation : $\left(1+\frac{1}{z}\right)^3=1.$

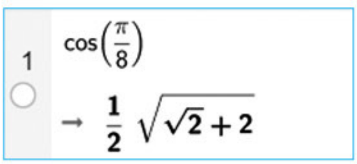
90 Construire à la règle et au compas

Raisonner | Calculer | Communiquer

$\left(O\,;\overrightarrow{OU},\overrightarrow{OV}\right)$ est un repère orthonormé direct.
On se propose de construire, à la règle et au compas, le polygone régulier dont les sommets ont pour affixes les racines seizièmes de l'unité.
a) Reproduire la figure ci-dessous en prenant 4 cm pour unité.
b) Calculer les longueurs :
- BC
- BD
- FD
- FG



c) On pose $u=e^{i\frac{\pi}{8}}$.
Représenter le repère orthonormé $\left(O\,;\overrightarrow{OU},\overrightarrow{OV}\right)$ (*unité* : 4 cm) et, à l'aide de l'écran suivant, construire le point A d'affixe u.



d) Achever la construction à la règle et au compas, du polygone souhaité.

91 Prendre des initiatives

Chercher **Raisonner**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct.

A, B, C, D sont quatre points distincts d'affixes a, b, c, d telles que : $\begin{cases} a+c=b+d \\ a+ib=c+id \end{cases}$.

Démontrer que le quadrilatère ABCD est un carré.

92 Justifier ou infirmer

Raisonner **Communiquer**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct d'origine O.

A est le point d'affixe $-i$.

À tout point M d'affixe z, distinct de A et de O, on associe le point M′ d'affixe $z' = \dfrac{z}{z+i}$.

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

a) $\mathrm{OM}' = \dfrac{\mathrm{OM}}{\mathrm{AM}}$

b) $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{\mathrm{OM}'}\right) = \left(\overrightarrow{\mathrm{OM}}\,;\overrightarrow{\mathrm{AM}}\right)\ [2\pi]$

c) Si M′ est un point du cercle de centre O et de rayon 1, alors M appartient à une droite parallèle à l'axe des ordonnées.

d) Si M′ appartient à l'axe des ordonnées, alors M appartient au cercle de diamètre [OA].

93 Résoudre une équation

Problème ouvert

Raisonner **Calculer**

Résoudre dans $\mathbb{C} - \{1\}$ l'équation :

$$\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^6 = 1.$$

94 Déterminer des ensembles de points

Raisonner **Calculer**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}\,;\overrightarrow{\mathrm{OU}},\overrightarrow{\mathrm{OV}}\right)$.

a) $\mathscr{E}$ est l'ensemble des points M d'affixe z telle que z^3 soit un nombre réel positif ou nul.

Démontrer que $\mathscr{E}$ est la réunion de trois demi-droites que l'on déterminera.

b) À tout point P d'affixe $z \neq 0$, on associe les points Q d'affixe iz et R d'affixe z^4.

On note $\mathscr{F}$ l'ensemble des points P tels que $\left(\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\,;\overrightarrow{\mathrm{OR}}\right)$ ait pour mesure $-\dfrac{\pi}{2}$.

Montrer que $\mathscr{F}$ est l'ensemble $\mathscr{E}$ privé du point O.

95 Algo Étudier une nouvelle transformation

Chercher **Raisonner**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}\,;\overrightarrow{\mathrm{OU}},\overrightarrow{\mathrm{OV}}\right)$.

On considère l'application f qui, au point M d'affixe z fait correspondre le point M′ d'affixe z' telle que :

$$z' = \frac{1-i}{2}z + \frac{-3+i}{2}.$$

1. Étude de l'application *f*

a) On note x et y (resp. x' et y') la partie réelle et la partie imaginaire de z (resp. de z').

Démontrer que $\begin{cases} x' = \dfrac{x+y-3}{2} \\ y' = \dfrac{-x+y+1}{2} \end{cases}$.

b) On note Ω le point d'affixe ω tel que $f(\Omega) = \Omega$.

(On dit que Ω est le point invariant de f).

Démontrer que $\omega = -1+2i$.

c) Justifier que $\omega - z' = i(z - z')$.

d) En déduire la nature du triangle ΩMM′.

2. Étude d'une suite d'images par *f*

A_0 est le point d'affixe $5-4i$.

Pour tout entier naturel n, le point A_{n+1} est défini par $\mathrm{A}_{n+1} = f(\mathrm{A}_n)$ et on pose $u_n = \mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}$.

a) Placer les points A_0, A_1 et A_2 et construire géométriquement les points A_3, A_4, A_5 et A_6.

b) Démontrer que la suite (u_n) est géométrique.

c) La suite (v_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$v_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Exprimer v_n en fonction de n.

d) La suite (v_n) est-elle convergente ?

3. Avec un algorithme

a) Exprimer en fonction de n le rayon r_n du cercle circonscrit au triangle $\Omega\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}$.

b) Voici un algorithme incomplet qui permet de déterminer le plus petit entier naturel p tel que pour tout entier naturel n : si $n > p$, alors $r_n \leqslant 10^{-2}$.

Au début, on affecte 0 à la variable n et $3\sqrt{2}$ à la variable r.

```
Tant que r > 10^-2
    r ← …
    n ← n + 1
Fin Tant que
Afficher n
```

Compléter les pointillés de cet algorithme.

c) Déterminer par un calcul la valeur affichée en sortie.

96 Racines n-ièmes d'un nombre complexe non nul

a désigne un nombre complexe non nul et n un nombre entier naturel, $n \geqslant 2$.
Une **racine n-ième de a** est une solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = a$.

1. Étude d'un premier exemple

On choisit $a = 125$.

a) Démontrer que le nombre complexe $z = re^{i\theta}$ (θ et r réels, $r > 0$) est une racine cubique de a si, et seulement si,

$$\begin{cases} r^3 = 125 \\ \theta = \dfrac{2k\pi}{3} \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

b) Justifier que l'on peut se restreindre à prendre les valeurs $k = 0$, $k = 1$ et $k = 2$.

c) Déterminer les racines cubiques de 125.

2. Étude d'un deuxième exemple

On choisit $a = \dfrac{81}{2} + i\dfrac{81\sqrt{3}}{2}$.

a) Écrire a sous forme exponentielle.

b) Démontrer que le nombre complexe $z = re^{i\theta}$ (θ réel, $r > 0$) est une racine quatrième de a si, et seulement si,

$$\begin{cases} r^4 = 81 \\ \theta = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{k\pi}{2} \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

c) Justifier qu'on peut se restreindre à prendre les valeurs $k = 0$, $k = 1$, $k = 2$ et $k = 3$.

d) Déterminer les racines quatrièmes de $\dfrac{81}{2} + i\dfrac{81\sqrt{3}}{2}$.

3. Étude du cas général

a désigne un nombre complexe non nul de forme exponentielle $Ae^{i\varphi}$ (φ et A réels, $A > 0$)
n est un nombre entier naturel, $n \geqslant 2$.

a) Démontrer que le nombre complexe $z = re^{i\theta}$ (θ réel, $r > 0$) est une racine n-ième de a si, et seulement si,

$$\begin{cases} r^n = A \\ \theta = \dfrac{\varphi}{n} + \dfrac{2k\pi}{n} \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

b) Justifier qu'on peut se restreindre à prendre k nombre entier naturel tel que $0 \leqslant k \leqslant n - 1$.

c) Déterminer les racines n-ièmes de a en fonction de A, de φ et de n.

CONSEIL

Pour x et y deux nombres réels strictement positifs, et pour n nombre entier naturel non nul, $x^n = y$ est équivalent à $x = y^{\frac{1}{n}}$.

4. Applications

a) Déterminer les racines septièmes de $a = 16\,384i$.

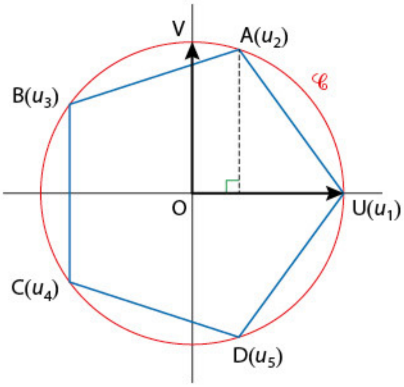
b) Résoudre l'équation $z^3 = 4\sqrt{2}(1+i)$.

c) Vérifier que i est une racine sixième de -1.
Retrouver les racines sixièmes de -1 à partir de i et des racines sixièmes de l'unité.

97 Construction du pentagone régulier à la règle et au compas

On se propose d'utiliser les nombres complexes et des considérations géométriques afin de tracer, à la règle et au compas, un pentagone régulier.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O ; \overrightarrow{OU}, \overrightarrow{OV}\right)$.
UABCD est le pentagone régulier inscrit dans le cercle de centre O et de rayon 1.



1. Racines cinquièmes de l'unité
On sait, d'après le cours, que les sommets de ce pentagone ont pour affixes les racines cinquièmes de l'unité.
On note u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 ces affixes comme indiquées ci-contre.
a) Déterminer les racines cinquièmes de l'unité.
b) En déduire que la partie réelle de u_2 est égale à $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

2. Détermination de la valeur exacte de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$
a) Démontrer que :

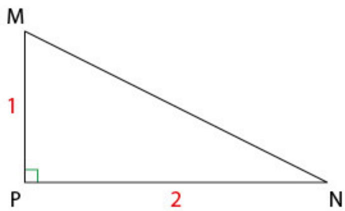
$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = 0.$$

b) Démontrer les égalités :
- $2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = u_2 + u_5$
- $2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = u_3 + u_4 = 4\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 2$

c) En déduire que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est solution de l'équation $4x^2 + 2x - 1 = 0$.
d) Résoudre cette équation et en déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

CONSEIL
Lorsque $n \in \mathbb{N}$ et $q \neq 1$,
$1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

3. Construction d'un segment de longueur $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$
a) Construire un triangle rectangle tel que ci-contre en prenant 6 cm pour unité.



b) Calculer MN.
Construire le point Q du côté [MN] tel que $MQ = \sqrt{5} - 1$.
c) Construire le milieu de R du segment [MQ], puis le milieu S du segment [MR].
Justifier que $MS = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

4. Construction du pentagone régulier
a) Dans le repère orthonormé direct $\left(O ; \overrightarrow{OU}, \overrightarrow{OV}\right)$ (*unité* : 6 cm), tracer le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1.
b) Utiliser la question **3.** pour placer le point A de $\mathscr{C}$ d'abscisse $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et d'ordonnée positive.
c) Terminer la construction du pentagone régulier UABCD.

98 Transformation de Fourier discrète

MATHS & PHYSIQUE

Un signal est la représentation physique d'une information (son, image…), il est donné sous la forme d'une suite de chiffres : des 0 et des 1.

La **transformation de Fourier discrète** est un outil mathématique utilisé dans le traitement du signal.

n désigne un nombre entier naturel, $n \geqslant 2$.

On note $u = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ l'une des racines n-ièmes de l'unité.

Définitions

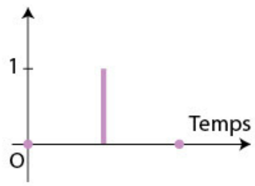
$(x_0\,;x_1\,;x_2\,;\ldots;x_{n-1})$ désigne un **signal**, c'est-à-dire une liste de 0 et de 1.

La **transformée de Fourier discrète** de ce signal est la liste $(X_0\,;X_1\,;X_2\,;\ldots;X_{n-1})$ telle que pour tout nombre entier naturel ℓ compris entre 0 et $n-1$, $X_\ell = x_0 + x_1 \times u^{-\ell} + x_2 \times u^{-2\ell} + \ldots + x_{n-1} \times u^{-(n-1)\ell}$.

On note $\text{TFD}(x_0\,;x_1\,;\ldots;x_{n-1}) = (X_0\,;X_1\,;\ldots;X_{n-1})$.

1. Premier exemple

On s'intéresse au signal $(0\,;1\,;0)$ représenté ci-dessous.



a) Déterminer la valeur de n. En déduire u.

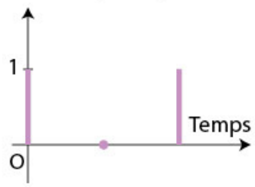
b) Calculer $X_0 = x_0 + x_1 \times u^{-0} + x_2 \times u^{-2\times 0}$.

c) Montrer que $X_1 = e^{-\frac{2i\pi}{3}}$, puis que $X_2 = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

En déduire $\text{TFD}(0\,;1\,;0)$.

2. Deuxième exemple

On s'intéresse au signal $(1\,;0\,;1)$ représenté ci-dessous.



Démontrer que la transformée de Fourier discrète de ce signal est :

$$\left(2\,;1+e^{\frac{2i\pi}{3}}\,;1+e^{-\frac{2i\pi}{3}}\right).$$

3. Troisième exemple

a) Représenter le signal (1 ; 1 ; 1).

b) Déterminer la transformation de Fourier discrète de ce signal.

4. Un signal de longueur n

On s'intéresse au signal $(1\,;1\,;\ldots;1)$ contenant n fois le chiffre 1.

a) Démontrer que pour tout entier naturel ℓ compris entre 1 et $n-1$,

$$X_\ell = 1 + u^{-\ell} + \left(u^{-\ell}\right)^2 + \ldots + \left(u^{-\ell}\right)^{n-1}.$$

b) En déduire que pour tout entier naturel ℓ compris entre 1 et $n-1$,

$$X_\ell = \frac{1-\left(u^{-\ell}\right)^n}{1-u^{-\ell}}.$$

c) Déterminer la transformation de Fourier discrète de ce signal.

99 Racines primitives n-ièmes de l'unité

n désigne un nombre entier naturel, $n \geqslant 3$ et u désigne une racine n-ième de l'unité, $u \neq 1$.

On dit que u est une **racine primitive n-ième de l'unité** lorsque tous les éléments de $\mathbb{U}_n$ peuvent s'écrire comme une puissance de u.

1. Deux exemples pour comprendre

a) Démontrer que $e^{\frac{2i\pi}{3}}$ est une racine primitive cubique de l'unité.

b) Démontrer que $e^{i\pi}$ n'est pas une racine primitive quatrième de l'unité.

2. Lien avec l'arithmétique

On admet que lorsque n et k sont premiers entre eux, $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ est une racine primitive n-ième de l'unité.

a) Expliquer pourquoi lorsque n est un nombre premier, tous les éléments de $\mathbb{U}_n$ (sauf 1) sont des racines primitives n-ièmes de l'unité.

b) Déterminer toutes les racines primitives n-ièmes de l'unité, lorsque :

- $n = 8$
- $n = 10$
- $n = 13$

Des Défis

100 Résoudre une équation de degré 6

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(z-1)^6 + (z-1)^3 + 1 = 0.$$

101 Calculer une somme

On note u une racine septième de l'unité différente de 1.

Calculer $u^2 + u^4 + u^6 + u^8 + u^{10} + u^{12}$.