7 Trigonométrie

Avant

▶ Dans *Des levers et des couchers des étoiles*, l'astronome grec Hipparque (150 av. J.-C.) pose les principes de la Trigonométrie pour décrire avec précision la position de certains astres.

À présent

▶ De nos jours, la trigonométrie intervient dans l'exploitation spatiale.
La sonde spatiale InSight suit une orbite dont la trajectoire est calculée à partir de sinus ou de cosinus.
Après un voyage de six mois, elle s'est posée sur Mars le 26 novembre 2018 afin d'explorer ses profondeurs.

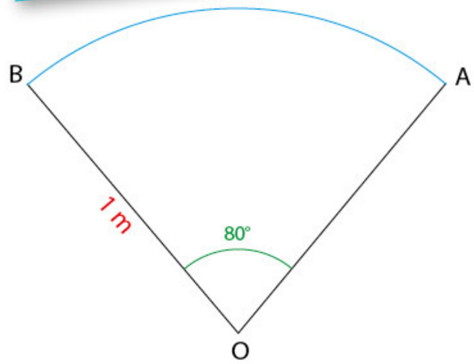
Les capacités travaillées dans ce chapitre

	Exercices
• Passer des degrés aux radians et inversement.	11, 12, 17, 18
• Déterminer la longueur d'un arc de cercle.	1, 3, 13 à 16, 19 à 24
• Placer un point sur un cercle trigonométrique.	2, 4, 25 à 41
• Reconnaître que deux nombres ont le même point image.	42 à 47
• Par lecture sur un cercle trigonométrique, déterminer, pour des valeurs remarquables de x, les cosinus et sinus d'angles associés à x.	6, 9-10, 48, 49, 51 à 64
• Utiliser les formules de trigonométrie.	5, 7, 8, 65 à 72

1 Une nouvelle mesure d'angle : le radian

Un paysagiste souhaite installer un pont en bois pour agrémenter une piscine. La partie centrale de ce pont est un arc de cercle de rayon 1 m et d'angle au centre de mesure 80°.

Cette partie est représentée ci-dessous par l'arc $\overset{\frown}{AB}$ d'un cercle de centre O.



1 **a)** Quelle aurait été la longueur, en m, de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ si la mesure de l'angle au centre avait été de 180° ?

b) On admet que la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ est proportionnelle à la mesure de l'angle au centre.

En déduire la longueur, en m, de l'arc $\overset{\frown}{AB}$.

Arrondir au dixième.

2 Sur un cercle de rayon 1, la mesure en radian de l'angle au centre interceptant un arc $\overset{\frown}{AB}$ est la longueur de cet arc.

Exprimer la mesure en radian de l'angle $\widehat{AOB}$ en fonction de π.

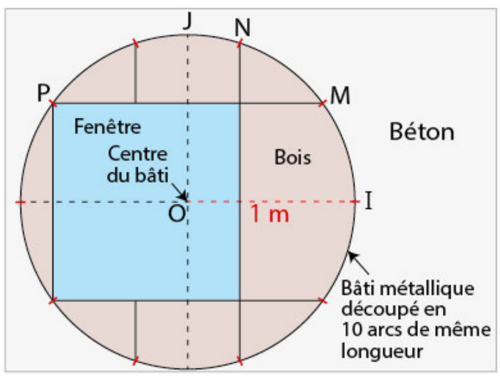
2 Cosinus et sinus d'un angle

Une artisane souhaite construire une fenêtre rectangulaire à l'intérieur d'un bâti circulaire de rayon 1 m coupé en dix arcs de même longueur. Cette situation est représentée ci-dessous : O est le centre du bâti circulaire et les traits rouges sont les extrémités des dix arcs.

1 **a)** Exprimer la longueur de l'arc $\overset{\frown}{IM}$ en fonction de π.

b) Justifier que la mesure de l'angle $\widehat{IOM}$ est 36°.

c) Expliquer pourquoi les coordonnées du point M dans le repère $(O\,;I,J)$ sont $(\cos(36°)\,;\,\sin(36°))$. Donner leurs arrondis au centième.



2 **a)** Expliquer pourquoi $\widehat{IOM} = \dfrac{\pi}{5}$ rad.

b) Les coordonnées de M sont aussi $\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)\,;\,\sin\left(\dfrac{\pi}{5}\right)\right)$.

Mettre la calculatrice en mode radian, utiliser la touche π et calculer ces coordonnées. *Arrondir au centième.*

c) De même, déterminer la longueur de chacun des arcs $\overset{\frown}{IN}$ et $\overset{\frown}{IP}$. En déduire l'abscisse de chacun des points N et P.
Arrondir au centième.

3 Donner les dimensions, en m, de la fenêtre. *Arrondir au centième.*

Cours

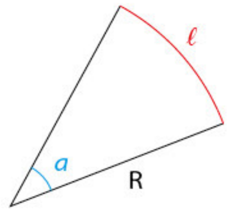
1 Le radian

A Longueur d'arc

Propriété (admise)

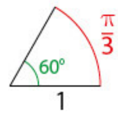
La longueur d'un arc de cercle de rayon R et d'angle au centre de mesure a en **degré** ($0 \leqslant a \leqslant 360$) est :

$$\ell = \mathbf{R} \times \frac{\pi \times a}{\mathbf{180}}$$



Exemple

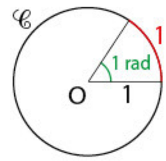
La longueur d'un arc de cercle de rayon 1 et d'angle au centre de mesure 60° est $\ell = 1 \times \frac{\pi \times 60}{180}$, soit $\ell = \frac{\pi}{3}$.



B Le radian

Définition

$\mathscr{C}$ est un cercle de centre O et de rayon 1.
Le **radian** (symbole : rad) est la mesure d'un angle au centre qui intercepte sur le cercle $\mathscr{C}$ un arc de longueur 1.



Exemple

Dans l'exemple du paragraphe A, l'angle de mesure 60° intercepte un arc de cercle de rayon 1 et de longueur $\frac{\pi}{3}$.
La mesure de cet angle est aussi $\frac{\pi}{3}$ rad.

Propriété

Les mesures a en degré et α en radian d'un même angle sont **proportionnelles**.

$$\alpha = \frac{\pi}{\mathbf{180}} \times a$$

Démonstration

On considère un arc de cercle de rayon 1 et d'angle au centre de mesure α, en radian, et a, en degré.
D'après la définition ci-dessus, la longueur de l'arc intercepté est donc égale à α.
Mais d'après la propriété du paragraphe A, elle est aussi égale à $1 \times \frac{\pi \times a}{180}$.
Donc, $\alpha = \frac{\pi}{180} \times a$.

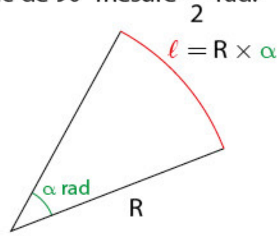
Exemples

- Un angle de 360° mesure 2π rad.
- Un angle de 180° mesure π rad.
- Un angle de 90° mesure $\frac{\pi}{2}$ rad.

Propriété

La longueur ℓ d'un arc de cercle de rayon R et d'angle au centre de mesure α en **radian** ($0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$) est $\ell = \mathbf{R} \times \alpha$.

En effet, cela se déduit immédiatement des propriétés énoncées aux A et B.

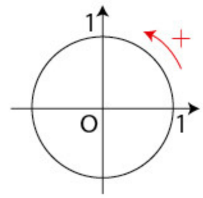


Exemple

La longueur d'un arc de cercle de rayon 3 cm et d'angle au centre de mesure $\frac{2\pi}{3}$ rad est $\ell = 3 \text{ cm} \times \frac{2\pi}{3}$.
Ainsi, $\ell = 2\pi$ cm.

2 Enroulement de la droite numérique

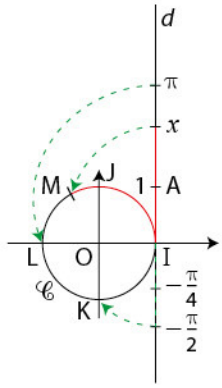
A Enroulement de $\mathbb{R}$ sur un cercle trigonométrique



Définition

Le **cercle trigonométrique** de centre O est celui qui a pour rayon 1 et qui est muni d'un **sens direct** : le sens contraire des aiguilles d'une montre.

$\mathscr{C}$ est le cercle trigonométrique de centre O et $(O\,;I,J)$ est un **repère orthonormé direct** (on se déplace de I vers J dans le sens direct sur le cercle $\mathscr{C}$).
A est le point de coordonnées $(1\,;1)$ et d la droite (IA) munie du repère $(I\,;A)$.
On enroule cette droite, dite droite des réels, autour du cercle.
Tout nombre réel x de la droite vient s'appliquer sur un point M du cercle :
on dit que M est le **point image** du nombre réel x.



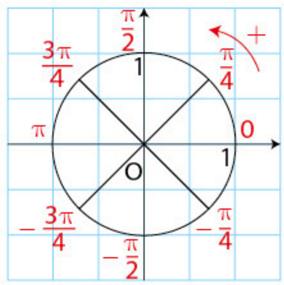
Exemples

- L est le point image du nombre réel π : l'arc $\widehat{IL}$ a pour longueur π et l'angle $\widehat{IOL}$ mesure 180°.
- K est le point image du nombre réel $-\dfrac{\pi}{2}$: l'arc $\widehat{IK}$ a pour longueur $\dfrac{\pi}{2}$ dans le sens indirect et l'angle $\widehat{IOK}$ mesure 90°.

Remarque : si M est le point image du nombre réel x avec $0 \leqslant x \leqslant \pi$, alors $\widehat{IOM} = x$ rad.

B Placement sur un cercle trigonométrique

Pour simplifier la lecture sur un cercle trigonométrique, on note le nombre réel au même endroit que son point image associé sur le cercle.



C Point image et nombres réels associés

Propriété

Si x et x' désignent des nombres réels tels que $x - x' = k \times 2\pi$ où k est un nombre de $\mathbb{Z}$, alors x et x' ont le même point image sur un cercle trigonométrique.

Démonstration

Un cercle trigonométrique a pour longueur 2π. Donc les points images de nombres réels x et x' tels que $x - x' = k \times 2\pi$, où k est un nombre de $\mathbb{Z}$, sont espacés de $|k|$ tour(s) complet(s) et ils sont confondus.

Conséquence

Si M est le point d'un cercle trigonométrique, image d'un nombre réel x, alors M est aussi le point image des nombres réels $x + k \times 2\pi$, où k est un nombre de $\mathbb{Z}$.

Exemple

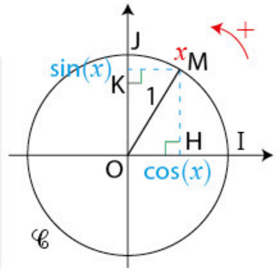
$\dfrac{\pi}{3}\,;\ \dfrac{\pi}{3} + 2\pi = \dfrac{7\pi}{3}\,;\ \dfrac{\pi}{3} - 2 \times 2\pi = -\dfrac{11\pi}{3}$ ont le même point image sur un cercle trigonométrique.

3 Cosinus et sinus d'un nombre réel

A Cosinus et sinus

Définitions

$(O\,;I,J)$ est un repère orthonormé direct et $\mathscr{C}$ est le cercle trigonométrique de centre O.
M est le point de $\mathscr{C}$ image d'un nombre réel x.
- Le **cosinus de** x, noté $\cos(x)$, est l'abscisse du point M.
- Le **sinus de** x, noté $\sin(x)$, est l'ordonnée du point M.



Exemple

Le nombre réel $\frac{\pi}{2}$ a pour image le point J de coordonnées $(0\,;1)$ donc $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$.

Propriétés

Pour tout nombre réel x,

(1) $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$ **(2)** $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$ **(3)** $\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$

Démonstrations

(1) et **(2)** : L'abscisse et l'ordonnée de tout point d'un cercle trigonométrique sont compris entre -1 et 1.
(3) Avec les notations de la figure ci-dessus, OHM est un triangle rectangle en H.
D'après le théorème de Pythagore, $OM^2=OH^2+HM^2=OH^2+OK^2=(\cos(x))^2+(\sin(x))^2$.
Or, $OM=1$ donc $\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$.

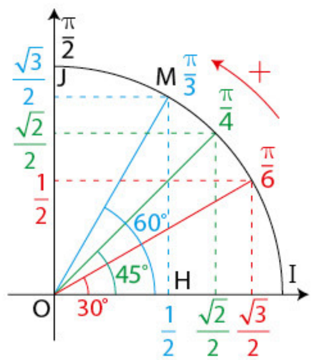
B Lien avec le cosinus et le sinus d'un angle aigu vus au collège

Avec les notations de la figure du paragraphe A (avec $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$), on peut écrire dans le triangle OHM rectangle en H que :

$$\cos(\widehat{IOM})=\frac{OH}{OM}=\frac{OH}{1}=OH=\cos(x) \quad \text{et} \quad \sin(\widehat{IOM})=\frac{HM}{OM}=\frac{HM}{1}=HM=\sin(x).$$

Tableau des valeurs remarquables

Angle	0°	30°	45°	60°	90°
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1



Démonstration

On cherche les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

La hauteur (MH) du triangle équilatéral OMI est la médiatrice de $[OI]$, donc $OH=\frac{1}{2}OI=\frac{1}{2}$.

Donc $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$. De $\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right)=1$, on déduit $\sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right)=1-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$ soit $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Remarque : on peut se reporter à l'exercice 87 p. 180 pour étudier le cas où $x=\frac{\pi}{4}$.

EXERCICES RÉSOLUS

1 Déterminer une longueur d'arc

→ Cours 1

$\mathscr{C}$ est un cercle de centre O et de rayon 4 cm. Les points I, M, N du cercle sont tels que :

• $\widehat{IOM} = \dfrac{\pi}{6}$ rad ; • $\widehat{ION} = \dfrac{3\pi}{4}$ rad ; • M appartient à l'arc $\overset{\frown}{IN}$.

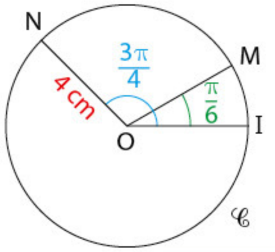
a) Déterminer la mesure de chacun des angles $\widehat{IOM}$ et $\widehat{ION}$ en degré puis réaliser la figure.

b) Exprimer la longueur ℓ de l'arc $\overset{\frown}{MN}$ en fonction de π.

Solution

a) La mesure de l'angle $\widehat{IOM}$ en degré est égale à $\dfrac{180°}{\pi} \times \dfrac{\pi}{6} = 30°$.

De même, la mesure de l'angle $\widehat{ION}$ en degré est égale à $\dfrac{180°}{\pi} \times \dfrac{3\pi}{4} = 135°$.



On applique la formule du cours ou bien on s'aide d'un tableau de proportionnalité.

Angle (en degré)	180°	30°
Angle (en rad)	π	$\dfrac{\pi}{6}$

b) $\widehat{MON} = \left(\dfrac{3\pi}{4} - \dfrac{\pi}{6}\right)$ rad $= \dfrac{7\pi}{12}$ rad.

Donc $\ell = 4\text{ cm} \times \dfrac{7\pi}{12}$ c'est-à-dire $\ell = \dfrac{7\pi}{3}$ cm.

Pour déterminer la longueur d'un arc de cercle :
- on détermine la mesure en radian de l'angle au centre qui l'intercepte ;
- on multiplie cette mesure par le rayon de l'arc.

2 Placer des points images

→ Cours 2. C

(O ; I, J) est un repère orthonormé direct. Sur le cercle trigonométrique de centre O, placer les points :

a) M image de $\dfrac{\pi}{3}$; **b)** N image de $-\dfrac{20\pi}{3}$.

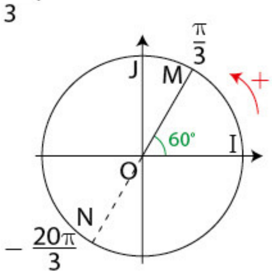
Solution

a) $\widehat{IOM} = \dfrac{180°}{\pi} \times \dfrac{\pi}{3} = 60°$

b) $-\dfrac{20\pi}{3} = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{21\pi}{3} = \dfrac{\pi}{3} - \pi - 3 \times 2\pi$

donc $-\dfrac{20\pi}{3}$ et $\dfrac{\pi}{3} - \pi$ ont le même point image sur le cercle.

Or, $\dfrac{\pi}{3} - \pi$ a pour point image le symétrique de M par rapport à O.



On écrit $-\dfrac{20\pi}{3}$ sous la forme $x + 2k\pi$ avec x dans l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$ et $k \in \mathbb{Z}$.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 1

3 $\mathscr{C}$ est un cercle de centre O et de rayon 3 cm. I, M et N sont des points du cercle tels que :

$\widehat{IOM} = \dfrac{\pi}{4}$ rad, $\widehat{ION} = \dfrac{5\pi}{6}$ rad et M appartient à l'arc $\overset{\frown}{IN}$.

Exprimer la longueur de l'arc $\overset{\frown}{MN}$ en fonction de π.

Sur le modèle de l'exercice résolu 2

4 Tracer un cercle trigonométrique et placer les points :

a) M image de $\dfrac{\pi}{6}$; **b)** N image de $-\dfrac{16\pi}{3}$;

c) P image de $\dfrac{\pi}{4}$; **d)** R image de $\dfrac{19\pi}{4}$.

EXERCICES RÉSOLUS

5 Utiliser les propriétés de cosinus et sinus

→ Cours 3. A

x désigne un nombre réel de l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\cos(x)=\frac{1}{3}$.

a) Déterminer $\sin^2(x)$.

b) En déduire la valeur exacte de $\sin(x)$.

Solution

a) Pour tout nombre réel x, $\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$.

Ainsi, $\sin^2(x)=1-\cos^2(x)=1-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{8}{9}$.

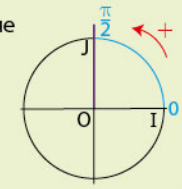
b) $\sin^2(x)=\frac{8}{9}$ soit $\sin(x)=\frac{\sqrt{8}}{3}$ ou $\sin(x)=-\frac{\sqrt{8}}{3}$.

Or, x appartient à l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, donc $\sin(x)\geqslant 0$.

Ainsi, $\sin(x)=\frac{\sqrt{8}}{3}$.

Lorsqu'on élève une fraction au carré, on élève le numérateur et le dénominateur au carré.

L'intervalle dans lequel se situe x permet de choisir entre les deux valeurs possibles de $\sin(x)$. On peut s'aider du cercle trigonométrique.



6 Déterminer un cosinus ou un sinus

→ Cours 3. B

Déterminer à l'aide d'un cercle trigonométrique les valeurs exactes de $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$ et $\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$.

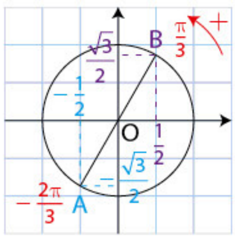
Solution

On place le point A image de $-\frac{2\pi}{3}$.

Comme $-\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{3}-\pi$, le point A est le symétrique par rapport à O (centre du cercle) du point B image de $\frac{\pi}{3}$.

Donc $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$

et $\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.



On place tout d'abord le point image associé au nombre réel. Puis on met en évidence un lien géométrique avec un nombre réel dont on connaît les valeurs de cosinus et sinus.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 5

7 x désigne un nombre réel de l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}\,;0\right]$ tel que $\cos(x)=\frac{\sqrt{5}}{3}$. Déterminer $\sin^2(x)$ puis en déduire la valeur exacte de $\sin(x)$.

8 x est un nombre réel de l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}\,;0\right]$ tel que $\sin(x)=-\frac{1}{4}$.
Déterminer la valeur exacte de $\cos(x)$.

Sur le modèle de l'exercice résolu 6

9 Déterminer à l'aide d'un cercle trigonométrique les valeurs exactes de :

a) $\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)$; **b)** $\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ et $\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$.

10 Déterminer à l'aide d'un cercle trigonométrique les valeurs exactes de :

a) $\cos\left(\frac{16\pi}{3}\right)$ et $\sin\left(\frac{16\pi}{3}\right)$; **b)** $\cos\left(\frac{23\pi}{2}\right)$ et $\sin\left(\frac{23\pi}{2}\right)$.

Longueur d'arc et radian

→ Cours 1

Questions Flash

11 Déterminer mentalement la mesure en degré de chaque mesure d'angle en radian.

a) $\frac{\pi}{6}$ rad **b)** $\frac{\pi}{2}$ rad **c)** π rad

12 Déterminer mentalement la mesure en radian de chaque mesure d'angle en degré.

a) 30° **b)** 45° **c)** 60° **d)** 90° **e)** 180°

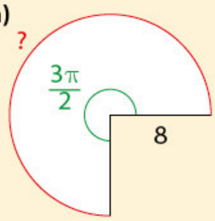
13 Agnès affirme : « La longueur d'un arc de cercle de rayon 2 cm et d'angle au centre de mesure 45° est 90 cm. »
A-t-elle raison ?

14 Laquelle de ces propositions donne la longueur d'un arc de cercle de rayon 3 cm et d'angle au centre de mesure $\frac{\pi}{3}$ rad ?

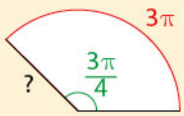
(1) $\frac{\pi}{3}$ cm **(2)** π cm **(3)** 180 cm

15 On a tracé les arcs de cercle ci-dessous sur lesquels les mesures d'angles sont en radian.
Préciser la donnée manquante indiquée par un point d'interrogation.

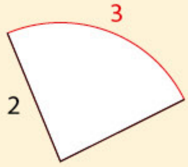
a)



b)



16 Nicolas affirme : « L'angle au centre de cet arc de cercle est droit. » A-t-il raison ?



17 Convertir en degré chaque mesure d'angle.

a) $\frac{7\pi}{9}$ rad **b)** $\frac{5\pi}{12}$ rad **c)** $\frac{3\pi}{8}$ rad **d)** $\frac{4\pi}{5}$ rad

18 Exprimer en radian, en fonction de π, chaque mesure d'angle.

a) 160° **b)** 70° **c)** 145° **d)** 63°

19 Dans chaque cas, déterminer la longueur, dans l'unité indiquée, d'un arc de cercle de rayon R et d'angle au centre de mesure α. *Arrondir au centième.*

a) $R = 6$ cm et $\alpha = \frac{5\pi}{6}$ rad.

b) $R = 3$ m et $\alpha = \frac{8\pi}{7}$ rad.

c) $R = 12$ km et $\alpha = \frac{11\pi}{5}$ rad.

20 Dans chaque cas, déterminer la longueur, dans l'unité indiquée, d'un arc de cercle de rayon R et d'angle au centre de mesure *a*. *Arrondir au centième.*

a) $R = 2$ m et $a = 150°$.

b) $R = 4$ cm et $a = 80°$.

c) $R = 30$ mm et $a = 5°$.

21 $\mathscr{C}$ est un cercle de centre O et de rayon 2,5 cm. I, M et N sont des points du cercle tels que $\widehat{IOM} = \frac{\pi}{3}$ rad, $\widehat{ION} = \frac{5\pi}{6}$ rad et M appartient à l'arc $\overset{\frown}{IN}$.

a) Déterminer la mesure des angles $\widehat{IOM}$ et $\widehat{ION}$ en degré puis réaliser la figure.

b) Déterminer la longueur, en cm, de l'arc $\overset{\frown}{MN}$.
Arrondir au centième.

22 Déterminer le rayon d'un arc de cercle :

a) de longueur 40 cm et d'angle au centre de mesure 30° (*arrondir au dixième*) ;

b) de longueur 1 m et d'angle au centre de mesure π rad (*arrondir au millième*).

23 Déterminer la mesure en radian de l'angle au centre d'un arc de cercle :

a) de longueur 3π cm et de rayon π cm ;

b) de longueur 300 m et de rayon 150 m.

24 Algo **a)** Compléter la fonction Longueur écrite en langage Python, qui a pour paramètres un rayon *r* et une mesure d'angle *a* en radian et qui renvoie la longueur de l'arc de cercle correspondant.

```
def Longueur(r,a):
    l=[          ]
    return l
```

b) Quelle est la valeur renvoyée par Longueur(10, 0.1) ?

c) La valeur renvoyée par Longueur(10, 3*pi) a-t-elle un sens ?

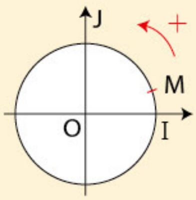
Points images

→ Cours 2

Questions Flash

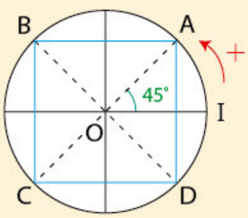
25 $(O\,;I,J)$ est un repère orthonormé.
M est un point du cercle trigonométrique de centre O.
Pour chacune de ces mesures de l'angle $\widehat{IOM}$, déterminer mentalement un nombre réel dont M est le point image.
a) 180° **b)** 90° **c)** 10°

26 Sur le cercle trigonométrique ci-contre, M est le point image du nombre réel $\frac{\pi}{10}$.
Calculer mentalement la mesure en degré de l'angle $\widehat{IOM}$.

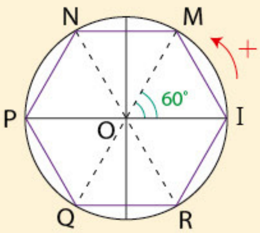


27 Sur les figures ci-dessous, ABCD est un carré et IMNPQR un hexagone régulier, tous les deux inscrits dans un cercle trigonométrique de centre O.
Dans chaque cas, indiquer mentalement le nombre réel de l'intervalle $[0\,;2\pi]$ dont chacun des sommets est l'image.

a)

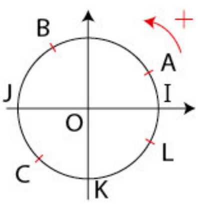


b)



28 Lily affirme : « Le nombre réel de l'intervalle $[2\pi\,;4\pi[$ qui a le même point image que $-\frac{\pi}{3}$ est $\frac{5\pi}{3}$. » A-t-elle raison ?

29 Associer à chacun des sept points ci-contre d'un cercle trigonométrique celui des nombres réels suivants qui lui correspond.



- 7π
- $\frac{2\pi}{3}$
- $-\frac{3\pi}{4}$
- $\frac{\pi}{6}$
- $-\frac{\pi}{6}$
- $1\,002\pi$
- $-\frac{\pi}{2}$

Pour les exercices 30 à 34, tracer un cercle trigonométrique et placer le point image de chaque nombre réel donné.

30 **a)** 0 **b)** π **c)** $\frac{3\pi}{2}$ **d)** $\frac{\pi}{2}$ **e)** 2π

31 **a)** $\frac{\pi}{3}$ **b)** $-\frac{\pi}{3}$ **c)** $\frac{2\pi}{3}$ **d)** $\frac{4\pi}{3}$ **e)** $-\frac{2\pi}{3}$

32 **a)** $\frac{\pi}{6}$ **b)** $\frac{5\pi}{6}$ **c)** $-\frac{\pi}{6}$ **d)** $\frac{13\pi}{6}$ **e)** $-\frac{5\pi}{6}$

33 **a)** $\frac{\pi}{4}$ **b)** $\frac{3\pi}{4}$ **c)** $-\frac{\pi}{4}$ **d)** $\frac{19\pi}{4}$ **e)** $-\frac{3\pi}{4}$

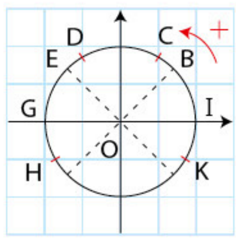
34 **a)** $-\frac{13\pi}{6}$ **b)** $\frac{13\pi}{2}$ **c)** $-\frac{13\pi}{3}$ **d)** $\frac{13\pi}{3}$ **e)** $\frac{13\pi}{4}$

35 **a)** Placer le point M image du nombre réel $\frac{\pi}{3}$ sur un cercle trigonométrique.
b) Placer les points images des nombres réels $k\times\frac{\pi}{3}$ avec k nombre entier variant de 2 à 6.

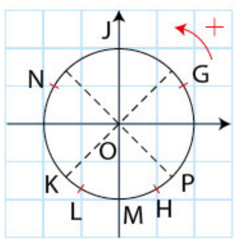
36 **a)** Placer le point M image du nombre réel $\frac{\pi}{6}$ sur un cercle trigonométrique.
b) En déduire la construction du point N image du nombre réel $\frac{\pi}{12}$ avec la règle et le compas.
c) Placer les points images des nombres réels $k\times\frac{\pi}{12}$ avec k nombre entier variant de 2 à 24.

Pour les exercices 37 et 38, associer à chacun des points notés sur ce cercle trigonométrique, celui des nombres réels donnés qui convient.

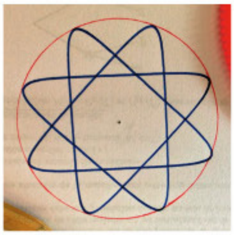
37
- $\frac{\pi}{3}$
- $-\frac{7\pi}{4}$
- $-\frac{13\pi}{6}$
- 2π
- 15π
- $\frac{7\pi}{6}$
- $\frac{2\pi}{3}$
- $-\frac{5\pi}{4}$



38
- $\frac{\pi}{6}$
- $\frac{17\pi}{6}$
- $\frac{5\pi}{4}$
- $-\frac{8\pi}{3}$
- $\frac{3\pi}{2}$
- $-\frac{11\pi}{2}$
- $\frac{5\pi}{3}$
- $-\frac{9\pi}{4}$



39 Jeanne a réalisé la figure suivante à l'aide d'un spirographe. Voyant que les sommets de sa rosace partagent le cercle rouge en 8 arcs de même longueur, elle affirme :



« Dans un certain repère, ceux-ci sont associés aux nombres réels $\frac{\pi}{8}$, $\frac{2\pi}{8}$, $\frac{3\pi}{8}$…. »
A-t-elle raison ?

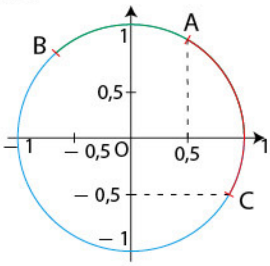
40 $(O ; I, J)$ est un repère orthonormé direct et $\mathscr{C}$ est le cercle trigonométrique de centre O.

a) Justifier que le point $N\left(\frac{1}{2} ; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ appartient au cercle $\mathscr{C}$.

b) M est le point image de $\frac{2\pi}{3}$ sur le cercle $\mathscr{C}$.
Construire les points L_1 et L_2 tels que les triangles MNL_1 et MNL_2 sont rectangles isocèles en L_1 et L_2.

c) Pour chacun des points obtenus, déterminer le nombre réel de $]-\pi ; \pi]$ dont il est l'image.

41 Pour la suite, l'unité est 1,5 cm. On a placé sur le cercle trigonométrique de centre O ci-dessous les points images des nombres réels $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$ et $-\frac{\pi}{6}$.
Déterminer la longueur, en cm, de chaque arc de cercle de couleur rouge, vert et bleu.
Arrondir au dixième.



42 **a)** Écrire le nombre réel $\frac{27\pi}{4}$ sous la forme $x + 2k\pi$, où x est un nombre de l'intervalle $]-\pi ; \pi]$ et k un nombre de $\mathbb{Z}$.

b) En déduire un nombre réel qui a le même point image que $\frac{27\pi}{4}$ sur un cercle trigonométrique.

43 **a)** Écrire le nombre réel $-\frac{101\pi}{3}$ sous la forme $x + 2k\pi$, où x est un nombre de l'intervalle $]-\pi ; \pi]$ et k un nombre de $\mathbb{Z}$.

b) En déduire un nombre réel qui a le même point image que $-\frac{101\pi}{3}$ sur un cercle trigonométrique.

44 Regrouper les nombres réels de cette liste qui ont le même point image sur un cercle trigonométrique.

• $\frac{\pi}{3}$	• 0	• $-\frac{5\pi}{3}$	• π	• $-\frac{29\pi}{4}$
• $\frac{19\pi}{4}$	• $-\frac{23\pi}{6}$	• $\frac{7\pi}{3}$	• $-\frac{3\pi}{4}$	• $\frac{19\pi}{3}$
• -8π	• $\frac{\pi}{6}$	• $\frac{13\pi}{4}$	• -9π	• $\frac{13\pi}{6}$

45 Dans chaque cas, écrire deux nombres réels qui ont le même point image sur un cercle trigonométrique que le nombre donné.

a) $-\frac{\pi}{4}$ **b)** $\frac{3\pi}{2}$ **c)** $-\frac{5\pi}{6}$ **d)** $\frac{\pi}{3}$

46 Algo Voici une fonction Mpi écrite en langage Python. Elle a pour paramètres deux nombres réels a et b et renvoie soit la chaîne de caractères "oui", soit la chaîne de caractères "non".

```
from math import *

def Mpi(a,b):
    d=(b-a)/pi
    if d%2==0:
        rep="oui"
    else:
        rep="non"
    return rep
```

a) Quelle est la chaîne renvoyée par Mpi (pi/3, 7*pi/3) ?

b) Que peut-on dire des points images associés aux nombres réels a et b lorsque la fonction renvoie la chaîne "oui" ?

c) Modifier les chaînes de caractères "oui" et "non" afin qu'un utilisateur comprenne le rôle de cette fonction.

47 Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse.

a) Les nombres réels $-\frac{13\pi}{7}$, $\frac{\pi}{7}$ et $\frac{28\pi}{7}$ ont le même point image sur un cercle trigonométrique.

b) Les nombres réels $-\frac{27\pi}{5}$ et $\frac{28\pi}{5}$ n'ont pas le même point image sur un cercle trigonométrique.

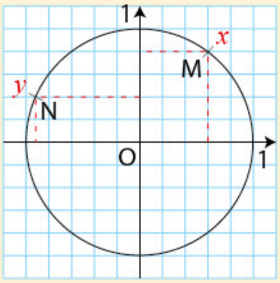
c) Les nombres réels $\frac{3\pi}{11}$ et $-\frac{107\pi}{11}$ ont le même point image sur un cercle trigonométrique.

Cosinus et sinus de nombres réels

→ Cours 3

Questions flash

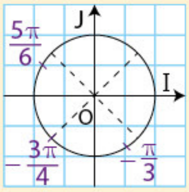
48 x et y désignent deux nombres réels associés respectivement aux points M et N du cercle trigonométrique ci-contre.



a) Lire $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

b) Lire $\sin(y)$ et une valeur approchée de $\cos(y)$.

49 Déterminer mentalement les valeurs exactes du cosinus et sinus de :

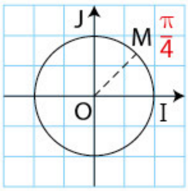


a) $-\dfrac{\pi}{3}$ **b)** $\dfrac{5\pi}{6}$ **c)** $-\dfrac{3\pi}{4}$

50 Avec la calculatrice en mode radian, donner l'arrondi au centième du cosinus et du sinus de :

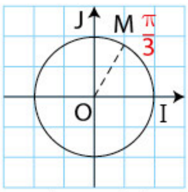
a) $\dfrac{\pi}{5}$ **b)** $\dfrac{\pi}{12}$ **c)** $-\dfrac{3\pi}{7}$ **d)** $-\dfrac{19\pi}{8}$

51 **a)** Réaliser cette figure et placer les points images de $\dfrac{7\pi}{4}$, $\dfrac{3\pi}{4}$, $\dfrac{5\pi}{4}$, $-\dfrac{11\pi}{4}$.



b) En déduire les valeurs exactes des cosinus et sinus des nombres réels précédents.

52 **a)** Réaliser cette figure et placer les points images de $\dfrac{2\pi}{3}$, $\dfrac{5\pi}{3}$, $-\dfrac{2\pi}{3}$, $-\dfrac{11\pi}{3}$.



b) En déduire les valeurs exactes des cosinus et sinus des nombres réels précédents.

Pour les exercices 53 à 55, déterminer, sans calculatrice, la valeur exacte de chaque nombre.

53 **a)** $\cos\left(\dfrac{5\pi}{4}\right)$ **b)** $\cos\left(-\dfrac{7\pi}{3}\right)$ **c)** $\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)$

54 **a)** $\sin\left(\dfrac{4\pi}{3}\right)$ **b)** $\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)$ **c)** $\sin\left(\dfrac{11\pi}{6}\right)$

55 **a)** $\cos\left(\dfrac{29\pi}{3}\right)$ **b)** $\cos(17\pi)$ **c)** $\cos\left(-\dfrac{7\pi}{4}\right)$

56 Justifier les résultats ci-dessous affichés par un logiciel de calcul formel.

1	$\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)$
	$\rightarrow \dfrac{1}{2}$
2	$\cos\left(-\dfrac{23\pi}{4}\right)$
	$\rightarrow \dfrac{1}{2}\sqrt{2}$

57 Dans chaque cas, dire si l'affirmation est vraie ou fausse.

a) $\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = 2\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ **b)** $\sin(0{,}9\pi) \geqslant 0$

c) $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0$ **d)** $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 0$

58 Lorsque $\cos(x) \neq 0$, on définit la tangente du nombre réel x par $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

Dans chaque cas, déterminer la valeur exacte.

a) $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ **b)** $\tan\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ **c)** $\tan\left(\dfrac{7\pi}{6}\right)$

59 Matthieu affirme : « Il existe un seul nombre réel x de l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$ tel que $\sin(x) = \dfrac{1}{2}$ et $\cos(x) < 0$. »

A-t-il raison ? Si oui, préciser ce nombre réel.

60 Dans chaque cas, déterminer, s'ils existent, le ou les nombres réels x tels que :

a) $\cos(x) = \dfrac{1}{2}$ et $x \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$;

b) $\sin(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $x \in \left[\dfrac{\pi}{2}\,;\pi\right]$;

c) $\sin(x) = -\dfrac{1}{2}$ et $x \in [-\pi\,;0]$;

d) $\cos(x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $x \in \left[-\pi\,;-\dfrac{\pi}{2}\right]$.

61 Dans chaque cas, déterminer, s'ils existent, le ou les nombres réels x tels que :

a) $\sin(x) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\cos(x) > 0$;

b) $\cos(x) = -\dfrac{1}{2}$ et $\sin(x) < 0$;

c) $\sin(x) = 1$ et $x \in [\pi\,;3\pi[$;

d) $\cos(x) = 1$ et $x \in \left[\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{3\pi}{2}\right[$.

62 La touche sin⁻¹ ou Asn de la calculatrice, permet d'afficher le nombre réel x de l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin(x) = a$ où a est un nombre réel donné de l'intervalle $[-1\,;1]$.

1. Dans chaque cas, déterminer l'arrondi au dixième du nombre réel x de l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ tel que :

a) $\sin(x) = 0{,}2$ **b)** $\sin(x) = -0{,}65$

2. Rania souhaite déterminer le ou les nombres réels x de l'intervalle $[0\,;\pi]$ tels que $\sin(x) = 0{,}4$.

a) S'aider d'un cercle trigonométrique pour savoir combien de nombres réels sont solutions du problème de Rania.

b) Avec la calculatrice, déterminer les arrondis au centième de ces solutions.

63 La touche cos⁻¹ ou Acs de la calculatrice, permet d'afficher le nombre réel x de l'intervalle $[0\,;\pi]$ tel que $\cos(x) = a$ où a est un nombre réel donné de l'intervalle $[-1\,;1]$.

1. Dans chaque cas, déterminer l'arrondi au dixième du nombre réel x de l'intervalle $[0\,;\pi]$ tel que :

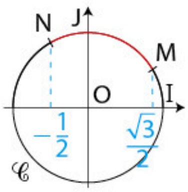
a) $\cos(x) = 0{,}3$ **b)** $\cos(x) = -0{,}84$

2. Teddy souhaite déterminer le ou les nombres réels x de l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$ tels que $\cos(x) = -0{,}6$.

a) S'aider d'un cercle trigonométrique pour savoir combien de nombres réels sont solutions du problème de Teddy.

b) Avec la calculatrice, déterminer les arrondis au centième de ces solutions.

64 Dans un repère orthonormé $(O\,;I,J)$, $\mathscr{C}$ est le cercle trigonométrique de centre O.

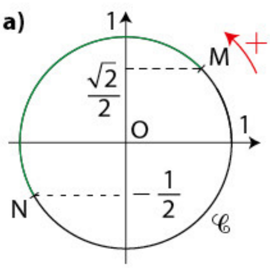


1. Quels sont les nombres réels de l'intervalle $[0\,;\pi]$ dont M et N sont les points images ?

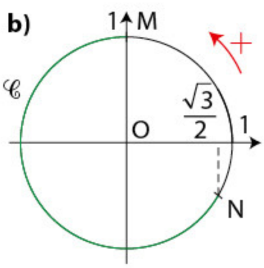
En déduire la longueur de l'arc rouge $\widehat{MN}$.

2. Dans chaque cas, déterminer la longueur de l'arc vert.

a)



b)



Propriétés de cosinus et sinus

→ Cours 3. A

Questions flash

65 On donne $\cos(x) = \frac{\sqrt{5}}{7}$.

Déterminer mentalement $\cos^2(x)$.

66 On donne $\cos^2(x) = \frac{1}{3}$.

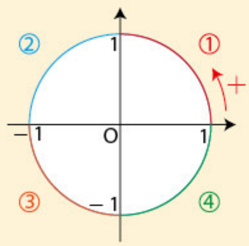
Romain affirme : « Alors, $\sin^2(x) = \frac{2}{3}$. »

A-t-il raison ?

67 On donne $\sin(x) = \frac{1}{2}$. Parmi les valeurs suivantes, quelle est celle de $\cos^2(x)$?

(1) $\frac{1}{2}$ **(2)** $\frac{1}{4}$ **(3)** $\frac{3}{4}$

68 Associer oralement chaque nombre ci-dessous au quart de cercle auquel appartient son point image. Préciser le signe de son cosinus, puis de son sinus.



- $\frac{3\pi}{4}$
- $-\frac{7\pi}{12}$
- $\frac{\pi}{9}$
- $-\frac{\pi}{3}$

69 Préciser le signe du nombre donné.

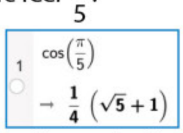
a) $\sin\left(\frac{5\pi}{7}\right)$ **b)** $\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$ **c)** $\sin\left(\frac{13\pi}{5}\right)$

70 x désigne un nombre réel tel que $\cos(x) = -\frac{3}{5}$ avec $x \in [0\,;\pi]$. Déterminer la valeur de $\sin(x)$.

71 x désigne un nombre réel tel que $\sin(x) = \frac{1}{3}$ avec $x \in \left[\frac{\pi}{2}\,;\pi\right]$. Déterminer la valeur de $\cos(x)$.

72 **1. a)** Sur un cercle trigonométrique, placer approximativement le point M image du nombre réel $\frac{\pi}{5}$.

b) À l'aide de l'écran ci-contre, calculer la valeur de $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.



2. a) À l'aide de symétries, placer sur le cercle les points images des nombres réels $-\frac{\pi}{5}$ et $\pi + \frac{\pi}{5}$.

b) En déduire les valeurs exactes des cosinus et sinus de chacun des nombres réels $-\frac{\pi}{5}$ et $\frac{6\pi}{5}$.

QCM interactifs

Pour se tester

73 Dans chaque cas, donner la réponse exacte sans justifier.

		A	B	C	D
1	La longueur d'un arc de cercle de rayon 3 cm et d'angle au centre de mesure $\frac{2\pi}{3}$ rad est égale à …	2π m	$\frac{2\pi}{9}$ cm	2π cm	$\frac{\pi^2}{90}$ cm
2	La longueur d'un arc de cercle de rayon 1 et d'angle au centre de mesure 30° est égale à …	30	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	π
3	Le nombre réel $-\frac{\pi}{3}$ a le même point image sur un cercle trigonométrique que …	$\frac{7\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{4\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$
4	$\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ est égal à …	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
5	$\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)$ est égal à …	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
6	Pour tout nombre réel x, $1-\cos^2(x)$ est égal à …	0	$-\sin^2(x)$	$\sin^2(x)$	$1-\sin^2(x)$

74 Dans chaque cas, donner la (ou les) réponse(s) exacte(s) sans justifier.

		A	B	C	D
1	$\cos\left(\frac{15\pi}{6}\right)$ est égal à …	$\frac{\pi}{2}$	0	1	$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$
2	Les nombres réels x de l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$ tels que $\cos(x)=\frac{1}{2}$ sont …	$\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{3}$ et $-\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$ et $\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$ et $-\frac{\pi}{6}$
3	On donne $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. Alors $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ est égal à …	$1-\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$	un nombre positif	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

75 Dans chaque cas, dire si l'affirmation est vraie ou fausse en justifiant.

Affirmations :

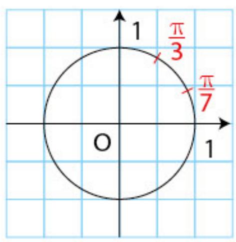
1 Un angle a pour mesure $\frac{4\pi}{9}$ rad. Sa mesure en degré est 80°.

2 $\sin\left(\frac{31\pi}{3}\right)$ est égal à $\frac{1}{2}$.

3 x est un nombre réel tel que $\cos(x) \geqslant 0$. Alors $\sin(x) \geqslant 0$.

4 $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)$.

5 $\cos\left(\pi-\frac{\pi}{7}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)$.



Vérifiez vos réponses : p. 340

76 Calculer une longueur d'arc

a) Convertir $\frac{\pi}{9}$ rad en degré.

b) Construire un arc de cercle de rayon 3 cm et d'angle au centre de mesure $\frac{\pi}{9}$ rad.

c) Calculer sa longueur, en cm. *Arrondir au centième.*

AIDE

a) π rad c'est 180° donc $\frac{\pi}{9}$ rad c'est …

c) Utiliser la formule donnant la longueur d'arc pour une mesure d'angle au centre en radian.

77 Placer un point image sur un cercle trigonométrique

Construire un cercle trigonométrique et placer les points images des nombres réels suivants :

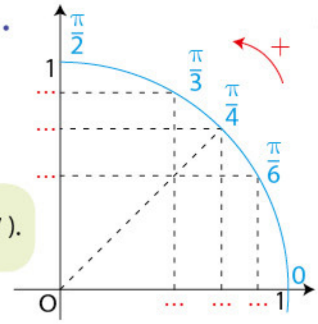
a) $\frac{5\pi}{4}$ **b)** $-\frac{4\pi}{3}$ **c)** $\frac{7\pi}{6}$

AIDE

a) Placer tout d'abord le point image de $\frac{\pi}{4}$ puis reporter 5 fois la longueur d'arc dans le sens direct.

78 Connaître les valeurs remarquables

Réaliser et compléter la figure ci-contre par les valeurs des cosinus et sinus des nombres réels $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{3}$.



AIDE

Les trois valeurs remarquables à mémoriser sont $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ($\approx 0{,}7$) et $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ($\approx 0{,}87$).

79 Déterminer le cosinus et le sinus d'un nombre réel

a) Déterminer $\frac{15\pi}{4} - 2 \times 2\pi$.

b) Sur un cercle trigonométrique, placer les points M, N et P images respectives des nombres réels $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$ et $\frac{15\pi}{4}$.

c) En déduire la valeur de $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ et de $\cos\left(\frac{15\pi}{4}\right)$.

AIDE

c) Utiliser les symétries liant les points N et P au point M.

80 Utiliser les propriétés de cosinus et sinus

1. a) Sur un cercle trigonométrique, placer le point M image du nombre réel $\frac{\pi}{4}$.

b) En déduire l'emplacement du point image du nombre réel $\frac{\pi}{8}$.

c) Déterminer le signe de $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

2. On donne $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$. Déterminer la valeur exacte de $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

AIDE

1. b) Utiliser le fait que $\frac{\pi}{8}$ est la moitié de $\frac{\pi}{4}$.

2. Utiliser la relation $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$ puis déterminer les deux valeurs possibles de $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

La question **1. c)** permet de choisir celle qui convient.

EXERCICE RÉSOLU

81 Calculer une somme de cosinus

On considère l'algorithme ci-contre.

a) Exécuter pas à pas cet algorithme avec $N = 6$ et compléter un tableau de suivi des variables.

Quelle est la valeur de la variable S à la fin de l'exécution de l'algorithme ?

Que représente cette valeur ?

b) Expliquer à l'aide d'un cercle trigonométrique le résultat obtenu.

```
S ← 0
Pour k allant de 0 à N
    S ← S + cos(kπ/N)
Fin Pour
```

Solution

a) Voici le tableau de suivi des valeurs des variables k et S lors de l'exécution de l'algorithme.

k		0	1	2	3	4	5	6
S	0	1	$1+\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$	$1+\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

Pour compléter ce tableau, on peut lire $\cos\left(\frac{k\pi}{6}\right)$ avec $0 \leqslant k \leqslant 6$ sur un cercle trigonométrique.

La valeur de S à la fin de l'algorithme est 0.

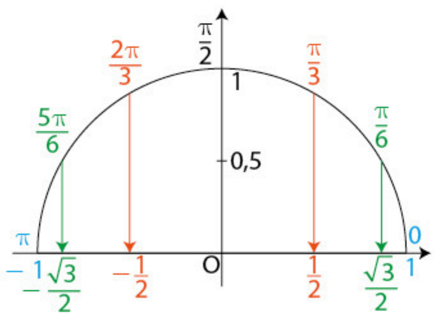
Cette valeur est celle de la somme :

$$\cos(0) + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \cos(\pi)$$

b) Sur le cercle trigonométrique ci-contre, on remarque que les valeurs des cosinus des nombres réels appartenant à l'intervalle $\left]\frac{\pi}{2} ; \pi\right]$ sont les opposés de celles des nombres réels appartenant à l'intervalle $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right[$.

De plus $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Ainsi la somme est nulle.



À VOTRE TOUR

82 On considère l'algorithme ci-dessous.

```
S ← 0
Pour k allant de –N à N
    S ← S + sin(kπ/2N)
Fin Pour
```

a) Exécuter pas à pas cet algorithme avec $N = 3$ et compléter un tableau de suivi des variables.

Quelle est la valeur de S à la fin de l'algorithme ?

Que représente cette valeur ?

b) Expliquer à l'aide d'un cercle trigonométrique le résultat obtenu.

83 On considère l'algorithme ci-dessous.

```
S ← 0
Pour k allant de 0 à 2N
    S ← S + sin(kπ/N)
Fin Pour
```

a) Exécuter pas à pas cet algorithme avec $N = 4$ et compléter un tableau de suivi des variables.

Quelle est la valeur de S à la fin de l'algorithme ?

Que représente cette valeur ?

b) Expliquer à l'aide d'un cercle trigonométrique le résultat obtenu.

EXERCICE RÉSOLU

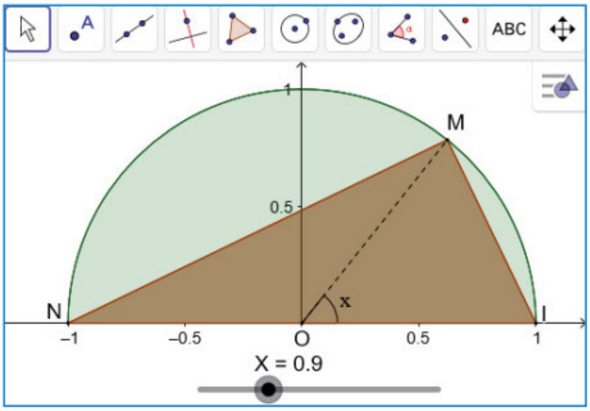
84 Déterminer un angle

Une start-up souhaite créer un logo avec un triangle rectangle inscrit dans un demi-disque de rayon 1. Le responsable marketing souhaite que ce triangle ait pour aire 0,5. Il a réalisé la figure ci-contre avec un logiciel de géométrie.

a) Réaliser cette figure où X est un curseur variant de 0 à π avec un incrément de 0,01.

Conjecturer la ou les positions des points M qui conviennent.

b) Démontrer cette conjecture.



Solution

a) Lorsqu'on déplace le curseur, on lit dans l'affichage Algèbre que l'aire du triangle IMN semble égale à 0,5 pour $X \approx 0{,}52$ rad ou $X \approx 2{,}62$ rad.

b) Dans le repère d'origine O ci-dessus, les coordonnées du point M sont $(\cos(X)\,;\,\sin(X))$.

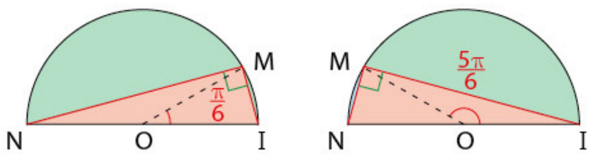
Ainsi la hauteur du triangle IMN est égale à $\sin(X)$.

Sa base étant égale à 2, son aire est $\dfrac{2 \times \sin(X)}{2}$ c'est-à-dire $\sin(X)$.

Les solutions de l'équation $\sin(X) = \dfrac{1}{2}$ dans l'intervalle $[0\,;\,\pi]$ sont les nombres réels $\dfrac{\pi}{6}$ et $\dfrac{5\pi}{6}$.

Or, $\dfrac{\pi}{6} \approx 0{,}52$ et $\dfrac{5\pi}{6} \approx 2{,}62$.

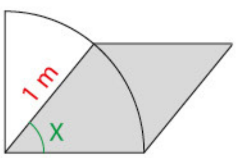
Les deux positions ci-contre du point M correspondent au logo souhaité par le responsable marketing.



À VOTRE TOUR

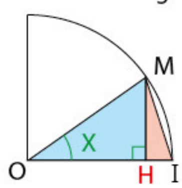
85 Mathias souhaite créer une table d'extérieur en béton dont le plateau est un losange de coté 1 m. Le poids de la table fait que l'aire de la surface du plateau doit être égale à $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ m^2.

a) À l'aide d'un logiciel de géométrie, conjecturer la mesure X, en radian, de l'angle indiqué ci-dessous.



b) Démontrer cette conjecture.

86 M est un point d'un quart de cercle de rayon OI = 1 (avec M distinct de I). Le point H est le pied de la hauteur issue de M dans le triangle OIM. On se propose de déterminer la mesure X, en radian, de l'angle $\widehat{IOM}$ pour que l'aire du triangle OHM soit égale à quatre fois celle du triangle IMH.

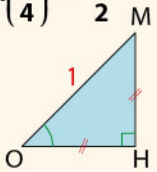


a) À l'aide d'un logiciel de géométrie, conjecturer la valeur de X recherchée.

b) Démontrer cette conjecture.

Démontrer et raisonner

87 Démontrer que $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$



a) Utiliser la figure ci-contre pour calculer la valeur exacte de OH.

b) Déterminer la mesure en radian de l'angle $\widehat{HOM}$.

c) Retrouver alors les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

88 Démontrer que deux nombres réels ont le même point image

Méthode
Pour démontrer que deux nombres réels ont le même point image, on démontre que leur différence est un multiple de 2π.

Les nombres réels $\frac{101\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}$ ont-ils le même point image sur un cercle trigonométrique ?

89 Raisonner par l'absurde

Méthode
Pour démontrer par l'absurde, on prend comme hypothèse la négation de la proposition à démontrer et on en déduit une contradiction.

x désigne un nombre réel de l'intervalle $[0\,;1]$.
Un arc de cercle a un rayon de longueur $1-x$ et un angle au centre de mesure x rad.
Démontrer que sa longueur est inférieure à 0,5.

90 Établir une égalité

a) Afficher à l'écran de la calculatrice la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (\cos(x) + 2\sin(x))^2 + (2\cos(x) - \sin(x))^2$$

b) Émettre une conjecture à partir de cette observation et la démontrer.

91 Utiliser les angles associés

a) Construire un cercle trigonométrique de centre O et placer un point M image d'un nombre réel x.

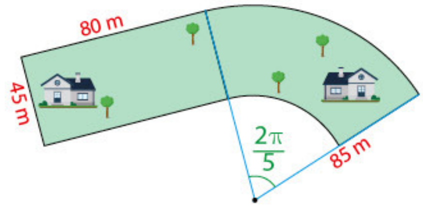
b) Construire le point N symétrique de M par rapport à O et exprimer le nombre réel associé au point N en fonction de x.

c) En déduire que, pour tout nombre réel x :

$$\cos(\pi + x) = -\cos(x) \quad \text{et} \quad \sin(\pi + x) = -\sin(x)$$

Déterminer la longueur d'un arc de cercle

92 Deux voisins comparent leur terrain. L'un est rectangulaire et l'autre est situé entre deux arcs de cercles de même centre comme sur la figure ci-dessous.



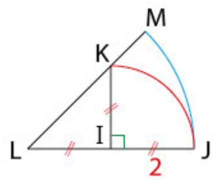
Quel terrain admet le périmètre le plus grand ?

93 a) Alice a tracé un arc de cercle de rayon 5 cm et d'angle au centre de mesure $\frac{\pi}{3}$ rad.
Quelle est la longueur de son arc de cercle ?

b) Jérôme souhaite tracer un arc de cercle de même longueur mais d'angle au centre de mesure $\frac{\pi}{4}$ rad.
Quel rayon doit-il choisir ?

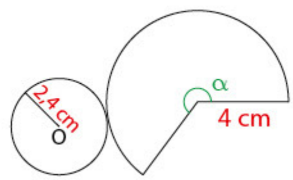
c) Déterminer les mesures en degré des deux angles au centre de ces arcs puis les tracer.

94 Rémi s'amuse à réaliser des effets d'optique. En voici un ci-contre : l'arc de cercle rouge a pour centre I et l'arc de cercle bleu a pour centre L.



Déterminer lequel de ces deux arcs est le plus long.

95 Voici le patron d'un cône de révolution. La base est un disque de rayon 2,4 cm et une génératrice mesure 4 cm.

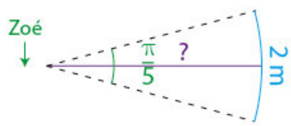


a) Déterminer le périmètre du disque de base.

b) En déduire la mesure en radian de l'angle α.

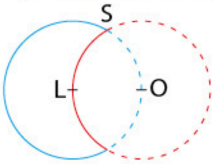
96 Un miroir vu de côté est un arc de cercle de longueur 2 m.

Zoé se situe au centre de cet arc et voit ce miroir sous un angle de mesure $\frac{\pi}{5}$ rad.



À quelle distance, en m, (indiquée ci-dessus par ?) du miroir Zoé se situe-t-elle ? *Arrondir au centième.*

97 Voici une photographie prise lors de l'éclipse totale du Soleil en Chine en 2009. On la schématise par deux cercles de même rayon $R = 696\,000$ km, dont l'un passe par le centre de l'autre.



a) Déterminer la nature du triangle SOL.
b) En déduire la mesure de l'angle $\widehat{SOL}$ en radian.
c) Déterminer la longueur, en km, de l'arc rouge. *Arrondir à l'unité.*

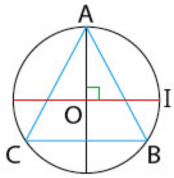
Placer des points images

98 $(O\,;I, J)$ est un repère orthonormé.
a) Placer le point A image du nombre réel $\frac{\pi}{3}$ sur un cercle trigonométrique de centre O.
b) Construire le point B symétrique du point A par rapport à la droite (OI).
Écrire un nombre réel associé au point B.
c) Construire le point C symétrique du point A par rapport à la droite (OJ).
Écrire un nombre réel associé au point C.
d) Construire le point D symétrique du point A par rapport au point O. Écrire un nombre réel associé à D.

99 $(O\,;I, J)$ est un repère orthonormé (*unité* : 4 cm).
1. a) Construire le triangle équilatéral OIB avec B d'ordonnée positive.
b) Construire le cercle $\mathscr{C}$ de centre O passant par I.
c) Construire la médiatrice du segment $[IB]$; noter C et G ses points d'intersection avec le cercle $\mathscr{C}$ ($C \in \overset{\frown}{IJ}$).
d) Construire le point F symétrique de B par rapport à la droite (OI).
e) Construire le carré OJDE où E est le symétrique de I par rapport à O et noter K le point d'intersection du segment $[OD]$ avec le cercle $\mathscr{C}$.
2. Écrire un nombre réel associé à chaque point B, C, E, F, G et K.

100 On enroule une ficelle de longueur $\frac{101\pi}{3}$ cm autour d'un bâton en forme de cylindre de rayon 1 cm. La ficelle a une épaisseur négligeable.
a) Combien de tours entiers peut-on effectuer ?
b) Quelle longueur de fil, en cm, reste-t-il à enrouler après ces tours ? *Arrondir au dixième.*

101 Voici un cercle de centre O et de rayon 1.
ABC est un triangle équilatéral inscrit dans ce cercle.



a) Déterminer la mesure, en degré, de l'angle $\widehat{AOB}$.
b) En déduire les ressources des angles $\widehat{IOB}$ et $\widehat{IOC}$.
Exprimer ces mesures en radian.
c) Quels sont les nombres réels dont les points I, A, B et C sont les images ?

102 On considère l'algorithme ci-contre.

Si $x \geqslant 0$ alors
  Tant que $x > \pi$
    $x \leftarrow x - 2\pi$
  Fin Tant que
sinon
  Tant que $x \leqslant -\pi$
    $x \leftarrow x + 2\pi$
  Fin Tant que
Fin Si

1. Quelle est la valeur de la variable x à la fin de l'algorithme lorsqu'au début celle-ci est égale à :
a) $\frac{13\pi}{3}$? **b)** $-\frac{19\pi}{6}$?
2. Quel est le rôle de cet algorithme ?

Déterminer les cosinus et sinus des nombres réels

103 Déterminer chacune des expressions suivantes :
a) $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$ **b)** $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$
c) $3\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - 8\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)$ **d)** $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)$

104 Histoire des maths Le mathématicien indien Bhaskara I (600-680) donne une approximation de $\cos(x)$ pour les nombres réels x de l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$:

$$\cos(x) \approx \frac{\pi^2 - 4x^2}{\pi^2 + x^2}$$

a) En déduire une approximation de $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.
b) La comparer avec la valeur exacte.

105 **a)** Dans un repère orthonormé d'origine O, placer les points T, I, G et R de coordonnées respectives :
$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\,;-\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}\,;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}\,;-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
b) Déterminer la mesure, en radian, de l'angle $\widehat{GOT}$.
c) En déduire la nature du quadrilatère TRIG.

106 **1. a)** Dans un repère orthonormé $(O ; I, J)$, construire le cercle trigonométrique de centre O et placer un point M image d'un nombre réel x.

b) Construire le point N symétrique de M par rapport à la droite (OI) et exprimer le nombre réel associé au point N en fonction de x.

c) En déduire $\cos(-x)$ et $\sin(-x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

2. Démontrer que, pour tout nombre réel x :

$$\cos(\pi - x) = -\cos(x) \quad \text{et} \quad \sin(\pi - x) = \sin(x)$$

107 **a)** Avec la calculatrice, tabuler la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

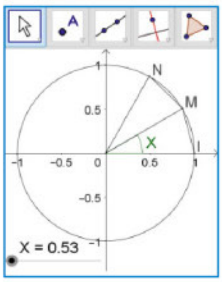
$$f(x) = (1 + \cos(x) + \sin(x))^2 - 2(1 + \cos(x))(1 + \sin(x))$$

Émettre une conjecture.

b) Démontrer cette conjecture.

108 **Tice** **1. a)** Avec un logiciel de géométrie :

- créer un cercle trigonométrique ;
- créer un curseur X variant de 0 à π avec un incrément de 0,01 ;
- placer le point $M(\cos(X) ; \sin(X))$ image du nombre réel X.



b) Placer le point $N(1 - 2\sin^2(X) ; 2\cos(X) \times \sin(X))$.

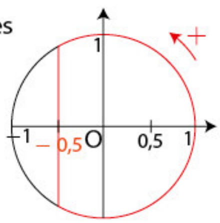
c) Faire varier X et conjecturer en fonction de X le nombre réel associé à N.

2. On admet alors que, pour tout nombre réel x :

$$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x) \text{ et } \sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x)$$

Déterminer la valeur exacte de $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ puis de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

109 **1. a)** Déterminer les nombres réels x de l'intervalle $]-\pi ; \pi]$ tels que $\cos(x) = -0{,}5$.

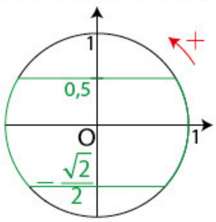


b) En déduire la longueur de l'arc de cercle rouge de la figure ci-contre. *Arrondir au centième.*

c) Donner la longueur totale du tracé rouge.

2. a) Déterminer les nombres réels x de l'intervalle $[0 ; \pi]$ tels que $\sin(x) = 0{,}5$.

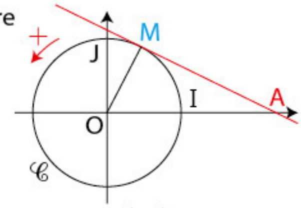
b) Déterminer les nombres réels x de l'intervalle $[-\pi ; 0]$ tels que $\sin(x) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.



c) Déterminer la longueur totale du tracé vert de la figure ci-contre. *Arrondir au centième.*

110 $(O ; I, J)$ est un repère orthonormé et $\mathscr{C}$ est le cercle trigonométrique de centre O.

M est un point de $\mathscr{C}$.



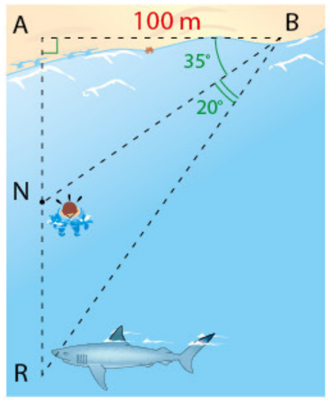
La tangente à $\mathscr{C}$ en M coupe la droite (OI) en A.

On sait que $OA = 2$.

De quel nombre réel, le point M est-il l'image ?

111 À l'aide des informations codées ci-contre, calculer la distance NR, en m, entre le nageur (N) et le requin (R).

Arrondir au centième.



S'entraîner à la logique → p. 336

112 **Quantificateurs**

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse. Justifier la réponse.

a) Il existe un unique nombre réel x tel que $\cos(x) = 0{,}7$.

b) Il existe un nombre réel x tel que $\sin(x) = 2$.

113 **Implication et réciproque**

Les affirmations suivantes sont vraies.

Qu'en est-il de chaque réciproque ?

a) Si $x \in \left[0 ; \dfrac{\pi}{4}\right]$, alors $\cos(x) \geqslant \sin(x)$.

b) Si $x = y$, alors $\cos(x) = \cos(y)$.

c) Si $x = \dfrac{\pi}{4}$, alors $\cos(x) = \sin(x)$.

114 **Contre-exemple**

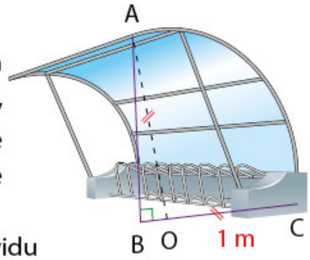
Dans chaque cas, utiliser un contre-exemple pour montrer que l'affirmation est fausse.

a) Pour tout nombre réel x, $\sin(x) = \sqrt{1 - \cos^2(x)}$.

b) Pour tout nombre réel $x \geqslant 0$, $\sin(x) \geqslant 0$.

115 Respecter les contraintes

Raisonner **Calculer**



Sur une maquette d'un range-vélos à l'échelle 1/2, l'arc $\overset{\frown}{AC}$ est un arc de cercle de centre O et de rayon 1 m.

a) On souhaite qu'un individu de 1,80 m (représenté par le segment $[AB]$) puisse passer sans se baisser sous le range-vélos en taille réelle. Déterminer la distance AB sur la maquette.

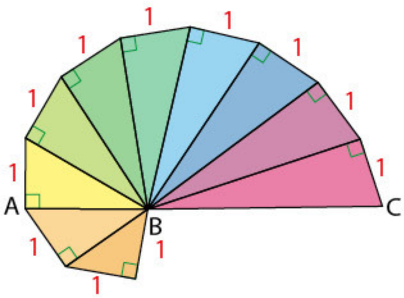
b) Déterminer le nombre réel x associé au point A en utilisant la touche sin⁻¹ ou Asn de la calculatrice.

c) En déduire la longueur, en m, de l'arc $\overset{\frown}{AC}$ sur la maquette, puis en réalité. *Arrondir au centième.*

116 Imaginer une stratégie

Chercher **Raisonner** **Calculer**

La figure ci-dessous représente une spirale de Pythagore. Les points A, B et C sont-ils alignés ?



117 Algo Prendre des initiatives

Représenter **Calculer**

On peut démontrer que la somme suivante :

$$\frac{\sin(1)}{1}+\frac{\sin(2)}{2}+\frac{\sin(3)}{3}+\ldots+\frac{\sin(N)}{N}$$

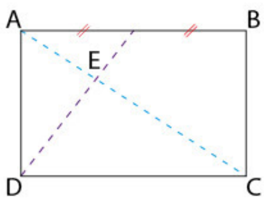
se rapproche de $\dfrac{\pi-1}{2}$ quand N devient de plus en plus grand. Écrire un programme en langage Python permettant d'approcher le nombre π.

118 Critiquer une affirmation

Problème ouvert

Représenter **Calculer**

Marc affirme : « Lorsqu'on plie une feuille au format A4, c'est-à-dire de largeur 21 cm et de longueur 29,7 cm, suivant les traits en pointillés, on obtient un angle droit. » A-t-il raison ?



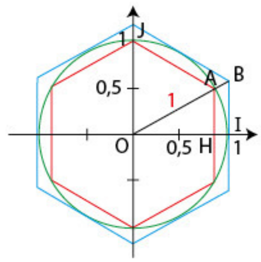
119 Algo Approximer π : méthode d'Archimède

Chercher **Représenter** **Calculer**

La méthode d'Archimède consiste à encadrer le cercle de rayon 1 par deux polygones réguliers dont on peut calculer le périmètre. En doublant le nombre de côtés à chaque étape, les deux polygones se confondent petit à petit avec le cercle, leur périmètre donne alors une bonne approximation de 2π.

6 côtés 12 côtés 24 côtés

1. Cas du polygone régulier à 6 côtés.



a) Justifier que le point A du cercle trigonométrique de centre O est l'image de $\dfrac{\pi}{6}$.

b) Déterminer les distances AH et BI.

c) Déterminer les demi-périmètres des polygones rouge et bleu. En déduire un premier encadrement de π.

2. Doublement du nombre de côtés.

On note u et v les demi-périmètres des polygones à n côtés respectivement inscrit et circonscrit au cercle.

Archimède a montré qu'alors, le demi-périmètre du polygone à $2n$ côtés circonscrit au cercle est $y=\dfrac{2uv}{u+v}$ et celui du polygone inscrit dans le cercle est $\sqrt{uy}$.

a) Compléter la fonction Archimede écrite en langage Python qui a pour paramètre un nombre entier N et renvoie un encadrement de π après N itérations de la méthode d'Archimède.

```
from math import *

def Archimede(N):
    u=
    v=
    for i in range(0, ):
        v=2*u*v/(u+v)
        u=
    return u,v
```

On initialisera u et v avec les demi-périmètres des polygones inscrit et circonscrit à 6 côtés.

b) Archimède s'est arrêté aux polygones à 96 côtés. Exécuter la fonction en saisissant Archimede(4).

c) Vérifier que les valeurs trouvées sont proches de celles d'Archimède à savoir :

$$\frac{223}{71}<\pi<\frac{22}{7}$$

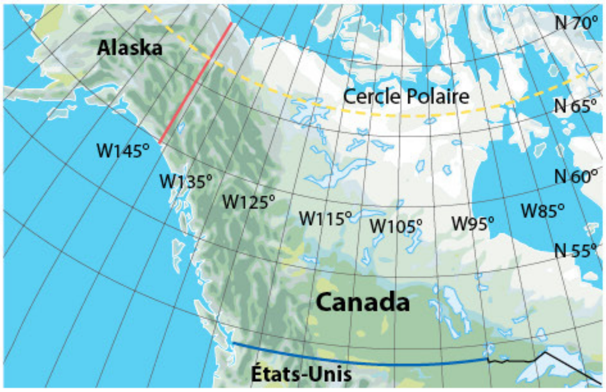
120 Déterminer la longueur d'une frontière

Chercher **Raisonner**

1. La frontière entre le Canada et l'Alaska est formée par le 141^e méridien Ouest, en rouge sur le document.

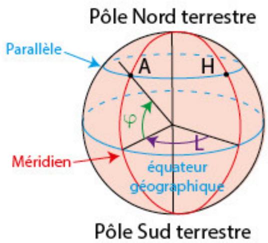
a) Par lecture sur le document, estimer combien de degrés séparent les extrémités de cette frontière.

b) Le rayon de la Terre est de 6 371 km.
Estimer la longueur, en km, de cette frontière.
Arrondir à l'unité.



2. La frontière entre le Canada et les États-Unis est également formée en partie par le 49^e parallèle Nord, en bleu sur le document précédent.

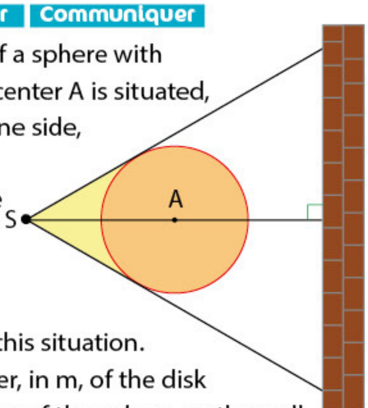
Sur la figure ci-contre, φ représente la latitude. Le 49^e parallèle Nord correspond donc à $\varphi = 49°$.
Estimer alors la longueur AH, en km, de cette frontière.
Arrondir à l'unité.



121 Determine a diameter

Raisonner **Calculer** **Communiquer**

Let A be the center of a sphere with a radius of 2 m. This center A is situated, in between, on the one side, a source of light (S) situated at a distance of 4 m, and on the other side, a wall at a distance of 4 m.
Here is a diagram of this situation.
Calculate the diameter, in m, of the disk created by the shadow of the sphere on the wall.
Round your answer to the nearest centimeter.



122 Déterminer une hauteur

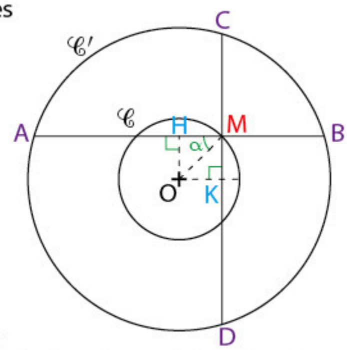
Raisonner **Calculer**

Ed voit du haut de son rocher un bateau de 7 m de long sous les angles décrits sur la figure suivante.
À quelle hauteur AB se situe Ed ? Préciser la valeur exacte, en m, puis l'arrondi au centième.

123 Tice Conjecturer puis démontrer

Représenter **Raisonner**

$\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont deux cercles de centre O, de rayons respectifs 2 cm et 5 cm.
M est un point du cercle $\mathscr{C}$.
On construit deux perpendiculaires sécantes en M qui coupent le cercle $\mathscr{C}'$ en quatre points A, B, C, D.



1. Réaliser la figure à l'aide d'un logiciel de géométrie. Émettre une conjecture sur la valeur de $AB^2 + CD^2$ lorsque M décrit le cercle $\mathscr{C}$.

2. a) Démontrer que
$$HB^2 = OB^2 - OM^2\sin^2(\alpha) \text{ où } \alpha = \widehat{HMO}.$$

b) En déduire une formule pour AB^2.

c) De même établir une formule pour CD^2. Conclure.

124 Déterminer $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$

Narration de recherche

Chercher **Communiquer**

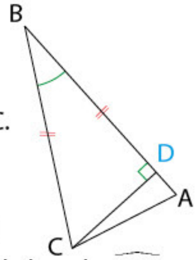
Rédiger les différentes étapes de la recherche, sans omettre les fausses pistes et les changements de méthode.

Problème À partir de la formule admise suivante, déterminer la valeur exacte de $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Formule : Pour tout nombre réel x :
$$\sin(5x) = 16\sin^5(x) - 20\sin^3(x) + 5\sin(x)$$

125 Calculer des valeurs exactes

Raisonner **Calculer**



ABC est un triangle isocèle en B tel que $BA = BC = 1$ et $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{6}$ rad.

D est le pied de la hauteur issue de C.

1. Déterminer la valeur exacte de BD, puis de AD et enfin de CD.

2. a) Calculer la valeur exacte de AC.

b) Déterminer la mesure, en radian, de l'angle $\widehat{ACD}$.

c) En déduire la valeur exacte de :

- $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$
- $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

126 Calculer une distance

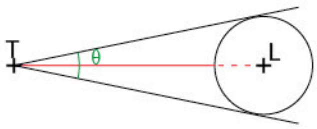
Représenter **Calculer**

On donne les informations suivantes :

- d'un point T de la Terre, la Lune est vue sous un angle $\theta = 31{,}06'$ (environ 0,5°) ;
- le rayon de la Terre est égal à 6 371 km ;
- le rayon de la Lune est égal aux $\frac{3}{11}$ du rayon de la Terre.

Déterminer la distance TL, en km, entre la Terre et la Lune.

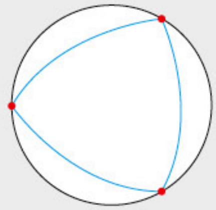
Arrondir à l'unité.



Des défis

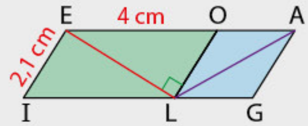
127 Des lunules

Chaque point rouge de ce cercle est le centre d'un cercle passant par les deux autres.



Démontrer que la longueur du cercle noir est $\frac{2}{\sqrt{3}}$ fois plus grande que celle du tracé bleu.

128 Oublier l'effet d'optique

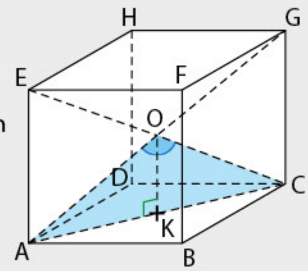


LEO est un triangle rectangle en L, OLGA est un losange et OEIL est un parallélogramme avec I, L, G alignés.

Laquelle des deux longueurs est la plus grande, LE ou LA ?

(d'après Tangente)

129 En 3D



Dans ce cube d'arête 1, on admet que le triangle EAC est rectangle en A.

Déterminer la mesure, en degré, de l'angle $\widehat{AOC}$.

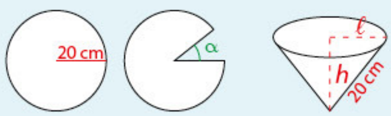
Arrondir au dixième.

OBJECTIF BAC

130 Optimiser un volume

35 min

D'après Bac 2017, Polynésie



Dans un disque en carton de rayon 20 cm, on découpe un secteur angulaire correspondant à un angle de mesure α, en radian. On superpose les bords afin de créer un cône de révolution. On souhaite choisir l'angle α pour obtenir un cône de volume maximum. On note ℓ le rayon de la base circulaire de ce cône et h sa hauteur.

On rappelle que le volume d'un cône de révolution de base un disque d'aire $\mathcal{A}$ et de hauteur h est $\frac{1}{3}\mathcal{A}h$.

a) Montrer que le volume du cône, en fonction de sa hauteur h, est $V(h) = \frac{1}{3}\pi(400 - h^2)h$.

b) Justifier qu'il existe une valeur de h qui rend le volume du cône maximum.

Donner cette valeur.

c) Comment découper le disque en carton pour avoir un volume maximum ?

Indiquer la mesure α en degré.

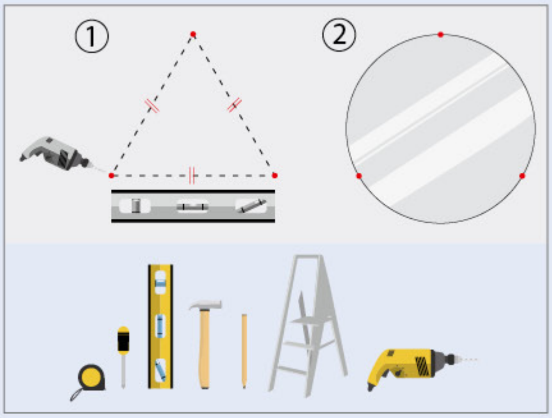
Arrondir à l'unité.

131 Prévoir un emplacement

La situation problème

Claudy souhaite accrocher un miroir circulaire au mur. Utiliser les différentes informations pour proposer une méthode d'installation.

DOC 1 Notice de montage



DOC 2 Description du produit

Profondeur (en cm)	4
Poids (en kg)	10
Diamètre (en cm)	90

132 Calculer une longueur

La situation problème

Lors d'un match de football, Alix est sur le point de tirer un coup-franc. Elle place son ballon à 16 m du poteau gauche du but et à 20 m du poteau droit. Afin d'éviter une frappe directe au but, la gardienne place son mur de joueuses de telle sorte que celui-ci masque l'angle de tir. Utiliser les différentes informations pour calculer la longueur du mur.

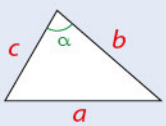
DOC 1 Règle du coup-franc

Lors d'un coup-franc, le mur de joueurs doit se situer dans un rayon de 9,15 m autour du ballon. On suppose que le mur forme un arc de cercle.

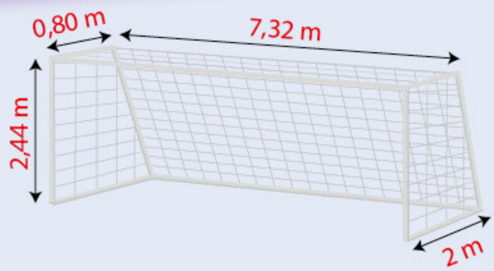
DOC 2 Formule d'Al-Kashi

Avec les notations de la figure ci-dessous :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \times b \times c \times \cos(\alpha)$$



DOC 3 Dimensions d'un but de football



133 Prévoir un coût

La situation problème

Bruno prévoit d'installer une serre de base un carré de côté 2 m dans son potager. La façade de celle-ci est en forme de voûte formée par deux arcs de cercle comme le montre le plan de face. Le toit sera recouvert d'une claie d'ombrage en lamelles de bois.
Utiliser les différentes informations pour indiquer à Bruno combien lui coûtera la couverture de son toit et s'il devra déclarer sa construction en mairie.

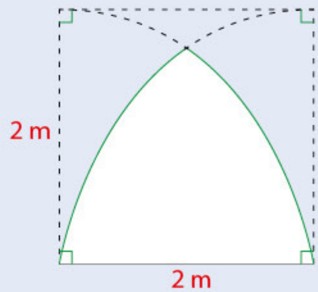
DOC 1 Prix de rouleaux de claie d'ombrage

	Largeur 1 m	Largeur 2 m
Longueur 1,5 m	120 €	280 €
Chaque longueur de 10 cm supplémentaire	+ 10 €	+ 13 €

DOC 2 Règles d'urbanisme

- Les serres de jardin dont la hauteur est inférieure à 180 cm ne nécessitent pas de formalité particulière.
- Si votre serre a une hauteur comprise entre 180 cm et 400 cm, et que sa surface au sol ne dépasse pas 2 000 m^2, vous n'avez pas besoin de permis de construire. Une simple déclaration à la mairie suffira.

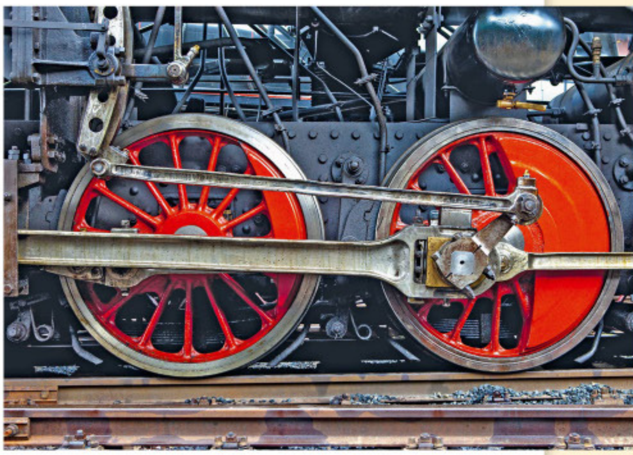
DOC 3 Plan de face



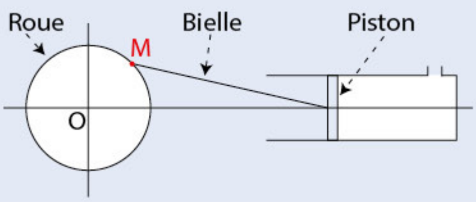
134 Déterminer un lieu

La situation problème

Un piston est relié au bord d'une roue d'un mètre de rayon par une bielle de 3 m. À l'instant initial, la bielle est à l'horizontale et le piston à sa position la plus éloignée de la roue. Au bout de 15,125 secondes, l'ensemble se bloque. Afin de repérer l'endroit où se trouve le défaut dans le cylindre, il faut connaître la distance d séparant le centre de la roue et le piston.
Utiliser les différentes informations pour déterminer d.



DOC 1 Schéma de l'ensemble



DOC 2 Réglage de la vitesse de rotation de la roue

La roue tourne dans le sens inverse des aiguilles d'une montre à la vitesse d'un tour par seconde.