11 Fonction logarithme

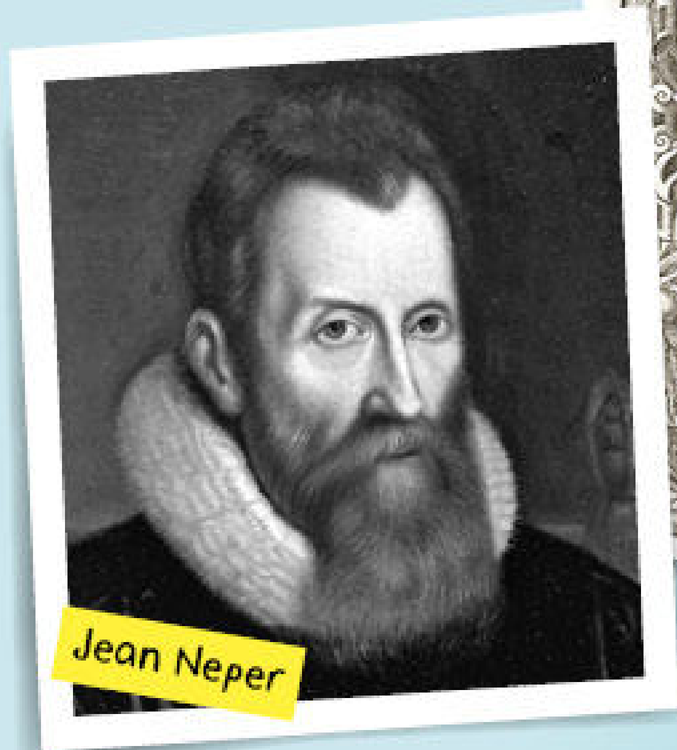
HISTOIRE DES MATHS

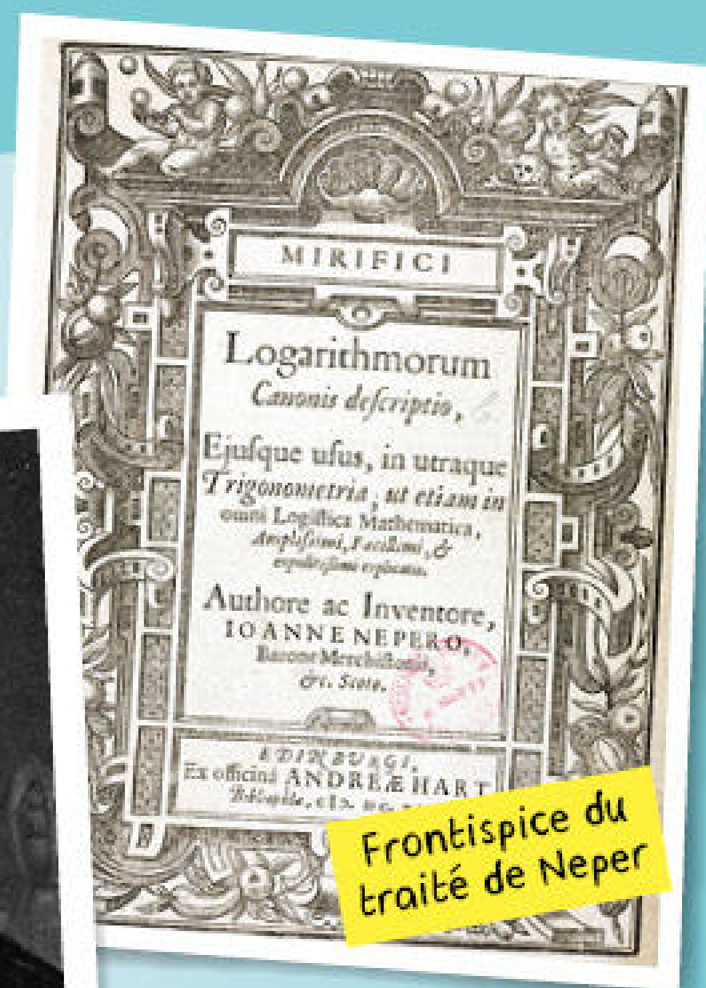
À la fin du 16e siècle, les calculs pour la navigation, les banques ou l'astronomie sont très lourds, car fondés essentiellement sur des multiplications de nombres aux très nombreux chiffres avant et après la virgule.

En 1614, **Jean Neper** publie un traité dans lequel il introduit la notion de logarithme (du grec logos, « rapport », et arithmos, « nombre ») à partir d'un exemple cinématique. Il y écrit des tables numériques à deux colonnes, où il remplace des multiplications et divisions par des additions et soustractions.

En 1617, **Henry Briggs** publie sa première table de logarithmes décimaux : 1 000 valeurs sont données avec quatorze décimales.

Vers 1905, **Bouvart** et **Ratinet** publient une table de logarithmes qui donne le logarithme décimal de nombres de 1 à 10 000. Cette table sera utilisée dans les lycées, puis remplacée par la calculatrice vers 1980.


Jean Neper



Frontispice du traité de Neper

▶ **Jean Neper** (ou **John Napier**) (1550-1617) est un mathématicien écossais, à l'origine des premières machines à calculer, avec la création de ses « bâtons ». Il est surtout connu pour son invention des logarithmes.

▶ **Henry Briggs** (1561-1630) est un mathématicien anglais. Il est le co-inventeur, avec Neper, des logarithmes décimaux.

1614 Neper introduit la notion de logarithme.

1624 Briggs publie une table de 30 000 logarithmes décimaux.

1650 Grégoire de Saint-Vincent calcule l'aire sous l'hyperbole et la relie au logarithme.

1697 Leibniz met en évidence les fonctions logarithme et exponentielle.

1610 Mort d'Henri IV et règne de Louis XIII

1648 Fin de la Guerre de Trente Ans

1670 Première représentation de *Tite et Bérénice* de Corneille

1687 Découverte par Newton de la loi de la gravitation universelle

1600 — 1625 — 1650 — 1675 — 1700

Vue d'artiste de la mission *InSight* sur Mars.

Le 25 juillet 2019, sur la planète Mars, les instruments de la sonde *InSight* ont enregistré un séisme de magnitude 3,3. Pour faciliter la comparaison entre des événements dont les amplitudes couvrent de nombreux ordres de grandeur, l'intensité du séisme est exprimée à l'aide d'une échelle logarithmique, le plus souvent l'échelle de Richter.

Les contenus et capacités travaillés dans ce chapitre

	Savoir-faire	Exercices
• Relier la fonction logarithme népérien et la fonction exponentielle. Résolution d'équations du type $\ln(u(x)) = m$ et $\ln(u(x)) = \ln(v(x))$.	1 à 6	26 à 52
• Propriétés algébriques du logarithme ; résolution d'équations et d'inéquations.	7 à 15, 24, 25	53 à 72
• Fonction dérivée du logarithme, variations, limites en 0 et $+\infty$, courbe représentative.	16 à 19	73 à 86
• Croissance comparée du logarithme népérien et de $x \mapsto x^n$ en 0 et en $+\infty$.	20, 22	87, 88, 92 à 95
• Fonctions $x \mapsto \ln(u(x))$.	21, 23	89 à 91, 96 à 105

Bien démarrer

Calcul mental

Rappels utiles

• La fonction exponentielle exp

La fonction exponentielle, notée exp, est l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\exp' = \exp$ et $\exp(0) = 1$. Donc la fonction exp est continue sur $\mathbb{R}$.

Notation : $\exp(1)$ est noté e, avec **e** $\approx$ **2,718** et pour tout réel x, $\mathbf{exp}(x) = \mathbf{e}^x$.

$e^0 = 1$ et pour tout réel x, $\mathbf{exp}'(x) = \mathbf{e}^x$.

• Propriétés algébriques de la fonction exp

Pour tous réels x et y, pour tout entier relatif n,

$$e^x > 0 \qquad e^{-x} = \frac{1}{e^x} \qquad e^{x+y} = e^x \times e^y$$

$$e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y} \qquad (e^x)^n = e^{nx}$$

$e^x = e^y$ **si, et seulement si,** $x = y$.

• Étude de la fonction exp

La fonction exponentielle est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$\exp'(x)$	$+$	
$\exp(x)$	0 $\nearrow$	$+\infty$

• Fonction dérivée de $x \mapsto \exp(u(x))$

Si u est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, alors la fonction e^u qui à x associe $\exp(u(x))$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, $(e^u)'(x) = u'(x)e^{u(x)}$.

À l'oral Questions-Tests

Pour chaque question, il y a une seule réponse exacte.

1 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x(e^x - 1).$$

Pour tout réel x, $f'(x)$ est égal à :

(1) $(x+1)e^x$ (2) $(x+1)e^x - 1$ (3) $xe^x - 1$

2 Pour tout réel x,

a) $e^{2x} \times e^{-3x}$ est égal à :

(1) e^{-6x^2} (2) $\frac{1}{e^x}$ (3) $-e^x$

b) $(e^x)^2$ est égal à :

(1) e^{2x} (2) $e^{(x^2)}$ (3) $2e^x$

c) $(e^x + e^{-x})^2$ est égal à :

(1) $e^{2x} + e^{-2x}$ (2) $e^{2x} + e^{-2x} + 2$ (3) 1

3 g est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x, $g'(x) = 3 + e^x$.

Alors, sur $\mathbb{R}$, g est :

(1) croissante (2) décroissante (3) non monotone

4 L'ensemble des solutions de l'équation $e^{2x+1} = e^{x^2+1}$ est :

(1) $\{1\}$ (2) $\{2\}$ (3) $\{0 ; 2\}$

5 g est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$g(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$$

a) La limite de g en $-\infty$ est :

(1) 0 (2) 1 (3) $+\infty$

b) La courbe représentative de g, dans un repère orthonormé, admet pour asymptote horizontale en $-\infty$ la droite d'équation :

(1) $y = 0$ (2) $x = 0$ (3) $x = 1$

6 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x^2+3}$.

a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x, $f'(x)$ est égal à :

(1) e^{x^2+3} (2) $2x\,e^{x^2+3}$ (3) $x^2e^{x^2+3}$

b) La fonction f est :

(1) croissante sur $\mathbb{R}$;

(2) croissante sur $]-\infty ; 0]$ et décroissante sur $[0 ; +\infty[$;

(3) décroissante sur $]-\infty ; 0]$ et croissante sur $[0 ; +\infty[$.

c) Sur $\mathbb{R}$, la fonction f admet :

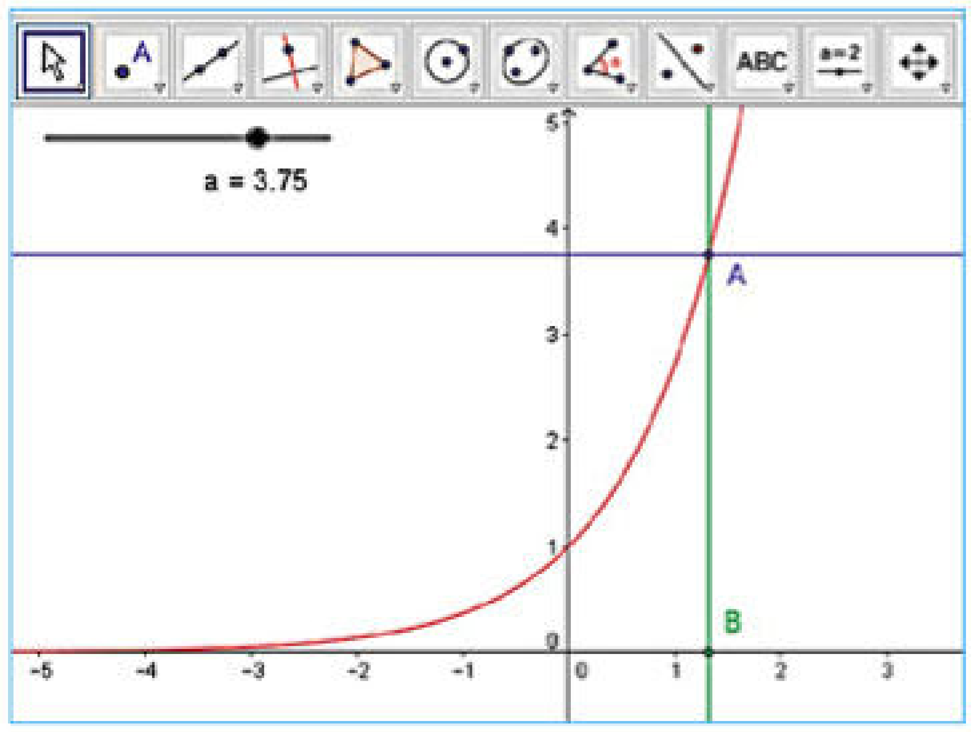
(1) un maximum égal à e^3 ;

(2) un minimum supérieur à 20 ;

(3) un minimum compris entre 0 et 20.

1 Tice Équations $e^x = a$ avec $a > 0$

On se propose d'introduire la fonction logarithme népérien à partir de la fonction exponentielle étudiée en Première.



1 **a)** Démontrer que l'équation $e^x = a$ avec $a > 0$ admet une solution unique b dans $\mathbb{R}$.
b) Par la suite, on note s la fonction qui à tout réel $a > 0$, associe la solution b.
Sur quel intervalle la fonction s est-elle définie ?
Donner la valeur exacte de $s(1)$, puis de $s(e)$. Justifier la réponse.

2 **a)** Avec un logiciel de géométrie dynamique, afficher un repère orthonormé et créer un curseur a allant de 0 à 5 avec un incrément de 0,01.
b) Créer la courbe représentative de la fonction exponentielle, la droite d'équation $y = a$ et le point d'intersection A de la courbe et de la droite.
c) Créer la droite passant par le point A, perpendiculaire à l'axe des abscisses, et le point B intersection de cette droite et de l'axe des abscisses.
d) Où lit-on $s(a)$ sur le graphique ?

3 **a)** Saisir b=x(B) et M=(a,b). Comparer les coordonnées des points A et M.
Ces deux points sont symétriques par rapport à une droite. Laquelle ?
b) Afficher la trace du point M.
Le point M se déplace sur la courbe représentative d'une fonction.
Quelle est cette fonction ?
c) Conjecturer le sens de variation de la fonction s, ainsi que ses limites en 0 et en $+\infty$.

> La fonction s est appelée **fonction logarithme népérien**, on la note **ln**.
> Ainsi, pour tout réel a strictement positif, $\ln(a)$ désigne l'unique solution de l'équation $e^x = a$.

2 Fonctionnement d'une table de logarithmes

a et b désignent deux nombres réels strictement positifs.

1 **a)** Utiliser le fait que $\ln(a)$ est la solution de $e^x = a$ pour écrire plus simplement $e^{\ln(a)}$.
b) Déterminer l'exponentielle de $\ln(ab)$, puis de $\ln(a) + \ln(b)$ et en déduire que $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.
c) Utiliser le fait que $b \times \frac{1}{b} = 1$ pour démontrer que $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)$.
En déduire que $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$.

2 **a)** Démonter par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $\ln(a^n) = n\ln(a)$.
b) En remarquant de $(\sqrt{a})^2 = a$, exprimer $\ln(\sqrt{a})$ en fonction de $\ln(a)$.

3 **a)** À l'aide de cet extrait de table de logarithmes, calculer à la main une valeur approchée de :
• $\ln(6)$ • $\ln(4)$ • $\ln(10)$ • $\ln(0{,}1)$ • $\ln(0{,}25)$
b) En utilisant la touche ln de la calculatrice, comparer les valeurs obtenues avec celles affichées par la calculatrice.

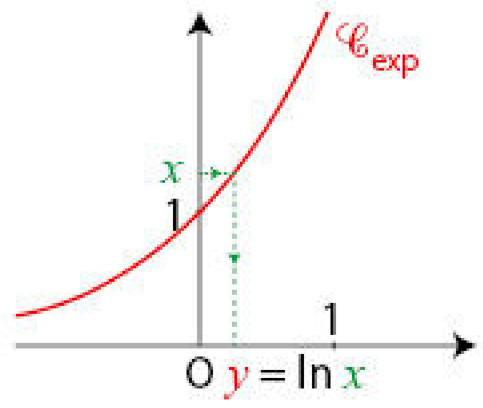
x	$\ln(x)$
1	0
2	0,693 147
3	1,098 612
4	
5	1,609 437
6	
7	1,945 910

Cours

Exercices
- **1** à **6** (ci-contre)
- **26** à **52**

1 La fonction logarithme népérien

A Liens avec la fonction exponentielle



La fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
De plus $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$, donc d'après une extension de la propriété énoncée p. 298, pour tout réel x de $]0\,;+\infty[$, il existe un unique réel y tel que $e^y = x$.

Définition

La fonction **logarithme népérien**, notée **ln**, est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ qui, à tout réel $x > 0$, associe l'unique solution de l'équation $e^y = x$ d'inconnue y. On note $y = \ln(x)$.

Conséquences : elles découlent directement de la définition précédente.

(1) Pour tout réel $x > 0$ et tout réel y, $\quad \boldsymbol{x = e^y}$ équivaut à $\boldsymbol{y = \ln(x)}$.

(2) Pour tout réel $x > 0$, $\quad \boldsymbol{e^{\ln(x)} = x}$.

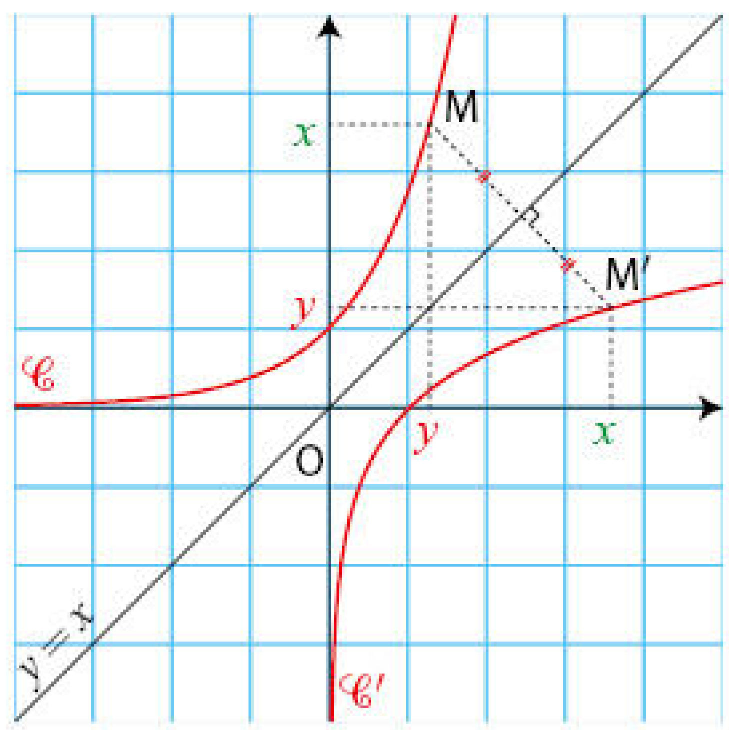
(3) Pour tout réel x, $\boldsymbol{\ln(e^x) = x}$. En effet, d'après la définition, $\ln(e^x)$ est l'unique solution de l'équation $e^y = e^x$ d'inconnue y, c'est-à-dire $y = x$.

Vidéo JaiCompris.com
Ces notions sont présentées en vidéo

(4) • $\boldsymbol{\ln(1) = 0}$ (car $e^0 = 1$) • $\boldsymbol{\ln(e) = 1}$ (car $e^1 = e$) • $\boldsymbol{\ln\left(\frac{1}{e}\right) = -1}$ $\left(\text{car } e^{-1} = \frac{1}{e}\right)$

Propriété

Dans un repère orthonormé, les courbes représentatives des fonctions exponentielle et logarithme népérien sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.



Démonstration

On note respectivement $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ les courbes représentatives des fonctions exp et ln. Pour tous réels $x > 0$ et y, dire que $M'(x\,;y)$ appartient à $\mathscr{C}'$ équivaut à $y = \ln(x)$, c'est-à-dire $x = e^y$, ce qui équivaut à dire que $M(y\,;x)$ appartient à $\mathscr{C}$.
$\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont donc symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

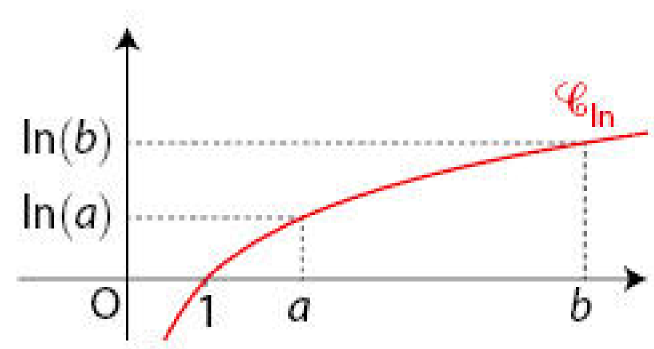
Vocabulaire : on dit que les fonctions ln et exp sont **réciproques** l'une de l'autre.

B Sens de variation de la fonction ln

Propriété

La fonction logarithme népérien est **strictement croissante** sur $]0\,;+\infty[$.

Démonstration



a et b désignent deux nombres réels tels que $0 < a < b$,
c'est-à-dire tels que $e^{\ln(a)} < e^{\ln(b)}$.
La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc :

$$\ln(a) < \ln(b).$$

Conséquences

Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$,
- $\boldsymbol{\ln(a) = \ln(b)}$ équivaut à $\boldsymbol{a = b}$; • $\boldsymbol{\ln(a) < \ln(b)}$ équivaut à $\boldsymbol{a < b}$;
- $\boldsymbol{\ln(a) > 0}$ équivaut à $\boldsymbol{a > 1}$ et $\boldsymbol{\ln(a) < 0}$ équivaut à $\boldsymbol{0 < a < 1}$.

EXERCICES RÉSOLUS

1 Résoudre des équations

Dans chaque cas, résoudre l'équation.

a) $e^x = 5$ **b)** $\ln(x) = -2$ **c)** $\ln(3x-6) = \ln(12+x)$

Solution

a) Pour tout réel x, $e^x = 5$ équivaut à $x = \ln(5)$. Donc, l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{\ln 5\}$.

b) Pour tout réel $x > 0$, $\ln(x) = -2$ équivaut à $x = e^{-2}$. Donc, l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{e^{-2}\}$.

c) On résout l'équation dans l'ensemble E des nombres réels x tels que $3x - 6 > 0$ **et** $12 + x > 0$, c'est-à-dire $x > 2$ **et** $x > -12$, soit $E =]2\,;+\infty[$.

Pour tout réel x de E, $\ln(3x-6) = \ln(12+x)$ équivaut à $3x - 6 = 12 + x$ soit $x = 9$.

$9 \in E$, donc l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{9\}$.

> Pour résoudre une équation du type $\ln(u(x)) = \ln(v(x))$:
> – on détermine l'ensemble E des nombres réels x tels que $u(x) > 0$ **et** $v(x) > 0$;
> – on résout dans E l'équation $u(x) = v(x)$.

2 Résoudre des inéquations

Dans chaque cas, résoudre l'inéquation.

a) $e^{5x} \leqslant 2$ **b)** $\ln(3x+1) > 0$ **c)** $\ln(2x) \leqslant \ln(6-x)$

Solution

a) Pour tout réel x, $e^{5x} \leqslant 2$ équivaut à $5x \leqslant \ln(2)$, c'est-à-dire $x \leqslant \frac{1}{5}\ln(2)$. Donc l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \left]-\infty\,;\frac{1}{5}\ln(2)\right]$.

b) On résout l'inéquation dans l'ensemble E des nombres réels x tels que $3x + 1 > 0$, donc $E = \left]-\frac{1}{3}\,;+\infty\right[$.

Pour tout réel x de E, $\ln(3x+1) > 0$ équivaut à $3x + 1 > e^0$, c'est-à-dire $x > 0$.

Tous ces nombres appartiennent à E, donc l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} =]0\,;+\infty[$.

> Pour résoudre une inéquation du type $\ln(u(x)) > \ln(v(x))$, on procède de la même façon que pour résoudre $\ln(u(x)) = \ln(v(x))$.

c) On résout l'inéquation dans l'ensemble E des nombres réels x tels que $2x > 0$ **et** $6 - x > 0$, c'est-à-dire $x > 0$ **et** $x < 6$ soit $E =]0\,;6[$.

Pour tout réel x de E, $\ln(2x) \leqslant \ln(6-x)$ équivaut à $2x \leqslant 6 - x$, c'est-à-dire $x \leqslant 2$.

L'ensemble des solutions est l'ensemble des réels de E inférieurs ou égaux à 2, soit $\mathcal{S} =]0\,;2]$.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 1

3 Dans chaque cas, résoudre l'équation.

a) $e^{7x} = 5$

b) $\ln(x) = 5$

c) $\ln(6x-1) = \ln(2x+17)$

4 Dans chaque cas, résoudre l'équation.

a) $4e^{3x} - 10 = 0$

b) $3\ln(x) = 7$

c) $\ln(8x) = \ln(3x-7)$

Sur le modèle de l'exercice résolu 2

Vidéo

JaiCompris.com Cet exercice est corrigé en vidéo

5 Dans chaque cas, résoudre l'inéquation.

a) $e^{3x} \leqslant 4$ **b)** $\ln(6x+1) > 2$

c) $\ln(3x) < \ln(2-5x)$

6 Dans chaque cas, résoudre l'inéquation.

a) $e^{2x+7} - 5 < 0$ **b)** $\ln(x-7) \leqslant 1$

c) $\ln(5x-2) > \ln(x-3)$

Exercices
- 7 à 15 (ci-contre)
- 53 à 72

2 Propriétés algébriques

A Relation fonctionnelle

Propriété

Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, $\quad \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.

Démonstration

a et b sont deux nombres réels strictement positifs. On note $A = \ln(ab)$ et $B = \ln(a) + \ln(b)$.
Alors $e^A = ab$ et $e^B = e^{\ln(a)+\ln(b)} = e^{\ln(a)} \times e^{\ln(b)} = ab$. Donc $e^A = e^B$, d'où $A = B$.

B Logarithme d'un inverse, d'un quotient

Propriétés

Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$:

(1) $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)$ $\qquad$ **(2)** $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$

Démonstrations

(1) Pour $b > 0$, $\quad b \times \frac{1}{b} = 1$, donc $\ln\left(b \times \frac{1}{b}\right) = 0$, c'est-à-dire $\ln(b) + \ln\left(\frac{1}{b}\right) = 0$, d'où $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)$.

(2) Pour $a > 0$ et $b > 0$, $\quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) = \ln(a) + \ln\left(\frac{1}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$.

C Logarithme d'une puissance, d'une racine carrée

Propriété

Pour tout réel $a > 0$ et pour tout entier relatif n, $\ln(a^n) = n\ln(a)$.

Démonstration

a est un nombre réel strictement positif et n un nombre entier relatif.
On pose $A = \ln(a^n)$ et $B = n\ln(a)$ alors $e^A = a^n$ et $e^B = e^{n\ln(a)} = (e^{\ln(a)})^n = a^n$.
Ainsi $e^A = e^B$ donc $A = B$.

Exemple

Pour tout réel $x > 0$, $\quad \ln(x^2) = 2\ln(x)$.

Propriété

Pour tout réel $a > 0$, $\qquad \ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$.

Démonstration

Pour $a > 0$, $(\sqrt{a})^2 = a$, donc $\ln\left((\sqrt{a})^2\right) = \ln(a)$, soit $2\ln(\sqrt{a}) = \ln(a)$, d'où $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$.

Exemple

$\ln(\sqrt{2}) - \frac{1}{3}\ln(4) = \frac{1}{2}\ln(2) - \frac{1}{3}\ln(2^2) = \frac{1}{2}\ln(2) - \frac{2}{3}\ln(2) = -\frac{1}{6}\ln(2)$

EXERCICES RÉSOLUS

7 Utiliser les propriétés algébriques de ln

Dans chaque cas, exprimer le nombre en fonction de $\ln(3)$.

a) $\ln(2)+\ln(1{,}5)$ **b)** $\ln\left(\frac{1}{9}\right)$ **c)** $\ln(63)-\ln(7)$ **d)** $\ln(81)$ **e)** $\ln(\sqrt{27})$

Solution

a) $\ln(2)+\ln(1{,}5)=\ln(2\times 1{,}5)=\ln(3)$

b) $\ln\left(\frac{1}{9}\right)=-\ln(9)=-\ln(3^2)=-2\ln(3)$

c) $\ln(63)-\ln(7)=\ln\left(\frac{63}{7}\right)=\ln(9)=\ln(3^2)=2\ln(3)$

d) $\ln(81)=\ln(9^2)=\ln((3^2)^2)=\ln(3^4)=4\ln(3)$

e) $\ln(\sqrt{27})=\frac{1}{2}\ln(27)=\frac{1}{2}\ln(3^3)=\frac{1}{2}\times 3\ln(3)=\frac{3}{2}\ln(3)$

Les égalités écrites page précédente **se lisent dans les deux sens**.
Par exemple : $\ln(ab)=\ln(a)+\ln(b)$, mais aussi $\ln(a)+\ln(b)=\ln(ab)$.

8 Démontrer une égalité

a) Démontrer que pour tout réel x, $-x+\ln(1+2e^x)=\ln(2+e^{-x})$.

b) Résoudre l'équation $-x+\ln(1+2e^x)=3$.

Solution

a) Pour tout réel x,

$-x+\ln(1+2e^x)=\ln(e^{-x})+\ln(1+2e^x)$

$-x+\ln(1+2e^x)=\ln(e^{-x}(1+2e^x))$

$-x+\ln(1+2e^x)=\ln(e^{-x}+2e^{-x+x})$

$-x+\ln(1+2e^x)=\ln(2+e^{-x})$.

b) On déduit de **a)** que résoudre l'équation $-x+\ln(1+2e^x)=3$ équivaut à résoudre $\ln(2+e^{-x})=3$ c'est-à-dire $2+e^{-x}=e^3$, soit $e^{-x}=e^3-2$.
Or $e^3-2>0$, donc $\ln(2+e^{-x})=3$ équivaut à $-x=\ln(e^3-2)$, c'est-à-dire $x=-\ln(e^3-2)$.
Donc l'ensemble des solutions est $\mathcal{S}=\{-\ln(e^3-2)\}$.

Lors de certaines transformations d'écriture, il peut être utile de remplacer un nombre réel a par $\ln(e^a)$. C'est le cas au **a)** : $-x=\ln(e^{-x})$.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 7

9 Dans chaque cas, exprimer le nombre en fonction de $\ln(2)$.

a) $\ln(5)+\ln(0{,}4)$ **b)** $\ln\left(\frac{1}{16}\right)$ **c)** $\ln(52)-\ln(13)$

d) $\ln(8)$ **e)** $\ln(\sqrt{32})$

10 Dans chaque cas, exprimer le nombre en fonction de $\ln(2)$ et $\ln(3)$.

a) $\ln(72)$ **b)** $\ln\left(\frac{9}{4}\right)$ **c)** $\ln\left(\frac{3e}{8}\right)$

11 Simplifier l'écriture de chaque nombre.

a) $\ln(e^2\sqrt{e})$ **b)** $\ln(e^3)+\ln(e^{-2})$ **c)** $\ln\left(\frac{1}{e^2}\right)$

Sur le modèle de l'exercice résolu 8

12 **a)** Démontrer que pour tout réel x,

$$x+\ln(1+3e^{-x})=\ln(3+e^x).$$

b) Résoudre l'équation $x+\ln(1+3e^{-x})=2$.

13 **a)** Démontrer que pour tout réel x,

$$4x+\ln(1+e^{-4x})=\ln(e^{4x}+1).$$

b) Résoudre l'équation $4x+\ln(1+e^{-4x})=7$.

14 Démontrer que pour tout réel $x>0$,

$$\ln(x^3)-6\ln(\sqrt{x})=0.$$

15 Démontrer que pour tout réel $x>0$,

$$\ln(2x+3)=\ln(x)+\ln\left(2+\frac{3}{x}\right).$$

Exercices
- **16** à **19** (ci-contre)
- **73** à **86**

3 Étude de la fonction ln

A Dérivabilité et continuité de ln

Propriétés

(1) La fonction ln est dérivable sur $]0\,;+\infty[$.

(2) Pour tout réel $x>0$, $\ln'(x)=\dfrac{1}{x}$.

Vidéo JAICOMPRIS.COM
La démonstration est présentée en vidéo

Démonstration

(2) f est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\mathrm{e}^{\ln(x)}=x$.
ln est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ donc f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et pour tout réel $x>0$:
$$f'(x)=\exp'(\ln x)\times\ln'(x)=\mathrm{e}^{\ln(x)}\times\ln'(x)=x\ln'(x).$$
Or $f(x)=x$, donc $f'(x)=1$. Par conséquent, pour tout réel $x>0$, $\ln'(x)=\dfrac{1}{x}$.

Remarque : la propriété **(1)** est admise.

Conséquence

La fonction ln est continue sur $]0\,;+\infty[$.

En effet, toute fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle (voir p. 292).

B Limites de ln en 0 et en $+\infty$

Propriétés

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$ **(2)** $\lim\limits_{x\to0}\ln(x)=-\infty$

Vidéo JAICOMPRIS.COM
La démonstration est présentée en vidéo

Démonstrations

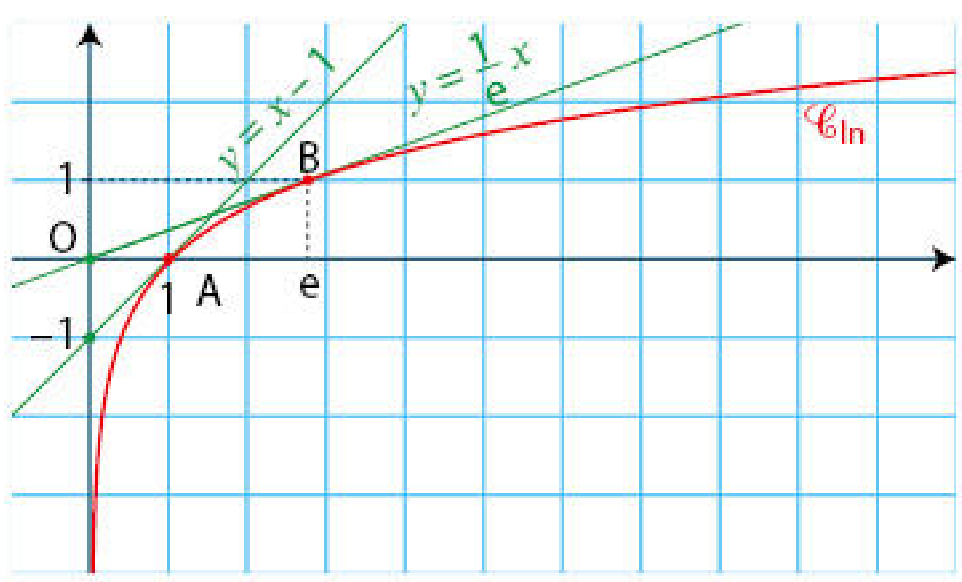
(1) Pour tout réel A, $\ln(x)>\mathrm{A}$ équivaut à $x>\mathrm{e}^{\mathrm{A}}$. Ainsi, tout intervalle $]\mathrm{A}\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs de $\ln(x)$ pour x assez grand, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$.

(2) D'après le schéma de décomposition ci-contre, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(\dfrac{1}{x}\right)=+\infty$ et $\lim\limits_{\mathrm{X}\to+\infty}-\ln(\mathrm{X})=-\infty$, donc $\lim\limits_{x\to0}\ln(x)=-\infty$.

$$x\longmapsto\underbrace{\frac{1}{x}}_{\mathrm{X}}$$
$$\mathrm{X}\longmapsto-\ln(\mathrm{X})=-\ln\left(\frac{1}{x}\right)=\ln(x)$$

C Tableau de variations et courbe représentative

x	0	$+\infty$
$\ln'(x)$	$+$	
$\ln(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$



Dans un repère orthonormé, l'axe des ordonnées est asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction ln.
Pour établir les équations des tangentes à cette courbe aux points A d'abscisse 1 et B d'abscisse e, se reporter à l'exercice **16** ci-contre.

EXERCICES RÉSOLUS

16 Déterminer une équation de tangente

Dans un repère orthonormé, $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction ln.
Déterminer une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$:
a) au point A d'abscisse 1 ; **b)** au point B d'abscisse e.

Solution

a) Une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ en A est
$y = \ln'(1)(x-1) + \ln(1)$.
Or, $\ln(1) = 0$ et $\ln'(1) = 1$
donc une équation de T est $y = x - 1$.
b) Une équation de la tangente T′ à la courbe $\mathscr{C}$ en B est
$y = \ln'(\mathrm{e})(x-\mathrm{e}) + \ln(\mathrm{e})$. Or, $\ln(\mathrm{e}) = 1$ et $\ln'(\mathrm{e}) = \frac{1}{\mathrm{e}}$
donc une équation de T′ est $y = \frac{1}{\mathrm{e}}(x-\mathrm{e}) + 1$, soit $y = \frac{1}{\mathrm{e}}x$.

> Dans un repère orthonormé, l'équation de la tangente en un point d'abscisse a à la courbe d'une fonction f est :
> $$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$
> On l'applique ici à la fonction ln avec $a = 1$, puis avec $a = \mathrm{e}$.

17 Utiliser la concavité de la fonction ln

Dans un repère orthonormé, $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction ln.
Démontrer que $\mathscr{C}$ est au-dessous de toutes ses tangentes.

Solution

La fonction ln est dérivable sur $]0\,;+\infty[$.
Pour tout réel $x > 0$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.
La fonction inverse est dérivable sur $]0\,;+\infty[$, donc la fonction ln est deux fois dérivable sur $]0\,;+\infty[$.
Pour tout réel $x > 0$, $\ln''(x) = -\frac{1}{x^2}$.
Or, pour tout réel $x > 0$, $-\frac{1}{x^2} < 0$ donc $\ln''(x) < 0$.
Donc, **la fonction ln est concave sur $]0\,;+\infty[$.**
Ainsi, la courbe $\mathscr{C}$ de ln est au-dessous de toutes ses tangentes.

> On utilise, ici, la propriété énoncée au paragraphe **B**, p. 270 : f est concave si, et seulement si, pour tout réel x de I, $f''(x) \leqslant 0$.

Remarque : pour établir que ln est concave, on peut aussi utiliser le fait que la fonction inverse, c'est-à-dire ln′, est décroissante sur $]0\,;+\infty[$ (paragraphe **A** p. 270).

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 16

18 Dans un repère orthonormé, $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction ln.
Déterminer une équation de la tangente :
a) T à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse $\frac{1}{\mathrm{e}}$;
b) T′ à la courbe $\mathscr{C}$ au point B d'abscisse e^2.

Sur le modèle de l'exercice résolu 17

19 f est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :
$$f(x) = x\ln(x).$$
Dans un repère orthonormé, $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de f.
Démontrer que $\mathscr{C}$ est au-dessus de toutes ses tangentes.

Cours

Exercices
- 20 à 23 (ci-contre)
- 87 à 105

4 Compléments sur la fonction ln

A Croissance comparée de $x \mapsto x^n$ et de ln en $+\infty$

Propriété

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

Démonstration

D'après le schéma de décomposition ci-contre : $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \frac{X}{e^X} = 0$ (d'après B p. 240), donc, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$.

$$x \longmapsto \underbrace{\ln(x)}_{X} \qquad X \longmapsto \frac{X}{e^X} = \frac{\ln(x)}{e^{\ln(x)}} = \frac{\ln(x)}{x}$$

Propriété (admise)

Pour tout entier naturel n avec $n \geqslant 1$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$.

Remarque : cette propriété se traduit souvent par « en $+\infty$, les puissances (x^n) l'emportent sur le logarithme népérien $(\ln(x))$ ».

B Croissance comparée de $x \mapsto x^n$ et de $\ln(x)$ en 0

Propriété

$$\lim_{x \to 0} x\ln(x) = 0$$

Démonstration

D'après le schéma de décomposition ci-contre : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} -\frac{\ln(X)}{X} = 0$ (d'après A), donc, $\lim\limits_{x \to 0} x\ln(x) = 0$.

$$x \longmapsto \underbrace{\frac{1}{x}}_{X} \qquad X \longmapsto -\frac{\ln(X)}{X} = -\frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = x\ln(x)$$

Propriété (admise)

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $\lim\limits_{x \to 0} x^n \ln(x) = 0$.

C Fonctions $x \mapsto \ln(u(x))$

Notation : u désigne une fonction strictement positive sur un intervalle I.
La fonction $x \mapsto \ln(u(x))$ définie sur I est notée $\ln(u)$.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, mapsto, "u"] \arrow[rr, bend right, "\ln(u)"'] & u(x) \arrow[r, mapsto, "\ln"] & \ln(u(x)) \end{tikzcd}$$

Propriété (admise)

u est une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I.

La fonction $\ln(u)$ est dérivable sur I et $(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$.

Remarque : les fonctions u et $\ln(u)$ ont le même sens de variation sur I.
En effet, $(\ln(u))'$ a le même signe que u' car u est strictement positive sur I.

EXERCICES RÉSOLUS

20 Se ramener à une limite connue

Étudier la limite en $+\infty$ de la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

a) $f(x)=x-\ln(x)$ **b)** $g(x)=\ln(x)-x^2+3x-1$

Solution

a) Pour tout réel $x>0$, $f(x)=x\left(1-\dfrac{\ln(x)}{x}\right)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{\ln(x)}{x}\right)=1$.

D'autre part $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$.

Donc, d'après la limite d'un produit, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

b) Pour tout réel $x>0$, $g(x)=x^2\left(\dfrac{\ln(x)}{x^2}-1+\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x^2}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)=0$.

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln(x)}{x^2}-1+\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)=-1$. D'autre part $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$.

Donc, d'après la limite d'un produit, $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$.

> Dans chacun des deux exemples, on remarque que la forme est indéterminée. Pour lever l'indétermination, on factorise par x ou x^2 pour faire apparaître une limite remarquable.

21 Étudier les variations d'une fonction ln(u)

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\ln(1+e^x)$.

a) Justifier que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

b) Déterminer la fonction dérivée de la fonction f.

c) Étudier le sens de variation de la fonction f.

Solution

a) La fonction ln est définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

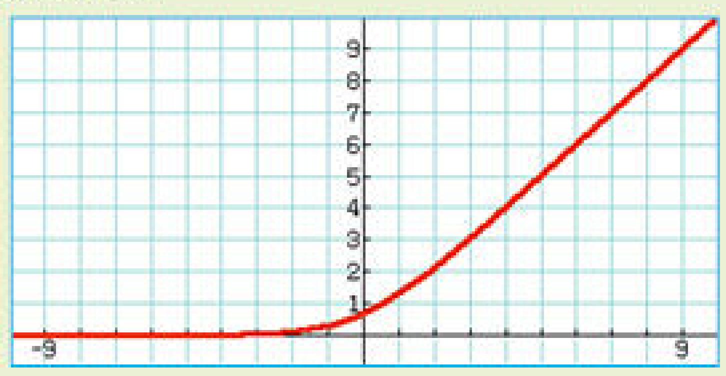
Or, pour tout réel x, $1+e^x>0$, donc la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

b) On note u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x)=1+e^x$; alors $f=\ln(u)$. La fonction u est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, $f'(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}=\dfrac{e^x}{1+e^x}$.

c) Pour tout réel x, $e^x>0$ donc $f'(x)>0$.

Ainsi, la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

> Courbe de la fonction f à l'écran de la calculatrice.
>
> 
>

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 20

22 Étudier la limite en $+\infty$ de la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

a) $f(x)=\ln(x)-2x+1$

b) $g(x)=x^2-5-2\ln(x)$

Sur le modèle de l'exercice résolu 21

23 g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x)=\ln(x^2+x+1).$$

a) Justifier que la fonction g est définie sur $\mathbb{R}$.

b) Déterminer la fonction dérivée de la fonction g.

c) Étudier le sens de variation de la fonction g.

Savoir-faire Algo python

EXERCICE RÉSOLU

24 Déterminer un seuil et résoudre une inéquation $q^n \leqslant a$

Cours 1. et 2.

On estime que le nombre de poissons d'un lac diminue de 5 % par an.
Cette population est actuellement estimée à 50 000.
On note u_n, avec $n \in \mathbb{N}$, le nombre de poissons dans le lac dans n années.
Ainsi, $u_0 = 50\,000$.

1. a) Justifier que la suite (u_n) est géométrique et préciser sa raison.

b) Pour tout entier naturel n, exprimer u_n en fonction de n.

2. La fonction ci-contre, écrite en langage Python, a pour paramètre un nombre k et renvoie le nombre d'années minimum au bout duquel le nombre de poissons dans le lac est inférieur ou égal à k.

a) Compléter les trois cases de ce programme.

b) Saisir ce programme et l'exécuter avec $k = 20\,000$.
Interpréter le résultat obtenu dans le contexte de la situation.

3. Retrouver le résultat obtenu à la question **2. b)** en résolvant une inéquation.

```
def Seuil(k):
    n=0
    u=50000
    while [    ]:
        n=[    ]
        u=[        ]
    return n
```

Solution

1. a) Diminuer une quantité de 5 % revient à la multiplier par $1 - \dfrac{5}{100}$, c'est-à-dire par 0,95.
Donc pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}95u_n$.
La suite (u_n) est géométrique de 1er terme $u_0 = 50\,000$ et de raison $q = 0{,}95$.

b) Pour tout entier naturel n, $u_n = 50\,000 \times 0{,}95^n$.

2. a) Case rouge : $u > k$ Case verte : $n + 1$ Case bleue : $0{,}95 * u$

b)
```
>>> Seuil(20000)
18
```

Le résultat obtenu signifie donc qu'au bout de 18 ans, le nombre de poissons dans le lac est, pour la première année, inférieur ou égal à 20 000.

> $u_{18} = 50\,000 \times 0{,}95^{18}$ soit $u_{18} \approx 19\,861$.
> Alors que $u_{17} \approx 20\,906$.

3. $u_n \leqslant 20\,000$ équivaut à $50\,000 \times 0{,}95^n \leqslant 20\,000$ c'est-à-dire $0{,}95^n \leqslant 0{,}4$.
La fonction ln est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$, ainsi $0{,}95^n \leqslant 0{,}4$ équivaut à $\ln(0{,}95^n) \leqslant \ln(0{,}4)$, c'est-à-dire $n\ln(0{,}95) \leqslant \ln(0{,}4)$.
Or, $0 < 0{,}95 < 1$ et $\ln(0{,}95) < 0$. Donc $u_n \leqslant 20\,000$ équivaut à $n \geqslant \dfrac{\ln(0{,}4)}{\ln(0{,}95)}$. Or, $\dfrac{\ln(0{,}4)}{\ln(0{,}95)} \approx 17{,}9$.
Donc $u_n \leqslant 20\,000$ si, et seulement si, $n \geqslant 18$.

> a et q sont des nombres strictement positifs donnés avec $q \neq 1$.
> Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'inéquation $q^n \leqslant a$ équivaut à résoudre $n\ln(q) \leqslant \ln(a)$.
> Il faut alors observer le signe de $\ln(q)$, c'est-à-dire savoir si q est plus grand ou plus petit que 1.

EXERCICE D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 24

25 Une entreprise propose un salaire annuel de 17 000 € avec une augmentation de 0,7 % par an.
On note S_n, avec $n \in \mathbb{N}$, le salaire annuel, en euro, après n années. Ainsi, $S_0 = 17\,000$.

a) Pour tout entier naturel n, exprimer S_n en fonction de n.

b) Utiliser une fonction **Seuil** écrite en langage Python pour déterminer le nombre d'années minimum au bout duquel $S_n \geqslant 19\,000$.

c) Retrouver algébriquement ce résultat.

La fonction logarithme

Cours 1

Questions flash — À l'oral

26 Louise affirme « $\ln(2)$ est un nombre inférieur à 0 ». Expliquer pourquoi Louise se trompe.

27 Donner mentalement la valeur de chaque nombre.
a) $\ln(1)$ **b)** $\ln(e)$ **c)** $\ln(e^3)$ **d)** $\ln\left(\dfrac{1}{e^2}\right)$

28 Armelle affirme : « Dans un repère le point $A(10\,;e^{10})$ appartient à la courbe représentative de la fonction exponentielle, donc le point $(-e^{10}\,;10)$ appartient à la courbe représentative de la fonction ln ».
Cette affirmation est-elle vraie ou fausse ?
Si elle est fausse, la corriger.

29 Donner mentalement la valeur de chaque nombre.
a) $e^{\ln(5)}$ **b)** $e^{2\ln(7)}$ **c)** $e^{-\ln(2)}$ **d)** $\ln(e^{-3})$

30 Résoudre mentalement chaque équation.
a) $e^x = 7$ **b)** $e^x = -5$ **c)** $\ln(x) = 5$ **d)** $\ln(x) = 0{,}5$

31 Résoudre mentalement l'inéquation $\ln(x) > 4$.

32 Dans chaque cas, écrire plus simplement :
a) $e^{\ln(3)} + e^{-\ln(5)}$ **b)** $\dfrac{e^{\ln(8)}}{e^{3\ln(2)}}$ **c)** $\dfrac{e^{1+\ln(2)}}{e^{1+\ln(3)}}$

33 Joanie affirme « Pour tout réel $x > 1$,
$$e^{\ln(x-1)+\ln(x)} = x^2 - x. »$$
A-t-elle raison ? Justifier.

Pour les exercices 34 à 36, écrire dans chaque cas l'ensemble des réels x pour lesquels l'expression a un sens.

34 **a)** $\ln(x-3)$ **b)** $\ln(2-x)$ **c)** $\dfrac{1}{\ln(x)}$

35 **a)** $\ln(x^2)$ **b)** $\ln(x^2+1)$ **c)** $\ln(x^2-1)$

36 **a)** $\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$ **b)** $\ln(x^2-3x+2)$

37 Résoudre chaque équation.
a) $e^{5x} = \dfrac{3}{2}$ **b)** $\ln(2x) = 3$ **c)** $\ln\left(\dfrac{1}{2} - x\right) = -4$

38 Résoudre chaque inéquation.
a) $e^{1-4x} \leqslant 9$ **b)** $\ln(x) < -0{,}2$
c) $\ln(4x) > 5$ **d)** $\ln(x) < 1$

Pour les exercices 39 et 40, résoudre chaque équation de la forme $\ln((u(x)) = m$.

39 **a)** $\ln(x+3) = 1$ **b)** $\ln(x+1) = -3$
c) $\ln(1-x) = 2$ **d)** $\ln(2+5x) = 0$

40 **a)** $\ln(2-5x) = 0$ **b)** $\ln(\sqrt{x}) = -1$
c) $\ln(x^2) = 9$ **d)** $\ln\left(\dfrac{1}{x^2-9}\right) = -2$

41 Résoudre chaque inéquation.
a) $\ln(-2-5x) \geqslant 4$ **b)** $\ln(2x-1) > -1$
c) $\ln(3e^x - 4) < 0$ **d)** $\ln(1-e^{-x}) \leqslant 2$

42 La température θ (en °C) d'un liquide peut être modélisée en fonction du temps t, en min, par :
$$\theta(t) = 25 - 10\,e^{0{,}1t}.$$
Donner les réponses arrondies au dixième.
a) Au bout de combien de temps la température atteindra-t-elle 12,5 °C ?
b) Au bout de combien de temps la température atteindra-t-elle 0 °C ?

43 La tension, en volt, aux bornes d'un condensateur en fonction du temps t, en ms, écoulé depuis le début de la décharge, est donné par $V(t) = 5\,000\,e^{-8{,}3t}$.
a) Quelle est la tension initiale ?
b) Au bout de combien de temps la tension initiale sera-t-elle divisée par 2 ? *Arrondir au centième.*

44 À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on a obtenu l'écran ci-dessous.

1	$\ln(2x-1) = \ln(x-5)$
	Résoudre: $\{x = -4\}$

a) Que peut-on en penser ?
b) Résoudre correctement cette équation.

Pour les exercices 45 à 47, résoudre chaque équation de la forme $\ln(u(x)) = \ln(v(x))$.

45 **a)** $\ln(3x-1) = \ln(2x)$ **b)** $\ln(2-5x) = \ln(3x+4)$

46 **a)** $\ln(x^2) = \ln(3x)$ **b)** $\ln(1-4x) = \ln(x^2-4)$

47 **a)** $\ln(x) = \ln(x^2-x)$ **b)** $\ln(-2x) = \ln(1+x^2)$

Pour les exercices 48 et 49, résoudre chaque inéquation.

48 **a)** $\ln(3+2x) > \ln(1-x)$
b) $\ln(x+2) \leqslant \ln(x^2-4)$

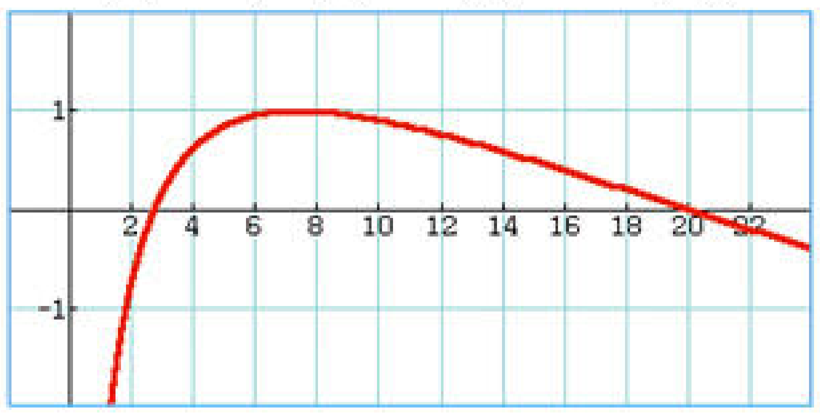
49 **a)** $(2-x)\ln(x+3) > 0$
b) $(1+\ln(x))(2-\ln(x)) \leqslant 0$

Utiliser un tableau de signes.

50 Résoudre le système :
$$\begin{cases} -\ln(x)+2\ln(y)=1 \\ 3\ln(x)-5\ln(y)=-1 \end{cases}.$$

51 Dans un repère, $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont les courbes représentatives respectives des fonctions :
$$x \mapsto \ln(x^2+9) \text{ et } x \mapsto \ln(6x).$$
a) À l'aide de la calculatrice, conjecturer la position relative des courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sur $]0\,;+\infty[$.
b) Justifier cette conjecture.

52 À l'aide de la calculatrice, on a affiché la courbe représentative de la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par
$$f(x) = (\ln(x)-1)(3-\ln(x)).$$



a) Déterminer l'abscisse de chacun des points d'intersection de cette courbe avec l'axe des abscisses.
b) Étudier le signe de la fonction f sur $]0\,;+\infty[$.

Propriétés algébriques

Cours 2

Questions flash — À l'oral

53 Numa affirme « $\ln(10)-\ln(8)-\ln(2)=0$. » A-t-il raison ? Expliquer.

54 Exprimer mentalement à l'aide de $\ln(9)$.
a) $\ln\left(\frac{1}{9}\right)$ **b)** $\ln(81)$ **c)** $\ln(3)$ **d)** $\ln(45)-\ln(5)$

55 Lire chaque égalité en la complétant.
a) $\ln(7)+\ln(8)=\ln(\ldots)$ **b)** $\ln(24)-\ln(4)=\ln(\ldots)$
c) $\ln(25)=\ldots\ln(5)$ **d)** $\ln(7)=\ldots\ln(49)$

56 Simplifier l'écriture de chaque nombre.
a) $\ln(5^8)+\ln(5^3)$ **b)** $\ln(6^{11})-\ln(6^7)$

57 Exprimer en fonction de $\ln(2)$.
a) $\ln(8)$ **b)** $\ln\left(\frac{1}{2}\right)$ **c)** $\ln(\sqrt{2})$ **d)** $\ln(40)-\ln(10)$

58 Exprimer en fonction de $\ln(5)$.
a) $\ln\left(\frac{1}{25}\right)$ **b)** $\ln(35)-\ln(7)$ **c)** $\ln(125)+\ln(\sqrt{5})$

59 Simplifier chaque expression.
$$A = \ln(567)-\ln(72)-\ln\left(\frac{7}{8}\right)+\ln\left(\frac{1}{27}\right)$$
$$B = \ln(\sqrt{135})+\ln(\sqrt{75})-\ln(\sqrt{15})-\ln(\sqrt{27})$$

60 Voici la copie d'Alisson.

$x^2-1>0$ si, seulement si, $x<-1$ ou $x>1$.
Donc pour tout $x \in]-\infty\,;-1[\cup]1\,;+\infty[$,
$\ln(x^2-1)=\ln(x+1)+\ln(x-1)$.

Alisson se trompe. Corriger son erreur.

61 Pour tout $x \in E$,
$$\ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right)=\ln(x-1)-\ln(x+2).$$
Déterminer l'ensemble E.

Pour les exercices 62 à 66, résoudre l'équation.

62 **a)** $\ln(9x)+\ln(x)=25$
b) $\ln(x+4)+\ln(2x-1)=\ln(x+10)$

63 **a)** $2\ln(x)=\ln(x+4)+\ln(2x)$
b) $\ln(x^2)=\ln(2x^2+8x)$

64 **a)** $\ln(x-2)-\ln(x-3)=1$
b) $\ln(2x-3)-2\ln(x+1)=\ln(x-3)$

65 **a)** $\ln(x)-\ln(x+1)=\ln(x-1)$
b) $\ln(5-x)-\ln 3+\ln(x-1)=0$

66 **a)** $\ln(\sqrt{3x-1})+\ln(\sqrt{x})=\ln(1-x)$
b) $2\ln(x)-\ln(x-2)=\ln(2)$

67 Résoudre chaque inéquation.
a) $\ln(x+3)<2\ln(x+1)$
b) $\ln(x-2)+\ln(x+4)\geqslant\ln(3x+2)$

Pour les exercices 68 et 69, résoudre dans $\mathbb{N}$ chaque inéquation.

68 **a)** $2^n \leqslant 10^6$ **b)** $\left(\frac{1}{5}\right)^n \leqslant 10^{-3}$

69 **a)** $\left(1+\frac{2}{100}\right)^n \geqslant 10$ **b)** $\left(1-\frac{3}{100}\right)^n < 10^{-4}$

70 (u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_0 = 4$ et de raison 1,5.
À partir de quel rang n les termes de la suite sont-ils strictement supérieurs à 10^4 ?

71 Le nombre de bactéries dans un bouillon de culture est multiplié chaque heure par 1,6.
Au bout de combien d'heures, la population de bactéries est-elle multipliée par 16 ?

72 La probabilité d'obtenir au moins un six en lançant n fois un dé non truqué est $p_n = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$.
Déterminer le nombre minimum de lancers pour que cette probabilité soit supérieure à 0,99.

Étude de la fonction ln

Cours 3

Questions flash À l'oral

73 Dans chaque cas, déterminer mentalement la fonction dérivée de la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$.
a) $f(x) = 4 - \ln(x)$ **b)** $f(x) = 3\ln(x) - 7$

74 Déterminer mentalement la dérivée de la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = (\ln(x))^2$.

75 f est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :
$$f(x) = 5 - \ln(x).$$
Étudier mentalement sa limite en 0, puis en $+\infty$.

Pour les exercices 76 et 77, déterminer la fonction dérivée de la fonction f définie sur l'intervalle I donné.

76 **a)** $f(x) = x\ln(x)$ $\quad \mathrm{I} =]0\,;+\infty[$
b) $f(x) = (\ln(x))^2 - 2\ln(x) + 1$ $\quad \mathrm{I} =]0\,;+\infty[$

77 **a)** $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$ $\quad \mathrm{I} =]0\,;+\infty[$
b) $f(x) = \dfrac{1+\ln(x)}{1-\ln(x)}$ $\quad \mathrm{I} =]0\,;\mathrm{e}[$

78 f est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :
$$f(x) = \ln(x) + x.$$
Montrer que f est croissante sur $]0\,;+\infty[$.

79 g est la fonction définie sur $[1\,;+\infty[$ par :
$$g(x) = \ln(x) - x.$$
Montrer que g est décroissante sur $[1\,;+\infty[$.

80 h est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :
$$h(x) = (\ln(x))^2 - \ln(x).$$
a) Justifier que pour tout $x > 0$, $h'(x) = \dfrac{2\ln(x) - 1}{x}$.
b) Expliquer pourquoi $h'(x)$ est du signe de $2\ln(x) - 1$.
c) Étudier le sens de variation de h.

81 k est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :
$$k(x) = \frac{1}{x} - \ln(x).$$
a) Justifier que pour tout $x > 0$, $k'(x) = \dfrac{-1-x}{x^2}$.
b) Étudier le sens de variation de k sur $]0\,;+\infty[$.

82 f est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :
$$f(x) = x - \ln(x).$$
$\mathscr{C}$ est la courbe représentative de f dans un repère.
Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse e.

83 f est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :
$$f(x) = (\ln(x))^2 - \ln(x).$$
1. Étudier la limite de f en 0.
2. a) Vérifier que l'étude de la limite de f en $+\infty$ conduit à une forme indéterminée.
b) Pour tout $x > 0$, $f(x) = \ln(x)\,(\ln(x) - 1)$.
En déduire la limite de f en $+\infty$.

84 g est la fonction définie sur $]1\,;+\infty[$ par :
$$g(x) = \frac{3+\ln(x)}{\ln(x)}.$$
1. a) Quel est le signe de $\ln(x)$ lorsque $x > 1$?
b) En déduire la limite de g en 1.
2. Expliquer pourquoi pour tout réel $x > 1$,
$$g(x) = \frac{3}{\ln(x)} + 1.$$
En déduire la limite de g en $+\infty$.

85 f est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :
$$f(x) = x^2 + 2\ln(x).$$
a) Déterminer la limite de f en 0, puis en $+\infty$.
b) Déterminer la fonction dérivée de la fonction f.
c) Dresser le tableau de variations de la fonction f.
d) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0\,;+\infty[$.
Déterminer l'arrondi au centième de α.

86 g est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :
$$g(x) = \ln(x) + \frac{\mathrm{e}}{x}.$$
a) Déterminer la fonction dérivée de la fonction g.
b) Étudier les variations de la fonction g.
c) En déduire le signe de la fonction g.

Compléments sur la fonction ln

Cours 4

Questions flash — À l'oral

87 Dans chaque cas, donner mentalement la limite en 0, puis en $+\infty$, de la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

a) $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{5x}$ **b)** $f(x)=5+x\ln(x)$

88 Dans chaque cas, dire si l'affirmation est vraie ou fausse. Expliquer.

a) $\lim\limits_{x\to 0} x^2\ln(x)=-\infty$ **b)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x^2}=0$

89 f et g sont les fonctions définies sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\ln(3x)$ et $g(x)$c= $\ln(7x)$.
Mathis affirme : « Pour tout réel $x>0$, $f'(x)=g'(x)$ ».
A-t-il raison ? Expliquer.

90 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x)=\ln(x^2+5).$$
Déterminer mentalement la fonction dérivée de f.

91 f est la fonction définie sur $\left]-\infty\,;\dfrac{1}{3}\right[$ par :
$$f(x)=\ln(1-3x).$$
a) Étudier la limite de la fonction $u : x\mapsto 1-3x$ en $-\infty$, puis en $\dfrac{1}{3}$ $\left(\text{en précisant son signe pour } x<\dfrac{1}{3}\right)$.
b) En déduire la limite de f en $-\infty$, puis en $\dfrac{1}{3}$.

92 g est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :
$$g(x)=\sqrt{x}\ln(x).$$
a) Étudier la limite de la fonction g en $+\infty$.
b) Justifier que pour tout $x>0$, $g(x)=2\sqrt{x}\ln(\sqrt{x})$.
Utiliser un schéma de décomposition pour étudier la limite de g en 0.

Pour les exercices 93 à 95, étudier la limite de la fonction f en 0, puis en $+\infty$.

93 **a)** $f(x)=\ln(x)-x^2$ **b)** $f(x)=\dfrac{x}{\ln(x)}$

94 **a)** $f(x)=x^2-3x-\ln(x)$
b) $f(x)=(e^x-1)\ln(e^x-1)$

95 **a)** $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$ **b)** $f(x)=\dfrac{x\ln(x)}{x^2+1}$

Pour les exercices 96 à 101, déterminer la fonction dérivée de la fonction f définie sur l'intervalle I.

96 $\ln\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$ $\quad$ $\mathrm{I}=]0\,;+\infty[$

97 $f(x)=\ln(x+e^{-x})$ $\quad$ $\mathrm{I}=\mathbb{R}$

98 $f(x)=\ln\left(\dfrac{x+2}{x-3}\right)$ $\quad$ $\mathrm{I}=]3\,;+\infty[$

99 $f(x)=\ln(\sqrt{1-x})$ $\quad$ $\mathrm{I}=]-\infty\,;1[$

100 $f(x)=\ln(\ln(x))$ $\quad$ $\mathrm{I}=]1\,;+\infty[$

101 $f(x)=x\ln(1+e^x)$ $\quad$ $\mathrm{I}=\mathbb{R}$

102 g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$g(x)=\ln(e^{x^2-5x}+1).$$
a) Déterminer la fonction dérivée de g.
b) Étudier les variations de la fonction g.

103 f est la fonction définie sur $\mathrm{I}=]-1\,;+\infty[$ par :
$$f(x)=\ln(x^2+4x+3).$$
a) Justifier que f est dérivable sur I.
b) Déterminer la fonction dérivée de f.
c) Étudier les variations de la fonction f sur I.

104 f est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :
$$f(x)=\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}.$$
a) Vérifier le résultat obtenu dans l'écran de calcul formel ci-contre.

1	Dérivée$\left(\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)-\dfrac{1}{x+1}\right)$
	Factoriser: $-\dfrac{1}{x\,(x+1)^2}$

b) En déduire le sens de variation de f sur $]0\,;+\infty[$.
c) Étudier la limite de la fonction f en 0, puis en $+\infty$.
d) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

Vidéo
JAICOMPRIS.COM — Cet exercice est corrigé en vidéo

105 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x)=\ln(x^2+1)-x.$$
a) Déterminer la fonction dérivée de f.
b) Étudier les variations de la fonction f.
c) Étudier la limite de f en $-\infty$.
d) On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.
Dresser le tableau de variations de la fonction f.
e) En déduire le signe de la fonction f.

106 QCM **Dans chaque cas, donner la réponse exacte sans justifier.**

		A	B	C	D
1	L'ensemble des solutions de l'inéquation $e^{2x} \leqslant 3$ est l'intervalle …	$\left]-\infty\,;\,\frac{3}{2}\right]$	$\left[0\,;\,\frac{1}{2}\ln(3)\right]$	$\left]-\infty\,;\,\frac{1}{2}\ln(3)\right]$	$\left]-\infty\,;\,\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right]$
2	L'écriture $\ln(1-2x)$ n'a de sens que lorsque x appartient à l'intervalle …	$]0\,;+\infty[$	$\left]-\infty\,;\,\frac{1}{2}\right]$	$\left]-\infty\,;\,\frac{1}{2}\right[$	$\left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$
3	L'ensemble des solutions de l'inéquation $\ln(3-x) < 1$ est l'intervalle …	$]3\,;+\infty[$	$]3-e\,;3[$	$]3-e\,;+\infty[$	$]e-3\,;+\infty[$
4	$\ln(20)-\ln(4)+\ln(25)$ est égal à…	$\ln(41)$	$3\ln(5)$	$-\ln(2\,000)$	$21\ln(5)$
5	$\ln\left(\frac{2^5}{7^3}\right)$ est égal à…	$5\ln(2)-3\ln(7)$	$\ln(10)-\ln(21)$	$2\ln(5)-7\ln(3)$	$\ln(10)+\ln(21)$
6	f est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=x\ln(x)-x$. Pour tout réel $x>0$, $f'(x)$ est égal à…	$\ln(x)$	$\frac{1}{x}-1$	$\ln(x)-1$	$1-x$
7	La limite en $+\infty$ de la fonction $x \mapsto x^2+1-\frac{\ln(x)}{x}$ est égale à…	2	0	$+\infty$	1

107 QCM **Dans chaque cas, donner la (ou les) réponse(s) exacte(s) sans justifier.**

		A	B	C	D
1	n est un nombre entier naturel. L'inégalité $\left(\frac{1}{2}\right)^n < 10^{-3}$ est vraie …	pour $n=3$	pour $n=12$	à partir de $n=9$	à partir de $n=10$
2	g est la fonction définie pour tout réel $x > -\frac{1}{2}$ par $g(x)=\ln(2x+1)$. Alors …	$g(4)=2\ln(3)$ et $g'(4)=\frac{2}{9}$	$g(1)=\ln(3)$ et $g'(1)=\frac{1}{3}$	$g(0)=0$ et $g'(0)=2$	$g(2)=\ln(5)$ et $g'(2)=\frac{4}{5}$
3	f est la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\frac{x\ln(x)-1}{x^2}$. Alors …	$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$	$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

108 Vrai/Faux **Dans chaque cas, dire si l'affirmation est vraie ou fausse en justifiant.**

1. **Affirmation** : l'ensemble des solutions de l'équation $\ln(6x-2)+\ln(2x-1)=\ln(x)$ est l'intervalle $\left]\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$.
2. **Affirmation** : la fonction $x \mapsto \ln\left(\frac{x-1}{x+3}\right)$ est croissante sur l'intervalle $]-\infty\,;-3[$.
3. **Affirmation** : pour tout réel $x>0$, $\ln(x) \leqslant x-1$.

Vérifiez vos réponses : p. 529

109 Étudier des positions relatives

Dans un repère orthonormé, $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction ln et d est la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x$.

On se propose d'étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite d.

1. Avec le signe de la différence

Lire la démonstration suivante et justifier les affirmations en vert.

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \ln(x) - \frac{1}{2}x.$$

f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et pour tout réel $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} = \frac{2-x}{2x}.$$

Sur $]0\,;+\infty[$, $f'(x)$ est du signe de $2 - x$.

D'où le tableau de variations de f sur $]0\,;+\infty[$.

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖	↗	$\ln(2)-1$	↘	

f admet un maximum en 2, donc pour tout réel $x > 0$, $f(x) \leqslant f(2)$.

Or, $\ln(2) - 1 < 0$, donc pour tout réel $x > 0$, $f(x) < 0$.

Donc la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessous de la droite d.

2. Application

Dans un repère orthonormé, $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction ln et d est la droite d'équation $y = ex - 1$.

Étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et d.

110 Lever une indétermination avec la définition d'un nombre dérivé

On se propose d'étudier la limite en 0 de la fonction $x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x}$.

a) Expliquer pourquoi l'étude de cette limite conduit à une forme indéterminée.

b) Recopier et compléter les pointillés.

La fonction ln est dérivable sur …, donc en particulier en 1.

Donc, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(\ldots)}{x} = \ln'(\ldots)$.

Or, pour tout $x > 0$, $\ln'(x) = \ldots$ donc $\ln'(1) = \ldots$

Conclusion : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \ldots$

111 Comparer deux nombres

a et b désignent deux nombres réels tels que $0 < a < b$.

On se propose de comparer les nombres $A = \ln\left(\frac{a+1}{a}\right)$ et $B = \ln\left(\frac{b+1}{b}\right)$.

a) Proposer une fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ telle que $f(a) = A$ et $f(b) = B$.

b) Étudier les variations de cette fonction f et en déduire la comparaison de A et B.

Vidéo

JAICOMPRIS.COM

Toutes les démonstrations au programme en vidéo

Liste des démonstrations :

- Calcul de la fonction dérivée de la fonction logarithme népérien.
- Limite en 0 de $x \mapsto \ln(x)$.

Conseil

Ici, on ne sait pas résoudre l'inéquation $\ln(x) - \frac{1}{2}x \geqslant 0$.

D'où l'idée de considérer la fonction $f : x \mapsto \ln(x) - \frac{1}{2}x$ et d'étudier ses variations. C'est sur le tableau de variations de f qu'on lit son signe.

Conseil

f est une fonction dérivable sur un intervalle I. $a \in \mathrm{I}$, $a + h \in \mathrm{I}$ avec $h \neq 0$.

Alors : $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$.

Connaître la fonction logarithme

112 **PARCOURS DIFFÉRENCIÉS**

Parcours 1

Résoudre l'équation $(\ln(x))^2 - \ln(x) - 6 = 0$.

Parcours 2

$(\mathbf{E})$ est l'équation $2(\ln(x))^2 - \ln(x) - 1 = 0$.

a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$2X^2 - X - 1 = 0.$$

b) Expliquer pourquoi x est solution de $(\mathbf{E})$ si, et seulement si, $\ln(x) = 1$ ou $\ln(x) = -\dfrac{1}{2}$.

c) En déduire l'ensemble des solutions de $(\mathbf{E})$.

113 Dans un repère orthonormé, $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont les courbes représentatives respectives des fonctions :

$$x \mapsto \ln(x^2 + 4) \text{ et } x \mapsto \ln(13x - 26).$$

a) À l'aide de la calculatrice, conjecturer la position relative des courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.

b) Justifier cette conjecture.

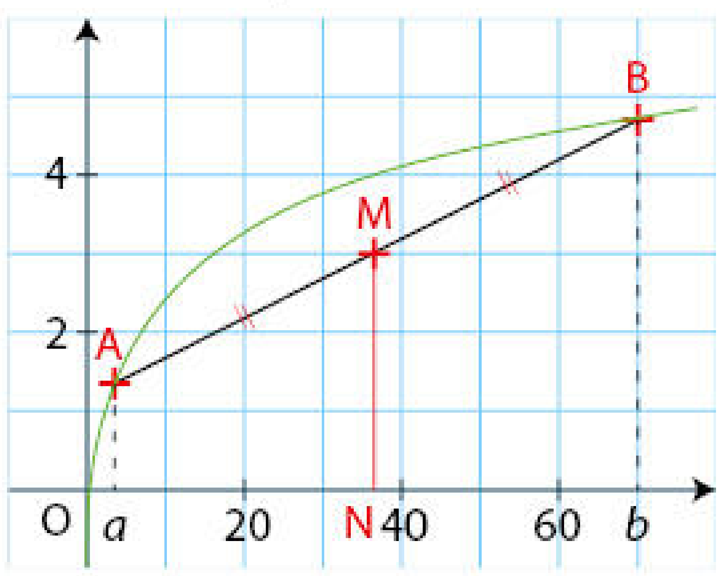
114 **a)** Résoudre l'inéquation $(\ln(x))^2 + \ln(x) > 0$.

b) $(\mathbf{I})$ est l'inéquation $2(\ln(x))^2 - 5\ln(x) - 3 > 0$.

Poser $X = \ln(x)$, résoudre une inéquation de degré 2 d'inconnue X, puis résoudre $(\mathbf{I})$.

115 Dans un repère orthonormé, A et B sont deux points de la courbe représentative de la fonction ln d'abscisses respectives a et b.

M est le milieu du segment $[AB]$ et N est le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses.



Démontrer que $MN = \ln(\sqrt{ab})$.

116 (u_n) est la suite définie par $u_0 = e^2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{e \times u_n}$.

1. Montrer par récurrence que pour tout n, $u_n > 0$.

2. (v_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \ln(u_n) - 1$.

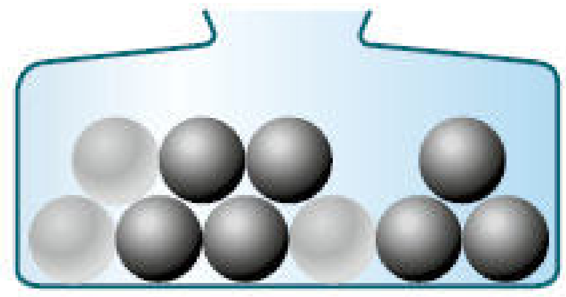
a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.

b) Exprimer v_n, puis u_n en fonction de n.

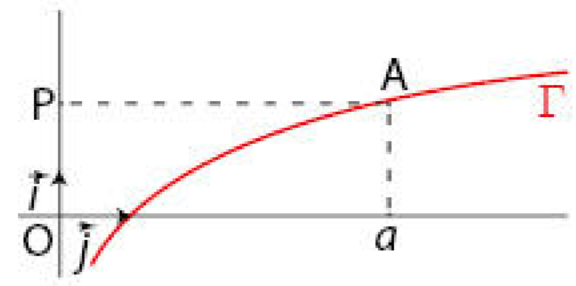
c) Étudier la limite de la suite (u_n).

117 n désigne un nombre entier naturel, $n \geqslant 1$.

On tire successivement et avec remise n boules d'une urne contenant 3 boules blanches et 7 boules noires. Combien faut-il effectuer de tirages pour que la probabilité de n'obtenir aucune boule blanche soit inférieure à 0,01 ?



118 a désigne un nombre réel strictement positif. On note A le point d'abscisse a de la courbe représentative Γ de la fonction logarithme népérien dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.



P est le projeté orthogonal du point A sur l'axe des ordonnées.

a) Q est le point d'intersection de la tangente T au point A à la courbe Γ et de l'axe des ordonnées.

Calculer la longueur PQ.

b) En déduire une construction simple de la tangente T.

Vidéo

JaiCompris.com — Cet exercice est corrigé en vidéo

119 f est la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x-1}{x}\ln(x).$$

$\mathscr{C}$ est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1. a) Étudier le sens de variation de la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = x - 1 + \ln(x)$.

b) Vérifier que $g(1) = 0$. En déduire, selon les valeurs de x, le signe de $g(x)$.

2. a) Montrer que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

b) En déduire les variations de f.

c) Étudier la limite de f en 0, puis en $+\infty$.

d) Dresser le tableau de variations de f.

120 **Algo** A est un nombre réel strictement positif.

On considère l'algorithme ci-contre.

```
Tant que 2^I ⩽ A
  | I ← I + 1
Fin Tant que
```

On suppose que la variable I contient la valeur 0 au début et la valeur 16 en fin d'exécution.

L'affirmation « $15\ln(2) \leqslant \ln(A) < 16\ln(2)$ » est-elle exacte ? Justifier.

121 Dans chaque cas, construire, dans un repère orthonormé, l'ensemble des points $M(x ; y)$ tels que :

a) $\ln(x) + \ln(y) = 0$ **b)** $\ln(y) - 2\ln(x) = 0$

Étudier des fonctions

122 **PARCOURS DIFFÉRENCIÉS**

Parcours 1

f est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :
$$f(x)=x^2-2+\ln(x).$$
Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α dans $]0\,;+\infty[$.

Parcours 2

g est la fonction définie sur $]0\,;1]$ par :
$$g(x)=\ln(x)+\sqrt{x}.$$
a) Étudier la limite de la fonction g en 0.
b) Étudier les variations de g sur $]0\,;1]$.
c) En déduire que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α dans $]0\,;1]$.

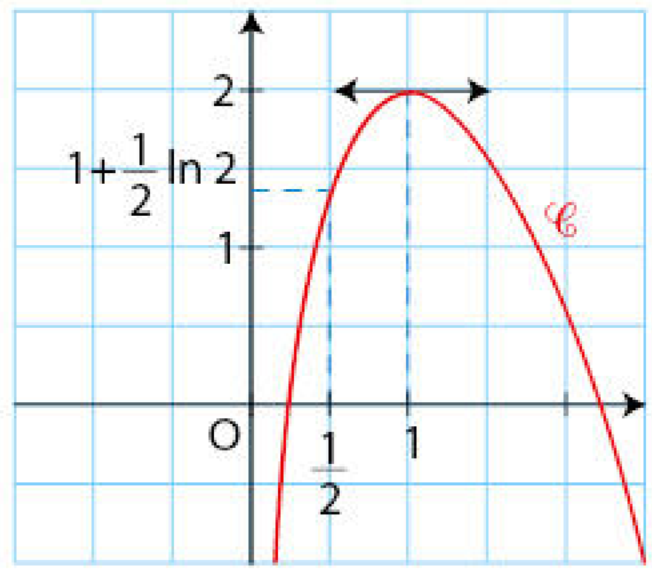
123 g est la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par :
$$g(x)=\ln(3x+1)+x-5.$$
a) Étudier la limite de la fonction g en $+\infty$.
b) Dresser le tableau de variations de la fonction g.
c) Démontrer alors que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α dans $[0\,;+\infty[$.
d) Justifier que $2<\alpha<3$.
e) Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

124 h est la fonction définie sur $]0\,;4]$ par :
$$h(x)=-4\ln(x)+\frac{1}{x}+3x-5.$$
a) Étudier la limite de h en 0.
b) Dresser le tableau de variations de la fonction h.
c) Démontrer que l'équation $h(x)=0$ admet deux solutions α et β, avec $\alpha<\beta$, dans $]0\,;4[$.
d) Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-3}.

125 Dans un repère orthonormé, $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction f définie sur $]-\infty\,;0[$ par :
$$f(x)=\ln(\mathrm{e}^{-2x}-1).$$
a) Étudier la limite de la fonction f en 0.
Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?
b) Étudier la limite de la fonction f en $-\infty$.
c) Dresser le tableau de variations de la fonction f.
d) Démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses en un unique point A.
e) Déterminer un encadrement d'amplitude 0,1 de l'abscisse de A.

126 f est la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par :
$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x=0\\ x^2(\ln(x)-1) & \text{si } x>0\end{cases}.$$
Dans chaque cas, dire si l'affirmation est vraie ou fausse et justifier.
a) f n'est pas continue en 0.
b) Le minimum de f sur $[0\,;+\infty[$ est $-\dfrac{2}{\mathrm{e}}$.

127 **1.** f est une fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :
$f(x)=ax+(bx+c)\ln(x)$
où a, b, c sont des réels. La courbe représentative $\mathscr{C}$ de f est donnée ci-contre.



Utiliser les informations données sur le graphique pour déterminer a, b, c.
2. g est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :
$$g(x)=2x+(1-3x)\ln(x).$$
a) Étudier la limite de g en 0, puis en $+\infty$.
b) Déterminer la fonction dérivée de g et étudier son signe en remarquant que $\dfrac{1-x}{x}$ et $-3\ln(x)$ ont le même signe sur $]0\,;1[$ et sur $]1\,;+\infty[$.
c) Dresser le tableau de variations de g.

128 f est la fonction définie sur $[-1\,;+\infty[$ par :
$$f(x)=1+x\ln(x+2).$$
$\mathscr{C}$ est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{i},\vec{j})$.

1. Étude des variations de la dérivée f'
a) f' désigne la fonction dérivée première de f et f'' la fonction dérivée seconde.
Calculer $f'(x)$, puis $f''(x)$ pour tout réel $x\geqslant-1$.
b) Étudier les variations de f' sur l'intervalle $[-1\,;+\infty[$.
c) Déterminer la limite de f' en $+\infty$.

2. Étude du signe de $f'(x)$
a) Montrer que dans l'intervalle $[-1\,;+\infty[$, l'équation $f'(x)=0$ admet une solution unique α appartenant à l'intervalle $]-0{,}6\,;-0{,}5[$.
b) En déduire le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.

3. Étude des variations de f
a) Étudier les variations de f sur l'intervalle $[-1\,;+\infty[$.
b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
c) Dresser le tableau de variations de f.

Connaître la fonction logarithme décimal

La fonction **logarithme décimal**, notée **log**, est la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$\log(x)=\frac{\ln(x)}{\ln(10)}.$$

129 **1. Propriétés algébriques**

a) Calculer $\log(1)$; $\log(10)$; $\log(0{,}1)$; $\log(10^n)$ où n est un nombre entier relatif.

b) a et b désignent deux nombres réels strictement positifs. Démontrer que :

• $\log(ab)=\log(a)+\log(b)$ • $\log\left(\frac{a}{b}\right)=\log(a)-\log(b)$

2. Étude et représentation graphique

a) Dresser le tableau de variations de la fonction log.

b) Tracer la courbe représentative de la fonction log dans un repère orthonormé, ainsi que ses tangentes aux points d'abscisses 1 et 10.

130 Le niveau d'intensité sonore, en décibel (dB), d'un son d'intensité I est $S=10\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$, où I_0 est l'intensité du seuil d'audibilité pour l'oreille humaine.

a) Une conversation a une intensité de $10^6 I_0$ dB.
Quel est son niveau d'intensité sonore ?

b) Le niveau sonore atteint lors d'un concert est 100 dB. Calculer $\frac{I}{I_0}$.

131 La magnitude d'un séisme d'amplitude maximum A est mesurée sur l'échelle Richter par $M=\log\left(\frac{A}{A_0}\right)$, où A_0 est une amplitude de référence.

a) Déterminer la magnitude sur l'échelle de Richter des séismes suivants :

• Barcelonnette (France 2014), $A=2\times10^5\,A_0$;

• Tohoku (Japon 2011), $A=1{,}26\times10^9\,A_0$.

b) À quelle amplitude correspond la magnitude 6,2 atteinte par le tremblement de terre qui s'est produit à Amatrice, en Italie, au mois d'août 2016 ?

132 L'acidité d'une solution aqueuse est mesurée par son pH défini par $pH=-\log[H_3O^+]$ où $[H_3O^+]$ désigne le nombre de moles par litre d'ions H_3O^+.

a) Quel est le pH d'une solution contenant 6×10^{-5} mole par litre de H_3O^+ ? *Arrondir au dixième.*

b) Le pH d'un jus de citron est 2,4.
Quel est le nombre de moles d'ions H_3O^+ dans un litre de jus de citron ?

c) Comment varie le pH lorsque la concentration en H_3O^+ double ?

133 Le gain, en décibel (dB), d'une antenne parabolique de 1 m de diamètre peut se calculer par la formule :

$$G=20\log(7{,}4\times10^{-9}f)$$

où f est la fréquence d'utilisation, en hertz (Hz).

a) Calculer le gain de l'antenne pour une fréquence d'utilisation de 9×10^9 Hz. *Arrondir au centième.*

b) À partir de quelle fréquence peut-on utiliser une telle antenne sachant que le gain doit être supérieur ou égal à 20 dB ? *Arrondir à 10^7 Hz.*

134 Le nombre $N=2^{82\,589\,933}-1$ est le plus grand nombre premier connu depuis décembre 2018.

a) Exprimer $\log(N+1)$ en fonction de $\log(2)$.

b) Déterminer, à l'aide de la calculatrice, la partie entière de $\log(N+1)$.

c) En déduire l'encadrement :

$$10^{24\,862\,047}<2^{82\,589\,933}<10^{24\,862\,048}$$

d) Indiquer le nombre de chiffres de l'écriture décimale de N.

S'entraîner à la logique → p. 525

135 **Quantificateurs**

Chacune des propositions suivantes est-elle vraie ou fausse ? Justifier la réponse.

a) Pour tout réel $x>0$, $\ln(x)<100$.

b) Pour tout réel $x>0$, $\ln(x)\leqslant x$.

c) Il existe un unique réel $x>0$ tel que :

$$\ln(x)=-100.$$

d) Il existe un réel $x>0$ tel que $\ln(x)\geqslant10^{10}$.

136 **Implication et réciproque**

x désigne un nombre réel strictement positif.

a) La proposition « Si $\ln(x^2)=2$, alors $(\ln(x))^2=1$ » est-elle vraie ?

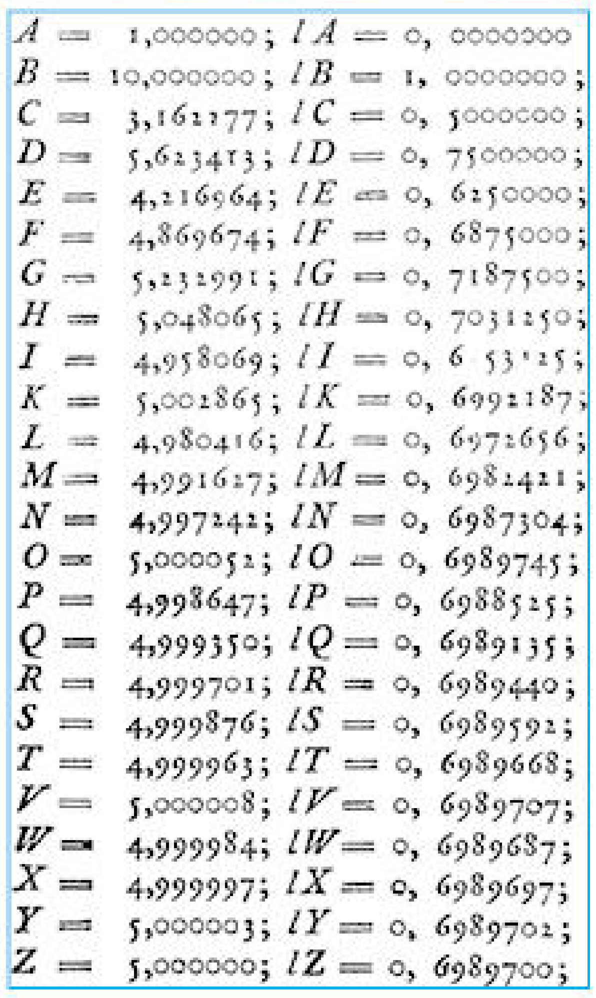
b) Sa réciproque est-elle vraie ?

137 L'ALGORITHME DE BRIGGS

Algo python

En 1624, Henry Briggs, dans son grand-œuvre *Arithmetica Logarithmica*, calcule (à la main) le logarithme décimal de 30 000 entiers (de 1 à 20 000 et de 90 001 à 100 000) avec 14 décimales.

Objectif
On se propose de mettre en place un algorithme utilisant les procédés de calcul de Briggs.



A	=	1,000000;	lA	=	0, 0000000
B	=	10,000000;	lB	=	1, 0000000;
C	=	3,162277;	lC	=	0, 5000000;
D	=	5,623413;	lD	=	0, 7500000;
E	=	4,216964;	lE	=	0, 6250000;
F	=	4,869674;	lF	=	0, 6875000;
G	=	5,232991;	lG	=	0, 7187500;
H	=	5,048065;	lH	=	0, 7031250;
I	=	4,958069;	lI	=	0, 6 53125;
K	=	5,002865;	lK	=	0, 6992187;
L	=	4,980416;	lL	=	0, 6972656;
M	=	4,991627;	lM	=	0, 6982421;
N	=	4,997242;	lN	=	0, 6987304;
O	=	5,000052;	lO	=	0, 6989745;
P	=	4,998647;	lP	=	0, 6988525;
Q	=	4,999350;	lQ	=	0, 6989135;
R	=	4,999701;	lR	=	0, 6989440;
S	=	4,999876;	lS	=	0, 6989592;
T	=	4,999963;	lT	=	0, 6989668;
V	=	5,000008;	lV	=	0, 6989707;
W	=	4,999984;	lW	=	0, 6989687;
X	=	4,999997;	lX	=	0, 6989697;
Y	=	5,000003;	lY	=	0, 6989702;
Z	=	5,000000;	lZ	=	0, 6989700;

1. L'algorithme de Briggs expliqué par Euler

Dans *Introduction à l'analyse infinitésimale* (1748), Euler explique la méthode de Briggs pour calculer une valeur approchée de log(5). Voici ses calculs.

La colonne de gauche est initialisée par $A = 1$ et $B = 10$; la colonne de droite par $\ell A = \log(1) = 0$ et $\ell B = \log(10) = 1$.

La méthode de Briggs s'appuie sur la relation que l'on écrit de nos jours : $\log(\sqrt{AB}) = \frac{1}{2}(\log(A) + \log(B))$ pour poursuivre les calculs.

Dans la colonne de gauche $C = \sqrt{AB}$ et dans la colonne de droite $\ell C = \frac{1}{2}(\ell A + \ell B)$.

a) Vérifier les valeurs de C et ℓC.

b) On donne ci-dessous l'algorithme de Briggs pour calculer $\log(x)$ où x désigne un nombre entier naturel tel que $1 < x < 10$.

On initialise l'algorithme avec les valeurs de A, B, ℓA, ℓB indiquées ci-dessus et il donne ℓB en sortie.

Recopier ce tableau et le compléter en exécutant l'algorithme pas à pas avec $x = 5$.

Utiliser la calculatrice et vérifier les valeurs de D et E obtenues par Euler.

A	B	ℓA	ℓB	$\sqrt{AB}$	$\lvert B - 5\rvert > 10^{-5}$
1	10	0	1	3,162 277	Faux

Tant que $|B - x| > 10^{-5}$
  Si $\sqrt{AB} \leqslant x$ alors
    $A \leftarrow \sqrt{AB}$
    $\ell A \leftarrow \dfrac{\ell A + \ell B}{2}$
  sinon
    $B \leftarrow \sqrt{AB}$
    $\ell B \leftarrow \dfrac{\ell A + \ell B}{2}$
  Fin Si
Fin Tant que

2. Une fonction en langage Python

a) Traduire cet algorithme par une fonction **Briggs**, de paramètres x et p, écrite en langage Python où p est l'entier naturel non nul de la condition $|B - x| > 10^{-p}$.

b) Exécuter **Briggs(5,7)** et comparer à la valeur de ℓZ obtenue par Euler.

c) Utiliser cette fonction pour déterminer une valeur approchée à 10^{-14} près de log(62).

Pour cela initialiser avec $A = 10$, $B = 100$, $\ell A = 1$, $\ell B = 2$.

HISTOIRE DES MATHS

Lorsqu'il découvre les travaux de Neper sur le logarithme, en 1615, Briggs est émerveillé ! Pendant l'été, il entreprend un long voyage pour rencontrer Neper à Edimbourg, en Écosse. Au cours de leurs échanges, Briggs convainc Neper de l'intérêt du logarithme en base 10.

138 ÉTUDE D'UNE ÉQUATION Tice

Problème : existe-t-il des nombres entiers naturels non nuls n et p différents tels que $n^p = p^n$?

Objectif
On se propose de conjecturer avec le tableur, puis de résoudre ce problème à l'aide de la fonction logarithme népérien.

1. Avec le tableur

a) Réaliser la feuille de calcul ci-dessous en inscrivant les valeurs de n de 1 à 20 en colonne A, les valeurs de p de 1 à 20 en ligne 1, en saisissant la formule =$A2^B$1-B$1^$A2 en cellule B2 et en étendant cette formule dans la plage B2:U21.

	A	B	C	D	E	F
1		**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
2	**1**	0	-1	-2	-3	-4
3	**2**	1	0	-1	0	7
4	**3**	2	1	0	17	118
5	**4**	3	0	-17	0	399
6	**5**	4	-7	-118	-399	0
7	**6**	5	-28	-513	-2800	-7849
8	**7**	6	-79	-1844	-13983	-61318
9	**8**	7	-192	-6049	-61440	-357857
10	**9**	8	-431	-18954	-255583	-1894076
11	**10**	9	-924	-58049	-1038576	-9665625

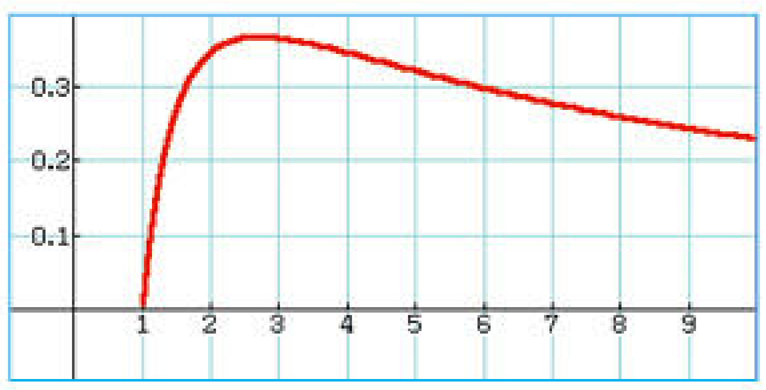
b) Lire les valeurs de n et p solutions du problème.

2. Avec une fonction

a) Expliquer pourquoi pour tous entiers naturels $n \geqslant 1$ et $p \geqslant 1$, $n^p = p^n$ équivaut à :

$$\frac{\ln(n)}{n} = \frac{\ln(p)}{p}.$$

b) On note f la fonction définie sur $[1\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$. Voici sa courbe représentative affichée à l'écran de la calculatrice.



Déterminer la fonction dérivée de f, étudier son signe et dresser le tableau de variations de f en précisant la valeur exacte du maximum et la limite en $+\infty$.

c) p désigne un nombre entier naturel, $p \geqslant 1$.

- On note $\lambda = \dfrac{\ln(p)}{p}$. Expliquer pourquoi $\lambda \in \left[0\,;\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right]$.
- Expliquer pourquoi lorsque $p = 1$, il n'existe pas de solution dans l'intervalle $[\mathrm{e}\,;+\infty[$ de l'équation $f(x) = \lambda$.
- On suppose $p > 1$. Expliquer pourquoi l'équation $f(x) = \lambda$ admet une unique solution a dans $[1\,;\mathrm{e}]$ et une unique solution b dans $[\mathrm{e}\,;+\infty[$.

d) Quels sont les nombres entiers naturels de l'intervalle $[1\,;\mathrm{e}]$?

En déduire les nombres entiers naturels distincts tels que $\dfrac{\ln(n)}{n} = \dfrac{\ln(p)}{p}$.

3. Conclusion

Quels sont les nombres entiers naturels non nuls et distincts n et p tels que $n^p = p^n$?

139 Prendre des initiatives

Représenter Raisonner Calculer

f et g sont les fonctions définies sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = x\ln(2) \text{ et } g(x) = 2\ln(x).$$

Déterminer la position relative des courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthonormé.

140 Imaginer une stratégie

Raisonner Calculer

Démontrer que, pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$:

$$\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geqslant \frac{1}{2}(\ln(a) + \ln(b)).$$

141 Find an intersection

Calculer Communiquer

Where does the graph of $x \mapsto \ln(x) - \ln(7-x) + 2$ cross the x-axis ?

142 Minimiser une distance

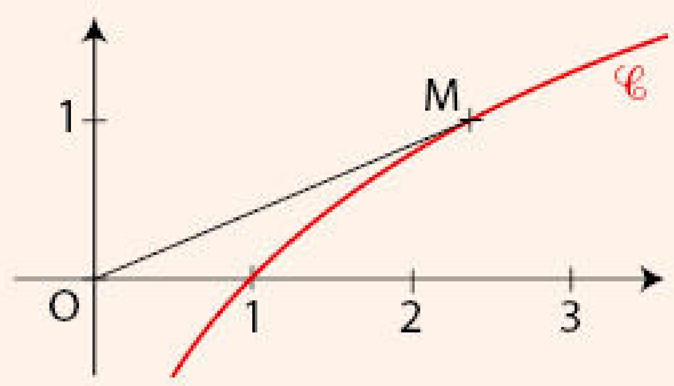
Narration de recherche

Chercher Raisonner Communiquer

Rédiger les différentes étapes de la recherche, sans omettre les fausses pistes et les changements de méthode.

Problème

Dans un repère orthonormé, voici la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction ln.



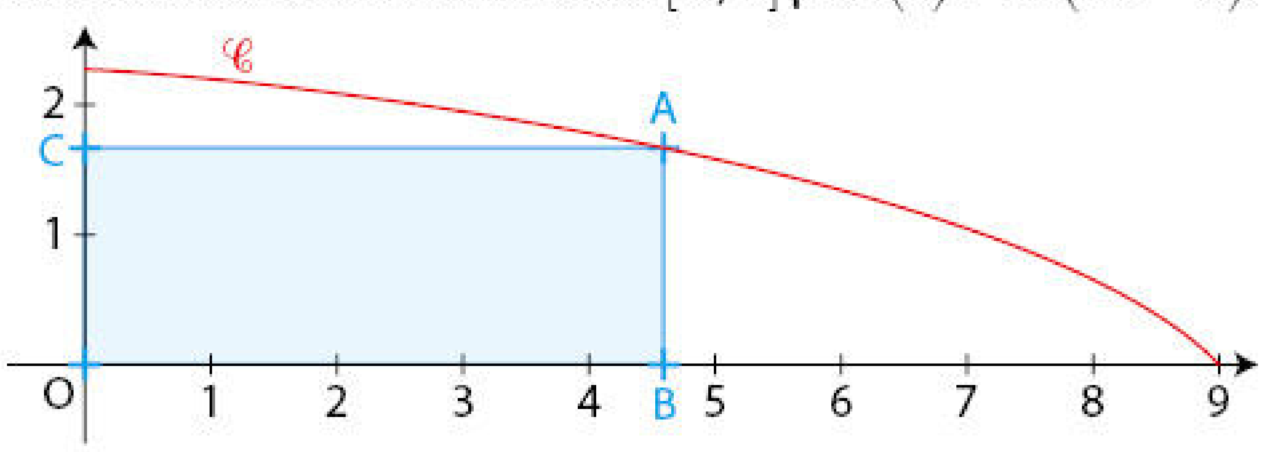
En quel point M de $\mathscr{C}$, la distance OM est-elle minimum ?

143 Maximiser une aire

Problème ouvert

Chercher Raisonner

Dans un repère orthonormé, $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction f définie sur $[0\,;9]$ par $f(x) = \ln(10-x)$.



A est un point de la courbe $\mathscr{C}$.

B et C sont les projetés orthogonaux respectifs du point A sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées.

Déterminer la position du point A de $\mathscr{C}$ pour que l'aire du rectangle OBAC soit maximum.

144 Algo python Étudier une limite

Chercher Raisonner Calculer

(v_n) est la suite définie par $v_1 = \ln(2)$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$v_{n+1} = \ln(2 - e^{-v_n}).$$

On admet l'existence de cette suite.

On définit la suite (S_n) en posant pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$S_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n.$$

On se propose d'étudier la limite de la suite (S_n).

1. Conjecture avec Python

a) Voici une fonction **Somme** écrite en langage Python qui renvoie la valeur de S_n pour une valeur n du paramètre.

```
from math import *

def Somme(n):
    v=log(2)
    S=log(2)
    for k in range(    ):
        v=
        S=
    return S
```

En langage Python, la fonction logarithme népérien ln est notée log et la fonction logarithme décimal log est notée log10.

Compléter chacune des cases colorées du programme.

b) Saisir ce programme et l'exécuter pour compléter ce tableau après l'avoir recopié.

n	10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000
S_n						

c) Émettre une conjecture concernant le comportement de la suite (S_n).

2. Étude d'une suite auxiliaire

(u_n) est la suite définie, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, par $u_n = e^{v_n}$.

a) Vérifier que $u_1 = 2$ et que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n}.$$

b) Calculer u_2, u_3 et u_4. *Donner les résultats sous forme fractionnaire.*

c) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$u_n = \frac{n+1}{n}.$$

3. Étude de la suite (S_n)

a) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, exprimer v_n en fonction de u_n, puis v_n en fonction de n.

b) Vérifier que $S_3 = \ln(4)$.

c) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, exprimer S_n en fonction de n.

En déduire la limite de la suite (S_n).

145 Étudier les solutions d'une équation

60 min

D'après Bac, Antilles-Guyane 2017

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel strictement positif.
Le but de l'exercice est d'étudier l'équation d'inconnue le nombre réel strictement positif x,

$$(\mathbf{E}_n) : \frac{\ln(x)}{x} = \frac{1}{n}.$$

Partie A

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$.

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
On a donné en **annexe**, qui n'est pas à rendre, la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f dans un repère orthogonal.
Étudier les variations de la fonction f. Déterminer son maximum.

> **Guide de résolution**
> **A.** Les limites en 0 et en $+\infty$ ne sont pas demandées par l'énoncé.

Partie B

1. Montrer que, pour $n \geqslant 3$, l'équation $f(x) = \dfrac{1}{n}$ possède une unique solution sur $[1 ; \mathrm{e}]$ notée α_n.

2. D'après ce qui précède, pour tout entier $n \geqslant 3$, le nombre réel α_n est solution de l'équation $(\mathbf{E}_n)$.

a) Sur le graphique sont tracées les droites D_3, D_4 et D_5 d'équations respectives $y = \dfrac{1}{3}$, $y = \dfrac{1}{4}$, $y = \dfrac{1}{5}$. Conjecturer le sens de variation de la suite (α_n).

b) Comparer, pour tout entier $n \geqslant 3$, $f(\alpha_n)$ et $f(\alpha_{n+1})$.
Déterminer le sens de variation de la suite (α_n).

c) En déduire que la suite (α_n) converge. *Il n'est pas demandé de calculer sa limite.*

> **Guide de résolution**
> **2. b)** Pour déterminer le sens de variation de la suite (α_n), on peut raisonner par l'absurde en supposant $\alpha_n \leqslant \alpha_{n+1}$.

3. On admet que, pour $n \geqslant 3$, l'équation $(\mathbf{E}_n)$ possède une autre solution β_n telle que $1 \leqslant \alpha_n \leqslant \mathrm{e} \leqslant \beta_n$.

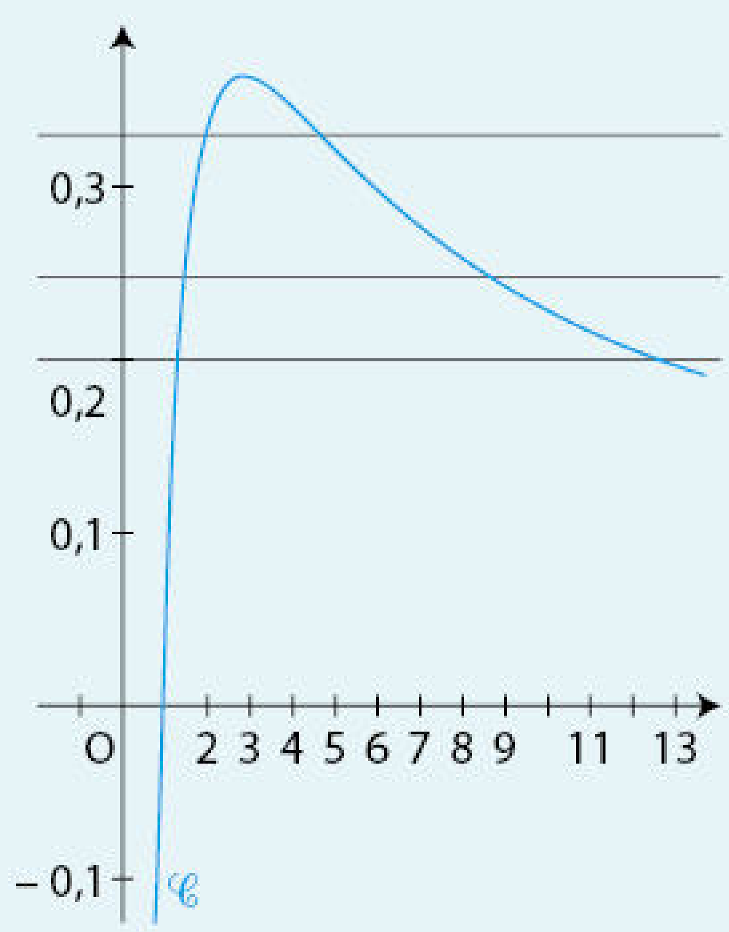
a) On admet que la suite (β_n) est croissante.
Établir que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3,

$$\beta_n \geqslant n\frac{\beta_3}{3}.$$

b) En déduire la limite de la suite (β_n).

> **Guide de résolution**
> **3. b)** Penser à utiliser un théorème de comparaison.

Annexe :



146 Valider des conjectures

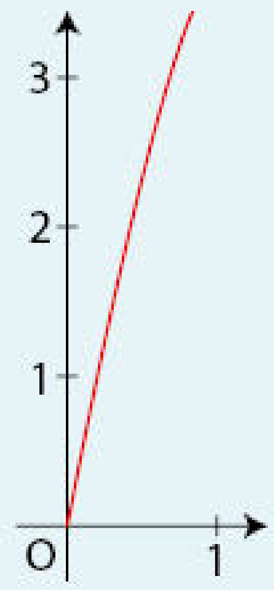
30 min

D'après Bac, Antilles-Guyane 2019

Soit g la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = 4x - x\ln(x)$.
On admet que la fonction g est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et on note g' sa dérivée.

Partie A

Le graphique ci-contre représente une partie de la courbe représentative de la fonction g obtenue par un élève sur sa calculatrice.



Cet élève émet les deux conjectures suivantes :
- il semble que la fonction g soit positive ;
- il semble que la fonction g soit strictement croissante.

L'objectif de cette partie est de valider ou d'invalider chacune de ces conjectures.

1. Résoudre l'équation $g(x) = 0$ sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
2. Déterminer le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
3. Les conjectures de l'élève sont-elles vérifiées ?

Partie B

1. a) On rappelle que $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{\ln(t)}{t} = 0$. En déduire que $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$.
b) Calculer la limite de g en 0, puis en $+\infty$.
2. a) Démontrer que pour tout réel x strictement positif, $g'(x) = 3 - \ln(x)$.
b) Dresser le tableau de variations de la fonction g.

Guide de résolution
A. 3. Pour la seconde conjecture, utiliser un contre-exemple.

Guide de résolution
B. 1. a) Cette démonstration est proposée en cours p. 328.

147 Étudier une simulation

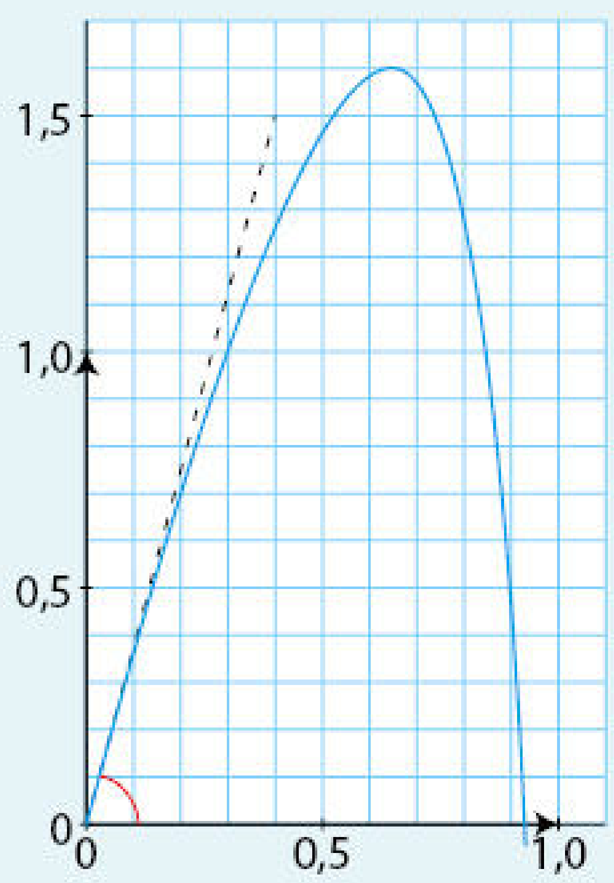
30 min

D'après Bac, Amérique du Nord 2018

Lors d'une expérience en laboratoire, on lance un projectile dans un milieu fluide.
Comme le projectile ne se déplace pas dans l'air mais dans un fluide, le modèle parabolique habituel n'est pas adapté.
On modélise ici le projectile par un point qui se déplace, dans un plan vertical, sur la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;1[$ par :

$$f(x) = bx + 2\ln(1-x)$$

où b est un paramètre réel supérieur ou égal à 2, x est l'abscisse du projectile, $f(x)$ son ordonnée, toutes les deux exprimées en mètre.



1. La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0\,;1[$. On note f' sa fonction dérivée.
On admet que la fonction f possède un maximum sur l'intervalle $[0\,;1[$, et que pour tout réel de l'intervalle $[0\,;1[$, $f'(x) = \dfrac{-bx+b-2}{1-x}$.

Montrer que le maximum de f est égal à $b - 2 + 2\ln\left(\dfrac{2}{b}\right)$.

2. Déterminer pour quelles valeurs du paramètre b la hauteur maximale du projectile ne dépasse pas 1,6 mètre.
3. Dans cette question, on choisit $b = 5{,}69$.
L'angle de tir θ correspond à l'angle entre l'axe des abscisses et la tangente à la courbe de la fonction f au point d'abscisse 0, comme indiqué sur le schéma.
Déterminer une valeur approchée, au dixième de degré près, de l'angle θ.

Guide de résolution
3. Le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0 est celui de la tangente à la courbe qui fait un angle θ avec l'axe des abscisses.

148 Relier tangente et aire

40 min

D'après Bac, Liban 2019

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O ; I, J).

1. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,1]$ par $f(x) = x(1 - \ln(x))^2$.

a) Vérifier que pour tout $x \in]0\,;\,1]$, $f'(x) = (\ln(x) + 1)(\ln(x) - 1)$.

b) Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations sur l'intervalle $]0\,;\,1[$. (On admettra que la limite de la fonction f en 0 est nulle).

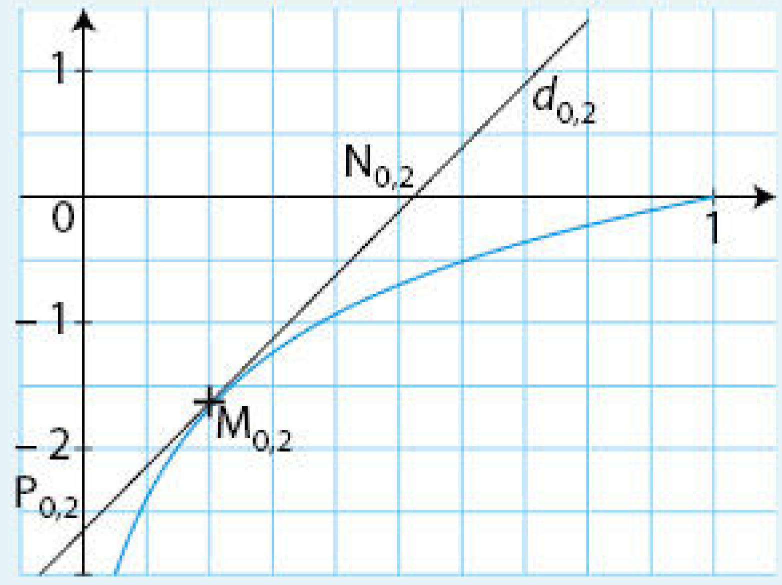
2. On note Γ la courbe représentative de la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;\,1]$ par $g(x) = \ln(x)$.

Soit a un réel de l'intervalle $]0\,;\,1]$. On note M_a le point de la courbe Γ d'abscisse a et d_a la tangente à la courbe Γ au point M_a. Cette droite d_a coupe l'axe des abscisses au point N_a et l'axe des ordonnées au point P_a.

a) Justifier que pour tout réel a de l'intervalle $]0\,;\,1]$, l'aire du triangle ON_aP_a, en unité d'aire, est donnée par $\mathscr{A}(a) = \frac{1}{2}a(1 - \ln(a))^2$.

b) Déterminer pour quelle valeur de a l'aire $\mathscr{A}(a)$ est maximum.

Déterminer cette aire maximum.



Guide de résolution

1. a) Factoriser l'expression obtenue de $f'(x)$ par $(1 - \ln(x))$.

Guide de résolution

2. a) L'aire du triangle ON_aP_a est $\dfrac{ON_a \times OP_a}{2}$.

2. b) Utiliser les résultats de la question **1.**

Se préparer À L'ORAL

149 Présenter un exposé

a) Recenser ses connaissances sur la fonction logarithme décimal et sur ses applications concrètes.

b) Dans un exposé oral de 10 min, présenter cette fonction et un exemple d'application.

150 Travailler l'oral en groupe

Résoudre cet exercice en petit groupe, puis en présenter les résultats à l'oral.

Quand on emprunte une somme C, en euro, à un taux annuel de t % et que l'on rembourse cette somme C en n mois, le montant M d'une mensualité, en euro, est donné par :

$$M = \frac{C \times \frac{t}{1200} \times \left(1 + \frac{t}{1200}\right)^n}{\left(1 + \frac{t}{1200}\right)^n - 1}$$

Louise veut emprunter 150 000 € au taux annuel de 1,8 % en remboursant chaque mois 1 000 €.

Calculer la durée minimum de son prêt.

151 Jouer différents rôles

▶ **ANTICIPER LES QUESTIONS DU JURY**

1. Préparation de la restitution orale (5 min)

Par groupe de 5, résoudre l'exercice ci-dessous, chaque élève travaillant sur une des cinq propositions.

2. Jeu de rôle (30 min)

Chaque élève présente son résultat à l'oral (2 min), pendant que les quatre autres composent le jury.

Chaque juré pose une question au candidat (5 min).

Énoncé : Répondre par Vrai ou Faux en justifiant.

f est la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \ln(x) - 2x^2 + 5.$$

(1) La limite en $+\infty$ de la fonction f est $-\infty$.

(2) La limite en 0 de la fonction g est $-\infty$.

(3) L'équation $f(x) = 0$ a une unique solution dans $]0\,;\,+\infty[$.

(4) Dans un repère orthonormé, la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f admet une asymptote verticale.

(5) La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $\frac{1}{2}$ a pour équation $y = 4$.

152 **Fonctions $x \mapsto x^{\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$**

x désigne un nombre réel et n un nombre entier naturel $n \geqslant 1$. On sait que :

- $x^n = \underbrace{x \times x \times \ldots \times x}_{n \text{ fois}}$;
- si $x \neq 0$, $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$.

En revanche, jusqu'à présent, on n'a pas donné de sens à des écritures telles que $2^{1,3}$ ou $5^{-\sqrt{2}}$ ou… C'est ce que l'on fait ci-dessous.

> **Définition**
> Pour tout réel $x > 0$ et pour tout réel α,
> $$x^{\alpha} = \mathrm{e}^{\alpha \ln(x)}.$$

1. Cohérence de la définition

Vérifier que lorsque $\alpha = n$ $(n \in \mathbb{N})$ et $x > 0$, on retrouve bien avec $\mathrm{e}^{\alpha \ln(x)}$ les définitions de x^n et x^{-n} rappelées ci-dessus.

2. Quelques calculs

a) Utiliser les touches e^x et ln de la calculatrice pour déterminer une valeur approchée de $2^{1,3}$.

b) Vérifier que l'on obtient le même affichage pour $2^{1,3}$ en utilisant la touche x^y.

c) Avec la calculatrice, déterminer une valeur approchée de $5^{-\sqrt{2}}$.

3. Étude des fonctions puissances

Pour tout réel α, f_{α} est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f_{\alpha}(x) = x^{\alpha} = \mathrm{e}^{\alpha \ln(x)}$.

a) Expliquer pourquoi f_{α} est dérivable sur $]0\,;+\infty[$.
Utiliser l'expression $\mathrm{e}^{\alpha \ln(x)}$ pour déterminer $f'_{\alpha}(x)$ et vérifier que pour tout $x > 0$, $f'_{\alpha}(x) = \alpha x^{\alpha - 1}$.

b) Cas où $\alpha > 0$

- Expliquer pourquoi f_{α} est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.
- Justifier que $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\alpha} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0} x^{\alpha} = 0$.

Dresser le tableau de variations de f_{α}.

- On note g_{α} la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$g_{\alpha}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x^{\alpha} & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

Vérifier que g_{α} est continue en 0.
Étudier la limite en 0 de la fonction $x \mapsto \dfrac{g_{\alpha}(x) - g_{\alpha}(0)}{x - 0}$ en envisageant les deux cas :

$\alpha > 1$ et $0 < \alpha < 1$.

Que peut-on en déduire pour la dérivabilité de g_{α} en 0 ?
Que peut-on en déduire pour la tangente au point d'abscisse 0 à la courbe représentative de g_{α} dans un repère orthonormé ?

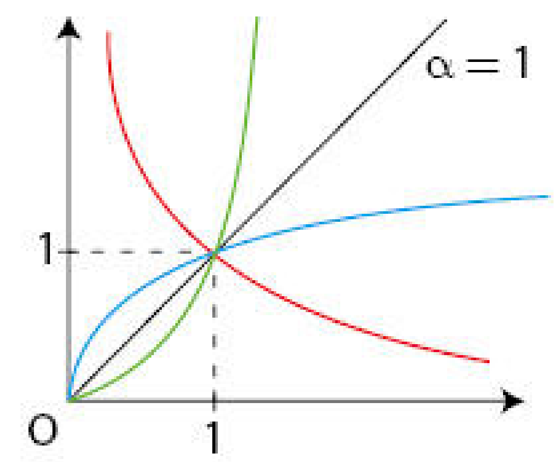
c) Cas où $\alpha < 0$

- Étudier le sens de variation de f_{α} sur $]0\,;+\infty[$.
- Justifier que $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\alpha} = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} x^{\alpha} = +\infty$.

Interpréter graphiquement ces limites pour la courbe représentative de f_{α} dans un repère orthonormé.

d) Courbes représentatives

Quels types de valeurs de α correspondent à la courbe représentative de f_{α} dans un repère orthonormé, selon sa couleur ?



153 **Limite de la suite $\left(\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n\right)$**

x désigne un nombre réel.

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_n = \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$.

1. Étudier la limite de (u_n) lorsque $x = 0$.

2. Par la suite, on suppose que $x \neq 0$.

a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$:

$$u_n = \mathrm{e}^{x \frac{\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}}}$$

b) On admet ici que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + x)}{x} = 1$ (voir exercice **110**).
Utiliser un schéma de décomposition pour étudier la limite de la suite $\left(x \dfrac{\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}}\right)$ en posant $\mathrm{N} = \dfrac{x}{n}$.

c) Recopier et compléter : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n = \ldots$

154 **Étudier une équation fonctionnelle**

On se propose de caractériser les fonctions f vérifiant pour tous réels a et b, $f(ab) = f(a) + f(b)$.

1. a) On suppose que f est définie en 0.
Que vaut $f(0)$?

b) En déduire que f est nécessairement nulle, c'est-à-dire que pour tout réel x, $f(x) = 0$.

2. On suppose que f est définie et dérivable sur $]0\,;+\infty[$, a désigne un nombre réel strictement positif et on note g la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = f(ax) - f(x)$.

a) Justifier que g est une fonction constante.

b) Donner deux expressions de $g'(x)$ pour tout $x > 0$.

c) En déduire que $af'(a) - f'(1) = 0$.

3. a) On pose $f'(1) = k$.

Exprimer $f'(a)$ en fonction de k et de a.

b) Déduire que pour tout réel $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{k}{x} \qquad \textbf{(1)}$$

c) • Vérifier que la fonction f_1 définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f_1(x) = k\ln(x)$ réalise la condition **(1)**.

• On suppose que f_2 est une autre fonction telle que pour tout réel $x > 0$, $f_2'(x) = \frac{k}{x}$.

Expliquer pourquoi la fonction $f_2 - f_1$ est constante.

d) En déduire l'ensemble des fonctions définies sur $]0\,;+\infty[$ vérifiant la condition **(1)** et donc l'ensemble des fonctions f définies sur $]0\,;+\infty[$ telles que pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, $f(ab) = f(a) + f(b)$.

155 Algo python

Étudier les encadrements de Neper

1. Par des procédés cinématiques dont on ne parlera pas ici, Neper a établi que pour tout réel $x > 0$,

$$\frac{x-1}{x} \leqslant \ln(x) \leqslant x - 1$$

a) Démontrer cet encadrement.

b) Neper prend pour approximation de $\ln(x)$, le milieu de l'intervalle $\left[\frac{x-1}{x}\,;x-1\right]$.

Vérifier qu'il obtient $\ln(x) \approx \frac{x^2-1}{2x}$.

c) Pour son procédé, Neper avait besoin d'approximations de $\ln(0{,}99)$ et $\ln(0{,}999\,5)$.

Quelles approximations a-t-il prises ?

2. Voici comment Neper procédait pour obtenir une approximation de $\ln(0{,}7)$ à partir de celles obtenues pour $\ln(0{,}99)$ et $\ln(0{,}999\,5)$.

a) Vérifier que $0{,}99^{36} < 0{,}7 < 0{,}99^{35}$.

b) Vérifier que :

$$0{,}99^{35} \times 0{,}999\,5^{10} < 0{,}7 < 0{,}99^{35} \times 0{,}999\,5^{9}$$

c) En déduire l'encadrement de $\ln(0{,}7)$ obtenu par Neper.

d) Comparer avec la valeur approchée de $\ln(0{,}7)$ donnée par la calculatrice.

3. Écrire une fonction **Neper** en langage Python qui renvoie l'approximation de $\ln(x)$ obtenue à la question **1. b)** pour un réel $x > 0$ donné en paramètre.

156 Relier exponentielle et logarithme

Dans tous les calculs et expressions, la lettre « e » désigne l'exponentielle de 1. On donne $e \approx 2{,}7$.

1. a) Montrer que pour tout réel x,

$$x^2 - xe + e > 0.$$

b) On note pour tout réel x,

$$P(x) = 2x^2 - (2e)x + 2(e-1).$$

Calculer les racines de P, notées α et β, et en déduire le signe de $P(x)$ en fonction des différentes valeurs de x.

2. On considère alors la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 1 - \ln(x^2 - xe + e).$$

On note $\mathscr{C}$, la courbe de f dans un repère orthonormé.

a) Calculer $f(0)$, $f(1)$, $f(e-1)$ et $f(e)$.

Vérifier que $f\left(\frac{e}{2}\right) = -\ln\left(1 - \frac{e}{4}\right)$.

Étudier la limite de f en $-\infty$, puis en $+\infty$.

b) Calculer $f'(x)$, puis étudier son signe

Vérifier que $f'(0) = 1$ et $f'(e) = -1$.

c) En utilisant $e \approx 2{,}7$, ordonner les nombres $0\,;1\,;e-1\,;e\,;\frac{e}{2}$, puis dresser le tableau de variations de f en faisant figurer les valeurs étudiées en **2. a)**.

3. Donner l'allure de $\mathscr{C}$, dans un repère orthonormé d'unité 5 cm, en faisant figurer les résultats obtenus aux questions précédentes.

Des Défis

157 Vérifier une propriété

$\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction ln dans un repère orthonormé.

A est le sommet de la parabole $\mathscr{P}$ représentative de $x \mapsto x^2 + a$ où a est un nombre réel fixé.

Démontrer que le point d'intersection des courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{P}$ est celui qui réalise le minimum de la distance de A à tout point de $\mathscr{C}$.

158 Étudier un grand nombre

Le nombre $10^{10^{10^{10^{10^{10}}}}}$ s'appelle nombre de Folkman ; il intervient en théorie des graphes.

Calculer son logarithme décimal.