6 Limites des suites

HISTOIRE DES MATHS

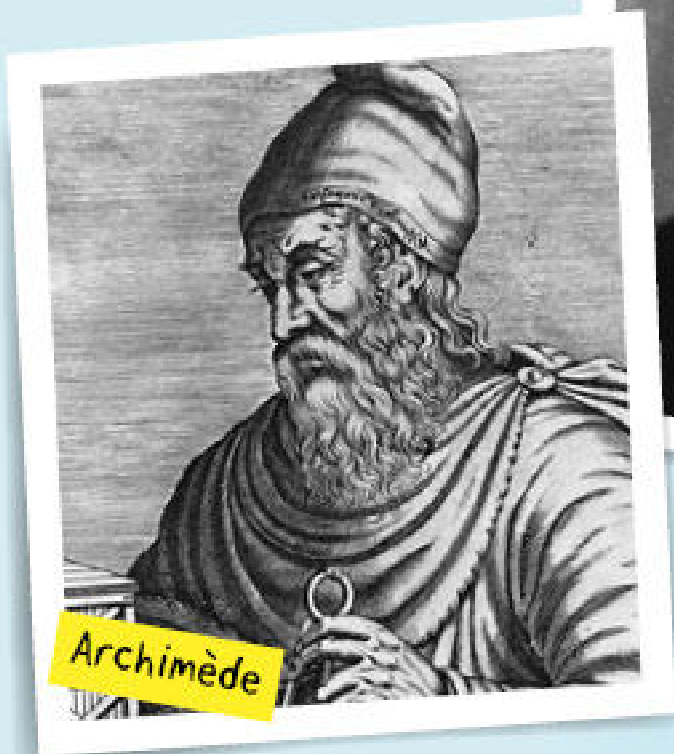
Dès l'Antiquité, les suites numériques apparaissent comme des procédés « illimités » de calcul et la notion de convergence est au cœur de certains travaux.

On en trouve des traces chez **Archimède** qui approche par exemple la valeur de π à l'aide d'aires de polygones réguliers inscrits et circonscrits à un cercle et possédant de plus en plus de côtés.

Jean le Rond d'Alembert et **Denis Diderot** publient dans l'*Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers* une définition très intuitive de la limite finie d'une suite. Ils confondent les notions de suite qui tend vers zéro et de suite définie par les sommes partielles.

En Analyse au 19e siècle, la nécessité de définir précisément les concepts se fait sentir. **Augustin Cauchy** fait de la limite une notion centrale, mais c'est **Karl Weierstrass** qui donne une définition de la limite réelle d'une suite.


Karl Weierstrass


Archimède

▶ **Archimède** (vers – 287 ; – 212) est originaire de Syracuse en Sicile. Savant aux multiples productions, il explique le principe du levier, invente la vis sans fin, écrit au moins douze traités.

▶ **Karl Weierstrass** (1815-1897) est un mathématicien allemand, pédagogue reconnu. Ses travaux, très rigoureux, portent entre autres sur une construction des nombres réels. Vers 1850, il définit la notion de limite d'une suite (convergence).

1751 D'Alembert donne une définition très intuitive de la limite d'une suite dans l'*Encyclopédie*.

1823 Cauchy donne des critères de convergence d'une suite dans son *Cours d'analyse* à Polytechnique.

1872 Cantor anticipe la construction rigoureuse de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels à l'aide de suites de rationnels convergentes.

1928 Collatz étudie une suite qui sera à l'origine de la conjecture de Syracuse (problème ouvert encore aujourd'hui).

1768 Bougainville découvre Tahiti à bord de l'Astrolabe

1832 Début de la ruée vers l'or aux États-Unis

1860 Ouverture du Canal de Suez

1920 Fondation du Bauhaus

1936 J.O. de Berlin : 4 médailles d'or pour Jesse Owens

1750 1800 1850 1900 1950

Le Parthénon au sommet de l'acropole d'Athènes (Grèce).

Le nombre d'or est noté φ en hommage au sculpteur Phidias (5e siècle avant notre ère) qui a réalisé des statues de l'Acropole. φ est la limite de la suite définie par les quotients successifs des termes de la suite de Fibonacci. C'est approximativement le ratio des dimensions du rectangle encadrant la face avant du Parthénon à Athènes.

Les contenus et capacités travaillés dans ce chapitre

	Savoir-faire	Exercices
• Suites dont la limite est $+\infty$ ou $-\infty$.	1 à 4	19 à 29
• Suites dont la limite est un nombre réel.	5 à 8	30 à 39
• Limites et comparaison : suite minorée par une suite de limite $+\infty$, théorème des gendarmes.	9 à 12	40 à 50
• Opérations sur les limites.	13 à 15	51 à 56, 58 à 61
• Étudier des phénomènes d'évolution modélisables par une suite.	16 à 18	57, 86, 95, 99, 101, 102, 104

Bien démarrer

Calcul mental

Rappels utiles

• Modes de génération d'une suite

On peut définir une suite (u_n) :

1. avec une formule explicite de la forme $u_n = f(n)$ où f est une fonction définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$;

2. avec la donnée d'un terme, u_0 par exemple, et d'une relation de récurrence de la forme : pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction définie sur un intervalle I tel que pour tout entier naturel n, $u_n \in \mathrm{I}$.

• Suites arithmétiques

Dire qu'une suite (u_n) est **arithmétique** signifie qu'il existe un nombre réel r (la **raison**) tel que pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = u_n + r.$$

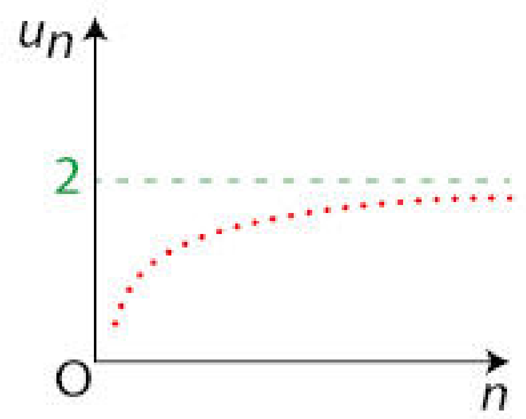
Alors pour tous entiers naturels n et p,

$$u_n = u_0 + nr \qquad u_n = u_p + (n-p)r$$

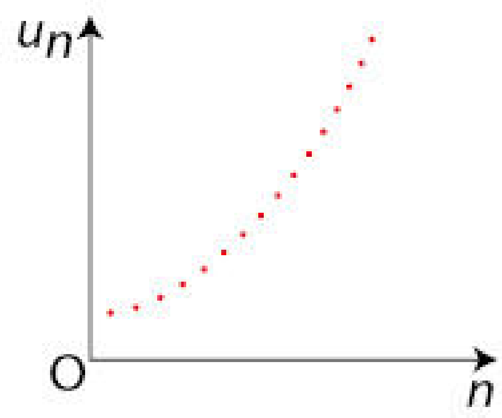
Pour tout entier naturel n,

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

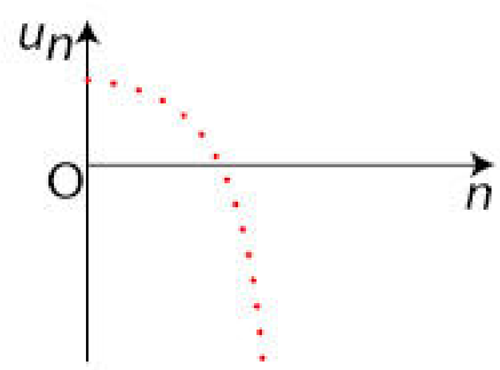
• Comportement d'une suite



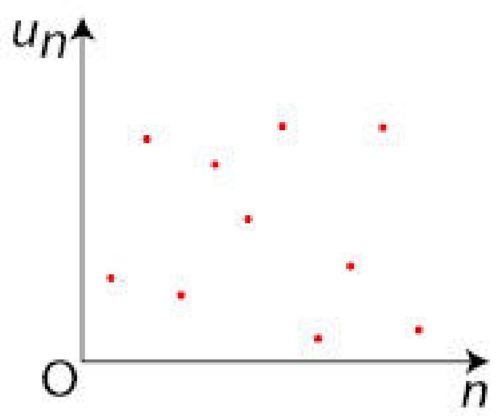
Les termes u_n sont aussi proches de 2 que l'on veut pour n suffisamment grand.



Les termes u_n sont aussi grands que l'on veut pour n suffisamment grand.



Les termes u_n sont aussi petits que l'on veut (de grandes valeurs absolues) pour n suffisamment grand.



Les termes u_n se dispersent lorsque n prend de grandes valeurs.

À l'oral — Questions-Tests

Pour chaque question, il y a une seule réponse exacte.

1 (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^2 + 1$.

a) Le terme u_{10} est égal à : **(1)** 82 **(2)** 101 **(3)** 121

b) Pour tout entier naturel n, u_{n+1} est égal à :
(1) $n^2 + 2$ **(2)** $n^2 + 2n + 1$ **(3)** $n^2 + 2n + 2$

2 (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 10u_n + 1$.

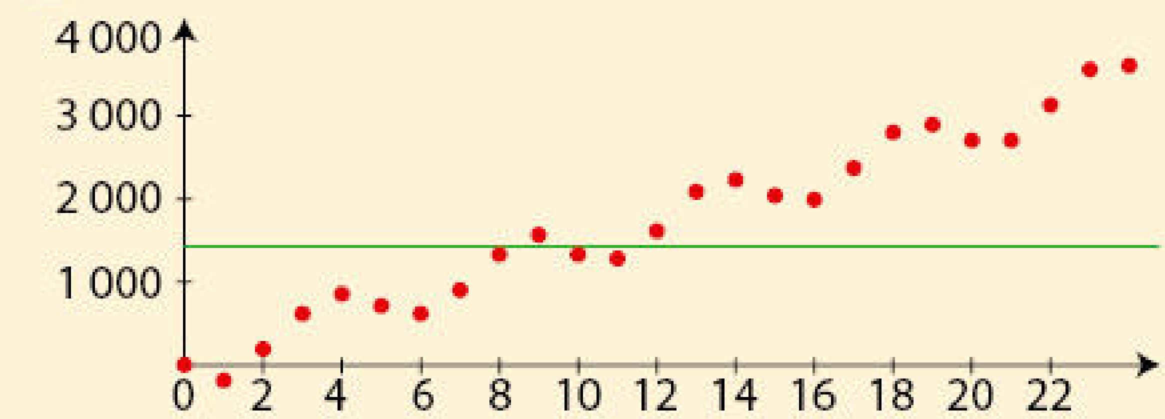
a) Le terme u_3 est égal à : **(1)** 111 **(2)** 1 001 **(3)** 1 111

b) Cette suite est du type $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
(1) $f(x) = 10x + 1$ **(2)** $f(x) = 10x$ **(3)** $f(x) = 10u_n + 1$

3 (u_n) est la suite arithmétique de raison 40 telle que $u_1 = 5$. Pour tout entier naturel n, u_n est égal à :
(1) $5n + 40$ **(2)** $40n - 35$ **(3)** $40n - 1 \times 5$

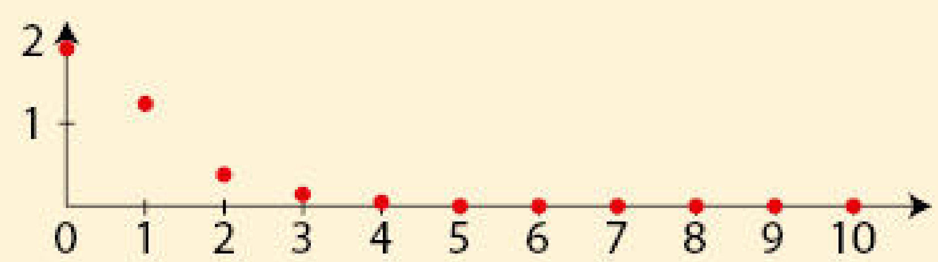
4 $2 + 3 + 4 + \ldots + 100$ est égal à :
(1) 5 050 **(2)** 5 150 **(3)** 5 049

5 (u_n) est représentée graphiquement ci-dessous.



Le premier entier naturel N tel que pour tout $n \geqslant \mathrm{N}$, $u_n \geqslant 1\,500$ est : **(1)** 9 **(2)** 10 **(3)** 12

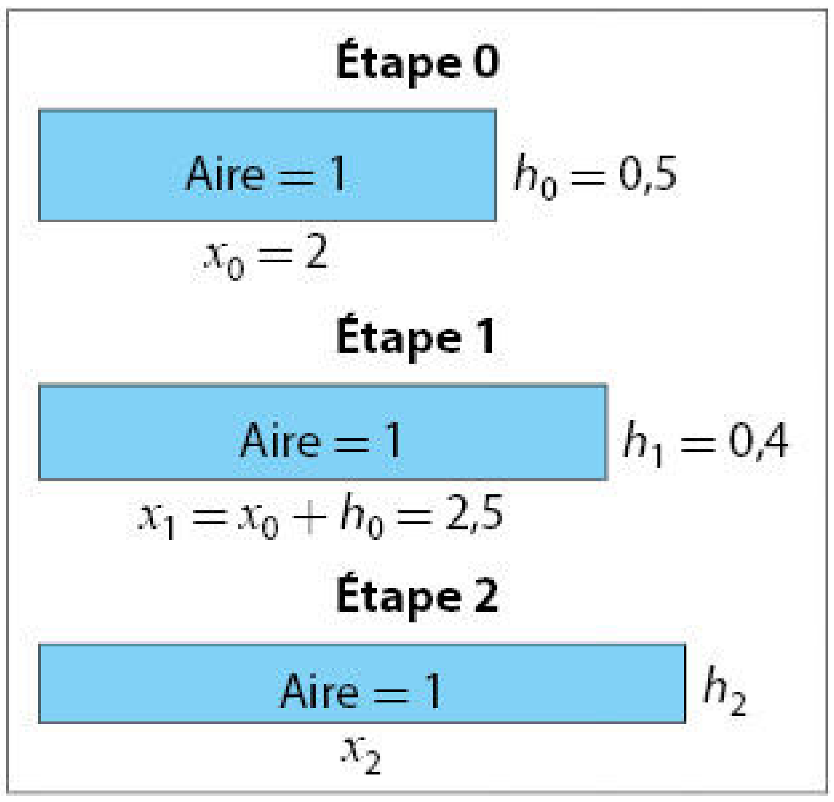
6 (w_n) est représentée graphiquement ci-dessous.



Il semble que lorsque n prend de grandes valeurs :
(1) les termes w_n sont aussi grands que l'on veut ;
(2) les termes w_n sont aussi proches de 0 que l'on veut ;
(3) les termes w_n se dispersent.

1 Notion de suite qui tend vers $+\infty$

On construit des rectangles successifs d'aire 1 ; on note x_n la longueur et h_n la hauteur (ou largeur).
Ainsi, pour tout entier naturel n, $x_n \times h_n = 1$.
Pour tout entier naturel n, $x_{n+1} = x_n + h_n$.



1 **a)** Calculer x_2 et h_2. *Arrondir au centième si besoin.*
b) Justifier que pour tout entier naturel n, $x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{x_n}$.

2 **a)** À l'aide de la calculatrice, tabuler la suite (x_n).
b) Déterminer alors le plus petit entier naturel N tel que $x_N > 10$.
Semble-t-il que pour tout entier naturel $n \geqslant N$, $x_n > 10$?

3 **a)** Vérifier que pour tout entier naturel n, $x_{n+1}^2 = x_n^2 + 2 + \dfrac{1}{x_n^2}$.
b) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $x_n^2 \geqslant 4 + 2n$.
c) En déduire que pour tout entier naturel n, $x_n \geqslant \sqrt{4+2n}$.
d) Justifier que pour tout entier naturel $n \geqslant 48$, $x_n \geqslant 10$.
e) Déterminer un entier naturel n_0 tel que pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$, $x_n \geqslant 1\,000$.

Pour tout seuil S, on peut montrer qu'il existe un entier naturel N à partir duquel $x_n \geqslant S$.
On dit que **la suite (x_n) a pour limite $+\infty$** et on note $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = +\infty$.

2 Notion de suite convergente

Une immense boîte de bonbons pour grossiste est opaque : elle contient n bonbons à la violette et $n + 10$ bonbons au citron (avec $n \geqslant 1$). On suppose que tous les bonbons sont indiscernables au toucher.
On extrait au hasard de cette boîte un bonbon et on note son parfum. On note V_n l'événement « Le bonbon choisi est à la violette » et p_n la probabilité de cet événement.

1 **a)** Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $p_n = \dfrac{n}{2n+10}$.
b) À l'aide de la calculatrice, tabuler cette suite, puis la représenter graphiquement (*fenêtre* : $0 \leqslant X \leqslant 100$, pas 10 et $0 \leqslant Y \leqslant 1$, pas 0,5). Décrire le comportement de p_n pour les grandes valeurs de n.

2 S'aider de l'écran de calcul formel ci-contre, pour préciser un entier naturel n_0 tel que pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$,
a) $p_n \in]0{,}49 ; 0{,}51[$; **b)** $p_n \in]0{,}499 ; 0{,}501[$.

1	Résoudre$\left(0.49 < \dfrac{n}{2\,n+10} < 0.51, n, n > 0\right)$
	→ **{n > 245}**
2	Résoudre$\left(0.499 < \dfrac{n}{2\,n+10} < 0.501, n, n > 0\right)$
	→ **{n > 2495}**

Pour tout intervalle contenant 0,5 et de longueur aussi petite soit-elle, on peut montrer qu'il contient tous les p_n pour n suffisamment grand.
On dit que **la suite (p_n) a pour limite 0,5** (ou qu'elle converge vers 0,5) et on note $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 0{,}5$.

Cours

Exercices
- 1 à 4 (ci-contre)
- 19 à 29

1 Limite infinie d'une suite

Vidéo
JAICOMPRIS.COM
Cette notion est présentée en vidéo

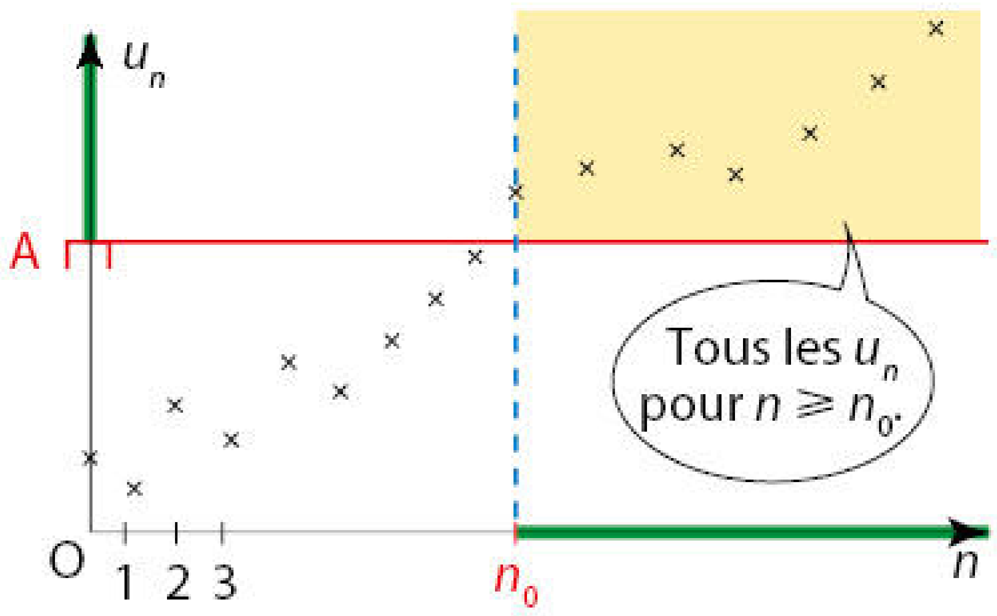
A Limite égale à $+\infty$

Définition

Dire qu'une **suite** (u_n) **a pour limite** $+\infty$ **quand** n **tend vers** $+\infty$ signifie que tout intervalle du type $]A\,;+\infty[$ (avec A nombre réel) contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.
On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Illustration graphique

Aussi grand que soit le nombre réel A, on peut trouver un entier naturel n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n > A$.
En termes imagés « aussi haute que l'on place la barrière horizontale A, les termes u_n parviennent à passer définitivement au-dessus ».



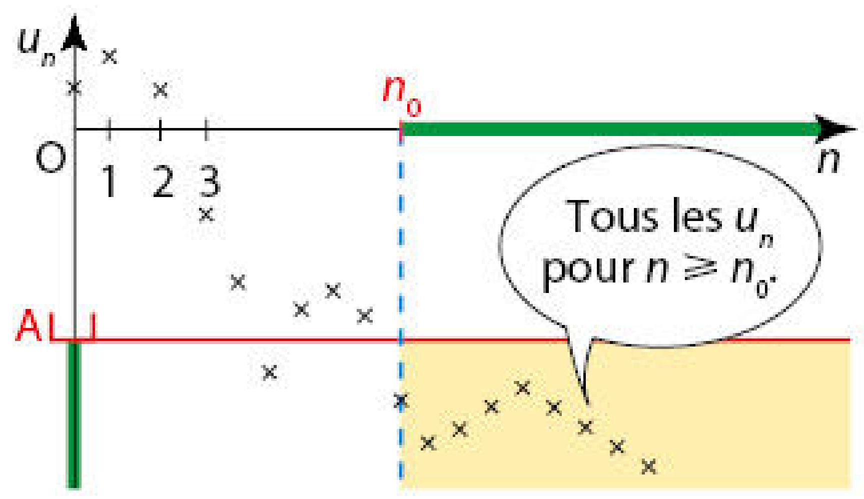
Exemples

Suites de référence de limite $+\infty$ (k désigne un nombre réel, $k>0$).
Les suites (kn), (kn^2), (kn^3), $(k\sqrt{n})$ (voir exercice 1) et (ke^n)(voir exercice 9) ont pour limite $+\infty$.

B Limite égale à $-\infty$

Définition

Dire qu'une **suite** (u_n) **a pour limite** $-\infty$ **quand** n **tend vers** $+\infty$ signifie que tout intervalle $]-\infty\,;A[$ (avec A nombre réel) contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.
On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.



Exemples

Suites de référence de limite $-\infty$ (k désigne un nombre réel, $k>0$).
Les suites $(-kn)$, $(-kn^2)$(voir exercice 2), $(-kn^3)$, $(-k\sqrt{n})$, $(-ke^n)$ ont pour limite $-\infty$.

C Exemples de suites divergentes

Vocabulaire : si une suite (u_n) a pour limite $+\infty$ (resp. $-\infty$), alors on dit que (u_n) diverge vers $+\infty$ (resp. vers $-\infty$).

Propriétés (Cas particulier des suites arithmétiques)

Pour toute suite **arithmétique** (u_n) **de raison** r :
- si $r>0$, alors (u_n) **diverge vers** $+\infty$;
- si $r<0$, alors (u_n) **diverge vers** $-\infty$.

En effet, pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 + nr$.
- Si $r>0$, alors la suite de référence (rn) a pour limite $+\infty$ et il en est de même pour la suite (u_n).
- Si $r<0$, alors la suite de référence (rn) a pour limite $-\infty$ et il en est de même pour la suite (u_n).

EXERCICES RÉSOLUS

1 Utiliser la définition d'une suite de limite $+\infty$

(u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \sqrt{n}$.

a) Déterminer un entier naturel N tel que pour tout entier naturel $n > \mathrm{N}$, $u_n > 2\,020$.

b) Démontrer que la limite de la suite (u_n) est $+\infty$.

Solution

a) Pour tout entier naturel n, $\sqrt{n} > 2020$ équivaut à $n > 2\,020^2$, c'est-à-dire $n > 4\,080\,400$.

b) On se donne un intervalle $]\mathrm{A}\,;+\infty[$ avec $\mathrm{A} \geqslant 0$.

Pour tout entier naturel n, $u_n \in\,]\mathrm{A}\,;+\infty[$ équivaut à $\sqrt{n} > \mathrm{A}$, c'est-à-dire $n > \mathrm{A}^2$.

> $\sqrt{n} \geqslant 0$ et $\mathrm{A} \geqslant 0$.
> La fonction carré est croissante sur $[0\,;+\infty[$.

On note N le plus petit nombre entier supérieur ou égal à A^2.

Ainsi, l'intervalle $]\mathrm{A}\,;+\infty[$ contient tous les termes u_n, pour tout entier naturel $n > \mathrm{N}$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Ainsi, la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

2 Utiliser la définition d'une suite de limite $-\infty$

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = -2n^2$.

a) Déterminer un entier naturel N tel que pour tout entier naturel $n > \mathrm{N}$, $u_n < -10\,000$.

b) Démontrer que la limite de la suite (u_n) est $-\infty$.

Solution

a) Pour tout entier naturel n, $-2n^2 < -10\,000$ équivaut à $n^2 > 5\,000$, c'est-à-dire $n \geqslant \sqrt{5\,000}$.

Or, $\sqrt{5\,000} \approx 70{,}7$, donc $u_n < -10\,000$ pour tout entier naturel $n \geqslant 71$.

b) On se donne un intervalle $]-\infty\,;\mathrm{A}[$ avec $\mathrm{A} \leqslant 0$.

Pour tout entier naturel n, $u_n \in\,]-\infty\,;\mathrm{A}[$ équivaut à $-2n^2 < \mathrm{A}$, c'est-à-dire $n^2 > -\frac{\mathrm{A}}{2}$, soit $n > \sqrt{-\frac{\mathrm{A}}{2}}$.

> $\mathrm{A} \leqslant 0$, donc $-\frac{\mathrm{A}}{2} \geqslant 0$.
> La fonction carré est croissante sur $]0\,;+\infty[$.

On note N le plus petit nombre entier supérieur ou égal à $\sqrt{-\frac{\mathrm{A}}{2}}$.

Ainsi, l'intervalle $]-\infty\,;\mathrm{A}[$ contient tous les termes u_n, pour tout entier naturel $n > \mathrm{N}$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Ainsi, la suite (u_n) diverge vers $-\infty$.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 1

3 La suite (v_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = 4n^2$.

a) Déterminer un entier naturel N tel que pour tout entier naturel $n > \mathrm{N}$, $v_n > 10^9$.

b) Démontrer que la limite de la suite (v_n) est $+\infty$.

Sur le modèle de l'exercice résolu 2

4 La suite (v_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = -10\sqrt{n}$.

a) Déterminer un entier naturel N tel que pour tout entier naturel $n > \mathrm{N}$, $v_n < -10^7$.

b) Démontrer que la limite de la suite (v_n) est $-\infty$.

Exercices
- 5 à 8 (ci-contre)
- 30 à 39

2 Limite finie d'une suite

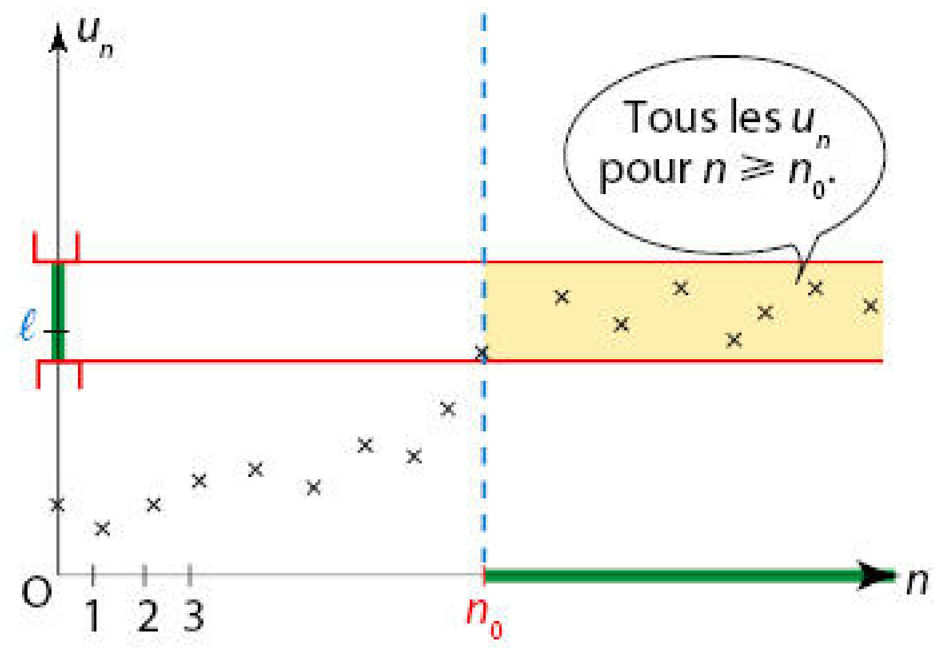
Vidéo
JaiCompris.com
Cette notion est présentée en vidéo

A Limite égale à un nombre réel ℓ

Définition

Dire qu'une suite (u_n) **a pour limite un nombre réel ℓ quand n tend vers** $+\infty$ signifie que tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang. On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.
On dit aussi que la suite (u_n) **converge** vers ℓ.

Illustration graphique
Aussi petite soit la longueur d'un intervalle I contenant ℓ, on peut trouver un entier naturel n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \in \mathrm{I}$.
En termes imagés « aussi étroite que soit la bande autour de la droite d'équation $y = \ell$, les termes u_n finissent par y entrer définitivement ».



Remarque : lorsqu'elle existe, la limite ℓ d'une suite est **unique**.

Exemples

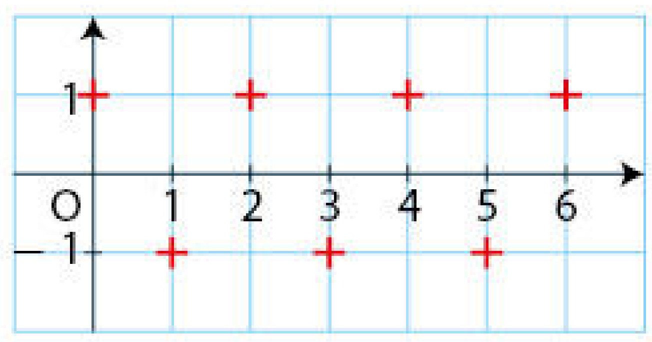
Suites de référence de limite 0 (k désigne un nombre réel non nul).
On admet que les suites $\left(\dfrac{k}{n}\right)$ (voir exercice 5), $\left(\dfrac{k}{n^2}\right)$, $\left(\dfrac{k}{n^3}\right)$, $\left(\dfrac{k}{\sqrt{n}}\right)$, $\left(\dfrac{k}{e^n}\right)$ ont pour limite 0 .

B Suites qui n'ont pas de limite

Il existe des suites qui n'admettent aucune limite.

Exemple

(u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = (-1)^n$.
Pour tout entier naturel n, $u_n = 1$ si n est pair et $u_n = -1$ si n est impair.



- L'intervalle $]2\,;+\infty[$ ne contient aucun terme de la suite (u_n) : celle-ci n'a pas pour limite $+\infty$.
- L'intervalle $]-\infty\,;-2[$ ne contient aucun terme de la suite (u_n) : celle-ci n'a pas pour limite $-\infty$.
- Si ℓ est un nombre réel différent de -1 et de 1, alors il existe un intervalle suffisamment étroit autour de ℓ qui ne contient ni -1 ni 1 ; un tel intervalle ne contient aucun terme de la suite (u_n). Celle-ci n'a pas pour limite ℓ.
- Enfin les intervalles $]-2\,;0[$ (qui contient -1) et $]0\,;2[$ (qui contient 1) ne contiennent pas tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang. La suite (u_n) n'a donc pas pour limite -1 ou 1.

Finalement, la suite (u_n) n'a pas de limite.

C Vocabulaire

On distingue deux types de suites :
- les suites **convergentes** qui ont une limite finie ;
- les suites **divergentes** qui sont toutes les suites qui ne sont pas convergentes : elles peuvent soit admettre une limite infinie, soit ne pas admettre de limite.

EXERCICES RÉSOLUS

5 Utiliser la définition d'une suite de limite finie

(u_n) est la suite définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par $u_n = \dfrac{4}{n}$.

a) Déterminer un entier naturel N tel que pour tout $n > \text{N}$, $-0{,}8 < u_n < 0{,}8$.

b) Démontrer que la limite de la suite (u_n) est 0.

Solution

a) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $-0{,}8 < u_n < 0{,}8$ équivaut à $0 < \dfrac{1}{n} < 0{,}2$, c'est-à-dire $n > \dfrac{1}{0{,}2}$ soit $n > 5$.

> $\dfrac{1}{n} > 0$ et $0{,}2 > 0$.
> La fonction inverse est décroissante sur $]0\,;+\infty[$.

b) On se donne un intervalle $]-\alpha\,;\beta[$ (avec $\alpha > 0, \beta > 0$).

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_n \in\,]-\alpha\,;\beta[$ équivaut à $-\alpha < \dfrac{4}{n} < \beta$ c'est-à-dire $0 < \dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{4}\beta$ soit $n > \dfrac{4}{\beta}$.

On note N le plus petit entier supérieur ou égal à $\dfrac{4}{\beta}$. Ainsi, l'intervalle $]-\alpha\,;\beta[$ contient toutes les valeurs u_n, pour tout $n > \text{N}$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

6 Rechercher un seuil avec le tableur Tice

(v_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{4n+9}{n+2}$.

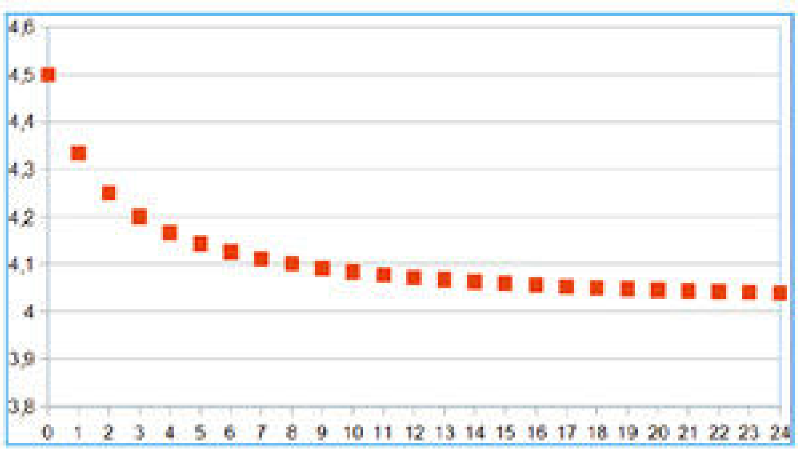
a) À l'aide du tableur, tabuler la suite (v_n) et la représenter graphiquement. Conjecturer sa limite.

b) On admet que la suite (v_n) est décroissante et que pour tout entier naturel n, $v_n > 4$.
Utiliser la feuille de calcul pour déterminer un entier naturel n à partir duquel :

- $4 < v_n < 4{,}1$
- $4 < v_n < 4{,}01$

Solution

a) On conjecture que la limite de la suite (v_n) est 4.



	A	B
1	n	v_n
2	0	4,5
3	1	4,33333333
4	2	4,25
5	3	4,2
6	4	4,16666667
7	5	4,14285714
8	6	4,125
9	7	4,11111111
10	8	4,1
11	9	4,09090909
12	10	4,08333333
99	97	4,01010101
100	98	4,01
101	99	4,00990099
102	100	4,00980392

> Dans la cellule B2, on saisit : =(4*A2+9)/(A2+2), puis on recopie vers le bas.

> On sélectionne la plage A2:B26 (par exemple), puis dans l'assistant de diagramme, on sélectionne Ligne et .
> Dans Plage des données, on coche Série de données en colonne et Première colonne comme étiquette.

b) • Ci-contre, on lit que $u_9 \approx 4{,}09$.
Donc pour tout $n \geqslant 9$, $4 < u_n \leqslant u_9 < 4{,}1$.
• En prolongeant la feuille de calcul, on lit que $u_{99} \approx 4{,}009$.
Donc pour tout $n \geqslant 99$, $4 < u_n \leqslant u_{99} < 4{,}01$.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 5

7 Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_n = \dfrac{2}{\sqrt{n}}$.
Démontrer que la suite (u_n) a pour limite 0.

Sur le modèle de l'exercice résolu 6

8 Pour tout entier naturel n, $v_n = 5 - \dfrac{1}{n^2+1}$.
Conjecturer la limite de (v_n) à l'aide du tableur.

Exercices
- **9** à **12** (ci-contre)
- **40** à **50**

3 Limites et comparaison

A Théorème de comparaison : limite infinie

Propriété

Si (u_n) et (v_n) sont deux suites définies sur $\mathbb{N}$ telles que :
(1) à partir d'un certain rang, $u_n \geqslant v_n$, **(2)** $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$,
alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

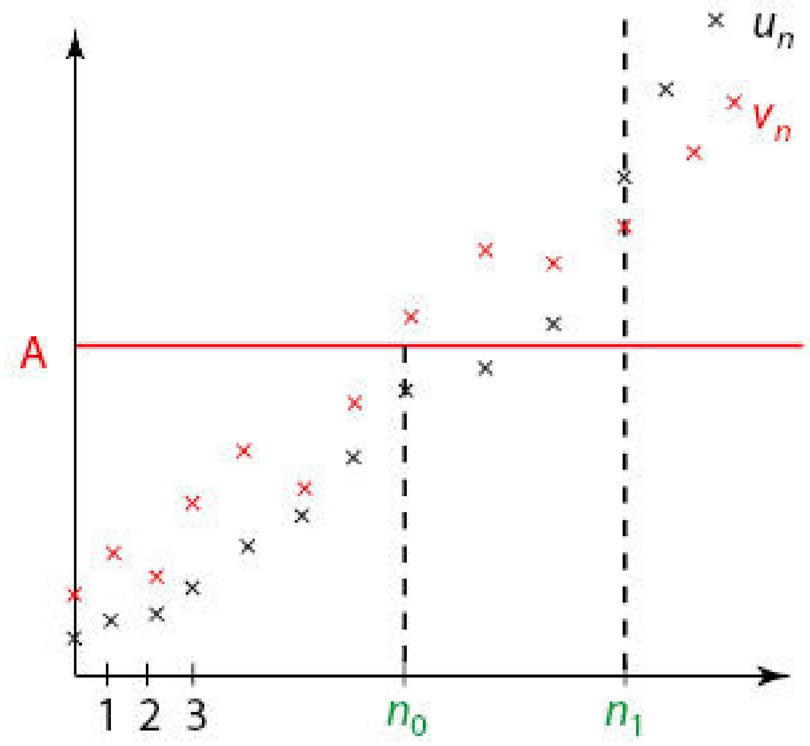


Illustration : cas où $n_1 > n_0$

Démonstration

D'après **(2)**, tout intervalle $]A\,;+\infty[$ (avec A nombre réel) contient tous les v_n à partir d'un entier naturel n_0.
Ainsi, pour tout $n \geqslant n_0$, $v_n > A$.
D'après **(1)**, pour tout $n \geqslant n_1$, $u_n \geqslant v_n$.
Donc, si l'on note N le plus grand des entiers naturels n_0 et n_1, alors pour tout $n \geqslant N$, $u_n \geqslant v_n > A$.
Donc, l'intervalle $]A\,;+\infty[$ contient tous les u_n à partir de l'entier naturel N et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Vidéo
JAICOMPRIS.COM
Les démonstrations de cette page sont présentées en vidéo

Propriété

Si (u_n) et (v_n) sont deux suites définies sur $\mathbb{N}$ telles que :
(1) à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n$, **(2)** $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$,
alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

Cette propriété se démontre de la même façon que la propriété précédente.

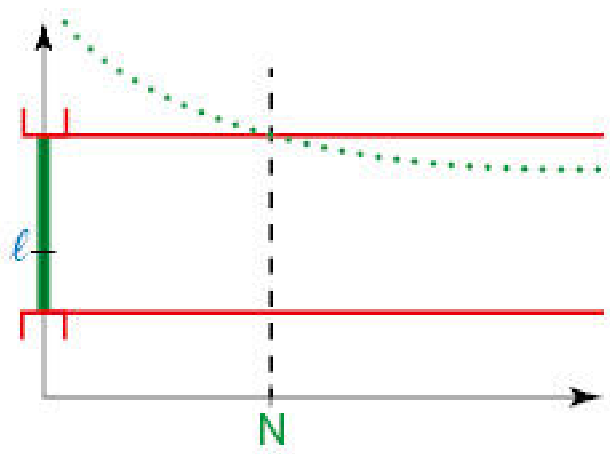
B Théorème des gendarmes : limite finie

Théorème

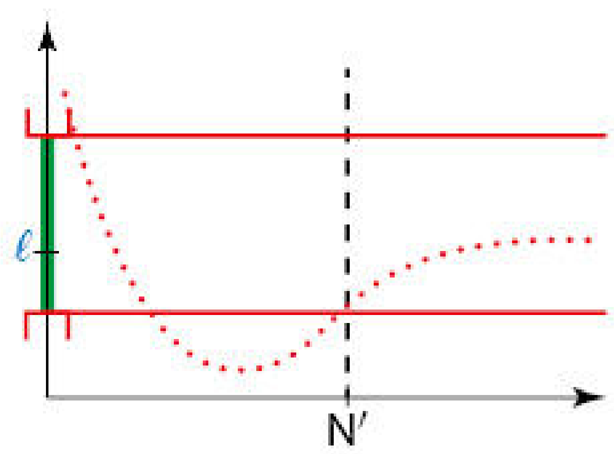
Si (u_n), (v_n), (w_n) sont trois suites définies sur $\mathbb{N}$ telles que :
(1) à partir d'un certain rang, $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$, **(2)** $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \ell$ (avec ℓ nombre réel),
alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$.

Démonstration

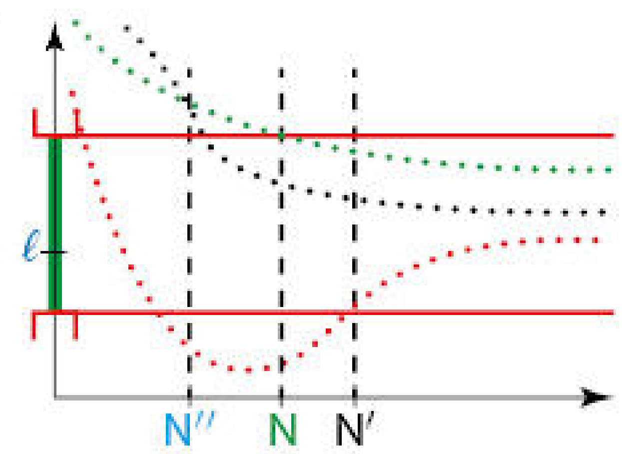
I est un intervalle ouvert quelconque contenant ℓ.



(w_n) converge vers ℓ, donc à partir d'un rang N, tous les w_n sont dans I.



(v_n) converge vers ℓ, donc à partir d'un rang N′, tous les v_n sont dans I.



À partir d'un rang N″, $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$.

Donc pour tout entier naturel n supérieur à la fois à N, N′ et N″, tous les u_n appartiennent à I.
La suite (u_n) converge vers ℓ.

EXERCICES RÉSOLUS

9 Appliquer un théorème de comparaison

1. (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = e^n$.
a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $e^n \geqslant n+1$.
b) En déduire que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.
2. (v_n) est la suite définie par $v_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = -v_n^2 - n - 1$.
a) Démontrer que pour tout entier naturel n, $v_n \leqslant -n$.
b) En déduire que la suite (v_n) diverge.

Solution

1. a) Initialisation : pour $n = 0$, $e^0 = 1$ et $0 + 1 = 1$ donc $e^0 \geqslant 0 + 1$.
Hérédité : on suppose que pour un entier naturel k, $e^k \geqslant k+1$.
On démontre qu'alors $e^{k+1} \geqslant k+2$.
Or, $e^{k+1} = e \times e^k$, donc d'après l'hypothèse de récurrence $e^{k+1} \geqslant e(k+1)$.
On remarque que $e(k+1) \geqslant k+2$; en effet, ceci équivaut à $(e-1)k \geqslant 2-e$ et cette inégalité est vraie car $(e-1)k \geqslant 0$ et $2-e < 0$.
Donc $e^{k+1} \geqslant e(k+1) \geqslant k+2$.
Conclusion : pour tout entier naturel n, $e^n \geqslant n+1$.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1) = +\infty$ donc, d'après un théorème de comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

2. a) Pour tout entier naturel n, $-v_n^2 \leqslant 0$, d'où $-v_n^2 - n - 1 \leqslant -n-1$.
c'est-à-dire $v_{n+1} \leqslant -(n+1)$.
Ainsi, pour tout entier naturel n, $v_n \leqslant -n$.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} (-n) = -\infty$ donc, d'après un théorème de comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.

> **1.** On détermine une suite qui minore (u_n) et de limite $+\infty$.

> **2.** On détermine une suite qui majore (v_n) et de limite $-\infty$.

10 Appliquer le théorème des gendarmes

(w_n) est la suite définie pour tout entier $n \geqslant 1$, par $w_n = \dfrac{\cos(n)}{\sqrt{n}}$. Démontrer que la suite (w_n) converge.

Solution

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1$, d'où
$-\dfrac{1}{\sqrt{n}} \leqslant \dfrac{\cos(n)}{\sqrt{n}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.
Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-1}{\sqrt{n}} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$, (suites de référence), donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$.

> Pour tout $n \geqslant 1$, $\sqrt{n} > 0$ donc on divise chaque membre par $\sqrt{n}$ sans changer le sens des inégalités.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 9

11 La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par:
$$u_n = n^2 + \frac{2n+1}{3n+2}.$$
a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n^2$.
b) En déduire que (u_n) diverge vers $+\infty$.

Sur le modèle de l'exercice résolu 10

12 (w_n) est la suite définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par $w_n = \dfrac{\cos(n) + 2\sin(n)}{n^2}$.
a) Démontrer que pour tout $n \geqslant 1$, $\dfrac{-3}{n^2} \leqslant w_n \leqslant \dfrac{3}{n^2}$.
b) En déduire que (w_n) converge vers 0.

Exercices
- 13 à 15 (ci-contre)
- 51 à 61

4 Opérations et limites

Vidéo
JAICOMPRIS.COM
Ces notions sont présentées en vidéo

(u_n) et (v_n) sont deux suites numériques définies sur $\mathbb{N}$ et ℓ, ℓ' désignent des nombres réels. On admet les **règles opératoires** qui suivent.

A Somme et produit de deux suites

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dots$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dots$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = \dots$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	$-\infty$

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dots$	ℓ	$\ell>0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dots$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n \times v_n) = \dots$	$\ell\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

Dans les cas notés FI (Forme indéterminée), on ne peut pas conclure immédiatement et tout résultat est possible. Dans un tel cas, il faut **lever l'indétermination** en changeant l'écriture.

Exemple : cas de FI « $\infty - \infty$ »

Dans chacun des cas ci-dessous, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$,
- $u_n = n$ et $v_n = -n$, alors $u_n + v_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = 0$.
- $u_n = n$ et $v_n = -2n$, alors $u_n + v_n = -n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = -\infty$.
- $u_n = 2n$ et $v_n = -n$, alors $u_n + v_n = n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = +\infty$.

B Quotient de deux suites

(v_n) est une suite telle que pour tout entier naturel n, $v_n \neq 0$.

- Cas où $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n \neq 0$

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dots$	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dots$	$\ell'\neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	$\ell'>0$	$\ell'<0$	$\ell'>0$	$\ell'<0$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = \dots$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

- Cas où $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dots$	$\ell>0$ ou $+\infty$	$\ell<0$ ou $-\infty$	$\ell>0$ ou $+\infty$	$\ell<0$ ou $-\infty$	0
et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dots$	0 en restant positif	0 en restant positif	0 en restant négatif	0 en restant négatif	0
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = \dots$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

Exemple

(w_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = \dfrac{1}{n^2+1}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} (n^2+1) = +\infty$ donc d'après une règle opératoire ci-dessus, $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$.

EXERCICE RÉSOLU

13 Appliquer les règles opératoires sur les limites

Dans chaque cas, étudier la limite de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

a) $u_n = n^2 + 8n + 10$ **b)** $u_n = n^2 - 200n$ **c)** $u_n = \dfrac{2n^2 + 3n}{10n^2 - 4}$

Solution

a) $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} 8n = +\infty$ (suites de référence)

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (n^2 + 8n + 10) = +\infty$ (limite d'une somme).

b) $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} (-200n) = -\infty$ (suites de référence).

On ne peut pas conclure pour la limite de la suite (u_n), on est en présence d'une forme indéterminée du type « $\infty - \infty$ ».

Or, pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = n^2\left(1 - \dfrac{200}{n}\right)$.

$\lim\limits_{n \to +\infty}\left(-\dfrac{200}{n}\right) = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty}\left(1 - \dfrac{200}{n}\right) = 1$ (limite d'une somme).

De plus, $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} n^2\left(1 - \dfrac{200}{n}\right) = +\infty$ (limite d'un produit).

> Pour l'étude de la limite d'une suite (u_n) définie par $u_n = \mathrm{P}(n)$ où P est une fonction polynôme, on aboutit parfois à une forme indéterminée.
> Il suffit alors de factoriser par le terme de plus haut degré de $\mathrm{P}(n)$.

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} 2n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} 3n = +\infty$ (suites de référence) donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (2n^2 + 3n) = +\infty$ (limite d'une somme).

$\lim\limits_{n \to +\infty} 10n^2 = +\infty$ (suite de référence) donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (10n^2 - 4) = +\infty$ (limite d'une différence).

On ne peut pas conclure pour la limite de la suite (u_n) : on est en présence d'une forme indéterminée du type « $\dfrac{\infty}{\infty}$ ».

Or, pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = \dfrac{n^2\left(2 + \dfrac{3}{n}\right)}{n^2\left(10 - \dfrac{4}{n^2}\right)} = \dfrac{2 + \dfrac{3}{n}}{10 - \dfrac{4}{n^2}}$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{3}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty}\left(2 + \dfrac{3}{n}\right) = 2$ (limite d'une somme).

$\lim\limits_{n \to +\infty}\left(-\dfrac{4}{n^2}\right) = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty}\left(10 - \dfrac{4}{n^2}\right) = 10$ (limite d'une différence).

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \dfrac{2}{10} = \dfrac{1}{5}$ (limite d'un quotient).

> Pour l'étude de la limite d'un quotient $\dfrac{a_n}{b_n}$, on aboutit parfois à une forme indéterminée du type « $\dfrac{\infty}{\infty}$ ».
> On peut alors penser à mettre en facteur dans a_n et dans b_n le terme prépondérant qui tend « le plus vite » vers l'infini.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 13

14 Dans chaque cas, étudier la limite de la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

a) $u_n = 13n - 6 + \sqrt{n}$

b) $v_n = 2n - 30\sqrt{n} + 4$

c) $w_n = \dfrac{100n}{2n + 3}$

15 (u_n) et (v_n) sont les suites définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = n^3 - n^2 - 20n + 1 \text{ et } v_n = \frac{11n^2 - 3n + 1}{13n + 10}.$$

Pour étudier la limite de chacune de ces suites :

a) justifier que l'utilisation des règles opératoires conduit à une forme indéterminée ;

b) transformer l'écriture du terme général et lever l'indétermination.

Savoir-faire **Algo** python

Vidéo JAICOMPRIS.COM
Un autre exercice Algo/python résolu en vidéo

EXERCICE RÉSOLU

16 Utiliser un algorithme de seuil

Cours 2

Une entreprise du secteur « Bâtiments et Travaux Publics » doit réduire la quantité de déchets qu'elle rejette pour respecter une norme environnementale. En 2017, elle produit 44 000 tonnes de déchets par an. La direction s'engage, à terme, à rejeter moins de 4 500 tonnes de déchets par an. On modélise par d_n la masse, en millier de tonnes, de déchets pour l'année $2017 + n$, avec $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, $d_0 = 44$.

Une étude a montré que pour tout entier naturel n, $d_n = 4 + \dfrac{40{,}2}{0{,}005\mathrm{e}^n + 1}$.

a) Démontrer que la limite de la suite (d_n) est 4.

b) Au début de l'algorithme ci-contre, on affecte la valeur 0 à la variable n et on donne pour valeur à S un nombre réel positif.
En fin d'exécution, il renvoie le nombre d'années nécessaires n pour que la masse de déchets rejetés soit inférieure à S. Exécuter cet algorithme pas à pas avec $S = 42$.

c) Coder cet algorithme à l'aide d'une fonction écrite en langage Python.
Exécuter le programme obtenu avec $S = 4{,}5$ et interpréter le résultat renvoyé.

```
Tant que d ⩾ S
    n ← n + 1
    d ← 4 + 40,2/(0,005e^n + 1)
Fin Tant que
```

Solution

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} (0{,}005\mathrm{e}^n) = +\infty$ (suite de référence), donc par quotient $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{40{,}2}{0{,}005\mathrm{e}^n + 1} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n = 4$.

b) Les valeurs de d sont arrondies au millième.

n	0	1	2	3
d	44	43,661	42,768	40,531
$d \geqslant S$	Vrai	Vrai	Vrai	Faux

On utilise la calculatrice pour déterminer les termes successifs de la suite (d_n).

D'après ce modèle, l'entreprise rejetterait moins de 42 000 tonnes de déchets au bout de 3 ans, soit en 2020.

c) Avec le programme ci-contre, on exécute **Seuil(4,5)** et on obtient 10.
L'entreprise pourrait rejeter moins de 4 500 tonnes de déchets dans 10 ans soit en 2027.

```
>>> Seuil(4.5)
10
```

```python
from math import *

def D(n):
    y=4+40.2/(0.005*exp(n)+1)
    return y

def Seuil(S):
    n=0
    while D(n)>S:
        n=n+1
    return n
```

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 16

17 Le modèle de l'exercice 16 s'est avéré trop contraignant pour l'entreprise.
On modélise alors par e_n la masse, en millier de tonnes, de déchets pour l'année $2020 + n$, avec $n \in \mathbb{N}$.
Une étude a montré que pour tout entier naturel n,
$$e_n = 4{,}3 + \frac{80}{0{,}0001\mathrm{e}^n + 2{,}0966}.$$
a) Déterminer la limite de la suite (e_n).
b) Adapter, puis exécuter le programme Python de l'exercice 16 pour déterminer en quelle année l'entreprise pourrait respecter la norme.

18 Une toute nouvelle entreprise de recyclage a traité en 2019 un volume de 500 m^3 de plastique. Les dirigeants estiment pouvoir améliorer le volume recyclé tous les ans. On modélise alors par r_n le volume, en m^3, de plastique recyclé pour l'année $2019 + n$, avec $n \in \mathbb{N}$. Une étude a montré que pour tout entier naturel n, $r_n = 1000 - \dfrac{500}{\mathrm{e}^n}$.
a) Calculer le volume, en m^3, recyclé en 2020. *Arrondir à l'unité.*
b) Déterminer la limite de la suite (r_n).
c) Utiliser un programme écrit en langage Python pour déterminer en quelle année l'entreprise pourrait retraiter plus de 980 m^3 de plastique.

Limite infinie d'une suite

Cours 1

Questions flash — À l'oral

19 Une suite (u_n) a pour limite $+\infty$.
Dans chaque cas, dire si l'intervalle contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang.
a) $]-\infty\,;60[$ **b)** $]-3\,;+\infty[$ **c)** $]10^9\,;+\infty[$

20 Dans chaque cas, déterminer mentalement si la suite diverge vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.
a) Pour tout entier naturel n, $u_n = -n + 200$.
b) Pour tout entier naturel n, $v_n = n + 200$.
c) Pour tout entier naturel n, $w_n = -n - 200$.
d) Pour tout entier naturel n, $t_n = n - 200$.

21 La suite (v_n) a pour limite $-\infty$.
Florent affirme : « Il est possible que seul un nombre fini de termes de la suite soient négatifs ».
Donner un argument à l'oral qui explique son erreur.

22 Donner à l'oral le terme général de deux suites qui divergent vers $+\infty$ et de deux autres suites qui divergent vers $-\infty$.

23 (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$u_n = 2n^3 + 1.$$
a) Tabuler les premiers termes de la suite à l'aide de la calculatrice.
b) Conjecturer la limite de la suite (u_n).
c) Déterminer à l'aide de la calculatrice un entier naturel n tel que $u_n \in\,]10\,000\,;+\infty[$.

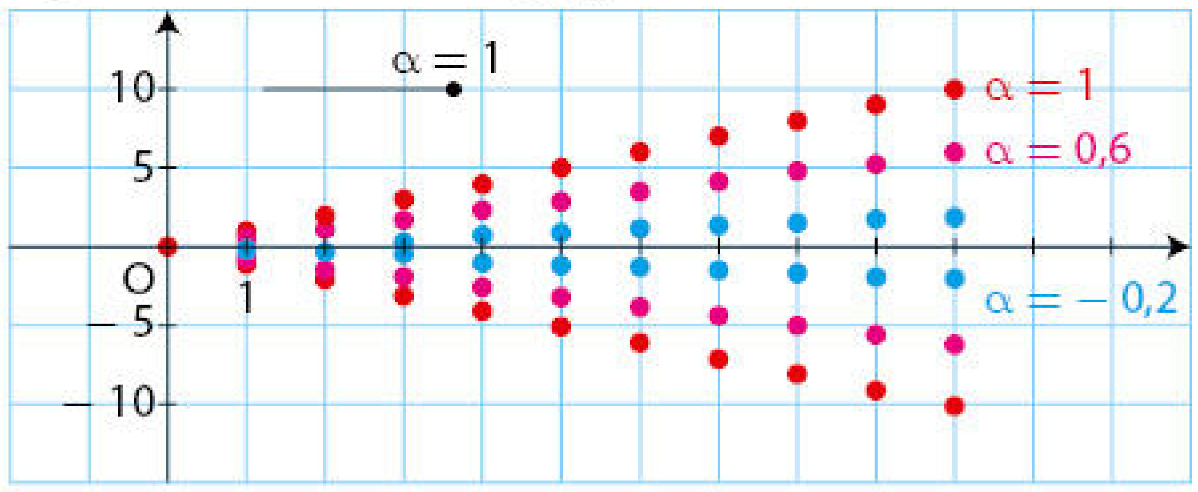
24 (v_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$v_n = n^2 + n.$$
a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^2 + x > 10\,000$.
b) En déduire un rang à partir duquel $v_n > 10\,000$.
c) Trouver de même un rang à partir duquel $v_n > 10^9$.
d) Conjecturer la limite de la suite.

25 La suite (h_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$h_n = 6 - 2n.$$
A désigne un nombre réel quelconque.
a) À partir de quel entier naturel n a-t-on :
- $h_n < -10$?
- $h_n < -100$?

b) À partir de quel entier naturel n a-t-on $h_n < A$?
c) En déduire la limite de la suite (h_n).

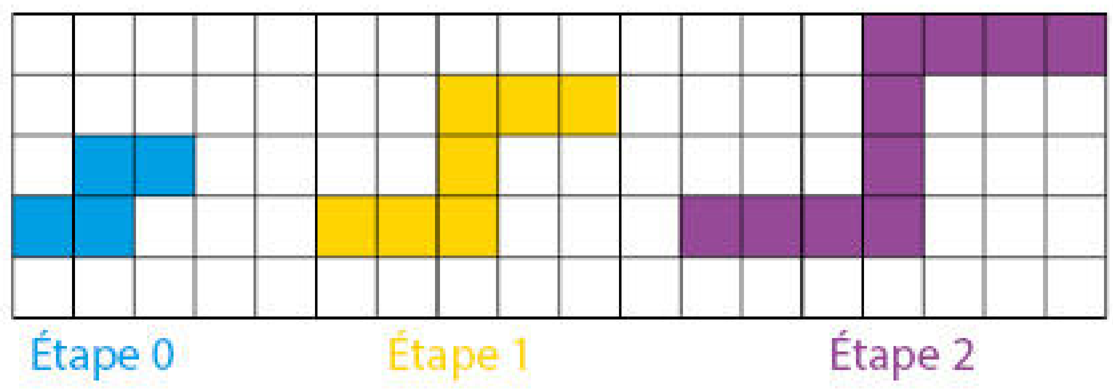
26 (t_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $t_n = -n^2$.
A désigne un nombre réel négatif quelconque.
a) À partir de quel entier naturel n a-t-on $-n^2 < A$?
b) En déduire la limite de la suite (t_n).

27 La suite (C_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $C_n = \alpha n$ où α est un nombre réel non nul.
a) À l'aide de la représentation graphique ci-dessous, conjecturer la limite de (C_n) selon les valeurs de α.



b) On suppose ici que $\alpha > 0$ et on nomme A un nombre réel positif quelconque.
À partir de quel entier naturel n a-t-on $\alpha n > A$?
c) En déduire la limite de la suite (C_n) si $\alpha > 0$.
d) Adapter les réponses aux questions **b)** et **c)** pour déterminer la limite de la suite (C_n) si $\alpha < 0$.

28 On construit une suite de figures et on nomme c_n le nombre de carreaux de la figure à l'étape n ($n \in \mathbb{N}$).



a) Exprimer c_n en fonction de n.
b) À partir de quelle étape la figure compte-t-elle plus de 10 000 carreaux ?
c) Établir la limite de la suite (c_n).

29 Algo python

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$u_n = -\sqrt{n^2 + 1}.$$
On donne le programme ci-contre écrit en langage Python.

```
from math import *

def U(n):
    y=-sqrt(n**2+1)
    return y

def Seuil(S):
    n=0
    while U(n)>=S:
        n=n+1
    return n
```

a) Expliquer son rôle.
b) Saisir ce programme et exécuter la fonction **Seuil** pour $S = -100$, puis pour $S = -1\,000$.
c) Conjecturer la limite de la suite (u_n).

Limite finie d'une suite

Cours 2

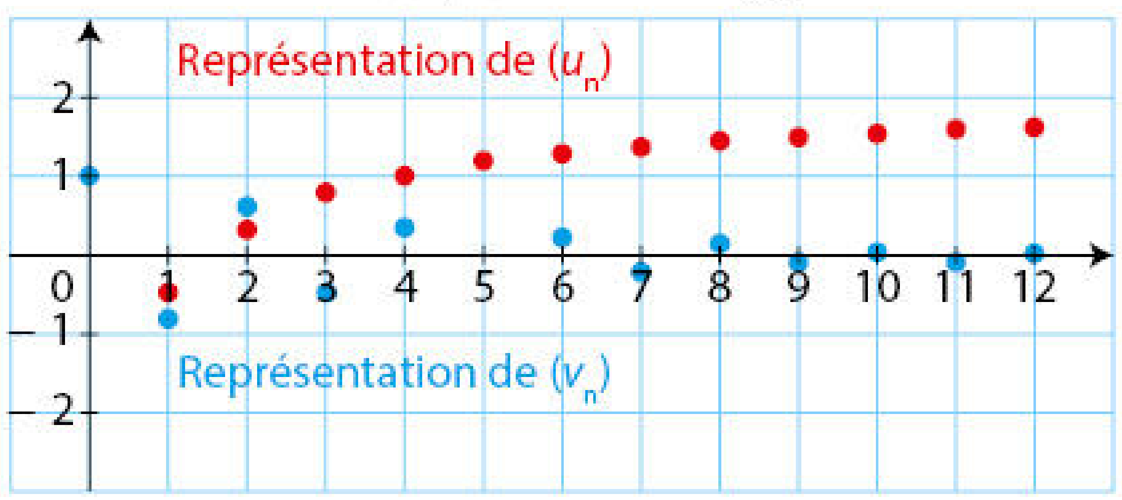
Questions flash — À l'oral

30 Une suite (u_n) a pour limite 5.
Dans chaque cas, dire si l'intervalle contient tous les u_n à partir d'un certain rang.
a) $]-6\,;6[$ **b)** $]5{,}1\,;+\infty[$ **c)** $]4{,}99\,;5{,}2[$

31 Dans chaque cas, déterminer mentalement si la suite converge ou diverge.
a) Pour tout entier naturel n, $u_n = -\dfrac{n}{200}$.
b) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $v_n = \dfrac{200}{-n}$.
c) Pour tout entier naturel n, $w_n = -n + 1$.
d) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $t_n = \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$.

32 La suite (h_n) a pour limite 0,2.
Hélène affirme « À partir d'un certain rang tous les termes de la suite sont positifs ».
Justifier à l'oral son affirmation.

33 Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,
$$u_n = \frac{2n-3}{n+1} \text{ et } v_n = \frac{(-1)^n}{1{,}3^{n+1}}.$$



Conjecturer par lecture graphique les limites des deux suites (u_n) et (v_n).

34 (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{n+1}{n+2}$.

n	8	98	998	9 998	$10^9 - 2$
u_n	0,9	0,99			

a) Recopier et compléter le tableau de valeurs ci-dessus.
b) Conjecturer la limite de la suite (u_n).

35 (e_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $e_n = \dfrac{10}{n+1}$.
a) Démontrer que pour tout $n \geqslant 100$, $-10^{-1} \leqslant e_n \leqslant 10^{-1}$.
b) Déterminer à partir de quel entier naturel n,
$$-10^{-5} \leqslant e_n \leqslant 10^{-5}.$$
c) Conjecturer la limite de la suite (e_n).

36 (I_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $\mathrm{I}_n = 5 - \dfrac{1}{n}$.
a) À partir de quel entier naturel n, $4{,}9 < \mathrm{I}_n < 5{,}1$?
b) À partir de quel entier naturel n, $4{,}99 < \mathrm{I}_n < 5{,}01$?
c) $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ désignent deux nombres réels.
Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,
$$5 - \alpha < \mathrm{I}_n < 5 + \beta \text{ équivaut à } 5 - \alpha < \mathrm{I}_n < 5.$$
d) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,
$$5 - \alpha < \mathrm{I}_n < 5 \text{ équivaut à } \frac{1}{\alpha} < n.$$
e) En déduire la limite de la suite (I_n).

37 Dans chaque cas, représenter graphiquement dans un repère un exemple de suite (F_n) telle que :
a) (F_n) est croissante et converge vers 4 ;
b) (F_n) est décroissante et converge vers 4 ;
c) (F_n) n'est ni croissante ni décroissante et converge vers 4.

38 Algo python
Une analyse médicale révèle une quantité de 10^6 bactéries par mL d'urine prélevée. Le médecin prescrit des antibiotiques pour guérir l'infection.
On modélise par q_n le nombre de milliers de bactéries par mL d'urine après n jours de traitement.
Ainsi, $q_0 = 1\,000$.
On estime que pour tout entier naturel n,
$$q_{n+1} = \sqrt{q_n} + \frac{q_n}{n+3}.$$
a) Calculer les termes q_1 et q_2.
b) Afficher la représentation graphique de la suite (q_n) à l'écran de la calculatrice et conjecturer sa limite.
c) Voici un programme écrit en langage Python.
Expliquer son rôle.

```
from math import *

def Seuil(S):
    n=0
    q=1000
    while q>S:
        q=sqrt(q)+q/(n+3)
        n=n+1
    return n
```

d) On estime qu'une quantité normale de bactéries est inférieure à $1{,}2 \times 10^3$ unités par mL d'urine.
Exécuter le programme en choisissant une valeur adaptée pour S afin de connaître le nombre de jours suffisant pour le traitement antibiotique.

39 Sandrine affirme : « La suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 2 \times (-1)^n$ converge. En effet, comme les termes sont tous compris entre -2 et 2, la limite de la suite est 0 ». A-t-elle raison ? Justifier.

Limite et comparaison

Cours 3

Questions flash — À l'oral

40 Dans chaque cas, dire à quelle suite de référence on peut comparer la suite (u_n) et préciser sa limite.

a) $u_n = -n^2 - 5$ **b)** $u_n = \sqrt{n} + 3$

41 Rappeler à l'oral quel théorème (comparaison ou gendarmes) permet de démontrer qu'une suite est convergente et lequel permet de démontrer qu'une suite est divergente.

42 La suite (h_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $h_n = \sqrt{n^2 + n}$.

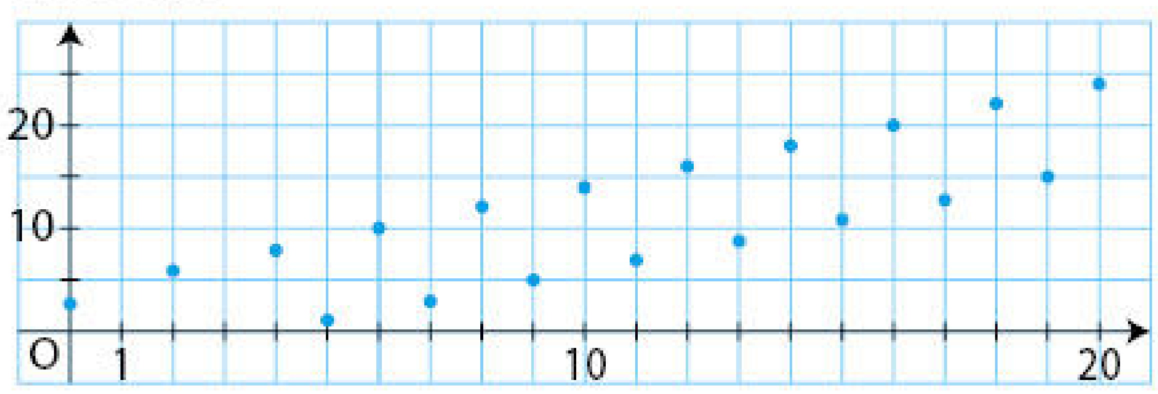
a) Tabuler les premières valeurs de la suite à l'écran de la calculatrice.

b) Conjecturer la limite de la suite (h_n).

c) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $h_n \geqslant n$.

d) Démontrer la conjecture émise à la question **b)**.

43 La suite (t_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $t_n = n + 4(-1)^n$. Sa représentation graphique est donnée dans le repère ci-dessous.



a) Conjecturer la limite de la suite (u_n).

b) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $t_n \geqslant n - 4$.

c) En déduire que la suite (t_n) diverge vers $+\infty$.

d) Fred affirme : « Si une suite tend vers $+\infty$, alors elle est nécessairement croissante à partir d'un certain rang ». Justifier que cette affirmation est fausse.

44 (c_n) est la suite définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par $c_n = \dfrac{2^n}{n}$.

a) Tabuler la suite (c_n) à l'écran de la calculatrice et conjecturer sa limite.

b) Démontrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 4$,
$$n^2 - 2n - 1 \geqslant 0.$$

c) En déduire que, pour tout entier naturel $n \geqslant 4$,
$$2n^2 \geqslant (n+1)^2.$$

d) Démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 4$, $2^n \geqslant n^2$.

e) En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 4$, $c_n \geqslant n$.

f) Démontrer la conjecture émise à la question **a)**.

45 (e_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $e_n = \dfrac{1}{n+5}$.

a) Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,
$$0 \leqslant e_n \leqslant \frac{1}{n}.$$

b) En déduire que la suite (e_n) converge vers 0.

46 La suite (i_n) vérifie pour tout entier naturel $n \geqslant 20$,
$$-2 - \frac{1}{n} \leqslant i_n \leqslant -2 + \frac{3}{n}.$$
Démontrer que la suite (i_n) est convergente et préciser sa limite.

47 La suite (f_n) vérifie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,
$$4 - \frac{2}{n} \leqslant f_n \leqslant 4 - \frac{1}{n}.$$

a) Démontrer que la suite (f_n) est convergente et préciser sa limite.

b) Proposer une expression possible d'une telle suite.

48 (c_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $c_n = -4e^{2n+3}$.

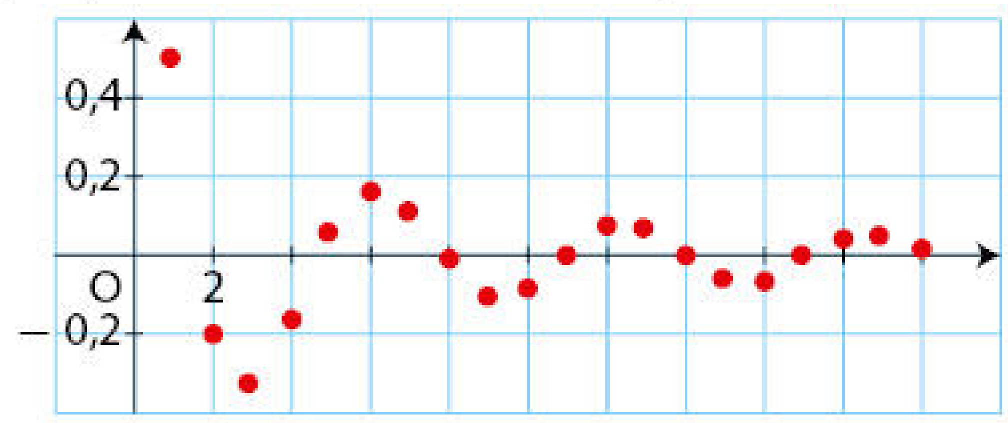
a) Démontrer que pour tout entier naturel n,
$$c_n \leqslant -4 \times e^n.$$

b) Déterminer alors la limite de la suite (c_n).

Vidéo

JAICOMPRIS.COM — Cet exercice est corrigé en vidéo

49 La suite (w_n) est définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par $w_n = \dfrac{\cos(n)}{n}$. Sa représentation graphique est donnée dans le repère ci-dessous.



a) Conjecturer la limite de la suite (w_n).

b) Démontrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,
$$\frac{-1}{n} \leqslant \frac{\cos(n)}{n} \leqslant \frac{1}{n}.$$

c) En déduire que (w_n) est une suite convergente.

50 Les suites (a_n), (b_n), (c_n) vérifient pour tout entier naturel n,
$$a_n \leqslant -n \leqslant n^3 b_n \leqslant 2n^2 \leqslant c_n.$$

a) Démontrer que les suites (a_n) et (c_n) sont divergentes. Préciser leurs limites.

b) Démontrer que la suite (b_n) converge. Préciser sa limite.

c) Proposer un exemple de telles suites.

Opérations et limites

Cours 4

Questions flash — À l'oral

51 (u_n) et (v_n) sont deux suites telles que :
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 12 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} v_n = -4.$$
Dans chaque cas, étudier mentalement la limite de la suite.

a) $(u_n + v_n)$ **b)** $(u_n - 2v_n)$ **c)** $(u_n \times v_n)$

d) $(u_n{}^2)$ **e)** $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ **f)** $\left(\dfrac{u_n + 3v_n}{u_n + v_n}\right)$

52 (u_n) et (v_n) sont deux suites telles que :
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \text{ et } \lim_{n\to+\infty} v_n = 10.$$
Dans chaque cas, donner mentalement la limite de la suite ou bien indiquer si l'on est en présence d'une forme indéterminée.

a) $(v_n - u_n)$ **b)** $(u_n(10 - v_n))$

c) $\left(\dfrac{v_n}{u_n}\right)$ **d)** $\left(\dfrac{10 - v_n}{u_n}\right)$

Pour les exercices 53 et 54, étudier la limite de chaque suite.

53 a) Pour tout entier naturel n, $u_n = n + n^2$.

b) Pour tout entier naturel n, $v_n = n\sqrt{n}$.

c) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $w_n = 2n - \dfrac{1}{n}$.

d) Pour tout entier naturel n, $h_n = \dfrac{1}{n^2 + 3}$.

54 a) Pour tout entier naturel n, $u_n = 8{,}2 - 4\sqrt{n}$.

b) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $v_n = \dfrac{4}{n} + \dfrac{2}{\sqrt{n}} + 1$.

c) Pour tout entier naturel n, $w_n = (8 - n)(2n^2 + 1)$.

d) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $a_n = \left(5 - \dfrac{1}{n}\right)(2 - \sqrt{n})$.

e) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $b_n = \dfrac{4 + n}{2 - \dfrac{1}{n}}$.

f) Pour tout entier naturel n, $c_n = \dfrac{40}{2n + 3}$.

55 (u_n) et (v_n) sont deux suites telles que :
$$\lim_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = 4 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 6.$$
a) À l'aide d'une somme, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} 2u_n = 10$.

b) En déduire que (u_n) converge et préciser sa limite.

c) Déterminer enfin la limite de la suite (v_n).

56 a) (u_n) et (v_n) sont définies sur $\mathbb{N}$ par :
$$u_n = 4 - 0{,}5n \text{ et } v_n = 0{,}5n.$$
Montrer $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = 4$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n) = -\infty$.

b) Définir deux suites (a_n) et (b_n) telles que :
$$\lim_{n\to+\infty} (a_n + b_n) = +\infty \text{ et } \lim_{n\to+\infty} (a_n b_n) = -7.$$

57 Algo

Un nouveau médicament est très efficace mais présente des effets indésirables dus à une substance agressive pour les cellules sanguines. La modélisation a permis d'évaluer la quantité q_n (en $\text{cL} \cdot \text{L}^{-1}$) de substance dans le sang, n heures après l'injection. La substance n'est plus agressive dès que son volume par litre de sang est inférieur à 0,01 cL.

On admet que pour tout n de $\mathbb{N}$, $q_n = \dfrac{100}{35e^n + 15}$.

a) À l'aide de la calculatrice, conjecturer la valeur de la quantité de substance à très long terme.

b) Déterminer la limite de (q_n).

c) Au début de l'algorithme ci-contre, on affecte la valeur 0 à n, la valeur 2 à q. En fin d'exécution, il renvoie le nombre d'heures nécessaire afin que la quantité de substance n'ait plus d'effet indésirable. Recopier et compléter cet algorithme.

```
Tant que ...
    n ← n + 1
    q ← ...
Fin Tant que
```

d) Indiquer ce nombre d'heures.

Pour les exercices 58 à 60, déterminer la limite de la suite (u_n) après avoir levé l'indétermination.

58 Pour tout entier naturel n, $u_n = -n^2 + 4n + 2$.

59 Pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{n + 1}{n + 2}$.

60 Pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{40n + 1}{n^2 + 2}$.

61 Voici un écran de calcul formel.

1	$u(n) := 2n\sqrt{n} - n^2$
	→ $u(n) := -n^2 + 2\sqrt{n}\,n$
2	Limite(u(n), $+\infty$)
	→ $-\infty$

a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = n\sqrt{n}(2 - \sqrt{n})$.

b) Justifier la limite obtenue.

Pour se tester

EXO Exercices interactifs

62 QCM **Dans chaque cas, donner la réponse exacte sans justifier.**

		A	B	C	D
1	(a_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $a_n = -6n^2 - n$. Alors …	$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty$	$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -7$	$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -6$	$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$
2	Une suite (b_n) converge vers 1. Il est possible que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, …	$b_n = \dfrac{1}{n}$	$b_n = \dfrac{n^2+n}{1-2n^2}$	$b_n = \dfrac{e^n}{e}$	$b_n = \dfrac{\sin(n)+n}{n}$
3	Pour tout $n \geqslant 1$, on sait que $\dfrac{2n-4}{n} \leqslant c_n \leqslant 2 + \dfrac{1}{n}$. Alors …	$\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = -\infty$	$\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 0$	$\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 2$	$\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = +\infty$
4	(e_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $e_n = \dfrac{n+1}{5n+2}$. Alors …	$\lim\limits_{n\to+\infty} e_n = 0$	$\lim\limits_{n\to+\infty} e_n = 0{,}2$	$\lim\limits_{n\to+\infty} e_n = 0{,}5$	$\lim\limits_{n\to+\infty} e_n = +\infty$

63 QCM **Dans chaque cas, donner la (ou les) réponse(s) exacte(s) sans justifier.**

		A	B	C	D
1	Une suite (d_n) n'a pas de limite. Il est possible que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, …	$d_n = n(-1)^n$	$d_n = n - 2(-1)^n$	$d_n = \cos(n)$	$d_n = \dfrac{n^2}{n+(-1)^n}$
2	Une suite (u_n) converge vers 0 et n'a aucun terme nul. Alors la suite (w_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = \dfrac{1}{u_n}$ …	peut converger vers 0	peut diverger vers $+\infty$	peut diverger vers $-\infty$	peut ne pas avoir de limite
3	Les suites (u_n), (v_n) et (w_n) vérifient : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$, $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 5$ et pour tout n, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$. Alors il est certain que …	(v_n) est convergente	$4 \leqslant v_n \leqslant 5$ à partir d'un certain rang	$3 \leqslant v_n \leqslant 6$ à partir d'un certain rang	(nv_n) diverge vers $+\infty$

64 Vrai/Faux **Dans chaque cas, dire si l'affirmation est vraie ou fausse en justifiant.**

1 Une suite $(u_n + v_n)$ est convergente.
Affirmation : les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.

2 **Affirmation** : il existe deux suites (u_n) et (v_n) telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n = 10$.

3 (u_n) est une suite convergente et n'a aucun terme nul.
Affirmation : la suite $\left(u_n + \dfrac{1}{u_n}\right)$ est convergente.

4 (w_n) est une suite définie par $w_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $w_{n+1} = w_n^4 + n - 500$.
Affirmation : $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = +\infty$.

Vérifiez vos réponses : p. 529

65 Critiquer une conjecture

(u_n) est la suite définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par $u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Thomas affirme : « Sachant que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, je pense que la limite de la suite (u_n) est un nombre réel ».

Rédiger l'étude de la limite de la suite (u_n) en suivant le guide ci-dessous.

(1) Étudier le sens de variation de la suite $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$: pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{\ldots}{\sqrt{n+1}\sqrt{n}}$. Or, la fonction racine carrée est ... sur $[0\,;+\infty[$ donc $\sqrt{n} \ldots \sqrt{n+1}$ et $\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \ldots 0$. Donc la suite $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ est ...

(2) Tirer des conséquences : donc pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ et pour tout entier naturel k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$, $\frac{1}{\sqrt{n}} \ldots \frac{1}{\sqrt{k}} \ldots 1$.

(3) Utiliser un théorème de comparaison : donc pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_n \geqslant \ldots$ c'est-à-dire $u_n \geqslant \sqrt{n}$. Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = \ldots$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ldots$

(4) Conclure : rédiger une phrase de conclusion.

66 Distinguer une implication et sa réciproque

(u_n) est une suite de nombre réels. On admet la propriété suivante :

> **Si** la suite (u_n) est convergente, **alors** il existe deux réels m et M tels que pour tout entier naturel n, $m \leqslant u_n \leqslant \text{M}$.

1. Énoncer la réciproque de la propriété encadrée.

2. Problème 1 : (v_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = 4 + \frac{10 \times (-1)^n}{n+1}$.

a) Démontrer à l'aide du théorème des gendarmes que la suite (v_n) converge vers 4.
b) Démontrer que pour tout $n \geqslant 9$, $3 \leqslant v_n \leqslant 5$.
c) À l'aide d'un tableau de valeurs, déterminer le plus grand et le plus petit des dix premiers termes de (v_n).
d) Donner alors deux nombres réels m et M tels que pour tout entier naturel n,
$$m \leqslant v_n \leqslant \text{M}.$$

3. Problème 2 : (w_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = 3 + 2 \times (-1)^n$.

a) Démontrer que pour tout n, $1 \leqslant w_n \leqslant 5$ mais que la suite (w_n) n'est pas convergente.
b) La réciproque énoncée à la question **1.** est-elle vraie ?

67 Utiliser une suite auxiliaire

(u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \frac{n^2}{e^n}$.

On se propose d'étudier la limite de la suite (u_n). Pour cela, on introduit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = nu_n$.

a) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 \times \frac{1}{e}$.

b) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, $\frac{v_{n+1}}{v_n} \leqslant 1$. En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, $v_n \leqslant v_3$.

c) En déduire la limite de la suite (u_n).

Vidéo
JAICOMPRIS.COM
Toutes les démonstrations au programme en vidéo

Liste des démonstrations :
- Divergence vers $+\infty$ d'une suite minorée par une suite divergeant vers $+\infty$.

Conseil
P et Q désignent des propositions.
La **réciproque** de l'implication « Si P, alors Q » est l'implication « Si Q, alors P ».
Quand une implication et sa réciproque sont toutes les deux vraies, on dit que P et Q sont deux **propositions équivalentes**.

Étudier la limite d'une suite

68 **PARCOURS DIFFÉRENCIÉS**

Parcours 1

(u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{1+2e^n}{e^n+3}$.

Démontrer que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.

Parcours 2

(v_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$v_n = \frac{11n + 4\sqrt{n}}{n\sqrt{n}+5}.$$

a) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$v_n = \frac{11 + \dfrac{4}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n} + \dfrac{5}{n}}.$$

b) Étudier alors la limite de la suite (v_n).

69 (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = 4n^2 - 8n + 1.$$

On se propose d'étudier la limite de la suite (u_n) de trois façons différentes.

1. a) Démontrer que pour tout n, $u_n = 4(n-1)^2 - 3$.

b) En déduire la limite de la suite (u_n).

2. Pour tout $n \geqslant 1$, mettre $4n^2$ en facteur dans l'expression de u_n et conclure pour la limite de (u_n).

3. a) Démontrer que pour tout $n \geqslant 4$, $u_n \geqslant 2n^2$.

b) En déduire la limite de la suite (u_n).

70 (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = an^2 + bn + c$, où $a \neq 0$, b et c sont trois nombres réels.

Discuter la limite de (u_n) selon les valeurs de a, b et c.

71 (s_n) est la suite définie par $s_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $s_{n+1} = s_n^2 + s_n + 4$.

a) Tabuler la suite à l'écran de la calculatrice et conjecturer la limite de la suite (s_n).

b) Prouver par récurrence que pour tout n, $s_n \geqslant n$.

c) En déduire la limite de la suite (s_n).

72 (d_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$d_n = \frac{n^2+2n+6}{n+1}.$$

a) Montrer que pour tout n, $d_n = n + 1 + \dfrac{5}{n+1}$.

b) En déduire la limite de la suite (d_n).

73 (u_n) est la suite définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par :

$$u_n = \frac{1}{n^2}\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right).$$

a) Démontrer que la suite (u_n) converge vers 0.

b) Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $v_n = \dfrac{1}{u_n}$ si $u_n \neq 0$ et $v_n = n$ sinon. Donner les douze premiers termes de (v_n).

c) Démontrer que si n est divisible par 8, alors $v_n = n$.

d) Démontrer que si $n+1$ est divisible par 8, alors $v_n \leqslant 0$.

e) En déduire que la suite (v_n) n'a pas de limite.

74 (v_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$v_n = \frac{3e^n + 8e^{2n}}{e^n + e^{3n}}.$$

a) Justifier que pour tout n, $v_n = \dfrac{3e^{-n}+8}{e^{-n}+e^n}$.

b) En déduire la limite de la suite (v_n).

75 Une suite (u_n) converge vers un nombre réel ℓ. (v_n) est la suite définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par $v_n = 8u_n + \dfrac{2}{n+1} + 14$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est convergente et exprimer sa limite en fonction de ℓ.

b) Déterminer la valeur de ℓ sachant que les deux suites (u_n) et (v_n) ont la même limite.

76 (S_n) est la suite définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, par :

$$S_n = \frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \ldots + \frac{n}{n}.$$

a) Justifier que $S_1 = 1$, $S_2 = 1{,}5$ et $S_3 = 2$.

b) Démontrer que pour tout $n \geqslant 1$, $S_n = 0{,}5n + 0{,}5$.

c) En déduire la limite de la suite (S_n).

Vidéo

JaiCompris.com — Cet exercice est corrigé en vidéo

77 (u_n) est la suite définie par $u_1 = 0$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = \dfrac{nu_n}{n+1} + n$.

a) Tabuler et représenter graphiquement la suite (u_n) à l'écran de la calculatrice. Conjecturer sa limite.

b) En s'appuyant sur la représentation graphique et sur les premiers termes, conjecturer une expression de $3u_n + 1$ en fonction de n.

c) Démontrer par récurrence que pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = \dfrac{1}{3}n^2 - \dfrac{1}{3}$. En déduire la limite de la suite (u_n).

78 (u_n) est la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = 2u_n^2$.

1. On suppose dans cette question que (u_n) est une suite convergente vers un nombre réel ℓ.

a) Exprimer la limite de $(2u_n^2)$ en fonction de ℓ.

b) Utiliser l'unicité de la limite pour expliquer pourquoi $\ell = 0$ ou $\ell = 0{,}5$.

2. a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_n \geqslant 1$.

b) En déduire que la suite (u_n) est divergente.

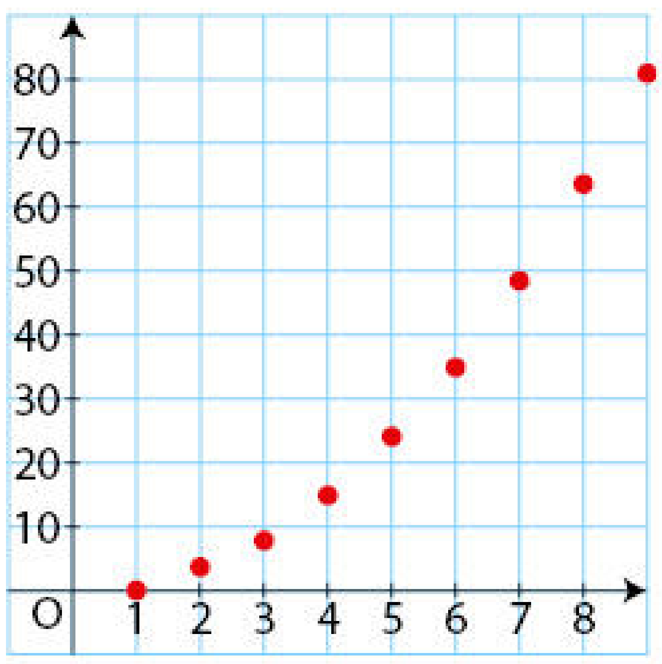
3. a) Peut-on changer le premier terme afin que la suite converge vers 0 ? Justifier.

b) Peut-on changer le premier terme afin que la suite converge vers 0,5 ? Justifier.

79 (v_n) est la suite définie définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par :

$$v_n = \frac{3}{n}[1 \times 0 + 2 \times 1 + \ldots + n \times (n-1)].$$

On a représenté la suite (v_n) dans le repère ci-contre.



a) Conjecturer la limite de la suite (v_n).

b) Justifier que $v_1 = 0$, $v_2 = 3$ et $v_3 = 8$.

c) Conjecturer une expression de v_n en fonction de n.

d) On admet la conjecture précédente.

Étudier la limite des deux suites (v_n) et $\left(\dfrac{v_n}{n^2}\right)$.

80 (u_n) est la suite définie par $u_1 = 1$, $u_2 = 1 + \dfrac{1}{1+2}$ et, pour tout entier naturel $n \geqslant 3$,

$$u_n = 1 + \frac{1}{1+2} + \ldots + \frac{1}{1+2+\ldots+n}.$$

1. Calculer les termes u_3 et u_4.

2. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose

$$v_n = \frac{1}{1+2+\ldots+n}.$$

a) Démontrer que pour tout $n \geqslant 1$, $v_n = \dfrac{2}{n} - \dfrac{2}{n+1}$.

b) En déduire que pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = 2 - \dfrac{2}{n+1}$.

c) Étudier alors les limites des suites (u_n) et (v_n).

d) Est-il vrai que : « La somme de n termes généraux qui tendent chacun vers 0 tend aussi vers 0 quand n tend vers $+\infty$ » ? Justifier.

Utiliser un théorème de comparaison

81 **PARCOURS DIFFÉRENCIÉS**

Parcours 1

(u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \sqrt{e^{2n} + 3}$.
Démontrer que la suite (u_n) a pour limite $+\infty$.

Parcours 2

(v_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \sqrt{e^{2n} + e^n + 1}$.

a) Justifier que, pour tout n, $e^{2n} + e^n + 1 \geqslant (e^n)^2$.

b) En déduire que, pour tout n, $v_n \geqslant e^n$.

c) Employer un théorème de comparaison pour conclure sur la limite de la suite (v_n).

Pour les exercices 82 à 84, déterminer une suite (v_n) de limite $-\infty$ telle que $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang et indiquer la limite de la suite (u_n).

82 Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_n = -\sqrt{n^2 + n}$.

83 Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_n = 1 - e^{12n}$.

84 Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_n = n\sin(n) - n^2$.

85 (u_n) est la suite définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par $u_n = n\cos\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$.

a) Lire sur la courbe représentative de la fonction cos dans un repère, son sens de variation sur $[0 ; \pi]$.

b) Justifier alors que pour tout $n \geqslant 3$, $u_n \geqslant \dfrac{n}{2}$.

c) En déduire la limite de la suite (u_n).

86 Jenny a ouvert un livret A et a déposé 5 000 €. Les intérêts composés sont de 0,5 % par an et, en chaque fin d'année, Jenny ajoutera 100 € sur son livret. On désigne par J_n la somme, en euro, sur son livret A après n années, avec $n \in \mathbb{N}$.

a) Démontrer que, pour tout n, $J_n \geqslant 5\,000 + 100n$.

b) En déduire la limite de la suite (J_n).

c) Tabuler la suite (J_n) à l'écran de la calculatrice et déterminer après combien d'années Jenny disposera de plus de 7 000 €.

87 Une suite (u_n) a pour limite $+\infty$, une suite (v_n) a pour limite 0 et ses termes sont tous positifs.
Dans chaque cas, déterminer la limite de la suite.

a) Pour tout entier naturel n, $a_n = u_n + (-1)^n v_n$.

b) Pour tout entier naturel n, $b_n = 2\sin(u_n) - \dfrac{1}{v_n}$.

88 (u_n) est la suite définie par $u_0 > 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$.

Trois amis émettent des conjectures.

Cyril affirme : « Tous les termes de la suite sont strictement positifs ».

Magali affirme : « La suite (u_n) diverge vers $+\infty$ quelle que soit la valeur du premier terme u_0 ».

Olivier rétorque : « La suite (u_n) peut converger si on choisit u_0 ni trop grand ni trop proche de 0 ».

a) L'affirmation de Cyril est-elle vraie ? Justifier.

b) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n^2 \geqslant 2n$.

c) L'une des affirmations de Magali et d'Olivier est-elle vraie ? Justifier.

89 (u_n) et (v_n) sont les suites définies par :

$$u_n = 2^n \text{ et } v_n = n^2.$$

On se propose d'étudier la limite de la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$.

a) Déterminer le plus petit nombre entier naturel $n \geqslant 2$ tel que $2^n \geqslant n^3$.

b) Étudier les variations de la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = 2x^3 - (x+1)^3$.

c) À l'aide des questions **a)** et **b)**, démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 10$,

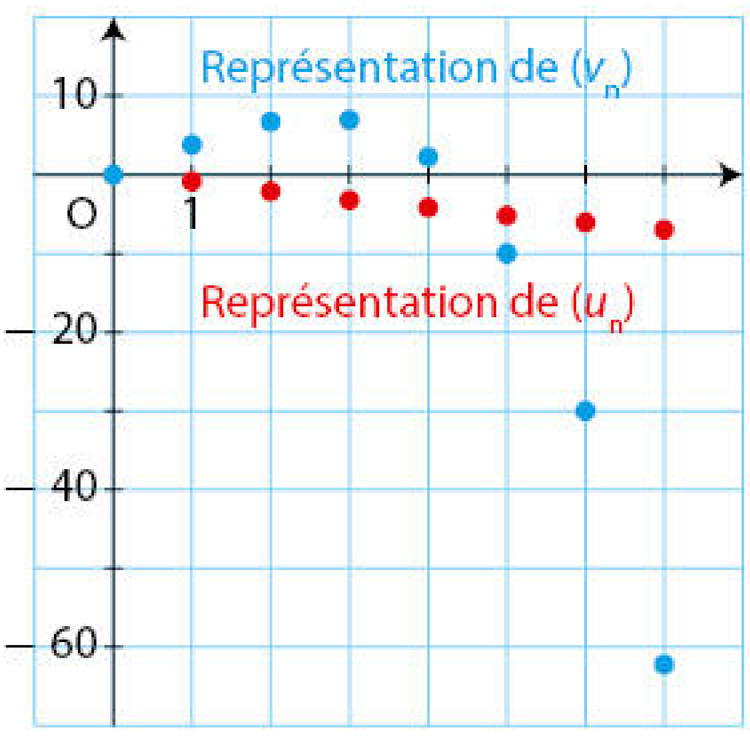
$$2^n \geqslant n^3.$$

d) En déduire la limite de la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$.

90 (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = -n$.

(v_n) est la suite définie par $v_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 1{,}02\,v_n - n^2 + 4$.

Voici les représentations graphiques des deux suites.



a) Quelle conjecture peut-on émettre quant à la comparaison des deux suites ?

b) Démontrer la conjecture émise.

c) En déduire la limite de la suite (v_n).

Utiliser le théorème des gendarmes

91 **PARCOURS DIFFÉRENCIÉS**

Parcours 1

(u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \frac{n^2 + (-1)^n n}{n^2 + 6}$.

Démontrer que la suite (u_n) converge et préciser sa limite.

Parcours 2

(v_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \frac{n + \cos(n)}{n^2 + 4}$.

a) Justifier que, pour tout n, $\frac{n-1}{n^2+4} \leqslant v_n \leqslant \frac{n+1}{n^2+4}$.

b) Pour tout n, on pose $u_n = \frac{n-1}{n^2+4}$ et $w_n = \frac{n+1}{n^2+4}$.

Déterminer les limites de ces deux suites en factorisant.

c) Déterminer la limite de la suite (v_n) avec le théorème des gendarmes et conclure.

92 (u_n) est la suite définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par $u_n = \frac{1}{n}\sqrt{n^2+4}$.

a) Montrer que pour tout n, $n^2 \leqslant n^2 + 4 \leqslant (n+2)^2$.

b) En déduire que pour tout $n \geqslant 1$, $1 \leqslant u_n \leqslant 1 + \frac{2}{n}$.

c) En déduire la limite de la suite (u_n).

93 (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}.$$

Un tableau de valeurs, arrondies au millième si besoin, est donné ci-dessous.

n	0	1	10	100	1 000	10 000
u_n	1	0,414	0,154	0,05	0,016	0,005

a) Conjecturer la limite de (u_n).

b) Démontrer que pour tout n, $u_n(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = 1$.

c) En déduire que pour tout $n \geqslant 1$, $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

d) En déduire la limite de la suite (u_n).

94 (u_n) est la suite définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par $u_n = e^{\frac{8}{n}}$.

a) Démontrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - 4x - 1$ est décroissante sur $[0\,;1]$.

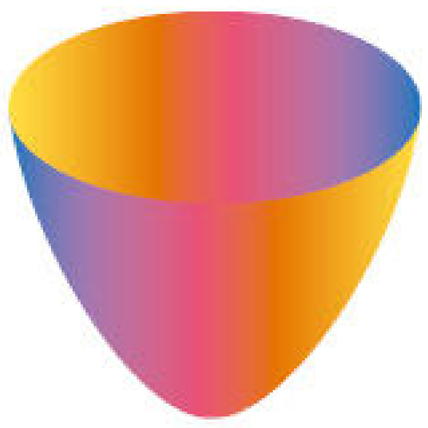
b) En déduire que pour tout réel x tel que $0 \leqslant x \leqslant 1$,

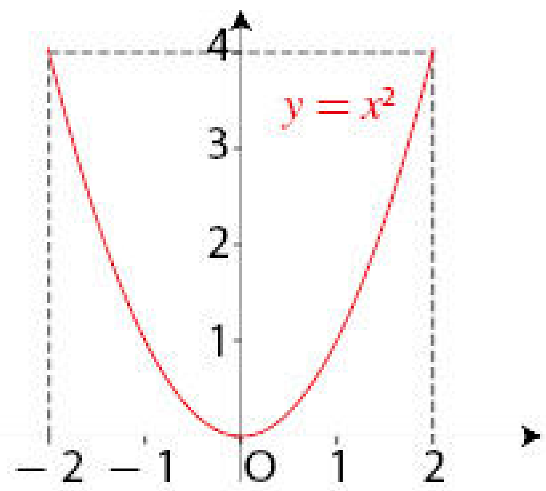
$$1 \leqslant e^x \leqslant 1 + 4x.$$

c) Montrer que pour tout $n \geqslant 8$, $1 \leqslant u_n \leqslant 1 + \frac{1}{2n}$.

d) En déduire la limite de la suite (u_n).

95 Un créateur de parfum décide de commercialiser son nouveau produit dans des flacons ayant la forme suivante :



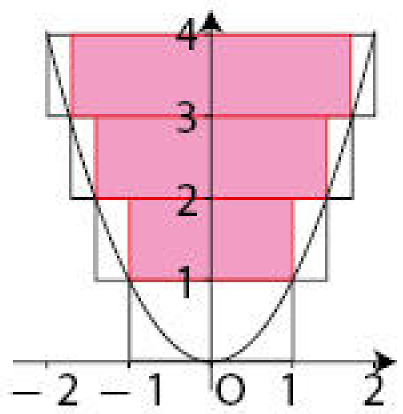


Cette forme, appelée paraboloïde, est obtenue par rotation de la parabole d'équation $y = x^2$ autour de l'axe des ordonnées d'un repère orthonormé (*unité* : 1 cm).

Le créateur souhaite calculer le volume V, en cm^3, de ce flacon.

1. Un cas particulier : $n = 4$

Pour estimer la valeur de V, le créateur découpe l'intervalle $[0\,;4]$ de l'axe des ordonnées en quatre segments de même longueur.



Il obtient alors des rectangles « intérieurs » et « extérieurs » à la parabole, puis, par rotation autour de l'axe des ordonnées, des cylindres.

a) Justifier que les rayons des cylindres blancs sont respectivement égaux à $\sqrt{4}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$ et 1.

b) Montrer que $6\pi \leqslant V \leqslant 10\pi$.

2. Cas général : n quelconque

Pour n, nombre entier naturel non nul, on découpe l'intervalle $[0\,;4]$ en n segments de même longueur afin de généraliser la construction précédente.

On note u_n (resp. v_n) la somme des aires des cylindres « intérieurs » (resp. « extérieurs »).

a) Montrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

$$u_n = \frac{16\pi}{n^2}(1+2+3+\ldots+(n-1))$$

et $$v_n = \frac{16\pi}{n^2}(1+2+3+\ldots+n).$$

b) En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

$$u_n = \frac{16\pi(n-1)}{2n} \text{ et } v_n = \frac{16\pi(n+1)}{2n}.$$

c) Quel est le volume V du flacon ?

96 **Algo** python

(S_n) est la suite définie pour tout $n \geqslant 1$ par :

$$S_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n}.$$

a) Justifier que $S_1 = \frac{1}{2}$, $S_2 = \frac{11}{15}$ et $S_3 = \frac{181}{220}$.

b) Voici une fonction écrite en langage Python qui renvoie le terme de rang n de la suite (S_n).

Saisir ce programme en le complétant.

```
def S(n):
    S=0
    for i in range(     ):
        S=
    return S
```

c) Exécuter ce programme pour donner une valeur approché au millième de S_{100}, $S_{1\,000}$ et $S_{100\,000}$.

d) Conjecturer la limite de la suite (S_n).

e) Démontrer que pour tout $n \geqslant 1$ et tout $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$\frac{n}{n^2+n} \leqslant \frac{n}{n^2+k} \leqslant \frac{n}{n^2}.$$

f) Démontrer que pour tout $n \geqslant 1$, $\frac{n^2}{n^2+n} \leqslant S_n \leqslant 1$.

g) En déduire la limite de la suite (S_n).

S'entraîner à la logique → p. 525

97 **Implications**

(u_n) et (v_n) désignent deux suites de nombre réels. Dans chaque cas, dire si l'implication est vraie ou fausse et justifier.

a) Si (u_n) et (v_n) convergent, alors $(2u_n - 3v_n)$ converge.

b) Si (u_n) et $(u_n + v_n)$ convergent, alors (v_n) converge.

c) Si (u_n) et $(u_n v_n)$ convergent, alors (v_n) converge.

98 **Implications et équivalences**

Deux propositions P et Q sont dites équivalentes si l'implication « P ⇒Q » et sa réciproque « Q ⇒P » sont toutes les deux vraies. Dans chaque cas, dire si l'équivalence est vraie ou fausse.

a) (u_n) est une suite. (u_n) converge équivaut à $(|u_n|)$ converge.

b) (u_n) est une suite arithmétique. (u_n) diverge équivaut à $(|u_n|)$ diverge.

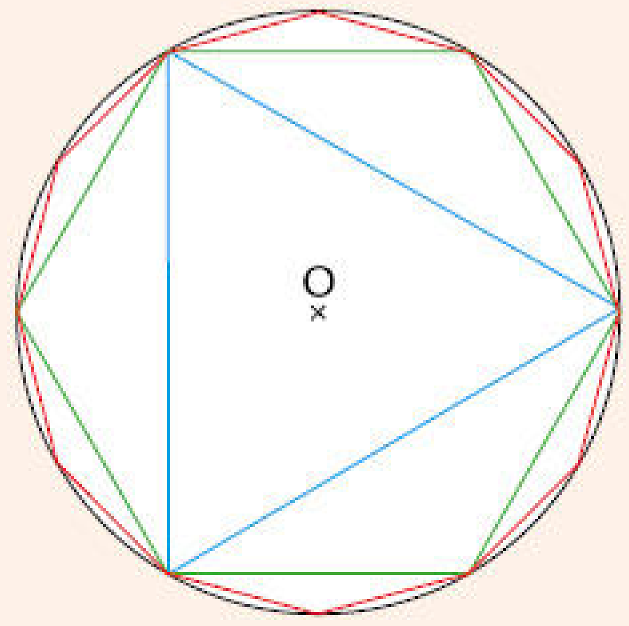
c) (u_n) est une suite. (u_n) converge équivaut à $\left(\frac{u_n}{n}\right)$ converge vers 0.

d) (u_n) est une suite. (u_n) diverge vers $+\infty$ équivaut à $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ converge vers 0.

Algo python

99 MÉTHODE D'APPROXIMATION DE π D'APRÈS ARCHIMÈDE ET LIU HUI

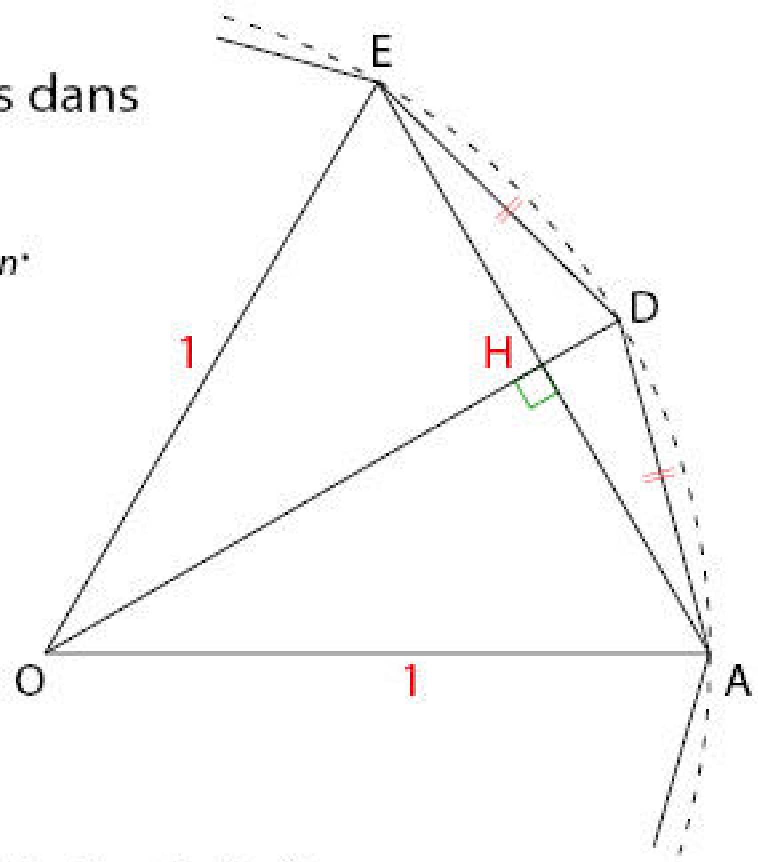
Objectif
Écrire une méthode algorithmique d'approximation de π et majorer l'erreur commise.



Principe de la méthode
On considère un cercle de centre O et de rayon 1.
On trace un polygone inscrit régulier à n côtés ($n \geqslant 3$) et on nomme p_n (resp. c_n) le périmètre du polygone (resp. la longueur d'un côté du polygone).
On se propose de démontrer que la suite (p_n) est convergente.

1. Conjecturer la limite de la suite (p_n)
a) En examinant la forme du polygone quand n devient grand, conjecturer le comportement de la suite (p_n).
b) En considérant des carrés inscrit et circonscrit au cercle de rayon 1, justifier que $2\sqrt{2} \leqslant \pi \leqslant 4$.

2. Démontrer la convergence de la suite (p_n)
On considère des polygones réguliers à n et $2n$ côtés, avec $n \geqslant 3$, inscrits dans le cercle.
Avec les notations ci-contre : $OA = OE = OD = 1$, $AE = c_n$ et $AD = DE = c_{2n}$.



a) Donner une mesure, en radian, de l'angle $\widehat{AOD}$.
b) En déduire que $c_n = 2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$, puis que $p_n = 2n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$.
c) f et g sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(x) - x$ et $g(x) = \sin(x) - x + \frac{x^3}{6}$. On admet que f est décroissante et g croissante sur $\mathbb{R}$. En déduire que pour tout réel $x \geqslant 0$, $x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x$.
d) En déduire que pour tout $n \geqslant 3$, $2\pi - \frac{\pi^3}{3n^2} \leqslant p_n \leqslant 2\pi$. Préciser alors la limite de (p_n).
e) En utilisant les inégalités des questions **2. d)** et **1. b)**, démontrer que $\left|\frac{1}{2}p_n - \pi\right| \leqslant \frac{32}{3n^2}$.

3. Exprimer et exploiter une relation entre c_{2n} et c_n
a) Justifier que $OH = \sqrt{1 - 0{,}25c_n^2}$, puis que $c_{2n} = AD = \sqrt{(1 - OH)^2 + 0{,}25c_n^2}$.
b) Cette fonction **Approx** écrite en langage Python renvoie une approximation de π donnée par la moitié de p_{2^n} (périmètre du polygone régulier à 2^n côtés).
Saisir le programme et l'exécuter pour une valeur de n qui assure d'obtenir 4 chiffres significatifs corrects après la virgule.

```
from math import *

def Approx(n):
    c=sqrt(2)
    for i in range(1,n-1):
        OH=sqrt((1-0.25*c**2))
        c=sqrt((1-OH)**2+0.25*c**2)
    mp=2**(n-1)*c
    return mp
```

HISTOIRE DES MATHS

Archimède (Grèce Antique, 3e siècle avant J-C) établit que $3 < \pi < 3 + \frac{1}{7}$ à l'aide de polygones réguliers à 96 côtés.

Liu Hui (Chine, 3e siècle après J-C) parvient à l'approximation 3,1416 de π qu'il consigne dans *Les neufs chapitres sur l'Art Mathématique*.

Exploiter ses compétences

100 Algo Expliciter des suites

Raisonner | Calculer

(u_n) et (v_n) sont deux suites telles que, pour tout entier naturel n, $u_n + nv_n = 1$ et $-nu_n + v_n = e^{-n}$.

1. a) Pour tout entier naturel n, exprimer u_n et v_n en fonction de n.

b) À l'aide de la calculatrice, conjecturer la limite de chacune des suites (u_n) et (v_n).

c) Déterminer la limite de chacune des suites (u_n) et (v_n).

2. Écrire un algorithme qui renvoie la plus petite valeur de n telle que $u_n < 0{,}01$ et $v_n < 0{,}01$.

101 Porter un regard critique

Raisonner | Calculer | Communiquer

Une équipe de chercheurs a modélisé la température d'une partie d'une fusée miniaturisée durant sa 1re minute de vol comme indiqué ci-dessous :

n secondes après le décollage, la température en °C, est donnée par $u_n = 2n + 35 - 2e^{n-55}$.

L'équipe craint que la température dépasse 150 °C, ce qui remettrait en question la solidité de l'appareil.

Mike : « J'ai tabulé les 50 premiers termes de la suite. La température va finir par dépasser 150 °C ».

Lindsay : « Avec un programme, j'ai $u_{70} \approx -6{,}5 \times 10^6$! »

Pour décider, étudier les variations de la fonction définie sur $[0\,;100]$ par $f(x) = 2x + 35 - 2e^{x-55}$.

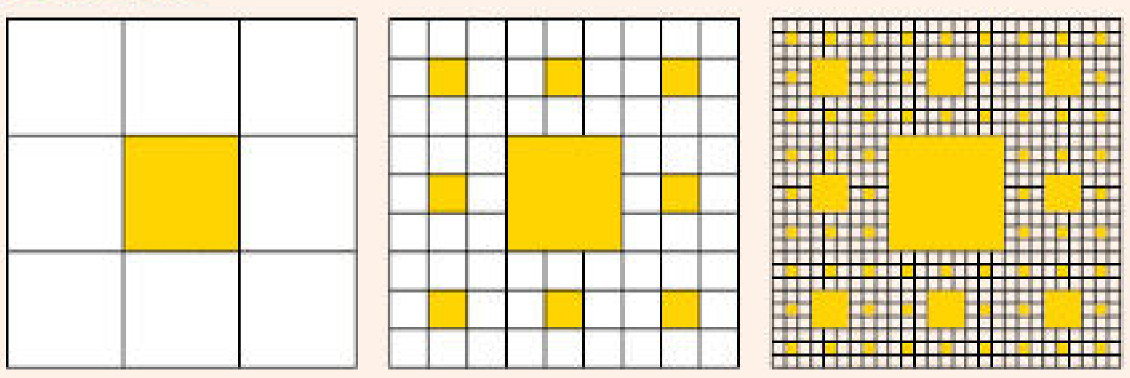
102 Étudier un procédé répétitif

Narration de recherche

Chercher | Calculer | Communiquer

Rédiger les différentes étapes de la recherche, sans omettre les fausses pistes et les changements de méthode.

Problème



On dispose d'un carré blanc d'aire 1 m^2. On le partage en 9 carrés superposables comme sur la figure et on colorie le carré central. Les carrés restants sont à nouveau partagés en 9 carrés superposables. On poursuit avec la même méthode le découpage et le coloriage du carré. Quelle est la limite de la proportion d'aire coloriée ?

103 Prendre des initiatives

Chercher | Calculer | Communiquer

(u_n) est la suite définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$, où $n!$ désigne factorielle n.

Déterminer, si elle existe, la limite de la suite (u_n).

104 The growth of a plant

Calculer | Communiquer

In Nov. 2019, Sophia buys a 4 feet high plant. She is advised to trim it once a year, in Nov., and to cut half a foot so the plant would grow and increase its height by a fifth. As soon as she comes back home, Sophia trims her plant. Let h_n be the height of the plant, just before its cutting, in Nov 2019 + n.

a) Justify that, for any integer $n \geqslant 0$, $h_{n+1} = 1{,}2h_n - 0{,}6$.

b) Prove by induction that, for any integer $n \geqslant 0$, $h_n \geqslant 4 + 0{,}2n$.

c) What would be the limit of Sophia's plant height ?

d) With your calculator, find the first rank so that $h_n \geqslant 20$.

105 Imaginer des suites

? Problème ouvert

Chercher | Raisonner | Calculer

a, b, c et d sont des réels tels que $ad - bc \neq 0$.

(u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{an+b}{cn+d}$ où pour tout n, $cn + d$ reste de signe constant.

Dans chaque cas, déterminer a, b, c et d afin d'avoir :

a) $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ **b)** $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$ (avec $\ell \in \mathbb{R}^*$)

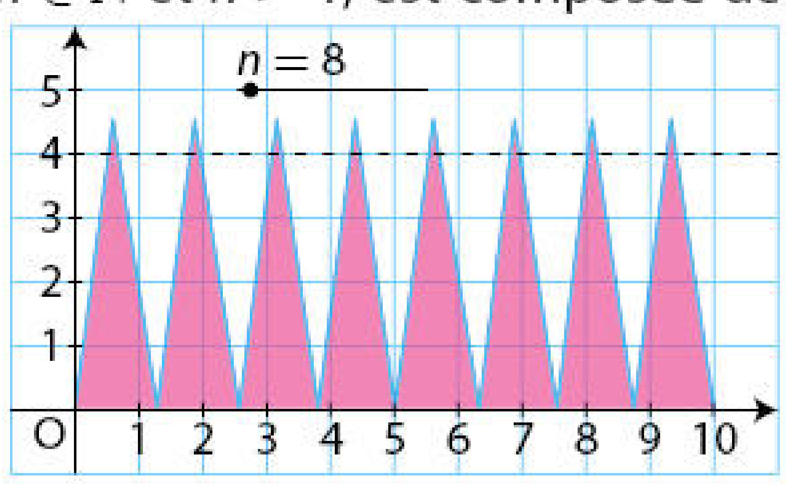
c) $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ **d)** $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

106 Imaginer une stratégie

Raisonner | Calculer

La surface S_n, avec $n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant 1$, est composée de n triangles identiques.

Sa base est 10 et sa hauteur est $4 + (-1)^n \dfrac{4}{n}$.



Pour tout $n \geqslant 1$, on note a_n et p_n l'aire et le périmètre de la surface S_n.

a) Quelle est la limite de la suite (a_n) ?

b) Quelle est la limite de la suite (p_n) ?

107 Utiliser une suite auxiliaire Algo

35 min

D'après Bac, Liban 2013

On considère la suite numérique (v_n) définie par $v_0 = 1$ et pour tout entier naturel n :

$$v_{n+1} = \frac{9}{6 - v_n}.$$

Partie A : expérimentation

a) On souhaite écrire un algorithme permettant d'obtenir, pour un entier naturel n donné, tous les termes de la suite du rang 0 au rang $n - 1$.

Parmi les trois algorithmes ci-dessous, un seul convient. Préciser lequel et justifier.

Algorithme n° 1

Pour i allant de 1 à n
 $v \leftarrow \frac{9}{6 - v}$
Fin Pour

Au début, on affecte 1 à la variable v. En fin d'exécution, il renvoie la valeur de v.

Algorithme n° 2

Pour i allant de 1 à n
 $v \leftarrow 1$
 Afficher v
 $v \leftarrow \frac{9}{6 - v}$
Fin Pour

Algorithme n° 3

Pour i allant de 1 à n
 Afficher v
 $v \leftarrow \frac{9}{6 - v}$
Fin Pour

Au début, on affecte 1 à la variable v.

b) Pour $n = 10$, on obtient les valeurs (arrondies au millième si besoin) suivantes :

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
v	1	1,800	2,143	2,333	2,455	2,538	2,600	2,647	2,684

Pour $n = 100$, on obtient les valeurs (arrondies au millième si besoin) suivantes :

n	92	93	94	95	96	97	98	99	100
v	2,967	2,968	2,968	2,968	2,969	2,969	2,969	2,970	2,970

Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite (v_n) ?

Partie B : une preuve

a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n,

$$0 < v_n < 3.$$

b) Démontrer que pour tout entier naturel n,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{(3 - v_n)^2}{6 - v_n}.$$

c) La suite (v_n) est-elle monotone ? Justifier.

d) Démontrer que la suite (v_n) est convergente.

Partie C : recherche de la limite de la suite (v_n)

On considère la suite (w_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = \frac{1}{v_n - 3}$.

a) Démontrer que la suite (w_n) est une suite arithmétique de raison $-\frac{1}{3}$.

b) En déduire l'expression de (w_n), puis celle de (v_n) en fonction de n.

c) Déterminer la limite de la suite (v_n).

Guide de résolution
A. a) Examiner dans chaque algorithme combien de termes sont renvoyés et combien de termes sont attendus du rang 0 au rang n.

Guide de résolution
B. b) Penser à réduire la différence au même dénominateur.
c) Utiliser les opérations sur les limites pour conclure.

Guide de résolution
C. a) Exprimer $w_{n+1} - w_n$ sous la forme d'un quotient et exploiter la question **B. b)**.

108 Conjecturer et prouver Algo

40 min

D'après Bac, Amérique du Nord 2017

Le but de cet exercice est d'étudier les suites de termes positifs dont le premier terme u_0 est strictement supérieur à 1 et possédant la propriété suivante :
pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, la somme des n premiers termes consécutifs est égale au produit des n premiers termes consécutifs.
On admet qu'une telle suite existe et on la note (u_n).
Elle vérifie donc trois propriétés :
- $u_0 > 1$,
- pour tout $n \geqslant 0$, $u_n \geqslant 0$,
- pour tout $n \geqslant 1$, $u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} = u_0 \times u_1 \times \ldots \times u_{n-1}$.

Partie A : un cas particulier

On choisit $u_0 = 3$.
Déterminer u_1 et u_2.

Guide de résolution
A. Résoudre l'équation $3 + u_1 = 3u_1$ dont l'inconnue est u_1.

Partie B : cas général

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note :

$$s_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} = u_0 \times u_1 \times \ldots \times u_{n-1}.$$

On a en particulier $s_1 = u_0$.

a) Vérifier que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$s_{n+1} = s_n + u_n \text{ et } s_n > 1.$$

b) En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$u_n = \frac{s_n}{s_n - 1}.$$

c) Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 0$, $u_n > 1$.

Partie C : automatisation

Voici un algorithme.
Au début les variables n et u ont des valeurs données et on affecte la valeur u à la variable s.
En fin d'exécution, il renvoie le terme u_n.

a) Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous.

```
Pour i allant de 1 à n
  | u ← …
  | s ← …
Fin Pour
```

b) Le tableau ci-dessous donne des valeurs, arrondies au millième si besoin, de u_n pour différentes valeurs de l'entier n :

n	0	5	10	20	30	40
u_n	3	1,140	1,079	1,043	1,030	1,023

Quelle conjecture peut-on émettre sur la convergence de la suite (u_n) ?

Partie D : une preuve

a) Justifier que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $\quad s_n > n$.

b) En déduire la limite de la suite (s_n), puis celle de la suite (u_n).

Guide de résolution
D. b) Utiliser un théorème de comparaison pour déterminer la limite de (s_n). Puis factoriser le numérateur et le dénominateur de l'expression de u_n en fonction de s_n pour lever l'indétermination.

109 Étudier une suite de nombres rationnels Algo

20 min

D'après Bac, Amérique du Sud 2016

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2 - u_n}.$$

1. a) À l'aide du calcul des premiers termes de la suite (u_n), conjecturer la forme explicite de u_n en fonction de n. Démontrer cette conjecture.

b) En déduire la valeur de la limite ℓ de la suite (u_n).

c) Déterminer alors la limite de la suite $(|u_{n+1} - u_n|)$.

2. Au début de cet algorithme, on affecte 0 à la variable n et à la variable a, 0,5 à la variable b. En fin d'exécution, il renvoie la valeur du plus petit entier n tel que $|u_{n+1} - u_n| \leqslant 10^{-3}$. Recopier et compléter cet algorithme.

```
Tant que |b − a| …
    n ← …
    a ← …
    b ← …
Fin Tant que
```

Guide de résolution
1. a) Employer un raisonnement par récurrence pour démontrer, pour tout entier n, la formule conjecturée.

Se préparer À L'ORAL

110 Présenter un exposé

a) Rappeler les théorèmes de comparaison permettant d'établir qu'une suite a pour limite $+\infty$ ou $-\infty$ ou un réel ℓ.

b) Dans un exposé oral de 10 min, présenter ces trois théorèmes et un exemple d'application pour chacun.

111 Travailler l'oral en groupe

Résoudre cet exercice en petit groupe, puis en présenter les résultats à l'oral.

Rappel : Pour tout réel x, $e^x \geqslant 1 + x$.

a) En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, les inégalités suivantes sont vraies.

(1) $e^{\frac{1}{n}} \geqslant 1 + \frac{1}{n}$ **(2)** $e^{\frac{-1}{n+1}} \geqslant 1 - \frac{1}{n+1}$

b) En utilisant l'inégalité **(1)**, démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqslant e$.

c) En utilisant l'inégalité **(2)**, démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, $e \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

d) En déduire un encadrement de $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, puis la limite de la suite $\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)$.

112 Travailler les compétences orales

▶ **ANTICIPER LES QUESTIONS DU JURY**

1. Préparation de la restitution orale (5 min)
Par groupe de 4, résoudre l'exercice ci-dessous, chaque élève travaillant sur une des quatre propositions.

2. Jeu de rôle (30 min)
Chaque élève présente son résultat à l'oral (2 min), pendant que les trois autres composent le jury. Chaque juré pose une question au candidat.

Énoncé : Dans chaque cas, dire si l'affirmation est vraie ou fausse ? Justifier.

a) (c_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$c_n = \frac{e^n + 1}{e^n + 2}.$$

Affirmation : la suite (c_n) converge.

b) (s_n) est telle que pour tout entier naturel n,

$$n - 8 \leqslant n \times s_n \leqslant n + 1.$$

Affirmation : la suite (s_n) diverge.

c) (f_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$f_n \times e^n = (-1)^n \sin(n).$$

Affirmation : la suite (f_n) converge.

d) (b_n) est la suite définie par $b_0 = 11$ et pour tout entier naturel n, $b_{n+1} = b_n^2 + 11$.

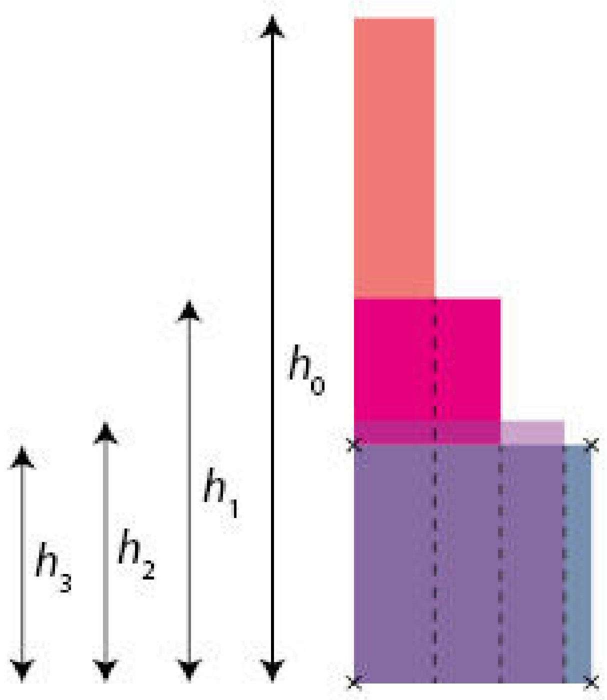
Affirmation : la suite (b_n) convege vers 1 000.

113 Algo python Méthode de Héron

Objectif
Écrire une méthode algorithmique qui approxime $\sqrt{2}$ et estimer la précision du résultat.

On met en œuvre le processus itératif suivant :

- on considère un rectangle d'aire 2 de hauteur $h_0 = 2$,
- pour « s'approcher » d'un carré, on change les dimensions du rectangle en prenant la moyenne harmonique de la hauteur et de la longueur comme nouvelle hauteur, à savoir $h_1 = \frac{1}{2}\left(h_0 + \frac{2}{h_0}\right)$, et en adaptant la longueur pour conserver une aire de 2.



La hauteur h_n du n-ième rectangle d'aire 2 étant déterminée, on pose :

$$h_{n+1} = \frac{1}{2}\left(h_n + \frac{2}{h_n}\right).$$

1. a) Prouver que pour tout n, $h_{n+1} - \sqrt{2} = \dfrac{(h_n - \sqrt{2})^2}{2h_n}$.

b) Démontrer par récurrence que pour tout n,

$$0 \leqslant h_n - \sqrt{2} \leqslant \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n (h_0 - \sqrt{2}).$$

c) En déduire que (h_n) est une suite convergente et préciser sa limite.

2. a) À l'aide de la question **1. a)**, démontrer que pour tout entier naturel n, $|h_{n+1} - \sqrt{2}| \leqslant |h_n - \sqrt{2}|^2$.

b) Démontrer que pour tout n, h_n est une valeur approchée à $10^{-2^{n-1}}$ près de $\sqrt{2}$.

c) Voici une fonction **Approx** écrite en langage Python qui calcule une approximation de $\sqrt{2}$ avec la précision p souhaitée.

- Que cachent les cadres colorés ?
- Saisir le programme complété.
- Exécuter ce programme avec $p = 10^{-10}$.

```
from math import *

def Approx(p):
    h=2
    n=0
    while n<=3 and [          ]>p:
        h=[        ]
        n=n+1
    return h
```

114 Les séries numériques

(u_n) est une suite définie sur $\mathbb{N}$.
(S_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ c'est-à-dire $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.

1. Une condition nécessaire

On suppose que la suite (S_n) converge et on note ℓ sa limite.

a) Que vaut alors $\lim_{n \to +\infty} S_{n+1}$?

b) Pour tout entier naturel n, déterminer $S_{n+1} - S_n$.

c) En déduire la limite de la suite (u_n).

On vient de démontrer ainsi que « Si la suite (S_n) converge, alors la suite (u_n) a pour limite 0 ».
Ceci équivaut par contraposée à « Si la suite (u_n) n'a pas pour limite 0, alors la suite (S_n) diverge ».

2. Un exemple

(S_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $S_n = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{2k+1}{k+1}$.
Démontrer que la suite (S_n) diverge.

3. Et la réciproque ?

On se propose de savoir si la proposition suivante est vraie ou fausse : « Si la suite (u_n) converge vers 0, alors la suite (S_n) converge ».
Pour cela, on considère la suite (S_n) définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.
On suppose que la suite (S_n) converge vers un nombre réel ℓ.

a) Quelle est alors la limite de la suite (S_{2n}) ?
En déduire que $\lim_{n \to +\infty} (S_{2n} - S_n) = 0$.

b) Démontrer que pour tout $n \geqslant 1$, $S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \dfrac{1}{k}$ et en déduire que $S_{2n} - S_n \geqslant \dfrac{1}{2}$.

c) Pourquoi cela est-il en contradiction avec le fait que la suite (S_n) converge ? Conclure.

Info
Dans l'addition d'un nombre infini de termes, « tout peut arriver » : elle peut converger vers une limite finie, tendre vers l'infini ou avoir un comportement erratique.
Ce domaine des mathématiques est appelé l'étude des séries numériques.
Les Grecs et les Babyloniens étudiaient déjà des séries d'apparence toutes simples.
La suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$ est appelée la série harmonique. Ce nom vient du fait que, depuis Pythagore, on sait que si une corde de longueur L vibre à une fréquence φ, alors des cordes de longueurs $\frac{L}{2}, \frac{L}{3}, \frac{L}{4}, \ldots$ vibrent aux fréquences $2\varphi, 3\varphi, 4\varphi, \ldots$ qui sont les « harmoniques » de φ.

115 Un exemple de série numérique

(S_n) est la suite définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k+2}{k^2(k+1)^2}$.

a) Démontrer que pour tout entier naturel $k \geqslant 1$,

$$\frac{2k+2}{k^2(k+1)^2} = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}.$$

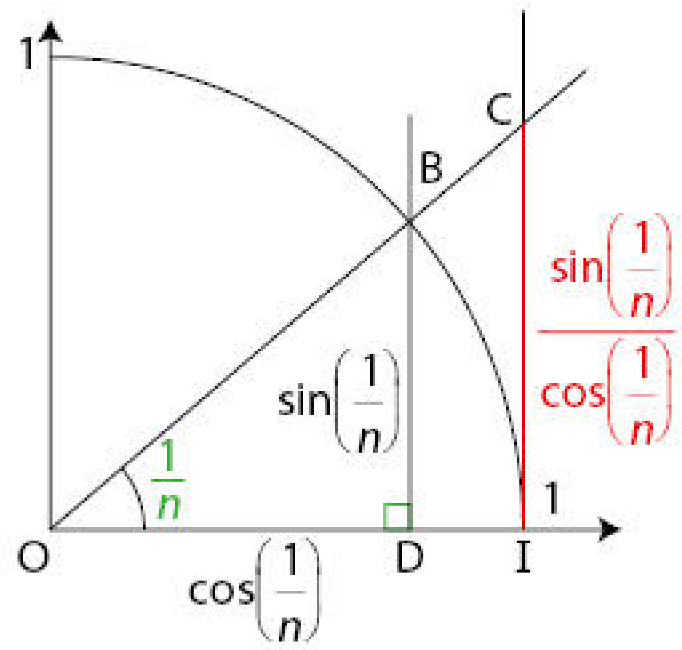
b) Justifier que pour tout $n \geqslant 1$, $S_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$ et en déduire sa limite.

116 Un équivalent de $\sin\left(\frac{1}{n}\right)$

> **Définition**
> (u_n) et (v_n) sont deux suites telles que (v_n) n'a aucun terme nul après un certain rang.
> Dire que u_n et v_n sont **équivalents** signifie que
> $$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1.$$

n est un nombre entier naturel, $n \geqslant 1$, tel que $\frac{1}{n} < \frac{\pi}{2}$.

Dans un repère orthonormé d'origine O, on considère un secteur angulaire de mesure $\frac{1}{n}$ rad.



a) Justifier en comparant des aires que :

$$0 \leqslant \frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{2n} \leqslant \frac{1}{2}\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}.$$

b) En déduire que $\lim_{n \to +\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) = 0$.

c) En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$\sqrt{1 - \sin^2\left(\frac{1}{n}\right)} \leqslant n\sin\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant 1.$$

d) Démontrer que pour tout réel x tel que $0 \leqslant x \leqslant 1$, $x \leqslant \sqrt{x}$.

e) Justifier finalement que $1 - \sin^2\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant n\sin\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant 1$.

f) Conclure que $\sin\left(\frac{1}{n}\right)$ est équivalent à $\frac{1}{n}$.

117 Sous-suites convergentes

> **Définition**
> Une sous-suite d'une suite (u_n) est une suite $(u_{\varphi(n)})$ où φ est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{N}$ à valeurs dans $\mathbb{N}$.

a) Démontrer que si la suite (u_n) converge vers un nombre réel ℓ, alors les deux sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers ℓ.

b) Démontrer que la réciproque est vraie.

c) La convergence des deux sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) est-elle suffisante pour que (u_n) converge ? Justifier.

118 Le théorème de Césaro

(u_n) est une suite définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ et qui converge vers 0.

Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $v_n = \frac{u_1 + \ldots + u_n}{n}$.

ε est un nombre réel strictement positif.

a) Montrer qu'il existe un entier naturel N_1 tel que pour tout $n \geqslant N_1$, $|u_n| < 0{,}5\varepsilon$.

b) Montrer qu'il existe un entier naturel N_2 tel que pour tout $n \geqslant N_2$, $\frac{|u_1| + \ldots + |u_{N_1}|}{n} < 0{,}5\varepsilon$.

c) En déduire qu'à partir d'un certain rang, $|v_n| < \varepsilon$.

d) En déduire que la suite (v_n) converge et préciser sa limite.

Des Défis

119 D'une somme à une autre

(a_n) est une suite telle que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n = \frac{2n+2}{n+2}$.

Déterminer la limite de la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)$.

120 Suite de proportions

u_0 est un nombre réel de $[0\,;1]$. On définit la suite (u_n) par récurrence de la manière suivante : u_{n+1} est la proportion des termes de u_0 à u_n qui appartiennent à $[0\,;0{,}5]$. Autrement dit,

$$u_{n+1} = \frac{\mathit{Card}(\{i \in \{0\,;1\,;\ldots\,;n\} | 0 \leqslant u_i \leqslant 0{,}5\})}{n+1}.$$

La suite (u_n) converge-t-elle ?

D'après TFJM² édition 2015.