1 Nombres complexes : point de vue algébrique

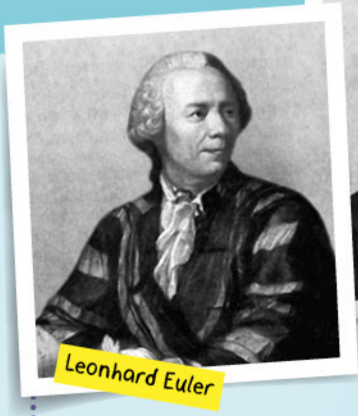
HISTOIRE DES MATHS

Au milieu du 16e siècle, lors de concours, des mathématiciens italiens tels **Scipione del Ferro**, **Tartaglia** et **Jérôme Cardan**, sont amenés à envisager des ***nombres sophistiqués*** avec des racines carrées de nombres négatifs !

C'est **Raphaël Bombelli** qui, en 1572, dans son *Algebra*, met en place les règles de calcul sur ces nombres appelés alors ***impossibles***. Il introduit un nombre $\sqrt{-1}$ tel que $\left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1$.

Au 17e siècle, **René Descartes**, les appelle **nombres imaginaires** car il n'admet pas leur existence.

Au 18e siècle, c'est **Leonhard Euler** qui, avec un usage intensif et fructueux des nombres imaginaires, emporte la conviction de la communauté scientifique. Il déclare que la notation $\sqrt{-1}$ est absurde ; en effet : $\left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1$ et $\left(\sqrt{-1}\right)^2 = \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = \sqrt{-1 \times (-1)} = \sqrt{1} = 1$.


Leonhard Euler


Carl Gauss

▶ **Leonhard Euler** (1707-1783) est un mathématicien physicien suisse. Il est l'un des mathématiciens les plus éminents et prolifiques de tous les temps.
En 1777, Euler note i (initiale d'« imaginaire ») le nombre $\sqrt{-1}$ (ainsi $i^2 = -1$) et établit que $e^{i\pi} = -1$, formule considérée comme la plus belle des mathématiques.

▶ **Carl Friedrich Gauss** (1777-1855) est un mathématicien physicien et astronome allemand. Surnommé « le prince des mathématiciens », il donne, en 1831, une construction rigoureuse de nouveaux nombres notés $a + ib$ avec a et b nombres réels et il les nomme ***nombres complexes***.

1545 Cardan utilise des racines carrées de négatifs.

1637 Descartes nomme ces nouveaux nombres les nombres imaginaires.

1777 Euler introduit la notation i à la place de $\sqrt{-1}$.

1831 Gauss renomme ces nombres les nombres complexes.

moitié 15e-début 16e Fin du Moyen-Âge

1609 *Hamlet* de Shakespeare

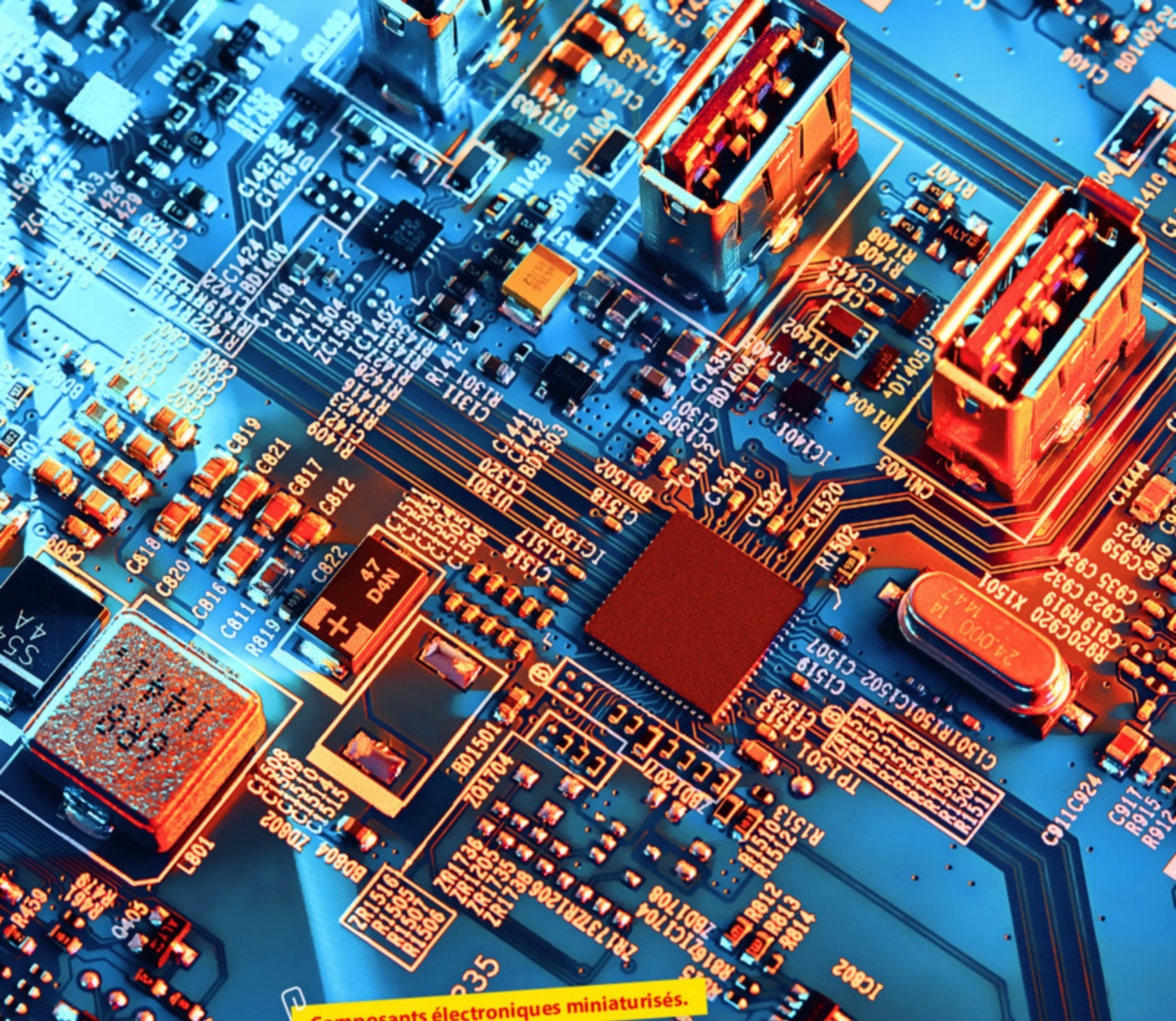
1687 Newton énonce la loi de la gravité universelle.

1755 *L'Encyclopédie* de Diderot

1804 Sacre de Napoléon 1er

1857 *Des glaneuses* toile de Millet

1500 1550 1600 1650 1700 1750 1800 1850 1900



Composants électroniques miniaturisés.

Les filtres dans les circuits imprimés possèdent une impédance qui est une fonction (de la fréquence par exemple) à valeurs complexes : la partie réelle s'appelle résistance et la partie imaginaire réactance.

Les contenus et capacités travaillés dans ce chapitre

	Savoir-faire	Exercices
• Ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Effectuer des calculs algébriques dans $\mathbb{C}$.	1 à 4, 15	17 à 38
• Conjugaison. Propriétés algébriques.	5 à 8	43 à 46, 55 à 62, 76 à 78
• Inverse d'un nombre complexe non nul. Quotient de deux nombres complexes.	14, 16	47 à 54, 62
• Résoudre une équation linéaire $az = b$ ou une équation faisant intervenir z et $\overline{z}$.		39 à 42, 63 à 75
• Formule du binôme	9 à 13	79 à 93

Calcul mental

Rappels utiles

• **Identités remarquables**

Pour tous réels a, b, c, d,

$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

• **Quotients et racines carrées**

En multipliant numérateur et dénominateur d'un quotient par un même nombre non nul, on obtient un quotient égal.

$\dfrac{a}{\sqrt{b}}=\dfrac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}\sqrt{b}}=\dfrac{a\sqrt{b}}{b}$ (avec $b>0$)

$\dfrac{1}{a-\sqrt{b}}=\dfrac{a+\sqrt{b}}{\left(a-\sqrt{b}\right)\left(a+\sqrt{b}\right)}=\dfrac{a+\sqrt{b}}{a^2-b}$ (avec $b>0$ et $b\neq a^2$)

• **Équations de type $x^2=a$**

a désigne un nombre réel.

Dans $\mathbb{R}$, l'équation $x^2=a$ admet :

– deux solutions $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$ si $a>0$,

– une seule solution, 0, si $a=0$,

– pas de solution si $a<0$.

• **Principe du raisonnement par récurrence**

$\mathrm{P}(n)$ désigne une propriété qui dépend d'un nombre entier naturel n et n_0 désigne un entier naturel.

Si la propriété $\mathrm{P}(n)$ vérifie les deux conditions suivantes :

(1) Initialisation : $\mathrm{P}(n_0)$ est vraie,

(2) Hérédité : si $\mathrm{P}(k)$ est vraie pour un entier naturel $k\geqslant n_0$, alors $\mathrm{P}(k+1)$ est vraie,

alors, pour tout entier naturel $n\geqslant n_0$, $\mathrm{P}(n)$ est vraie.

À l'oral — Questions-Tests

Pour chaque question, il y a une seule réponse exacte.

1 m désigne un nombre réel tel que $m^2=2$.

a) $(4+m)^2$ est égal à :

(1) $18-8m$ (2) $18+8m$ (3) 18

b) $(-3+m)^2$ est égal à :

(1) 11 (2) $7-6m$ (3) $11-6m$

c) $\left(7-m\sqrt{3}\right)\left(7+m\sqrt{3}\right)$ est égal à :

(1) 43 (2) 54 (3) $49-3m$

2 **a)** $\left(4-2\sqrt{3}\right)\left(4+2\sqrt{3}\right)$ est égal à :

(1) $16-4\sqrt{3}$ (2) 4 (3) 28

b) $\dfrac{-10}{\sqrt{5}}$ est égal à :

(1) $\dfrac{5}{\sqrt{10}}$ (2) $2\sqrt{5}$ (3) $-2\sqrt{5}$

c) $\dfrac{1}{4-\sqrt{2}}$ est égal à :

(1) $\dfrac{2}{7}+\dfrac{\sqrt{2}}{14}$ (2) $\dfrac{4-\sqrt{2}}{14}$ (3) $\dfrac{2}{9}+\dfrac{\sqrt{2}}{18}$

3 **a)** Le nombre de solutions communes aux équations $x^2-9=0$ et $-\dfrac{1}{3}x^2+3=0$ est :

(1) 0 (2) 1 (3) 2

b) L'équation qui a le moins de solutions est :

(1) $2x^2+5=0$ (2) $(x-5)^2=0$ (3) $x^2+6x+9=0$

c) La fonction $x\mapsto\dfrac{1}{x^2+1}$ est définie sur :

(1) $\mathbb{R}-\{-1\}$ (2) $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ (3) $\mathbb{R}$

4 n désigne un nombre entier naturel et $\mathrm{P}(n)$ est la propriété : 9 divise 10^n-1.

Pour démontrer que pour tout entier naturel n, $\mathrm{P}(n)$ est vraie :

a) l'initialisation consiste à vérifier que $\mathrm{P}(n)$ est vraie pour :

(1) $n=0$ (2) $n=1$ (3) $n=2$

b) l'hérédité consiste à :

(1) vérifier qu'alors $\mathrm{P}(1)$ est vraie

(2) démontrer que $\mathrm{P}(1\,000\,000)$ est vraie

(3) supposer que pour un entier naturel k, 9 divise 10^k-1 et démontrer qu'alors 9 divise $10^{k+1}-1$

1 Vers les nombres complexes

On se propose d'analyser différentes méthodes de résolution de l'équation (E) :
$$x^3 = 15x + 4.$$


HIERONYMI CARDANI, PRÆSTANTISSIMI MATHEMATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,
ARTIS MAGNÆ,
SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,
OPVS PERFECTVM

1 En 1545, dans *Ars magna*, le mathématicien italien Jérôme Cardan propose une méthode de résolution (empruntée à Niccolò Fontana dit Tartaglia, dit « Le Bègue »), d'une équation polynomiale de degré 3 de la forme $x^3 + px + q = 0$.

> On ajoute les racines cubiques des solutions de l'équation du second degré $X^2 + qX - \dfrac{p^3}{27} = 0$.

a) Vérifier qu'avec la méthode de Cardan, résoudre l'équation **(E)** ci-dessus, revient à résoudre l'équation **(E')** : $X^2 - 4X + 125 = 0$.
b) Expliquer alors pourquoi cette méthode est mise en défaut pour résoudre **(E)**.

2 **a)** Dès les années 1560, le mathématicien italien Raphaël Bombelli a l'idée d'écrire le discriminant Δ de l'équation **(E') :** $X^2 - 4X + 125 = 0$ sous la forme $\left(22\sqrt{-1}\right)^2$. Expliquer cette écriture de Δ.
b) En 1777, pour éviter les ambiguïtés de l'écriture $\sqrt{-1}$, le mathématicien suisse Leonhard Euler, introduit la notation $\boldsymbol{i}$. Ainsi, $\boldsymbol{i}^2 = -1$. Expliquer pourquoi les solutions de l'équation **(E')** sont les nombres (dits « **complexes** ») $\mathbf{2 + 11}\boldsymbol{i}$ et $\mathbf{2 - 11}\boldsymbol{i}$.
c) Développer $(2+i)^3$ et $(2-i)^3$.
Utiliser la méthode de Cardan pour en déduire la solution de l'équation **(E)** trouvée par Bombelli.

> La racine cubique d'un nombre a est un nombre b tel que $b^3 = a$.

3 Utiliser cet écran de calcul formel pour déterminer toutes les solutions de l'équation **(E)** : $x^3 = 15x + 4$.

1	$x^3 - 15x - 4$
	Factoriser: $\mathbf{(x-4)\left(x^2+4x+1\right)}$

2 L'atelier de calcul

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes, c'est-à-dire des nombres de la forme $x + iy$ avec x et y nombres réels.

1 Expliquer pourquoi $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, c'est-à-dire pourquoi tous les nombres réels sont aussi des nombres complexes.

2 On calcule dans $\mathbb{C}$ comme dans $\mathbb{R}$ en tenant compte du fait que $\boldsymbol{i}^2 = -1$.
Exprimer chaque nombre sous la forme $x + iy$ avec x et y nombres réels.

a) $(3+2i)+(5-3i)$ **b)** $\left(7 - \dfrac{1}{2}i\right) - (1-4i)$ **c)** $(4-2i)(2+3i)$ **d)** $(3-2i)^2$ **e)** i^3

3 **a)** Pour tous réels x et y, déterminer $(x-iy)(x+iy)$. On dit que **le conjugué** de $x+iy$ est $x-iy$.
b) En multipliant et divisant par le conjugué du dénominateur, écrire chaque nombre sous la forme $x+iy$ avec x et y nombres réels.

- $z_1 = \dfrac{1}{5+4i}$
- $z_2 = \dfrac{1+3i}{2-i}$
- $z_3 = \dfrac{1+5i}{1+2i}$

Exercices
- 1 à 4 (ci-contre)
- 17 à 42

1 Ensemble des nombres complexes

A Notion de nombre complexe

Propriétés (admises)

Il existe un ensemble, noté $\mathbb{C}$, des **nombres complexes** qui possède les propriétés suivantes.
- $\mathbb{C}$ contient l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.
- L'addition et la multiplication des nombres réels se prolongent aux nombres complexes et les règles de calcul sont les mêmes.
- Il existe un nombre complexe noté $\boldsymbol{i}$ tel que $\boldsymbol{i^2 = -1}$.
- Tout nombre complexe z s'écrit **de manière unique** $\boldsymbol{z = x + iy}$ avec $\boldsymbol{x}$ **et** $\boldsymbol{y}$ **nombres réels**.

Définitions

L'écriture $z = x + iy$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, est appelée **forme algébrique** du nombre complexe z.
x est la **partie réelle** de z, notée $\mathrm{Re}(z)$, et y est la **partie imaginaire** de z, notée $\mathrm{Im}(z)$.

Exemples
- Pour $z = 2 + i\sqrt{3}$, on a $\mathrm{Re}(z) = 2$ et $\mathrm{Im}(z) = \sqrt{3}$.
- Pour $z = -5i$, on a $\mathrm{Re}(z) = 0$ et $\mathrm{Im}(z) = -5$.
- Pour $z = 4$, on a $\mathrm{Re}(z) = 4$ et $\mathrm{Im}(z) = 0$.

On écrit $-5i$ mais on préfère écrire $i\sqrt{3}$.

Vocabulaire : dans l'écriture $z = x + iy$,
- lorsque $y = 0$, z est un nombre **réel**,
- lorsque $x = 0$, z est un **imaginaire pur**.

Propriété

Deux nombres complexes sont **égaux** si, et seulement si, ils ont **la même partie réelle et la même partie imaginaire.**

En effet, la forme algébrique d'un nombre complexe est unique, donc $\boldsymbol{a + ib = c + id}$ **équivaut à** $\boldsymbol{a = c}$ **et** $\boldsymbol{b = d}$ (avec a, b, c, d nombres réels).
Remarque : en particulier, $a + ib = 0$ équivaut à $a = 0$ et $b = 0$ (avec a et b nombres réels).

Exemple

Voici deux nombres complexes : $z = a + ib$ (avec a et b nombres réels) et $z' = 2i - i(5i + 3)$.
$z' = 2i - 5i^2 - 3i = 5 - i$, donc $z = z'$ si, et seulement si, $a = 5$ et $b = -1$.

B Addition, multiplication dans $\mathbb{C}$

D'après les propriétés de l'ensemble $\mathbb{C}$, on additionne et on multiplie dans $\mathbb{C}$ comme dans $\mathbb{R}$, en tenant compte de $i^2 = -1$. En particulier, les identités remarquables se prolongent à $\mathbb{C}$.

Exemples
- **Addition :** $(1 + 3i) + (-3 + 2i) = (1 - 3) + (3 + 2)i = -2 + 5i$
- **Soustraction :** $(2 - 4i) - (-1 - 5i) = 2 - 4i + 1 + 5i = 3 + i$
- **Multiplication :** $(4 + i)(-5 + 3i) = -20 + 12i - 5i + 3i^2 = -20 + 7i - 3 = -23 + 7i$
- **Puissance :** $(1 - 3i)^2 = 1^2 - 2 \times 1 \times 3i + (3i)^2 = 1 - 6i + 9i^2 = 1 - 6i - 9 = -8 - 6i$

Une nouvelle identité remarquable : pour tous réels a et b, $\boldsymbol{(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2}$.
En effet, $(a + ib)(a - ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 - i^2b^2 = a^2 - (-1)b^2 = a^2 + b^2$.

EXERCICES RÉSOLUS

1 Déterminer une forme algébrique

Dans chaque cas, écrire le nombre complexe sous forme algébrique.

a) $z_1=(5-i)(1-2i)(3+2i)$ **b)** $z_2=i^3$ **c)** $z_3=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$ **d)** $z_4=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$

Solution

a) $(5-i)(1-2i)=5-10i-i+2i^2=5-11i-2=3-11i$

Donc $z_1=(3-11i)(3+2i)=9+6i-33i-22i^2$

soit $z_1=9-27i+22=31-27i$.

b) $z_2=i^3=i^2\times i=-1\times i=-i$

c) $z_3=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\left(-\frac{1}{2}\right)^2+2\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times i\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$z_3=\frac{1}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{4}i^2=\frac{1}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{4}$

$z_3=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $z_4=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$z_4=\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$z_4=\frac{1}{4}-\frac{3}{4}i^2=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1$

On peut vérifier les résultats à la calculatrice. Pour saisir i, on utilise SHIFT 0 avec Casio, 2nde . avec TI ou la touche i avec NumWorks. Pour **c)** :

$\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

2 Étudier les puissances entières de *i*

Dans chaque cas, exprimer i^n sous forme algébrique.

a) $n=4k$ **b)** $n=4k+1$ **c)** $n=4k+2$ **d)** $n=4k+3$ (avec $k\in\mathbb{N}$)

Solution

a) Pour $n=4k$, $i^n=i^{4k}=\left(i^2\right)^{2k}=(-1)^{2k}=1$.

b) Pour $n=4k+1$, $i^n=i^{4k+1}=i^{4k}\times i=1\times i=i$.

c) Pour $n=4k+2$, $i^n=i^{4k+2}=i^{4k+1}\times i=i\times i=-1$.

d) Pour $n=4k+3$, $i^n=i^{4k+3}=i^{4k+2}\times i=-1\times i=-i$.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 1

3 Dans chaque cas, écrire le nombre complexe sous forme algébrique.

a) $z_1=i(7-3i)$ **b)** $z_2=(-1+i)^2(2+3i)$

c) $z_3=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$ **d)** $z_4=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4$

Sur le modèle de l'exercice résolu 2

4 On note $j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$. On a établi à l'exercice 1 que $j^2=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $j^3=1$.

Dans chaque cas, exprimer j^n sous forme algébrique.

a) $n=3k$ **b)** $n=3k+1$ **c)** $n=3k+2$ $(k\in\mathbb{N})$

Exercices
- 5 à 8 (ci-contre)
- 43 à 78

2 Conjugué d'un nombre complexe

A Conjugaison

Définition

z est un nombre complexe de forme algébrique $x+iy$ avec x et y nombres réels.
Le **conjugué** de z, noté $\overline{z}$, est le nombre complexe $\boldsymbol{x-iy}$.

Exemples

- $\overline{2+3i}=2-3i$
- $\overline{-1-i}=-1+i$
- $\overline{-4}=-4$
- $\overline{2i}=-2i$

B Premières propriétés

x et y désignent des nombres réels.

(1) Pour tout nombre complexe z, $\overline{\overline{z}}=z$. En effet, si $z=x+iy$, alors $\overline{\overline{z}}=\overline{x-iy}=x+iy=z$.

(2) Pour tout nombre complexe z, $z+\overline{z}=\mathbf{2\,Re}(z)$ et $z-\overline{z}=\mathbf{2}i\ \mathbf{Im}(z)$.

En effet, si $z=x+iy$, alors $z+\overline{z}=x+iy+x-iy=2x$ et $z-\overline{z}=x+iy-x+iy=2iy$.

(3) Pour tout nombre complexe z, **z est un nombre réel si, et seulement si, $\overline{z}=z$.**

En effet, z est un nombre réel si, et seulement si, $\text{Im}(z)=0$, c'est-à-dire $z-\overline{z}=0$ d'après **(2)**.

(4) Pour tout nombre complexe z, **z est un imaginaire pur si, et seulement si, $\overline{z}=-z$.**

En effet, z est un imaginaire pur si, et seulement si, $\text{Re}(z)=0$, c'est-à-dire $z+\overline{z}=0$ d'après **(2)**.

(5) Pour tout nombre complexe $z=x+iy$, $z\overline{z}=\boldsymbol{x^2+y^2}$ (voir identité remarquable p. 22)

C Division

L'inverse d'un nombre complexe non nul z est le nombre complexe Z tel que $Z\times z=1$, on le note $\frac{1}{z}$.

Pour tous nombres complexes z' et $z\neq 0$, on définit le quotient $\frac{z'}{z}=z'\times\frac{1}{z}$; pour déterminer sa forme algébrique, **on multiplie le numérateur et le dénominateur par $\overline{z}$ le conjugué de z.**

Exemple

$$\frac{2+3i}{1-i}=\frac{(2+3i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{2+2i+3i-3}{1^2+1^2}=\frac{-1+5i}{2}=-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}i$$

D Conjugué et opérations

Propriétés

Pour tous nombres complexes z et z' et pour tout entier naturel $n\geqslant 1$:

(1) $\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$ **(2)** $\overline{zz'}=\overline{z}\,\overline{z'}$ **(3)** $\overline{z^n}=\overline{z}^n$ **(4)** $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}=\frac{1}{\overline{z}}$ (si $z\neq 0$) **(5)** $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)}=\frac{\overline{z'}}{\overline{z}}$ (si $z\neq 0$)

Démonstrations

$z=x+iy$ et $z'=x'+iy'$ avec x, y, x', y' nombres réels.

(1) $\overline{z+z'}=\overline{x+x'+i(y+y')}=x+x'-i(y+y')=x-iy+x'-iy'=\overline{z}+\overline{z'}$

(2) $zz'=(x+iy)(x'+iy')=xx'-yy'+i(xy'+x'y)$, donc $\overline{zz'}=xx'-yy'-i(xy'+x'y)$.

Or, $\overline{z}\,\overline{z'}=(x-iy)(x'-iy')=xx'-yy'-i(xy'+x'y)$ donc $\overline{zz'}=\overline{z}\,\overline{z'}$.

Remarque : les trois autres propriétés sont démontrées aux exercices 5 et 7.

EXERCICES RÉSOLUS

5 Étudier le conjugué d'une puissance entière

z désigne un nombre complexe.
Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $\overline{z^n} = \overline{z}^n$.

Solution

Initialisation : pour $n = 1$, on vérifie que $\overline{z^1} = \overline{z}^1$.
$\overline{z^1} = \overline{z}$ et $\overline{z}^1 = \overline{z}$ donc $\overline{z^1} = \overline{z}^1$.
Hérédité : on suppose que pour un entier naturel $k \geqslant 1$, $\overline{z^k} = \overline{z}^k$.
On démontre qu'alors $\overline{z^{k+1}} = \overline{z}^{k+1}$.
$\overline{z^{k+1}} = \overline{z^k \times z} = \overline{z^k} \times \overline{z}$ (d'après la propriété **(2)** du D), donc $\overline{z^{k+1}} = \overline{z}^k \times \overline{z}$ (d'après l'hypothèse de récurrence), soit $\overline{z^{k+1}} = \overline{z}^{k+1}$.
Conclusion : pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $\overline{z^n} = \overline{z}^n$.

L'hypothèse de récurrence est l'hypothèse faite au début de l'étape « Hérédité », à savoir ici : $\overline{z^k} = \overline{z}^k$ pour un entier naturel $k \geqslant 1$.

6 Utiliser les règles de calcul sur les conjugués

z désigne un nombre complexe.
Dans chaque cas, exprimer le conjugué du nombre complexe Z en fonction de z et de $\overline{z}$.

a) $Z = z + 2 - i$ **b)** $Z = (z + 2i)(iz - 3)$ **c)** $Z = (z - \overline{z})^2$ **d)** $Z = \dfrac{z - i}{3 - z}$ (avec $z \neq 3$)

Solution

a) $Z = z + 2 - i$ donc $\overline{Z} = \overline{z + 2 - i} = \overline{z} + \overline{2 - i}$.
Ainsi, $\overline{Z} = \overline{z} + 2 + i$.

b) $Z = (z + 2i)(iz - 3)$ donc $\overline{Z} = \overline{(z + 2i)(iz - 3)}$.
Ainsi, $\overline{Z} = \overline{(z + 2i)} \times \overline{(iz - 3)} = \left(\overline{z} + \overline{2i}\right)\left(\overline{iz} - \overline{3}\right)$
et $\overline{Z} = (\overline{z} - 2i)(-i\overline{z} - 3)$.

c) $Z = (z - \overline{z})^2$ donc $\overline{Z} = \overline{(z - \overline{z})^2} = \overline{z - \overline{z}}^2$.
Ainsi, $\overline{Z} = \left(\overline{z} - \overline{\overline{z}}\right)^2 = (\overline{z} - z)^2$.

d) Pour tout complexe $z \neq 3$
$Z = \dfrac{z - i}{3 - z}$ donc $\overline{Z} = \overline{\left(\dfrac{z - i}{3 - z}\right)} = \dfrac{\overline{z - i}}{\overline{3 - z}} = \dfrac{\overline{z} + i}{3 - \overline{z}}$.

Le conjugué d'une somme est la somme des conjugués.

Le conjugué d'un produit est le produit des conjugués.

Le conjugué d'une puissance est la puissance du conjugué.

Le conjugué d'un quotient est le quotient des conjugués.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 5

7 z et z' sont des nombres complexes, $z \neq 0$.
a) On note $z = x + iy$ la forme algébrique de z avec $(x\,;y) \neq (0\,;0)$. Exprimer en fonction de x et y, la forme algébrique de $\dfrac{1}{z}$, puis de $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)}$ et $\dfrac{1}{\overline{z}}$.
b) Conclure pour la propriété **(4)** de D.
c) Utiliser $\dfrac{z'}{z} = z' \times \dfrac{1}{z}$ pour démontrer **(5)** de D.

Sur le modèle de l'exercice résolu 6

8 z désigne un nombre complexe.
Dans chaque cas, exprimer le conjugué du nombre complexe Z en fonction de z et $\overline{z}$.
a) $Z = -5 + i - z$ **b)** $Z = (i - z)(3z + 1 + 2i)$
c) $Z = z^2 - 3\overline{z} + 5 - 3i$ **d)** $Z = 2iz^3$
e) $Z = \dfrac{2\overline{z} + 1}{(1 + 2i)z}$ (avec $z \neq 0$)

Exercices
- 9 à 13 (ci-contre)
- 79 à 93

3 Formule du binôme dans ℂ

A Des observations

z et z' désignent deux nombres complexes.

- $(z+z')^2 = z^2+2zz'+z'^2 = 1z^2+2zz'+1z'^2$
- $(z+z')^3 = (z^2+2zz'+z'^2)(z+z') = z^3+z^2z'+2z^2z'+2zz'^2+z'^2z+z'^3$

soit $(z+z')^3 = z^3+3z^2z'+3zz'^2+z'^3 = 1z^3+3z^2z'+3zz'^2+1z'^3$.

On observe que les coefficients qui figurent aux lignes $n=2$, $n=3$, du triangle de Pascal fournissent les coefficients (en rouge) obtenus dans les développements ci-dessus. On peut conjecturer alors que :

$$(z+z')^4 = 1z^4+4z^3z'+6z^2z'^2+4zz'^3+1z^4.$$

On peut vérifier que cette conjecture est vraie en procédant comme ci-dessus avec des développements. En fait, on démontre ci-après une formule générale permettant de développer $(z+z')^n$.

n \ p	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

B La formule du binôme

Propriété

Pour tous complexes z et z' et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

$$(z+z')^n = z^n+\binom{n}{1}z^{n-1}z'+\binom{n}{2}z^{n-2}z'^2+\ldots+\binom{n}{k}z^{n-k}z'^k+\ldots+\binom{n}{n-1}zz'^{n-1}+z'^n.$$

De façon condensée, cette formule s'écrit : $(z+z')^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}z^{n-k}z'^k$.

Démonstration

On utilise un raisonnement par récurrence.

Initialisation : pour $n=1$, on vérifie que $(z+z')^1 = z^1+z'^1$.

Or, $(z+z')^1 = z+z'$ et $z^1+z'^1 = z+z'$ donc $(z+z')^1 = z^1+z'^1$.

Hérédité : on suppose que pour un entier naturel $n \geqslant 1$:

$$(z+z')^n = z^n+\binom{n}{1}z^{n-1}z'+\binom{n}{2}z^{n-2}z'^2+\ldots+\binom{n}{k}z^{n-k}z'^k+\ldots+\binom{n}{n-1}zz'^{n-1}+z'^n.$$

$\binom{n}{0}=1$; $\binom{n}{n}=1$

$(z+z')^{n+1} = (z+z')(z+z')^n = z(z+z')^n+z'(z+z')^n$. Or :

- $z(z+z')^n = z^{n+1}+\binom{n}{1}z^nz'+\ldots+\binom{n}{k}z^{n-k+1}z'^k+\ldots+\binom{n}{n-1}z^2z'^{n-1}+zz'^n$
- $z'(z+z')^n = z^nz'+\ldots+\binom{n}{k-1}z^{n-k+1}z'^k+\ldots+\binom{n}{n-2}z^2z'^{n-1}+\binom{n}{n-1}zz'^n+z'^{n+1}$; donc :
- $(z+z')^{n+1} = z^{n+1}+\left(\binom{n}{1}+\binom{n}{0}\right)z^nz'+\ldots+\left(\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right)z^{n+1-k}z'^k+\ldots+\left(\binom{n}{n}+\binom{n}{n-1}\right)zz'^n+z'^{n+1}$

$(z+z')^{n+1} = z^{n+1}+\binom{n+1}{1}z^nz'+\ldots+\binom{n+1}{k}z^{n+1-k}z'^k+\ldots+\binom{n+1}{n}zz'^n+z'^{n+1}$

Conclusion : pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, l'égalité est vraie.

Exemples

- $(z+z')^5 = z^5+\binom{5}{1}z^4z'+\binom{5}{2}z^3z'^2+\binom{5}{3}z^2z'^3+\binom{5}{4}zz'^4+z'^5$

$(z+z')^5 = z^5+5z^4z'+10z^3z'^2+10z^2z'^3+5zz'^4+z'^5$

On utilise la ligne $n=5$ du triangle de Pascal.

- $(1+i)^3 = 1+3i+3i^2+i^3 = 1+3i-3-i = -2+2i$.

EXERCICES RÉSOLUS

9 Appliquer la formule du binôme

Utiliser la formule du binôme pour développer : **a)** $(1+z)^5$ **b)** $(z-2)^3$ (avec $z \in \mathbb{C}$)

Solution

a) $(1+z)^5 = 1^5 + \binom{5}{1}1^4 z + \binom{5}{2}1^3 z^2 + \binom{5}{3}1^2 z^3 + \binom{5}{4}1z^4 + z^5$

En utilisant la ligne $n=5$ du triangle de Pascal, il vient :

$(1+z)^5 = 1 + 5z + 10z^2 + 10z^3 + 5z^4 + z^5$

b) $(z-2)^3 = z^3 + \binom{3}{1}z^2(-2) + \binom{3}{2}z(-2)^2 + (-2)^3$

En utilisant la ligne $n=3$ du triangle de Pascal, il vient :

$(z-2)^3 = z^3 + 3z^2(-2) + 3z \times 4 - 8$

$(z-2)^3 = z^3 - 6z^2 + 12z - 8$

Au **a)**, tous les termes du développement sont de la forme $\binom{5}{k}1^{5-k}z^k$ de $k=0$ à $k=5$. On remarque que la somme des exposants de 1 et de z est toujours égale à 5.

HISTOIRE DES MATHS

La formule du binôme est connue dès le 10e siècle par les mathématiciens indiens, arabes, perses et elle est démontrée au 13e siècle par le mathématicien chinois Yang Hui. Cette formule est souvent appelée **formule du binôme de Newton** car, en 1665, Isaac Newton l'a généralisée.

10 Établir une formule

Déterminer de deux façons différentes la somme $S = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Solution

- **Première méthode : avec la combinatoire**

Pour un ensemble fini à n éléments, $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n-1}, \binom{n}{n}$ désignent le nombre de parties respectivement à 0 élément, 1 élément, 2 éléments, …, $n-1$ éléments, n éléments.

Ainsi, S est le nombre total de parties d'un ensemble à n éléments et $S = 2^n$.

Le nombre total de parties d'un ensemble à n éléments est établi dans le manuel de Spécialité p. 34.

- **Deuxième méthode : avec la formule du binôme**

On applique la formule du binôme avec $z=1$ et $z'=1$; il vient :

$$(1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}.$$

Ainsi, $S = (1+1)^n = 2^n$.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 9

11 Utiliser la formule du binôme pour développer :

a) $(3+i)^4$ **b)** $(2i-1)^3$ **c)** $(1-z)^5$ (avec $z \in \mathbb{C}$)

12 Utiliser le triangle de Pascal pour développer $(1+z)^8$ avec $z \in \mathbb{C}$.

Sur le modèle de l'exercice résolu 10

13 n désigne un nombre entier naturel, $n \geqslant 1$.

a) Développer $(1+z)^n$ avec la formule du binôme.

b) Choisir une valeur adaptée de z afin d'en déduire en fonction de n l'expression de la somme :

$$S = \binom{n}{0} + 4\binom{n}{1} + 4^2\binom{n}{2} + \ldots + 4^n\binom{n}{n}.$$

EXERCICE RÉSOLU

14 Automatiser des calculs sur les nombres complexes

Cours 1. et 2.

1. Écrire en langage Python, les fonctions ci-dessous qui ont pour paramètres a la partie réelle et b la partie imaginaire d'un nombre complexe z.

a) **Carré** qui renvoie la forme algébrique du carré du nombre complexe z.

b) **Inverse** qui renvoie la forme algébrique de l'inverse du nombre complexe z (avec $(a\,;b) \neq (0\,;0)$).

2. Utiliser ces fonctions pour déterminer le carré, puis l'inverse du nombre complexe $z = 280 - 960i$.

Solution

On note $z = a + ib$.

1. a) Le carré de z a pour forme algébrique :

$$z^2 = (a+ib)^2 = a^2 + 2iab + (ib)^2 = a^2 - b^2 + 2iab.$$

La fonction **Carré** écrite ci-dessous, en langage Python, renvoie la forme algébrique de z^2.

```
def Carré(a,b):
    A=a**2-b**2
    B=2*a*b
    if B>0:
        C=str(A)+"+"+str(B)+"i"
    else:
        C=str(A)+"-"+str(abs(B))+"i"
    return C
```

Si par exemple A = 57, alors **str(A)** renvoie la chaîne de caractères "57".

b) L'inverse du nombre complexe non nul z a pour forme algébrique :

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}.$$

La fonction **Inverse** écrite ci-contre, en langage Python, renvoie la forme algébrique de $\frac{1}{z}$.

```
def Inverse(a,b):
    M=a/(a**2+b**2)
    N=-b/(a**2+b**2)
    if N>0:
        I=str(M)+"+"+str(N)+"i"
    else:
        I=str(M)+"-"+str(abs(N))+"i"
    return I
```

Les résultats renvoyés par ces fonctions sont du type chaîne de caractères.

2. Voici les affichages obtenus.

```
>>> Carré(280,-960)
'-843200-537600i'
```

Donc $(280 - 960i)^2 = -843\,200 - 537\,600i$.

```
>>> Inverse(280,-960)
'0.00028+0.00096i'
```

Donc $\frac{1}{280 - 960i} = 0{,}000\,28 + 0{,}000\,96i$.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 14

15 Écrire en langage Python, une fonction **Produit** qui a pour paramètres les parties réelles et imaginaires de deux nombres complexes et qui renvoie la forme algébrique de leur produit.

16 Écrire en langage Python, une fonction **Quotient** qui a pour paramètres les parties réelles et imaginaires de deux nombres complexes z et z' (avec $z' \neq 0$) qui renvoie la forme algébrique du quotient de z par z'.

Ensemble des nombres complexes

Cours 1

Questions flash — À l'oral

17 Dans chaque cas, donner oralement la partie réelle et la partie imaginaire du nombre complexe.

- $z_1 = -3 + 5i$
- $z_2 = 4$
- $z_3 = 1 + (1 + 2i)i$
- $z_4 = 2(-3i + 5)$
- $z_5 = \dfrac{-i}{4} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
- $z_6 = -2i$

18 Parmi ces nombres complexes, citer les nombres réels, puis les imaginaires purs.

- $z_1 = -3$
- $z_2 = (2i)i$
- $z_3 = i(3 - 6i)$
- $z_4 = (2 + 0{,}5i)(5 + 20i)$
- $z_5 = -2i + 8i^3$

19 Voici trois nombres complexes :

- $z_1 = 1 + 3i$
- $z_2 = 2 - i$
- $z_3 = -3 + 2i$

Déterminer mentalement la forme algébrique de :

a) $z_1 + z_2$ **b)** $z_1 + z_3$ **c)** $z_2 - z_3$

20 Déterminer mentalement la forme algébrique de chaque nombre complexe.

a) $(2 + i)^2$ **b)** $(i - 3)^2$ **c)** $(i + 1)(i - 2)$

Pour les exercices 21 à 26, déterminer la forme algébrique de chaque nombre complexe. Au besoin, vérifier avec la calculatrice.

21
- $z_1 = 3 + 2i - 1 + 3i$
- $z_2 = 5i - (3 - 7i)$
- $z_3 = -4 + 7i - (2 + 4i)$

22
- $z_1 = 2(5 - i) - 3(i - 4)$
- $z_2 = -3i\left(6 - \dfrac{1}{3}i\right)$
- $z_3 = (2 + i)(3 - 5i)$

23
- $z_1 = \left(3 + i\sqrt{5}\right)\left(3 - i\sqrt{5}\right)$
- $z_2 = (3 + 5i)(5i - 3)$
- $z_3 = (4 - 3i)^2$

24
- $z_1 = \left(\dfrac{1}{2} + 2i\right)^2$
- $z_2 = (i - 2)^2 - (3 - 5i)$
- $z_3 = (1 + i)(2 - 3i)(4 - i)$

25
- $z_1 = \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$
- $z_2 = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{i}{2}\right)^2$
- $z_3 = (2 + i)^2(1 - 2i)$

26
- $z_1 = (2 - 5i)^2$
- $z_2 = (2 - 5i)^4$

27 Déterminer la forme algébrique de chaque nombre complexe :

- $z_1 = (3 + i)^3$
- $z_2 = (3 - 2i)^3$

28 Voici trois nombres complexes :

- $z_1 = 3 + 2i$
- $z_2 = -1 + 3i$
- $z_3 = 1 - i$.

a) Déterminer :

- $\text{Re}(z_1 + z_2 + z_3)$
- $\text{Re}(iz_2)$
- $\text{Re}(z_1^2)$

b) Déterminer :

- $\text{Im}\left(z_1 - 2z_2 + \dfrac{1}{2}z_3\right)$
- $\text{Im}(z_1 \times z_2)$
- $\text{Im}(z_2^2)$

29 Justifier les affichages obtenus avec un logiciel de calcul formel, puis donner la forme algébrique du nombre complexe :

$$z = \left(\frac{1}{2} - i\right)\left(4i + \frac{3}{2}\right).$$

1 $\text{Re}\left(\left(\frac{1}{2} - i\right)\left(\frac{3}{2} + 4i\right)\right)$
$\rightarrow \dfrac{19}{4}$

2 $\text{Im}\left(\left(\frac{1}{2} - i\right)\left(\frac{3}{2} + 4i\right)\right)$
$\rightarrow \dfrac{1}{2}$

30 Existe-t-il un nombre réel a tel que :

$$\left(a^2 + a - 1\right) + ai = 1 - i \text{ ?}$$

31 Montrer que les deux nombres complexes suivants sont égaux.

$$z_1 = (1 - i)\left(-\frac{1}{2} + \frac{5}{2}i\right)$$

$$z_2 = \frac{1}{10}(-7 + 9i)(1 - 3i)$$

32 Voici deux nombres complexes :

$$z_1 = -1 + 2i \text{ et } z_2 = 4 - i.$$

Dans chaque cas, écrire le nombre complexe sous forme algébrique.

- $z_1^2 - 2z_2$
- $z_1 \times z_2^2$
- $(z_1 - z_2)(2z_1 + z_2)$

33 f est la fonction définie sur $\mathbb{C}$ par :

$$f(z) = z^2 - 4z + 5.$$

a) Vérifier que $f(2 + i) = 0$.

b) Déterminer la forme algébrique de $f(3 - i)$.

34 g est la fonction définie sur $\mathbb{C}$ par :

$$g(z) = (2 + i)z^2 + 3iz + 1.$$

1. Dans chaque cas, écrire sous forme algébrique.

a) $g(1)$

b) $g(i)$

c) $g(1 - i)$

2. a) Vérifier que $g(1 - 3i)$ est un imaginaire pur.

b) Vérifier que $g(-0{,}6 - 1{,}2i)$ est un nombre réel.

35 h est la fonction définie sur $\mathbb{C}$ par :
$$h(z)=z^3-2(2+i)z^2+(2+7i)z+3-3i.$$
Vérifier que i, 3 et $1+i$ sont solutions de l'équation $h(z)=0$.

36 z est un nombre complexe de forme algébrique $x+iy$ (avec x et y nombres réels).
On note $Z=z^2-z$.
a) Vérifier que la forme algébrique de Z est :
$$Z=x^2-y^2-x+iy(2x-1).$$
b) Proposer deux nombres complexes z non nuls tels que Z soit un nombre réel.
c) Proposer deux nombres complexes z non nuls tels que Z soit un imaginaire pur.

37 z est un nombre complexe de forme algébrique $x+iy$ (avec x et y nombres réels).
a) Exprimer en fonction de x et y la forme algébrique du nombre complexe $Z=z^2-3$.
b) En déduire, à l'aide de leurs formes algébriques, tous les nombres complexes z tels que Z soit un réel.
c) Pour $z=2+3i$, le nombre Z est-il un imaginaire pur ?

38 z est un nombre complexe de forme algébrique iy (avec y nombre réel).
a) Exprimer en fonction de y la forme algébrique du nombre complexe $Z=(z+1+i)^2$.
b) En déduire les nombres complexes z tels que Z soit un imaginaire pur.
c) Pour $z=-2i$, Z est-il un réel ?

39 Dans chaque cas, résoudre l'équation dans $\mathbb{C}$.
a) $2z=3-4i$ **b)** $5z+1-2i=0$
c) $3+i-2z=5z-4+i$

40 **(E)** est l'équation $iz=4+3i$ où z est un nombre complexe.
Multiplier par i chaque membre de l'équation **(E)**, puis résoudre cette équation.

Pour les exercices 41 et 42, le système a un seul couple solution dans $\mathbb{C}^2$. Le résoudre et présenter la solution avec des formes algébriques.

41 $\begin{cases} 3z+z'=5+2i \\ -z+z'=1-2i \end{cases}$

42 $\begin{cases} z-\dfrac{1}{2}iz'=5i \\ 2z-(1+i)z'=-2+6i \end{cases}$

Conjugué d'un nombre complexe

Cours 2

Questions flash À l'oral

43 Dans chaque cas, indiquer oralement le conjugué du nombre complexe.
a) $1-i$ **b)** $5+4i$ **c)** $-3+2i$ **d)** 50
e) $8i$ **f)** $-1-5i$ **g)** $2i-7$ **h)** $-4i+3$

44 $z=5-4i$ est un nombre complexe.
Déterminer mentalement :
a) $z+\overline{z}$ **b)** $z-\overline{z}$

45 Un nombre complexe z a pour forme algébrique $a+ib$ (avec a et b nombres réels).
Que peut-on en déduire pour a ou b lorsque :
a) $z=\overline{z}$? **b)** $z=-\overline{z}$?

46 Voici deux nombres complexes :
$$z_1=(1-i)(3+5i) \text{ et } z_2=(1+i)(3-5i).$$
Expliquer oralement pourquoi z_1+z_2 est un nombre réel et z_1-z_2 est un imaginaire pur.

47 Dans chaque cas, écrire la forme algébrique de l'inverse du nombre complexe.
- $z_1=2+i$
- $z_2=\sqrt{3}-i$
- $z_3=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Pour les exercices 48 à 50, écrire la forme algébrique de chaque nombre complexe.

48 • $z_1=\dfrac{1+i}{2-i}$ • $z_2=\dfrac{4+5i}{i}$

49 • $z_1=\dfrac{3-4i}{1+5i}$ • $z_2=\dfrac{-2+3i}{4-5i}$

50 • $z_1=\dfrac{(1-i)(2+3i)}{-1+6i}$ • $z_2=\dfrac{i(5-i)}{(2+i)(3-i)}$

51 Voici deux nombres complexes :
• $z_1=2+i$ • $z_2=\sqrt{3}-i$
Dans chaque cas, écrire la forme algébrique du nombre complexe.
a) $\dfrac{z_1}{z_2}$ **b)** $\dfrac{1}{z_1}+\dfrac{1}{z_2}$ **c)** $\dfrac{z_2-z_1}{z_1+z_2}$

52 Écrire la forme algébrique de chaque nombre complexe.
• $Z=\dfrac{1}{1+2i}+\dfrac{1-i}{2-i}$ • $Z'=\dfrac{1}{i}-\dfrac{2+i}{i+1}$

53 Voici deux nombres complexes :

$$z = 5i \quad \text{et} \quad z' = \frac{10+5i}{1-2i}.$$

Démontrer que $z = z'$ en calculant :

a) $z - z'$ **b)** $\dfrac{z}{z'}$

54 Voici deux nombres complexes :

$$z_1 = \frac{3i-2}{5+i} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-2-3i}{5-i}.$$

Expliquer pourquoi $z_1 + z_2$ est un nombre réel et $z_1 - z_2$ est un imaginaire pur :

a) sans calcul ;

b) par le calcul.

55 On note $z = (4+i)(2-3i)$.

On se propose d'obtenir la forme algébrique du conjugué de z de deux façons différentes.

a) Première méthode

Déterminer la forme algébrique de z, puis la forme algébrique de $\overline{z}$.

b) Seconde méthode

- Exprimer $\overline{z}$ à l'aide des conjugués de $4+i$ et $2-3i$.
- En déduire la forme algébrique de $\overline{z}$.

Pour les exercices 56 à 60, déterminer de deux façons différentes le conjugué de chaque nombre complexe.

56 **a)** $z = (6+5i)+(-2-i)$

b) $z = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}i\right) - \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2}i\right)$

57 **a)** $z = 2i(2+3i)$ **b)** $z = (1-2i)(4+i)$

58 **a)** $z = (2-3i)^2$ **b)** $z = (1+4i)^2$

59 **a)** $z = (4i-1)+(3-2i)(1-i)$

b) $z = \left(\frac{1}{2}i - 1\right)^2 - \left(\frac{1}{4} - i\right)$

60 **a)** $z = \dfrac{1}{3+i}$

b) $z = \dfrac{i(2-3i)}{(2+i)^2}$

Pour les exercices 61 et 62, écrire la forme algébrique du conjugué $\overline{z}$ du nombre complexe.

61 **a)** $z = (6-i)(-i+3)$ **b)** $z = (5-4i)^2(3-i)$

62 **a)** $z = \dfrac{3-i}{i-4}$ et **b)** $z = \dfrac{i}{2-i}$

Pour les exercices 63 à 66, résoudre l'équation dans $\mathbb{C}$; donner la solution sous forme algébrique.

63 $(2+i)z = 3-i$

64 $iz = 8+3i$

65 $(2-5i)z = 4i$

66 $2iz + 6 - i = 3z + 5$

67 z est un nombre complexe tel que $z \neq i$.

Résoudre l'équation $\dfrac{z+i}{z-i} = 5i$.

68 z est un nombre complexe tel que $z \neq 1-i$.

Résoudre l'équation $\dfrac{2z-i}{z-1+i} = 2-3i$.

69 **(E)** est l'équation $5\overline{z} = 4-i$ où z désigne un nombre complexe. On se propose de résoudre cette équation de deux façons différentes.

1. Première méthode

a) Déterminer la forme algébrique de $\overline{z}$.

b) Terminer la résolution de l'équation **(E)**.

2. Seconde méthode

a) Écrire une équation équivalente à **(E)** en prenant le conjugué de chaque membre.

b) Terminer la résolution de l'équation **(E)**.

Pour les exercices 70 à 72, résoudre l'équation dans $\mathbb{C}$; donner la solution sous forme algébrique.

70 $i\overline{z} = 3+4i$

71 $(1+i)\overline{z} = -2$

72 $(2-3i)\overline{z} + 2 - i = 0$

73 z est un nombre complexe de forme algébrique $x+iy$ (avec x et y nombres réels).

a) Exprimer en fonction de x et y la forme algébrique du nombre complexe $3\overline{z} - 2iz$.

b) En déduire la résolution de l'équation :

$$3\overline{z} - 2iz = 5 - 3i.$$

Pour les exercices 74 et 75, résoudre l'équation dans $\mathbb{C}$; donner la solution sous forme algébrique.

74 **a)** $(1+3i)z - (1+2i)\overline{z} + 5i = 0$

b) $2iz - \overline{z} + 1 = 0$

75 **a)** $(1-i)z - (3+2i)\overline{z} = 0$ **b)** $\overline{z} + i = 2(z-i)$

76 z désigne un nombre complexe.
Dans chaque cas, exprimer en fonction de $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe Z.
a) $Z = 2z^2 - 3z + 1$ **b)** $Z = (z - 2i)(3 - 2z)$
c) $Z = iz - (z-2)^2$ **d)** $Z = z^3 + (1-i)z + i - 3$

77 On note $Z = \frac{1}{\overline{z}}$ avec $z = x + iy$ où x et y sont des nombres réels tels que $(x\,;y) \neq (0\,;0)$.
a) Vérifier que $Z = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{y}{x^2+y^2}$.
b) En déduire les nombres complexes z tels que Z soit un imaginaire pur.

78 On note $Z = \frac{\overline{z}}{3-\overline{z}}$ où z est un nombre complexe de forme algébrique $z = x + iy$ avec $(x\,;y) \neq (3\,;0)$.
a) Vérifier que la forme algébrique de Z est :
$$Z = \frac{-x^2 - y^2 + 3x}{(3-x)^2 + y^2} + i\frac{-3y}{(3-x)^2+y^2}$$
b) En déduire les nombres complexes z tels que Z soit un nombre réel.
c) Proposer deux exemples de nombres complexes $z \neq 3$ tels que Z soit un imaginaire pur.

Formule du binôme dans $\mathbb{C}$

Cours 3

Questions flash À l'oral

79 z et z' désignent des nombres complexes.
Indiquer oralement le développement de :
a) $(z+z')^2$ **b)** $(z-z')^2$ **c)** $(z+z')(z-z')$

80 z et z' désignent des nombres complexes.
Indiquer oralement le développement de :
a) $(z+z')^3$ **b)** $(z-z')^3$ **c)** $(z+z')^4$

81 On sait que :
$$(2+i)^3 = 2^3 + 3\times 2^2 i + 3 \times 2i^2 + i^3.$$
Déterminer mentalement la forme algébrique de $(2+i)^3$.

Pour les exercices 82 et 83, développer avec la formule du binôme et le triangle de Pascal.

82 **a)** $(z+2)^3$ **b)** $(z-1)^4$ **c)** $(2z-1)^5$

83 **a)** $(z+1)^6$ **b)** $\left(\frac{1}{2}z+2\right)^4$ **c)** $(z-3)^8$

84 Dans chaque cas, utiliser la formule du binôme pour obtenir la forme algébrique.
a) $(1+i)^5$ **b)** $(i-1)^4$ **c)** $(3+2i)^6$

Pour les exercices 85 à 88, z et z' désignent des nombres complexes.

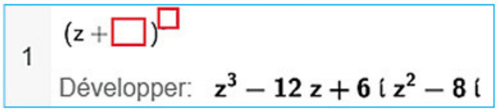
85 Quel est le coefficient de z^6 dans le développement de $(z+1)^9$?

86 Quel est le coefficient de z^4 dans le développement de $(2z+1)^8$?

87 Quel est le coefficient de $z^3z'^7$ dans le développement de $(z-z')^{10}$?

88 Quel est le coefficient de $z^6z'^7$ dans le développement de $(2z-z')^{13}$?

89 L'expression développée ci-dessous avec un logiciel de calcul formel est de la forme $(z+a)^n$.
Retrouver les valeurs de a et n.



90 Développer $(1-1)^6$ avec la formule du binôme et calculer la valeur de :
$$\binom{6}{0}+\binom{6}{2}+\binom{6}{4}+\binom{6}{6}-\binom{6}{1}-\binom{6}{3}-\binom{6}{5}$$

91 $A = \binom{100}{0}+\binom{100}{2}+\binom{100}{4}+\ldots+\binom{100}{100}$
$B = \binom{100}{1}+\binom{100}{3}+\binom{100}{5}+\ldots+\binom{100}{99}$
a) Calculer A + B.
b) Calculer A − B.
c) En déduire A et B.

92 z désigne un nombre complexe.
a) Développer $(z-1)^6$ avec la formule du binôme.
b) En choisissant une valeur adaptée pour z, en déduire la valeur de :
$$64 - 32\binom{6}{1} + 16\binom{6}{2} - 8\binom{6}{3} + 4\binom{6}{4} - 2\binom{6}{5} + 1.$$

93 **a)** Développer $(1+i)^8$ avec la formule du binôme pour obtenir sa forme algébrique.
b) Retrouver ce résultat en utilisant le fait que le nombre complexe $(1+i)^2$ est un imaginaire pur.

Pour se tester

EXO Exercices interactifs

94 QCM **Dans chaque cas, donner la réponse exacte sans justifier.**

		A	B	C	D
1	La partie imaginaire du nombre complexe $-3i+5$ est …	5	$-3i$	$3i$	-3
2	$z=5+3i$ Alors $z-\overline{z}$ est égal à …	10	$6i$	6	15
3	La forme algébrique du nombre complexe $(-3+5i)(6-i)$ est …	$-18+33i+5i^2$	$-18-5i^2$	$-13+33i$	$-13+27i$
4	La forme algébrique de $\frac{3-5i}{1+2i}$ est …	$-\frac{7}{5}+\frac{11}{5}i$	$-\frac{7}{5}-\frac{11}{5}i$	$\frac{7}{5}-\frac{11}{5}i$	$\frac{13}{5}+\frac{1}{5}i$
5	La forme algébrique de $(2+3i)^2$ est …	$-5+12i$	$4+12i-9i^2$	$-5+24i$	$13+12i$
6	Le coefficient de $z^3z'^2$ dans le développement de $(2z+z')^5$ est …	5	40	80	32

95 QCM **Dans chaque cas, donner la (ou les) réponse(s) exacte(s) sans justifier.**

		A	B	C	D
1	$z=x+iy$ avec x et y nombres réels. La partie imaginaire de $Z=z^2+3z-1$ est …	$2xy+3y$	$2yx+3x$	$x(2y+3)$	$y(2x+3)$
2	$z=x+iy$ avec x et y nombres réels. $Z=(2x+y)+i(x+1)$ est un imaginaire pur lorsque …	$z=1-2i$	$z=-1+5i$	$z=-\frac{1}{2}+i$	$z=10-5i$
3	Dans $\mathbb{C}$, l'équation $(1+i)z+2i=0$ a pour solution …	$z=-1+i$	$z=-1-i$	$z=1+i$	$z=1-i$
4	Dans $\mathbb{C}$, l'équation $2iz+\overline{z}=-1+i$ a pour solution …	$z=1+i$	$z=1-i$	$z=-1-i\sqrt{3}$	$z=\frac{1}{5}+\frac{3}{5}i$

96 Vrai/Faux **Dans chaque cas, dire si l'affirmation est vraie ou fausse en justifiant.**

1 On considère le nombre complexe $z=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Affirmation : $z+\frac{1}{z}$ est un nombre réel.

2 On considère le nombre complexe $z=(-1+i)^{10}$.

Affirmation : z est un imaginaire pur.

3 On considère le nombre complexe $j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Affirmation : $1+j+j^2=2$.

Rappel
Z est un nombre complexe.
Z est un nombre réel si, et seulement si, sa partie imaginaire est nulle.
Z est un nombre imaginaire pur si, et seulement si, sa partie réelle est nulle.

Vérifiez vos réponses : p. 293

97 Caractériser les nombres complexes qui sont des réels

z est un nombre complexe et on pose $Z = z^2 - 2z + 3$.
On se propose d'étudier l'existence de nombres complexes z tels que Z soit un nombre réel et, s'il en existe, de déterminer l'ensemble de tous ces nombres complexes.

1. Première méthode : avec la forme algébrique

a) On note $z = x + iy$ la forme algébrique du nombre complexe z avec x et y nombres réels.
Expliquer alors pourquoi $Z = x^2 - y^2 - 2x + 3 + 2iy(x - 1)$.

b) Recopier et compléter :
Z est un nombre réel si, et seulement si, $z = \ldots + iy$ (avec $y \in \mathbb{R}$) ou z est un ....

2. Seconde méthode : avec le conjugué

a) Lire attentivement le raisonnement suivant :

> Z est réel si, et seulement si, $\overline{Z} = Z$, c'est-à-dire $\overline{z^2 - 2z + 3} = z^2 - 2z + 3$
> soit $\overline{z}^2 - 2\overline{z} + 3 = z^2 - 2z + 3$.
> Ainsi, Z est réel si, et seulement si, $z^2 - \overline{z}^2 - 2(z - \overline{z}) = 0$
> c'est-à-dire $(z - \overline{z})(z + \overline{z} - 2) = 0$.
> Autrement dit, Z est réel si, et seulement si, $z = \overline{z}$ ou $z + \overline{z} = 2$.
> **Conclusion : Z est réel si, et seulement si, z est réel ou $\mathrm{Re}(z) = 1$.**

b) On raisonne ci-dessus par équivalence.
Quels sont les mots employés qui assurent ces équivalences ?

c) Dans le raisonnement ci-dessus, expliquer les parties écrites en vert.

98 Caractériser les nombres complexes qui sont des imaginaires purs

z est un nombre complexe différent de 1 et on pose $Z = \dfrac{iz}{z-1}$.
On se propose d'étudier l'existence de nombres complexes z tels que Z soit un imaginaire pur et, s'il en existe, de déterminer l'ensemble de tous ces nombres complexes.

1. Première méthode : avec la forme algébrique

a) On note $z = x + iy$ la forme algébrique du nombre complexe z avec x et y réels tels que $(x ; y) \neq (1 ; 0)$.
Exprimer en fonction de x et y la forme algébrique de Z.

b) En déduire tous les nombres complexes z tels que Z soit un imaginaire pur.

2. Seconde méthode : avec le conjugué

a) Recopier et compléter :
Z est imaginaire pur si, et seulement si, $\overline{Z} = -Z$, c'est-à-dire $\overline{\left(\dfrac{iz}{z-1}\right)} = -\dfrac{iz}{z-1}$
soit $\dfrac{\ldots}{\ldots} = -\dfrac{iz}{z-1}$.
Ainsi, Z est imaginaire pur si, et seulement si, $\ldots(z-1) = -iz(\ldots)$
c'est-à-dire $z = \ldots$

b) Conclure sur l'ensemble des nombres complexes $z \neq 1$ tels que Z soit un imaginaire pur.

99 Déterminer le nombre de solutions d'une équation

Démontrer que l'équation $z^2 - 3\overline{z} + 2 = 0$ admet quatre solutions dans $\mathbb{C}$ en utilisant la forme algébrique de z.

▷ Vidéo

JAICOMPRIS.COM

Toutes les démonstrations au programme en vidéo

Liste des démonstrations :
- Conjugué d'un produit, d'un inverse, d'une puissance entière.
- Formule du binôme.

Conseil
Dire que Z est un nombre réel **équivaut à** dire que $\overline{\mathbf{Z}} = \mathbf{Z}$.

Conseil
Dire que Z est un imaginaire pur **équivaut à** dire que $\overline{\mathbf{Z}} = -\mathbf{Z}$.

Calculer avec des nombres complexes

100 On note $z=\dfrac{(1+i)^3}{\left(1+i\sqrt{3}\right)^4}$.

a) Déterminer la forme algébrique du numérateur de z en utilisant $a^3=a^2\times a$.
b) Déterminer la forme algébrique du dénominateur de z en utilisant $a^4=a^2\times a^2$.
c) En déduire la forme algébrique de z.

Pour les exercices 101 à 104, déterminer la forme algébrique du nombre complexe.

101 $z=\dfrac{(2+i)(3-i)}{4i}$

102 $z=\dfrac{5-3i}{(4-i)(1+3i)}$

103 $z=\dfrac{(5+2i)(2-3i)}{(i-3)(3i-4)}$

104 $z=\dfrac{(8-3i)(i-4)}{(-5+2i)(3+7i)}$

105 z est le nombre complexe tel que :
$$z=2\sqrt{2+\sqrt{2}}+2i\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$
Justifier que $z^2=8\sqrt{2}(1+i)$.

106 Voici deux nombres complexes :
$$z_1=-\sqrt{2}+i\sqrt{2} \text{ et } z_2=\sqrt{3}+i.$$
Justifier que :
$$z_1\times z_2^2=\left(-2\sqrt{2}-2\sqrt{6}\right)+i\left(2\sqrt{2}-2\sqrt{6}\right).$$

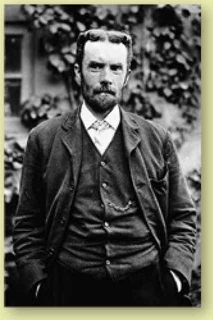
107 Voici deux nombres complexes :
$$z_1=\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} \text{ et } z_2=\frac{i}{-2+2i\sqrt{3}}.$$
Déterminer la forme algébrique de :
- z_1+z_2
- $z_1\times z_2$
- $\dfrac{z_1}{z_2}$
- z_1^3
- z_2^3
- $z_1^6\times z_2^7$

108 f est la fonction définie sur $\mathbb{C}$ par :
$$f(z)=z^2-14z+74.$$
a) Vérifier que $f(7+5i)=0$.
b) Démontrer que pour tout nombre complexe z,
$$\overline{f(z)}=f(\overline{z}).$$
c) Déterminer mentalement la valeur de $f(7-5i)$.

109 Développer et réduire le produit :
$\mathrm{P}(z)=(z+1-i)(z+1+i)(z-1+i)(z-1-i)$ (où $z\in\mathbb{C}$)

110 **Nombres complexes et électricité**

MATHS & PHYSIQUE



En courant continu, la loi d'Ohm s'écrit $\mathrm{U}=\mathrm{R}\times\mathrm{I}$.

Cette loi se généralise au cas d'un courant alternatif sinusoïdal, elle s'écrit $\underline{\mathbf{U}}=\underline{\mathbf{Z}}\times\underline{\mathbf{I}}$ où les nombres qui interviennent sont des complexes et où $\underline{Z}$ est l'impédance d'un composant ou d'un circuit.

L'impédance est exprimée en ohm.

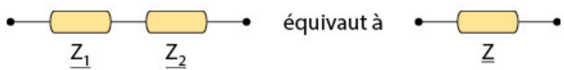
En électricité, on utilise j au lieu de i afin d'éviter toute confusion avec l'intensité.

Ainsi, la forme algébrique de l'impédance est $\underline{Z}=\mathrm{R}+j\mathrm{X}$ où la partie réelle R est la **résistance** et la partie imaginaire X est la **réactance**.

L'impédance a été introduite par le physicien britannique Olivier Heaviside en 1886.

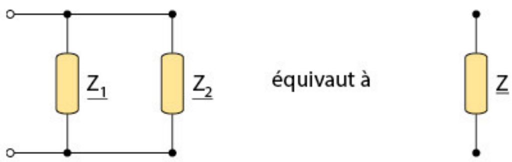
- **Impédances en série**

L'impédance équivalente à des impédances en série est la somme des impédances :
$$\underline{Z}=\underline{Z_1}+\underline{Z_2}.$$

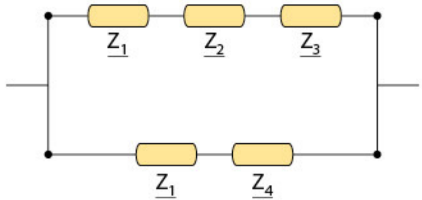


- **Impédances en parallèle**

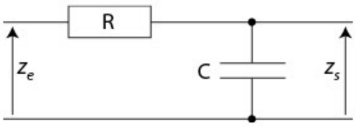
L'inverse de l'impédance équivalente à des impédances en parallèle est la somme des inverses des impédances :
$$\frac{1}{\underline{Z}}=\frac{1}{\underline{Z_1}}+\frac{1}{\underline{Z_2}}.$$



Déterminer l'impédance $\underline{Z}$ du montage ci-dessous où $\underline{Z_1}=3$, $\underline{Z_2}=10i$, $\underline{Z_3}=-2i$, $\underline{Z_4}=2-i$.



111 Le quadripole représenté ci-dessous est constitué d'un résistor de résistance R, en Ω, et d'un condensateur de capacité C, en µF.



On associe respectivement à la tension d'entrée et à la tension de sortie les nombres complexes z_e et z_s.
On appelle transmittance le nombre complexe Z défini par $Z = \dfrac{z_s}{z_e}$.

On admet que $Z = \dfrac{1}{1 + jRC\omega}$ où ω désigne la pulsation exprimée en radian par seconde.

On a : $R = 50\ \Omega$, $C = 2\ \mu F$ et $\omega = \dfrac{1}{100}\ \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

a) Déterminer la forme algébrique de Z.

b) On suppose que $z_e = 150\left(-\sqrt{3} + j\right)$.
Déterminer la forme algébrique de z_s.

Pour les exercices 112 à 114, résoudre l'équation dans ℂ.

112 $(1+i)\overline{z} + 2 - 5i = i - 1$

113 $(2z + 1 - i)(i\overline{z} + i - 2) = 0$

114 $\dfrac{z^2 + 3iz - 1}{z - i} = z + i$ (avec $z \neq i$)

115 **a)** Recopier et compléter ce tableau par des formes algébriques :

n	1	2	3	4
$(1+i)^n$				

b) Expliquer pourquoi pour tout entier naturel n, avec $n \geqslant 1$, $(1+i)^{n+4} = -4(1+i)^n$.

c) En déduire mentalement :
- $(1+i)^5$
- $(1+i)^6$
- $(1+i)^7$
- $(1+i)^8$

d) En déduire :
- $(1+i)^{95}$
- $(1+i)^{150}$
- $(1+i)^{925}$
- $(1+i)^{2\,020}$

116 $z = \dfrac{i - x}{i + x}$ où x est un nombre réel.

a) Montrer que $z = \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2} + i\dfrac{2x}{1 + x^2}$.

b) Déterminer les valeurs de x telles que la partie réelle et la partie imaginaire de z soient égales.

Reconnaître un réel, un imaginaire pur

117 z désigne un nombre complexe non nul de forme algébrique $x + iy$ avec x et y nombres réels tels que $(x\,;y) \neq (0\,;0)$.

On pose $Z = \dfrac{z}{\overline{z}}$.

Déterminer les nombres complexes $z \neq 0$ tels que Z soit un nombre réel en procédant des deux façons suivantes :

a) écrire la forme algébrique de Z en fonction de x et de y ;

b) utiliser le fait que Z est un nombre réel si, et seulement si, $Z = \overline{Z}$.

118 Déterminer les nombres complexes $z \neq 0$ tels que le nombre complexe $\dfrac{z}{\overline{z}}$ soit un imaginaire pur.

119 z désigne un nombre complexe.
On pose $Z = z - i$ et $Z' = \overline{z} - 1$.

1. Dans cette question, on prend $z = \dfrac{1}{4}(3 + i)$.
Déterminer la forme algébrique du produit ZZ′.
Que peut-on dire de ce nombre complexe ?

2. On note $z = x + iy$ (avec x et y nombres réels) la forme algébrique de z.

a) Montrer que la forme algébrique du produit ZZ′ est :
$$ZZ' = x^2 - x + y^2 - y + (-x - y + 1)i.$$

b) Déterminer en fonction de x, la forme algébrique des nombres complexes z tels que ZZ′ soit un nombre réel.

120 z est un nombre complexe de forme algébrique $x + iy$ (avec x et y nombres réels).
On pose $Z = z^2 - 2\overline{z} + 1$.

a) Montrer que la forme algébrique de Z est :
$$Z = x^2 - 2x + y^2 + 1 + (2xy + 2y)i.$$

b) Déterminer les nombres complexes z tels que Z soit un nombre réel.

c) Déterminer mentalement Z lorsque $z = -1 + 5i$.

121 z est un nombre complexe de forme algébrique $x + iy$ (avec x et y nombres réels).
On pose $Z = 2z - i\overline{z}$.
Déterminer en fonction de x la forme algébrique des nombres complexes z tels que :

a) Z est un nombre réel ;

b) Z est un imaginaire pur.

122 z est un nombre complexe différent de -3 de forme algébrique $x+iy$ avec $(x\,;y)\neq(-3\,;0)$.

On note $Z=\dfrac{z-2i}{z+3}$.

a) Justifier que la forme algébrique de Z est :

$$Z=\frac{x^2+y^2+3x-2y}{(x+3)^2+y^2}-i\frac{2x-3(y-2)}{(x+3)^2+y^2}.$$

b) Expliquer pourquoi si $z=3+4i$, alors Z est réel. Préciser ce réel.

c) Expliquer pourquoi si $z=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{5}{2}i$, alors Z est un imaginaire pur. Préciser cet imaginaire pur.

123 z désigne un nombre complexe.

On pose $Z=(1+z)(i+\overline{z})$.

On se propose de déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que Z soit un réel. Pour cela, on utilise la caractérisation :

Z est un réel si, et seulement si, $\overline{Z}=Z$.

a) Expliquer alors pourquoi Z est un réel si, et seulement si, $2i+i(z+\overline{z})-(z-\overline{z})=0$.

b) On note $z=x+iy$ (avec x et y nombres réels) la forme algébrique de z.

Justifier que Z est réel si, et seulement si, $y=x+1$.

c) Proposer trois nombres complexes z pour lesquels Z est un réel.

124 z désigne un nombre complexe différent de i.

On pose $Z=\dfrac{z-1-i}{iz+1}$.

On se propose de déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que Z soit un imaginaire pur. Pour cela, on utilise la caractérisation :

Z est un imaginaire pur si, et seulement si, $\overline{Z}=-Z$.

a) Expliquer alors pourquoi Z est un imaginaire pur si, et seulement si, $-i(z-\overline{z})=2$.

b) On note $z=x+iy$ la forme algébrique de z avec x et y nombres réels tels que $(x\,;y)\neq(0\,;1)$.

Justifier que Z est un imaginaire pur si, et seulement si, $y=1$ et $x\neq 0$.

c) Proposer trois nombres complexes z pour lesquels Z est un imaginaire pur.

125 z désigne un nombre complexe avec $z\neq-2i$.

On pose $Z=\dfrac{z-2+i}{z+2i}$.

a) Montrer que Z est réel si, et seulement si,

$$(2-i)z-(2+i)\overline{z}=-8i.$$

b) Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que Z soit un réel.

126 f est la fonction définie sur $\mathbb{C}$ par :

$$f(z)=\frac{1}{6}((3+4i)z+5\overline{z}).$$

On pose $Z=\dfrac{f(z)-z}{1+2i}$.

a) Vérifier que $Z=\dfrac{1}{30}(1-2i)((-3+4i)z+5\overline{z})$.

b) En déduire que Z est un nombre réel.

127 z désigne un nombre complexe.

On pose $Z=(1+i)\overline{z}-2$ et $Z'=i\overline{z}+2+i$.

1. a) Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que Z soit un réel.

b) Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que Z′ soit un réel.

c) Existe-t-il un nombre complexe z tel que Z et Z′ soient tous les deux réels ?

Si oui, quel est ce nombre complexe z et quelles sont alors les valeurs de Z et Z′ ?

2. Existe-t-il un nombre complexe z tel que Z et Z′ soient tous les deux des imaginaires purs ?

Si oui, quel est ce nombre complexe z et quelles sont alors les valeurs de Z et Z′ ?

S'ENTRAÎNER À LA LOGIQUE → p. 290

128 Réciproque

Dans chaque cas, démontrer la proposition ; indiquer si la proposition réciproque est vraie et justifier la réponse.

a) Si $Z=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$, alors Z^4 est un réel.

b) Si $Z=0$, alors $Z+\overline{Z}=0$.

c) Si $Z+\dfrac{1}{Z}=0$ et $Z\neq0$, alors $Z=i$ ou $Z=-i$.

129 Démontrer qu'une proposition est fausse

On a prolongé à $\mathbb{C}$ l'addition et la multiplication que l'on pratiquait dans $\mathbb{R}$.

En utilisant le produit $i\times i$, expliquer pourquoi on ne peut pas comparer des nombres complexes comme on le faisait dans $\mathbb{R}$ en restant compatible avec l'addition et la multiplication.

130 Condition nécessaire et suffisante

Z et Z′ sont des nombres complexes. La proposition suivante est-elle vraie ? Justifier.

« ZZ′ est réel si, et seulement si, Z et Z′ sont réels. »

131 Utiliser un raisonnement par récurrence

Raisonner | Calculer

n et k désignent des nombres entiers naturels supérieurs ou égaux à 1.
On considère les nombres complexes $(1+i)^n$ et $(1-i)^n$.

1. a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $k \geqslant 1$:

$$\begin{cases}(1+i)^{4k} = (-4)^k \\ (1+i)^{4k-1} = (-4)^{k-1}(-2+2i) \\ (1+i)^{4k-2} = (-4)^{k-1}(2i) \\ (1+i)^{4k-3} = (-4)^{k-1}(1+i)\end{cases}$$

b) En déduire l'expression de $(1-i)^n$ selon les valeurs de n.

2. a) Expliquer pourquoi le nombre complexe :
- $(1+i)^n + (1-i)^n$ est un réel ;
- $(1+i)^n - (1-i)^n$ est un imaginaire pur.

b) Déduire de la question **1.** que :

$$(1+i)^n + (1-i)^n = \begin{cases} 2(-4)^k & \text{si } n = 4k \\ (-4)^k & \text{si } n = 4k-1 \\ 0 & \text{si } n = 4k-2 \\ 2(-4)^{k-1} & \text{si } n = 4k-3 \end{cases}$$

c) En déduire également l'expression de $(1+i)^n - (1-i)^n$ selon les valeurs de n.

132 Utiliser la formule du binôme

Chercher | Raisonner | Calculer

z est un nombre complexe et n est un entier, $n \geqslant 1$.

1. a) Développer $(1+z)^n$ avec la formule du binôme.

b) Écrire ce développement lorsque :
- $z = 1$
- $z = -1$
- $z = i$
- $z = -i$

2. a) Obtenir de deux façons différentes :

$$(1+1)^n + (1-1)^n + (1+i)^n + (1-i)^n$$

pour déterminer l'expression, selon les valeurs de n, de la somme :

$$A = \binom{n}{0} + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \binom{n}{12} + \ldots$$

Conseil : utiliser la question **2. b)** de l'exercice **131**.

b) Calculer $\binom{18}{0} + \binom{18}{4} + \binom{18}{8} + \binom{18}{12} + \binom{18}{16}$.

3. Obtenir de deux façons différentes :

$$i(1+1)^n - i(1-1)^n + (1+i)^n - (1-i)^n$$

pour déterminer l'expression, selon les valeurs de n, de la somme :

$$B = \binom{n}{1} + \binom{n}{5} + \binom{n}{9} + \binom{n}{13} + \ldots$$

133 Imaginer une stratégie

Chercher | Raisonner | Communiquer

On considère la suite de nombres complexes définie par $z_0 = 4$ et pour tout entier naturel n,

$$z_{n+1} = \frac{1+i}{2} z_n.$$

1. a) Expliquer pourquoi la suite (z_n) est géométrique et préciser sa raison.

b) Pour tout entier naturel n, exprimer z_n explicitement en fonction de n.

2. On pose $z_n = x_n + iy_n$ avec x_n et y_n nombres réels.
Le plan est muni d'un repère orthonormé avec 2 cm pour unité. On note M_n le point de coordonnées $(x_n\,;\,y_n)$.

a) Placer les points M_0, M_1, M_2, M_3.

b) Calculer, en cm, la longueur de la ligne brisée $M_0M_1M_2M_3$.

134 Trouver une condition nécessaire et suffisante

? Problème ouvert

Raisonner | Calculer | Communiquer

On se propose de résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation **(E)** :

$$z - u\bar{z} = 0$$

où u est un nombre complexe donné non nul.

a) On suppose que $u = \frac{1}{2}\left(1 + i\sqrt{3}\right)$.
Résoudre l'équation **(E)** dans ce cas.

b) Plus généralement, on note $a + ib$ avec $(a\,;b) \neq (0\,;0)$ la forme algébrique du nombre complexe u.
Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation **(E)** admette au moins une solution distincte de 0.

135 Prendre des initiatives

Raisonner | Calculer

Voici un nombre complexe : $z_0 = \dfrac{5 + 3i\sqrt{3}}{1 - 2i\sqrt{3}}$.

a) Déterminer z_0^2, z_0^3, puis z_0^{15}.

b) Démontrer que pour tout entier naturel n,

$$z_0^{3n+2} = -2^{3n+1}\left(1 + i\sqrt{3}\right).$$

c) Donner la forme algébrique de z_0^{20}.

136 Résoudre des équations dans $\mathbb{C}$

Raisonner | Calculer

a) $\omega = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$. Calculer ω^2.

b) En déduire la résolution dans $\mathbb{C}$ de :
- $z^2 - 4i = 0$
- $z^2 + 4i = 0$
- $z^2 + 16i = 0$

137 Observer une relation

Narration de recherche

Raisonner Calculer Communiquer

Rédiger les différentes étapes de la recherche, sans omettre les fausses pistes et les changements de méthode.

Problème

z désigne un nombre complexe.

Démontrer qu'il existe un seul réel z_0 et un seul imaginaire pur z_1 qui vérifient la relation :

$$(3-2i)z+(3+2i)\overline{z}-12=0.$$

Préciser les valeurs de z_0 et z_1.

138 Relier nombres complexes et géométrie

Raisonner Calculer

f est la fonction définie sur $\mathbb{C}-\{-i\}$ par :

$$f(z)=\frac{1+iz}{z+i}.$$

1. a) Déterminer la forme algébrique de $f(0)$.

b) Déterminer la forme algébrique du nombre complexe z_0 tel que $f(z_0)=1+i$.

2. On suppose que $z=k$ où k est un nombre réel.

a) Exprimer en fonction de k la forme algébrique x_k+iy_k (avec x_k et y_k nombres réels) du nombre complexe $f(k)$.

b) Déterminer $x_k^2+y_k^2$.

c) Dans un repère orthonormé, on note M_k le point de coordonnées $(x_k\,;\,y_k)$.

Lorsque k décrit $\mathbb{R}$, les points M_k appartiennent à un ensemble particulier du plan. Lequel ?

139 Know the number *i*

Chercher Calculer Communiquer

Calculate the sum $S=1+i+i^2+\ldots+i^{2020}$.

140 Étudier une suite de nombres complexes

Chercher Raisonner Calculer

(Z_n) est la suite de nombres complexes définie par $Z_0=3+i$, $Z_1=1+2i$ et pour tout entier naturel n,

$$Z_{n+2}=2Z_{n+1}\cos(\theta)-Z_n$$

où θ est un nombre réel de l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$.

a) On suppose ici que $\theta=0$.

Démontrer que la suite (Z_n) est arithmétique.

Préciser sa raison.

b) On suppose ici que $\theta=\dfrac{\pi}{3}$.

Démontrer que la suite (Z_n) est périodique.

Préciser sa période.

141 Étudier une fonction numérique

Chercher Calculer Raisonner

z désigne un nombre complexe différent de 0.

On note $Z=\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$.

1. Démontrer qu'il existe deux nombres complexes tels que $Z=z$.

2. k désigne un nombre réel différent de 0.

f_k est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f_k(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{k}{x}\right).$$

a) Étudier, selon les valeurs de k, les variations de la fonction f_k.

b) Dresser le tableau de variations de la fonction f_k selon les valeurs de k.

3. a) On suppose ici que z est un nombre réel différent de 0.

Décrire avec des intervalles, l'ensemble dans lequel le nombre réel Z prend ses valeurs.

b) On suppose ici que z est un imaginaire pur différent de 0.

Justifier que Z est un imaginaire pur et préciser à quel ensemble appartient sa partie imaginaire.

142 Étudier un ensemble de points

Chercher Raisonner Calculer

On considère le nombre complexe :

$$z_1=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(z_n) est la suite de nombres complexes définie pour tout entier naturel $n\geqslant 1$ par :

$$z_n=z_1^n.$$

1. Déterminer la forme algébrique x_n+iy_n (avec x_n et y_n nombres réels) de z_n pour $2\leqslant n\leqslant 6$.

2. Le plan est muni d'un repère orthonormé (*unité* : 6 cm) d'origine O. On représente le nombre complexe $z_n=x_n+iy_n$ par le point $A_n(x_n\,;\,y_n)$.

a) Placer les points A_n pour $1\leqslant n\leqslant 6$.

b) Justifier que ces six points appartiennent au cercle Γ de centre O et de rayon 1.

3. a) Justifier que la suite (z_n) est périodique, préciser sa période.

b) Déterminer la forme algébrique de z_n selon les valeurs de n.

Conseil : envisager six cas.

c) En déduire que pour tout entier naturel n, le point A_n appartient à Γ.

143 Un problème de synthèse

Partie A : étude d'une fonction d'une variable réelle

f est la fonction définie sur $D = \mathbb{R} - \{-1\,;0\,;1\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^4 - 6x^2 + 1}{x^3 - x}.$$

a) Déterminer la fonction dérivée de f.

Vérifier que pour tout réel x de D,

$$f'(x) = \frac{\left(x^2+1\right)^3}{\left(x^3-x\right)^2}.$$

b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur D.

c) Dresser le tableau de variations de la fonction f (indiquer ses limites aux bornes de D).

d) Afficher sa courbe à l'écran de la calculatrice (*fenêtre* : $-10 \leqslant X \leqslant 10$, pas 1 et $-10 \leqslant Y \leqslant 10$, pas 1).

e) Résoudre graphiquement, puis algébriquement chacune des équations :

- $f(x) = 0$
- $f(x) = x$

Partie B : équation et fonction strictement monotone

a désigne un nombre réel.

P_a est le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par $P_a(x) = x^4 - ax^3 - 6x^2 + ax + 1$.

Vérifier en utilisant la **partie A** que l'équation $P_a(x) = 0$ admet quatre racines réelles distinctes.

Partie C : étude d'une fonction d'une variable complexe

1. F est la fonction définie sur $\mathbb{C} - \{1\}$ par $F(z) = \frac{1+z}{1-z}$.

On note $x + iy$ avec $(x\,;y) \neq (1\,;0)$ la forme algébrique du nombre complexe z.

a) Exprimer en fonction de x et y la forme algébrique de $F(z)$.

b) Déterminer l'ensemble des nombres complexes z pour lesquels $F(z)$ est un nombre réel.

c) Quelle condition doivent vérifier x et y pour que $F(z)$ soit un imaginaire pur ?

2. (z_n) est la suite de nombres complexes définie par la donnée d'un nombre complexe $z_1 \in \mathbb{C} - \{-1\,;0\,;1\}$ et pour tout entier naturel n, $z_{n+1} = F(z_n)$.

a) • Exprimer z_2, z_3, z_4, z_5 en fonction de z_1.

• Déterminer les formes algébriques des cinq nombres précédents lorsque $z_1 = i$, puis lorsque $z_1 = -i$.

b) Exprimer en fonction de z_1 :

- $z_1 \times z_2$
- $z_3 \times z_4$
- $(z_1 + z_3)(z_2 + z_4)$

c) On pose $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = a$.

Justifier en utilisant **a)** et **b)** que pour tout complexe z :

$$(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4) = z^4 - az^3 - 6z^2 + az + 1.$$

3. On note $x_n + iy_n$ (avec x_n et y_n nombres réels) la forme algébrique de z_n pour $1 \leqslant n \leqslant 5$.

a) Montrer, en utilisant la question **1. a)** que les quatre nombres réels y_1, y_2, y_3, y_4 sont de même signe.

b) Que peut-on dire des quatre nombres complexes z_1, z_2, z_3, z_4 lorsque a est un nombre réel ?

Quel résultat des parties précédentes retrouve-t-on ainsi ?

144 Relations d'ordre

Définition

Dire qu'une relation binaire $\mathcal{R}$ définie sur un ensemble E est une **relation d'ordre** signifie que :

- $\mathcal{R}$ est **réflexive** : pour tout x de E, $x \mathcal{R} x$.
- $\mathcal{R}$ est **antisymétrique** : pour tous x et y de E, si $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} x$, alors $x = y$.
- $\mathcal{R}$ est **transitive** : pour tous x, y, z de E, si $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} z$, alors $x \mathcal{R} z$.

a, b, a', b' désignent des nombres réels.

On considère les formes algébriques de deux nombres complexes :

$$z = a + ib \quad \text{et} \quad z' = a' + ib'.$$

1. $\mathcal{R}_1$ est la relation définie sur l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes par :

$$z \mathcal{R}_1 z' \text{ si, et seulement si, } a \leqslant a' \text{ et } b \leqslant b'.$$

a) Dans chaque cas, dire si la relation $z \mathcal{R}_1 z'$ est vraie.

- $z = 3 + 5i$ et $z' = -4 + 3i$
- $z = -1 + i$ et $z' = -1 + 4i$
- $z = 6i$ et $z' = 2 + 3i$

b) Démontrer que $\mathcal{R}_1$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{C}$.

2. $\mathcal{R}_2$ est la relation définie sur l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes par :

$$z \mathcal{R}_2 z' \text{ si, et seulement si, } a < a' \text{ ou } (a = a' \text{ et } b \leqslant b').$$

a) Démontrer que $\mathcal{R}_2$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{C}$.

b) Démontrer que cet ordre est **total** sur $\mathbb{C}$, c'est-à-dire que pour tous nombres complexes z et z', $z \mathcal{R}_2 z'$ ou $z' \mathcal{R}_2 z$.

Remarque : sur $\mathbb{C}$, il n'existe pas de relation d'ordre total compatible avec + et × (voir l'exercice 129).

145 Racines carrées complexes

1. Racines carrées dans $\mathbb{C}$ d'un réel

a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 = 4$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 = -4$.

Conseil : ne pas oublier que $i^2 = -1$.

c) a désigne un nombre réel.

Déterminer les racines carrées de a dans $\mathbb{C}$, c'est-à-dire résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 = a$.

Envisager plusieurs cas.

2. Racines carrées dans $\mathbb{C}$ d'un nombre complexe

$z = a + ib$ (avec a et b nombres réels) est un nombre complexe donné non réel ($b \neq 0$).

Les racines carrées de z dans $\mathbb{C}$ sont les solutions de l'équation $Z^2 = z$.

On pose $Z = x + iy$ avec x et y nombres réels.

a) Démontrer que $Z^2 = z$ équivaut à $\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$

b) En déduire que $Z^2 = z$ équivaut à

$$\begin{cases} x^2 + \left(-y^2\right) = a \\ x^2\left(-y^2\right) = -\dfrac{b^2}{4} \\ xyb \geqslant 0 \end{cases}$$

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $t^2 - at - \dfrac{b^2}{4} = 0$ et en déduire que le nombre complexe z admet deux racines carrées distinctes et opposées dans $\mathbb{C}$.

3. Applications

Déterminer les racines carrées dans $\mathbb{C}$ de chacun des nombres complexes :

a) -1 **b)** $2i$ **c)** $4 - 3i$ **d)** $1 + i$

146 Retour sur la formule du binôme

f est un polynôme de degré n ($n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant 1$).

1. Démontrer que pour tout réel x,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k,$$

où $f^{(k)}$ désigne la dérivée k-ième de la fonction f.

2. On pose, pour tout réel x, $f(x) = (x + b)^n$ où b est un nombre réel.

a) Démontrer que $f^{(k)}(0) = k!\dbinom{n}{k} b^{n-k}$ où $0 \leqslant k \leqslant n$.

b) Retrouver alors la formule du binôme.

Des Défis

147 Observer les termes d'une suite

(z_n) est la suite de nombres complexes non nuls définie par $z_0 = 1 + i$ et pour tout entier naturel n,

$$z_{n+1} = 1 - \frac{1}{z_n}.$$

Déterminer $z_{2\,020}$.

148 Une condition nécessaire et suffisante

a et b désignent des nombres entiers naturels.

z désigne un nombre complexe différent de ib.

On note $Z = \dfrac{z + ia}{z - ib}$.

Trouver une condition nécessaire et suffisante sur a et b afin que Z soit un nombre réel.