10 Variations et extremums

Avant

▶ Au début du 20e siècle, Willem Einthoven invente le galvanomètre à cordes, un des premiers appareils à pouvoir réaliser un électrocardiogramme précis. Les variations de l'énergie électrique générée par le cœur en fonction du temps renseignent sur le rythme cardiaque.

À présent

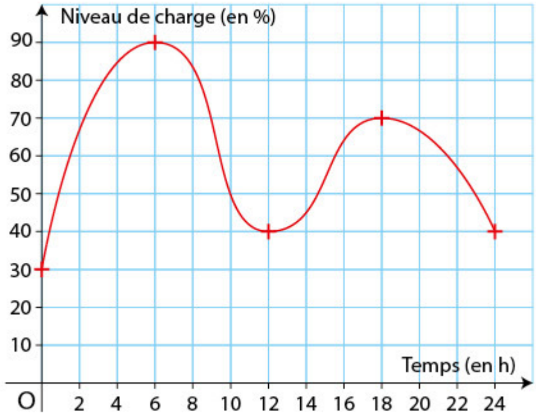
▶ De nos jours, de nombreuses montres connectées sont capables de réaliser un électrocardiogramme. Son analyse permet de déclencher une alerte lorsque le rythme cardiaque devient trop élevé.

Les capacités travaillées dans ce chapitre

	Exercices
• Décrire les variations d'une fonction (par une phrase, un tableau).	1, 3, 16 à 27
• Exploiter un tableau de variations (comparaison, signe…).	2, 4, 28 à 35
• Déterminer ou démontrer un maximum, un minimum d'une fonction.	6, 9, 44 à 51
• Déterminer ou démontrer les variations d'une fonction.	75 à 77
• Déterminer ou exploiter les variations d'une fonction affine.	36 à 38, 40 à 42
• Calculer ou utiliser le taux d'accroissement d'une fonction affine.	5, 7, 8, 39, 43
• Déterminer ou exploiter les variations des fonctions de référence.	10 à 15, 52 à 58

1 Sens de variation d'une fonction

Le niveau de charge de la batterie de la voiture électrique de Kieran a évolué au cours de la journée. La situation est modélisée par la fonction *f* définie par la courbe dans le repère ci-contre.



1 Recopier et compléter les phrases suivantes avec le mot « diminué » ou « augmenté ».

a) De 0 h à 6 h, le niveau de la batterie a ....

b) De 6 h à 12 h, le niveau de la batterie a ....

On dit que la fonction f est **croissante** sur l'intervalle $[0\,;6]$ et **décroissante** sur l'intervalle $[6\,;12]$.

2 Recopier et compléter les phrases suivantes par un nombre.

a) f est croissante sur l'intervalle $[12\,;\ldots]$.

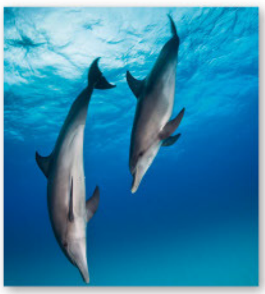
b) f est décroissante sur l'intervalle $[18\,;\ldots]$.

3 Recopier et compléter le tableau ci-dessous qui résume les informations précédentes.

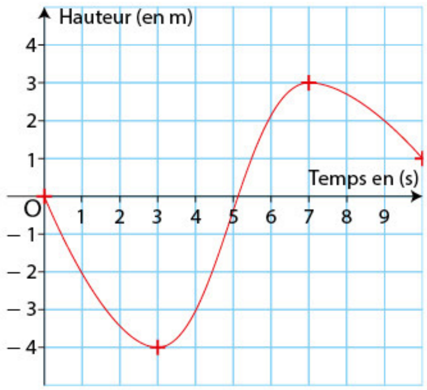
t	0		6		12		18		24
$f(t)$	30	↗	90	↘	40				

Ce tableau est appelé le **tableau de variations** de la fonction f.

2 Lecture graphique d'un maximum, d'un minimum



On modélise la plongée d'un dauphin par la fonction *p* représentée dans le repère ci-contre sur l'intervalle $[0\,;10]$. On note $p(t)$ la hauteur, en m, du dauphin par rapport au niveau de l'eau, *t* secondes après le début de sa plongée.



1 Déterminer graphiquement :

a) $p(7)$ **b)** $p(3)$

2 Résoudre graphiquement les inéquations :

a) $p(t) \leqslant p(7)$ **b)** $p(t) \geqslant p(3)$

3 Recopier et compléter chaque phrase.

- Le **maximum** de la fonction p sur l'intervalle $[0\,;10]$ est ..., il est atteint en ....
- Le **minimum** de la fonction p sur l'intervalle $[0\,;10]$ est ..., il est atteint en ....

Cours

1 Sens de variation d'une fonction

A Variations d'une fonction

Définitions

f est une fonction définie sur un intervalle I.

Dire que la fonction f est **croissante sur I** signifie que, pour tous nombres réels u et v de I :

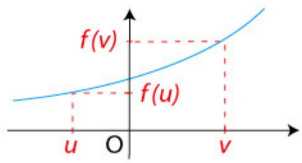
si $u \leqslant v$, alors $f(u) \leqslant f(v)$.

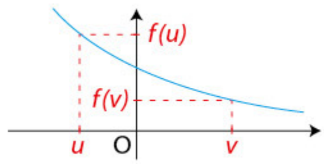
Une fonction croissante **conserve l'ordre**.

Dire que la fonction f est **décroissante sur I** signifie que, pour tous nombres réels u et v de I :

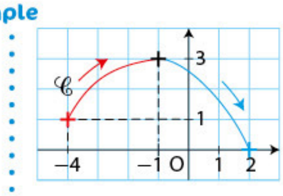
si $u \leqslant v$, alors $f(u) \geqslant f(v)$.

Une fonction décroissante **change l'ordre**.





Exemple



f est la fonction définie sur l'intervalle $[-4\,;2]$ par la courbe $\mathscr{C}$ dans ce repère. On rend compte des variations de la fonction f par ce **tableau de variations**.

x	-4	-1	2
$f(x)$	1 ↗	3	↘ 0

B Fonctions affines

Propriété - Définition

a et b désignent deux nombres réels.

Si f est une fonction affine $x \mapsto ax+b$, alors pour tous nombres réels u et v distincts, $\dfrac{f(u)-f(v)}{u-v} = a$.

Ce quotient s'appelle **le taux d'accroissement de f entre u et v**.

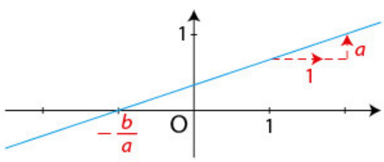
Démonstration

Pour tous u et v distincts, $\dfrac{f(u)-f(v)}{u-v} = \dfrac{au+b-(av+b)}{u-v} = \dfrac{au+b-av-b}{u-v} = \dfrac{au-av}{u-v} = \dfrac{a(u-v)}{u-v} = a.$

Remarque : dans cette propriété, le mot « accroissement » peut signifier augmentation ou diminution.

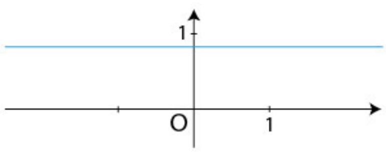
Sens de variation et signe d'une fonction affine $x \mapsto ax+b$

$a > 0$



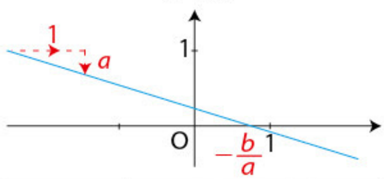
x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
Variations	↗	0	↗
Signes	$-$	0	$+$

$a = 0$



f est **constante** sur $\mathbb{R}$.

$a < 0$



x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
Variations	↘	0	↘
Signes	$+$	0	$-$

2 Extremums d'une fonction

A Maximum, minimum d'une fonction

Définitions

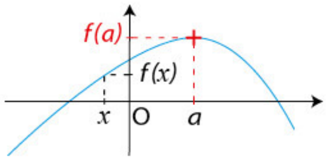
f est une fonction définie sur un intervalle I et a désigne un nombre réel de I.

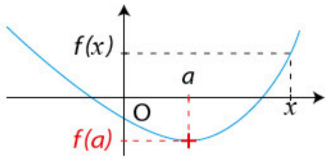
Dire que $f(a)$ **est le maximum** de f sur I signifie que, pour tout nombre réel x de I :

$$f(x) \leqslant f(a)$$

Dire que $f(a)$ **est le minimum** de f sur I signifie que, pour tout nombre réel x de I :

$$f(x) \geqslant f(a)$$





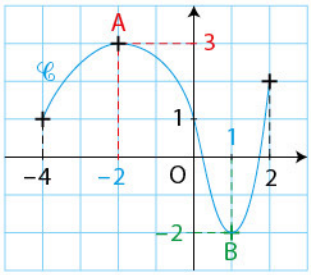
Vocabulaire : on dit que $f(a)$ est **un extremum** de f sur I lorsque $f(a)$ est un maximum ou un minimum de f sur I.

B À partir de la courbe représentative de la fonction

Exemple

f est la fonction définie sur l'intervalle $[-4\,;2]$ par la courbe dans le repère ci-dessous.

Le point A$(-2\,;3)$ est le point « le plus haut » de la courbe $\mathscr{C}$ sur l'intervalle $[-4\,;2]$.



3 est le **maximum de f sur l'intervalle** $[-4\,;2]$. Ce maximum est atteint en $x=-2$.

−2 est le **minimum de f sur l'intervalle** $[-4\,;2]$. Ce minimum est atteint en $x=1$.

Le point B$(1\,;-2)$ est le point « le plus bas » de la courbe $\mathscr{C}$ sur l'intervalle $[-4\,;2]$.

C À partir du tableau de variations de la fonction

Voici le tableau de variations de la fonction f définie au paragraphe B sur l'intervalle $[-4\,;2]$.

x	-4		-2		1		2
$f(x)$	1	↗	3	↘	-2	↗	2

3 est le **maximum de f sur l'intervalle** $[-4\,;2]$. Ce maximum est atteint en $x=-2$.

−2 est le **minimum de f sur l'intervalle** $[-4\,;2]$. Ce minimum est atteint en $x=1$.

3 Variations des fonctions de référence

A Sens de variation de la fonction carré

Propriété

La fonction carré $f : x \mapsto x^2$ est :
(1) décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,;0]$;
(2) croissante sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2	↘	0	↗

Démonstration

Pour tous nombres réels u et v, $u^2 - v^2 = (u-v)(u+v)$.

(1) Cas où $u \leqslant v \leqslant 0$
De $u \leqslant v$, on déduit que $u - v \leqslant 0$.
De $u \leqslant 0$ et $v \leqslant 0$, on déduit que $u + v \leqslant 0$.
Donc $(u-v)(u+v) \geqslant 0$, c'est-à-dire $u^2 - v^2 \geqslant 0$, soit $u^2 \geqslant v^2$.
Donc f est décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,;0]$.

(2) Cas où $0 \leqslant u \leqslant v$
De $u \leqslant v$, on déduit que $u - v \leqslant 0$.
De $u \geqslant 0$ et $v \geqslant 0$, on déduit que $u + v \geqslant 0$.
Donc $(u-v)(u+v) \leqslant 0$, c'est-à-dire $u^2 - v^2 \leqslant 0$, soit $u^2 \leqslant v^2$.
Donc f est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

B Sens de variation de la fonction inverse

Propriété

La fonction inverse $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est :
(1) décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,;0[$;
(2) décroissante sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\dfrac{1}{x}$	↘	‖	↘

Démonstration

Pour tous nombres réels non nuls u et v, $\dfrac{1}{u} - \dfrac{1}{v} = \dfrac{v-u}{uv}$.

(1) Cas où $u \leqslant v < 0$
De $u \leqslant v$, on déduit que $v - u \geqslant 0$.
De $u < 0$ et $v < 0$, on déduit que $uv > 0$.
Donc $\dfrac{v-u}{uv} \geqslant 0$, c'est-à-dire $\dfrac{1}{u} \geqslant \dfrac{1}{v}$.
Donc f est décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,;0[$.

(2) Cas où $0 < u \leqslant v$
De $u \leqslant v$, on déduit que $v - u \geqslant 0$.
De $u > 0$ et $v > 0$, on déduit que $uv > 0$.
Donc $\dfrac{v-u}{uv} \geqslant 0$, c'est-à-dire $\dfrac{1}{u} \geqslant \dfrac{1}{v}$.
Donc f est décroissante sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

C Sens de variation des fonctions racine carrée et cube

Propriétés (admises)

La fonction racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$ est **croissante** sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

x	0	$+\infty$
$\sqrt{x}$	0	↗

La fonction cube $x \mapsto x^3$ est **croissante** sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
x^3		↗

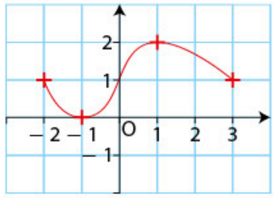
Remarque : pour une démonstration du sens de variation de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$, voir l'exercice 77 p. 248.

EXERCICES RÉSOLUS

1 Dresser un tableau de variations

→ Cours 1. A

f est la fonction définie sur l'intervalle $[-2\,;3]$ par la courbe tracée dans le repère ci-contre.



a) Décrire les variations de la fonction f sur l'intervalle $[-2\,;3]$.

b) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[-2\,;3]$.

Solution

a) La fonction f est décroissante sur l'intervalle $[-2\,;-1]$, croissante sur l'intervalle $[-1\,;1]$ et décroissante sur l'intervalle $[1\,;3]$.

b)

x	-2		-1		1		3
$f(x)$	1	↘	0	↗	2	↘	1

- Sur la ligne « x », on lit les nombres en abscisses.
- Sur la ligne « $f(x)$ », on lit les nombres en ordonnées.

2 Comparer des images

→ Cours 1. A

On donne ci-contre le tableau de variations d'une fonction g définie sur l'intervalle $[-8\,;4]$.

x	-8		1		4
$g(x)$	1	↘	-2	↗	3

a) Comparer $g(-7)$ et $g(-1)$.

b) Comparer $g(1{,}5)$ et $g(3)$.

Solution

a) -7 et -1 appartiennent à l'intervalle $[-8\,;1]$ et g est décroissante sur cet intervalle.
$-7 < -1$ donc $g(-7) > g(-1)$.

La fonction étant décroissante sur l'intervalle $[-8\,;1]$, les nombres et leurs images sont rangés dans des ordres contraires.

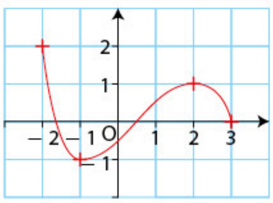
b) 1,5 et 3 appartiennent à l'intervalle $[1\,;4]$ et g est croissante sur cet intervalle.
$1{,}5 < 3$ donc $g(1{,}5) < g(3)$.

La fonction étant croissante sur l'intervalle $[1\,;4]$, les nombres et leurs images sont rangés dans le même ordre.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 1

3 f est la fonction définie sur l'intervalle $[-2\,;3]$ par la courbe tracée dans le repère ci-dessous.



a) Décrire les variations de la fonction f sur l'intervalle $[-2\,;3]$.

b) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[-2\,;3]$.

Sur le modèle de l'exercice résolu 2

4 Voici le tableau de variations d'une fonction g définie sur l'intervalle $[-7\,;11]$.

t	-7		-3		11
$g(t)$	1	↗	2	↘	-3

a) Comparer $g(-5)$ et $g(-4)$.

b) Comparer $g(-1)$ et $g(0)$.

c) Assia affirme : « Je suis certaine que $g(-7) > g(11)$. » A-t-elle raison ?

d) Malo affirme : « Je suis certain que $g(-4) < g(5)$. » Expliquer l'erreur de Malo.

EXERCICES RÉSOLUS

5 Utiliser un taux d'accroissement

→ Cours 1. B

f est une fonction affine dont la courbe représentative dans un repère est une droite d de coefficient directeur 0,5.

Déterminer : **a)** $f(3) - f(2)$ **b)** $f(-1) - f(2)$

Solution

a) Le coefficient directeur de la droite d est 0,5.

Donc $\dfrac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = 0{,}5$

c'est-à-dire $f(3) - f(2) = 0{,}5$.

b) $\dfrac{f(-1) - f(2)}{-1 - 2} = 0{,}5$ soit $\dfrac{f(-1) - f(2)}{-3} = 0{,}5$.

Ainsi, $f(-1) - f(2) = 0{,}5 \times (-3) = -1{,}5$.

> Dire que $\dfrac{f(u) - f(v)}{u - v} = a$ signifie que l'accroissement $f(u) - f(v)$ des images est **proportionnel** à l'accroissement $u - v$ des nombres.

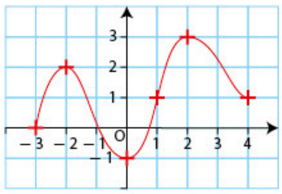
6 Lire un maximum, un minimum

→ Cours 2. A et B

f est la fonction définie sur l'intervalle $[-3\,;4]$ par la courbe tracée dans le repère ci-contre.

Lire graphiquement le maximum et le minimum de f sur chacun des intervalles indiqués et préciser la valeur de x pour laquelle chacun est atteint.

a) $[-3\,;4]$ **b)** $[-3\,;0]$ **c)** $[1\,;4]$



Solution

a) Sur l'intervalle $[-3\,;4]$:
- le maximum de f est 3 ; il est atteint en $x = 2$;
- le minimum de f est -1 ; il est atteint en $x = 0$.

b) Sur l'intervalle $[-3\,;0]$:
- le maximum de f est 2 ; il est atteint en $x = -2$;
- le minimum de f est -1 ; il est atteint en $x = 0$.

c) Sur l'intervalle $[1\,;4]$:
- le maximum de f est 3 ; il est atteint en $x = 2$;
- le minimum de f est 1 ; il est atteint en $x = 1$ et $x = 4$.

> Sur l'intervalle indiqué, le maximum (resp. le minimum) est l'ordonnée du point le plus haut (resp. du point le plus bas) de la courbe.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 5

7 f est une fonction affine dont la courbe représentative dans un repère est une droite d de coefficient directeur égal à -4.

Déterminer :

a) $f(1) - f(0)$ **b)** $f(4) - f(-2)$

8 f est la fonction affine $x \mapsto 5x - 4$.

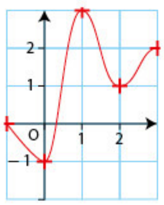
Déterminer : **a)** $f(10) - f(9)$ **b)** $f(28) - f(8)$

Sur le modèle de l'exercice résolu 6

9 f est la fonction définie sur l'intervalle $[-1\,;3]$ par la courbe tracée dans le repère ci-contre.

Lire graphiquement le maximum et le minimum de f sur chacun des intervalles indiqués et préciser la valeur de x pour laquelle chacun est atteint.

a) $[-1\,;3]$ **b)** $[0\,;1]$



EXERCICES RÉSOLUS

10 Comparer les carrés de nombres de même signe

→ Cours 3. A

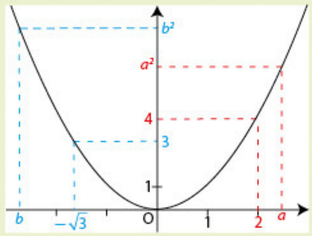
a et b désignent deux nombres réels.
Dans chaque cas, compléter par l'information la plus précise possible.
a) Si $a \geqslant 2$, alors $a^2 \ldots$. **b)** Si $b \leqslant -\sqrt{3}$, alors $b^2 \ldots$.

Solution

a) a et 2 sont des nombres **positifs**.
Or, deux nombres réels positifs et leurs carrés sont rangés dans le même ordre.
Donc si $a \geqslant 2$, alors $a^2 \geqslant 2^2$, c'est-à-dire $a^2 \geqslant 4$.

b) b et $-\sqrt{3}$ sont des nombres **négatifs**.
Or, deux nombres réels négatifs et leurs carrés sont rangés dans des ordres contraires.
Donc si $b \leqslant -\sqrt{3}$, alors $b^2 \geqslant (-\sqrt{3})^2$, c'est-à-dire $b^2 \geqslant 3$.

Avec la courbe représentative de la fonction carré.



11 Comparer les inverses de nombres de même signe

→ Cours 3. B

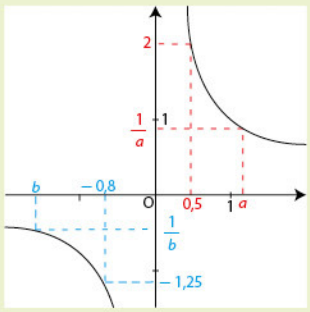
a et b désignent deux nombres réels.
Donner l'information la plus précise possible sur l'inverse du nombre a ou b.
a) $a \geqslant 0{,}5$ **b)** $b \leqslant -0{,}8$

Solution

a) Les nombres a et 0,5 sont strictement **positifs**.
Or, deux nombres réels strictement positifs et leurs inverses sont rangés dans des ordres contraires.
Donc si $a \geqslant 0{,}5$, alors $\dfrac{1}{a} \leqslant \dfrac{1}{0{,}5}$, c'est-à-dire $\dfrac{1}{a} \leqslant 2$.
D'autre part $a > 0$, donc $0 < \dfrac{1}{a} \leqslant 2$.

b) b et $-0{,}8$ sont des nombres strictement **négatifs**.
Or, deux nombres réels strictement négatifs et leurs inverses sont rangés dans des ordres contraires.
Donc si $b \leqslant -0{,}8$, alors $\dfrac{1}{b} \geqslant \dfrac{1}{-0{,}8}$, c'est-à-dire $\dfrac{1}{b} \geqslant -1{,}25$.
D'autre part $b < 0$, donc $-1{,}25 \leqslant \dfrac{1}{b} < 0$.

Avec la courbe représentative de la fonction inverse.



EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 10

12 Compléter comme indiqué à l'exercice 10.
a) Si $a \geqslant 3$, alors $a^2 \ldots$. **b)** Si $b \leqslant -\sqrt{5}$, alors $b^2 \ldots$.

13 Compléter comme indiqué à l'exercice 10.
a) Si $2 \leqslant a \leqslant 7$, alors $\ldots \leqslant a^2 \leqslant \ldots$.
b) Si $-3 \leqslant b \leqslant 0$, alors $\ldots \leqslant b^2 \leqslant \ldots$.

Sur le modèle de l'exercice résolu 11

14 Reprendre la consigne de l'exercice 11.
a) $a \geqslant 4$ **b)** $b \leqslant -5$

15 Reprendre la consigne de l'exercice 11.
a) $0{,}1 \leqslant a \leqslant 1{,}6$
b) $-5 \leqslant b \leqslant -1$

Calcul mental

→ Exercez-vous sur la plateforme Hyperbole
⊕ de détails page 4

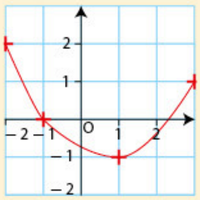
Sens de variation d'une fonction

→ Cours 1. A

Questions flash

16 f est la fonction définie sur l'intervalle $[-2\,;3]$ par la courbe dans le repère ci-dessous.

Nicolas : « f est croissante sur l'intervalle $[-1\,;1]$. »
Carine : « f est décroissante sur l'intervalle $[-2\,;-1]$. »
Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse.



17 Décrire oralement le sens de variation de la fonction f dont voici le tableau de variations.

x	-4		-1		0		5
$f(x)$	0	↘	-3	↗	2	↘	-1

18 f est la fonction définie sur l'intervalle $[-3\,;3]$ par $f(x)=x^2+x-2$.

a) Afficher à l'écran de la calculatrice la courbe représentative de la fonction f (*fenêtre* : $-3 \leqslant X \leqslant 3$, pas 1 et $-3 \leqslant Y \leqslant 11$, pas 1).

b) Conjecturer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[-3\,;3]$.

19 k est la fonction définie sur l'intervalle $[-2\,;5]$ par $k(x)=x^3-5x^2$.

Utiliser la calculatrice (*fenêtre* : $-2 \leqslant X \leqslant 5$, pas 1 et $-30 \leqslant Y \leqslant 5$, pas 5) pour conjecturer le sens de variation de la fonction k sur l'intervalle $[-2\,;5]$.

20 g est la fonction définie sur l'intervalle $[-4\,;4]$ par $g(x)=\dfrac{1}{3}x^3+0{,}1x^2$.

Anita a affiché la courbe de la fonction g à l'écran de sa calculatrice.

a) Conjecturer le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $[-4\,;4]$.

b) Afficher la courbe représentative de la fonction g avec la fenêtre : $-0{,}5 \leqslant X \leqslant 0{,}5$, pas 0,1 et $-0{,}01 \leqslant Y \leqslant 0{,}01$, pas 0,001.

c) Que remarque-t-on ?

Tableau de variations d'une fonction

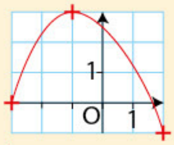
→ Cours 1. A

Questions flash

21 Élise et Benjamin ont dressé chacun le tableau de variations de leurs fonctions représentées ci-dessous sur l'intervalle $[-3\,;2]$.
Leurs tableaux sont-ils corrects ?

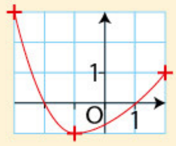
Élise

x	0		3		-1
$f(x)$	-3	↗	-1	↘	2

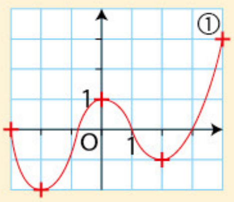


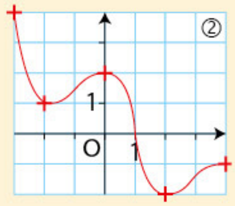
Benjamin

x	-3		-1		2
$g(x)$	3	↘	-1	↗	1



22 Carl affirme : « Les deux fonctions représentées dans les repères ci-dessous ont le même tableau de variations sur l'intervalle $[-3\,;4]$. »
A-t-il raison ?



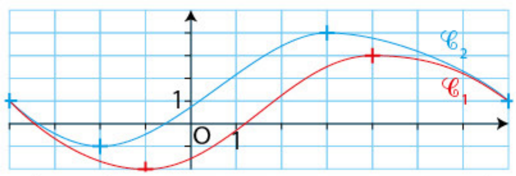


23 f est une fonction définie sur l'intervalle $[0\,;4]$ telle que :

- f est croissante sur l'intervalle $[0\,;2]$;
- f est décroissante sur l'intervalle $[2\,;4]$;
- $f(0)=f(4)=5\,;f(2)=10$.

Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;4]$.

24 Voici les courbes représentatives dans un repère de deux fonctions f et g dont on donne les tableaux de variations.
Associer chaque courbe $\mathscr{C}_1$ ou $\mathscr{C}_2$ à la fonction f ou g qui convient.



x	-4		-2		3		7
$f(x)$	1	↘	-1	↗	4	↘	1

x	-4		-1		4		7
$g(x)$	1	↘	-2	↗	3	↘	1

Nathan live!

25 f est une fonction définie sur l'intervalle $[-1\,;5]$ telle que :
- f est croissante sur les intervalles $[-1\,;0]$ et $[2\,;5]$;
- f est décroissante sur l'intervalle $[0\,;2]$;
- $f(-1)=f(5)=-3$;
- l'image de 0 par f est 1 ;
- 2 est un antécédent de -5 par f.

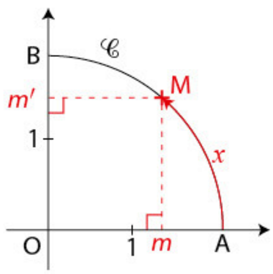
Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[-1\,;5]$.

26 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=5-2(x-1)^2$$

a) Avec la calculatrice, afficher la courbe représentative de la fonction f en précisant la fenêtre choisie.
b) Conjecturer le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

27 Dans un repère orthonormé d'origine O, $\mathscr{C}$ est le quart de cercle $\overset{\frown}{AB}$ de centre O et de rayon 2.
Un point M décrit $\mathscr{C}$ en allant de A vers B.
On note x la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AM}$ et on pose $f(x)=\text{M}m$, $g(x)=\text{M}m'$.
Dresser intuitivement le tableau de variations de chacune des fonctions f et g sur l'intervalle $[0\,;\pi]$.



Exploitation d'un tableau de variations

→ Cours 1. A

Questions Flash

28 Voici le tableau de variations d'une fonction h définie sur l'intervalle $[-3\,;6]$.

x	-3		0		1		6
$h(x)$	0	↗	5	↘	-3	↗	1

L'une de ces affirmations est exacte. Laquelle ?
Camille : « h est croissante sur l'intervalle $[-3\,;1]$. »
Yasmine : « h est croissante sur l'intervalle $[2\,;4]$. »
Adrien : « $h(0)<h(0{,}5)$ »

29 Voici le tableau de variations d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-10\,;8]$.

x	-10		2		8
$f(x)$	6	↘	0	↗	1

Comparer mentalement :
a) $f(3)$ et $f(4)$ **b)** $f(0)$ et $f(1)$
c) $f(-7{,}8)$ et 0 **d)** $f(3)$ et 1

30 Dans un repère, tracer deux courbes susceptibles de représenter la fonction f dont voici le tableau de variations.

x	0		2		5		6
$f(x)$	2	↘	0	↗	4	↘	-1

31 Dans un repère, tracer deux courbes susceptibles de représenter la fonction g dont voici le tableau de variations.

x	-5		-4		0		2		3
$g(x)$	-2	↗	3	↘	-4	↗	0	↘	-2

32 Voici le tableau de variations d'une fonction f.

x	-4		-1		0		1
$g(x)$	-2	↗	1	↘	-5	↗	3

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Comparer si possible :
a) $f(-2)$ et $f(-3)$ **b)** $f(-1)$ et $f(0)$
c) $f(0)$ et $f(-3)$ **d)** $f(-0{,}5)$ et $f(0{,}5)$

33 Voici le tableau de variations d'une fonction f.

x	-5		-2		0		1
$f(x)$	-1	↗	4	↘	0	↗	3

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse ou si le tableau ne permet pas de conclure.
a) $f(-1)=0$ **b)** $f(-4)>f(-2)$
c) $f(1)>f(2)$ **d)** $f(1)=-2$
e) $f(-2)>1$ **f)** $f(-4)<f(0)$

34 Voici le tableau de variations d'une fonction f.

t	-6		-2		4		6
$f(t)$	10	↘	-1	↗	0	↘	-4

a) Écrire un encadrement par deux nombres entiers consécutifs de l'image de 0.
b) Quel est le nombre d'antécédents de -1 par f ?
c) Quel est le nombre d'antécédents de 0 par f ?

35 Voici le tableau de variations d'une fonction f.

x	-2		1		2		3
$f(x)$	1	↗	3	↘	0	↘	-5

Préciser le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $[-2\,;3]$.

Acquérir des automatismes

Fonctions affines

→ Cours 1. B

Questions flash

36 Parmi les fonctions affines définies ci-dessous, lesquelles sont croissantes sur $\mathbb{R}$?

$f(x) = 3x + 5$ $\quad$ $g(x) = -3x + 1$

$h(x) = x - 3{,}6$ $\quad$ $j(x) = 5 - 6x$

37 Quentin a construit le tableau de signes de la fonction affine f définie par $f(x) = -2x + 4$.

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

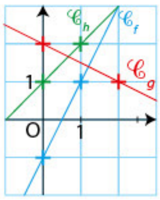
Indiquer son erreur.

38 Dresser le tableau de variations et le tableau de signes de chaque fonction affine.

a) $f : x \mapsto 2x - 8$ $\quad$ **b)** $g : x \mapsto -5x - 15$

c) $h : x \mapsto 4(2 - 3x)$ $\quad$ **d)** $j : x \mapsto 5x + 3(1 - 9x)$

39 Voici les courbes représentatives de trois fonctions affines f, g et h dans un repère. Déterminer :



a) $f(10) - f(0)$

b) $g(6{,}5) - g(4{,}2)$

c) $h(13) - h(-2)$

40 Dans chaque cas, déterminer le sens de variation de la fonction affine f qui vérifie :

a) $f(2) = 5$ et $f(4) = 6$ $\quad$ **b)** $f(9) = 3$ et $f(3) = 9$

41 Dans chaque cas, dresser le tableau de variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et tracer sa courbe représentative dans un repère.

a) $f : x \mapsto 3x - 1$ $\quad$ **b)** $f : x \mapsto -x + 2$

42 $f : x \mapsto ax + b$ est une fonction affine.
Dans chaque cas, tracer sa droite représentative dans un repère.

a) $a = 2$ et $f(-1) = 1$ $\quad$ **b)** $a = -0{,}5$ et $f(3) = 0$

43 Au Québec, lors de la cueillette des pommes, un étudiant reçoit un salaire de 50 \$ par jour, auquel s'ajoute 0,02 \$ par kilogramme de pommes cueillies.

a) Si mardi il cueille 240 kg de pommes de plus que lundi, combien gagne-t-il en plus ?

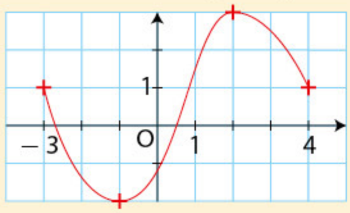
b) Si mercredi il cueille 50 kg de pommes de moins que lundi, combien gagne-t-il en moins ?

Extremums

→ Cours 2

Questions flash

44 Voici la courbe représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-3 ; 4]$.



Lire graphiquement le maximum et le minimum de la fonction f sur chacun des intervalles indiqués et préciser la valeur de x pour laquelle chacun est atteint.

a) $[-3 ; 4]$ $\quad$ **b)** $[-3 ; 0]$ $\quad$ **c)** $[1 ; 4]$

45 Voici le tableau de variations d'une fonction g définie sur l'intervalle $[-10 ; 3]$.

x	-10		-7		0		3
$g(x)$	0	↗	5	↘	-4	↗	6

Déterminer le maximum et le minimum de g sur l'intervalle :

a) $[-10 ; 3]$ $\quad$ **b)** $[-10 ; 0]$ $\quad$ **c)** $[-7 ; 3]$

46 Voici le tableau de variations d'une fonction h définie sur l'intervalle $[3 ; 13]$

x	3		$4{,}5$		$10{,}4$		13
$h(x)$	0	↘	-5	↗	16	↘	1

Lire en complétant le plus précisément possible.

a) Pour tout x de $[3 ; 4{,}5]$, $\ldots \leqslant h(x) \leqslant \ldots$.

b) Pour tout x de $[3 ; 10{,}4]$, $\ldots \leqslant h(x) \leqslant \ldots$.

c) Pour tout x de $[3 ; 13]$, $\ldots \leqslant h(x) \leqslant \ldots$.

47 Voici le tableau de variations d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-2 ; 4]$.

x	-2		-1		1		4
$f(x)$	3	↘	1	↗	6	↘	4

a) Quel est le maximum de la fonction f sur l'intervalle $[-2 ; 4]$?

b) Quel est le minimum de la fonction f sur l'intervalle $[-2 ; 4]$?

c) Recopier et compléter le plus précisément possible.

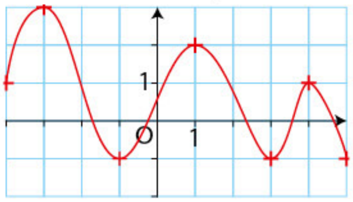
- Pour tout nombre réel x de $[-2 ; 1]$, $\ldots \leqslant f(x) \leqslant \ldots$.
- Pour tout nombre réel x de $[-1 ; 4]$, $\ldots \leqslant f(x) \leqslant \ldots$.

48 f est une fonction définie sur l'intervalle $[-2\,;3]$ telle que :

- f est croissante sur l'intervalle $[0\,;3]$ et décroissante sur l'intervalle $[-2\,;0]$;
- f admet pour minimum -1 en $x=0$;
- $f(-2)=3$ et $f(3)=6$.

a) Quel est le maximum de f sur l'intervalle $[-2\,;3]$?
b) Encadrer le plus précisément possible $f(x)$ pour tout nombre réel x de l'intervalle $[-2\,;3]$.
c) Que dire de $f(x)$ lorsque x appartient à $[-2\,;0]$?

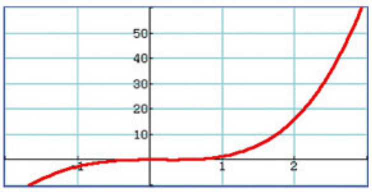
49 f est la fonction définie sur l'intervalle $[-4\,;5]$ par la courbe tracée dans le repère ci-dessous.



Citer deux intervalles sur lesquels f admet :
a) -1 pour minimum et préciser à chaque fois pour quelle valeur de x il est atteint ;
b) 2 pour maximum et préciser à chaque fois pour quelle valeur de x il est atteint.

50 f est la fonction définie sur l'intervalle $[-2\,;3]$ par $f(x)=\dfrac{1}{4}x^4+2x^3-x^2$.

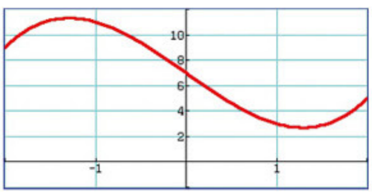
Voici la courbe représentative de f obtenue par Léo à l'écran de la calculatrice.



Il affirme : « Le minimum de f sur l'intervalle $[0\,;3]$ est 0. »
Tabuler la fonction f sur l'intervalle $[0\,;1]$ avec le pas 0,1 et critiquer l'affirmation de Léo.

51 f est la fonction définie sur l'intervalle $[-2\,;2]$ par $f(x)=x^3-5x+7$.

Voici la courbe représentative de f obtenue à l'écran de la calculatrice.



On conjecture que f admet un maximum en x_0 et un minimum en x_1 sur l'intervalle $[-2\,;2]$.
a) Tabuler la fonction f sur l'intervalle $[-2\,;2]$ avec le pas 0,1.
b) En déduire un encadrement de x_0 puis de x_1.

Fonctions de référence

→ Cours 3

Questions flash

52 Justine affirme : « Le tableau de variations ci-dessous est celui de la fonction cube. »
Mohamed lui répond : « Non, c'est celui de la fonction racine carrée. » Qui a raison ?

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	↗	

53 Sofia affirme : « Plus x augmente, plus x^2 augmente, donc la fonction carré est croissante sur $\mathbb{R}$. » A-t-elle raison ?

54 En utilisant le sens de variation des fonctions de référence, comparer les nombres :
a) $2{,}3^2$ et $2{,}03^2$ **b)** $(-1{,}88)^2$ et $(-1{,}99)^2$
c) $\dfrac{1}{7}$ et $\dfrac{1}{8}$ **d)** $\dfrac{1}{-4}$ et $\dfrac{1}{-5}$
e) $(-4{,}76)^3$ et $(-4{,}7)^3$ **f)** $\sqrt{5{,}5}$ et $\sqrt{0{,}55}$

55 x désigne un nombre réel.
Donner, dans chaque cas, l'information la plus précise possible sur $\dfrac{1}{x}$.
a) $x>5$ **b)** $x<-4$ **c)** $6<x<7$

56 Dresser le tableau de variations de :
a) la fonction carré sur l'intervalle $[-2\,;4]$;
b) la fonction inverse sur l'intervalle $[-5\,;0[\cup]0\,;5]$;
c) la fonction cube sur l'intervalle $[-1\,;10]$;
d) la fonction racine carrée sur l'intervalle $[0\,;16]$.

57 Comparer, sans calculatrice et le plus rapidement possible, les nombres :
a) $(\pi-4)^2$ et $(\pi-5)^2$ **b)** $\dfrac{1}{-3}$ et $-\dfrac{1}{5}$
c) 7 et $\sqrt{40}$ **d)** $(-0{,}4)^3$ et $0{,}4^3$

58 Voici le tableau de variations de la fonction carré sur l'intervalle $[-4\,;5]$.

x	-4	-1	0	2	5
x^2	16 ↘		0	↗	25

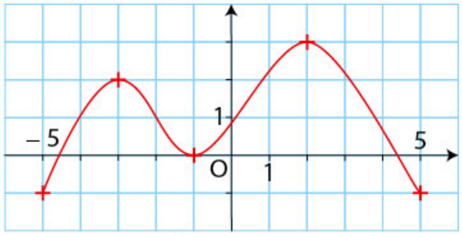
Proposer un encadrement du carré des nombres réels x, y, z et t tels que :
a) $-4<x<-1$ **b)** $2\leqslant y\leqslant 5$
c) $-1<z<2$ **d)** $-4<t\leqslant 5$

QCM interactifs

Pour se tester

59 Dans chaque cas, donner la réponse exacte sans justifier.

Voici la courbe représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-5\,;5]$.



		A	B	C	D
1	f est croissante sur l'intervalle …	$[0\,;5]$	$[0\,;2]$	$[-4\,;2]$	$[-1\,;4{,}5]$
2	f est décroissante sur l'intervalle …	$[2{,}5\,;3{,}5]$	$[-4\,;-1]$	$[-5\,;-4{,}5]$	$[-5\,;0]$
3	f a pour minimum …	0 sur $[-5\,;5]$	-5 sur $[-1\,;3]$	-1 sur $[-4\,;4]$	0 sur $[-4\,;0]$
4	f a pour maximum …	2 sur $[-5\,;5]$	3 sur $[-5\,;0]$	2 sur $[-4\,;5]$	3 sur $[-2\,;4]$
5	Si $x \in [-5\,;5]$, alors …	$f(x) \geqslant f(5)$	$f(x) \geqslant 0$	$f(x) > -1$	$f(x) \leqslant 2$

60 Dans chaque cas, donner la (ou les) réponse(s) exacte(s) sans justifier.

Voici le tableau de variations d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-4\,;6]$.

x	-4		-2		0		4		6
$f(x)$	-1	↗	4	↘	-3	↗	3	↘	1

		A	B	C	D
1	f est croissante sur l'intervalle …	$[-1\,;4]$	$[0\,;4]$	$[-3\,;-1]$	$[-2\,;0]$
2	Le nombre $f(1)$ vérifie …	$f(1) < 6$	$f(1) = 6$	$f(1) \geqslant 0$	$f(1) \geqslant -3$
3	Pour tout nombre réel x de $[0\,;6]$, …	$f(x) \geqslant -3$	$f(x) \leqslant 3$	$f(x) \geqslant 1$	$f(x) \leqslant 4$
4	Si $x \in [-4\,;6]$, alors …	$-1 \leqslant f(x) \leqslant 1$	$f(x) \geqslant f(-3)$	$f(x) \leqslant f(4)$	$f(x) \leqslant f(-2)$
5	Le nombre 0 possède un antécédent dans l'intervalle …	$[-4\,;-2]$	$[-2\,;0]$	$[0\,;4]$	$[4\,;6]$

61 Dans chaque cas, dire si l'affirmation est vraie ou fausse en justifiant.

1. f est la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(-3) = -1$ et $f(0) = -2$.
Affirmation : la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

2. x est un nombre réel tel que $2 < x < 7$.
Affirmation : $0{,}1 < \dfrac{1}{x} < 0{,}5$

3. x est un nombre réel tel que $-1 \leqslant x \leqslant 2$.
Affirmation : $1 < x^2 < 4$

4. f est la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x + 10$.
Affirmation : si $x \in [-2{,}5\,;+\infty[$, alors $f(x) \geqslant 0$.

5. Voici ci-contre un tableau de valeurs d'une fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;10]$.
Affirmation : la fonction f est nécessairement croissante sur l'intervalle $[0\,;10]$.

X	Y1
0	1
1	3.4
2	5.8
3	8.2
4	10.6
5	13
6	15.4
7	17.8
8	20.2
9	22.6
10	25

Vérifiez vos réponses : p. 346

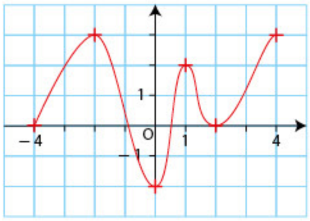
62 Lire les variations d'une fonction

f est la fonction définie sur l'intervalle $[-4\,;4]$ par la courbe dans le repère ci-dessous.
Déterminer les plus grands intervalles sur lesquels f est :
a) croissante ; **b)** décroissante.

AIDE Lire ces intervalles sur l'axe des abscisses.

63 Lire les extremums d'une fonction

f est la fonction définie sur l'intervalle $[-4\,;4]$ par la courbe dans le repère ci-contre.
Déterminer le maximum et le minimum de f sur :
a) $[-4\,;4]$ **b)** $[1\,;3]$



AIDE Lire ces extremums sur l'axe des ordonnées.

64 Dresser un tableau de variations

Dresser le tableau de variations de la fonction f définie par la courbe dans le repère ci-dessus.

65 Comparer des images

Voici le tableau de variations d'une fonction f.

x	-8		-5		-1		4		6
$f(x)$	-2	↘	-3	↗	4	↘	0	↗	1

Comparer les nombres :
a) $f(-4)$ et $f(-5)$ **b)** $f(0)$ et $f(3)$

AIDE Une fonction croissante (resp. décroissante) sur un intervalle conserve (resp. change) l'ordre sur cet intervalle.

66 Exploiter un tableau de variations

f est la fonction dont le tableau de variations est donné ci-dessus.
Dans chaque cas, dire si l'affirmation est vraie ou fausse et justifier.
a) Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[4\,;6]$, $f(x) \leqslant 4$.
b) Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[-8\,;6]$, $f(x) \geqslant 0$.
c) $f(0)$ est un nombre positif.

AIDE **b)** On peut justifier qu'une affirmation est fausse en donnant un contre-exemple.

67 Comparer des nombres

Comparer, sans calculatrice et le plus rapidement possible, les nombres :
a) $5{,}8^2$ et $5{,}9^2$ **b)** $\dfrac{1}{-36}$ et $\dfrac{1}{-48}$ **c)** $6{,}8^3$ et $8{,}6^3$

AIDE Dans chaque cas, utiliser le sens de variation d'une fonction de référence.

68 Dresser un tableau de signes

Dresser le tableau de signes de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
a) $f(x) = 2x - 5$ **b)** $f(x) = 3 - 6x$

AIDE Déterminer le sens de variation de f ou représenter f dans un repère.

EXERCICE RÉSOLU

69 Rechercher un extremum

Dans une brasserie de Mayotte, le prix du menu varie de 10 € à 20 €.
Dans cette brasserie, le chiffre d'affaires hebdomadaire $C(n)$, exprimé en euro, pour un menu à n euros (n prenant des valeurs entières), est donné par :

$$C(n) = -19n^2 + 604n$$

a) Exécuter l'algorithme ci-contre pas à pas en complétant un tableau de suivi des variables.

b) Quelle est la valeur de la variable m obtenue à la fin de l'algorithme ? Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

```
m ← C(10)
Pour n allant de 11 à 20
  | y ← C(n)
  | Si y > m alors
  |   | m ← y
  | Fin Si
Fin Pour
```

Solution

a)

n		11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
y		4 345	4 512	4 641	4 732	4 785	4 800	4 777	4 716	4 617	4 480
$y > m$		Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Faux	Faux	Faux	Faux
m	4 140	4 345	4 512	4 641	4 732	4 785	4 800	4 800	4 800	4 800	4 800

Pour calculer les valeurs de $C(n)$, on tabule la fonction sur la calculatrice.

b) La valeur de m obtenue à la fin de l'algorithme est 4 800.
Elle indique que le chiffre d'affaires hebdomaire maximum de la brasserie est de 4 800 €.

Dans cet algorithme, la variable m représente le maximum des valeurs $C(n)$ pour $10 \leqslant n \leqslant 20$. La variable y représente le chiffre d'affaires et la variable n représente le prix du menu.

À VOTRE TOUR

70 Une entreprise produit quotidiennement entre 4 et 11 tonnes de peinture.
Le coût unitaire de production, en milliers d'euros, de x tonnes de peinture est modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle $[4\,;11]$ par :

$$f(x) = 0{,}05x - 0{,}1 + \frac{2{,}45}{x}$$

a) Exécuter l'algorithme ci-contre pas à pas en complétant un tableau de suivi des variables. *Arrondir au centième si besoin.*

```
m ← f(4)
Pour x allant de 5 à 11
  | c ← f(x)
  | Si c < m alors
  |   | m ← c
  | Fin Si
Fin Pour
```

b) Quelle est la valeur de m obtenue à la fin de l'algorithme ?
Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

71 Des relevés statistiques ont permis de modéliser le nombre de personnes touchées par la grippe en France durant l'hiver 2014-2015.
Le nombre $M(n)$ de malades déclarés pour 100 000 habitants, au bout de n semaines ($n \in \mathbb{N}$ et $2 \leqslant n \leqslant 10$) après le début de l'épidémie, est donné par :

$$M(n) = -30n^2 + 360n - 360$$

a) Exécuter l'algorithme ci-contre pas à pas en complétant un tableau de suivi des variables.

```
m ← M(2)
Pour n allant de 3 à 10
  | y ← M(n)
  | Si y > m alors
  |   | m ← y
  | Fin Si
Fin Pour
```

b) Quelle est la valeur de m obtenue à la fin de l'algorithme ?
Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

EXERCICE RÉSOLU

72 Optimiser

Emma dispose de 16 m de grillage et souhaite faire un enclos rectangulaire au bout de son jardin afin d'y accueillir ses poules. Elle a dessiné ci-contre les plans de son futur enclos. Le grillage y est représenté en pointillés.

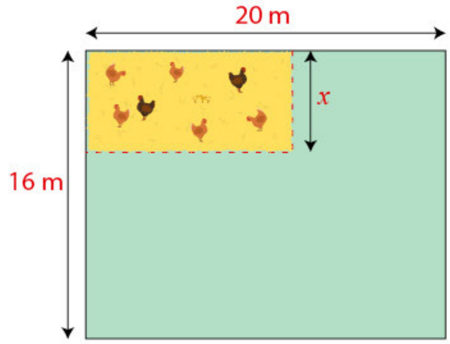
On se propose de déterminer les dimensions de l'enclos d'aire maximum.

Pour la dimension x, en m, indiquée ci-contre, on note $\mathscr{A}(x)$ l'aire, en m^2, de l'enclos avec $0 \leqslant x \leqslant 16$.

a) Exprimer $\mathscr{A}(x)$ en fonction de x.

b) Conjecturer à l'aide de la calculatrice le maximum de la fonction $\mathscr{A}$ sur l'intervalle $[0\,;16]$.

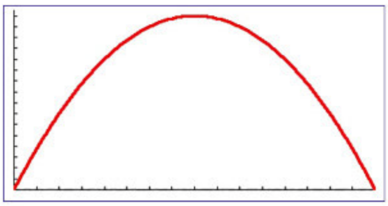
c) Démontrer cette conjecture et conclure.



Solution

a) $\mathscr{A}(x) = x(16 - x) = -x^2 + 16x$.

b) Avec la calculatrice, on conjecture que la fonction $\mathscr{A}$ admet sur l'intervalle $[0\,;16]$ un maximum égal à 64 et atteint en $x = 8$.



X	Y1
7.5	63.75
7.6	63.84
7.7	63.91
7.8	63.96
7.9	63.99
8	64
8.1	63.99
8.2	63.96
8.3	63.91
8.4	63.84
8.5	63.75

À l'écran de la calculatrice, on affiche la courbe de la fonction f (*fenêtre* : $0 \leqslant X \leqslant 16$, pas 1 et $-1 \leqslant Y \leqslant 70$, pas 4) et on tabule cette fonction sur l'intervalle $[7{,}5\,;8{,}5]$ avec le pas 0,1.

c) Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;16]$,

$\mathscr{A}(x) - \mathscr{A}(8) = -x^2 + 16x - 64 = -(x^2 - 16x + 64) = -(x-8)^2$.

Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;16]$, $(x-8)^2 \geqslant 0$ donc $-(x-8)^2 \leqslant 0$.

Ainsi $\mathscr{A}(x) - \mathscr{A}(8) \leqslant 0$.

Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;16]$, $\mathscr{A}(x) \leqslant \mathscr{A}(8)$, ce qui prouve que la fonction $\mathscr{A}$ admet sur l'intervalle $[0\,;16]$ un maximum égal à $\mathscr{A}(8) = 64$ et atteint en $x = 8$.

L'enclos sera donc un carré de 8 m de côté.

Démontrer que $\mathscr{A}(8)$ est le maximum de la fonction $\mathscr{A}$ revient à démontrer que pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;16]$, $\mathscr{A}(x) \leqslant \mathscr{A}(8)$, c'est-à-dire que $\mathscr{A}(x) - \mathscr{A}(8) \leqslant 0$.

À VOTRE TOUR

73 A et B sont deux points tels que $AB = 6$ cm. M est un point du segment $[AB]$ tel que $AM = x$ avec $0 \leqslant x \leqslant 6$.

AMNP et MBQR sont deux carrés construits d'un même côté de la droite (AB).

On note $\mathscr{A}(x)$ la somme des aires, en cm^2, de ces deux carrés.

a) Expliquer pourquoi $\mathscr{A}(x) = 2x^2 - 12x + 36$.

b) Conjecturer avec la calculatrice le minimum de la fonction $\mathscr{A}$ sur l'intervalle $[0\,;6]$.

c) Démontrer cette conjecture et conclure.

74 L'entreprise Adopteunchat fabrique des maisons en bois pour chat. Pour n maisons vendues, le coût de production $C(n)$, en euro, est donné par :

$$C(n) = 0{,}002n^2 + 2n + 4\,000$$
(avec $n \in \mathbb{N}$ et $n \leqslant 3\,500$).

Une maison est vendue au prix de 11 €.

On note $B(n)$ le bénéfice, en euro, réalisé par l'entreprise lors de la vente de n maisons.

a) Justifier que $B(n) = -0{,}002n^2 + 9n - 4000$.

b) Vérifier que $B(n) - B(2250) = -0{,}002(n - 2250)^2$.

c) En déduire le maximum de la fonction B et conclure.

Démontrer et raisonner

75 Étudier les variations d'une fonction affine

Méthode
Pour étudier le sens de variation d'une fonction f sur un intervalle I, on considère des nombres réels u et v de I tels que $u < v$ et on étudie le signe de $f(u) - f(v)$.

f est une fonction affine $x \mapsto ax + b$ où a et b désignent des nombres réels.
Démontrer que :
a) si $a > 0$, alors f est croissante sur $\mathbb{R}$;
b) si $a < 0$, alors f est décroissante sur $\mathbb{R}$;
c) si $a = 0$, alors f est constante sur $\mathbb{R}$.

76 Utiliser une disjonction de cas (p. XXIV)

On sait (p. 22) que $|x|$ désigne la distance du nombre réel x à 0.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$; on dit que f est la fonction valeur absolue.
a) Recopier et compléter :

$$\begin{cases} f(x) = \dots \text{ si } x \in [0\ ;\ +\infty[\\ f(x) = \dots \text{ si } x \in]-\infty\ ;\ 0] \end{cases}$$

b) On dit que f est une **fonction affine par morceaux**. Afficher la courbe de la fonction f à l'écran de la calculatrice. Conjecturer son sens de variation.
c) Démontrer cette conjecture en envisageant deux cas.

77 Étudier la fonction racine carrée

Méthode
Lorsqu'intervient une différence de deux racines carrées $\sqrt{u} - \sqrt{v}$ (avec $u > 0$ et $v > 0$), il est parfois utile de multiplier et diviser ce nombre par $\sqrt{u} + \sqrt{v}$.

a) Justifier que pour tous nombres u et v distincts de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, $\sqrt{u} - \sqrt{v} = \dfrac{u - v}{\sqrt{u} + \sqrt{v}}$.
b) Démontrer que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

78 Utiliser un contre-exemple

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

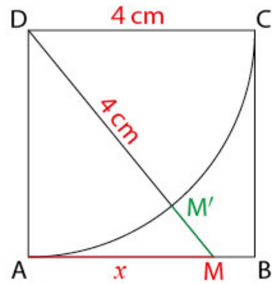
$$f(x) = x^2 - 0{,}25x + 1$$

La fonction f est-elle croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ 10]$? Justifier.

Utiliser ou décrire le sens de variation d'une fonction

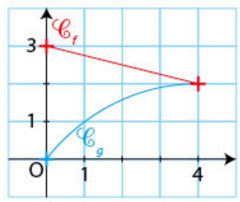
79 g est une fonction décroissante sur $\mathbb{R}$ telle que $g(0) = 1$ et $g(1) = 0$.
En justifiant, donner l'ensemble des nombres réels tels que : **a)** $g(x) \geqslant 0$ **b)** $g(x) < 1$

80 ABCD est un carré de côté 4 cm. M est un point du segment [AB] et M′ est le point du segment [DM] tel que DM′ = 4 cm.
On note x la longueur AM et $f(x)$ la longueur MM′, en cm.



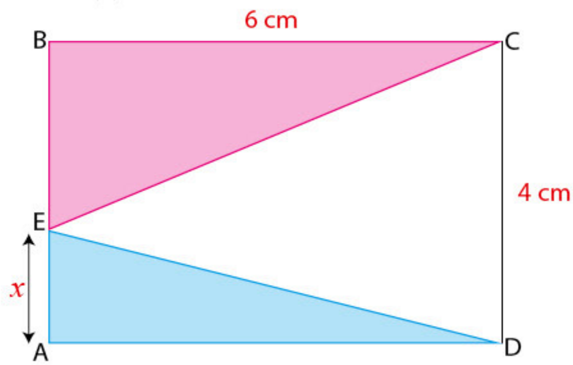
a) À quel intervalle appartient x ?
b) Sans déterminer son expression, dresser le tableau de variations de la fonction f.
c) Déterminer $f(3)$.
d) Déduire des questions précédentes les valeurs de x de l'intervalle $[0\ ;\ 4]$ pour lesquelles $f(x) \geqslant 1$.

81 Voici les courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ de deux fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0\ ;\ 4]$.
Dresser le tableau de variations de :



a) f sur l'intervalle $[0\ ;\ 4]$;
b) g sur l'intervalle $[0\ ;\ 4]$;
c) la fonction $x \mapsto f(x) - g(x)$ sur l'intervalle $[0\ ;\ 4]$.

82 ABCD est un rectangle de longueur 6 cm et de largeur 4 cm. E est un point du côté [AB].
On note x la longueur AE, en cm, $f(x)$ l'aire du triangle ADE et $g(x)$ l'aire du triangle BCE, en cm^2.



Déterminer les variations des fonctions f et g sur leur ensemble de définition.

Recherche d'extremums

83 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 5 - x^2$$

1. a) Calculer $f(0)$.

b) Démontrer que 5 est le maximum de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2. Donner l'expression d'une fonction g admettant 100 comme maximum sur $\mathbb{R}$.

84 **Algo** Voici une fonction F écrite en langage Python. Le paramètre x est un nombre réel.

```
def F(x):
    n=x+2
    y=x*n
    return y
```

a) Quelle est la valeur renvoyée par F(−1.5) ?

b) Le programme définit une fonction $f : x \mapsto y$. Déterminer l'expression de $f(x)$.

c) Conjecturer, à l'aide de la calculatrice, le minimum de la fonction f sur $\mathbb{R}$, puis le démontrer.

85 **Algo** Au cinéma Pathaumont, la place coûte 10 €. À l'occasion des fêtes de Noël, le cinéma Pathaumont propose aux familles composées de cinq personnes maximum une offre spéciale :

« Le nombre de places achetées est égal au montant, en euro, de réduction sur le prix unitaire de chaque place ».

1. a) Quel prix Nadège, Julien et leur petite fille vont-ils payer s'ils se rendent au cinéma Pathaumont durant les fêtes de Noël ?

b) Voici une fonction P écrite en langage Python.

```
def P(n):
    p=10-n
    p=n*p
    return p
```

Quelle est la valeur renvoyée par P(3) ?

Expliquer le rôle de cette fonction.

2. On note $p(n)$ le prix total payé pour n personnes se rendant au cinéma Pathaumont.

a) Exprimer $p(n)$ en fonction de n.

b) Démontrer que la fonction $f : x \mapsto x(10 - x)$ admet sur l'intervalle $[0 ; 10]$ un maximum en 5.

c) Expliquer alors pourquoi l'offre du cinéma est réservée aux familles composées de cinq personnes maximum.

86 Un grossiste conditionne et commercialise du thé aromatisé. Chaque semaine, sa production est limitée à 13 tonnes.

1. L'entreprise vend son produit 6 000 € la tonne.

Pour x tonnes vendues, on note $R(x)$ sa recette en milliers d'euros.

a) Exprimer $R(x)$ en fonction de x.

b) Afficher la courbe représentative de la fonction R à l'écran de la calculatrice (*fenêtre* : $0 \leqslant X \leqslant 13$, pas 1 et $-10 \leqslant Y \leqslant 100$, pas 10).

2. Pour x tonnes de thé aromatisé conditionné en une semaine, on modélise le coût de production, en milliers d'euros, par la fonction C définie par :

$$C(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 13x$$

Afficher également la courbe représentative de la fonction C dans la même fenêtre.

3. a) Lire graphiquement les quantités de thé pour lesquelles le bénéfice est nul.

b) Lire graphiquement la quantité de thé pour laquelle le bénéfice est maximum.

c) Conjecturer le sens de variation de la fonction B qui à x associe le bénéfice réalisé pour x tonnes produites et vendues.

d) La fonction B est définie sur l'intervalle $[0 ; 13]$ par :

$$B(x) = R(x) - C(x)$$

Tracer la courbe de la fonction B dans la même fenêtre et vérifier la cohérence des résultats trouvés aux questions **a)**, **b)**, **c)**.

87 h est la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; 4]$ par :

$$h(x) = -x^2 + 4x + 2$$

a) Vérifier que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0 ; 4]$, $h(x) = -(x-2)^2 + 6$.

b) Déterminer alors le signe de $h(x) - h(2)$ sur l'intervalle $[0 ; 4]$.

c) En déduire le maximum ou le minimum de la fonction h et préciser en quelle valeur il est atteint.

88 f est la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; 10]$ par $f(x) = x + \dfrac{9}{x}$.

1	$f(x) := x + \frac{9}{x}$
	→ $\mathbf{f(x) := x + \frac{9}{x}}$
2	Extremum(f, 0, 10)
	→ **(3, 6)**

a) Démontrer que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0 ; 10]$:

$$f(x) - f(3) = \frac{(x-3)^2}{x}$$

b) Justifier alors l'affichage obtenu ci-dessus à la ligne 2 avec un logiciel de calcul formel.

Connaître les fonctions de référence

89 Indiquer le sens de variation de chaque fonction.

a) $f(x) = 3 - 4(x - 2)$ **b)** $g(x) = \dfrac{x - 2}{4}$

c) $h(x) = (3 - \pi)x - \sqrt{2}$

90 f est la fonction affine telle que $f(-1) = 6$ et $f(-2) = -6$.

a) Déterminer l'expression de $f(x)$.

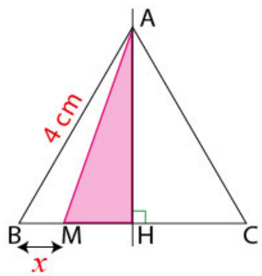
b) Indiquer le sens de variation de la fonction f.

c) Dresser le tableau de signes de la fonction f.

91 ABC est un triangle équilatéral de côté 4 cm.

H est le pied de la hauteur issue de A et M est un point variable du côté [BC].

On note x la distance BM, en cm, et $f(x)$ l'aire, en cm^2, du triangle AMH.



a) Observer la figure et conjecturer le sens de variation de f.

b) Exprimer $f(x)$ en fonction de x lorsque $x \in [0 ; 2]$ et lorsque $x \in [2 ; 4]$.

Démontrer alors la conjecture émise à la question **a)**.

92 f est la fonction définie sur l'intervalle $[-2 ; 5]$ par :

$$\begin{cases} f(x) = 2x + 1 & \text{si } x \in [-2 ; 1] \\ f(x) = -x + 4 & \text{si } x \in [1 ; 5] \end{cases}$$

a) Dans un repère, tracer la courbe représentative de la fonction f.

b) Justifier les variations de la fonction f.

c) Déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

93 Les tarifs d'une bibliothèque ont été effacés.

euros pour l'inscription
euros par livre emprunté

Parmi ces deux tableaux, lequel permet de retrouver les tarifs effacés ? Quels sont ces tarifs ?

(1)	Nombre de livres empruntés	2	4	6	8
	Coût en euro	20	21	23	24

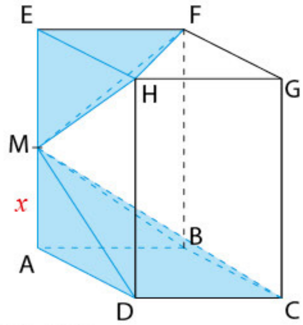
(2)	Nombre de livres empruntés	2	4	6	8
	Coût en euro	42	44	46	48

D'après EVAPM

94 ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle tel que AB = 4, BC = 3 et AE = 6.

M est un point variable sur le segment [AE].

On note AM = x et V(x) la somme des volumes des deux pyramides MABCD et MEFH.



a) Quel est l'ensemble de définition de la fonction V ?

b) Exprimer V(x) en fonction de x.

c) En déduire le sens de variation de la fonction V sur son ensemble de définition.

d) Peut-on trouver une valeur de x pour laquelle V(x) soit égal à la moitié du volume du parallélépipède rectangle ABCDEFGH ?

S'entraîner à la logique → p. XXI

95 Quantificateurs

Voici le tableau de variations d'une fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 7]$.

x	0		3		6		7
$f(x)$	-2	↗	1	↘	-3	↗	0

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse.

a) Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0 ; 7]$:
$$f(x) \leqslant 7$$

b) Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0 ; 7]$:
$$-2 \leqslant f(x) \leqslant 0$$

c) Il existe un nombre réel x tel que $f(x) < -2{,}5$.

d) Il existe un unique nombre réel x tel que $f(x) = 0$.

96 Négation d'une proposition

Écrire la négation de chaque proposition.

P : « Pour tout nombre réel x, $f(x) \geqslant 3$. »

Q : « La fonction f est croissante sur l'intervalle $[3 ; 4]$. »

97 Implications

f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

Pour chaque implication, dire si elle est vraie ou fausse.

a) Si f est croissante sur $[0 ; 2]$, alors $f(1) \leqslant f(2)$.

b) Si $f(0) < f(2)$, alors f est croissante sur $[0 ; 2]$.

c) Si pour tout nombre réel x, $f(x) \leqslant 4$, alors la fonction f admet le nombre 4 pour maximum sur $\mathbb{R}$.

d) Si la fonction f est croissante sur $[0 ; 1]$, alors :
$$(f(0))^3 \leqslant (f(1))^3$$

98 Imaginer une stratégie

Chercher **Modéliser**

Le salaire mensuel d'un agent immobilier est composé d'un salaire fixe auquel s'ajoute une prime égale à un pourcentage du montant total des ventes qu'il a réalisées au cours du mois.

Au mois de septembre 2018, il a gagné 2 400 € et ses ventes ont rapporté 700 000 € à l'agence.

Au mois d'octobre 2018, il a gagné 2 100 € et ses ventes ont rapporté 550 000 € à l'agence.

Déterminer le montant de son salaire fixe mensuel ainsi que le pourcentage du montant total des ventes correspondant à sa prime mensuelle.

99 Algo Comprendre un algorithme

Représenter **Raisonner**

1. Ce programme écrit en langage Python définit une fonction f.

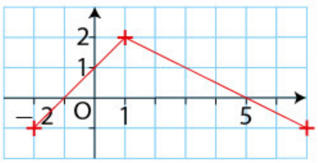
```
from math import *

def f(x):
    if x<=0:
        y=-2*x
    if 0<x<1:
        y=sqrt(x)
    if x>=1:
        y=1/x
    return y
```

a) Dresser son tableau de variations sur l'intervalle $[-2\,;10]$. Justifier.

b) Dans un repère, tracer la courbe représentative de la fonction f sur $[-2\,;10]$.

2. Modifier le programme précédent afin qu'il définisse une fonction g dont la courbe représentative sur l'intervalle $[-2\,;7]$ est représentée ci-contre.



100 Relier aire et périmètre

Problème ouvert

Chercher **Modéliser**

Parmi tous les rectangles d'aire 100 cm^2, peut-on en trouver un de périmètre minimum ?

101 Encadrer une fonction

Raisonner **Calculer**

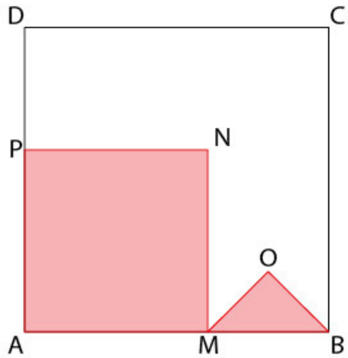
f est la fonction définie sur l'intervalle $[1\,;2]$ par :

$$f(x)=\sqrt{-3x+7}$$

Utiliser le sens de variation des fonctions de référence et démontrer que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[1\,;2]$, $1\leqslant f(x)\leqslant 2$.

102 Tice Relier les notions

Chercher **Raisonner** **Communiquer**



ABCD est un carré de 10 cm de côté.

M est un point du segment [AB]. On construit à l'intérieur du carré ABCD un carré AMNP et un triangle MBO rectangle et isocèle en O.

On note x la longueur AM, en cm, et $\mathscr{A}(x)$ l'aire du domaine coloré, en cm^2.

a) À quel intervalle x appartient-il ?

b) Démontrer que $\mathrm{OM}^2=\dfrac{1}{2}(10-x)^2$.

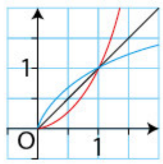
c) En déduire l'expression de $\mathscr{A}(x)$ en fonction de x.

d) Est-il possible de faire en sorte que l'aire du domaine coloré soit la plus grande possible ? La plus petite possible ? Si oui, dans quel cas ?

103 Étudier la position relative de courbes

Chercher **Raisonner**

Les courbes représentatives des fonctions $x\mapsto x^2$, $x\mapsto x$ et $x\mapsto\sqrt{x}$ sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ sont tracées ci-contre.



1. Démontrer, en utilisant les variations des fonctions de référence que :

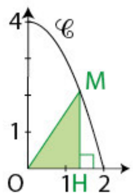
a) si $0\leqslant x\leqslant 1$, alors $x^2\leqslant x\leqslant\sqrt{x}$;

b) si $x\geqslant 1$, alors $\sqrt{x}\leqslant x\leqslant x^2$.

2. En déduire la position relative des trois courbes sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

104 Tice Prendre des initiatives

Chercher **Raisonner**



Un logo publicitaire doit avoir la forme ci-contre. Dans ce repère orthonormé, M est un point de la courbe $\mathscr{C}$ représentant la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;2]$ par $f(x)=4-x^2$.

Aider le dessinateur à positionner M de façon que l'aire du triangle rectangle OMH soit maximum.

105 Optimiser une recette

Narration de recherche

Chercher | Modéliser

Rédiger les différentes étapes de la recherche, sans omettre les fausses pistes et les changements de méthode.

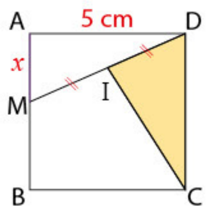
Problème La responsable d'une grande boutique de vêtements vend en moyenne 100 chemisiers par semaine lorsque celui-ci est au prix de 20 €.

Elle constate qu'à chaque fois qu'elle réduit de 1 € le prix de ce chemisier, il s'en vend 10 de plus par semaine.

Déterminer le prix du chemisier qui assure à la responsable du magasin une recette hebdomadaire maximum.

106 Étudier l'aire d'un triangle déformable

Chercher | Raisonner



ABCD est un carré de côté 5 cm.
M est un point du côté $[AB]$; on pose $x = AM$ (en cm).
I est le milieu du segment $[DM]$.
f est la fonction qui à x associe l'aire, en cm^2, du triangle DCI.
Étudier les variations de la fonction f.

107 Exprimer une distance

Chercher | Modéliser

Enzo part de chez lui pour se rendre au lycée. Il marche pendant 12 min à la vitesse de 5 $km \cdot h^{-1}$, puis prend le bus qui roule à une vitesse moyenne de 45 $km \cdot h^{-1}$ pendant 15 min et enfin marche pendant 3 min à la vitesse de 6 $km \cdot h^{-1}$.

On note d la fonction qui au temps t, en h, associe la distance, en km, parcourue par Enzo depuis le départ de son domicile.

a) Justifier l'expression de $d(t)$ en fonction de t ci-dessous.

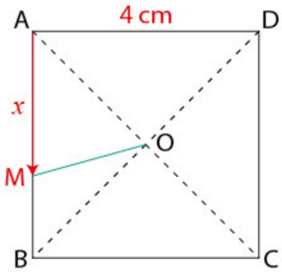
$$\begin{cases} d(t) = 5t & \text{si } t \in [0\,;0{,}2] \\ d(t) = 45(t - 0{,}2) + 1 & \text{si } t \in [0{,}2\,;0{,}45] \\ d(t) = 6(t - 0{,}45) + 12{,}25 & \text{si } t \in [0{,}45\,;0{,}5] \end{cases}$$

b) Dans un repère, tracer la courbe représentative de la fonction d sur l'intervalle $[0\,;0{,}5]$.

c) Dresser le tableau de variations de la fonction d sur l'intervalle $[0\,;0{,}5]$.

108 Study the variations of a function

Communiquer | Chercher



Square ABCD has a side of 4 cm and a centre O.
The point M moves around the perimeter of the square in alphabetical order starting from A.
x is the distance travelled by M from A and f the function giving the straight line distance OM, depending on x.
Do not try to find a general formula for $f(x)$.

1. a) Explain why f is defined on $[0\,;16]$.

b) Compute $f(x)$ when x is equal to 0; 2; 4; 6; 8.

2. a) Describe the variations of f.

b) Give the extremes of function f on $[0\,;16]$.
For what values of x are they reached?

Des Défis

109 Comparer deux nombres

Comparer sans calculatrice les nombres :

$$\left(\sqrt{3} + 1\right)^2 \text{ et } \left(\frac{12}{7}\right)^2$$

110 Trouver une fonction inconnue

f est une fonction affine telle que :

$$f(1) \leqslant f(2), \quad f(3) \geqslant f(4) \text{ et } f(5) = 5$$

Quelle est cette fonction affine ?

(d'après Olympiades de Belgique)

111 Trouver une fonction inconnue (bis)

f est une fonction affine telle que :

- l'inéquation $f(x) \geqslant 3$ a pour ensemble des solutions $\mathcal{S} = [1\,; +\infty[$;
- l'inéquation $f(x) \leqslant 0$ a pour ensemble des solutions $\mathcal{S} =]-\infty\,; -3]$.

Quelle est cette fonction affine ?

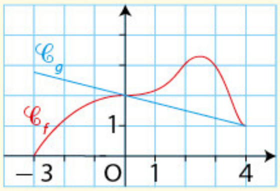
112 Établir des variations

Déterminer mentalement comment varie l'inverse du carré d'un nombre réel non nul.

QCM Bilan

QCM interactifs

113 Dans chaque cas, donner la réponse exacte en justifiant.

		A	B	C	D
1	D'après ce graphique, la fonction $x \mapsto f(x) - g(x)$ est … 	décroissante sur $[-3\,;4]$	croissante sur $[0\,;4]$	décroissante sur $[3\,;4]$	décroissante sur $[-3\,;0]$
2	D'après ce tableau de variations d'une fonction f définie sur $[-1\,;2]$… $\begin{array}{c\|ccccccc} x & -1 & a & 0 & & 1 & b & 2 \\ \hline f(x) & 0 & \searrow & -1 & \nearrow & 2 & \searrow & 1 \end{array}$	$f(b) - 1 \leqslant 0$	$f(a) > f(b)$	le nombre b est un antécédent de 0 par f	pour tout nombre réel x de $[-1\,;2]$, $f(x) \geqslant -1$
3	f est une fonction affine telle que $f(1) = 3$ et $f(2) = 1$. $f(3)$ est égal à …	-2	-1	0	5
4	f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = 2 - x & \text{si } x \leqslant 1 \\ f(x) = 3x - 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ On peut affirmer que …	f admet 1 comme maximum sur $\mathbb{R}$	$f(2) > f(5)$	f est croissante sur $[0\,;1]$	f est décroissante sur $[-1\,;0]$
5	$\begin{array}{c\|ccccc} x & -\infty & & \frac{2}{3} & & +\infty \\ \hline f(x) & & - & 0 & + & \end{array}$ Ce tableau de signes peut être celui de la fonction $f : x \mapsto$ …	$2x + 3$	$-2x + 3$	$6 - 4x$	$6x - 4$
6	Si pour tout nombre réel x, $f(x) - f(5) \leqslant 0$, alors sur $\mathbb{R}$, …	5 est le maximum de f	$f(5)$ est le maximum de f	5 est le minimum de f	$f(5)$ est le minimum de f
7	Dans un repère, les points $\mathrm{E}(0\,;3)$ et $\mathrm{F}(3\,;-2)$ sont alignés avec …	$\mathrm{A}(2\,;-2)$	$\mathrm{B}\left(-\frac{1}{5}\,;3\right)$	$\mathrm{C}\left(\frac{1}{2}\,;\frac{13}{6}\right)$	$\mathrm{D}(\sqrt{3}\,;2{,}5)$
8	Une fonction qui a pour maximum 1 sur l'intervalle $[1\,;2]$ est $f : x \mapsto$ …	x^2	x^3	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{x}$
9	Une fonction croissante sur l'intervalle $[1\,;4]$ est $f : x \mapsto$ …	$5 - 2x$	$\frac{1}{x}$	x^2	$\frac{6 - x}{11}$
10	Pour tout nombre réel x, si $x < -2$ alors …	$x^2 < 4$	$x^2 > 4$	$0 < x^2 < 4$	$x^2 < -4$

Vérifiez vos réponses p. 346 pour avoir votre note (considérez 1 point par réponse juste).

114 Estimer à l'aide d'un maximum

La situation problème

Le mercredi 18 juillet s'est déroulée la 11^{e} étape du Tour de France 2018 reliant Albertville à La Rosière.

Un supporter s'est placé dès le début de la course au point le plus haut du parcours et a attendu l'arrivée des coureurs.

Utiliser les différentes informations pour estimer au bout de combien de temps le supporter a vu arriver le vainqueur de cette étape.

DOC 2 Classement de l'étape

Classement 2018 à l'issue de l'étape 11

Etape 10 — Etape 12

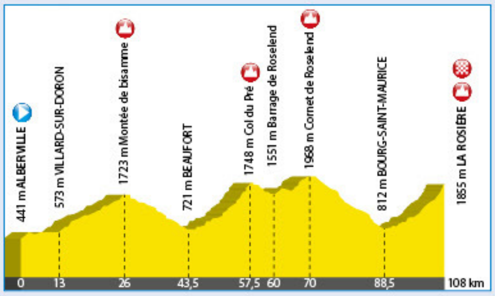
CLASSEMENT GÉNÉRAL — CLASSEMENT DE L'ÉTAPE

Individuel | Points | Équipe | Grimpeur | Jeune | Combatif

Distance totale parcourue : 108.5 km

RANG	COUREUR	ÉQUIPE	TEMPS
1	GERAINT THOMAS	TEAM SKY	03H 29' 36''
2	TOM DUMOULIN	TEAM SUNWEB	03H 29' 56''
3	CHRIS FROOME	TEAM SKY	03H 29' 56''

DOC 1 Altitude en fonction de la distance parcourue



DOC 3 Distance parcourue par Geraint Thomas en fonction du temps

115 Calculer une pente

La situation problème

Maëlle désire installer des panneaux solaires sur sa toiture. Afin de connaître le rendement de ses futurs panneaux solaires, elle doit calculer la pente de sa toiture. Pour cela, elle utilise sa calculatrice.

Utiliser les différentes informations pour déterminer la pente, en degré, de sa toiture.

Arrondir à l'unité.

DOC 1 Représentation de la situation

DOC 2 Tableau des valeurs

Voici un tableau de valeurs de la fonction représentée graphiquement dans le repère du DOC 1.

X	Y1
0	8.9329
1	8.0162
2	7.0995
3	6.1828
4	5.2661
5	4.3494
6	3.4327
7	2.516
8	1.5993
9	0.6826
10	-0.234

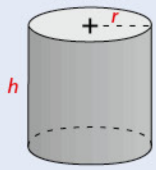
116 Minimiser le coût de fabrication

La situation problème

Pour minimiser le coût de fabrication d'une casserole, il faut minimiser la quantité de tôle utilisée.
Utiliser les différentes informations pour déterminer le rayon et la hauteur d'une casserole de 2 L de façon à minimiser son coût de fabrication.

DOC 1 Les formules

Cylindre



Aire latérale :
$\mathcal{A} = 2\pi r h$
Volume :
$\mathcal{V} = \pi r^2 h$

DOC 2 Conversion en litre

Pour convertir des mètres cube en litres, on utilise l'équivalence suivante :
$1\ \text{dm}^3 = 1\ \text{L}$

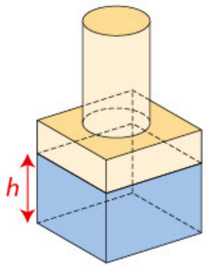
DOC 3 Avec un logiciel de calcul formel

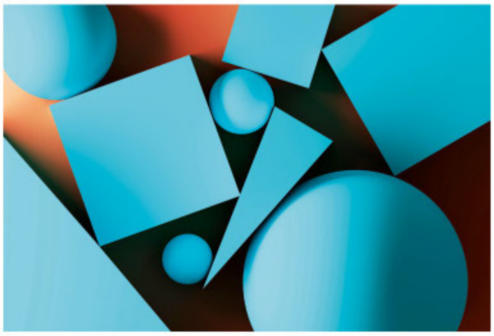
1	$f(x) := \frac{4}{x} + \pi x^2$ $\rightarrow\ f(x) := \pi x^2 + \frac{4}{x}$
2	Extremum(f, 0, 2) $\approx\ (0.8603, 6.9747)$

117 Relier géométrie dans l'espace et fonctions

La situation problème

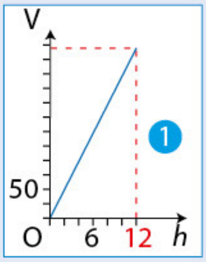
Un récipient est formé d'un cube d'arête 6 cm, et d'un cylindre de hauteur 6 cm et de rayon 2 cm.
On note h la hauteur, en cm, du liquide dans ce récipient et V le volume d'eau, en cm^3.
Kévin et ses amies ont représenté graphiquement la fonction qui, à la hauteur h de liquide, associe le volume V de liquide.



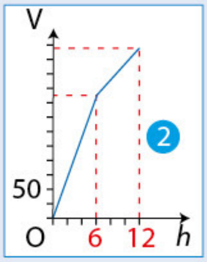


Utiliser les différentes informations pour reconnaître le graphique qui est correct et proposer un récipient de forme adaptée correspondant à chacun des deux autres graphiques.

DOC 1 Le graphique de Kévin



DOC 2 Le graphique de Roxane



DOC 3 Le graphique d'Amélie