12 Fonctions sinus et cosinus

HISTOIRE DES MATHS

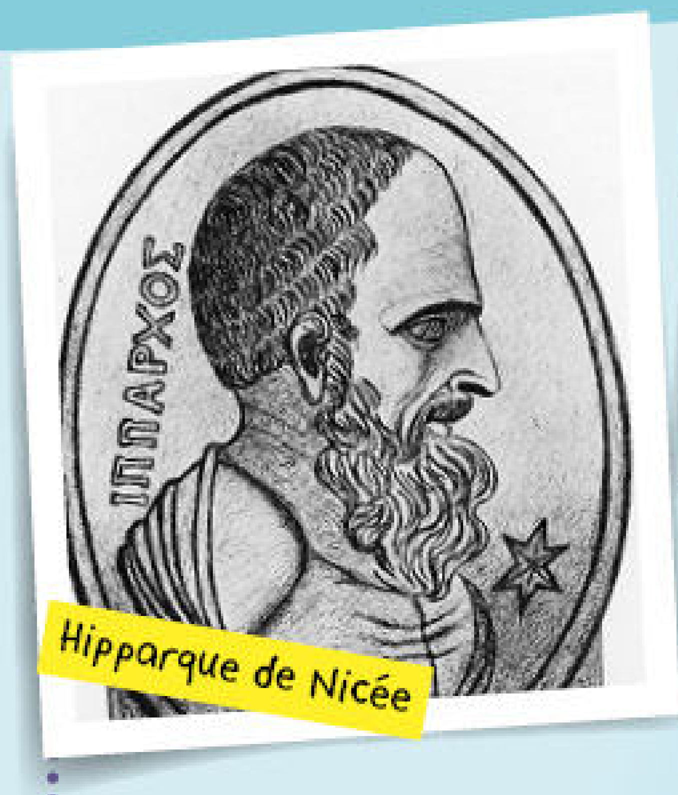
Vers l'an 150 avant notre ère, **Hipparque de Nicée** pose les principes de la trigonométrie pour décrire avec précision la position de certains astres.

Au 2^{e} siècle, **Ptolémée** reprend ses travaux et introduit des formules de trigonométrie.

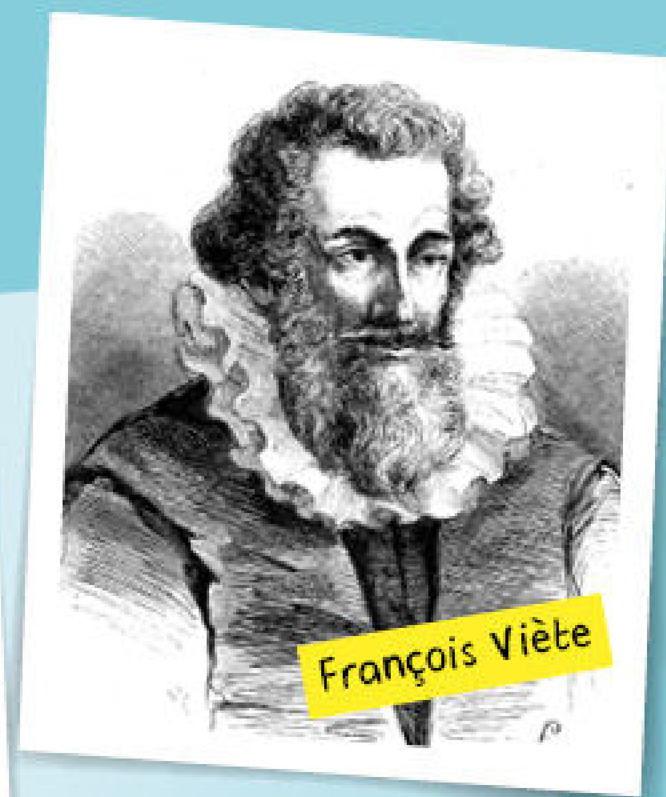
Au 5^{e} siècle, **Aryabhata l'Ancien** établit des tables du sinus.

Au 16^{e} siècle, **Georg Joachim Rheticus** définit les fonctions trigonométriques dans un triangle rectangle au lieu d'un cercle. Il inspire **François Viète** qui fait évoluer la trigonométrie vers ce qu'on en connaît aujourd'hui.

Au 17^{e} siècle, **Albert Girard** introduit les notations sin et cos, reprises ensuite par **Euler**. **René Descartes** étudie la déviation d'un rayon lumineux à l'aide du sinus.



Hipparque de Nicée


François Viète

► **Hipparque de Nicée** (– 190 ; – 120) est le plus grand astronome d'observation de l'Antiquité. Il est le premier Grec à modéliser le mouvement de la Lune et du Soleil. On le considère comme l'inventeur de la trigonométrie.

► **François Viète** (1540-1603) est un mathématicien français, fondateur des notations de l'algèbre contemporaine. Dans *Canon mathematicus*, il présente des formules de trigonométrie et établit des tables en utilisant des nombres décimaux.

- 150 Hipparque fonde la trigonométrie.

150 Ptolémée écrit un traité de trigonométrie.

1460 La trigonométrie devient une branche autonome des mathématiques.

1551 Rheticus définit des fonctions trigonométriques dans un triangle rectangle.

1571 Viète établit des formules de trigonométrie.

1637 Descartes étudie les lois de la réfraction.

- 52 Siège d'Alesia

161 Début du règne de l'empereur Marc Aurèle

1453 Fin de la guerre de Cent ans

1550 *Les Odes* de Ronsard

1572 Massacre de la Saint-Barthélemy

1642 Mazarin succède à Richelieu

0 — 200 — 1400 — 1500 — 1600 — 1700

La Philharmonie de Paris

Avec sa scène située au cœur du public, la grande salle Pierre Boulez se démarque sur le plan acoustique des **modèles habituels** de salles de concert en renforçant le sentiment d'intimité entre l'interprète et l'auditoire. Le volume de la salle a été étudié pour permettre une excellente réverbération du son le plus pur possible, c'est-à-dire **sinusoïdal**, tel celui d'un diapason.

Les contenus et capacités travaillés dans ce chapitre

	Savoir-faire	Exercices
• Fonction sinus : parité, périodicité et interprétation graphique, dérivée, variations, courbe représentative.	1, 3, 4, 14	15 à 26, 28 à 30, 32
• Fonction cosinus : parité, périodicité et interprétation graphique, dérivée, variations, courbe représentative.	6, 8, 9, 12, 13	33 à 43, 45 à 47, 50, 51
• Résolution d'une équation du type $\cos(x) = a$, d'une inéquation de la forme $\cos(x) \leqslant a$ dans $[-\pi ; \pi]$.	7, 10, 11	52 à 63, 75 à 80
• Étude d'une fonction simple définie à partir de fonctions trigonométriques pour déterminer des variations, un optimum.	2, 5	27, 31, 44, 48, 49, 70 à 73

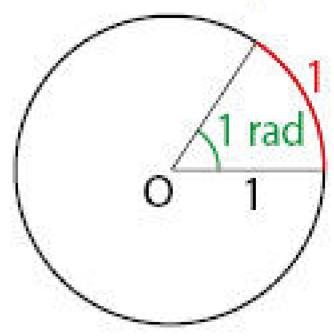
Bien démarrer

Calcul mental

Rappels utiles

• Mesure d'un angle et cercle trigonométrique

Le **radian** (symbole : rad) est la mesure d'un angle au centre qui intercepte un arc de longueur 1 sur un cercle de rayon 1.

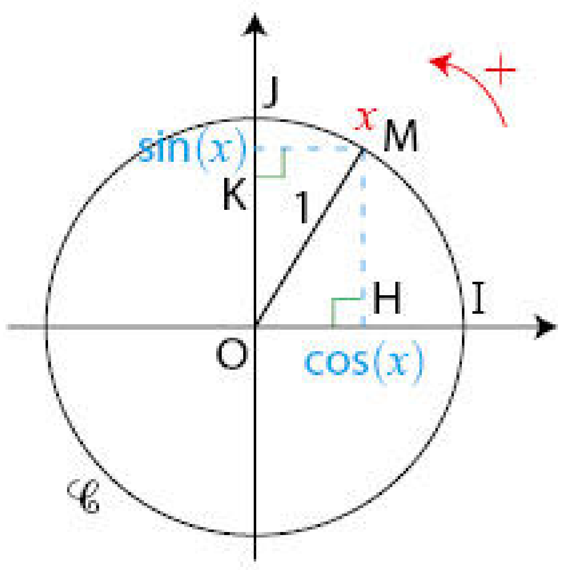


Les mesures a en degré et α en radian d'un même angle sont **proportionnelles**.

$$\alpha = \frac{\pi}{180} \times a$$

Le **cercle trigonométrique** de centre O a pour rayon 1 et est muni d'un repère de sens direct.

Si M est l'image d'un réel x, alors M est aussi l'image des réels $x + k \times 2\pi (k \in \mathbb{Z})$.



• Formules

Pour tout réel x, • $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$ • $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$
• $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

• Valeurs remarquables

Angle x (en rad)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1

• Parité

La **fonction sinus** est **impaire** :

pour tout réel x, $\sin(-x) = -\sin(x)$.

La **fonction cosinus** est **paire** :

pour tout réel x, $\cos(-x) = \cos(x)$.

• Périodicité

Les fonctions sinus et cosinus sont **périodiques de période** 2π.

Pour tout réel x,

$\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$ et $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$.

À l'oral — Questions-Tests

Il y a une seule réponse exacte.

1 **a)** Un angle a pour mesure 80°. Sa mesure en radian est :

(1) $\frac{\pi}{80}$ rad (2) $\frac{8\pi}{9}$ rad (3) $\frac{4\pi}{9}$ rad

b) Un angle a pour mesure $\frac{2\pi}{3}$ rad.

Sa mesure en degré est :

(1) 60° (2) 120° (3) 75°

2 x désigne un nombre réel.

Répondre en s'aidant du cercle trigonométrique.

a) $\sin(x + \pi)$ est égal à :

(1) $\sin(x)$ (2) $\cos(x)$ (3) $-\sin(x)$

b) $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ est égal à :

(1) $\sin(x)$ (2) $\cos(x)$ (3) $-\sin(x)$

c) $\cos(\pi - x)$ est égal à :

(1) $\sin(x)$ (2) $\cos(x)$ (3) $-\cos(x)$

d) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ est égal à :

(1) $\sin(x)$ (2) $\cos(x)$ (3) $-\cos(x)$

3 Pour tout réel x, $\sin^2(x)$ est égal à :

(1) $1 - \cos^2(x)$ (2) $\cos^2(x) - 1$ (3) $1 + \cos^2(x)$

4 $\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)$ est égal à :

(1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (2) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (3) $-\frac{1}{2}$

5 **a)** Pour tout réel x, $f(x) = -\sin(x)$.

La fonction f :

(1) est paire (2) est impaire (3) n'est ni paire ni impaire

b) Pour tout réel x, $g(x) = -2\cos(x)$.

La fonction g est :

(1) est paire (2) est impaire (3) n'est ni paire ni impaire

6 x désigne un nombre réel.

a) $\sin(x + 4\pi)$ est égal à :

(1) $\sin(x)$ (2) $\cos(x)$ (3) $-\sin(x)$

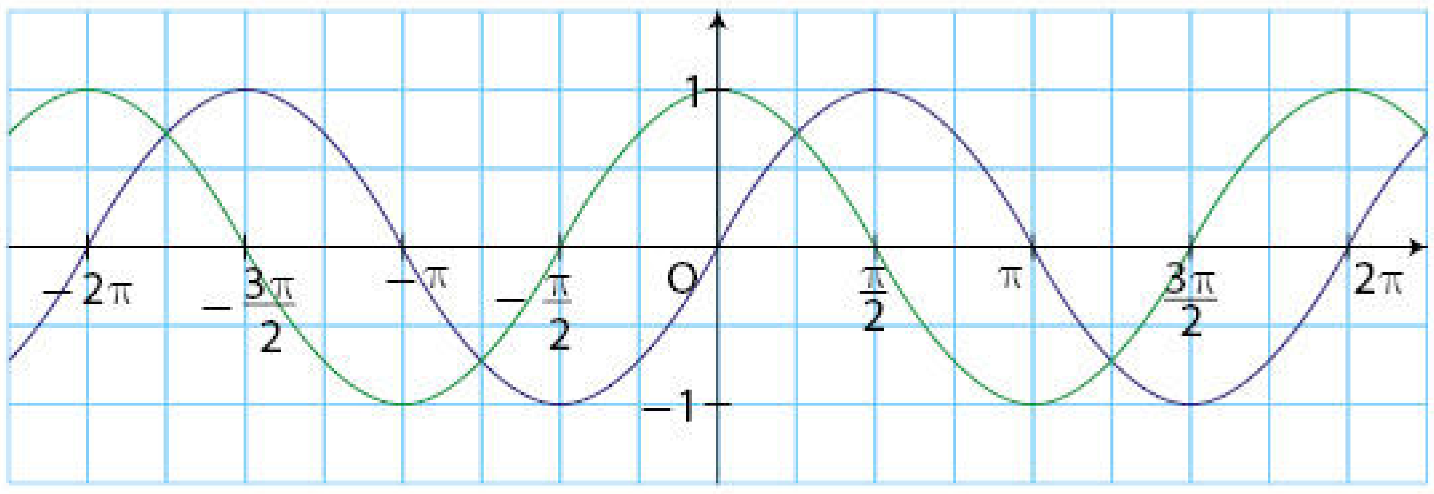
b) $\cos(x + 3\pi)$ est égal à :

(1) $\sin(x)$ (2) $\cos(x)$ (3) $-\cos(x)$

1 Variations des fonctions sinus et cosinus

Voici, dans un repère, les courbes représentatives des fonctions f et g, définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = \sin(x)$ et $g(x) = \cos(x)$.



1 **a)** Indiquer la couleur de la courbe représentant : • la fonction f ; • la fonction g.

b) Donner des raisons de ce choix.

2 **a)** Indiquer des intervalles de $[-2\pi ; 2\pi]$ sur lesquels la fonction f est : • croissante • décroissante

b) Indiquer des intervalles de $[-2\pi ; 2\pi]$ sur lesquels la fonction g est : • croissante • décroissante

3 On admet que les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel x :

$$\sin'(x) = \cos(x) \text{ et } \cos'(x) = -\sin(x).$$

a) Les réponses à la question **2** sont-elles en accord avec les définitions des dérivées des fonctions sinus et cosinus ?

b) Recopier et compléter les tableaux de variations des fonctions sinus et cosinus sur l'intervalle $[-\pi ; \pi]$.

x	$-\pi$ $\qquad\qquad$ π
$\sin'(x)$	
$\sin(x)$	

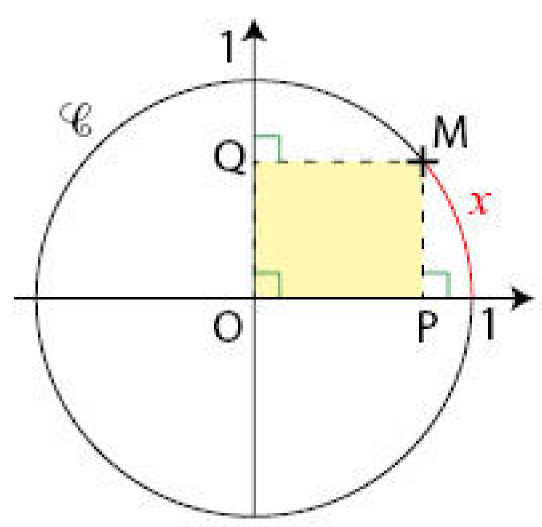
x	$-\pi$ $\qquad\qquad$ π
$\cos'(x)$	
$\cos(x)$	

2 Étude de variations et recherche d'un optimum

Dans le repère orthonormé d'origine O ci-contre, $\mathscr{C}$ est le cercle trigonométrique de centre O et M est le point de $\mathscr{C}$ image d'un réel x de l'intervalle $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$.

P et Q sont les projetés orthogonaux de M sur les axes comme indiqué ci-contre.

On s'intéresse à l'aire $S(x)$ du rectangle OPMQ, en unité d'aire.



1 Exprimer $S(x)$ en fonction de x.

2 On admet que la fonction S est dérivable sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$.

a) Déterminer la fonction dérivée S′ de la fonction S (voir **Découvrir 1**.)

b) Justifier que pour tout réel x de $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$, $S'(x) = 2\cos^2(x) - 1$.

c) Utiliser l'écran de calcul formel ci-contre pour expliquer pourquoi $S'(x)$ est du signe de $\sqrt{2}\cos(x) - 1$ sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$.

```
■ factor(2·(cos(x))^2 - 1 , x)
        (√2·cos(x) - 1)·(√2·cos(x) + 1)
```

d) En s'aidant du cercle trigonométrique, résoudre l'inéquation $\cos(x) \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$ dans l'intervalle $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$.

3 Dresser le tableau de variations de la fonction S sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$. En déduire la position du point M pour laquelle l'aire $S(x)$ est maximum. Quelle est alors la nature du rectangle OPMQ ?

Cours

Exercices
- **1** à **5** (ci-contre)
- **15** à **32**

1 Étude de la fonction sinus

A Propriétés de la fonction sinus

Propriétés connues de la fonction sinus

- La fonction sinus est **impaire** : pour tout réel x, $\sin(-x) = -\sin(x)$.
- La fonction sinus est **périodique de période 2π** : pour tout réel x, $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$.

Continuité et dérivabilité de la fonction sinus

Propriétés (admises)

- La fonction sinus est continue sur $\mathbb{R}$.
- La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x, $\mathbf{sin}'(x) = \mathbf{cos}(x)$.

B Étude de la fonction sinus sur l'intervalle $[0 ; \pi]$

Pour tout réel x, $\sin'(x) = \cos(x)$.

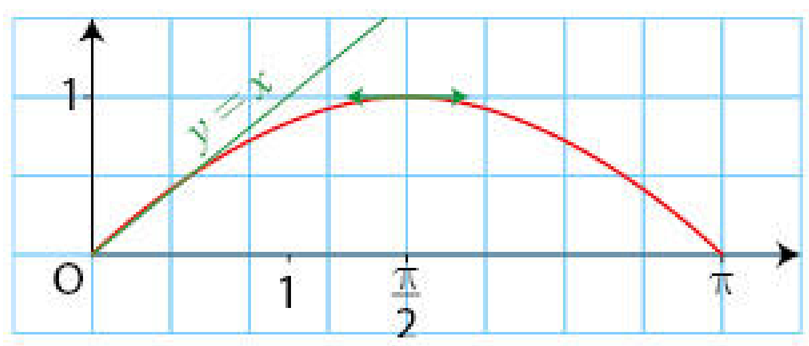
Or, $\cos(x) \geqslant 0$ sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ et $\cos(x) \leqslant 0$ sur $\left[\frac{\pi}{2} ; \pi\right]$.

Donc, la fonction sinus est croissante sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2} ; \pi\right]$.

Tableau de variations sur $[0 ; \pi]$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin'(x)$		$+$	0	$-$	
$\sin(x)$	0	↗	1	↘	0

Courbe représentative sur $[0 ; \pi]$

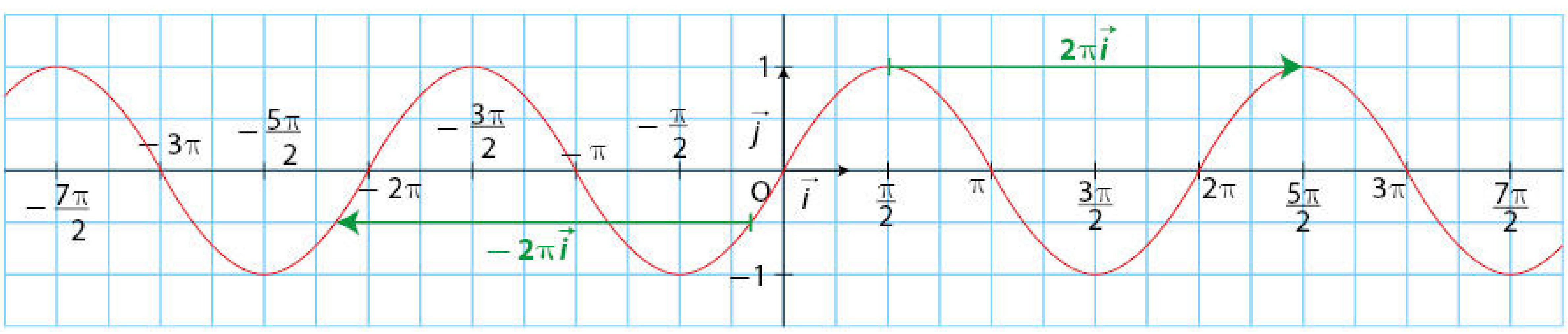


Dans un repère d'origine O, une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction sinus en l'origine O est $y = \sin'(0)\,(x - 0) + 0$, c'est-à-dire $y = \cos(0)x$, soit $y = x$.

C Courbe représentative de la fonction sinus

La parité de la fonction sinus permet de tracer la courbe sur l'intervalle $[-\pi ; \pi]$.

Dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, d'après la périodicité de la fonction sinus, les translations de vecteurs $-2\pi\vec{i}$, $2\pi\vec{i}$, … permettent de tracer la courbe sur les intervalles $[-3\pi ; -\pi]$, $[\pi ; 3\pi]$, …

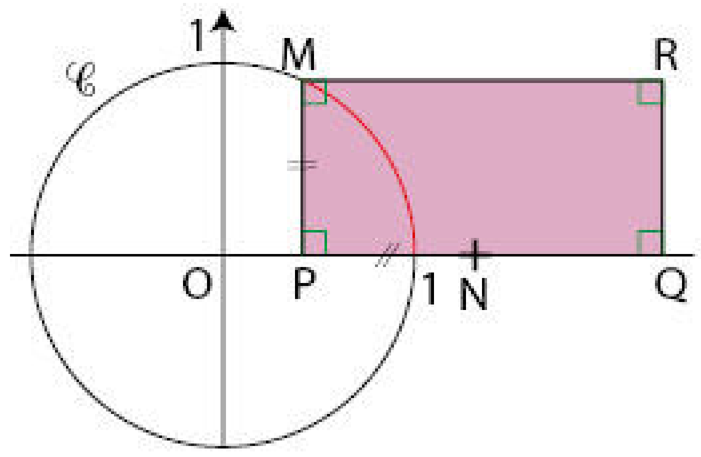


La courbe de la fonction sinus est appelée **une sinusoïde**.

EXERCICES RÉSOLUS

1 Déterminer une fonction dérivée

Dans le repère orthonormé d'origine O ci-contre, $\mathscr{C}$ est le cercle trigonométrique de centre O et M est le point de $\mathscr{C}$ image d'un réel x de $[0\,;\pi]$.
On note P le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses.
On s'intéresse au rectangle MPQR tel que PQ = MP + 1.
On note $\mathscr{A}(x)$ l'aire, en unité d'aire, de ce rectangle ($x \in [0\,;\pi]$).



a) Exprimer $\mathscr{A}(x)$ en fonction de x.
b) Justifier que pour tout réel x de $[0\,;\pi]$, $\mathscr{A}'(x) = (2\sin(x) + 1)\cos(x)$.

Solution

a) Pour tout réel x de $[0\,;\pi]$, $\mathscr{A}(x) = \text{MP} \times \text{PQ}$. Ainsi, $\mathscr{A}(x) = \sin(x) \times (\sin(x) + 1)$.
b) La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc la fonction $\mathscr{A}$ est dérivable sur $[0\,;\pi]$.
Pour tout réel x de $[0\,;\pi]$, on pose $u(x) = \sin(x)$ et $v(x) = \sin(x) + 1$.
Alors, $u'(x) = \cos(x)$ et $v'(x) = \cos(x)$.
Donc, pour tout réel x de $[0\,;\pi]$,
$\mathscr{A}'(x) = \cos(x) \times (\sin(x) + 1) + \sin(x) \times \cos(x)$
$\mathscr{A}'(x) = \cos(x) \times (\sin(x) + 1 + \sin(x)) = \cos(x) \times (2\sin(x) + 1)$.

Pour dériver un produit, on utilise la formule : $(uv)' = u'v + uv'$.

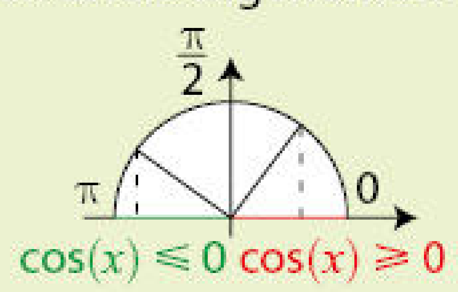
2 Étudier le sens de variation d'une fonction

On reprend la situation de l'exercice **1**.
a) Étudier le signe de $\mathscr{A}'(x)$ pour $x \in [0\,;\pi]$.
b) En déduire le sens de variation de la fonction $\mathscr{A}$ sur $[0\,;\pi]$.

Solution

a) Pour tout réel x de $[0\,;\pi]$, $0 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$.
Donc, $2\sin(x) + 1$ est un nombre réel positif.
Ainsi, $\mathscr{A}'(x)$ est du signe de $\cos(x)$. Donc :
$\mathscr{A}'(x) \geqslant 0$ sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ et $\mathscr{A}'(x) \leqslant 0$ sur $\left[\frac{\pi}{2}\,;\pi\right]$.
b) La fonction $\mathscr{A}$ est croissante sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2}\,;\pi\right]$.

Le signe de $\cos(x)$ peut se lire sur un cercle trigonométrique.



EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 1

3 Pour tout réel x, $f(x) = \sin(x) \times (\sin(x) - 1)$.
a) Déterminer la fonction dérivée de f.
b) Justifier que pour tout réel x,
$$f'(x) = (2\sin(x) - 1)\cos(x).$$

4 Dans chaque cas, déterminer la fonction dérivée de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
a) $g(x) = x + \sin(x)$ **b)** $h(x) = x\sin(x)$.

Sur le modèle de l'exercice résolu 2

5 On reprend la situation de l'exercice **1**.
On note $p(x)$ le périmètre du rectangle MPQR, avec $x \in [0\,;\pi]$.
a) Exprimer $p(x)$ en fonction de x.
b) Déterminer la fonction dérivée de p.
c) Étudier le signe de $p'(x)$ sur l'intervalle $[0\,;\pi]$
d) En déduire le sens de variation de la fonction p sur l'intervalle $[0\,;\pi]$.

Exercices
- 6 à 11 (ci-contre)
- 33 à 63

2 Étude de la fonction cosinus

A Propriétés de la fonction cosinus

Propriétés connues de la fonction cosinus

- La fonction cosinus est **paire** : pour tout réel x, $\cos(-x) = \cos(x)$.
- La fonction cosinus est **périodique de période 2**π : pour tout réel x, $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$.

Continuité et dérivabilité de la fonction cosinus

Propriétés (admises)

- La fonction cosinus est continue sur $\mathbb{R}$.
- La fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x, $\mathbf{cos}'(x) = -\,\mathbf{sin}(x)$.

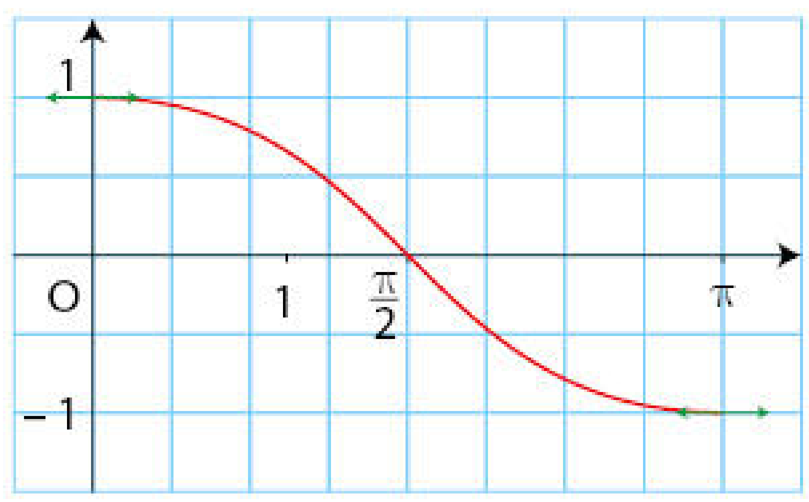
B Étude de la fonction cosinus sur l'intervalle $[0\,;\pi]$

Pour tout réel x, $\cos'(x) = -\sin(x)$.
Or, $\sin(x) \geqslant 0$ sur $[0\,;\pi]$, donc $\cos'(x) \leqslant 0$ sur $[0\,;\pi]$.
Donc, la fonction cosinus est décroissante sur $[0\,;\pi]$.

Tableau de variations sur $[0\,;\pi]$

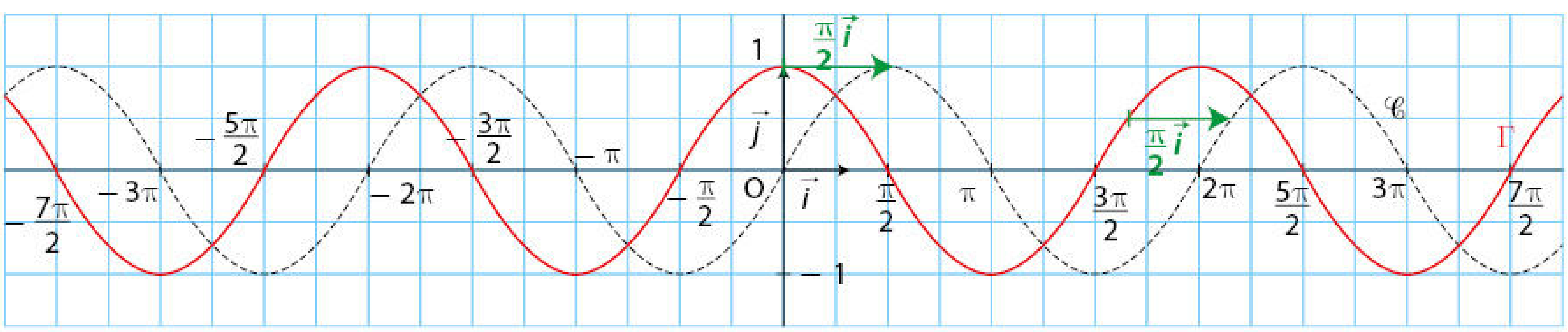
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos'(x)$	0	$-$	0
$\cos(x)$	1	↘ 0 ↘	-1

Courbe représentative sur $[0\,;\pi]$



C Courbe représentative de la fonction cosinus

La parité de la fonction cosinus permet de tracer la courbe sur l'intervalle $[-\pi\,;\pi]$.
Dans un repère $(\mathrm{O}\,;\vec{i},\vec{j})$, d'après la périodicité de la fonction cosinus, les translations de vecteurs $-2\pi\vec{i}$, $2\pi\vec{i}$, … permettent de tracer la courbe sur les intervalles $[-3\pi\,;-\pi]$, $[\pi\,;3\pi]$, …



La courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction sinus se déduit de celle Γ de la fonction cosinus par la translation de vecteur $\frac{\pi}{2}\vec{i}$ (voir exercice 40). Ainsi, la courbe Γ est aussi **une sinusoïde**.

EXERCICES RÉSOLUS

6 Déterminer une fonction dérivée

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos^2(x)$.
Déterminer la fonction dérivée de la fonction f.

Solution

La fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc la fonction f l'est aussi.
Pour tout réel x, $f'(x) = 2\cos(x) \times \cos'(x)$
c'est-à-dire $f'(x) = -2\cos(x) \times \sin(x)$.

> $f = u^2$ où u est la fonction cosinus. Pour dériver f, on applique la formule :
> $$(u^2)' = 2uu'.$$

7 Résoudre une équation (resp. inéquation) du type $\cos(x) = a$ (resp. $\cos(x) \leqslant a$)

Résoudre dans l'intervalle $[-\pi ; \pi]$:

a) l'équation $\cos(x) = \dfrac{1}{2}$; **b)** l'inéquation $\cos(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$.

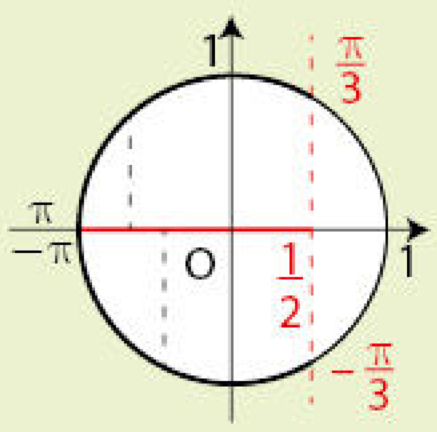
Solution

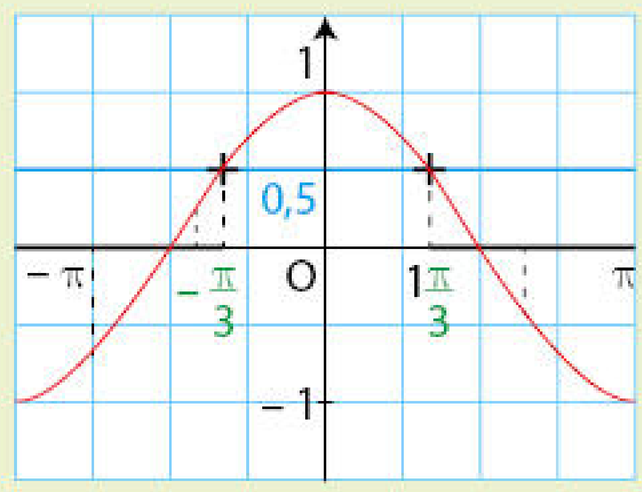
a) Dans l'intervalle $[-\pi ; \pi]$,
$$\cos(x) = \frac{1}{2} \text{ équivaut à } x = \frac{\pi}{3} \text{ ou } x = -\frac{\pi}{3}.$$
L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \left\{-\dfrac{\pi}{3} ; \dfrac{\pi}{3}\right\}$.

b) Dans $[-\pi ; \pi]$, $\cos(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$ équivaut à $-\pi \leqslant x \leqslant -\dfrac{\pi}{3}$ ou $\dfrac{\pi}{3} \leqslant x \leqslant \pi$. Donc $\mathcal{S} = \left[-\pi ; -\dfrac{\pi}{3}\right] \cup \left[\dfrac{\pi}{3} ; \pi\right]$.

> $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$
> $\frac{\pi}{3}$
>
> Au **a)**, la touche $\cos^{-1}$ (ou Acs ou Acos) renvoie le nombre x de $[0 ; \pi]$ tel que $\cos(x) = a$.

> Pour répondre aux questions ci-dessus, on peut utiliser un cercle trigonométrique ou la courbe représentative de la fonction cosinus (et des valeurs remarquables).





EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 6

8 Dans chaque cas, déterminer la fonction dérivée de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
a) $f(x) = x + \cos(x)$ **b)** $g(x) = x\cos(x)$

9 Dans chaque cas, déterminer la fonction dérivée de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
a) $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$ **b)** $g(x) = \sin(x) - \cos(x)$

Sur le modèle de l'exercice résolu 7

10 Résoudre dans l'intervalle $[-\pi ; \pi]$:
a) $\cos(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **b)** $\cos(x) \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

11 Résoudre dans l'intervalle $[-\pi ; \pi]$:
a) $\cos(x) = -\dfrac{1}{2}$ **b)** $\cos(x) \geqslant -\dfrac{1}{2}$

Vidéo JAICOMPRIS.COM Un autre exercice Algo/python résolu en vidéo

EXERCICE RÉSOLU

12 Utiliser un algorithme de balayage

Cours 2

1. Démontrer que l'équation $\cos(x) = x$ admet une unique solution x_0 dans $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

2. On étudie la fonction **Balayage** ci-contre, écrite en langage Python.

a) Exécuter pas à pas ce programme et compléter un tableau de suivi de la variable a pour $p = 0{,}1$. Faire apparaître également $\cos(a)$ dans ce tableau. *Arrondir au centième.*

Quelles sont les valeurs obtenues ?

b) Expliquer le rôle de ce programme.

c) Saisir ce programme et l'exécuter avec $p = 0{,}000\,1$. Interpréter le résultat obtenu.

```
from math import*

def Balayage(p):
    a=0
    while cos(a)>a:
        a=a+p
    return a-p,a
```

Solution

1. On note f la fonction définie sur $\mathrm{I} = \left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = \cos(x) - x$.

f est dérivable sur I et pour tout réel x de I, $f'(x) = -\sin(x) - 1$.

Sur $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin(x) \geqslant 0$ donc $f'(x) < 0$. De plus $f(0) = 1$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$.

La fonction f est continue et strictement décroissante sur I et $f(0) \times f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$, donc l'équation $f(x) = 0$, c'est-à-dire l'équation $\cos(x) = x$, admet une seule solution x_0 dans I.

2. a) Voici le tableau de suivi de la variable a et les valeurs successives de $\cos(a)$ arrondies au centième.

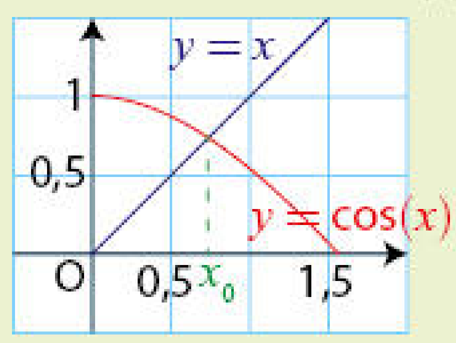
a	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$\cos(a)$	1	1	0,98	0,96	0,92	0,88	0,83	0,76	0,70

On sort de la boucle dès que $\cos(a) \leqslant a$.

On obtient les valeurs 0,7 et 0,8.

b) Ce programme permet d'obtenir par balayage un encadrement de la solution x_0 de l'équation $\cos(x) = x$ dans l'intervalle $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

On visualise ci-dessous une résolution graphique de l'équation $\cos(x) = x$.



c) Voici l'affichage obtenu dans la console :

```
>>> Balayage(0.0001)
(0.7389999999999349, 0.7390999999999349)
```

La solution x_0 de l'équation $\cos(x) = x$ dans $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$ est telle que $0{,}738\,9 < x_0 < 0{,}739\,1$.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 12

13 **a)** Démontrer que l'équation $\cos(x) = \frac{x}{2}$ admet une unique solution α dans $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

b) Adapter le programme de l'exercice 12 pour déterminer un encadrement de α.

Exécuter ce programme avec $p = 0{,}0001$.

14 **a)** Démontrer que l'équation $\sin(x) = \frac{x}{2}$ admet une unique solution β dans $\left[\frac{\pi}{3}\ ;\ \pi\right]$.

b) Adapter le programme de l'exercice 12 pour déterminer un encadrement de β.

Exécuter ce programme avec :

- $p = 0{,}0001$
- $p = 10^{-6}$

Étude de la fonction sinus

Cours 1

Questions flash À l'oral

15 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -2\sin(x).$$

Laquelle de ces affirmations est exacte ?

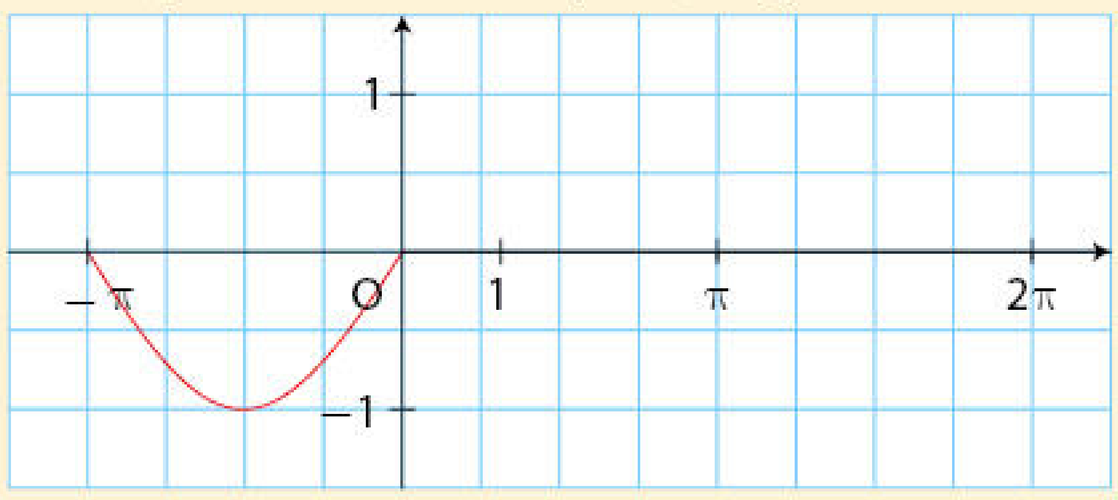
(1) La fonction f est paire.

(2) La fonction f est impaire.

(3) La fonction f n'est ni paire ni impaire.

16 Voici la courbe représentative de la fonction sinus sur $[-\pi\,;0]$ dans un repère.

Expliquer oralement comment compléter cette courbe pour l'obtenir sur $[-\pi\,;2\pi]$.



17 On sait que la fonction sinus est croissante sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$. Quel est son sens de variation sur $\left[\frac{\pi}{2}\,;\frac{3\pi}{2}\right]$?

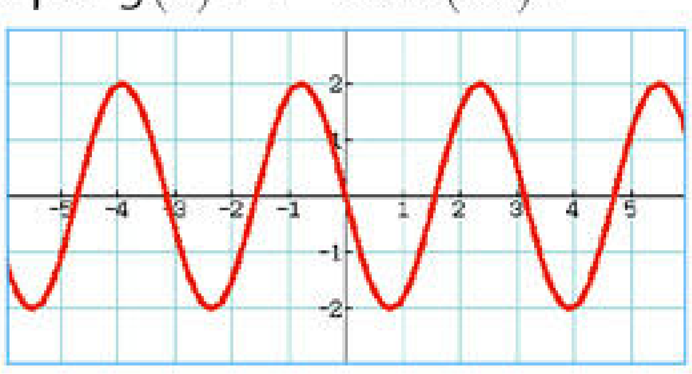
18 Déterminer la fonction dérivée de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \sin(2x)$.

19 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sin\left(\frac{3}{2}x\right).$$

Exprimer $f\left(x + \frac{4\pi}{3}\right)$ en fonction de x et démontrer que la fonction f est périodique de période $\frac{4\pi}{3}$.

20 Voici la courbe représentative de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -2\sin(2x)$.



1. a) Conjecturer graphiquement la parité de g.

b) Exprimer $g(-x)$ en fonction de x et démontrer cette conjecture.

2. Exprimer $g(x+\pi)$ en fonction de x et démontrer que la fonction g est périodique de période π.

21 h est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = \sin(x) + \sin(2x).$$

a) Démontrer que la fonction h est impaire.

b) Qu'en déduit-on pour sa courbe représentative $\mathscr{C}$ dans un repère ?

c) Afficher la courbe $\mathscr{C}$ à l'écran de la calculatrice et vérifier cette conjecture.

22 k est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$k(x) = \sin(\pi x).$$

a) Afficher la courbe représentative de la fonction k à l'écran de la calculatrice.

b) Conjecturer que la fonction k est périodique de période T. Indiquer T.

c) Démontrer cette conjecture.

Pour les exercices 23 et 24, f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(x)$ et $\mathscr{C}$ est sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

23 a) M et M′ sont des points de $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives $\frac{\pi}{2} - x$ et $\frac{\pi}{2} + x$ (avec x nombre réel).

Démontrer que M et M′ ont la même ordonnée.

b) Qu'en déduit-on pour la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$?

24 a) P et P′ sont des points de $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives $\pi - x$ et $\pi + x$ (avec x nombre réel).

Démontrer que le point A$(\pi\,;0)$ est le milieu du segment [PP′].

b) Qu'en déduit-on pour le point A ?

25 Dans chaque cas, déterminer la fonction dérivée de la fonction définie sur $\mathbb{R}$.

a) $f(x) = \sin^3(x)$ **b)** $g(x) = (\sin(x) - 2)(\sin(x) + 1)$

26 Dans chaque cas, déterminer la fonction dérivée de la fonction définie sur I.

a) $g(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ $\quad$ $\mathrm{I} =]0\,;+\infty[$

b) $h(x) = \frac{1}{\sin(x)}$ $\quad$ $\mathrm{I} =]0\,;\pi[$

27 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sin^2(x) + 2\sin(x).$$

1. Montrer que pour tout x, $f'(x) = 2(\sin(x) + 1)\cos(x)$.

2. a) Expliquer pourquoi $f'(x)$ est du signe de $\cos(x)$ sur $[0\,;\pi]$.

En déduire le signe de $f'(x)$ sur $[0\,;\pi]$.

b) Dresser le tableau de variations de f sur $[0\,;\pi]$.

Acquérir des automatismes

Pour les exercices 28 à 30, déterminer la fonction dérivée de la fonction f et étudier son signe sur I.

28 **a)** $f(x) = 2\sin(x) - 1$ $\quad \mathrm{I} = [0\,;\pi]$
b) $f(x) = 2x + 2\sin(x)$ $\quad \mathrm{I} = \mathbb{R}$

Vidéo

JAICOMPRIS.COM — Cet exercice est corrigé en vidéo

29 **a)** $f(x) = \sin(x) - x$ $\quad \mathrm{I} = \mathbb{R}$
b) $f(x) = \sin^2(x)$ $\quad \mathrm{I} = [0\,;\pi]$

30 **a)** $f(x) = \dfrac{1}{1 + \sin(x)}$ $\quad \mathrm{I} = [0\,;\pi]$
b) $f(x) = (\sin(x) + 2)\sin(x)$ $\quad \mathrm{I} = \left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$

31 h est la fonction définie sur $[0\,;2\pi]$ par :
$$h(x) = (2 - \sin(x))\sin(x).$$
a) Déterminer $h'(x)$.
b) Expliquer pourquoi $h'(x)$ a le même signe que $\cos(x)$.
c) Dresser le tableau de variations de h sur $[0\,;2\pi]$.

32 $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction sinus dans un repère orthonormé.
Dans chaque cas, déterminer une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a.

a) $a = \dfrac{\pi}{2}$ $\qquad$ **b)** $a = \pi$ $\qquad$ **c)** $a = 2\pi$

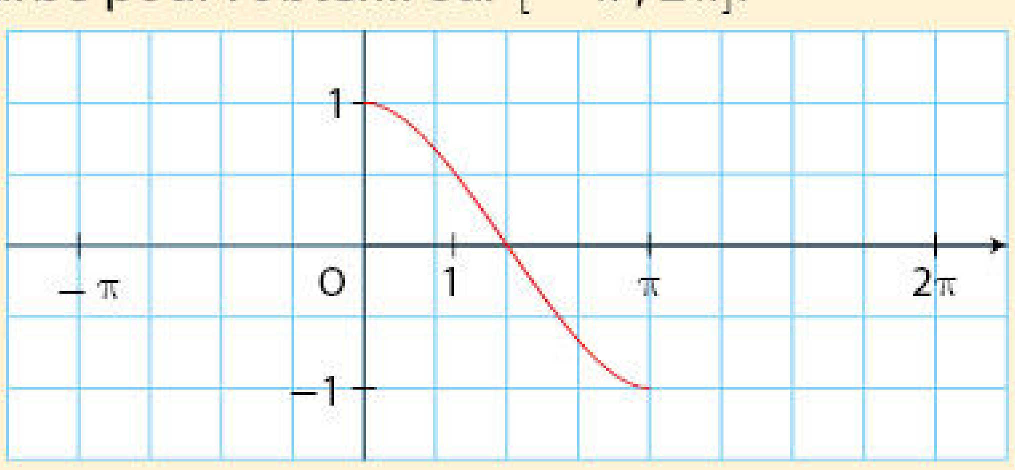
Étude de la fonction cosinus

Cours 2

Questions flash À l'oral

33 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = -\,2\cos(x) + 1.$$
Justifier mentalement que la fonction f est paire.

34 On a tracé ci-dessous la courbe représentative de la fonction cosinus sur l'intervalle $[0\,;\pi]$.
Expliquer oralement comment compléter cette courbe pour l'obtenir sur $[-\,\pi\,;2\pi]$.



35 La fonction cosinus est décroissante sur $[0\,;\pi]$.
Quel est son sens de variation sur $\left[-\dfrac{3\pi}{2}\,;-\pi\right]$?

36 θ est un nombre réel de l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{4}\,;\dfrac{3\pi}{4}\right[$.
Donner un encadrement de $\theta - \dfrac{\pi}{4}$ et en déduire le signe de $\cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

37 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \cos(\pi x + 3).$$
Exprimer $f(x + 2)$ en fonction de x et démontrer que la fonction f est périodique de période 2.

38 Juliette affirme : « La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \cos(4x)$ est périodique de période $\dfrac{\pi}{2}$ ».
A-t-elle raison ? Justifier.

39 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \cos(2x) + \cos(3x).$$
Voici ci-contre un écran de calcul formel.

1	f(x) := cos(2x) + cos(3x)
	→ f(x) := cos(2 x) + cos(3 x)
2	f(−x)
	→ cos(2 x) + cos(3 x)
3	f(x + 2π)
	→ cos(2 x) + cos(3 x)

a) Vérifier les résultats.
b) Quelles propriétés de la fonction f observe-t-on ainsi ?
c) Qu'en déduit-on pour la courbe représentative de f ?

40 Dans un repère orthogonal $(\mathrm{O}\,;\vec{i},\vec{j})$, $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction sinus et Γ celle de la fonction cosinus.
a) M est un point de Γ d'abscisse x et M′ un point de $\mathscr{C}$ d'abscisse $x + \dfrac{\pi}{2}$ (avec x nombre réel).
Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{MM'}}$.
b) En déduire que $\mathscr{C}$ est l'image de Γ par une translation de vecteur à préciser.

41 Dans chaque cas, déterminer la fonction dérivée de la fonction définie sur $\mathbb{R}$.
a) $f(x) = 2x - \cos(x)$ $\qquad$ **b)** $g(x) = x^2\cos(x)$
c) $h(x) = (\cos(x) - 1)\sin(x)$ $\qquad$ **d)** $k(x) = x + \cos^2(x)$

42 Démontrer que la fonction dérivée de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \sin(x)\cos(x)$ peut s'écrire sous la forme $g'(x) = 2\cos^2(x) - 1$.

43 Dans chaque cas, déterminer la fonction dérivée de la fonction définie sur I.
a) $g(x) = \dfrac{\cos(x)}{x}$ $\quad \mathrm{I} =]0\,;+\infty[$
b) $h(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$ $\quad \mathrm{I} = \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$

44 f est la fonction définie sur $[0\,;2\pi]$ par :

$$f(x)=\cos^2(x)-2\cos(x)+1.$$

1. Vérifier le résultat affiché sur cet écran de calcul formel.

1	Dérivée$(\cos^2(x)-2\ \cos(x)+1)$
○	Factoriser: $\mathbf{-2\ \sin(x)\ (\cos(x)-1)}$

2. a) Expliquer pourquoi $f'(x)$ est du signe de $\sin(x)$ sur $[0\,;2\pi]$. En déduire le signe de $f'(x)$ sur $[0\,;2\pi]$.
b) Dresser le tableau de variations de f sur $[0\,;2\pi]$.

Pour les exercices 45 et 46, déterminer la fonction dérivée de la fonction f et étudier son signe sur I.

45 a) $f(x)=\cos(x)+1$ $\qquad$ $I=[0\,;2\pi]$
b) $f(x)=2x+2\cos(x)$ $\qquad$ $I=\mathbb{R}$

46 a) $f(x)=\cos(x)-x$ $\qquad$ $I=\mathbb{R}$
b) $f(x)=3\cos^2(x)$ $\qquad$ $I=[0\,;\pi]$

47 f et g sont les fonctions définies par :
$f(x)=\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ et $g(x)=\dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$ sur $]0\,;\pi[$.
Dana affirme : « $f'(x)=\dfrac{1}{\cos^2(x)}$ et $g'(x)=\dfrac{1}{\sin^2(x)}$ ».
A-t-elle raison ? Justifier.

48 f est la fonction définie sur $[0\,;\pi]$ par :

$$f(x)=-\cos(x)\,(3+\cos(x)).$$

a) Déterminer la fonction dérivée de la fonction f.
b) Donner un encadrement de $3+2\cos(x)$ sur $[0\,;\pi]$.
c) En déduire le signe de $f'(x)$ sur $[0\,;\pi]$.
d) Dresser le tableau de variations de f sur $[0\,;\pi]$.

49 g est la fonction définie sur $[-\pi\,;\pi]$ par :

$$g(x)=\frac{1}{\cos(x)+2}.$$

a) Déterminer la fonction dérivée de g.
b) Étudier le signe de $g'(x)$ sur $[-\pi\,;\pi]$.
c) Dresser le tableau de variations de g sur $[-\pi\,;\pi]$.

50 $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction cosinus dans un repère orthonormé.
Dans chaque cas, déterminer une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a.
a) $a=-\dfrac{\pi}{2}$ $\qquad$ **b)** $a=0$ $\qquad$ **c)** $a=\pi$

51 Déterminer une équation de la tangente au point d'abscisse $\dfrac{\pi}{2}$ à la courbe $\mathscr{C}$ qui représente, dans un repère orthonormé, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\frac{\cos(x)}{2-\cos(x)}.$$

Équations et inéquations

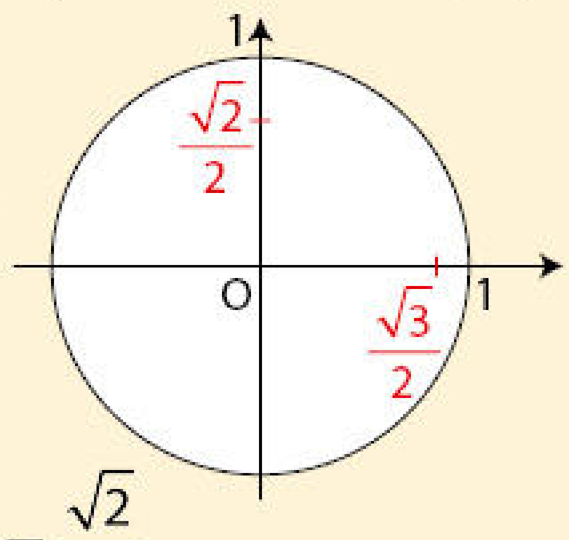
Cours 1 et 2

Questions flash — À l'oral

52 Donner mentalement la valeur exacte de :
a) $\cos(\pi)$ **b)** $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ **c)** $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ **d)** $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ **e)** $\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$

53 Donner mentalement la valeur exacte de :
a) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ **b)** $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ **c)** $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ **d)** $\sin(\pi)$ **e)** $\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$

54 S'aider de ce cercle trigonométrique pour indiquer mentalement les solutions dans $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ de l'équation :



a) $\cos(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **b)** $\sin(x)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Pour les exercices 55 et 56, résoudre chaque équation dans l'intervalle $[-\pi\,;\pi]$.

55 a) $\cos(x)=-1$ **b)** $\cos(x)=2$ **c)** $\cos(x)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

56 a) $\sin(x)=-1$ $\quad$ **b)** $\sin(x)=0$ $\quad$ **c)** $\sin(x)=\dfrac{1}{2}$

Pour les exercices 57 et 58, utiliser la calculatrice pour déterminer l'arrondi au dixième de la solution dans $[0\,;\pi]$ de chaque équation :

57 a) $\cos(x)=0{,}1$ $\qquad$ **b)** $\cos(x)=-\dfrac{3}{4}$

58 a) $\sin(x)=0{,}3$ $\qquad$ **b)** $\sin(x)=\dfrac{2}{3}$

59 Résoudre chaque équation dans $[-\pi\,;\pi]$.
a) $1+2\sin(x)=0$ $\qquad$ **b)** $2\cos(x)-\sqrt{3}=0$

60 Résoudre dans l'intervalle $[-\pi\,;\pi]$ l'équation :

$$\sin(x)\cos(x)=0$$

Vidéo

JAICOMPRIS.COM — Cet exercice est corrigé en vidéo

61 Résoudre dans l'intervalle $[-\pi\,;\pi]$:
a) $\cos(x)=-\dfrac{1}{2}$ $\qquad$ **b)** $\cos(x)<-\dfrac{1}{2}$

Pour les exercices 62 et 63, résoudre chaque inéquation dans l'intervalle $[-\pi\,;\pi]$.

62 a) $\cos(x)\geqslant 0$ **b)** $\cos(x)<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **c)** $\cos(x)>-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

63 a) $\sin(x)\leqslant 0$ **b)** $\sin(x)>\dfrac{1}{2}$ **c)** $\sin(x)<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

EXO Exercices interactifs

Pour se tester

64 QCM **Dans chaque cas, donner la réponse exacte sans justifier.**

		A	B	C	D
1	Les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période …	2	π	$\dfrac{\pi}{2}$	2π
2	Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction sinus admet un axe de symétrie d'équation …	$x = -2\pi$	$x = -\pi$	$x = \dfrac{3\pi}{2}$	$x = 3\pi$
3	g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \sin(x) + \cos(x)$. Pour tout réel x, $g'(x)$ est égal à …	$\cos(x) + \sin(x)$	$\cos(x) - \sin(x)$	$\sin(x) - \cos(x)$	$2\sin(x)$
4	Dans l'intervalle $[-\pi\,;\pi]$, l'équation $\cos(x) = \dfrac{3}{4}$ …	n'a pas de solution	a une seule solution	a deux solutions	a une infinité de solutions

65 QCM **Dans chaque cas, donner la (ou les) réponse(s) exacte(s) sans justifier.**

		A	B	C	D
1	La fonction sinus est …	croissante sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$	croissante sur $\left[\dfrac{3\pi}{2}\,;\dfrac{5\pi}{2}\right]$	croissante sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$	croissante sur $\left[-\dfrac{3\pi}{2}\,;-\dfrac{\pi}{2}\right]$
2	La fonction cosinus est …	croissante sur $[0\,;\pi]$	croissante sur $[-\pi\,;0]$	décroissante sur $[2\pi\,;3\pi]$	décroissante sur $[-\pi\,;0]$
3	f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin^2(x) - 2\sin(x)$. Pour tout réel x, $f'(x)$ est égal à …	$\cos^2(x) - 2\cos(x)$	$2\sin(x)\cos(x) + 2\cos(x)$	$2\cos(x)(\sin(x) - 1)$	$2\sin(x)\cos(x) - 2\cos(x)$
4	h est la fonction définie sur $[0\,;\pi]$ par : $h(x) = \dfrac{\sin(x)}{2 + \sin(x)}$. Alors …	$h'(x) \geqslant 0$ sur $[0\,;\pi]$	$h'(x) \geqslant 0$ sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$	$h'(x) \leqslant 0$ sur $\left[\dfrac{\pi}{2}\,;\pi\right]$	$h'(x) \leqslant 0$ sur $[0\,;\pi]$

66 Vrai/Faux **Dans chaque cas, dire si l'affirmation est vraie ou fausse en justifiant.**

f est la fonction définie sur $[-\pi\,;\pi]$ par $f(x) = \sin(x) - \dfrac{x}{2}$. $\mathscr{C}$ est sa courbe représentative dans un repère.

1. **Affirmation** : la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[-\pi\,;\pi]$, et $f'(x) = \cos(x) - \dfrac{1}{2}$.
2. **Affirmation** : la fonction f est croissante sur $[0\,;\pi]$.
3. **Affirmation** : la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $\dfrac{\pi}{2}$ a pour équation $y = -\dfrac{1}{2}x + 1$.
4. **Affirmation** : dans l'intervalle $]0\,;\pi]$, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution.

Vérifiez vos réponses : p. 529

67 Mettre en évidence des translations

1. a désigne un nombre réel.
f et g sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sin(x) \quad \text{et} \quad g(x) = a + \sin(x).$$

$\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont les courbes représentatives de f et g dans un repère orthogonal $(\mathrm{O}\,;\,\vec{i},\,\vec{j})$.
On se propose de démontrer qu'il existe une translation qui transforme la courbe $\mathscr{C}_f$ en la courbe $\mathscr{C}_g$.

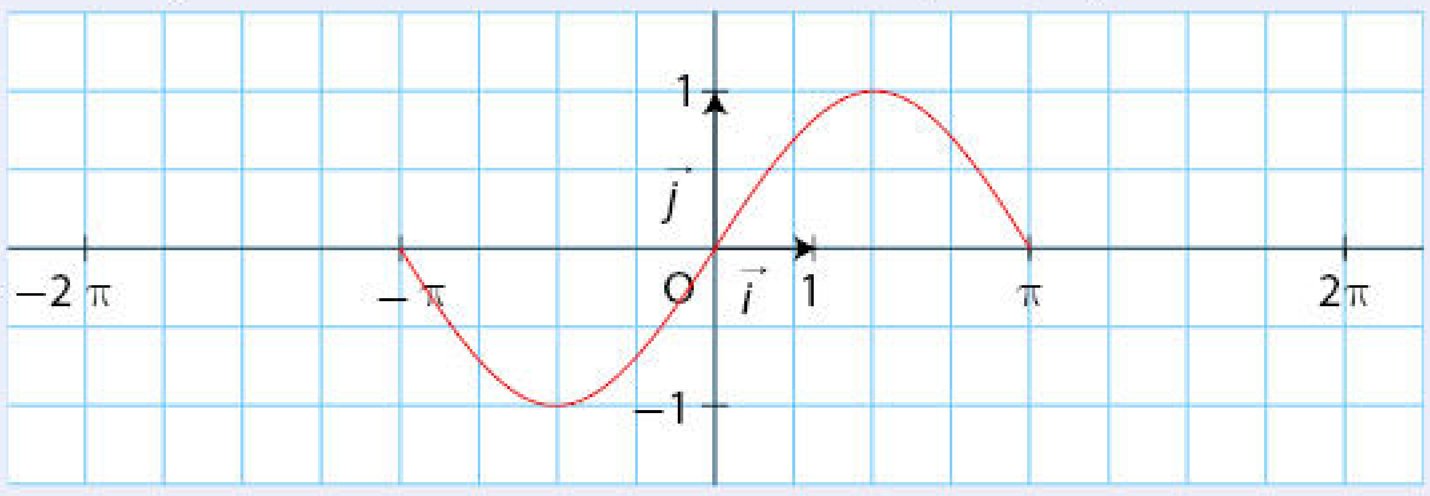
Rédiger cette démonstration en suivant le guide ci-dessous.

(1) Préciser les données : M est le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse x et M′ est le point de $\mathscr{C}_g$ d'abscisse x, donc $\mathrm{M}(x\,;\,\ldots)$ et $\mathrm{M}'(x\,;\,\ldots)$.
(2) Étudier un vecteur : alors $\overrightarrow{\mathrm{MM}'}(\ldots\,;\,\ldots)$.
(3) En tirer une conséquence : donc le point M′ est l'image du point M par la translation de vecteur $\ldots\vec{j}$.
(4) Conclure : la courbe $\mathscr{C}_g$ est l'image de la courbe $\mathscr{C}_f$ par la translation de vecteur $\ldots$.

2. b désigne un nombre réel et h est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \sin(x + b)$.
$\mathscr{C}_h$ est la courbe représentative de h dans le repère précédent.
Démontrer que $\mathscr{C}_h$ est l'image de $\mathscr{C}_f$ par une translation de vecteur à préciser.

Conseil
2. Noter M le point d'abscisse x de $\mathscr{C}_f$ et M′ le point d'abscisse $x - b$ de $\mathscr{C}_h$.
Puis déterminer leurs coordonnées.

3. Application
Voici la courbe représentative de la fonction f sur $[-\pi\,;\,\pi]$.



Reproduire ce graphique et compléter la courbe de la fonction f sur l'intervalle $[-2\pi\,;\,2\pi]$.
Tracer ensuite les courbes des fonctions $g : x \mapsto 2 + \sin(x)$ et $h : x \mapsto \sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

68 Étudier la position d'une courbe par rapport à l'une de ses tangente

Dans un repère orthonormé, $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(x)$.
On se propose d'étudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à sa tangente T au point d'abscisse $\dfrac{\pi}{2}$.

Résoudre ce problème en suivant le guide ci-dessous.

(1) Déterminer une équation de la tangente T.
(2) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) - \left(-x + \dfrac{\pi}{2}\right)$.
Étudier les variations de la fonction g et en déduire son signe.
(3) Conclure : expliquer pourquoi la courbe $\mathscr{C}$ traverse la tangente T au point d'abscisse $\dfrac{\pi}{2}$ et rédiger une phrase de conclusion.

Conseils
(1) Une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a est :
$y = f'(a)(x - a) + f(a)$
(2) Déterminer $g'(x)$ et ne pas oublier que sur $\mathbb{R}$, $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$.

Étudier des situations

69 **PARCOURS DIFFÉRENCIÉS**

Parcours 1

Le déplacement, en m, d'un piston dans un moteur à partir de sa position de départ est modélisé par la fonction h définie sur $\left[0\,;\,\frac{2\pi}{13}\right]$ par $h(t) = 0{,}05\cos(13t)$ où t est le temps, en s.

La vitesse du piston à l'instant t est $V(t) = h'(t)$.

Déterminer les vitesses maximum et minimum du piston et les instants où elles sont atteintes.

Parcours 2

La vitesse du flux d'air, en $L.s^{-1}$, au cours de la respiration chez une personne au repos est modélisée par la fonction f définie sur $[0\,;5]$ par $f(t) = 0{,}6\sin\left(\frac{2\pi}{5}t\right)$ où t est le temps, en s.

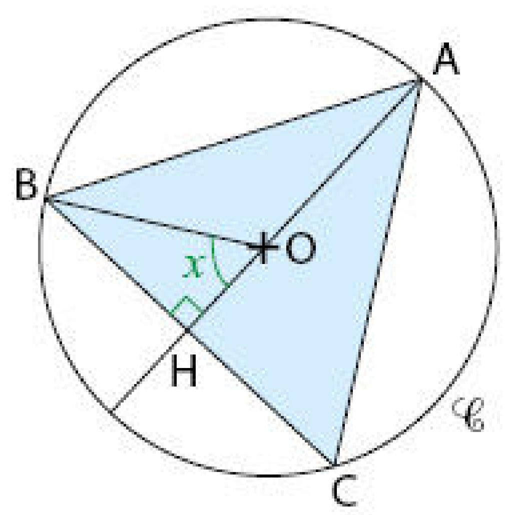
La vitesse du flux est positive lorsque la personne respire.

a) Résoudre dans $[0\,;2\pi]$ l'inéquation $\sin(X) \geqslant 0$.

b) Résoudre dans $[0\,;5]$ l'inéquation $f(t) \geqslant 0$.

c) À quels instants cette personne inspire-t-elle ?

70 A est un point donné d'un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et rayon 1. B et C sont deux points variables du cercle $\mathscr{C}$ tels que le triangle ABC soit isocèle en A. H est le pied de la hauteur issue de A.



On note $x = \widehat{HOB}$ avec x en radian et $x \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$.

1. a) Exprimer BC et AH en fonction de $\sin(x)$ et $\cos(x)$.

b) En déduire, en fonction de x, l'aire $S(x)$ du triangle ABC, en unité d'aire.

2. a) Montrer que pour tout réel x de $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$,

$$S'(x) = (1 + \cos(x))\,(2\cos(x) - 1).$$

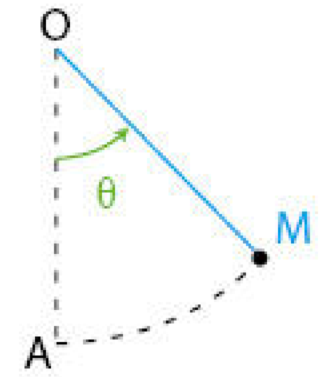
b) Expliquer pourquoi $2\cos(x) - 1$ est positif sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{3}\right]$ et négatif sur $\left[\frac{\pi}{3}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$.

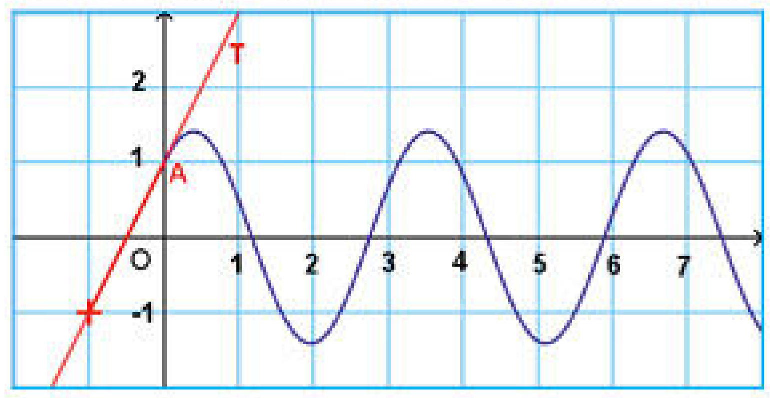
c) Dresser le tableau de variations de S.

d) Pour quelle valeur de x l'aire du triangle ABC est-elle maximum ? Indiquer ce maximum.

Quelle est alors la nature du triangle ABC ?

71 Au cours d'une expérience, on a enregistré l'abscisse angulaire θ d'un pendule en fonction du temps t.





On a tracé la courbe représentative de la fonction θ et sa tangente T à l'instant $t = 0$ dans le repère ci-dessus.

1. Lire graphiquement $\theta(0)$ et $\theta'(0)$.

2. La loi d'isochronisme des petites oscillations du pendule permet d'établir que pour tout réel $t \geqslant 0$,

$$\theta(t) = \sqrt{2}\sin(at + b)$$

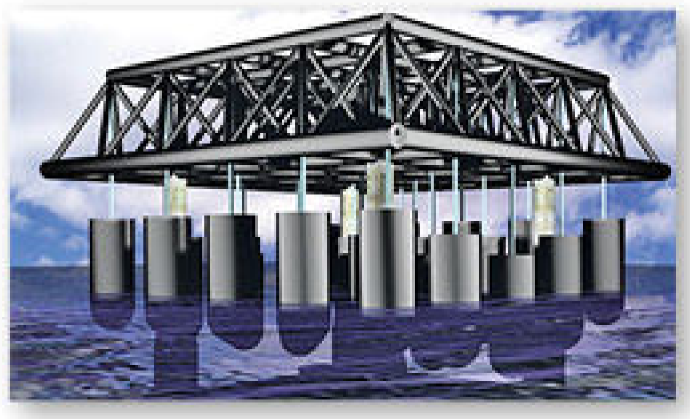
où a et b sont des nombres réels $\left(0 \leqslant b \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$.

a) Déterminer $\theta'(t)$.

b) S'aider de la question **1.** pour calculer b, puis a.

c) Démontrer que pour tout réel $t \geqslant 0$, $\theta(t + \pi) = \theta(t)$.

72 L'université de Manchester a mis au point une plate-forme équipée de flotteurs pour capturer l'énergie des vagues.



L'oscillation de la houle à la surface de l'eau induit l'oscillation verticale des flotteurs. La distance d du fond marin au centre de flottaison d'un flotteur est donnée en fonction du temps t sur $[0\,;4]$ par :

$$d(t) = 1{,}5\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + 50$$

où $d(t)$ est exprimé en mètre et t en seconde.

1. Déterminer l'amplitude du mouvement du flotteur.

2. a) Déterminer $d'(t)$ sur $[0\,;4]$.

b) Expliquer pourquoi $d'(t)$ est négatif sur $[0\,;2]$ et positif sur $[2\,;4]$.

c) Dresser le tableau de variations de d sur $[0\,;4]$.

d) Sur quel intervalle de temps le flotteur monte-t-il ?

3. On se propose de déterminer à quel(s) instant(s) de l'intervalle $[0\,;4]$, la vitesse du flotteur est maximum.

On rappelle que la vitesse à l'instant t est $v(t) = d'(t)$.

a) Déterminer la dérivée seconde $d''(t)$ sur $[0\,;4]$.

b) Donner un encadrement de $\frac{\pi}{2}t$ pour $t \in [0\,;4]$, puis résoudre l'équation $\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) = 0$ dans cet intervalle.

c) Dresser le tableau de variations de la vitesse du flotteur sur $[0\,;4]$. En déduire l'instant t de $[0\,;4]$ où la vitesse du flotteur est maximum.

73 Un battement de cœur se décompose en deux phases :

- la systole, période de contraction du cœur, avec éjection du sang dans les artères,
- la diastole, période de relâchement du cœur.

Chez un patient, le débit de sang pendant la systole est donné en fonction du temps t, en seconde, écoulé depuis la fin du cycle précédent par :

$d(t) = 0{,}1\sin(4\pi t)$ où $d(t)$ est exprimé en L.s^{-1}.

1. Montrer que la fonction d est périodique de période $\frac{1}{2}$.

2. Durant la systole, le débit croit puis revient à 0 L.s^{-1}.

a) Déterminer la durée de la systole et celle de la diastole.

b) Déterminer l'instant t où le débit est maximum.

3. a) Dresser le tableau de variations de d sur $\left[0\ ;\ \frac{1}{4}\right]$.

b) Afficher à l'écran de la calculatrice la courbe de la fonction d sur $[0\ ;1]$.

74 g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \sin(x)\cos(x).$$

1. a) Démontrer que g est périodique de période π.

b) Démontrer que g est une fonction impaire.

2. a) Étudier le sens de variation de g sur $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

b) Dresser le tableau de variations de g sur $\left[-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{3\pi}{2}\right]$.

Résoudre des équations et inéquations

75 **PARCOURS DIFFÉRENCIÉS**

Parcours 1

Dresser le tableau de signes de $\sqrt{3} - 2\cos(x)$ sur l'intervalle $[-\pi\ ;\pi]$.

Parcours 2

(E) est l'inéquation $1 + 2\sin(x) \geqslant 0$ où x désigne un nombre réel de $[-\pi\ ;\pi]$.

a) Utiliser un cercle trigonométrique pour déterminer les réels x de $[-\pi\ ;\pi]$ tels que $\sin(x) = -\frac{1}{2}$.

b) S'aider du cercle trigonométrique pour résoudre l'inéquation **(E)**.

76 Résoudre chaque inéquation dans $[-\pi\ ;\pi]$.

a) $2\cos(x) - 1 \leqslant 0$ **b)** $\sqrt{2}\sin(x) + 1 > 0$

77 Résoudre dans $[-\pi\ ;\pi]$ l'équation :

$$(2\sin(x) + \sqrt{3})(\cos^2(x) - 1) = 0.$$

78 **a)** Utiliser un cercle trigonométrique pour résoudre l'équation $\cos(x) = \sin(x)$ dans $[-\pi\ ;\pi]$.

b) En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation $\cos(x) > \sin(x)$ dans $[-\pi\ ;\pi]$.

79 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x - \cos(x).$$

a) Montrer que f est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$.

b) Démontrer que l'équation $x - \cos(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

Donner l'arrondi au centième de α.

80 On se propose de résoudre dans $[-\pi\ ;\pi]$ l'inéquation $(\mathbf{I})$: $(2\cos(x) + \sqrt{3})(1 + \sin(x)) \leqslant 0$.

a) Utiliser un cercle trigonométrique pour déterminer le signe de $2\cos(x) + \sqrt{3}$ sur $[-\pi\ ;\pi]$.

b) En déduire le tableau de signes sur $[-\pi\ ;\pi]$ du produit $(2\cos(x) + \sqrt{3})(1 + \sin(x))$.

c) Donner l'ensemble des solutions de l'inéquation $(\mathbf{I})$.

S'entraîner à la logique

→ p. 525

81 **Quantificateurs universel et existentiel**

f est la fonction définie sur $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = \sin(x)$.

Chacune des propositions suivantes est-elle vraie ou fausse ? Justifier la réponse.

a) Pour tout réel x de $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$, $f(x) \geqslant x$.

b) Il existe un réel positif a tel que l'équation $f(x) = a\,x$ n'admet aucune solution.

c) Il existe une solution strictement positive à l'équation $f(x) = x$.

82 **Implications**

On considère l'équation **(E)** : $\sin(x) = \frac{x}{2}\ (x \in \mathbb{R})$.

a) Démontrer que si x_0 est solution de **(E)**, alors x_0 appartient à l'intervalle $[-2\ ;2]$.

b) Démontrer que si x_0 est solution de **(E)**, alors $-x_0$ est solution de **(E)**.

83 MODÉLISATION AVEC LE TABLEUR

Tice

Objectif
Modéliser une situation, puis comparer les modèles.

Ce tableau indique la durée moyenne d'ensoleillement par jour dans une ville durant une année.

Mois	Janv	Fév	Mars	Avril	Mai	Juin
Durée moyenne d'ensoleillement	08:30	09:59	11:51	13:49	15:32	16:27

Mois	Juillet	Août	Sept	Oct	Nov	Déc
Durée moyenne d'ensoleillement	16:01	14:30	12:40	10:42	08:58	08:01

1. Modèle 1

a) Réaliser et compléter la feuille de calcul ci-dessous.

	A	B	C	D
1	**Mois**	**Rang du mois**	**Durée d'ensoleillement**	**Durée** (en h)
2	janvier	1	08:30	8,5
3	février	2	09:59	9,983

Pour convertir le format « heure:minute » (cellule C2) en heure, saisir la formule =C2*24 en cellule D2.

b) Insérer un diagramme de type XY (dispersion) avec les colonnes B en abscisse et D en ordonnée.

c) Cliquer sur un point du nuage, cliquer sur Insérer une courbe de tendance… et choisir l'option Polynomiale de degré 2.
Afficher son équation, cliquer sur cette équation et dans Format d'étiquette choisir Nombre 3 décimales.

2. Modèle 2

a) Cette fois, insérer une courbe de tendance en choisissant l'option Polynomiale de degré 4.
Afficher son équation (en affichant les coefficients avec 3 décimales).

b) Cet ajustement paraît-il meilleur que le modèle 1 ?

3. Modèle 3

La forme du nuage peut donner à penser à un ajustement par une sinusoïde.
On modélise désormais la situation à l'aide de la fonction g, définie sur $[1\,;12]$ par :

$$g(x) = 4\sin\left(\frac{\pi}{6}(x-p)\right) + 11{,}983 \text{ où } p \text{ est un réel de l'intervalle } [0\,;3].$$

a) Déterminer p en utilisant l'ensoleillement du mois de février arrondi au millième.

b) Déterminer une période de g.

4. Comparaison des modèles

a) Déterminer les durées obtenues avec les modèles 1, 2 et 3 dans les colonnes E, F, G de la feuille de calcul.

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Mois**	**Rang du mois**	**Durée d'ensoleillement**	**Durée** (en h)	**Modèle 1**	**Modèle 2**	**Modèle 3**
2	janvier	1	08:30	8,5	8,041	8,523	8,519
3	février	2	09:59	9,983			

b) Quel modèle semble être le plus approprié ? Avec ce modèle, estimer la durée moyenne d'ensoleillement dans cette ville en juin de l'année suivante.

84 Trouver des axes de symétrie

Représenter | Raisonner | Calculer

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \cos^2(x) + 2\cos(x) + 2.$$

1. À l'aide d'une identité remarquable, démontrer que pour tout réel x, $f(x) \geqslant 1$.

2. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

a) Vérifier que la fonction f est périodique de période 2π.

b) Montrer que l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \pi$ sont des axes de symétrie de $\mathscr{C}$.

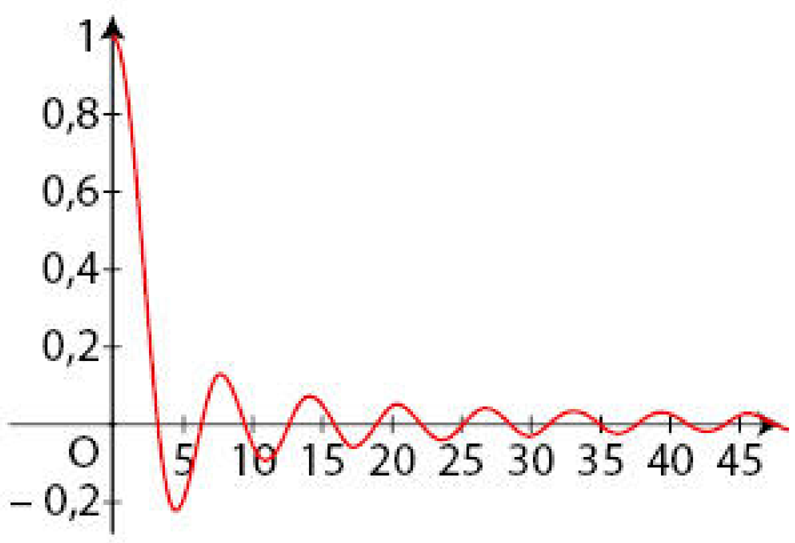
3. a) Étudier les variations de la fonction f sur $[0 ; \pi]$. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ sur l'intervalle $[0 ; \pi]$.

b) À l'aide de transformations, compléter la courbe $\mathscr{C}$ sur l'intervalle $[-2\pi ; 2\pi]$.

85 Étudier une limite

Raisonner | Communiquer

Voici dans un repère, la courbe représentative de la fonction g définie sur $[0 ; +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$.



a) Conjecturer la limite de la fonction g en $+\infty$.

b) Montrer que pour tout réel $x > 0$, $-\dfrac{1}{x} \leqslant g(x) \leqslant \dfrac{1}{x}$.

Justifier alors la conjecture émise en **a)**.

86 Localiser un point

Problème ouvert

Chercher | Modéliser | Raisonner

$\mathscr{C}$ est un demi-cercle de diamètre [AB], de centre O et de rayon R. M est un point de $\mathscr{C}$ ($M \neq B$) et P est le point de la tangente en B au demi-cercle $\mathscr{C}$ tel que la droite (PM) soit perpendiculaire à cette tangente.

Existe-t-il un point M de $\mathscr{C}$ tel que $AM = 2\,MP$?

87 Studying the sign of a product

Raisonner | Calculer | Communiquer

h is the function defined on $[0 ; 2\pi]$ by :

$$h(x) = \cos^2(x) - \cos(x).$$

a) Draw the representative curve of the function h on the calculator screen and conjecture the direction of variation this function.

b) Check this conjecture by drawing up the variations table of the function h.

88 Imaginer une stratégie

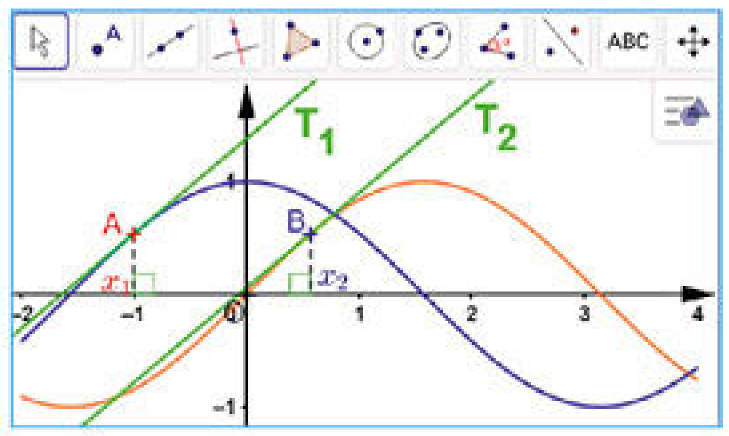
Chercher | Raisonner | Communiquer

Pour tout réel $x \geqslant 0$, $g(x) = x^2 - 2\cos(x)$.

Démontrer que la fonction g est croissante sur $[0 ; +\infty[$.

89 Porter un regard critique

Raisonner | Calculer | Communiquer



Félix affirme : « Je pense, comme l'indique ma construction ci-dessus sur $[-2 ; 4]$ que, pour deux tangentes parallèles T_1 et T_2 à chacune des courbes des fonctions cosinus et sinus, en deux points A et B d'abscisses respectives x_1 et x_2, l'écart entre x_1 et x_2 est toujours $\dfrac{\pi}{2}$ ».

A-t-il raison ? Expliquer.

90 Prendre des initiatives

Chercher | Représenter | Raisonner

Démontrer que l'équation $\sin(x) = 3x + 2$ admet une unique solution dans l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{2} ; 0\right]$.

91 Utiliser un contre-exemple

Chercher | Calculer | Communiquer

(**E**) est l'équation $\sin(x)\,(2\cos^2(x) - 1) = 0$.

Lalie affirme : « Cette équation admet exactement quatre solutions dans $[-\pi ; \pi]$, qui sont $-\dfrac{\pi}{4}$, 0, $\dfrac{\pi}{4}$, π ».

A-t-elle raison ? Justifier.

92 Assembler des briques

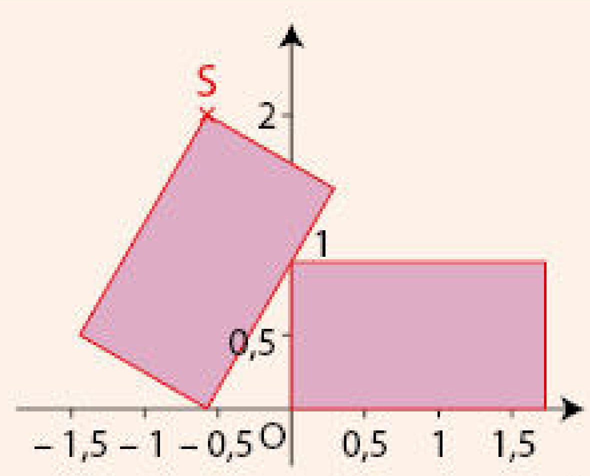
Narration de recherche

Chercher | Modéliser | Communiquer

Rédiger les différentes étapes de la recherche, sans omettre les fausses pistes et les changements de méthode.

Problème

Deux briques de dimensions identiques $1 \times \sqrt{3}$ sont disposées comme l'indique la figure ci-contre.



Déterminer la hauteur maximum que l'on peut atteindre.

93 Déterminer un volume Algo

60 min

D'après Bac, Polynésie 2018

Partie A : modélisation de la forme de l'ampoule

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points :

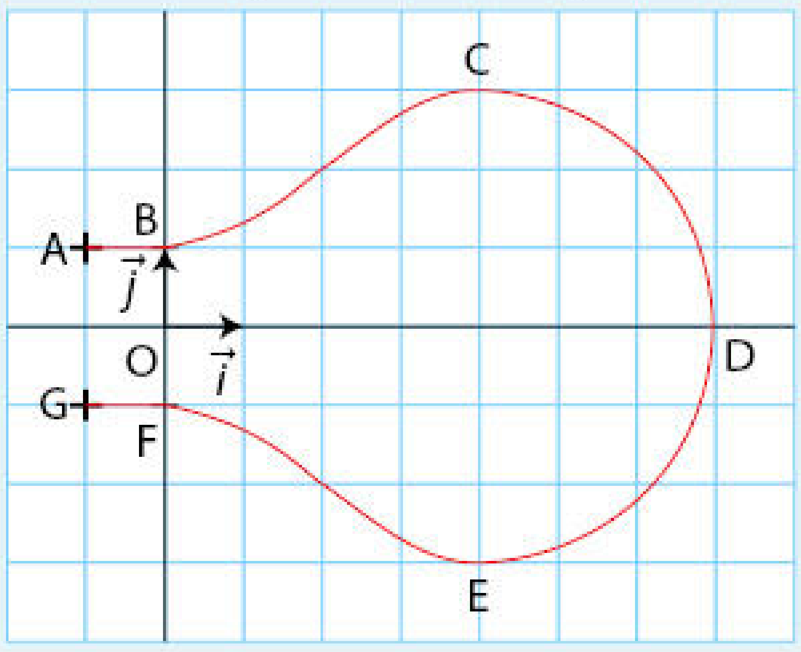
$A(-1 ; 1)$, $B(0 ; 1)$, $C(4 ; 3)$, $D(7 ; 0)$, $E(4 ; -3)$, $F(0 ; -1)$ et $G(-1 ; -1)$.

On modélise la section d'une ampoule par un plan passant par son axe de révolution à l'aide de la figure ci-dessous.

La courbe est symétrique par rapport à l'axe des abscisses.

La partie située au-dessus de l'axe des abscisses se décompose en trois portions :

- entre A et B : représentation graphique de la fonction constante h définie sur $[-1 ; 0]$ par $h(x) = 1$;
- entre B et C : représentation graphique d'une fonction f définie sur $[0 ; 4]$ par $f(x) = a + b\sin\left(c + \frac{\pi}{4}x\right)$, où a, b et c sont des réels non nuls $\left(c \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]\right)$;



- entre C et D : un quart de cercle de diamètre [CE].

1. a) Pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; 4]$, déterminer $f'(x)$.

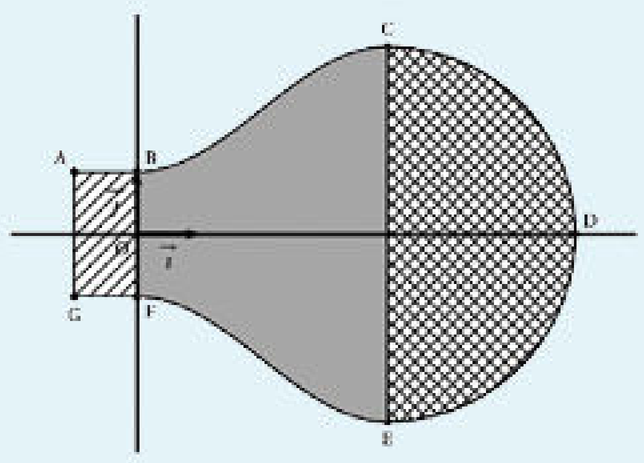
b) On impose que les tangentes en B et C à la représentation graphique de la fonction f soient parallèles à l'axe des abscisses. Déterminer la valeur du réel c.

2. Déterminer les réels a et b.

Guide de résolution
1. b) Traduire les positions des tangentes en B et C par $f'(0) = 0$ et $f'(4) = 0$.
2. La courbe qui représente la fonction f passe par les points B et C. Écrire puis résoudre un système de deux équations dont les inconnues sont a et b.

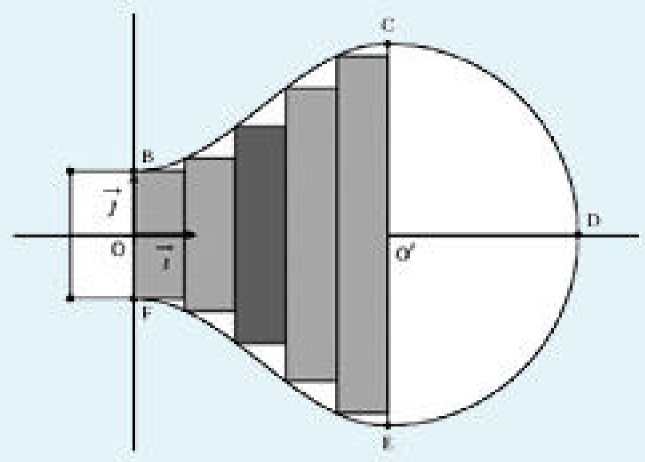
Partie B : approximation du volume de l'ampoule

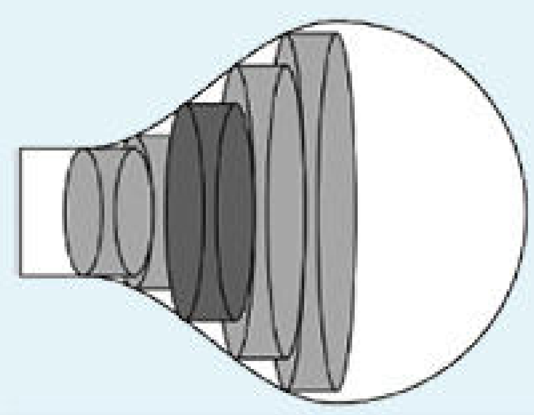
Par rotation de la figure précédente autour de l'axe des abscisses, on obtient un modèle de l'ampoule. On la décompose en trois parties comme illustré ci-contre (vue dans le plan (BCE)).



On admet que, pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; 4]$,

$$f(x) = 2 - \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)$$





1. Calculer le volume :

a) du cylindre de section le rectangle ABFG,

b) de la demi-sphère de section le demi-disque de diamètre [CE].

2. On partage le segment [OO′] en n segments de même largeur $\frac{4}{n}$, puis on construit n cylindres de même hauteur $\frac{4}{n}$.

a) Cas particulier : on choisit $n = 5$.

Calculer le volume du troisième cylindre, en gris foncé. *Arrondir au centième.*

b) Cas général : n désigne un entier naturel quelconque non nul.

On approche le volume du solide de section BCEF par la somme des volumes des n cylindres créés en choisissant une valeur de n suffisamment grande.

Au début de cet algorithme, on affecte la valeur 0 à la variable V. Comment le compléter de sorte qu'à la fin de son exécution, la variable V contienne la somme des volumes des n cylindres créés lorsque l'on saisit n ?

```
Pour k allant de … à …
  | V ← V + …
Fin Pour
```

Guide de résolution
2. a) Le volume d'un cylindre est $\pi r^2 h$.
Ici, la hauteur est $h = \frac{4}{5}$, le rayon r est l'image par f du réel $\frac{4}{5} \times 2$.

Se préparer À L'ORAL

94 Présenter un exposé

a) Quelles sont les ressemblances, quelles sont les différences, entre les fonctions sinus et cosinus ?
b) Dans un exposé oral de 10 min, présenter ces idées en illustrant par des propriétés ou des exemples précis.

95 Travailler les compétences orales

▶ **ANTICIPER LES QUESTIONS DU JURY**

1. Préparation de la restitution orale (5 min)
Par groupe de 4, résoudre l'exercice ci-dessous ; chaque élève travaille sur l'une des propositions.
2. Jeu de rôle (30 min)
Chaque élève présente son résultat à l'oral (2 min), pendant que les trois autres composent le jury. Chaque juré pose une question au candidat (5 min).

Énoncé : f est la fonction définie sur $[-\pi ; \pi]$ par :

$$f(x) = \sin(x) - \frac{3x}{4}.$$

Répondre par Vrai ou Faux en justifiant.
a) f est une fonction impaire.
b) Pour tout réel x de $[-\pi ; \pi]$,

$$f'(x) = \cos(x).$$

c) f est une fonction croissante sur $[0 ; \pi]$.
d) L'équation $f(x) = 0$ admet trois solutions dans l'intervalle $[-\pi ; \pi]$.

96 Travailler l'oral en binôme

En binôme, lire l'exercice ci-dessous puis se répartir les deux propositions.
Chaque élève présente sa réponse à l'oral (3 min) à l'autre élève qui valide ou non la réponse. En cas de non-validation, les deux élèves étudient ensemble la proposition pour accord.

Énoncé : dans un repère, $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sin(x)\cos(x).$$

Répondre par Vrai ou Faux en justifiant.
a) L'origine du repère est un centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}$.
b) Le point A de coordonnées $\left(\frac{\pi}{2} ; 0\right)$ est un centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}$.

97 Travailler l'oral en groupe

Résoudre cet exercice en petit groupe, puis désigner un rapporteur qui présente les résultats à l'oral.

Énoncé : f est la fonction définie sur $]0 ; \pi[$ par :

$$f(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

f est le quotient de deux fonctions dérivables sur $]0 ; \pi[$ donc elle est dérivable sur $]0 ; \pi[$.
Démontrer que pour tout réel x de $]0 ; \pi[$,

$$f'(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}.$$

98 Communiquer en groupe

Par groupe de 4, résoudre l'exercice ci-dessous puis se répartir les questions.
Chaque élève présente la réponse à sa question à l'oral (3 min) au groupe des trois autres qui l'écoutent et veillent à la précision de la réponse, du vocabulaire, des notations.

Énoncé : f est la fonction définie sur $[0 ; \pi]$ par :

$$f(x) = 2\sin(x) - 1.$$

a) Dresser le tableau de variations de la fonction f.
b) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

99 Présenter une résolution en trinôme

Résoudre cet exercice en trinôme, puis se répartir les questions et en présenter les résultats à l'oral.

Pendant les mois de juillet et août, la consommation, en m^3, en eau d'un village est modélisée par la fonction C définie sur $[1 ; 62]$ par :

$$C(t) = 500 - \frac{1\,000}{\pi}\cos\left(\frac{1}{30}\pi t\right)$$ où t est l'instant, en jour.

a) Déterminer la quantité d'eau consommée le 1er juillet. *Arrondir à l'unité.*
b) Tracer la courbe représentative de la fonction C à l'écran d'une calculatrice sur $[1 ; 62]$. Justifier la présence d'un maximum que l'on déterminera.
c) Démontrer que l'équation $C(t) = 313$ admet deux solutions distinctes α et β l'intervalle $[1 ; 62]$.
Donner l'arrondi à l'unité de α, puis de β.

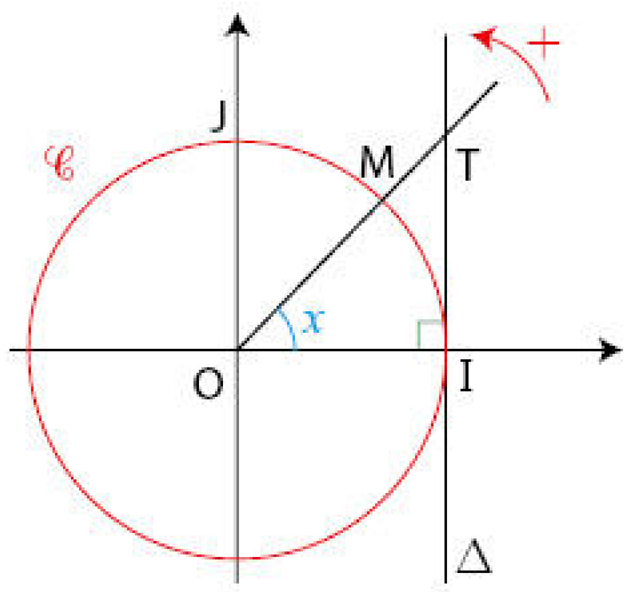
100 Fonction tangente

Partie A

$(O\,;\,I,\,J)$ est un repère orthonormé direct d'origine O et $\mathscr{C}$ est le cercle trigonométrique de centre O.

Δ est la perpendiculaire à (OI) en I et M est le point de $\mathscr{C}$ image d'un réel $x \neq \frac{\pi}{2}$.

Déterminer, en fonction de x, les coordonnées du point d'intersection T des droites (OM) et Δ.



Partie B

La fonction tangente est définie pour $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ (avec $k \in \mathbb{Z}$) par $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

On se propose d'étudier des propriétés de cette fonction.

1. Un élément de symétrie

On note Γ la courbe représentative de la fonction tangente dans un repère orthogonal $(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j})$.

Démontrer que le point O est un centre de symétrie de Γ.

2. Étude sur l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$

a) La fonction tangente est dérivable sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ comme quotient de deux fonctions dérivables sur cet intervalle.

Montrer que $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$ pour tout x de l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$.

b) Déduire de la question **a)** le sens de variation de la fonction tangente sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$.

c) Étudier la limite de la fonction tangente en $\frac{\pi}{2}$, puis dresser son tableau de variations sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$.

3. Courbe représentative

a) Dans un repère orthogonal, représenter à la main une allure de la courbe Γ sur l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$.

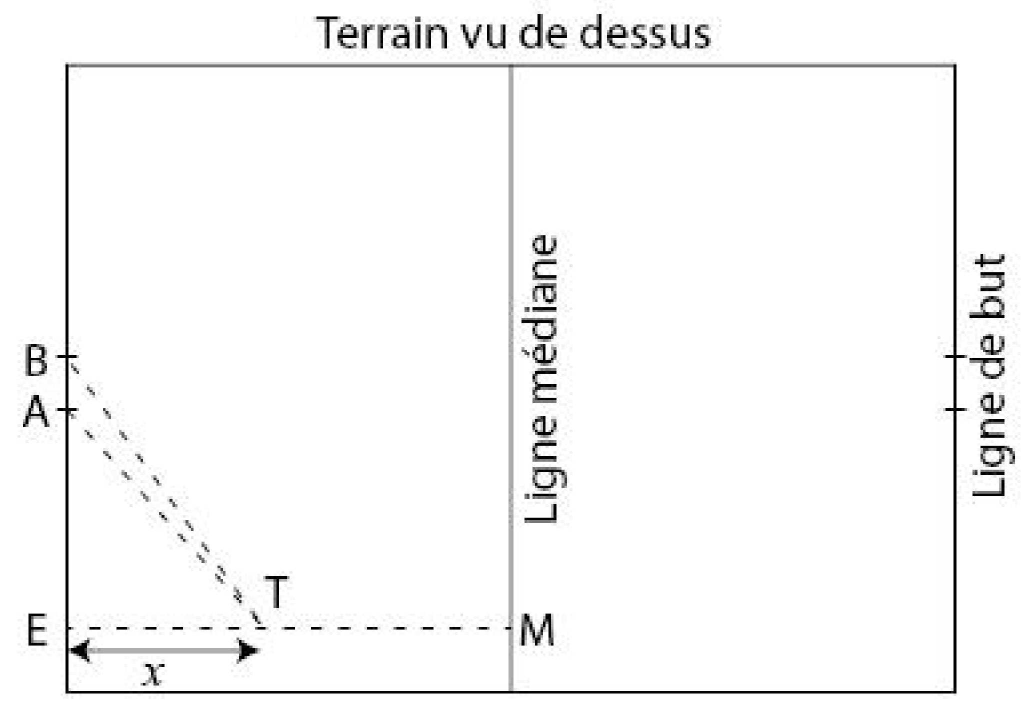
b) En déduire la courbe représentative de la fonction tangente sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$.

c) Montrer que la fonction tangente est périodique de période π.

d) Compléter la courbe Γ sur $\left]-\frac{3\pi}{2}\,;\,-\frac{\pi}{2}\right[$ et sur $\left]\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{3\pi}{2}\right[$.

101 Application de la fonction tangente

Lors d'un match de rugby de la Coupe du Monde en 2019 au Japon, un joueur doit transformer un essai qui a été marqué au point E situé sur la droite (AB), à l'extérieur du segment [AB].



La transformation est réussie si le ballon passe entre les poteaux repérés par les points A et B.

Le joueur place le ballon en un point T qu'il peut choisir n'importe où sur le segment [EM] perpendiculaire à la droite (AB), sauf en E.

Voici les dimensions du terrain :

$$EM = 50\text{ m},\ EA = 25\text{ m},\ AB = 5{,}6\text{ m}.$$

On se propose de rechercher s'il existe une position du point T sur le segment [EM] pour laquelle l'angle $\widehat{ATB}$ est maximum, et, si c'est le cas, de déterminer une mesure approchée de cet angle.

On note x la longueur ET cherchée, en mètre.

On note α la mesure, en radian, de l'angle $\widehat{ATB}$ $\left(\alpha \in \left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[\right)$.

a) On admet que pour tous réels a et b de $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$,

$$\tan(a-b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}.$$

Exprimer $\tan(\widehat{ETB})$ et $\tan(\widehat{ETA})$ en fonction de x.

En déduire que $\tan(\alpha) = \dfrac{5{,}6x}{x^2 + 765}$.

b) Utiliser le sens de variation de la fonction tangente sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ pour justifier que l'angle $\widehat{ATB}$ est maximum lorsque $\tan(\alpha)$ est maximum.

c) Montrer qu'il existe une unique valeur x_0 de x de $]0\,;\,50]$ pour laquelle l'angle $\widehat{ATB}$ est maximum. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-1} de x_0.

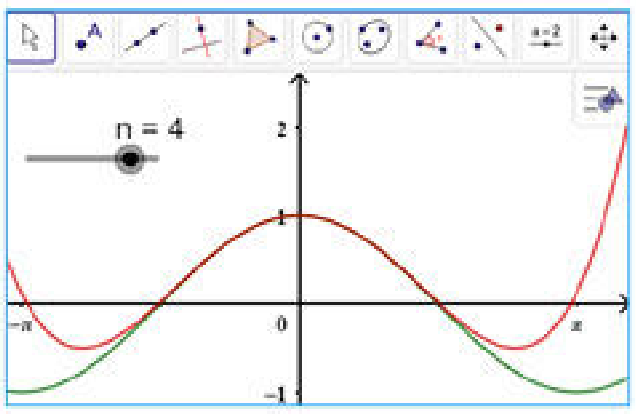
Indiquer alors la mesure de l'angle $\widehat{ATB}$, en radian, puis en degré. *Arrondir au centième dans chaque cas.*

102 Les polynômes de Taylor

Les polynômes de Taylor permettent d'approcher de manière très précise des fonctions non polynomiales par des fonctions polynomiales.
On se propose ici de visualiser l'approximation de la fonction cosinus (notée f dans ce qui suit) à l'aide de polynômes et de comprendre leur construction.

Partie A : expérimentation graphique en 0

a) Avec un logiciel de géométrie :
- créer la courbe représentative de f ;
- créer un curseur n de 0 à 5 avec un incrément de 1 ;
- saisir PolynômeTaylor(f, 0, n).



b) Déplacer le curseur n et observer la forme des courbes obtenues et l'expression des fonctions g_n obtenues.

c) Que remarque-t-on :
- graphiquement entre les courbes de f et de g_n ?
- pour $g_n(x)$ entre deux valeurs successives de n ?

Partie B : construction des polynômes de Taylor

On admet la propriété suivante :
f est une fonction définie sur un intervalle I, $a \in \mathrm{I}$ et les dérivées successives f', f'', f''' et $f^{(4)}$ de f sont continues sur I. Pour tout réel x de I,

$$f(x) \approx f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2}f''(a) + \frac{(x-a)^3}{6}f'''(a).$$

Le membre de droite est appelé polynôme de Taylor de f en a à l'ordre 3.

a) Utiliser cette propriété pour retrouver les expressions successives de g_n avec $a = 0$ et $n \in \{0\,;1\,;2\,;3\}$.

b) Que représente $g_1(x)$?

c) Sans calculatrice, donner une valeur approchée de $\cos(0{,}1)$ à 10^{-3} près.

Histoire des maths

Brook Taylor (1685-1731) est un homme de science anglais. Surtout connu comme mathématicien, il s'intéresse aussi à la musique, la peinture et la philosophie.

En 1715, membre de la Royal Society de Londres, il publie ses travaux sur les polynômes dans *Methodus incrementorum directa et inversa*.

103 Encadrements de $\sin(x)$ et $\cos(x)$

1. f_1 est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_1(x) = x - \sin(x)$.

a) Étudier les variations de la fonction f_1.

b) En déduire que $\sin(x) \leqslant x$ pour $x \in [0\,;+\infty[$.

2. f_2 est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2} - \cos(x).$$

a) Déduire de la question **1.** le sens de variation de la fonction f_2 sur $[0\,;+\infty[$.

b) En déduire que, pour tout réel x, $1 - \frac{x^2}{2} \leqslant \cos(x)$.

3. a) Étudier le sens de variation de chacune des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_3(x) = x - \frac{x^3}{6} - \sin(x) \text{ et } f_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cos(x).$$

b) Montrer que :
- pour tout réel $x \geqslant 0$, $x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin(x) \leqslant x$;
- pour tout réel x, $1 - \frac{x^2}{2} \leqslant \cos(x) \leqslant 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$.

c) En déduire un encadrement de $\sin(0{,}01)$, puis de $\cos(0{,}01)$.

Des défis

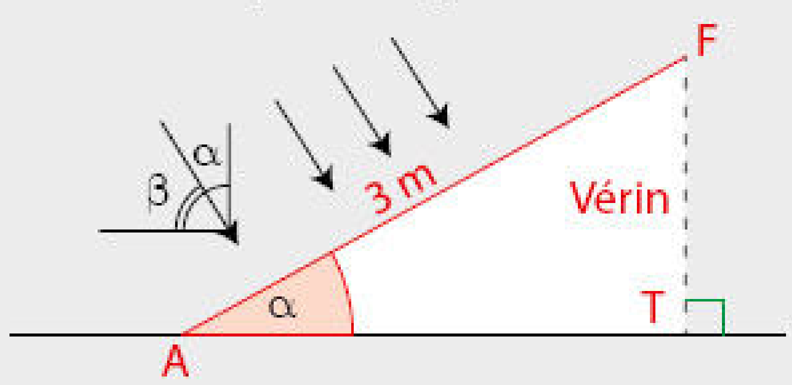
104 Une équation trigonométrique

Résoudre dans $[-\pi\,;\pi]$ l'équation :

$$2\sin^2(x) - \sin(x) - 1 = 0.$$

105 Un panneau solaire

Pour le concours Lépine, Jamil souhaite présenter un panneau solaire de 3 m de hauteur, orientable à l'aide d'un vérin. Le panneau solaire s'oriente dès 6 h du matin perpendiculairement aux rayons du soleil comme l'indique la figure ci-dessous.



Jamil estime les variations de β, l'angle entre les rayons du Soleil et la Terre, à $\frac{\pi}{12}$ radian par heure.
On note α l'angle que fait le panneau solaire par rapport au sol.
Déterminer la vitesse du vérin en fonction du temps.