5 Applications de la dérivation

Avant

Dès les années 1990, des études sur les fourmis ont montré que, lorsque plusieurs chemins sont marqués de phéromones et mènent à une source de nourriture, une fourmi est capable de déterminer celui qui est le plus court.

À présent

De nos jours, des algorithmes d'optimisation de trajets sont apparus dans plusieurs domaines : les réseaux de télécommunications, les circuits logistiques, le trajet du bus de ramassage scolaire, etc.
L'un des plus célèbres est l'algorithme du voyageur de commerce ; il est actuellement appliqué avec efficacité à la génétique.

Les capacités travaillées dans ce chapitre

	Exercices
• Déterminer le signe d'une dérivée.	1 à 5, 16, 17, 22 à 24, 26 à 28, 60 à 63
• Étudier les variations d'une fonction.	6, 8, 9, 18 à 21, 25, 29 à 32
• Déterminer des extremums locaux d'une fonction.	7, 10, 11, 33 à 41
• Résoudre un problème d'optimisation.	69 à 71, 83 à 87
• Exploiter les variations d'une fonction pour établir une inégalité.	12, 14, 42 à 44, 54, 55
• Étudier la position relative de deux courbes représentatives.	56, 72
• Étudier une fonction polynôme du second degré.	13, 15, 45 à 53

1 Signe de la dérivée et sens de variation

Des informations alarmistes sur une société cotée en bourse viennent d'être publiées.
Le cours de ses actions a connu de fortes variations durant le mois de juin.
L'évolution du cours, en euro, de cette action durant un mois est modélisée par la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 30]$ par :

$$f(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 15t^2 - 144t + 500$$

où t est le temps en jour.

1 **a)** Calculer le cours de l'action en début puis en fin d'étude.
b) Afficher la courbe de la fonction f à l'écran de la calculatrice (*fenêtre* : $0 \leqslant X \leqslant 30$, pas 1 et $0 \leqslant Y \leqslant 1500$, pas 100).
c) Conjecturer à l'aide de la calculatrice le sens de variation de la fonction f.
Interpréter en termes d'évolution du cours de l'action.

2 **a)** Déterminer la fonction dérivée de f.
b) Étudier le signe de $f'(t)$ sur l'intervalle $[0\ ;\ 30]$.
c) Confronter les résultats de la question précédente avec la conjecture émise à la question **1. c)**.

2 Signe de la dérivée et maximum

Un athlète lance le poids.
La hauteur, en m, atteinte par le poids est donnée par :

$$h(x) = -0{,}05x^2 + 0{,}8x + 2$$

où x représente la distance horizontale, en m, entre les pieds du lanceur et le poids.

1 **a)** De quelle hauteur le poids est-il lancé ?
b) Avec la calculatrice, conjecturer la hauteur maximum atteinte par le poids.

2 **a)** Déterminer la fonction dérivée de h, puis étudier le signe de $h'(x)$.
b) En déduire pourquoi la hauteur du poids atteint un maximum à une distance horizontale que l'on précisera.
c) Calculer cette hauteur maximum.

3 Déterminer la longueur, en m, du lancer de cet athlète. *Arrondir à l'unité.*

1 Sens de variation et signe de la dérivée

A Du sens de variation au signe de la dérivée

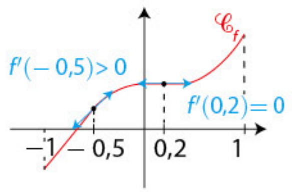
Propriétés (admises)

f est une fonction dérivable sur un intervalle I.

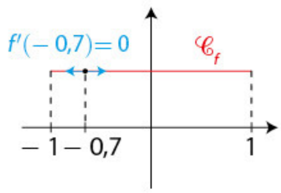
- Si f est **croissante** sur I, alors pour tout nombre réel x de I, $\boldsymbol{f'(x) \geqslant 0}$.
- Si f est **constante** sur I, alors pour tout nombre réel x de I, $\boldsymbol{f'(x) = 0}$.
- Si f est **décroissante** sur I, alors pour tout nombre réel x de I, $\boldsymbol{f'(x) \leqslant 0}$.

Exemples

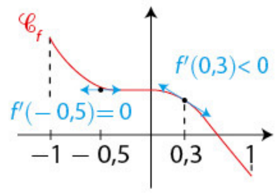
- f est croissante sur $[-1 \,;\, 1]$



- f est constante sur $[-1 \,;\, 1]$



- f est décroissante sur $[-1 \,;\, 1]$



B Du signe de la dérivée au sens de variation

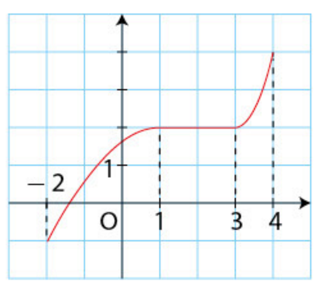
Propriétés (admises)

f est une fonction dérivable sur un intervalle I.

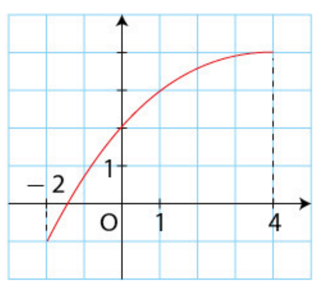
- Si pour tout nombre réel x de I, $\boldsymbol{f'(x) \geqslant 0}$, alors f est **croissante** sur I.
- Si pour tout nombre réel x de I, $\boldsymbol{f'(x) = 0}$, alors f est **constante** sur I.
- Si pour tout nombre réel x de I, $\boldsymbol{f'(x) \leqslant 0}$, alors f est **décroissante** sur I.

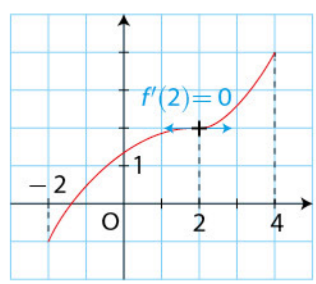
Exemples

Dans chaque cas, la courbe tracée représente une fonction f dérivable sur l'intervalle $[-2 \,;\, 4]$.
Cette fonction est telle que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[-2 \,;\, 4]$, $f'(x) \geqslant 0$.



$f'(x)$ s'annule sur l'intervalle $[1 \,;\, 3]$ contenu dans $[-2 \,;\, 4]$.
On dit que f est **croissante** sur l'intervalle $[-2 \,;\, 4]$.





$f'(x)$ ne s'annule pas sur l'intervalle $[-2 \,;\, 4]$, ou bien seulement en quelques points isolés.
On dit que f est **strictement croissante** sur l'intervalle $[-2 \,;\, 4]$.

Conséquence :
On déduit des propriétés énoncées aux paragraphes A et B qu'une fonction définie et dérivable sur un intervalle est **constante si, et seulement si, sa dérivée est nulle**.

2 Extremum local d'une fonction

A Extremum local

Définitions

f est une fonction définie sur un intervalle I et c est un nombre réel de I.
Dire que $f(c)$ est un **maximum local** (resp. **minimum local**) de f signifie qu'il existe un intervalle **ouvert** J inclus dans I et contenant c tel que, pour tout nombre réel x de J :

$$\boldsymbol{f(x) \leqslant f(c)} \text{ (resp. } \boldsymbol{f(x) \geqslant f(c)}\text{)}$$

Vocabulaire :
On parle d'**extremum local** pour désigner un minimum ou un maximum local.

Exemples

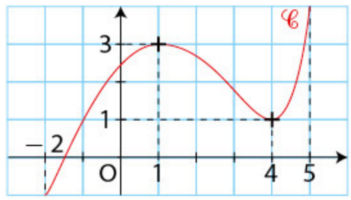
f est une fonction définie sur l'intervalle $[-2\ ;\ 5]$.
Sa courbe représentative $\mathscr{C}$ est tracée dans le repère ci-contre.

- $f(1) = 3$ est un maximum local de f.

En effet, pour tout x de l'intervalle $]0\ ;\ 2[$, $f(x) \leqslant 3$.

- $f(4) = 1$ est un minimum local de f.

En effet, pour tout x de l'intervalle $]3\ ;5[$, $f(x) \geqslant 1$.



B Extremum local et dérivée

Propriété (admise)

f est une fonction dérivable sur un intervalle I et c est un nombre réel de I.
Si $f(c)$ est un extremum local de f, alors $\boldsymbol{f'(c) = 0}$.

Remarques :

- Si $f(c)$ est un extremum local, alors **la tangente** à la courbe représentative de f au point d'abscisse c **est parallèle** à **l'axe des abscisses** (fig. 1).
- La réciproque de la propriété est fausse. Si f est la fonction cube, alors $f'(0) = 0$ et $f(0)$ n'est pas un extremum local de f (fig. 2).

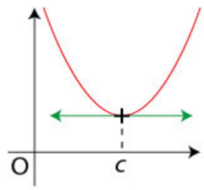


fig. 1

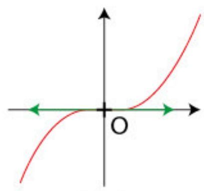


fig. 2

Propriété

f est une fonction dérivable sur un intervalle **ouvert** I et c est un nombre réel de I.
Si f' **s'annule et change de signe** en c, alors $f(c)$ est un extremum local de f.

Exemples

Sur un intervalle $]a\ ;b[$ contenant c, on peut se trouver dans l'une des situations ci-dessous.

x	a		c		b
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	$f(c)$	↗	

$f(c)$ est un **minimum local**.

x	a		c		b
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	$f(c)$	↘	

$f(c)$ est un **maximum local**.

3 Fonctions polynômes du second degré

A Sens de variation de la fonction $x \mapsto ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$)

f est une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b, c sont des nombres réels et $a \neq 0$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout nombre réel x, $f'(x) = 2ax + b$.

Le signe d'une fonction affine permet de dire que $f'(x)$ s'annule en $-\dfrac{b}{2a}$ en changeant de signe, donc la fonction f admet un extremum en $-\dfrac{b}{2a}$. D'où la propriété énoncée ci-dessous.

Propriété

f est une fonction $x \mapsto ax^2 + bx + c$ où a, b, c sont des nombres réels et $a \neq 0$.

- Cas où $a > 0$

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	$f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$	↗	

- Cas où $a < 0$

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	$f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$	↘	

B Courbe représentative de la fonction $x \mapsto ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$)

Définition-Propriété

Dans un repère orthogonal, la courbe représentative $\mathscr{P}$ de la fonction $x \mapsto ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$) est une **parabole de sommet** $S\left(-\dfrac{b}{2a}\,;\, f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)\right)$.

Elle admet la droite d'équation $x = -\dfrac{b}{2a}$ pour **axe de symétrie**.

Démonstration

Pour tout nombre réel x, $f(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a}$ (forme canonique p. 69). On note h un nombre réel.

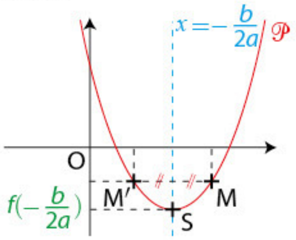
M est le point de $\mathscr{P}$ d'abscisse $-\dfrac{b}{2a} + h$, son ordonnée est $f\left(-\dfrac{b}{2a} + h\right) = ah^2 - \dfrac{\Delta}{4a}$.

M′ est le point de $\mathscr{P}$ d'abscisse $-\dfrac{b}{2a} - h$, son ordonnée est $f\left(-\dfrac{b}{2a} - h\right) = ah^2 - \dfrac{\Delta}{4a}$.

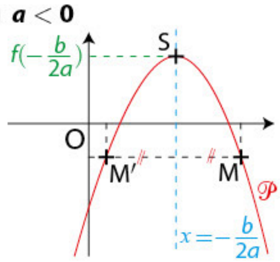
Les points M et M′ sont donc symétriques par rapport à la droite d'équation $x = -\dfrac{b}{2a}$.

C'est le cas pour tout nombre réel h, donc cette droite est axe de symétrie de la parabole $\mathscr{P}$.

- **Cas où $a > 0$**



- **Cas où $a < 0$**

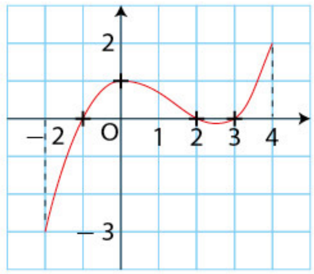


EXERCICES RÉSOLUS

1 Lire le sens de variation de *f* sur la courbe de f'

→ Cours 1. B

f est une fonction dérivable sur l'intervalle $[-2\ ;\ 4]$.
La courbe représentative de sa fonction dérivée f' est tracée dans le repère ci-contre.
Déterminer graphiquement le sens de variation de la fonction *f*.



Solution

Par lecture sur le graphique :

- pour tout nombre réel de x de $[-2\ ;-1]$ et de $[2\ ;\ 3]$, $f'(x) \leqslant 0$.
Donc *f* est décroissante sur chacun des intervalles $[-2\ ;-1]$ et $[2\ ;\ 3]$;
- pour tout nombre réel de x de $[-1\ ;\ 2]$ et de $[3\ ;\ 4]$, $f'(x) \geqslant 0$.
Donc *f* est croissante sur chacun des intervalles $[-1\ ;\ 2]$ et $[3\ ;\ 4]$.

> On lit le signe de $f'(x)$ sur la courbe représentative de f'. On en déduit le sens de variation de *f* sur chaque intervalle où le signe de $f'(x)$ est constant.

2 Étudier le signe de $f'(x)$

→ Cours 1. B

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 4x$.

a) Déterminer $f'(x)$ et étudier son signe.

b) En déduire le sens de variation de la fonction *f*.

Solution

a) *f* est une fonction polynôme donc *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout nombre réel x, $f'(x) = 3x^2 + 4$.
Pour tout nombre réel x, $3x^2 + 4 > 0$, donc $f'(x) > 0$.

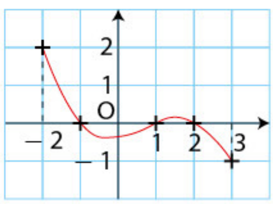
b) Ainsi, la fonction *f* est croissante sur $\mathbb{R}$.

> Pour tout nombre réel x, $x^2 \geqslant 0$ et $4 > 0$, donc $3x^2 + 4 > 0$.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 1

3 g est une fonction dérivable sur l'intervalle $[-2\ ;\ 3]$.
La courbe représentative de sa fonction dérivée g' est tracée dans le repère ci-dessous.
Déterminer graphiquement le sens de variation de la fonction g.



Sur le modèle de l'exercice résolu 2

4 h est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = x^3 + 3x$$

a) Déterminer $h'(x)$ et étudier son signe.

b) En déduire le sens de variation de la fonction h.

5 k est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$k(x) = -x(3x^2 + 20)$$

a) Déterminer $k'(x)$ et étudier son signe.

b) En déduire le sens de variation de la fonction k.

c) Comparer mentalement $k(501{,}5)$ et $k(498)$.

EXERCICES RÉSOLUS

6 Dresser le tableau de variations d'une fonction

→ Cours 1. B

g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 6x$.
Étudier le sens de variation de la fonction g puis dresser son tableau de variations.

Solution

g est une fonction polynôme donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout nombre réel x, $g'(x) = 3x^2 - 6$ c'est-à-dire :

$$g'(x) = 3(x^2 - 2) = 3(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$$

$g'(x) = 0$ si, et seulement si, $x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$.
On utilise le signe de $ax^2 + bx + c$ pour dresser le tableau de variations de la fonction g.

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	−	0	+	
$g(x)$		↗	$4\sqrt{2}$	↘	$-4\sqrt{2}$	↗	

Pour étudier le signe de $g'(x)$, on factorise $x^2 - 2$ en utilisant l'identité $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

Dans un tableau, on note les valeurs exactes des extremums $g(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 6\sqrt{2} = -4\sqrt{2}$.
Ici g est impaire donc $g(-\sqrt{2}) = -g(\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}$.

7 Rechercher des extremums locaux

→ Cours 2. B

u est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^3 - 4{,}5x^2 + 6x$. Déterminer les extremums locaux de u.

Solution

u est une fonction polynôme donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout nombre réel x,
$u'(x) = 3x^2 - 9x + 6 = 3(x^2 - 3x + 2)$
$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 1$ et $\Delta > 0$

$$x_1 = \frac{-(-3)+1}{2} = 2 \text{ et } x_2 = \frac{-(-3)-1}{2} = 1.$$

Le signe de $ax^2 + bx + c$ permet de dresser ci-contre le tableau de variations de la fonction u. D'après ce tableau, $u(1) = 2{,}5$ est un maximum local de la fonction u et $u(2) = 2$ est un minimum local de u.

On lit les extremums locaux de la fonction u sur son tableau de variations.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$u'(x)$		+	0	−	0	+	
$u(x)$		↗	2,5	↘	2	↗	

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 6

8 k est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$k(x) = x^3 - 9x$$

Étudier le sens de variation de la fonction k puis dresser son tableau de variations.

9 m est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$m(x) = -x^3 + 12x$$

Étudier le sens de variation de la fonction m puis dresser son tableau de variations.

Sur le modèle de l'exercice résolu 7

10 g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$$

Déterminer les extremums locaux de g.

11 h est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 4x^2 - 7x$$

Déterminer les extremums locaux de h.

EXERCICES RÉSOLUS

12 Démontrer une inégalité

→ Cours 1. B et 2. B

f est la fonction définie sur l'intervalle $[1\,;\ +\infty[$ par $f(x) = 2x + \dfrac{8}{x}$.
Démontrer que pour tout nombre réel $x \geqslant 1$, $f(x) \geqslant 8$.

Solution

f est la somme de deux fonctions dérivables sur $[1\,;\ +\infty[$ donc f est dérivable sur $[1\,;\ +\infty[$.
Pour tout nombre réel $x \geqslant 1$,

$$f'(x) = 2 - \frac{8}{x^2} = \frac{2(x^2-4)}{x^2} = \frac{2(x+2)(x-2)}{x^2}$$

Pour tout nombre réel $x \geqslant 1$, $2(x+2) > 0$ et $x^2 > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de $x - 2$.
On obtient le tableau de variations de f ci-contre.
$f(2) = 8$ est le minimum de f sur $[1\,;\ +\infty[$ donc pour tout nombre réel $x \geqslant 1, f(x) \geqslant 8$.

Pour établir une inégalité du type $f(x) \geqslant k$ (avec $k \in \mathbb{R}$) on peut étudier tout d'abord les variations de la fonction f et observer ensuite les extremums locaux.

x	1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	8	↗	

13 Étudier une fonction polynôme du second degré

→ Cours 3

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x - 3$.
a) Étudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variations.
b) Dans un repère, tracer la courbe représentative de la fonction f.

Solution

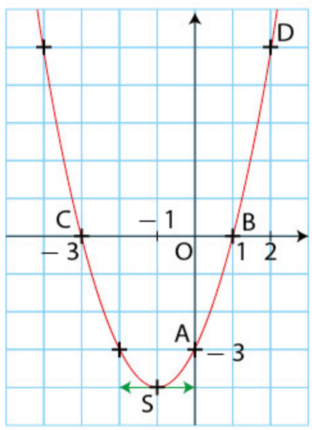
a) Pour tout nombre réel x,

$$f'(x) = 2x + 2$$

Le signe d'une fonction affine permet de dresser le tableau de variations de la fonction f.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	-4	↗	

b)



Pour tracer cette parabole :
- on place le sommet S ;
- on place les points d'intersection avec les axes : A(0 ; − 3), B(1 ; 0), C(−3 ; 0) ;
- on place un autre point : D(2 ; 5) ;
- on utilise l'axe de symétrie.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 12

14 g est la fonction définie sur l'intervalle $[-5\,;-2]$ par :

$$g(x) = 4x - \frac{1}{x}$$

Démontrer que pour tout nombre réel x de $[-5\,;-2]$, $-19{,}8 \leqslant g(x) \leqslant -7{,}5$.

Sur le modèle de l'exercice résolu 13

15 h est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(t) = -2t^2 + 5t - 3$$

a) Étudier le sens de variation de h et dresser son tableau de variations.
b) Dans un repère, tracer la courbe représentative de la fonction h.

Calcul mental → Exercez-vous sur la plateforme Hyperbole
⊕ de détails page 4

Sens de variation et signe de la dérivée

→ Cours 1

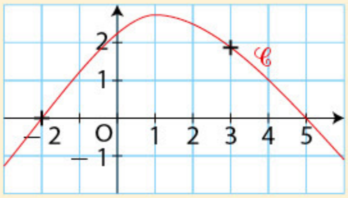
Questions Flash

16 f est une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$ dont voici le tableau de variations.

x	-3		1		3		4
$f(x)$	1	↗	3	↘	-2	↗	-1

Décrire oralement le signe de $f'(x)$.

17 f est une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-3\ ;\ 6]$ dont voici la courbe représentative dans un repère.



Lire le signe de $f'(-2)$ puis de $f'(3)$.

18 f est une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$.
Voici le tableau de signes de sa dérivée f'.

x	-1		0		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

Faustine affirme : « La fonction f est croissante sur l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$. » A-t-elle raison ?

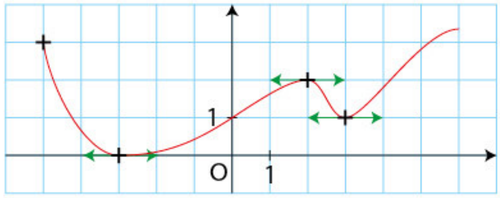
19 f est la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout x, $f'(x) = x^2 + 2$.
Donner oralement le sens de variation de f.

20 f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont la dérivée est la fonction carré.
Laquelle de ces affirmations est exacte ?
(1) f est constante sur $\mathbb{R}$.
(2) f est croissante sur $\mathbb{R}$.
(3) f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

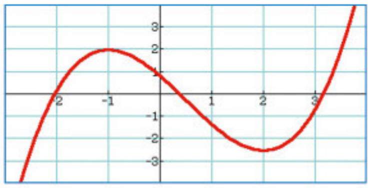
21 f est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Recopier et compléter son tableau de variations.

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$			0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	3		1		

22 Voici la courbe représentative, dans un repère, d'une fonction f dérivable sur l'intervalle $[-5\ ;\ 6]$.
Dresser le tableau de signes de $f'(x)$.

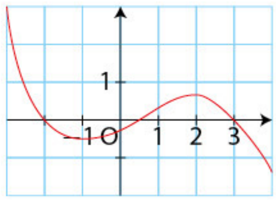


23 Une fonction g est définie et dérivable sur l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$. Voici sa courbe obtenue à l'écran d'une calculatrice.

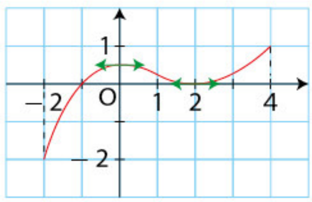


a) Conjecturer les nombres entiers solutions de l'équation $g'(x) = 0$.
b) Conjecturer le signe de $g'(x)$ selon les valeurs de x.

24 Voici la courbe représentative, dans un repère, d'une fonction h dérivable sur l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$.
Déterminer graphiquement le signe de :
a) $h(0)$
b) $h'(0)$
c) $h(-3)$
d) $h'(-3)$
e) $h(2{,}5)$
f) $h'(2{,}5)$



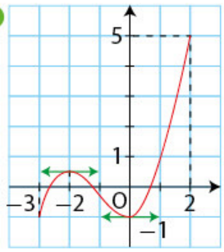
25 f est une fonction dérivable sur l'intervalle $[-2\ ;\ 4]$. La courbe représentative de sa fonction dérivée f' est tracée dans le repère ci-dessous.

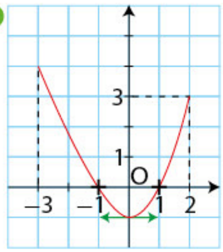


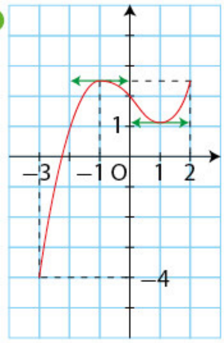
Déterminer les variations de la fonction f.

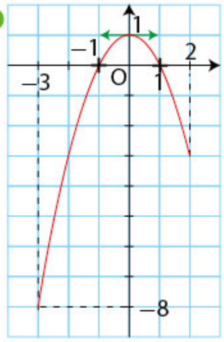
26 f est une fonction dérivable sur l'intervalle $[-5\ ;\ 5]$. f est décroissante sur les intervalles $[-5\ ;-3]$ et $[1\ ;\ 5]$, et f est croissante sur l'intervalle $[-3\ ;\ 1]$.
a) Déterminer le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.
b) Dans un repère, tracer une allure possible de la courbe représentative de f.

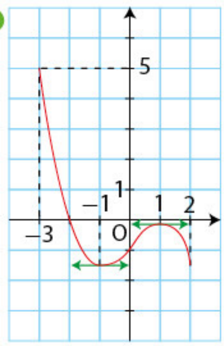
27 Les courbes ❶, ❷, ❸ ci-après représentent des fonctions f, g, h et les courbes Ⓐ, Ⓑ, Ⓒ représentent leurs fonctions dérivées f', g', h' dans un repère.
Faire correspondre chaque fonction avec sa fonction dérivée en expliquant son choix.

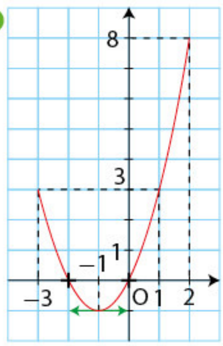
❶


Ⓐ


❷


Ⓑ


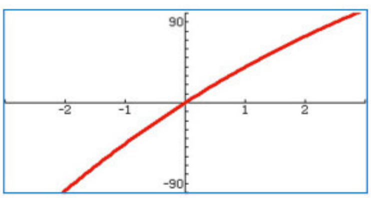
❸


Ⓒ


28 h est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x)=\frac{1}{9}x^3-3x^2+\frac{128}{3}x$$

Chloé a tracé la courbe représentative de la fonction h à l'écran de sa calculatrice (*fenêtre* : $-3 \leqslant \mathrm{X} \leqslant 3$, pas 1 et $-100 \leqslant \mathrm{Y} \leqslant 100$, pas 10).



Elle affirme : « La fonction h est croissante sur $\mathbb{R}$. »

a) Déterminer $h'(x)$ et étudier son signe.

b) Chloé a-t-elle raison ? Justifier.

29 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}-\{3\}$ par :

$$f(x)=\frac{x+1}{2x-6}$$

a) Vérifier que pour tout nombre réel $x \neq 3$,

$$f'(x)=\frac{-8}{(2x-6)^2}$$

b) Quel est le signe de $f'(x)$?

c) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

Penser à mettre une double barre en 3.

30 g est la fonction définie sur $\mathbb{R}-\{-2\}$ par :

$$g(x)=\frac{x^2}{x+2}$$

a) Vérifier que pour tout nombre réel $x \neq -2$,

$$g'(x)=\frac{x(x+4)}{(x+2)^2}$$

b) Justifier que pour tout nombre réel $x \neq -2$, $g'(x)$ a le même signe que le produit $x(x+4)$.

c) Dresser le tableau de variations de la fonction g.

d) Afficher la courbe représentative de la fonction g à l'écran de la calculatrice et vérifier la cohérence avec le tableau de variations.

31 h est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x)=\frac{x^2}{x^2+10}$$

a) Vérifier les résultats obtenus dans l'écran de calcul formel suivant.

1 $h(x):=\dfrac{x^2}{x^2+10}$

→ $h(x):=\dfrac{x^2}{x^2+10}$

2 $h'(x)$

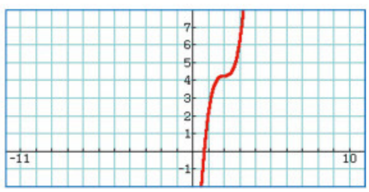
→ $20\cdot\dfrac{x}{x^4+20x^2+100}$

b) Étudier le signe de $h'(x)$ puis dresser le tableau de variations de la fonction h.

32 k est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$k(x)=2x^3-12{,}06x^2+24{,}24x-12$$

Pedro a affiché ci-dessous la courbe représentative de k à l'écran de sa calculatrice.



Il affirme : « La fonction k est croissante sur $\mathbb{R}$. »
Que peut-on en penser ? Justifier.

Extremum local d'une fonction

→ Cours 2. B

Questions Flash

33 f est une fonction définie sur l'intervalle $[-2\ ;\ 3]$. Voici son tableau de variations.

x	-2		0		1		3
$f(x)$	-3	↗	6	↘	-4	↗	-1

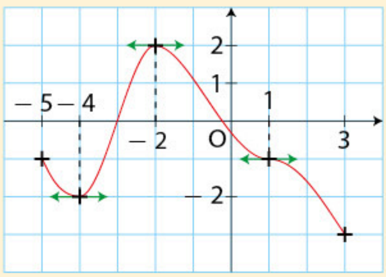
Lire les extremums locaux de f.

34 g est une fonction dérivable sur l'intervalle $[-5\ ;\ 6]$. Voici le tableau de signes de sa fonction dérivée g'.

x	-5		-1		3		6
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	

Déterminer oralement pour quelle(s) valeur(s) de x la fonction g admet un extremum local.

35 h est une fonction définie sur l'intervalle $[-5\ ;\ 3]$. Sa courbe représentative est donnée dans le repère ci-dessous.



Dans chaque cas, choisir la bonne réponse.

a) Un maximum local de h sur $[-5\ ;\ 3]$ est :

(1) -2 **(2)** -1 **(3)** 2

b) Un minimum local de h sur $[-5\ ;\ 3]$ est atteint en :

(1) -2 **(2)** -4 **(3)** 1

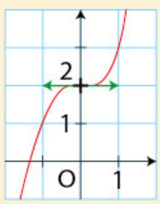
c) Un intervalle ouvert J tel que pour tout x de J, $h(x) \geqslant -2$ est :

(1) $]-5\ ;\ 3[$ **(2)** $]-5\ ;-2[$ **(3)** $]1\ ;\ 3[$

36 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 + 2$$

Voici sa courbe représentative dans le repère ci-contre.



a) Lire $f(0)$ et $f'(0)$.

b) Imane affirme : « $f(0)$ n'est pas un extremum local de f bien que $f'(0) = 0$. »

Que dire de cette affirmation ?

37 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 1$$

a) Déterminer $f'(x)$ et étudier son signe.

b) Dresser le tableau de variations de f.

c) En déduire les extremums locaux de f.

38 g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{2x}{x^2 + 4}$$

a) Afficher la courbe représentative de la fonction g à l'écran de la calculatrice et conjecturer les extremums locaux de g.

b) Démontrer les conjectures précédentes.

Pour les exercices 39 à 41, f est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

a) Afficher la courbe de f à l'écran de la calculatrice et conjecturer l'existence d'extremums locaux.

b) Démontrer chaque conjecture.

39 $f(x) = \frac{4}{3}x^3 - 16x$ $\qquad$ $\mathrm{I} = [-3\ ;\ 3]$

40 $f(x) = x^4 - \frac{4}{3}x^3 - 1$ $\qquad$ $\mathrm{I} = [-1\ ;\ 2]$

Penser à mettre $4x^2$ en facteur dans $f'(x)$.

41 $f(x) = \frac{4}{x} + x + 10$ $\qquad$ $\mathrm{I} = [-4\ ;\ 0[$

Penser à écrire $f'(x)$ avec un seul quotient.

42 g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 3$$

a) Dresser le tableau de variations de la fonction g.

b) Déterminer les extremums locaux de g.

c) Démontrer que pour tout nombre réel $x \geqslant 2$:

$$g(x) \geqslant 13$$

43 h est la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ par :

$$h(x) = x^2 - x^3$$

a) Dresser le tableau de variations de h.

b) Justifier que pour tout nombre réel x de $[0\ ;\ 1]$:

$$h(x) \geqslant 0$$

c) En déduire la position relative, dans un repère, de la courbe représentative de la fonction $x \mapsto x^2$ et de la courbe de la fonction $x \mapsto x^3$ sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$.

44 f est la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = x^3 - 3x + 2$$

a) Déterminer l'extremum local de f.

b) En déduire que pour tout nombre réel $x \geqslant 0$,

$$x^3 \geqslant 3x - 2$$

Fonctions polynômes du second degré

→ Cours 3

Questions Flash

45 f est la fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x + 2$.
Décrire oralement les variations de la fonction f.

46 f est la fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$.
Mèl affirme : « La fonction f admet un maximum sur $\mathbb{R}$ car $-5 < 0$. » Que peut-on en penser ?

47 f est la fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 - 4x + 1$.
Laquelle de ces affirmations est exacte ?
Dans un repère, les coordonnées du sommet de la parabole représentant f sont :
(1) $(-2\,;-11)$ **(2)** $(-4\,;-1)$ **(3)** $(-2\,;\,5)$

48 f est la fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x - 5$.
Donner oralement le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.

49 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = (x-1)(x+2)$$
Iheb affirme : « Sa courbe est une parabole. »
A-t-il raison ?

50 f est une fonction polynôme du second degré dont la courbe représentative, dans un repère, admet le point $S(2\,;-1)$ pour sommet.
Lison dit : « Si la courbe passe par le point $A(3\,;\,0)$, alors elle passe aussi par le point $B(1\,;\,0)$. »
A-t-elle raison ?

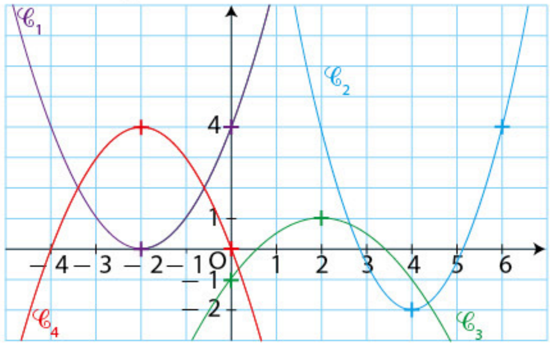
51 Dans chaque cas, dire si la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ admet un minimum ou un maximum puis déterminer sa valeur.

a) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + 4x$ **b)** $f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 4x$

c) $f(x) = (5-x)^2$ **d)** $f(x) = -3(x+1)^2$

52 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = -2x^2 - 5x + 3$$
a) Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations.
b) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
c) Dans un repère, tracer la courbe représentative de f.

53 Chacune des paraboles $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$ et $\mathscr{C}_4$ construites dans le repère ci-dessous représente respectivement une fonction polynôme f_1, f_2, f_3 et f_4 du second degré.



Voici les expressions des fonctions f_1, f_2, f_3, f_4.

❶ $x^2 + 4x + 4$ ❷ $-\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1$

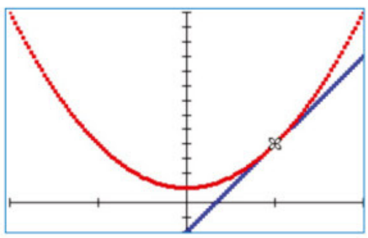
❸ $-x^2 - 4x$ ❹ $\frac{3}{2}x^2 - 12x + 22$

Associer chaque courbe à l'expression qui convient.

54 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = -2x^2 + 9x - 7$$
a) Expliquer pourquoi f admet un maximum sur $\mathbb{R}$.
Le calculer et préciser la valeur de x pour laquelle il est atteint.
b) En déduire que si $x \in \left[1\,;\,\frac{7}{2}\right]$, alors $0 \leqslant 8f(x) \leqslant 25$.

55 g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$g(x) = x^2 - 7x + 12$$
a) Dresser le tableau de variations de g.
b) En déduire que si $x \in]3\,;\,4[$, alors $\frac{1}{g(x)} \leqslant -4$.

56 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 1$.
$\mathscr{C}$ est sa courbe représentative dans un repère et T est la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.
À l'aide de l'écran ci-dessous, Anaïs affirme :
« La courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de la droite T sur $\mathbb{R}$. »



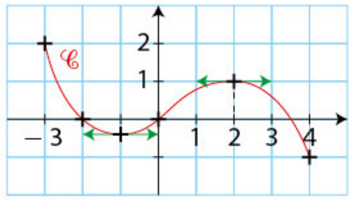
a) Déterminer une équation de la tangente T.
b) Étudier le sens de variation de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) - (6x - 2)$.
c) En déduire le signe de $g(x)$. Anaïs a-t-elle raison ?

QCM interactifs

Pour se tester

57 Dans chaque cas, donner la réponse exacte sans justifier.

f est une fonction dérivable sur l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$.
Voici sa courbe représentative $\mathscr{C}$ dans le repère ci-contre.



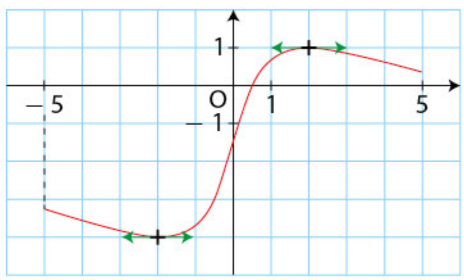
		A	B	C	D
1	f est décroissante sur l'intervalle …	$[-3\ ;\ 4]$	$[-1\ ;\ 2]$	$[2\ ;\ 4]$	$[-1\ ;\ 4]$
2	$f'(x) \geqslant 0$ pour tout nombre réel x de l'intervalle…	$[2\ ;\ 4]$	$[-3\ ;-2]$	$[0\ ;\ 2]$	$[-1\ ;\ 3]$
3	f admet un maximum local en …	-1	2	4	0
4	Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[-3\ ;\ 2]$, …	$f(x) \leqslant 1$	$f(x) \geqslant 0$	$f(x) \leqslant 0$	$f(x) \geqslant -1$

58 Dans chaque cas, donner la (ou les) réponse(s) exacte(s) sans justifier.

		A	B	C	D
1	f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 6x + 5$. Alors f est …	croissante sur $]-\infty\ ;\ 1]$	croissante sur $]-1\ ;\ 1[$	décroissante sur $]-\infty\ ;\ 1]$	décroissante sur $]-1\ ;1[$
2	g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - \dfrac{25}{3}x$. Alors g admet …	un maximum local en $\dfrac{5}{3}$	un minimum local en $\dfrac{5}{3}$	un minimum local en $-\dfrac{5}{3}$	un maximum local en $-\dfrac{5}{3}$
3	h est la fonction définie sur $[0\ ;+\infty[$ par $h(x) = \dfrac{2x+1}{x+3}$. Alors sur $[0\ ;+\infty[$, …	$h(x) \leqslant 0$	$h'(x) \geqslant 0$	$h'(x) = 0$	$h(x) > 0$
4	k est la fonction définie sur $[1\ ;+\infty[$ par $k(x) = 4x + \dfrac{4}{x}$. Alors sur $[1\ ;+\infty[$, …	$k'(x) \geqslant 0$	$k'(x)$ s'annule en changeant de signe	$k'(2) = 3$	$k'(1) > 0$

59 Dans chaque cas, dire si l'affirmation est vraie ou fausse en justifiant.

Dans le repère ci-contre, on a représenté une fonction f définie sur l'intervalle $[-5\ ;\ 5]$ telle que $f(0{,}5) = 0$.



Affirmations :

1 Sur $[-5\ ;\ 5]$, l'équation $f'(x) = 0$ admet une seule solution.

2 Sur $[-5\ ;\ 5]$, l'inéquation $f'(x) \geqslant 0$ admet pour ensemble des solutions l'intervalle $[0{,}5\ ;\ 5]$.

3 $f'(1{,}5) > f'(4)$

4 Sur l'intervalle $[-5\ ;\ 5]$, la fonction f admet deux extremums locaux.

Vérifiez vos réponses : p. 340

60 Établir immédiatement le signe d'une dérivée

Pour chacune des fonctions définies, déterminer le signe de la dérivée.

a) Pour tout nombre réel x, $f(x) = x^3 + x + 4$.

b) Pour tout nombre réel x, $g(x) = -2x^3 - 4x + 1$.

c) Pour tout nombre réel $x \neq 0$, $h(x) = x - \dfrac{4}{x}$.

AIDE

Pour tout nombre réel a, a^2 est positif ou nul.

61 Étudier le signe d'une dérivée du second degré

f est la fonction définie sur $[-5\ ;\ 5]$ par :

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x - 4$$

a) Déterminer $f'(x)$.

b) Résoudre l'équation $f'(x) = 0$.

c) Dresser le tableau de signes de $f'(x)$.

AIDE

Lorsque la dérivée est un polynôme du second degré, pour étudier son signe, on peut calculer Δ, trouver ses racines et appliquer le signe de $ax^2 + bx + c$.

62 Étudier le signe d'une dérivée à l'aide d'une factorisation

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^4 - 6x^2 - 2$$

a) Déterminer $f'(x)$.

b) Étudier le signe de $f'(x)$.

AIDE

Pour trouver le signe de la dérivée, il est souvent utile de factoriser $f'(x)$.

63 Étudier le signe de la dérivée d'un quotient

f est la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1}$$

a) Vérifier que pour tout $x \geqslant 0$, $f'(x) = \dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2}$.

b) Étudier le signe de $f'(x)$.

AIDE

Lorsqu'on applique la formule $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, il est inutile de développer le dénominateur car $v^2 > 0$. On étudie le signe du numérateur.

64 Établir le sens de variation d'une fonction

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 + \dfrac{4}{3}x^3 - 1$.

a) Déterminer $f'(x)$.

b) Étudier le signe de $f'(x)$.

c) En déduire le tableau de variations de f.

AIDE

b) Penser à factoriser $f'(x)$.

65 Modéliser une situation

Dans une expérience, le nombre de bactéries dans une culture de croissance est donné par $\mathrm{N}(t) = 100 + 32t^2 - t^4$ où t est le temps, en jour, écoulé depuis le début de l'expérience.

a) Déterminer $\mathrm{N}'(t)$ et étudier son signe.

b) Sur quel intervalle de temps le nombre de bactéries a-t-il augmenté ? diminué ?

AIDE

b) Relier cette question portant sur la situation à l'étude du signe de $\mathrm{N}'(t)$.

S'entraîner Algo

EXERCICE RÉSOLU

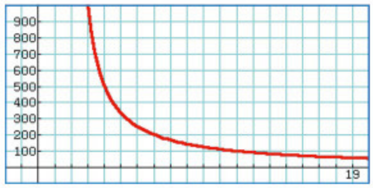
66 Rechercher les points à coordonnées entières d'une courbe

f est la fonction définie sur l'intervalle $]2\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x+2019}{2x-4}$.

On admet que f est décroissante et strictement positive sur $]2\,;+\infty[$.

$\mathscr{H}$ est la courbe représentative de f dans un repère.

Elle est affichée ci-contre à l'écran d'une calculatrice.



a) Expliquer pourquoi les points de $\mathscr{H}$ à coordonnées entières ont leurs abscisses comprises entre 3 et 3 000.

b) Écrire un algorithme qui affiche les points à coordonnées entières de $\mathscr{H}$. Coder cet algorithme en langage Python, le saisir et l'exécuter pour afficher tous les points à coordonnées entières de $\mathscr{H}$.

Solution

a) $f(3\,000)=\dfrac{5\,019}{5\,996}$ donc $f(3000)<1$.

Or f est décroissante sur $]2\,;+\infty[$ donc, pour tout nombre réel $x \geqslant 3\,000$, $0<f(x)\leqslant f(3\,000)<1$.

Donc les points à coordonnées entières de $\mathscr{H}$ ont leurs abscisses dans l'intervalle $]2\,;3\,000]$, c'est-à-dire comprises entre 3 et 3 000.

> Pour tout $x \geqslant 3\,000$, $0<f(x)<1$.
> Or, il n'y a pas de nombre entier dans l'intervalle $]0\,;1[$ donc on cherche des abscisses inférieures à 3 000.

b) Voici un algorithme et son codage en langage Python.

```
Pour n allant de 3 à 3 000
    a ← f(n)
    Si a est entier alors
        Afficher n, a
    Fin Si
Fin Pour
```

```python
def f(x):
    y=(x+2019)/(2*x-4)
    return y

for n in range(3,3001):
    a=f(n)
    if int(a)==a:
        print("(",n,";",a,")")
```

> Dans le langage Python, la fonction **int** renvoie la partie entière d'un nombre.

On obtient quatre points de $\mathscr{H}$ à coordonnées entières indiqués ci-dessous.

```
>>>
( 3 ; 1011.0 )
( 45 ; 24.0 )
( 49 ; 22.0 )
( 2023 ; 1.0 )
```

À VOTRE TOUR

67 g est la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$g(x)=\frac{5x-1000}{x+4}$$

On admet que g est croissante sur $[0\,;+\infty[$ et que pour tout $x \geqslant 0$, $g(x)<5$.

$\mathscr{C}$ est sa courbe représentative dans un repère.

a) Expliquer pourquoi les points à coordonnées entières de $\mathscr{C}$ ont une abscisse comprise entre 0 et 1 016.

b) Les déterminer à l'aide d'un programme écrit en langage Python.

68 h est la fonction définie sur $]-\infty\,;5[$ par :

$$h(x)=\frac{2x+100}{x-5}$$

On admet que h est décroissante sur $]-\infty\,;5[$ et que pour tout $x<5$, $h(x)<2$.

Γ est la courbe représentative de h dans un repère.

a) Expliquer pourquoi les points à coordonnées entières de Γ ont une abscisse comprise entre -105 et 4.

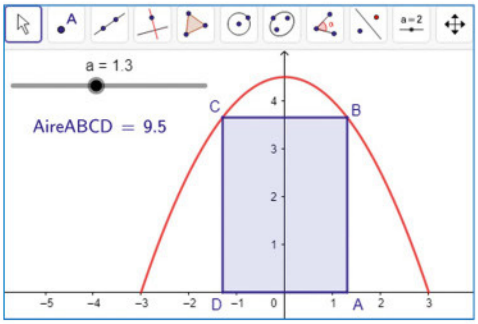
b) Les déterminer à l'aide d'un programme écrit en langage Python.

EXERCICE RÉSOLU

69 Résoudre un problème d'optimisation

f est la fonction définie sur l'intervalle $[-3\ ;\ 3]$ par $f(x) = -0{,}5x^2 + 4{,}5$.

Sa courbe représentative $\mathscr{C}$, obtenue avec un logiciel de géométrie, est donnée ci-contre.



ABCD est le rectangle représenté où A et D appartiennent à l'axe des abscisses, B et C appartiennent à $\mathscr{C}$.

a) Réaliser cette figure en créant un curseur a allant de 0 à 3 avec un incrément de 0,1.

a est l'abscisse du point A.

Faire varier le curseur a, puis formuler une conjecture sur la position du point A qui maximise l'aire du rectangle ABCD.

b) Démontrer cette conjecture.

Solution

a) On conjecture que l'aire du rectangle est maximum pour une valeur de a environ égale à 1,8.

b) On note $x = \text{OA}$ et $\text{S}(x)$ l'aire du rectangle ABCD avec $0 \leqslant x \leqslant 3$.

L'ordonnée de B est $f(x)$ car B appartient à $\mathscr{C}$.

$$\text{S}(x) = 2xf(x) = -x^3 + 9x$$

La fonction S est dérivable sur $[0\ ;\ 3]$ et pour tout nombre réel x de cet intervalle :

$$\text{S}'(x) = -3x^2 + 9 = -3(x^2 - 3)$$

On dresse le tableau de variations de S.

x	0		$\sqrt{3}$		3
$\text{S}'(x)$		$+$	0	$-$	
$\text{S}(x)$	0	↗	$6\sqrt{3}$	↘	0

$\text{S}(\sqrt{3}) = -(\sqrt{3})^3 + 9(\sqrt{3}) = 6\sqrt{3}$

L'aire du rectangle est donc maximum lorsque l'abscisse du point A est $\sqrt{3}$ (environ 1,732).

Pour déterminer le maximum de la fonction S on étudie ses variations en utilisant sa dérivée.

$-3x^2 + 9 = 0$ si, et seulement si, $x^2 = 3$ c'est-à-dire $x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$.

D'où le tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		3		$+\infty$
$-3x^2+9$		$-$	0		$+$		0	$-$			

Mais x appartient à $[0\ ;\ 3]$, donc on ne conserve que la partie colorée en jaune.

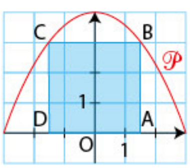
À VOTRE TOUR

70 g est la fonction définie sur l'intervalle $[-3\ ;\ 3]$ par $g(x) = -\dfrac{4}{9}x^2 + 4$ et $\mathscr{P}$ sa courbe dans un repère.

ABCD est le rectangle représenté où A et D appartiennent à l'axe des abscisses, B et C appartiennent à $\mathscr{P}$.

a) Réaliser cette figure avec un logiciel de géométrie et conjecturer la position de A qui maximise l'aire de ABCD.

b) Démontrer cette conjecture.

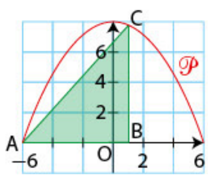


71 h est la fonction définie sur l'intervalle $[-6\ ;\ 6]$ par $h(x) = -\dfrac{2}{9}x^2 + 8$ et $\mathscr{P}$ sa courbe dans un repère.

ABC est le triangle rectangle en B représenté où $\text{A}(-6\ ;\ 0)$, B appartient à l'axe des abscisses et C à la courbe $\mathscr{P}$.

a) Réaliser cette figure avec un logiciel de géométrie et conjecturer la position de B qui maximise l'aire de ABC.

b) Démontrer cette conjecture.



Démontrer et raisonner

72 Étudier la position relative de deux courbes

Méthode
Pour étudier la position relative des courbes représentatives des fonctions f et g, dans un repère, on peut procéder de l'une des façons suivantes :
– on résout l'inéquation $f(x) \leqslant g(x)$;
– on étudie le signe de la différence $f(x) - g(x)$;
– on étudie les variations de la fonction $h = f - g$.

Dans chaque cas, étudier la position relative dans un repère des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentant respectivement les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

a) $f(x) = x^3$ et $g(x) = 3x + 2$;
b) $f(x) = x^3$ et $g(x) = x$;
c) $f(x) = 2x^2 + 2x - 1$ et $g(x) = x$.

73 Relier le sens de variation de f et le signe de $f'(x)$

On se propose de **donner une idée** de la démonstration de la propriété :
« f est une fonction dérivable sur un intervalle I.
Si f est croissante sur I, alors pour tout nombre réel x de I, $f'(x) \geqslant 0$. »
On considère une fonction f dérivable et croissante sur un intervalle I.

a) Démontrer que pour tous nombres réels x et $x+h$ de I avec $h \neq 0$,
$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geqslant 0$$
Envisager les cas $h > 0$ et $h < 0$.

b) On admet que la fonction positive $h \mapsto \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ a une limite positive ou nulle en 0.
Que peut-on en déduire pour $f'(x)$?

74 Modéliser une situation

Méthode
Pour étudier une situation, il peut être utile de définir une variable x, d'exprimer une grandeur en fonction de x et d'étudier la fonction obtenue.

Démontrer que tous les rectangles d'aire 100 ont un périmètre supérieur ou égal à 40.
Noter x l'une des dimensions du rectangle.

Étudier des fonctions. Rechercher des extremums

75 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = x^3 - ax$$
où a est un nombre réel strictement positif.
Déterminer a pour que f admette un extremum en 2.

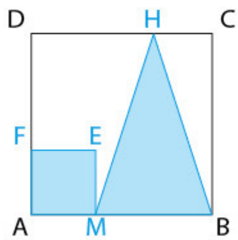
76 Une entreprise extrait et vend une matière première. Pour x tonnes vendues, elle réalise un bénéfice, en euro, donné par la fonction B définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 50]$ par :
$$\mathrm{B}(x) = -x^3 + 10x^2 + 3000x$$
a) Déterminer $\mathrm{B}'(x)$ et étudier son signe selon les valeurs de x.
b) En déduire le tableau de variations de B.
c) Quelle quantité de matière première, en kg, l'entreprise doit-elle vendre pour réaliser un bénéfice maximum ? Quel est alors ce bénéfice, en euro ?
Arrondir à l'unité.
d) Contrôler les résultats à la calculatrice.

77 f est la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = (2{,}4x^2 - 5x + 3)\sqrt{x}$.
Voici sa dérivée $f'(x)$ obtenue à l'aide d'un logiciel de calcul formel.

1 Simplifier(Dérivée($(2.4x^2 - 5x + 3) \cdot \sqrt{x}$))
→ $(12\,x^2 - 15\,x + 3) \cdot \dfrac{\sqrt{x}}{2\,x}$

a) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
b) Démontrer que pour tout nombre réel $x \geqslant 0{,}1$:
$$f(x) \geqslant 0{,}4$$

78 Sur la figure ci-contre, ABCD est un carré, de côté 4, M est un point mobile du segment $[\mathrm{AB}]$. AMEF est un carré, H est un point de $[\mathrm{CD}]$ tel que MBH soit isocèle en H.



a) On pose $x = \mathrm{AM}$.
Démontrer que l'aire du domaine coloré est donnée par $f(x) = x^2 - 2x + 8$.
b) Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ 4]$.
c) Myriam affirme : « L'aire du domaine coloré occupe toujours au moins 40 % de l'aire du carré ABCD. »
Que peut-on en penser ? Justifier la réponse.

79 Algo Ce tableau donne la répartition des salaires annuels (en kilo-euro) d'une petite entreprise.

Salaire	15	18	20	25	30	40
Effectif	10	5	13	4	6	2

1. Calculer le salaire annuel moyen.

2. a) Voici une fonction écrite en langage Python. La saisir et l'exécuter pour compléter ce tableau.

```
def Var(x):
    L=[15,18,20,25,30,40]
    E=[10,5,13,4,6,2]
    S=0
    N=0
    for k in range(0,6):
        N=N+E[k]
        S=S+E[k]*(L[k]-x)**2
    R=S/N
    return R
```

x	16	18	19,5	21,5	33
Var(x)	72,25				

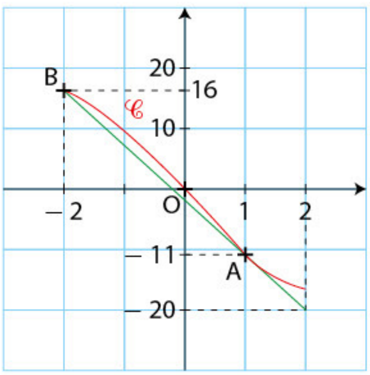
b) Déterminer à l'aide de la calculatrice la variance de la série des salaires.

3. a) Vérifier que pour tout nombre réel x le programme renvoie :

$$\text{Var}(x) = x^2 - 43x + 504{,}25$$

b) Déterminer la valeur de x qui minimise $\text{Var}(x)$. Quel rôle joue ce nombre pour la série des salaires ?

80 Voici une portion de la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx^3 + nx^2 + px + q$ où m, n, p et q sont des nombres réels.



La droite (AB) est la tangente à $\mathscr{C}$ au point $A(1\,;-11)$ et la tangente à $\mathscr{C}$ en O a pour équation $y = -12x$.

1. Déterminer :

a) $f(0)$ et $f'(0)$

b) $f(1)$ et $f'(1)$

2. a) En utilisant les résultats de la question **1. a)**, déterminer p et q.

b) En utilisant les résultats de la question **1. b)**, déterminer m et n.

3. Étudier les variations de la fonction f.

81 h est une fonction définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :

$$h(x) = \frac{2x}{x^2+9}$$

1. a) Vérifier que, pour tout nombre réel $x \geqslant 0$,

$$h'(x) = \frac{2(3+x)(3-x)}{(x^2+9)^2}$$

b) Justifier que $h'(x)$ a le même signe que $3-x$ sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

c) Dresser le tableau de variations de la fonction h.

2. Démontrer que :

a) pour tout nombre réel $x \geqslant 0$,

$$h(x) \leqslant \frac{1}{3}$$

b) pour tout nombre réel $x \geqslant 5$, $0 \leqslant h(x) \leqslant 0{,}3$.

82 Algo f est la fonction définie sur l'intervalle $[1\,;\,500]$ par $f(x) = x\left(24-\sqrt{x}\right)$.

Mélanie affirme : « Pour tout nombre réel x de $[1\,;\,500]$, $f(x) \leqslant 2000$. »

Voici un programme incomplet écrit en langage Python permettant de vérifier si l'affirmation de Mélanie est vraie ou non.

```
1  from math import *
2
3  def f(x):
4      y=x*(24-sqrt(x))
5      return y
6
7  d=0
8  for k in range(1,501):
9      if [        ]:
10         d=1
11 if d==1:
12     print("Affirmation fausse")
13 else:
14     print("Affirmation vraie")
```

a) Après avoir complété la ligne 9, saisir et exécuter le programme. Qu'obtient-on ? Interpréter.

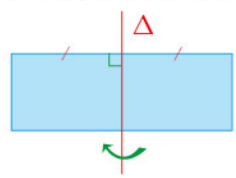
b) Montrer que pour tout $x \geqslant 1$, $f'(x) = 24 - \frac{3}{2}\sqrt{x}$.

c) Déterminer un nombre réel M tel que, pour tout nombre réel x de $[1\,;\,500]$, $f(x) \leqslant M$.

Résoudre un problème d'optimisation

83 On fait tourner un rectangle de périmètre 60 cm autour de l'axe de symétrie Δ représenté ci-dessous.

Déterminer les dimensions du rectangle pour que le solide de révolution ainsi obtenu ait :

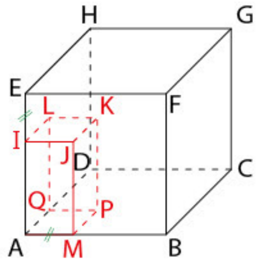


a) le plus grand volume ;

b) la plus grande aire latérale ;

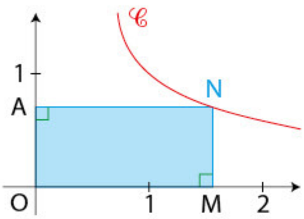
c) la plus grande aire totale.

84 ABCDEFGH est un cube d'arête 6 cm.
M est un point de l'arête [AB] et I un point de l'arête [AE] tels que $AM = EI = x$.
On construit à l'intérieur du cube le parallélépipède rectangle AMPQIJKL de base le carré AMPQ.



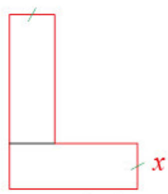
a) Exprimer le volume $V(x)$, en cm^3, de AMPQIJKL en fonction de x.
b) Étudier les variations de la fonction V sur l'intervalle $[0 ; 6]$.
c) En déduire la position du point M sur l'arête [AB] pour laquelle le volume $V(x)$ est maximum.

85 **1.** p est la fonction définie sur l'intervalle $]0 ;+\infty[$ par $p(x) = x + \dfrac{1}{x}$.
a) Étudier les variations de la fonction p.
b) Démontrer que le minimum de la fonction p sur l'intervalle $]0 ;+\infty[$ est égal à 2.
2. Sur la figure ci-contre, $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction f définie sur $]0 ;+\infty[$ par :
$$f(x) = \frac{1}{x}$$



À partir d'un point N de $\mathscr{C}$, on construit comme il est indiqué le rectangle OMNA.
Déterminer les dimensions du rectangle OMNA de périmètre minimum.

86 Deux rectangles identiques d'aire 2 019 sont accolés comme le montre la figure ci-contre pour former un L. On note x l'une des dimensions de ces rectangles.



a) Justifier que le périmètre du polygone coloré en rouge est donné par $P(x) = 2x + \dfrac{8\,076}{x}$.
b) Étudier les variations de la fonction P sur l'intervalle $]0 ;+\infty[$.
c) En déduire le périmètre minimum du polygone coloré en rouge.

87 Sandrine vient de plonger dans la piscine municipale profonde de 5 m.
Sa trajectoire sous l'eau peut être modélisée sur l'intervalle $[0 ; 12]$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{x^2 - 2x + 5}{x + \frac{1}{2}}$$
où x désigne la distance horizontale, en m, parcourue et $f(x)$ la distance, en m, par rapport au fond de la piscine.
À quelle distance minimum du fond de la piscine Sandrine est-elle passée lors de son plongeon ?

S'entraîner à la logique → p. 336

88 Quantificateurs
f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :
$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 4}{x}$$
Dans chaque cas, dire si la proposition est vraie ou fausse.
a) Il existe un nombre réel x tel que $f'(x) = 0$.
b) Pour tout nombre réel $x > 0$, $f'(x) \geqslant 0$.
c) Il existe un intervalle sur lequel f est croissante.
d) Il existe un nombre réel x_0 tel que $f(x_0)$ soit un minimum local de f.
e) Pour tout nombre réel $x \neq 0$, $f(x) \leqslant -6$.

89 Négation d'une proposition
Écrire la négation de chacune des propositions suivantes.
P : « Pour tout nombre réel x, $f(x) \leqslant 2$. »
Q : « Il existe un nombre réel x tel que $f'(x) \geqslant 0$. »

90 Réciproque et contraposée
f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
Voici une implication :
« Si pour tout nombre réel x d'un intervalle I, $f'(x) \geqslant 0$, alors f est croissante sur I. »
a) Écrire la réciproque et la contraposée de cette implication.
b) Pour chacune de ces implications, dire si elle est vraie ou fausse.

91 Algo Histoire des maths — Découvrir la méthode de Newton

Représenter **Raisonner** **Calculer**

f est une fonction dérivable sur un intervalle I telle que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution *a* dans I.

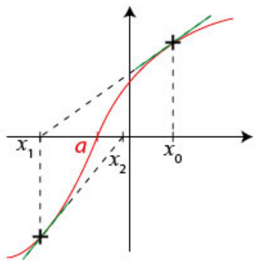
Le mathématicien Isaac Newton a décrit au milieu du 17e siècle un algorithme efficace pour approximer *a*.

Pour cela, en un point A d'abscisse x_0 de I proche de *a*, il approxime localement la courbe par la tangente au point A, c'est-à-dire qu'il approxime $f(a)$ par $f(x_0) + (a - x_0)f'(x_0)$. Ainsi si $f'(x_0) \neq 0$, alors de $f(a) = 0$ il déduit que $a \approx x_1$ avec $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$.

Il réitère ce procédé à x_1 pour obtenir x_2, puis $x_3, \dots$.

Il obtient donc une suite (x_n) définie par x_0 et pour tout nombre *n* de $\mathbb{N}$, par

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$



Graphiquement, cela revient à chercher, de proche en proche, l'abscisse du point d'intersection de la tangente au point d'abscisse x_n à la courbe de *f* avec l'axe des abscisses.

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 2x - 5$.

a) Étudier les variations de la fonction *f*.

b) On admet que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution *a* dans l'intervalle $[2\ ;\ 3]$.

Voici un programme écrit en langage Python.

```python
def f(x):
    y=x**3-2*x-5
    return y

def g(x):
    z=3*x**2-2
    return y

def Newton():
    x=2
    while abs(f(x)/g(x))>=10**(-5):
        x=x-f(x)/g(x)
    return x
```

Exécuter pas à pas la fonction Newton et compléter le tableau ci-dessous.

n	0	1	2	3
x_n	2			
$\left\lvert\dfrac{f(x_n)}{g(x_n)}\right\rvert$	0,1			

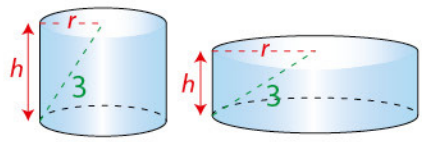
c) Saisir le programme, exécuter la fonction Newton et vérifier votre résultat.

d) Donner l'arrondi de *a* au dix-millième.

92 Modéliser une situation

Chercher **Modéliser**

Pour préparer son mariage en 1612, Kepler reçut un négociant en vin. Celui-ci lui indiqua que, pour connaître le prix d'un baril, il glissait une tige en diagonale jusqu'au fond du baril et que la longueur de tige enfoncée déterminait ensuite le prix. On s'intéresse aux barils en forme de cylindre pour lesquels la longueur de tige enfoncée mesure 3 pieds. On note *r* et *h* le rayon et la hauteur (en pieds) du baril.



Déterminer les dimensions du baril de volume maximum.

93 Utiliser la dérivée seconde

Raisonner **Calculer**

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 0{,}15x^5 - 2x^3 + 12x + 200$$

1. a) Déterminer la fonction dérivée f' de *f*.

b) Déterminer la fonction dérivée f'' de f'. On dit que f'' est la fonction dérivée seconde de la fonction *f*.

2. a) Étudier le signe de $f''(x)$, puis dresser le tableau de variations de f'.

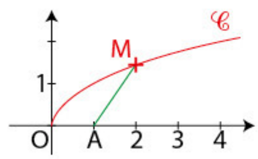
b) Déterminer le signe de $f'(x)$.

c) En déduire le sens de variation de la fonction *f*.

94 Imaginer une stratégie

Chercher **Raisonner**

Dans un repère orthonormé, $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction racine carrée. A est le point de coordonnées $(1\ ;\ 0)$.



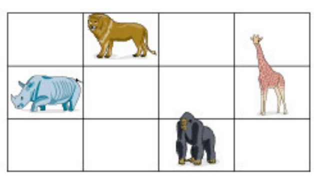
Déterminer la position du point M de $\mathscr{C}$ le plus proche de A.

95 Déterminer une aire maximum

Problème ouvert

Chercher **Modéliser** **Raisonner**

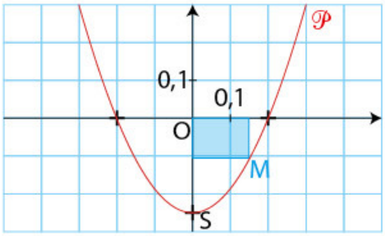
Un zoo en rénovation dispose d'une clôture de 2 km pour délimiter douze box rectangulaires identiques selon le plan ci-contre. Déterminer les dimensions d'un box qui donnent le maximum d'espace aux animaux.



96 Prendres des initiatives

Chercher **Modéliser**

Dans un repère orthonormé, $\mathscr{P}$ est la parabole de sommet $S\left(0\,;-\dfrac{1}{4}\right)$ représentée ci-dessous. M un point de $\mathscr{P}$ d'abscisse comprise entre 0 et 0,5.



Déterminer la position du point M pour laquelle l'aire du rectangle bleu est maximum.

97 Comprendre une situation

Narration de recherche

Chercher **Communiquer**

Rédiger les différentes étapes de la recherche, sans omettre les différentes pistes et les changements de méthode.

Problème Un poids lourd doit effectuer régulièrement un trajet de 1 000 km. Lorsqu'il roule à la vitesse moyenne v, en $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$, sa consommation, en litre pour 100 km, est donnée par la relation :

$$C(v) = \frac{600}{v} + \frac{v}{5}$$

Le salaire horaire du chauffeur est de 10,20 € et le litre de carburant coûte 1,50 €.

Quelle doit être la vitesse moyenne v pour minimiser le prix de revient du voyage ?

98 Conjecturer puis démontrer

Chercher **Calculer**

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{4x^2}{4+x^4}$.

On se propose de démontrer qu'il existe deux nombres réels m et M tels que pour tout nombre réel x :

$$m \leqslant f(x) \leqslant M$$

a) Afficher la courbe représentative de f à l'écran d'une calculatrice. Conjecturer des valeurs possibles de m et M.

b) Démontrer les conjectures précédentes.

99 Comparer deux nombres

Chercher **Raisonner**

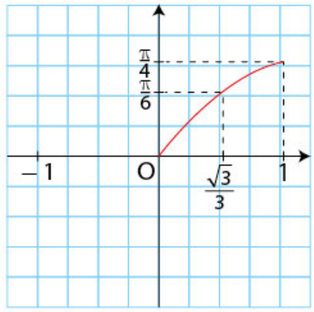
Comparer, sans utiliser la calculatrice, les deux nombres $A = \dfrac{1{,}089^2}{2{,}089}$ et $B = \dfrac{1{,}088^2}{2{,}088}$.

100 Étudier une fonction dont on connaît la dérivée

Chercher **Raisonner**

On admet l'existence d'une fonction f dérivable sur l'intervalle $[-1\,;\,1]$ et vérifiant $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ et $f(0) = 0$.

Voici une partie de sa courbe dans le repère ci-dessous.



a) On note φ la fonction définie sur $[-1\,;\,1]$ par :

$$\varphi(x) = f(x) + f(-x)$$

Montrer que pour tout x de $[-1\,;\,1]$, $\varphi'(x) = 0$.

b) En déduire que pour tout x de $[-1\,;\,1]$, $\varphi(x) = 0$.

c) Montrer que la fonction f est impaire.

d) Recopier et compléter le graphique.

101 Finding a geographic coordinates

Chercher **Communiquer**

On January 15, 2010, the longest annular solar eclipse until 3040 occurred over Africa and the Indian Ocean (in an annular eclipse, the sun is partially obscured by the moon and looks like a ring). The path of the full eclipse on the earth's surface is modeled by:

$$f(x) = 0{,}0125x^2 - 1{,}157x + 22{,}864, \quad 15 < x < 90$$

where x is the number of degrees of longitude east of the prime meridian and $f(x)$ is the number of degrees of latitude north (positive) or south (negative) of the equator. (*source*: Nasa)

Find the longitude and latitude of the southernmost point at which the full eclipse could be viewed.

102 Relier tangente et extremum

Chercher | Raisonner

f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\mathscr{C}$ est sa courbe représentative dans un repère.
Pour tout nombre réel a, l'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a est :

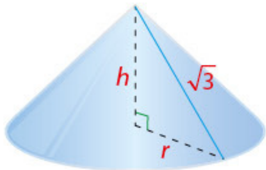
$$y = (-2a + 1)x + a^2 + 6$$

Montrer que f admet un maximum en un nombre réel que l'on précisera.

103 Maximiser un volume

Calculer | Communiquer

On obtient un cône de révolution en faisant tourner un triangle rectangle d'hypoténuse $\sqrt{3}$ m autour de l'un des côtés de l'angle droit.



a) Parmi tous les triangles rectangles d'hypoténuse $\sqrt{3}$ m, déterminer les longueurs des deux autres côtés de celui pour lequel le volume du cône est maximum.
b) Donner ce volume maximum.

Des Défis

104 Retrouver le code

Un code secret *mcdu* (où m, c, d, u sont des chiffres tels que $m < c < d < u$) est constitué à l'aide des coordonnées des extremums de la fonction f définie sur l'intervalle $[0,5 \,;\, 3,4]$ par :

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$$

Quels sont les chiffres de ce code ?

105 Étudier des vitesses

Charles se rend à bicyclette de la ville A à une ville voisine B distante de d kilomètres ($d > 0$).
Il roule à la vitesse moyenne de 20 km·h^{-1}.
Il effectue le retour à la vitesse moyenne de x km·h^{-1}.
Étudier les variations de la différence entre la vitesse moyenne de Charles sur le parcours aller-retour et la moyenne arithmétique des deux vitesses.

106 Étudier des losanges

p désigne un nombre réel strictement positif.
Parmi les losanges de périmètre p, en existe-t-il dont l'aire est maximum ?

OBJECTIF BAC

107 Algo Étudier une consommation — 45 min

D'après Bac 2018, Polynésie

On s'intéresse à la consommation d'un véhicule roulant aux biocarburants en fonction de la vitesse de ce véhicule. Cette consommation est modélisée par la fonction f définie sur l'intervalle $[30 \,;\, 130]$ par :

$$f(x) = \frac{8x^2 - 800x + 30000}{x^2}$$

où x est exprimé en km·h^{-1} et $f(x)$ est exprimé en litre pour 100 km.

a) Suivant ce modèle, lorsque le véhicule roule à 30 km·h^{-1}, quelle est sa consommation ?
Et lorsqu'il roule à 50 km·h^{-1} ?
b) Montrer que la dérivée f' de f sur l'intervalle $[30 \,;\, 130]$ peut s'écrire $f'(x) = \dfrac{800x - 60000}{x^3}$.
c) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[30 \,;\, 130]$ et en déduire le tableau de variations de f sur cet intervalle.
d) Pour quelle vitesse la consommation est-elle minimum ? Que vaut alors cette consommation ?
Arrondir au centième.
e) On considère l'algorithme ci-dessous.

```
x ← 30
y ← 14
Tant que y > 4
    x ← x + 1
    y ← (8x² − 800x + 30000) / x²
Fin Tant que
```

Quelle est la valeur de x obtenue à la fin de l'exécution de l'algorithme ? En donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.

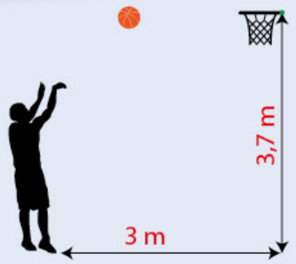
Exploiter ses compétences

108 Calculer une hauteur

La situation problème

Pour espérer marquer un panier, un joueur de basket doit envoyer son ballon vers un point du panneau. Utiliser les différentes informations pour savoir si le joueur a des chances de marquer son panier.

DOC 1 La situation du joueur



DOC 2 Les conditions initiales

Le ballon quitte les mains du joueur à une hauteur de 2,20 m et la direction au départ de son lancer a pour pente 2.

DOC 3 La trajectoire du ballon

Dans un repère orthonormé, d'origine les pieds du basketteur, la trajectoire du ballon est la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;3]$ par $f(x) = -0{,}5x^2 + bx + c$ où b et c sont des nombres réels. $f(x)$ est la hauteur, en m, atteinte par le ballon lorsqu'il a parcouru horizontalement x m.

109 Calculer un RMD

La situation problème

Au Canada, dans la baie d'Hudson, on s'intéresse beaucoup au lièvre blanc pour sa fourrure. Un écologiste étudie le RMD de cette population de lièvres. Utiliser les différentes informations pour calculer le RMD de cette population.

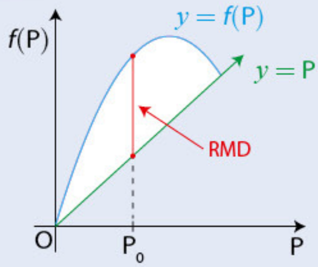
DOC 1 La définition du RMD

Le rendement maximal durable (RMD) d'une espèce est la plus grande quantité de cette espèce que l'on peut extraire en moyenne et à long terme sans affecter son processus de reproduction.

DOC 2 La loi de reproduction

P étant le nombre de lièvres, en milliers, une année donnée, $f(\mathrm{P}) = -0{,}025\mathrm{P}^2 + 4\mathrm{P}$ représente le nombre de lièvres, en milliers, l'année suivante.

DOC 3 Courbe de reproduction



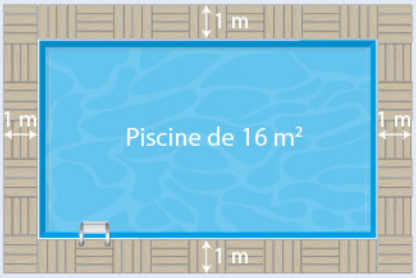
Dans ce repère, la droite d'équation $y = \mathrm{P}$ représente les populations stables d'une année à l'autre.

110 Vérifier la faisabilité d'une margelle

La situation problème

Louis décide de construire une piscine et d'utiliser son stock de caillebotis pour faire une margelle.
Utiliser les différentes informations pour aider Louis à déterminer le coût du traitement optimal de la margelle.

DOC 1 Le plan de la piscine



DOC 2 Le stock de caillebotis

140 caillebotis de dimensions 50 cm × 50 cm.

DOC 3 Prix du traitement

Un saturateur est un produit qui assure la protection du bois contre les intempéries. Voici des informations sur certains bidons de saturateur.

Contenance	Rendement	Prix
1 L	12 m²	14,90 €
2,5 L	30 m²	29,90 €
5 L	40 m²	47,90 €

111 Calculer un bénéfice maximum

La situation problème

Une entreprise produit et vend un nouveau parfum. Les ventes s'envolent et l'entreprise s'intéresse au bénéfice quotidien maximum.
Utiliser les différentes informations pour calculer le bénéfice quotidien maximum.

DOC 1 La recette quotidienne

La recette quotidienne de l'entreprise, en milliers d'euros, est modélisée par la fonction définie sur $[0\,;10]$ par :

$$R(x) = -x^4 + 6x^3 - 12x^2 + 10x$$

où x est la quantité, en centaines de litres, de parfum vendue en un jour.

DOC 2 Les coûts fixes journaliers

Les coûts fixes journaliers de l'entreprise s'élèvent à 2 000 €.

DOC 3 Un écran de calcul formel

1	Dérivée$(-x^4 + 6x^3 - 12x^2 + 10x - 2)$
	→ $\mathbf{-4x^3 + 18x^2 - 24x + 10}$
2	Factoriser$(-4x^3 + 18x^2 - 24x + 10)$
	→ $\mathbf{-2(x-1)^2(2x-5)}$