5 Représentations paramétriques et équations cartésiennes

HISTOIRE DES MATHS

Avec l'introduction des coordonnées dans un repère du plan, **René Descartes** fait basculer des objets jusque-là purement géométriques (points, droites, segments, etc.) dans le domaine algébrique. Ces objets peuvent désormais être décrits par leurs **coordonnées** ou leurs équations. Mais la méthode de Descartes reste limitée au plan, c'est-à-dire à deux coordonnées.

Plus d'un siècle plus tard, vers 1760, **Euler** et **Lagrange** développent ces notions dans l'espace et établissent les équations de droites et de plans de l'espace, en utilisant des repères à trois axes de coordonnées.

Durant cette période, la géométrie analytique continue de se développer, notamment avec **Gaspard Monge**, qui propose plusieurs mémoires à l'Académie des Sciences. Il résout ainsi divers problèmes géométriques de manière analytique.


René Descartes


Gaspard Monge

▶ **René Descartes** (1596-1650) est célèbre pour la formule « *Je pense, donc je suis* ». Il est considéré comme l'un des fondateurs de la philosophie moderne. En mathématiques, il est à l'origine de la géométrie analytique (et de l'adjectif « cartésien »).

▶ **Gaspard Monge** (1746-1818) est un mathématicien et homme politique français. Il joue un rôle décisif lors de la Révolution française, notamment par la création d'un nouveau système éducatif ou encore en instaurant un système de poids et mesures fondé sur le système décimal.

1637 Descartes publie *La Géométrie* : avec le concept de repère, débute l'ère de la géométrie analytique.

1670 Leibniz et Newton développent le calcul infinitésimal.

1760 Euler publie des travaux fondamentaux sur la géométrie des surfaces.

1799 Monge invente la géométrie descriptive (à l'origine du dessin industriel).

1598 L'édit de Nantes est promulgué par Henri IV

1633 Galilée est condamné par l'Inquisition

1683 Mort de Colbert

1748 *De l'Esprit des lois* de Montesquieu

1794 Création de l'École polytechnique

1550 1600 1650 1700 1750

Passage de la comète de Hale-Bopp en 1997 au-dessus des observatoires du Mauna Kea à Hawaï (USA).

Chaque année, des centaines de comètes, visibles au télescope, traversent le système solaire. Chacune d'elles a plusieurs queues. La plus visible est formée de gaz et de poussières qui se consument à l'approche du Soleil. Une autre, formée d'ions, est modélisée, à chaque instant *t*, par une droite décrite grâce aux coordonnées de la comète et d'un vecteur d'extrémités le Soleil et la comète.

Les contenus et capacités travaillés dans ce chapitre

	Savoir-faire	Exercices
• Déterminer une représentation paramétrique d'une droite. Reconnaître une droite de représentation paramétrique donnée.	1 à 4	16 à 26
• Déterminer un vecteur normal à un plan, une équation cartésienne d'un plan.	5 à 8	27 à 46
• Résoudre un système simple d'équations linéaires illustrant une situation de géométrie dans l'espace, puis interpréter les solutions.	9 à 11	47 à 59
• Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur une droite ou sur un plan.	12 à 15	60 à 62, 86

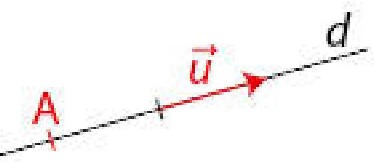
Bien démarrer

Calcul mental

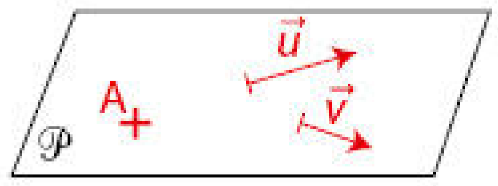
Rappels utiles

• Droites et plans de l'espace

Une droite peut être caractérisée par un point et un vecteur directeur.



Un plan peut être caractérisé par un point et deux vecteurs non colinéaires.



• Vecteurs de l'espace et coordonnées

$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormée de l'espace.

Produit scalaire de $\vec{u}(x\,;y\,;z)$ et $\vec{v}(x'\,;y'\,;z')$:

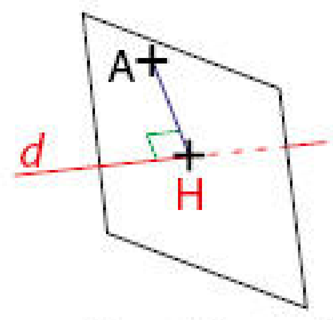
$$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy' + zz'.$$

$\vec{u}(x\,;y\,;z)$ et $\vec{v}(x'\,;y'\,;z')$ sont colinéaires si, et seulement si, il existe un réel λ tel que :

$$x' = \lambda x,\ y' = \lambda y,\ z' = \lambda z.$$

• Projection orthogonale sur une droite

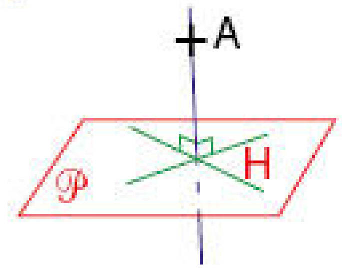
Le projeté orthogonal d'un point A sur une droite d est le point H d'intersection de d et du plan orthogonal à d passant par A.



Si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de d, alors H est le point de d tel que $\overrightarrow{AH}\cdot\vec{u} = 0$.

• Projection orthogonale sur un plan

Le projeté orthogonal d'un point A sur un plan $\mathcal{P}$ est le point H d'intersection de $\mathcal{P}$ et de la droite orthogonale à $\mathcal{P}$ passant par A.



En notant $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires de $\mathcal{P}$, H est le point de $\mathcal{P}$ tel que $\overrightarrow{AH}\cdot\vec{u} = 0$ et $\overrightarrow{AH}\cdot\vec{v} = 0$.

À l'oral — Questions-Tests

Pour chaque question, il y a une seule réponse exacte.

1 A, B, C sont trois points distincts et non alignés de l'espace.

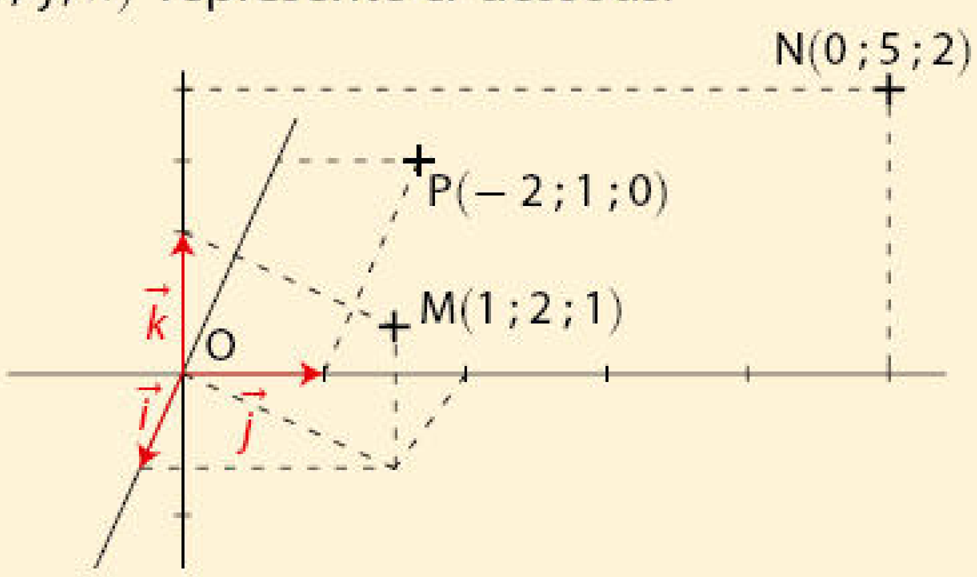
a) La droite (AB) est caractérisée par :

(1) le point C et le vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$
(2) le point B et le vecteur directeur $\overrightarrow{BA}$
(3) le point A et le vecteur directeur $\overrightarrow{BC}$

b) Le plan (ABC) est caractérisé par :

(1) le point A et les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$
(2) le point C et les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $2\overrightarrow{BC}$
(3) le point C et les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

2 M, N et P sont les points du repère orthonormé $(O\,;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ représenté ci-dessous.



a) Le vecteur $\overrightarrow{MN}$ a pour coordonnées :

(1) $(1\,;7\,;2)$ **(2)** $(-1\,;3\,;1)$ **(3)** $(1\,;-3\,;-1)$

b) Le vecteur $\overrightarrow{MP}$ a pour coordonnées :

(1) $(-3\,;-1\,;-1)$ **(2)** $(3\,;1\,;-1)$ **(3)** $(-1\,;3\,;1)$

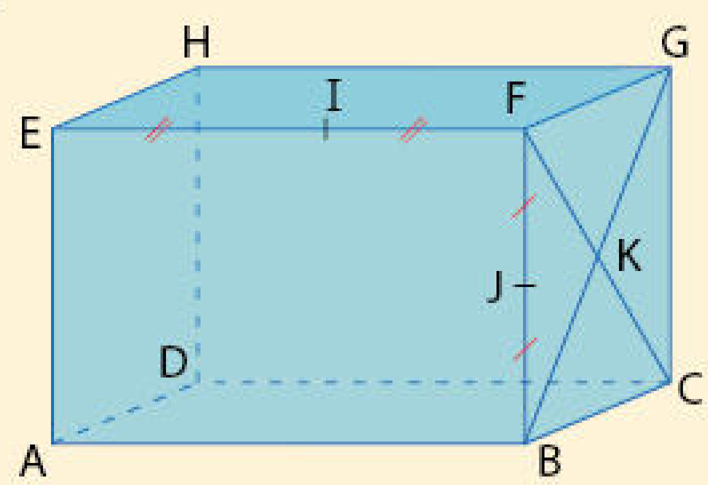
c) Les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$ sont :

(1) orthogonaux **(2)** colinéaires **(3)** ni l'un ni l'autre

d) Les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OP}$ sont :

(1) orthogonaux **(2)** colinéaires **(3)** ni l'un ni l'autre

3 ABCDEFGH est le pavé droit représenté ci-contre. I et J sont les milieux respectifs des segments [EF] et [BF]. K est le centre de la face BCGF.



a) Le projeté orthogonal du point I sur le plan (ADE) est :

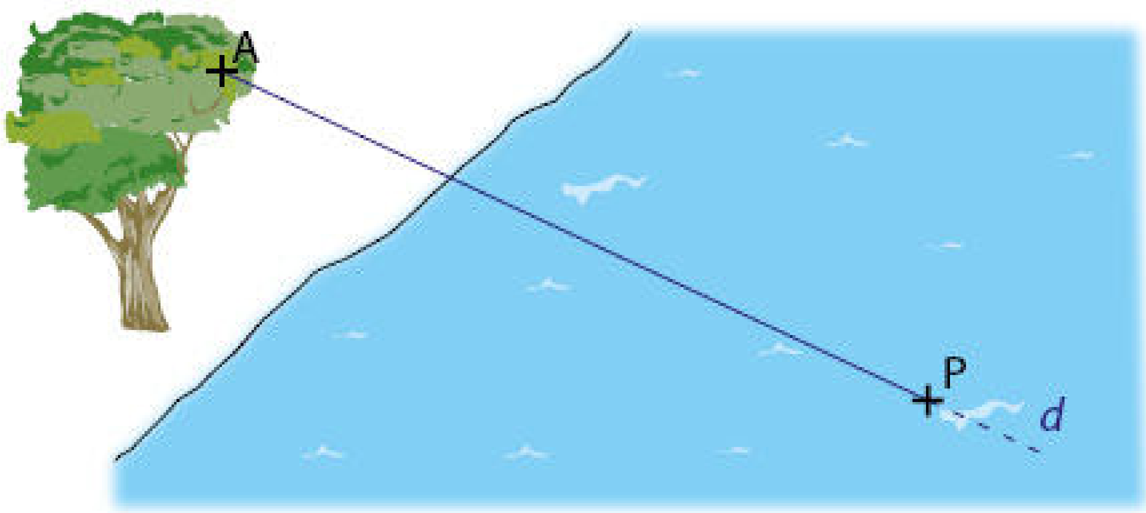
(1) le point A **(2)** le point D **(3)** le point E

b) Le projeté orthogonal de K sur la droite (DH) est :

(1) le point D **(2)** le milieu de [DH] **(3)** le point J

1 Représentations paramétriques d'une droite

À l'affût sur une branche (au point A), un martin-pêcheur a repéré un poisson (au point P). Il s'élance vers sa proie selon une trajectoire que l'on modélise par la droite *d*. La situation est schématisée ci-dessous.



Dans un repère de l'espace, on donne A$(1\,;6\,;4)$ et P$(3\,;12\,;-2)$.

1 Déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur de la droite *d*.

2 Une seconde après son envol, le martin-pêcheur se trouve au point B de coordonnées $(2\,;9\,;1)$.

a) Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

b) Justifier que l'oiseau se trouve sur la bonne trajectoire, c'est-à-dire sur la droite *d*.

3 À un instant de son vol, le martin-pêcheur se trouve en un point M de coordonnées $(x\,;y\,;z)$ de la droite *d*.

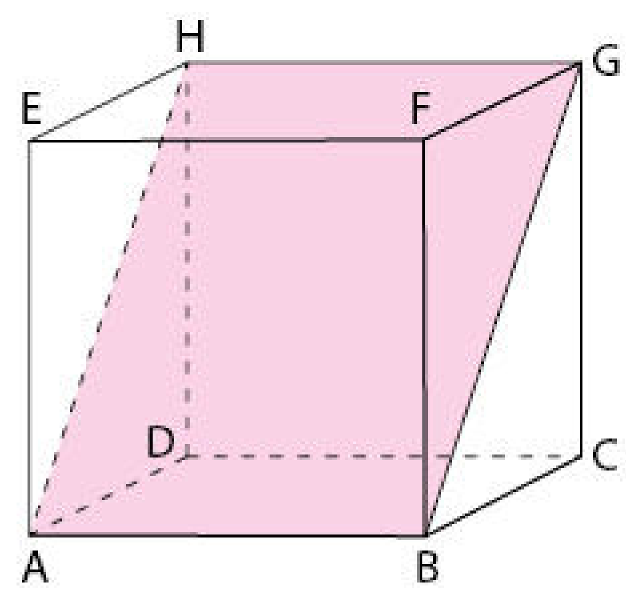
a) Que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AP}$?

b) Démontrer que M$(x\,;y\,;z)$ appartient à la droite *d* si, et seulement si, il existe un nombre réel *t* tel que :
$\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 6+6t \\ z = 4-6t \end{cases}$. On dit que ce système est **une représentation paramétrique de la droite *d***.

c) Pour quelle valeur de *t*, le martin-pêcheur atteint-il sa proie ?

2 Vecteur normal et équations cartésiennes d'un plan

On considère le cube ABCDEFGH d'arête 1 représenté ci-contre. On se place dans le repère orthonormé $(D\,;\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$.



1 **a)** Déterminer les coordonnées des points A, B, F, G.

b) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{CF}$.

c) Calculer chacun des produits scalaires $\overrightarrow{CF}\cdot\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CF}\cdot\overrightarrow{BG}$ en utilisant l'expression analytique du produit scalaire dans l'espace.

d) Que peut-on en déduire pour la droite (CF) et le plan (ABG) ?

On dit que $\overrightarrow{CF}$ est un **vecteur normal** au plan (ABG).

2 M désigne un point de coordonnées $(x\,;y\,;z)$ appartenant au plan (ABG).

a) Sans effectuer de calculs, déterminer le produit scalaire $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CF}$. Justifier.

b) Démontrer que M$(x\,;y\,;z)$ appartient au plan (ABG) si, et seulement si, $x+z-1=0$.

On dit que $x+z-1=0$ est **une équation cartésienne du plan (ABG)**.

c) Le point N$(9\,;-20\,;7)$ appartient-il au plan (ABG) ?

Cours

Exercices
- **1** à **4** (ci-contre)
- **16** à **26**

Vidéo JAICOMPRIS.COM — Cette notion est présentée en vidéo

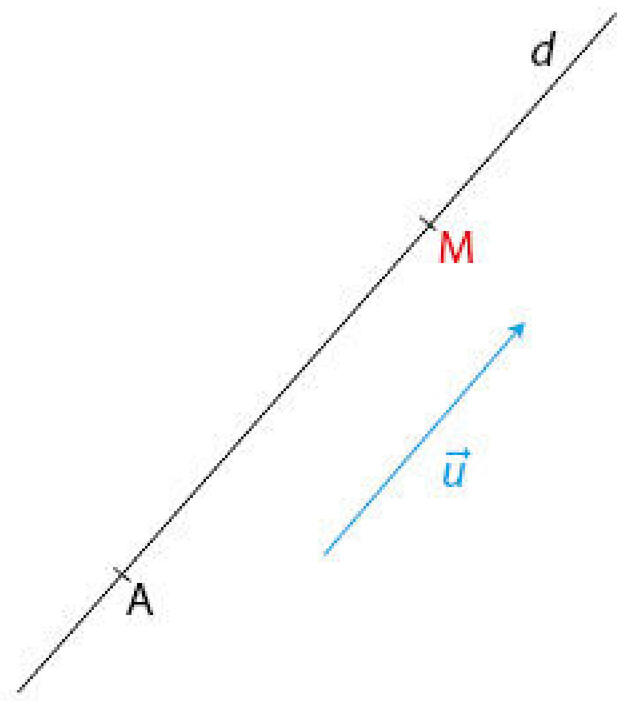
1 Représentations paramétriques d'une droite

$(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est un repère orthonormé de l'espace.

A Principe

d est la droite qui passe par le point A de coordonnées $(x_A\,;y_A\,;z_A)$ et qui admet pour vecteur directeur le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(a\,;b\,;c)$.
Dire qu'**un point M de coordonnées $(x\,;y\,;z)$ appartient à d**, équivaut à dire que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, c'est-à-dire qu'il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$, autrement dit tel que :

$$(\mathbf{S})\ \begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb. \\ z = z_A + tc \end{cases}$$



Définition

Le système (S) est une **représentation paramétrique** de la droite d.
t est le **paramètre** de cette représentation.

Exemple

d est la droite qui passe par le point $A(2\,;-3\,;1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(3\,;4\,;2)$.

Une représentation paramétrique de d est $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -3 + 4t \\ z = 1 + 2t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

coordonnées de A — coordonnées de $\vec{u}$

B Utiliser une représentation paramétrique

Une droite d admet une infinité de représentations paramétriques. En effet, on peut choisir un point de d autre que A ou choisir un vecteur non nul colinéaire à $\vec{u}$ et autre que $\vec{u}$.

Exemple

On reprend l'exemple du paragraphe A.

- Le point $B(5\,;1\,;3)$ (obtenu pour $t = 1$) appartient à d, donc une autre représentation paramétrique de d est $\begin{cases} x = 5 + 3t' \\ y = 1 + 4t' \\ z = 3 + 2t' \end{cases} (t' \in \mathbb{R})$.
- Le vecteur $\vec{v}(-6\,;-8\,;-4)$ est un autre vecteur directeur de d, donc une autre représentation paramétrique de d est $\begin{cases} x = 2 - 6t'' \\ y = -3 - 8t'' \\ z = 1 - 4t'' \end{cases} (t'' \in \mathbb{R})$.

Remarque : par un raisonnement analogue à celui du paragraphe A, on obtient une représentation paramétrique d'un plan à partir d'un de ses points et d'un couple de vecteurs non colinéaires de ce plan (voir exercice **75** p. 160).

EXERCICES RÉSOLUS

1 Déterminer une représentation paramétrique d'une droite

Dans un repère orthonormé de l'espace, on donne les points A$(-2\,;4\,;0)$ et B$(2\,;-3\,;2)$.

a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).

b) Le point C$(-10\,;18\,;-4)$ appartient-il à la droite (AB) ?

Solution

a) $\overrightarrow{AB}(4\,;-7\,;2)$ est un vecteur directeur de la droite (AB) et A$(-2\,;4\,;0)$ est un point de la droite (AB).

Une représentation paramétrique de la droite (AB) est :

$$\begin{cases} x=-2+4t \\ y=4-7t \quad (t\in\mathbb{R}). \\ z=2t \end{cases}$$

b) Dire que le point C appartient à la droite (AB) équivaut à dire qu'il existe un réel t tel que

$$\begin{cases} -10=-2+4t \\ 18=4-7t \\ -4=2t \end{cases} \text{ c'est-à-dire } \begin{cases} t=-2 \\ t=-2. \\ t=-2 \end{cases}$$

Donc le point C appartient à la droite (AB).

Lorsque les trois équations ont pour solutions au moins deux valeurs différentes de t, alors le point n'appartient pas à la droite.

2 Reconnaître une droite de représentation paramétrique donnée

Dans un repère orthonormé, d est la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x=5-2t \\ y=-1+3t\ (t\in\mathbb{R}). \\ z=2 \end{cases}$

a) Déterminer les coordonnées de deux points de d.

b) Déterminer les coordonnées de deux vecteurs directeurs de d.

Solution

a) • Pour $t=0$, on obtient le point A$(5\,;-1\,;2)$ de d.

• Pour $t=-1$, on obtient le point B$(7\,;-4\,;2)$ de d.

b) • On utilise les nombres écrits devant le paramètre t :

$\vec{u}(-2\,;3\,;0)$ est un vecteur directeur de d.

• On choisit un vecteur non nul colinéaire à $\vec{u}$:

par exemple $\vec{v}=-\dfrac{1}{2}\vec{u}$ de coordonnées $\left(1\,;-\dfrac{3}{2}\,;0\right)$

est un autre vecteur directeur de d.

À chaque valeur de t correspond un point M de (AB). Et à chaque point M de (AB) correspond une valeur de t.

Dans la représentation paramétrique de d, on remarque que $z=2$, c'est-à-dire $z=2+0t$.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 1

3 Dans un repère orthonormé de l'espace, on donne les points I$(-1\,;0\,;2)$ et J$(3\,;4\,;-1)$.

a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (IJ).

b) Dans chaque cas, dire si le point appartient à la droite (IJ).

• S$(1\,;4\,;2)$ • T$(7\,;8\,;-4)$

Sur le modèle de l'exercice résolu 2

4 Dans un repère orthonormé, d est la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x=-2+2t \\ y=5t \quad (t\in\mathbb{R}). \\ z=-3-4t \end{cases}$

a) Déterminer les coordonnées de deux points de d.

b) Déterminer les coordonnées de deux vecteurs directeurs de d.

Cours

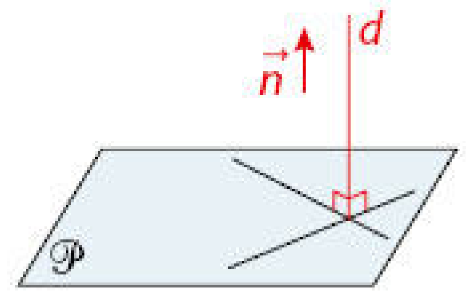
Exercices
- 5 à 8 (ci-contre)
- 27 à 46

2 Équations cartésiennes d'un plan

A Vecteur normal à un plan

Définition

Dire qu'un vecteur non nul $\vec{n}$ est **normal** à un plan $\mathscr{P}$ signifie que toute droite de vecteur directeur $\vec{n}$ est orthogonale au plan $\mathscr{P}$.

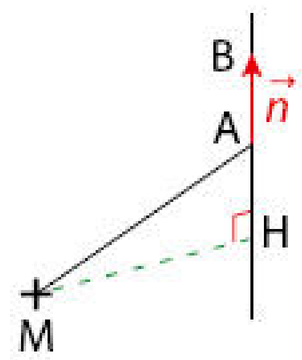


Propriété

A est un point de l'espace et $\vec{n}$ est un vecteur non nul.
L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ est le plan $\mathscr{P}$ passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

Démonstration

On note B le point distinct de A tel que $\vec{n} = \overrightarrow{AB}$ et H le projeté orthogonal d'un point M sur la droite (AB). Avec ces notations : $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB}$.
Ainsi $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ si, et seulement si, $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, c'est-à-dire A = H car les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.



Autrement dit, $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ si, et seulement si, A est le projeté orthogonal de M sur la droite (AB).
L'ensemble cherché est donc le plan passant par A et orthogonal à (AB).

B Équations cartésiennes d'un plan

Propriétés – Définition

L'espace est muni d'un repère **orthonormé**.
(1) Un plan de vecteur normal $\vec{n}(a\,;b\,;c)$ a une équation de la forme $\boldsymbol{ax + by + cz + d = 0}$, où d désigne un nombre réel. On dit que c'est une **équation cartésienne** de ce plan.
(2) Réciproquement, a, b, c et d étant quatre nombres réels donnés avec a, b et c **non tous nuls**, l'ensemble des points $M(x\,;y\,;z)$ tels que $\boldsymbol{ax + by + cz + d = 0}$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}(a\,;b\,;c)$.

Démonstrations

Vidéo
JaiCompris.com
Cette démonstration est présentée en vidéo

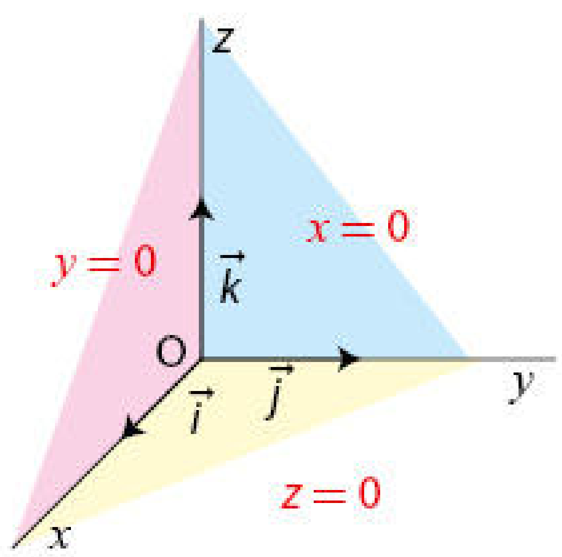
(1) Un point $M(x\,;y\,;z)$ appartient au plan $\mathscr{P}$ passant par $A(x_A\,;y_A\,;z_A)$ et de vecteur normal $\vec{n}$ si, et seulement si, $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$, c'est-à-dire

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0.$$

En posant $d = -(ax_A + by_A + cz_A)$, on obtient $ax + by + cz + d = 0$.
(2) $\mathscr{E}$ est l'ensemble des points $M(x\,;y\,;z)$ qui vérifie $ax + by + cz + d = 0$ où a, b et c sont des nombres réels non tous nuls. On peut supposer, par exemple, $a \neq 0$.
Le point $A\left(-\dfrac{d}{a}\,;0\,;0\right)$ est alors un point de $\mathscr{E}$ et l'équation équivaut à $a\left(x + \dfrac{d}{a}\right) + by + cz = 0$, c'est-à-dire $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ avec $\vec{n}(a\,;b\,;c)$.
$\mathscr{E}$ est donc le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}(a\,;b\,;c)$.

Cas particuliers des plans (xOy), (yOz) et (xOz)

- Le plan (xOy) passe par l'origine $O(0\,;0\,;0)$ du repère et le vecteur $\vec{k}(0\,;0\,;1)$ est un vecteur normal à ce plan.
Ainsi, une équation cartésienne du plan (xOy) est de la forme $0x + 0y + 1z + d = 0$.
Or, $O(0\,;0\,;0)$ appartient à (xOy) donc $1 \times 0 + d = 0$ et $d = 0$.
Ainsi, une équation cartésienne du plan (xOy) est $z = 0$.



- De même, le plan (yOz) a pour équation cartésienne $x = 0$ et le plan (xOz) a pour équation cartésienne $y = 0$.

EXERCICES RÉSOLUS

5 Déterminer une équation cartésienne d'un plan

Dans un repère orthonormé de l'espace, $\mathcal{P}$ est le plan passant par le point E$(1\,;4\,;-2)$ et de vecteur normal $\vec{n}(2\,;-3\,;-1)$.

a) Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$.

b) Le point F$(2\,;5\,;-1)$ appartient-il au plan $\mathcal{P}$?

c) Déterminer les coordonnées d'un point G du plan $\mathcal{P}$.

Solution

a) $\vec{n}(2\,;-3\,;-1)$ est un vecteur normal de $\mathcal{P}$, donc une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est de la forme $2x-3y-1z+d=0$.
De plus, le point E$(1\,;4\,;-2)$ appartient au plan $\mathcal{P}$ donc $2\times1-3\times4-1\times(-2)+d=0$ soit $-8+d=0$ et $d=8$.
Ainsi, $2x-3y-z+8=0$ est une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$.

b) Le point F$(2\,;5\,;-1)$ appartient au plan $\mathcal{P}$ si, et seulement si, les coordonnées de F vérifient l'équation de $\mathcal{P}$.
Or, $2\times2-3\times5-(-1)+8=-2$ et $-2\neq0$ donc le point F n'appartient pas au plan $\mathcal{P}$.

c) On considère un point G de coordonnées $(0\,;0\,;z_G)$. G appartient au plan $\mathcal{P}$ si, et seulement si, $2\times0-3\times0-z_G+8=0$ c'est-à-dire $z_G=8$. Donc, le point G$(0\,;0\,;8)$ appartient à $\mathcal{P}$.

> Pour déterminer une équation cartésienne $ax+by+cz+d=0$ d'un plan $\mathcal{P}$, on remplace a, b et c dans cet ordre par les coordonnées d'un vecteur normal à $\mathcal{P}$ et on détermine d à l'aide d'un point du plan.

> Pour déterminer un point qui appartient à un plan d'équation donnée, on choisit deux de ses coordonnées (0 par exemple) et on détermine la troisième.

6 Reconnaître un plan donné par une équation cartésienne

Dans un repère orthonormé de l'espace, $\mathcal{P}$ est le plan d'équation cartésienne $x-2y-z-1=0$.

a) Déterminer un vecteur normal $\vec{n}$ à ce plan.

b) Déterminer les coordonnées d'un point A de ce plan.

Solution

a) Par lecture des nombres écrits devant x, y, z dans l'équation cartésienne $1x-2y-1z-1=0$, on obtient le vecteur $\vec{n}(1\,;-2\,;-1)$ normal au plan $\mathcal{P}$.

b) En remplaçant, par exemple, x par 0 et y par 0 dans l'équation cartésienne de $\mathcal{P}$, on obtient $-z-1=0$ soit $z=-1$.
Donc le point A$(0\,;0\,;-1)$ appartient à $\mathcal{P}$.

> Pour $x=2$ et $z=1$, on obtient $y=0$, donc B$(2\,;0\,;1)$ est un autre point de $\mathcal{P}$.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 5

7 Dans un repère orthonormé de l'espace, $\mathcal{P}$ est le plan passant par A$(-2\,;1\,;3)$ et de vecteur normal $\vec{n}(5\,;4\,;1)$.

a) Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$.

b) Le point B$(2\,;0\,;-7)$ appartient-il au plan $\mathcal{P}$?

Sur le modèle de l'exercice résolu 6

8 Dans un repère orthonormé de l'espace, $\mathcal{P}$ est le plan d'équation cartésienne $5x-y+z+2=0$.

a) Déterminer un vecteur normal $\vec{n}$ à ce plan.

b) Déterminer les coordonnées d'un point A qui appartient à ce plan.

Exercices
- 9 à 11 (ci-contre)
- 47 à 62

3 Traduire un problème par un système d'équations linéaires

A Déterminer l'intersection de deux droites

Exemple

Dans un repère orthonormé, on se propose de démontrer que les droites d et d' de représentations paramétriques respectives (**S**) $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = 2 + t \; (t \in \mathbb{R}) \\ z = -2t \end{cases}$ et (**S'**) $\begin{cases} x = 17 + 2t' \\ y = -2 - 2t' \; (t' \in \mathbb{R}) \\ z = -4 + t' \end{cases}$ sont sécantes.

Les droites d et d' sont sécantes si, et seulement si, le système ci-contre de six équations à cinq inconnues t, t', x, y, z a une seule solution.

$$\begin{cases} x = 5 + t \\ y = 2 + t \\ z = -2t \\ x = 17 + 2t' \\ y = -2 - 2t' \\ z = -4 + t' \end{cases}$$

Autrement dit, d et d' sont sécantes si, et seulement si, il existe un unique couple $(t\,;t')$ tel que (**T**) $\begin{cases} 5 + t = 17 + 2t' \\ 2 + t = -2 - 2t' \\ -2t = -4 + t' \end{cases}$ c'est-à-dire $\begin{matrix} \textbf{(1)} \\ \textbf{(2)} \\ \textbf{(3)} \end{matrix} \begin{cases} t - 2t' = 12 \\ t + 2t' = -4 \\ -2t - t' = -4 \end{cases}$.

- Par addition membre à membre des équations **(1)** et **(2)**, on obtient $2t = 8$ soit $t = 4$.
- On remplace t par 4 dans l'équation **(1)**, on obtient $4 - 2t' = 12$ soit $t' = -4$.
- On vérifie que les valeurs de t et t' obtenues sont solutions de l'équation **(3)** : $-2 \times 4 - (-4) = -4$.
- On remplace t par 4 dans le système (**S**) ou t' par -4 dans (**S'**) et on obtient les coordonnées du point d'intersection de d et d' : M$(9\,;6\,;-8)$.

Pour résoudre ce système (**T**) de trois équations à deux inconnues, on commence par résoudre un système formé par deux de ces équations, par exemple **(1)** et **(2)** comme ci-contre. Ce système ayant un seul couple solution, on vérifie qu'il est aussi solution de **(3)**. On conclut que ce couple est solution de (**T**).

Remarque : il est important de noter l'utilité d'avoir nommé différemment les paramètres t et t'. En effet, le point commun M à d et d' est atteint sur d pour $t = 4$, alors qu'il est atteint sur d' pour $t' = -4$.

B Étudier l'intersection d'une droite et d'un plan

Exemple

Dans un repère orthonormé, le plan $\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne $5x + y - z + 3 = 0$ et la droite d pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = t \\ y = 1 - 6t \; (t \in \mathbb{R}). \\ z = 3 - t \end{cases}$

On se propose d'étudier l'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite d.
Pour cela, on résout le système (**S**) ci-contre de quatre équations à quatre inconnues x, y, z, t.

$$(\textbf{S}) \begin{cases} x = t \\ y = 1 - 6t \\ z = 3 - t \\ 5x + y - z + 3 = 0 \end{cases}$$

Ce système (**S**) équivaut à :

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 - 6t \\ z = 3 - t \\ 5t + 1 - 6t - 3 + t + 3 = 0 \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} x = t \\ y = 1 - 6t \\ z = 3 - t \\ 0t = -1 \end{cases}$$

Or, la quatrième équation n'a pas de solution donc le système (**S**) n'a pas de solution.

La droite d et le plan $\mathcal{P}$ n'ont pas de point commun, donc d est strictement parallèle à $\mathcal{P}$.

Pour étudier l'intersection de $\mathcal{P}$ et d, on commence par remplacer x, y, z dans l'équation de $\mathcal{P}$ par leurs expressions en fonction de t.

Remarque : aux exercices **66** et **67** p. 158, on étudie les différentes positions relatives de deux droites de l'espace, ainsi, que d'une droite et d'un plan.

EXERCICE RÉSOLU

9 Étudier l'intersection de deux droites

Dans un repère orthonormé de l'espace, d et d' sont les droites de représentations paramétriques respectives :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = -1 + 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = 4t' \\ y = -2 - t' \\ z = 2 + t' \end{cases} \quad (t' \in \mathbb{R}).$$

a) Montrer que les droites d et d' ne sont pas parallèles.

b) Étudier l'intersection de d et d' en résolvant un système d'équations.

Solution

a) d admet pour vecteur directeur $\vec{u}(2\,;1\,;2)$ et d' admet pour vecteur directeur $\vec{u}'(4\,;-1\,;1)$.

Or $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ ne sont pas colinéaires (car leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles).

Donc les droites d et d' ne sont pas parallèles.

b) Pour étudier l'intersection de d et d', on résout le système :

$$\textbf{(T)} \begin{cases} 1 + 2t = 4t' \\ 2 + t = -2 - 2t' \\ -1 + 2t = 2 + t' \end{cases} \text{ c'est-à-dire } \begin{array}{l} \textbf{(1)} \\ \textbf{(2)} \\ \textbf{(3)} \end{array} \begin{cases} 2t - 4t' = -1 \\ t + 2t' = -4 \\ 2t - t' = 3 \end{cases}.$$

On résout par substitution le système $\begin{cases} t + 2t' = -4 \\ 2t - t' = 3 \end{cases}$ formé par les équations **(2)** et **(3)**.

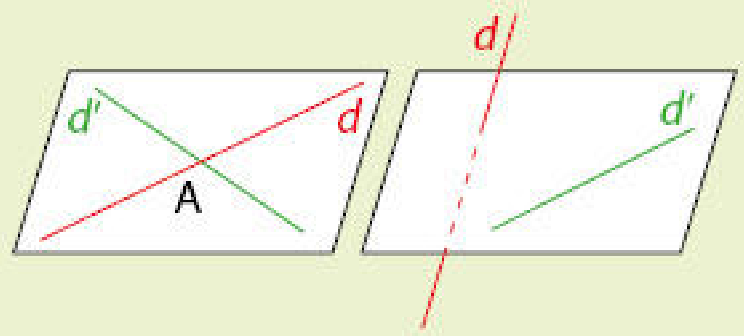
- **(2)** s'écrit $t = -4 - 2t'$.
- On reporte cette expression dans **(3)** ; on obtient $2(-4 - 2t') - t' = 3$, c'est-à-dire $-8 - 5t' = 3$, soit $t' = -\dfrac{11}{5}$.
- On reporte cette valeur de t' dans **(2)** ; on obtient $t + 2\left(-\dfrac{11}{5}\right) = -4$ soit $t = \dfrac{2}{5}$.
- On remplace t par $\dfrac{2}{5}$ et t' par $-\dfrac{11}{5}$ dans **(1)** ; on obtient $2 \times \dfrac{2}{5} - 4\left(-\dfrac{11}{5}\right) = \dfrac{48}{5}$.

Or, $\dfrac{48}{5} \neq -1$, donc le système **(T)** n'a pas de solution.

Les droites d et d' ne sont pas parallèles et n'ont pas de point commun.

Donc les droites d et d' sont **non coplanaires**.

Deux droites non parallèles de l'espace peuvent être sécantes ou non coplanaires. Pour le savoir, il faut connaître en plus leur nombre de points communs (0 ou 1).



EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 9

10 Dans un repère orthonormé de l'espace, d et d' sont les droites de représentations paramétriques respectives :

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 + t \\ z = -4 - 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = 2t' \\ y = 1 + t' \\ z = 3 + t' \end{cases} \quad (t' \in \mathbb{R}).$$

Déterminer le point d'intersection des droites d et d'.

Vidéo

JaiCompris.com — Cet exercice est corrigé en vidéo

11 Dans un repère orthonormé de l'espace, d et d' sont les droites de représentations paramétriques respectives :

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 2t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = 1 - \dfrac{1}{2}t' \\ y = -2 - t' \\ z = 3 + \dfrac{1}{2}t' \end{cases} \quad (t' \in \mathbb{R}).$$

Étudier la position relative des droites d et d'.

EXERCICES RÉSOLUS

12 Déterminer le projeté orthogonal d'un point sur un plan

Dans un repère orthonormé de l'espace, $\mathcal{P}$ est le plan d'équation cartésienne $x - 2y + 3z - 17 = 0$ et A le point de coordonnées $(2\,;5\,;-1)$.

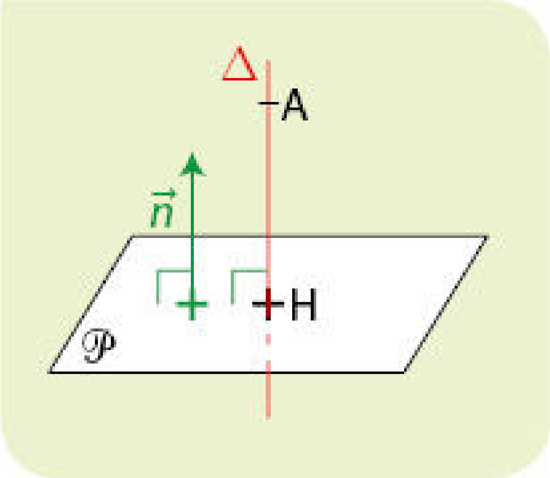
a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par A et orthogonale à $\mathcal{P}$.

b) En déduire les coordonnées du point H, projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}$.

Solution

a) $\vec{n}(1\,;-2\,;3)$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$, c'est donc un vecteur directeur de la droite Δ.
Voici, ci-contre, une représentation paramétrique de la droite Δ.

$$\boxed{\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 5 - 2t \\ z = -1 + 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})}$$



b) Le projeté orthogonal H du point A sur $\mathcal{P}$ est le point d'intersection de Δ et $\mathcal{P}$.

On résout le système **(S)** $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 5 - 2t \\ z = -1 + 3t \\ x - 2y + 3z - 17 = 0 \end{cases}$ c'est-à-dire $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 5 - 2t \\ z = -1 + 3t \\ 2 + t - 2(5 - 2t) + 3(-1 + 3t) - 17 = 0. \end{cases}$

La 4^e équation s'écrit $14t - 28 = 0$ soit $t = 2$. On remplace t par 2 dans les trois premières équations du système **(S)**, on obtient $x = 4$, $y = 1$ et $z = 5$. Les coordonnées du point H sont donc $(4\,;1\,;5)$.

13 Déterminer le projeté orthogonal d'un point sur une droite

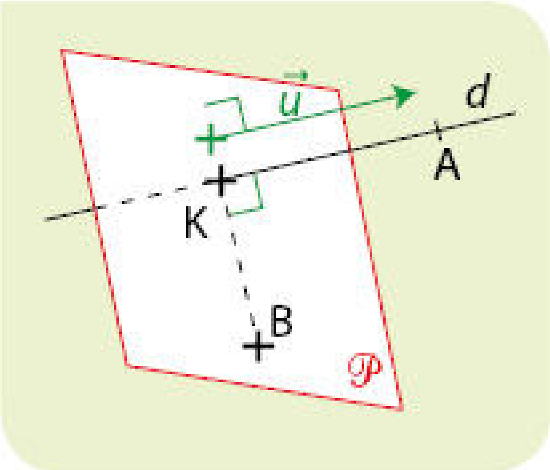
Dans un repère orthonormé de l'espace, d est la droite qui passe par le point $A(1\,;3\,;0)$ et dont $\vec{u}(-2\,;1\,;5)$ est un vecteur directeur. B est le point de coordonnées $(2\,;0\,;7)$.

a) Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par B et orthogonal à d.

b) En déduire les coordonnées du point K, projeté orthogonal de B sur d.

Solution

a) $\vec{u}(-2\,;1\,;5)$ est un vecteur directeur de d, c'est donc un vecteur normal à $\mathcal{P}$.
Le plan $\mathcal{P}$ a donc une équation cartésienne de la forme $-2x + y + 5z + d = 0$.
Or $B \in \mathcal{P}$, c'est-à-dire $-2 \times 2 + 0 + 5 \times 7 + d = 0$, soit $d = -31$.
$\mathcal{P}$ admet donc pour équation cartésienne $-2x + y + 5z - 31 = 0$.



b) Le projeté orthogonal K du point B sur d est le point d'intersection de d et $\mathcal{P}$.

Une représentation paramétrique de d est **(S)** $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 3 + t \\ z = 5t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

On reporte ces expressions de x, y, z dans $-2x + y + 5z - 31 = 0$,
on obtient $-2(1 - 2t) + (3 + t) + 5 \times 5t - 31 = 0$, soit $t = 1$.
On remplace t par 1 dans les trois premières équations du système **(S)**, on obtient $x = -1$, $y = 4$ et $z = 5$.
Les coordonnées du point K sont donc $(-1\,;4\,;5)$.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE

Sur le modèle de l'exercice résolu 12

14 Reprendre l'énoncé de l'exercice 12 avec le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $-x + 2y + z + 5 = 0$ et le point A de coordonnées $(2\,;-3\,;5)$.

Sur le modèle de l'exercice résolu 13

15 Reprendre l'énoncé de l'exercice 13 avec la droite d qui passe par $A(1\,;0\,;2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(2\,;-1\,;-3)$.
B est le point de coordonnées $(-1\,;2\,;4)$.

Représentations paramétriques d'une droite

Cours 1

L'espace est muni d'un repère orthonormé.

Questions flash À l'oral

16 d et d' sont deux droites de représentations paramétriques respectives :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3 + t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 5t \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x = 2 - 3t' \\ y = -2t' \quad (t' \in \mathbb{R}). \\ z = 1 - t' \end{cases}$$

Indiquer oralement les coordonnées d'un point et d'un vecteur directeur de chacune des droites d et d'.

17 d est la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -t + 1 \\ y = 5 + 3t \quad (t \in \mathbb{R}). \\ z = -2 - 2t \end{cases}$$

Déterminer mentalement les coordonnées de quatre points de la droite d.

18 On donne les points :

A$(1\,;2\,;1)$ et B$(4\,;5\,;-2)$.

Parmi ces systèmes, une représentation paramétrique de la droite (AB) est :

(1) $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 + 3t \ (t \in \mathbb{R}) \\ z = 1 - 3t \end{cases}$ **(2)** $\begin{cases} x = 3 + t' \\ y = 3 + 2t' \ (t' \in \mathbb{R}) \\ z = -3 + t' \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x = 4 + 3m \\ y = 5 + 3m \quad (m \in \mathbb{R}) \\ z = -2 - 3m \end{cases}$ **(4)** $\begin{cases} x = 4 - k \\ y = 5 - k \quad (k \in \mathbb{R}) \\ z = -2 + k \end{cases}$

19 d et d' sont deux droites de représentations paramétriques respectives :

$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 5 + 2t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 2 - 3t \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x = 2t' \\ y = -1 + 4t' \quad (t' \in \mathbb{R}). \\ z = -6t' \end{cases}$$

Luca affirme « Ces deux droites sont parallèles ». A-t-il raison ? Expliquer oralement.

20 On donne les points A$(1\,;0\,;-3)$ et B$(2\,;5\,;0)$.

a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).

b) Les points C$(-1\,;2\,;-3)$ et D$(3\,;10\,;3)$ appartiennent-ils à la droite (AB) ? Justifier.

21 d est la droite qui passe par le point A$(2\,;4\,;0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1\,;7\,;-2)$.

a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite d.

b) Dans chaque cas, indiquer si le point appartient ou non à la droite d.

• C$(-1\,;-17\,;6)$ • D$(5\,;10\,;-14)$ • E$(3\,;11\,;-2)$.

22 On donne les points M$(2\,;-1\,;4)$ et N$(1\,;2\,;3)$.

a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (MN).

b) Les points M, N et P$(-1\,;4\,;-2)$ sont-ils alignés ? Justifier.

23 On donne les points E$(1\,;0\,;3)$, F$(3\,;-1\,;2)$ et M$(a\,;b\,;-2)$ avec a et b nombres réels.

a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (EF).

b) Existe-t-il des valeurs de a et b pour lesquelles le point M appartient à la droite (EF) ?

24 On donne les points :

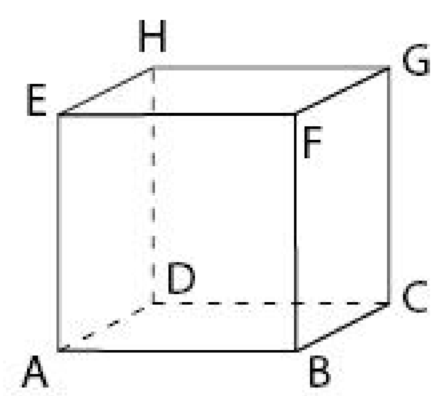
A$(1\,;-1\,;2)$, B$(2\,;2\,;3)$ et C$(-1\,;3\,;0)$.

a) Déterminer une représentation paramétrique de chacune des droites :

• (AB) • (AC) • (BC)

b) Le point D$(-4\,;4\,;-3)$ appartient-il à l'une de ces droites ? Justifier.

25 ABCDEFGH est le cube représenté ci-contre.



a) Déterminer les coordonnées de chacun des sommets dans le repère $(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

b) Déterminer une représentation paramétrique de chacune des droites (AG) et (BH).

26 **a)** d et d' sont les droites de représentations paramétriques respectives :

$$\begin{cases} x = -4 + 2t \\ y = 1 - t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 5 + 3t \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x = 3 - 4t' \\ y = 4t' \quad (t' \in \mathbb{R}). \\ z = 2 + 4t' \end{cases}$$

Les droites d et d' sont-elles parallèles, orthogonales ou ni l'un, ni l'autre ?

b) Reprendre la question précédente avec les représentations paramétriques :

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 5t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = -3 - 3t \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x = 1 - 4t' \\ y = 2 - 10t' \quad (t' \in \mathbb{R}). \\ z = 6t' \end{cases}$$

Équations cartésiennes d'un plan

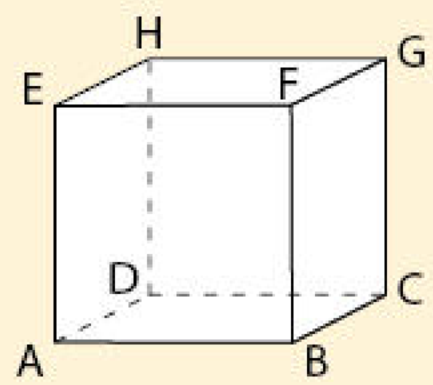
Cours 2

L'espace est muni d'un repère orthonormé.

Questions flash — À l'oral

27 $\mathscr{P}$ est le plan d'équation cartésienne :
$$2x - 3y + 5z + 1 = 0.$$
Déterminer mentalement les coordonnées de deux vecteurs normaux au plan $\mathscr{P}$.

28 ABCDEFGH est le cube représenté ci-contre.
Pour chacun des plans ci-dessous, indiquer oralement deux vecteurs normaux.



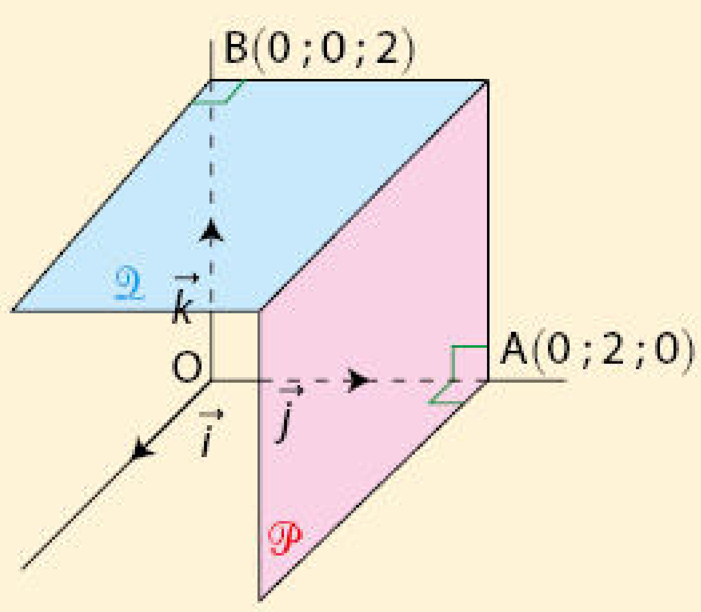
a) (ABC) **b)** (BCF) **c)** (ADF)

29 $\mathscr{P}$ est le plan d'équation cartésienne :
$$x - 2y + z + 4 = 0.$$
Dans chaque cas, indiquer oralement si l'affirmation est vraie ou fausse.
a) $\vec{n}(2\,;3\,;4)$ est un vecteur normal du plan $\mathscr{P}$.
b) $\vec{m}(1\,;-2\,;1)$ est un vecteur normal du plan $\mathscr{P}$.
c) Le point $A(2\,;1\,;-4)$ appartient au plan $\mathscr{P}$.
d) Le point $B(1\,;2\,;5)$ appartient au plan $\mathscr{P}$.

30 Déterminer mentalement une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ passant par l'origine O du repère et de vecteur normal $\vec{n}(1\,;2\,;1)$.

31 $\mathscr{P}$ est le plan de vecteur normal $\vec{n}(2\,;-3\,;4)$ et passant par le point $A(1\,;0\,;2)$.
Leyla affirme « Une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ est $2x - 3y + 4z - 10 = 0$ ». A-t-elle raison ?

32 Déterminer une équation cartésienne du plan :
a) $\mathscr{P}$ coloré en rouge passant par le point A et orthogonal à l'axe des ordonnées ;
b) $\mathscr{Q}$ coloré en bleu passant par le point B et orthogonal à l'axe des côtes.



33 $\mathscr{P}$ est le plan d'équation cartésienne :
$$2x - 3y + z - 5 = 0.$$
Dans chaque cas, indiquer si le point appartient ou non au plan $\mathscr{P}$.
- $A(1\,;-1\,;0)$
- $B(2\,;-1\,;3)$
- $C\left(\frac{3}{2}\,;\frac{2}{3}\,;5\right)$

34 $\mathscr{P}$ est le plan d'équation cartésienne :
$$x - y + 2z + 1 = 0.$$
a) Donner les coordonnées de trois points A, B, C qui appartiennent au plan $\mathscr{P}$.
b) En déduire les coordonnées de deux vecteurs non colinéaires de $\mathscr{P}$.

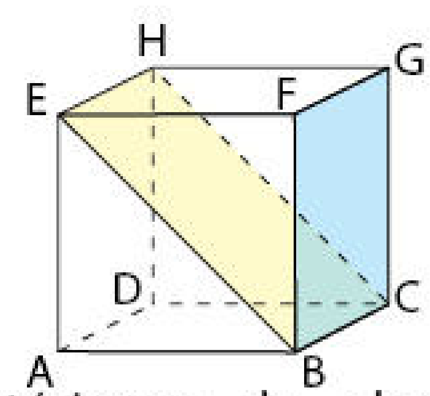
35 $\mathscr{P}$ est le plan passant par le point $A(2\,;-1\,;3)$ et de vecteur normal $\vec{n}(1\,;1\,;-2)$.
a) Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$.
b) Les points $B(-2\,;0\,;1)$ et $C(3\,;0\,;4)$ appartiennent-ils au plan $\mathscr{P}$? Justifier.

36 Dans chaque cas, donner une équation cartésienne du plan passant par le point A et de vecteur normal $\vec{n}$.
a) $A(2\,;1\,;5)$ et $\vec{n}(-1\,;1\,;4)$.
b) $A(0\,;0\,;0)$ et $\vec{n}(2\,;-1\,;1)$.
c) $A(3\,;-1\,;-1)$ et $\vec{n}(0\,;0\,;1)$.
d) $A(-2\,;1\,;5)$ et $\vec{n}(-3\,;2\,;0)$.

37 On donne les points $A(3\,;0\,;0)$ et $B(3\,;1\,;2)$.
$\mathscr{P}$ est le plan qui passe par le point B et est orthogonal à la droite (AB).
a) Déterminer les coordonnées d'un vecteur normal à $\mathscr{P}$.
b) Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{P}$.

38 $\mathscr{P}$ est le plan d'équation cartésienne :
$$5x - y + z + 2 = 0.$$
$\mathscr{Q}$ est le plan parallèle à $\mathscr{P}$ et passant par $A(1\,;-1\,;-2)$.
a) Déterminer les coordonnées d'un vecteur normal à $\mathscr{Q}$.
b) Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{Q}$.

39 On se place dans le repère orthonormé $(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.



a) Déterminer les coordonnées d'un vecteur normal au plan (BCF), puis au plan (BCE).
b) Déterminer une équation cartésienne du plan (BCF), puis du plan (BCE).

40 $\mathscr{P}$ est le plan d'équation $x - 3y + z - 5 = 0$.
Déterminer une représentation paramétrique de la droite d passant par $A(2\,;-3\,;5)$ et orthogonale à $\mathscr{P}$.

41 $\mathcal{P}$ est le plan passant par A(3 ; 1 ; − 2) et de vecteur normal $\vec{n}(4\,;6\,;3)$.

a) Donner une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$.

b) Donner une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}'$ parallèle à $\mathcal{P}$ et passant par le point C(− 5 ; 0 ; 7).

42 On donne les points :

A(1 ; 2 ; 3), B(− 1 ; 0 ; 4), C(5 ; 1 ; − 2).

Déterminer une équation cartésienne du plan qui passe par C et orthogonal à la droite (AB).

43 On donne les points I(1 ; 2 ; 0), J(− 1 ; 0 ; − 2), K(2 ; 3 ; 0), L(− 1 ; − 2 ; − 1).

1. Vérifier que les points I, J, K ne sont pas alignés.

2. a) Démontrer que le vecteur $\vec{n}(2\,;-2\,;0)$ est un vecteur normal au plan (IJK).

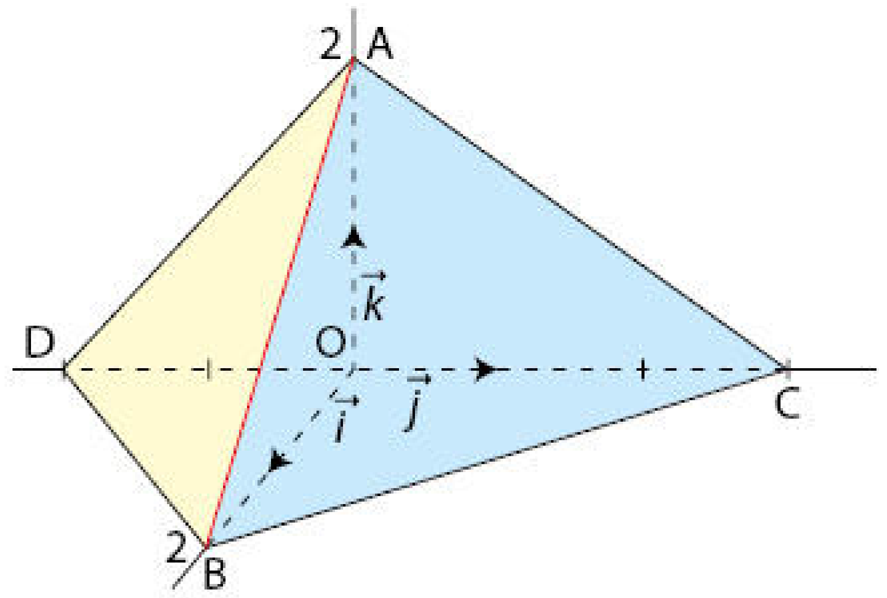
b) Déterminer une équation cartésienne du plan (IJK).

3. Les points I, J, K, L sont-ils coplanaires ? Justifier.

44 A(− 1 ; 2 ; − 1) et B(3 ; 2 ; 3) sont deux points de l'espace.

Déterminer l'ensemble des points M(x ; y ; z) de l'espace tels que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=0$.

45 On a placé quatre points A, B, C, D dans le repère orthonormé ci-dessous.



a) Lire les coordonnées des points A, B, C, D.

b) Démontrer que le vecteur $\vec{n}(3\,;2\,;3)$ est normal au plan (ABC) ; puis que le vecteur $\vec{m}(1\,;-1\,;1)$ est normal au plan (ABD).

c) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC), puis du plan (ABD).

d) Alix affirme « Le point E(− 10 ; − 15 ; − 3) appartient à l'un des deux plans ». A-t-elle raison ?

46 Dans l'espace, le plan médiateur d'un segment est le plan orthogonal à ce segment en son milieu.

On donne les points A(1 ; − 2 ; 3) et B(3 ; 2 ; 1).

a) Déterminer une équation cartésienne du plan médiateur du segment [AB].

b) Vérifier que les points A et B sont équidistants de $\mathcal{P}$.

Traduire un problème par un système d'équations linéaires

Cours 3

L'espace est muni d'un repère orthonormé.

Questions flash À l'oral

47 d et d' sont les droites de représentations paramétriques respectives :

$$\begin{cases}x=t\\y=1+t\\z=3-t\end{cases}(t\in\mathbb{R})\quad\text{et}\quad\begin{cases}x=2-t'\\y=t'\\z=-2+3t'\end{cases}(t'\in\mathbb{R}).$$

Déterminer mentalement lequel de ces systèmes on est amené à résoudre pour déterminer l'intersection de d et d'.

$$\textbf{(1)}\begin{cases}t+t'=2\\t-t'=1\\t+3t'=-5\end{cases}\qquad\textbf{(2)}\begin{cases}t+t'=2\\t-t'=-1\\t+3t'=5\end{cases}$$

48 $\mathcal{P}$ est le plan d'équation cartésienne $x+y+z=0$ et d est la droite de représentation paramétrique $\begin{cases}x=2t\\y=1-t\\z=4\end{cases}(t\in\mathbb{R})$.

Déterminer mentalement le point d'intersection de la droite d et du plan $\mathcal{P}$.

49 d et d' sont les droites de représentations paramétriques respectives :

$$\begin{cases}x=1-t\\y=2+2t\\z=-1+t\end{cases}(t\in\mathbb{R})\quad\text{et}\quad\begin{cases}x=2+t'\\y=-2-t'\\z=-2t'\end{cases}(t'\in\mathbb{R}).$$

a) Déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{u}$ de d et d'un vecteur directeur $\vec{u}'$ de d'.

b) En déduire que d et d' ne sont pas parallèles.
Quelle peut être la position relative de d et d' ?

c) Déterminer le point d'intersection de d et d' en résolvant un système d'équations.

50 d et d' sont les droites de représentations paramétriques respectives :

$$\begin{cases}x=1-t\\y=2+3t\\z=-4t\end{cases}(t\in\mathbb{R})\quad\text{et}\quad\begin{cases}x=-3+4t'\\y=4-t'\\z=-6+5t'\end{cases}(t'\in\mathbb{R}).$$

a) Justifier que d et d' ne sont pas parallèles.

b) Démontrer que d et d' sont sécantes en résolvant un système d'équations.

51 Voici les représentations paramétriques respectives de deux droites d et d' sécantes.
Déterminer leur point d'intersection.

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2t \\ z = 4 \end{cases} (t \in \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = 2 + t' \\ y = -2 - 2t' \\ z = t' \end{cases} (t' \in \mathbb{R}).$$

52 d et d' sont les droites de représentations paramétriques respectives :

$$\begin{cases} x = 5 - t \\ y = 2 + t \\ z = 1 - 3t \end{cases} (t \in \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = t' \\ y = 2 - 2t' \\ z = 1 + t' \end{cases} (t' \in \mathbb{R}).$$

a) Démontrer que d et d' ne sont pas parallèles.
b) Démontrer que d et d' ne sont pas coplanaires en résolvant un système d'équations.

53 Voici les représentations paramétriques respectives de deux droites d et d'.
Démontrer que d et d' sont non coplanaires.

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = -1 + t \\ z = 2 - t \end{cases} (t \in \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = 1 + t' \\ y = t' \\ z = 3 - t' \end{cases} (t' \in \mathbb{R}).$$

54 d est la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = -1 - 2t \end{cases} (t \in \mathbb{R}).$$

a) Parmi les plans ci-dessous, indiquer celui qui est orthogonal à la droite d.
- $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $x + 2y - z + 5 = 0$.
- $\mathcal{Q}$ d'équation cartésienne $4x - 2y - 4z + 1 = 0$.

b) Déterminer le point d'intersection de d et de ce plan en résolvant un système d'équations.

55 $\mathcal{P}$ est le plan d'équation cartésienne :

$$x + 4y - 5z - 16 = 0$$

et $\mathcal{D}$ la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -5 + t \\ y = 4 - t \\ z = 5 - 3t \end{cases} (t \in \mathbb{R}).$$

a) Démontrer que la droite $\mathcal{D}$ et le plan $\mathcal{P}$ sont sécants.
b) Déterminer leur point d'intersection en résolvant un système d'équations.

56 Expliquer pourquoi la droite d et le plan $\mathcal{P}$ ci-dessous sont sécants. Déterminer leur point d'intersection en résolvant un système.

$$d : \begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = 3 + t \\ z = 4t \end{cases} (t \in \mathbb{R}) \text{ et } \mathcal{P} : 4x - 3z + 20 = 0$$

57 On donne quatre vecteurs :

$\vec{u}(-5 ; 0 ; 0)$, $\vec{v}(0 ; 2 ; 3)$, $\vec{w}(-1 ; 0 ; 1)$, $\vec{m}(1 ; 2 ; 3)$.

On se propose de déterminer s'il existe des réels a, b, c tels que $\vec{m} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$.
a) S'il existe de tels nombres, expliquer pourquoi :

$$\begin{cases} -5a - c = 1 \\ 2b = 2 \\ 3b + c = 3 \end{cases}.$$

b) Résoudre ce système et conclure.

58 a et b désignent des nombres réels. On donne les points $A(1 ; 1 ; a)$, $B(3 ; a ; b)$, $C(-3 ; b ; 2a + 1)$.
On se propose de déterminer a et b afin que les points A, B, C soient alignés.
a) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
b) Montrer que les points A, B, C sont alignés si, et seulement si, $\begin{cases} b - 1 = -2(a + 1) \\ a + 1 = -2(b - a) \end{cases}$.
c) Résoudre ce système et conclure en donnant les coordonnées de A, B, C.

59 $\mathcal{P}$ est un plan d'équation cartésienne :

$ax + by + z + d = 0$ (avec a et b nombres réels).

Existe-t-il des nombres a et b tels que les points $A(3 ; 1 ; 2)$, $B(-1 ; 2 ; 0)$, $C(0 ; 0 ; -4)$ appartiennent au plan $\mathcal{P}$.

60 $\mathcal{P}$ est le plan d'équation cartésienne :

$$2x + y - z + 3 = 0.$$

A est le point de coordonnées $(2 ; 0 ; -1)$.
a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par A et perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$.
b) En déduire les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathcal{P}$.

61 $\mathcal{P}$ est le plan d'équation cartésienne :

$$x + y + 2z - 3 = 0.$$

I est le point de coordonnées $(2 ; 3 ; 2)$.
a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par I et orthogonale à $\mathcal{P}$.
b) En déduire les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathcal{P}$.

62 d est la droite passant par le point $E(1 ; 2 ; -4)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1 ; 2 ; 1)$. $\mathcal{P}$ est le plan passant par le point $F(0 ; 2 ; 1)$ et orthogonal à la droite d.
a) Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$.
b) En déduire les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point F sur la droite d.

Pour les exercices 63 et 64, l'espace est muni d'un repère orthonormé.

63 QCM Dans chaque cas, donner la réponse exacte sans justifier.

		A	B	C	D
1	Le point B$(2\,;-4\,;7)$ appartient à la droite de représentation paramétrique (avec $t \in \mathbb{R}$) …	$\begin{cases} x = 1+t \\ y = -4+t \\ z = 7+t \end{cases}$	$\begin{cases} x = 2-t \\ y = -4+2t \\ z = 6+t \end{cases}$	$\begin{cases} x = -3+t \\ y = 1-t \\ z = 2+t \end{cases}$	$\begin{cases} x = 2-t \\ y = 1+t \\ z = 3+2t \end{cases}$
2	$\vec{n}(-1\,;2\,;-3)$ est un vecteur normal au plan d'équation cartésienne …	$x-2y+z-3=0$	$-x-2y-3z=0$	$x+2y-3z+1=0$	$x-2y+3z+4=0$
3	$\mathcal{P}$ est le plan d'équation : $2x-y+z+4=0$. Un point A de $\mathcal{P}$ et un vecteur normal $\vec{n}$ de $\mathcal{P}$ sont …	A$(2\,;4\,;-4)$ et $\vec{n}(2\,;-1\,;1)$	A$(1\,;1\,;-5)$ et $\vec{n}(2\,;-1\,;1)$	A$(2\,;4\,;-4)$ et $\vec{n}(4\,;2\,;-1)$	A$(1\,;1\,;-5)$ et $\vec{n}(2\,;3\,;4)$

64 QCM Dans chaque cas, donner la (ou les) réponse(s) exacte(s) sans justifier.

		A	B	C	D
1	Le plan d'équation cartésienne $2x-y+3z-4=0$ …	passe par C$(1\,;1\,;1)$	passe par D$(5\,;6\,;0)$	a pour vecteur normal $\vec{n}(-2\,;1\,;-3)$	a pour vecteur normal $\vec{n}(2\,;1\,;3)$
2	d est la droite qui passe par A$(0\,;0\,;-2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(-1\,;-3\,;2)$. $\mathcal{P}$ est le plan d'équation $5x+y+4z+8=0$. Alors …	d et $\mathcal{P}$ sont parallèles	d est orthogonale à $\mathcal{P}$	d est incluse dans $\mathcal{P}$	d et $\mathcal{P}$ sont sécants

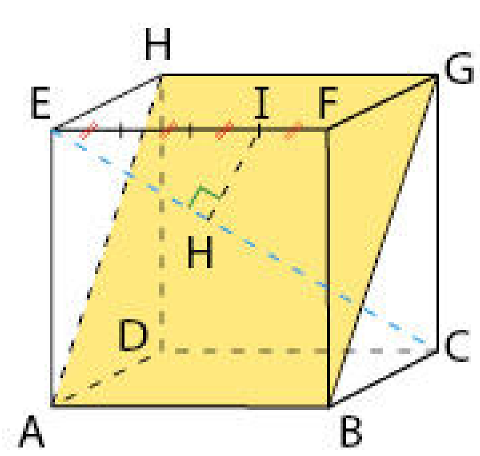
65 Vrai/Faux Dans chaque cas, dire si l'affirmation est vraie ou fausse en justifiant.

ABCDEFGH est le cube représenté ci-contre.

L'espace est muni du repère orthonormé $(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

I est le point du segment [EF] tel que $IF = \frac{1}{4}EF$.

H est le projeté orthogonal du point I sur la droite (CE).



1. **Affirmation** : le plan (ABG) a pour équation cartésienne $y-z=0$.

2. **Affirmation** : $\begin{cases} x = 1-2t \\ y = 1-2t \\ z = 2t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite (CE).

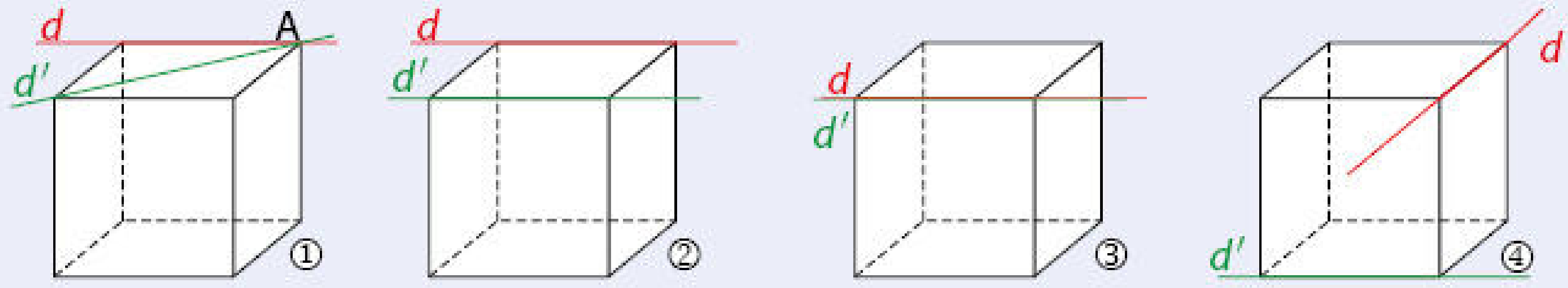
3. **Affirmation** : le point H a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$.

Vérifiez vos réponses : p. 529

66 Raisonner avant de résoudre : position relative de deux droites

1. Voici les quatre positions relatives possibles de deux droites d et d' de l'espace.

a) Dans chaque cas, décrire la position relative de ces droites.



b) $\vec{u}$ est un vecteur directeur de d et $\vec{v}$ un vecteur directeur de d'.

• Lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, quelles sont les positions relatives possibles de d et d' ? Combien de points d'intersection peuvent alors avoir d et d' ?

• Lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, combien de points d'intersection peuvent avoir d et d' ?

2. Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les deux droites de représentations paramétriques :

$d : x = -t \,;\quad y = 1 + 2t \,;\quad z = 4 - 3t \quad (t \in \mathbb{R})$

$d' : x = -4 + 2t' \,;\quad y = 9 - 4t' \,;\quad z = -8 + 6t' \quad (t' \in \mathbb{R})$

a) Étudier la colinéarité ou non de vecteurs directeurs de d et d'.

b) Choisir un point de d. Appartient-il à d' ? Conclure sur la position relative de d et d'.

3. Dans chaque cas, étudier la position relative des deux droites données par leurs représentations paramétriques ($t \in \mathbb{R}$ et $t' \in \mathbb{R}$) dans un repère orthonormé.

a) $d : x = \frac{1}{3} + t \,;\quad y = 2 - \frac{1}{4}t \,;\quad z = 3t$

$d' : x = -1 - 2t' \,;\quad y = 5 + t' \,;\quad z = -4 - 6t'$

b) $d : x = -5 + \frac{1}{2}t \,;\quad y = 1 + 3t \,;\quad z = 1 + t$

$d' : x = 1 - 4t' \,;\quad y = 2 - 24t' \,;\quad z = -8t'$

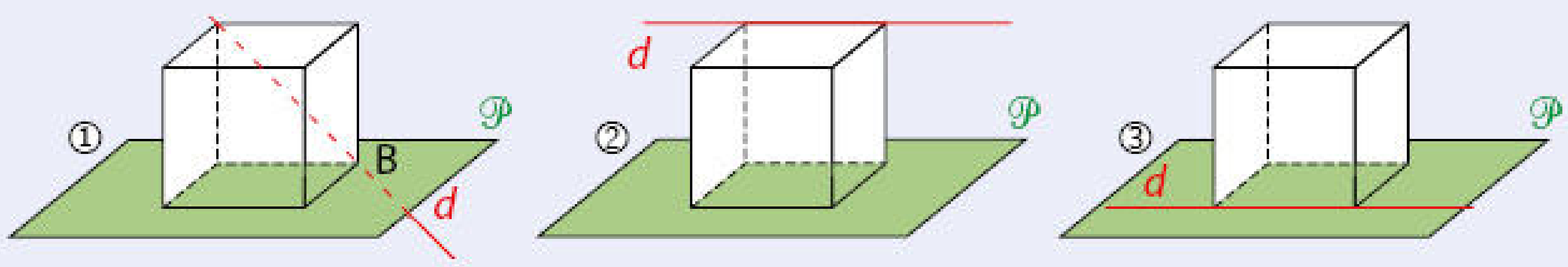
c) $d : x = 5 + 3t \,;\quad y = 2 + t \,;\quad z = 1 - 4t$

$d' : x = 1 + 2t' \,;\quad y = 10 - 2t' \,;\quad z = 4 + t'$

67 Raisonner avant de résoudre : position relative d'une droite et d'un plan

1. Voici les trois positions relatives possibles d'une droite d et d'un plan $\mathcal{P}$ de l'espace.

a) Dans chaque cas, décrire la position relative de la droite d et du plan $\mathcal{P}$.



b) $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite d et $\vec{n}$ un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$.

• Lorsque $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$, quelles sont les positions relatives possibles de d et $\mathcal{P}$? Combien de points d'intersection peuvent alors avoir d et $\mathcal{P}$?

• Lorsque $\vec{u} \cdot \vec{n} \neq 0$, combien de points d'intersection peuvent avoir d et $\mathcal{P}$?

2. Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère une droite d de représentation paramétrique donnée et un plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne donnée.

Dans chaque cas, étudier la position relative de d et $\mathcal{P}$.

a) $\mathcal{P} : 2x + 3y + z + 3 = 0$

$d : \begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = 4 - t \\ z = -9 - 5t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

b) $\mathcal{P} : x - y + 2z + 3 = 0$

$d : \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = -1 + 6t \\ z = -2 + 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

c) $\mathcal{P} : 3x + 4y - 5z = 0$

$d : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2t \\ z = -1 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

Vidéo

JAICOMPRIS.COM

Toutes les démonstrations au programme en vidéo

Liste des démonstrations :

• Équation cartésienne du plan normal au vecteur $\vec{n}$ et passant par le point A.

Conseil

Il faut comprendre que la représentation paramétrique de d, par exemple, est écrite en ligne au lieu d'être écrite avec le système :

$\begin{cases} x = -t \\ y = 1 + 2t \\ z = 4 - 3t \end{cases}$

Étudier des droites et des plans

68 **PARCOURS DIFFÉRENCIÉS**

Parcours 1

Dans un repère orthonormé de l'espace, $\mathscr{P}$ est le plan d'équation cartésienne $2x - y + 4z + 8 = 0$ et A est le point de coordonnées $(2\,;-5\,;1)$.
H est le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathscr{P}$.
Déterminer les coordonnées du point H.

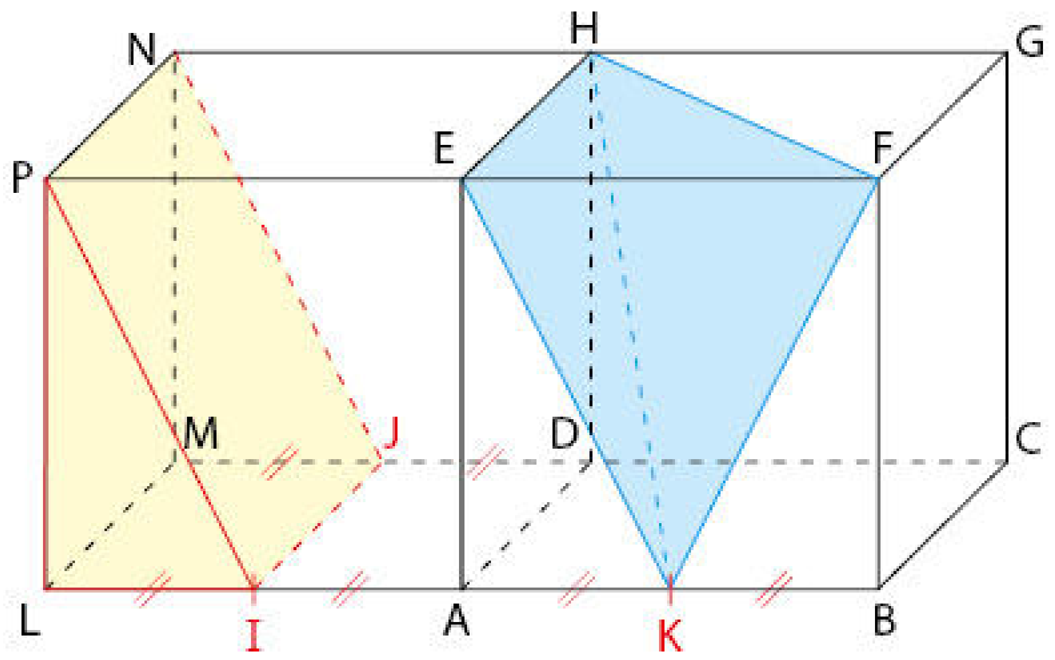
Parcours 2

Dans un repère orthonormé de l'espace, $\mathscr{Q}$ est le plan d'équation cartésienne $x + y + z = 0$ et B est le point de coordonnées $(3\,;1\,;0)$. K est le projeté orthogonal du point B sur le plan $\mathscr{Q}$.

a) Déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur de la droite (BK).
En déduire une représentation paramétrique de la droite (BK).

b) Déterminer les coordonnées de K en résolvant un système.

69 La figure ci-dessous est constituée de deux cubes identiques.
I, J et K sont les milieux respectifs des arêtes [AL], [DM] et [AB].
L'espace est muni du repère orthonormé $(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.



1. Calculer le volume du prisme droit ILPJMN.

2. a) Déterminer les coordonnées des points E, F, H et K.

b) Démontrer que le vecteur $\vec{n}(2\,;0\,;1)$ est un vecteur normal au plan (EHK).

c) En déduire une équation cartésienne du plan (EHK).

d) Déterminer une représentation paramétrique de la droite passant par F et orthogonale au plan (EHK).

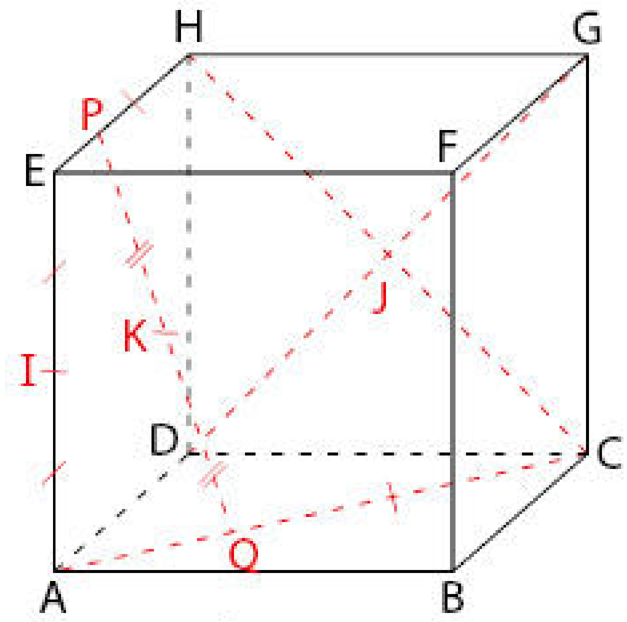
e) En déduire les coordonnées du projeté orthogonal de F sur le plan (EHK).

3. Comparer les volumes des solides EFHK et ILPJMN.

Vidéo

JaiCompris.com Cet exercice est corrigé en vidéo

70 ABCDEFGH est le cube représenté ci-contre.



I est le milieu de l'arête [AE], J est le centre de la face CDHG, P et Q sont les points définis par :

$$\overrightarrow{EP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EH} \text{ et } \overrightarrow{AQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

et K est le milieu du segment [PQ].
On se place dans le repère $(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1. a) Calculer les coordonnées des points I et J.

b) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (IJ).

2. a) Calculer les coordonnées des points P, Q et K.

b) Démontrer que les points I, K et J sont alignés.

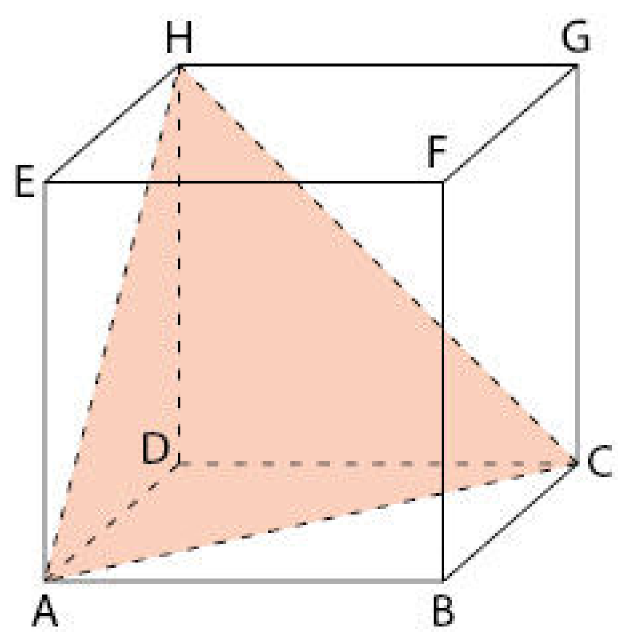
71 Dans un repère de l'espace, on donne les points :
$A(2\,;-4\,;3)$, $B(-4\,;2\,;5)$ et $C(-2\,;-2\,;5)$.

a) Calculer les coordonnées des milieux respectifs I, J, K des segments [AB], [AC] et [BC].

b) Déterminer une représentation paramétrique de chacune des trois médianes du triangle ABC.
Une médiane d'un triangle est une droite passant par un sommet et le milieu du côté opposé.

c) Déterminer les coordonnées du point d'intersection G de deux de ces médianes.
Vérifier que G appartient à la troisième médiane.
On dit que G est **le centre de gravité** de ABC.

72 ABCDEFGH est le cube d'arête 1 représenté ci-contre.



L'espace est muni du repère orthonormé $(D\,;\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$.

1. Déterminer une équation cartésienne du plan (ACH).

2. On note d la droite passant par le point F et orthogonale au plan (ACH).

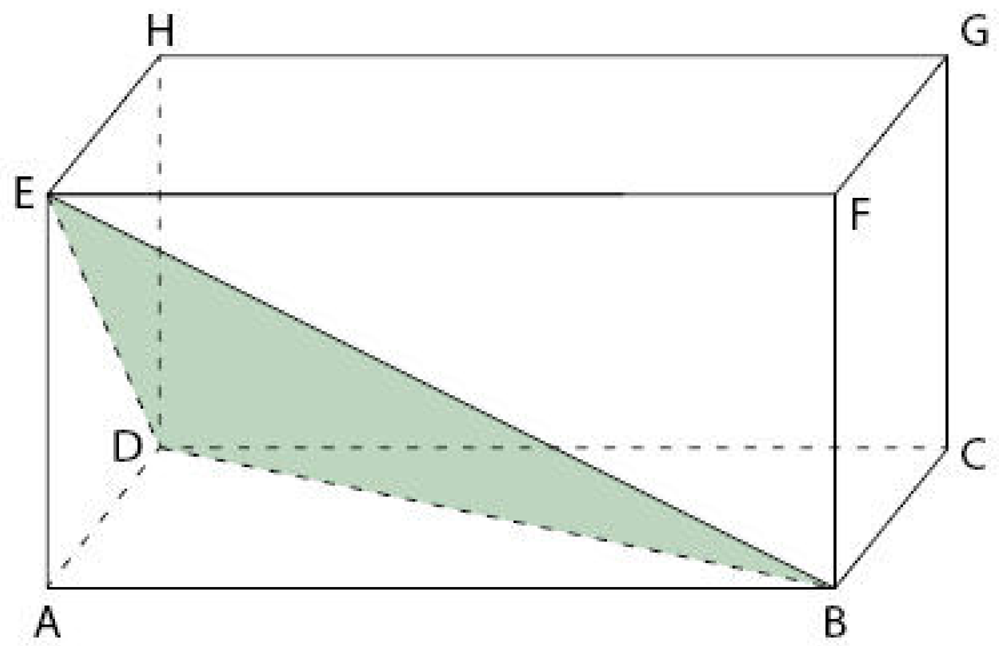
a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite d.

b) Calculer les coordonnées du projeté orthogonal K du point F sur le plan (ACH).

3. Calculer la distance du point F au plan (ACH).

73 ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle tel que $AB = 12$, $AD = 18$ et $AE = 6$.

L'espace est muni du repère orthonormé d'origine A dans lequel les points B, D et E ont pour coordonnées respectives $(12\,;0\,;0)$, $(0\,;18\,;0)$ et $(0\,;0\,;6)$.



1. Vérifier que le plan (EBD) a pour équation cartésienne $3x + 2y + 6z - 36 = 0$.

2. a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AG).

b) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite (AG) et du plan (EBD). On note K ce point.

3. La droite (AG) est-elle orthogonale au plan (EBD) ? Justifier.

4. On note $\mathcal{P}$ le plan parallèle au plan (ADE) passant par le point K.

a) Démontrer que le plan $\mathcal{P}$ coupe le plan (EBD) selon une droite d parallèle à la droite (ED).

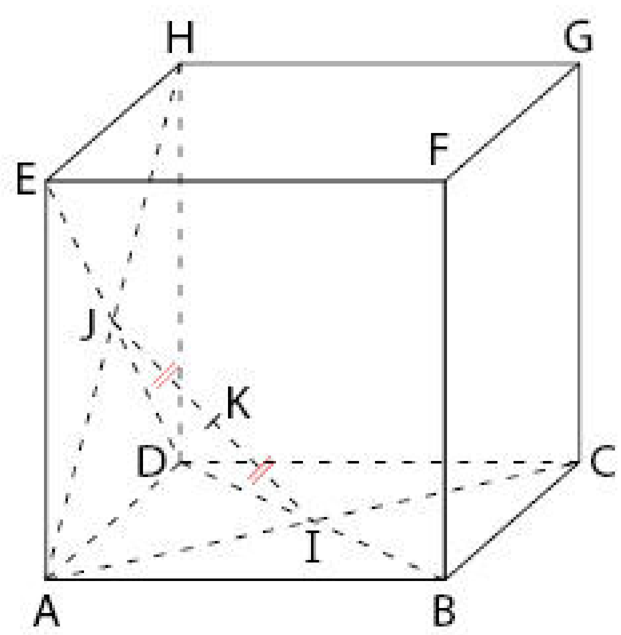
b) Réaliser une figure et construire d.

74 ABCDEFGH est le cube représenté ci-contre.

I et J sont les centres respectifs des faces ABCD et ADHE.

K est le milieu de [IJ].

On se place dans le repère orthonormé $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.



a) Déterminer les coordonnées de tous les points de la figure.

b) Déterminer une équation cartésienne de chacun des plans :

- (ADF)
- (AKG)

c) Démontrer que les plans (ADF) et (AKG) sont parallèles.

d) Préciser si ces deux plans sont strictement parallèles ou confondus.

75 Dans un repère orthonormé de l'espace, $\mathcal{P}$ est le plan passant par le point $A(1\,;-1\,;2)$ et dont deux vecteurs non colinéaires sont $\vec{u}(-3\,;1\,;0)$ et $\vec{v}(2\,;0\,;1)$.

On note $(x\,;y\,;z)$ les coordonnées d'un point M de $\mathcal{P}$.

Ainsi, il existe des réels t et t' tels que :

$$\overrightarrow{AM} = t\vec{u} + t'\vec{v}.$$

a) Expliquer pourquoi $\begin{cases} x = 1 - 3t + 2t' \\ y = -1 + t \\ z = 2 + t' \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R},\ t' \in \mathbb{R})$.

On dit que ce système est **une représentation paramétrique du plan $\mathcal{P}$**.

b) Déduire de ce système, une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$.

Modéliser d'autres problèmes par un système d'équations

76 **PARCOURS DIFFÉRENCIÉS**

Parcours 1

L'espace est muni d'un repère orthonormé.

On donne les vecteurs :

$\vec{u}(-1\,;2\,;0)$, $\vec{v}(2\,;0\,;1)$, $\vec{w}(0\,;2\,;-1)$.

Démontrer que le triplet $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ de vecteurs est une base de l'espace.

Parcours 2

Dans un repère orthonormé, on donne les vecteurs $\vec{m}(-1\,;1\,;0)$, $\vec{n}(0\,;-1\,;1)$, $\vec{p}(1\,;0\,;1)$.

a) Vérifier que les vecteurs $\vec{m}$ et $\vec{n}$ ne sont pas colinéaires.

b) S'il existent, on note a et b des nombres réels tels que $\vec{p} = a\vec{m} + b\vec{n}$.

Traduire cette égalité par un système de trois équations à deux inconnues.

c) Résoudre ce système et expliquer pourquoi $(\vec{m},\vec{n},\vec{p})$ est une base de l'espace.

Pour les exercices 77 et 78, déterminer si le triplet $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ de vecteurs donnés par leurs coordonnées dans un repère orthonormé, forme une base de l'espace.

77 $\vec{u}(1\,;2\,;3)$, $\vec{v}(-5\,;1\,;0)$, $\vec{w}(-2\,;7\,;9)$

78 $\vec{u}\left(-2\,;\dfrac{1}{2}\,;1\right)$, $\vec{v}(1\,;1\,;3)$, $\vec{w}(4\,;-1\,;2)$

79 Dans un repère orthonormé de l'espace, on donne les points $A(2\,;4\,;1)$, $B(0\,;4\,;-3)$ et $C(3\,;1\,;-3)$.

a) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Vérifier que les trois points A, B, C ne sont pas alignés.

b) On note $\vec{n}(a\,;b\,;c)$ les coordonnées d'un vecteur normal au plan (ABC).

Expliquer pourquoi cette information se traduit par le système :

$$\begin{cases} 2a+4c=0 \\ a-3b-4c=0 \end{cases}.$$

c) Ce système a plus d'inconnues que d'équations. On le résout en considérant que c, par exemple, est un paramètre et en exprimant les deux inconnues a et b en fonction de c.

Déterminer ces expressions de a et b.

d) Choisir une valeur de c, autre que 0, et déterminer un vecteur normal $\vec{n}$ au plan (ABC).

e) En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

Pour les exercices 80 et 81, l'espace est muni d'un repère orthonormé. Vérifier que les points A, B, C ne sont pas alignés et déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

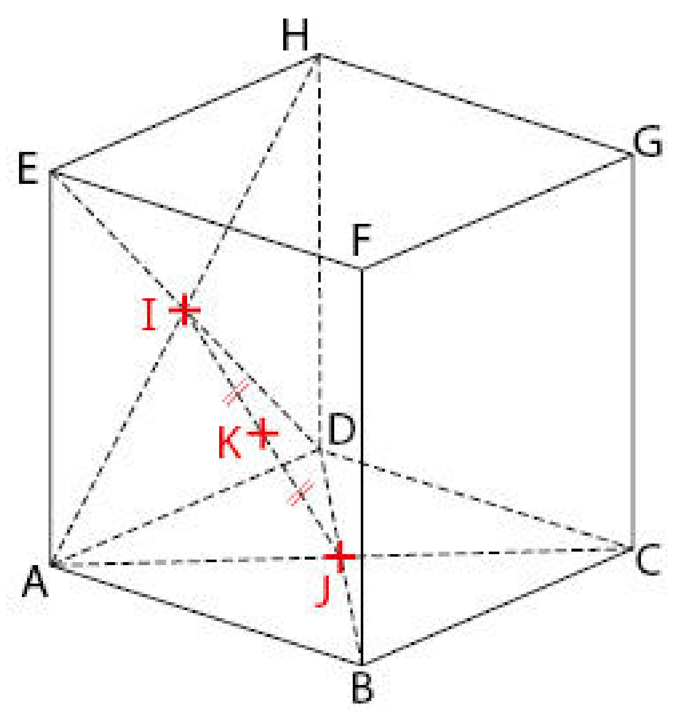
80 $A(3\,;-5\,;1)$, $B(-1\,;0\,;2)$, $C(2\,;1\,;3)$

81 $A(-1\,;0\,;2)$, $B(5\,;-4\,;1)$, $C(2\,;2\,;1)$

82 ABCDEFGH est le cube représenté ci-contre.

I est le centre de la face ADHE et J celui de la face ABCD.

K est le milieu du segment [IJ].



L'espace est muni du repère orthonormé $(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1. a) Déterminer les coordonnées des points I, J, K.

b) Les points A, K et G sont-ils alignés ?

2. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AK}$ sont coplanaires, c'est-à-dire déterminer des réels α et β tels que $\overrightarrow{AK}=\alpha\overrightarrow{AD}+\beta\overrightarrow{AG}$.

3. a) Justifier l'existence de nombres réels a et b tels que $\overrightarrow{KA}=a\overrightarrow{KD}+b\overrightarrow{KG}$.

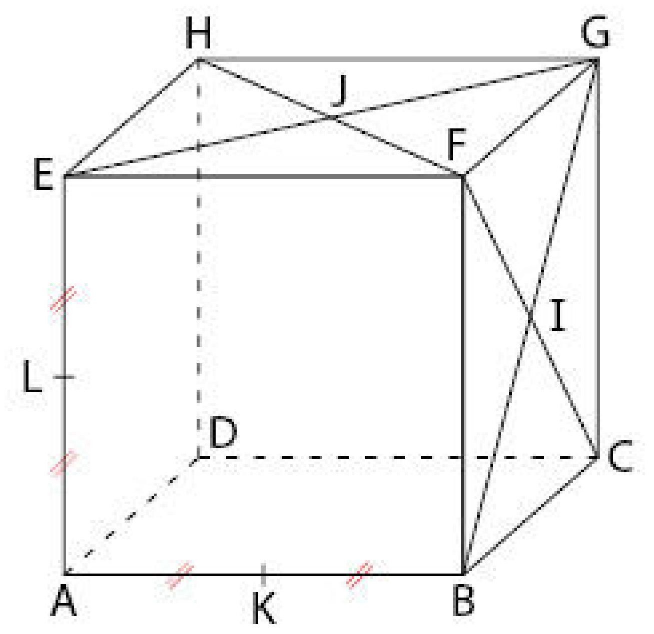
b) Déterminer les nombres a et b.

83 ABCDEFGH est le cube représenté ci-dessous.

I et J sont les centres respectifs des faces BCGF et EFGH.

K et L sont les milieux respectifs de [AB] et [AE].

L'espace est muni du repère orthonormé $(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.



a) Justifier que les vecteurs $\overrightarrow{LK}$, $\overrightarrow{LI}$ et $\overrightarrow{LJ}$ forment une base de l'espace.

b) Expliquer pourquoi déterminer des réels a, b, c tels que $\overrightarrow{AB}=a\overrightarrow{LK}+b\overrightarrow{LI}+c\overrightarrow{LJ}$ revient à résoudre :

$$\begin{array}{l} \textbf{(1)} \\ \textbf{(2)} \\ \textbf{(3)} \end{array} \begin{cases} a-c=2 \\ 2a+b=0 \\ a+b+c=0 \end{cases}.$$

c) Exprimer a en fonction de c à l'aide de l'équation **(1)**. Remplacer a par cette expression dans les équations **(2)** et **(3)**.

Déterminer alors les valeurs de b et c, puis de a.

d) En déduire les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans la base $(\overrightarrow{LK}\,;\overrightarrow{LI}\,;\overrightarrow{LJ})$.

S'entraîner à la logique → p. 525

84 Compléter avec l'hypothèse manquante

L'espace est muni d'un repère orthonormé.

A et B sont deux points. $\mathcal{P}$ est un plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$; d est une droite de vecteur directeur $\vec{u}$. Le point B n'appartient ni à $\mathcal{P}$, ni à d.

Recopier et compléter chacune des propriétés ci-dessous afin qu'elle soit vraie.

a) La droite d est incluse dans le plan $\mathcal{P}$ si, et seulement si, $\vec{n}\cdot\vec{u}=0$ et …

b) Le point H est le projeté orthogonal du point B sur le plan $\mathcal{P}$ si, et seulement si, $H\in\mathcal{P}$ et …

c) Le point K est le projeté orthogonal du point B sur la droite d si, et seulement si, $\vec{u}\cdot\overrightarrow{BK}=0$ et …

85 LES TRAJECTOIRES DES ENGINS D'EXPLORATION

Algo python

Deux engins d'exploration sous-marine (notés S_1 et S_2) doivent se rendre sur des épaves (notées E_1 et E_2).
Ils se déplacent en ligne droite et à vitesse constante.
La situation est schématisée ci-dessous.
L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ (*unité* : le mètre).
Le niveau de la mer est représenté par le plan $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

Partie A : repérage des deux sous-marins

1. Le premier sous-marin

À chaque instant t, en min, le premier sous-marin est repéré par le point $S_1(t)$ de coordonnées données ci-contre.

$$\begin{cases} x(t) = 140 - 60t \\ y(t) = 105 - 90t \\ z(t) = -170 - 30t \end{cases}$$

a) Déterminer les coordonnées du point qui correspond au début de l'observation.

b) L'épave E_1 se trouve au point de coordonnées $(-1\,060\,;-1\,695\,;-770)$.
Combien de temps le sous-marin mettra-t-il pour l'atteindre ?

c) Justifier que, pour tout réel t de $[0\,;20]$, la distance qui sépare le sous-marin de l'épave est :

$$d_1(t) = 30\sqrt{14}(20-t).$$

2. Le second sous-marin

Au début de l'observation, le second sous-marin est situé au point $S_2(0)$ de coordonnées $(68\,;135\,;-68)$ et atteint, 3 min plus tard, le point $S_2(3)$ de coordonnées $(-202\,;-405\,;-248)$.

a) Justifier qu'à chaque instant t, en min, le second sous-marin est repéré par le point $S_2(t)$ de coordonnées données ci-contre.

$$\begin{cases} x(t) = 68 - 90t \\ y(t) = 135 - 180t \\ z(t) = -68 - 60t \end{cases}$$

b) L'épave E_2 se trouve au point de coordonnées $(-1\,615\,;-3\,231\,;-1\,190)$.
Combien de temps le sous-marin mettra-t-il pour l'atteindre ?

c) Exprimer en fonction de t, avec $t \in [0\,;18{,}7]$, la distance qui le sépare de l'épave E_2.

Partie B : résolution d'un problème

On se propose de déterminer l'instant auquel les deux sous-marins se trouvent à la même distance de leurs épaves respectives.

1. Résolution par un algorithme

a) Au début des observations, quel sous-marin est le plus proche de l'épave qu'il doit explorer ?

b) Voici un programme incomplet en langage Python qui permet de trouver, avec une marge d'erreur de 0,1 min, l'instant t auquel les deux sous-marins se trouvent à la même distance de leurs épaves respectives.

- Indiquer les expressions cachées dans les cadres.
- Saisir le programme et l'exécuter.
- Conclure en donnant le résultat à la seconde près.

```python
from math import*

def MêmeDistance():
    t=0
    d_1=600*sqrt(14)
    d_2=
    while d_1<d_2:
        t=t+0.1
        d_1=30*sqrt(14)*(20-t)
        d_2=
    return t
```

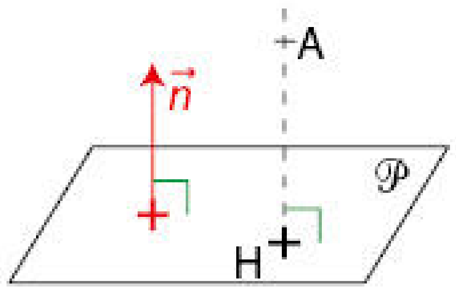
2. Résolution algébrique

Le programme donne un résultat approximatif.
Déterminer le résultat exact par le calcul.

86 Démontrer une formule

Raisonner **Calculer**

L'espace est muni d'un repère orthonormé.



1. $\mathscr{P}$ est un plan d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$ avec a, b, c non tous nuls.

On note $A(x_A ; y_A ; z_A)$ un point n'appartenant pas à $\mathscr{P}$ et $\vec{n}$ un vecteur normal à $\mathscr{P}$.

On note H le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathscr{P}$.

a) Justifier qu'il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{AH} = \lambda\vec{n}$.

b) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AH) en prenant λ pour paramètre.

c) Quelle valeur de λ correspond au point H ?

d) En utilisant le fait que $AH = |\lambda| \|\vec{n}\|$, démontrer que la distance de A au plan $\mathscr{P}$ est donnée par la formule :

$$AH = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

2. Application

a) Calculer la distance du point $A(1 ; -1 ; 2)$ au plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $x + y - z - 1 = 0$.

b) Le point $H(2 ; 0 ; 1)$ est-il le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathscr{P}$?

87 Déterminer un ensemble de points

Raisonner **Calculer**

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les points :

$$A(2 ; 1 ; 3),\ B(-3 ; -1 ; 7),\ C(3 ; 2 ; 4).$$

1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. d est la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -7 + 2t \\ y = -3t \\ z = 4 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

a) Montrer que la droite d est orthogonale au plan (ABC).

b) Donner une équation cartésienne du plan (ABC).

3. a) Déterminer les coordonnées du point d'intersection H de la droite d et du plan (ABC).

b) Déterminer des nombres réels non nuls a, b, c tels que :

$$a\overrightarrow{HA} + b\overrightarrow{HB} + c\overrightarrow{HC} = \vec{0}.$$

4. Déterminer la nature de l'ensemble Γ des points M de l'espace tels que :

$$(-2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}) \cdot (\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}) = 0.$$

Conseil : penser à utiliser la relation de Chasles dans la 1re parenthèse de façon à exploiter la relation obtenue à la question **3. b)**.

88 Prendre des initiatives

Chercher **Raisonner** **Communiquer**

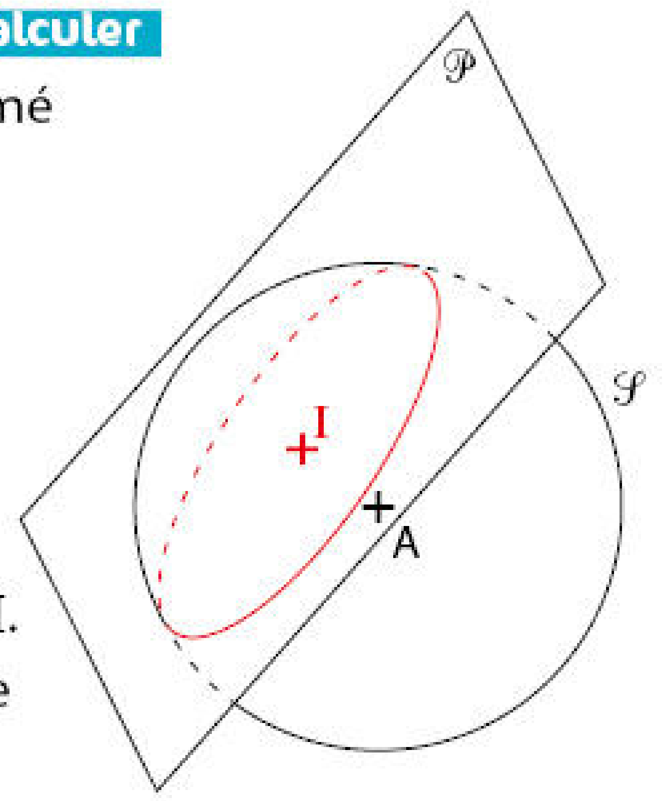
Dans la célèbre saga Star Wars, les ailes des vaisseaux de combat sont portés par des plans parallèles. Dans un repère orthonormé de l'espace (*unité* : 1 m), à un instant donné, ces deux plans ont pour équations cartésiennes respectives :

$$2x - 3y + z + 1 = 0 \text{ et } -4x + 6y - 2z - 58 = 0.$$

Sachant que la cabine de pilotage est la sphère centrale dont le diamètre est égal au tiers de la distance entre les ailes, calculer le volume, en m^3, de la cabine de pilotage. *Arrondir au dixième.*

89 Déterminer une section

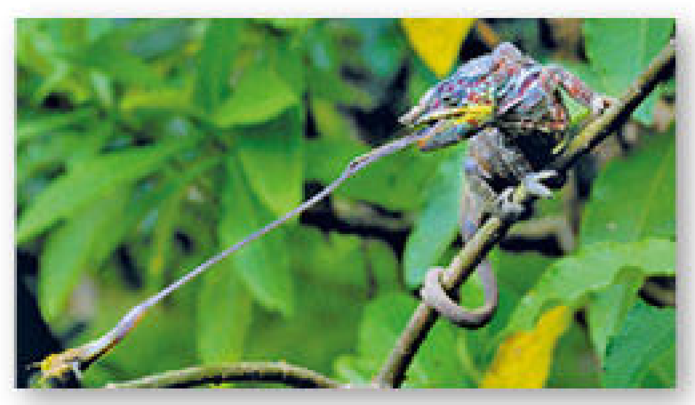
Chercher **Raisonner** **Calculer**



Dans un repère orthonormé de l'espace, le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $2x - 4y + z + 6 = 0$ coupe la sphère $\mathscr{S}$ de centre $A(1 ; 2 ; -1)$ et de rayon 4 suivant le cercle rouge de centre I. Calculer le rayon du cercle rouge.

90 Imaginer une stratégie

Raisonner **Calculer**



Une libellule vole en ligne droite. Dans un repère orthonormé (*unité* : 1 cm), sa trajectoire peut être modélisée par la droite d de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -4 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = -8 + 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Un caméléon se trouve au point $C(26 ; -17 ; 32)$.

a) Déterminer les coordonnées du point en lequel la trajectoire de la libellule passera au plus près du caméléon.

b) Ce type de caméléon peut étirer sa langue jusqu'à une distance de 40 cm.

Attrapera-t-il la libellule ?

91 Reconnaître des plans sécants

Raisonner | Calculer

Dans un repère orthonormé, $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont les plans d'équations cartésiennes respectives :

$2x + 5y - 3z - 15 = 0$ et $-7x + 2y + z + 18 = 0$.

a) Démontrer que les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont sécants.

b) Expliquer pourquoi déterminer l'intersection de ces plans revient à résoudre le système :

$$\begin{cases} 2x + 5y = 15 + 3z \\ -7x + 2y = -18 - z \end{cases}.$$

c) Justifier que ce système équivaut à :

$$\begin{cases} x = \dfrac{40}{13} + \dfrac{11}{39}z \\ y = \dfrac{23}{13} + \dfrac{19}{39}z. \\ z = 0 + 1z \end{cases}$$

d) En déduire un point et un vecteur directeur de la droite d'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$.

92 Calculer des coordonnées

Narration de recherche

Chercher | Raisonner | Calculer

Rédiger les différentes étapes de la recherche, sans omettre les fausses pistes et les changements de méthode.

Problème

Dans un repère orthonormé, voici les équations cartésiennes de trois plans :

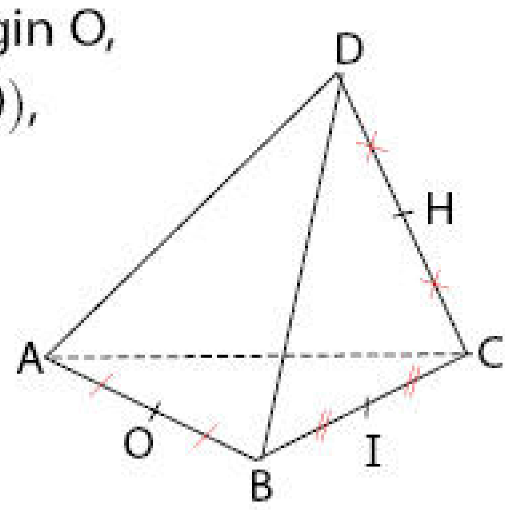
$$\mathcal{P} : 4x + 3y + z + 2 = 0$$
$$\mathcal{Q} : x + 2y + z - 5 = 0$$
$$\mathcal{R} : 3x + 5y + 2z - 9 = 0$$

Démontrer que ces trois plans ont un seul point commun.

93 To study a point of intersection

Raisonner | Calculer | Communiquer

In an orthonormal frame of origin O, we give the points : $A(-3\,;0\,;0)$, $B(3\,;0\,;0)$, $C(0\,;3\sqrt{3}\,;0)$ et $D(0\,;\sqrt{3}\,;2\sqrt{6})$.



The points H, I and O are the respective midpoints of the segments [CD], [BC], [AB].

$\mathcal{P}$ is the plane of normal vector $\overrightarrow{OH}$ and going through I.

Demonstrate that the plane $\mathcal{P}$ and the line (BD) are intersecting at J, midpoint of the segment [BD].

94 Algo python

Programmer des boucles imbriquées

Raisonner | Calculer

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère, pour tout réel m, le plan $\mathcal{P}_m$ d'équation cartésienne :

$$\frac{1}{4}m^2x + (m-1)y + \frac{1}{2}mz - 3 = 0.$$

1. Montrer que les plans $\mathcal{P}_m$ et $\mathcal{P}_n$ (où $n \in \mathbb{R}$) sont orthogonaux si, et seulement si :

$$\left(\frac{mn}{4}\right)^2 + (m-1)(m-1) + \frac{mn}{4} = 0.$$

2. Voici un programme écrit en langage Python.

```python
for m in range(-10,11):
    for n in range(-10,11):
        if (m*n)**2+16*(m-1)*(n-1)+4*m*n==0:
            print(m,n)
```

a) Quel est le rôle de ce programme ?

b) Saisir et exécuter ce programme.

95 Choisir un repère orthonormé

Problème ouvert

Représenter | Raisonner | Calculer

ABCF est le tétraèdre inscrit dans un cube ABCDEFGH d'arête 1 cm.

Les points I, J, K, L, M et N sont les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CF], [AF], [BF] et [AC].

a) Réaliser une figure. Noter les sommets du cube comme à l'exercice 83.

b) Les droites (IK), (JL) et (MN) sont-elles concourantes ?

96 Étudier la configuration du toit

Raisonner | Calculer

Dans un repère orthonormé, voici trois plans :

$\mathcal{P} : 3x - 4y + 7z - 11 = 0$, $\mathcal{Q} : x + 2y - z + 1 = 0$, $\mathcal{R} : -2x - 19y + 17z - 5 = 0$.

1. a) Résoudre le système formé par ces trois équations à l'aide de la calculatrice.

- Casio : ALPHA A (Equations) F1 (Système) F2 (3), entrer les coefficients, puis F1 (Solve)
- **TI** : résol 2(PlySmlt2) 2(SOLVEUR SYST D'ÉQUATIONS) indiquer "3 équations" à "3 inconnues", graphe , entrer les coefficients, puis graphe

Numworks :

Equations OK, entrer les équations en cliquant à chaque fois sur Ajouter une équation Vide, puis Résoudre le système OK

b) Que peut-on en déduire pour ces trois plans ?

2. a) Déterminer une représentation paramétrique de chaque droite : d_1 intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$, d_2 intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$, d_3 intersection de $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$.

b) Vérifier que ces trois droites sont parallèles.

97 Étudier un tétraèdre particulier

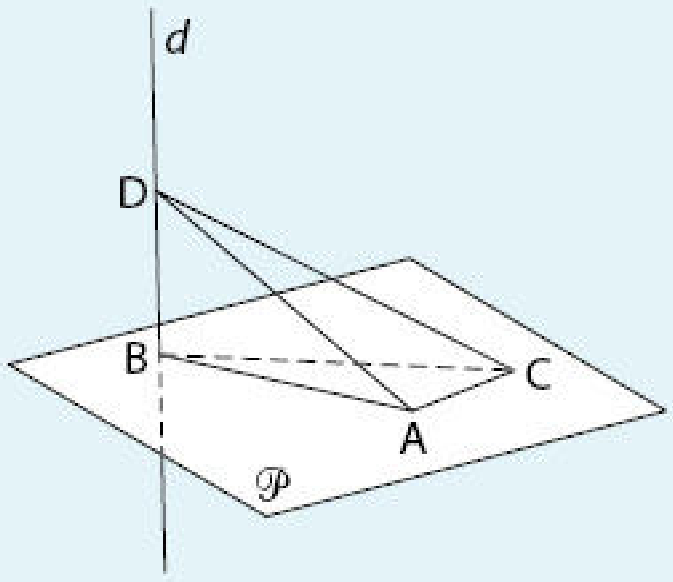
50 min

D'après Bac, Liban 2019

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A

Dans un plan $\mathscr{P}$, on considère un triangle ABC rectangle en A.
Soit d la droite orthogonale au plan $\mathscr{P}$ et passant par le point B.
On considère un point D de cette droite, distinct de B.



1. Montrer que la droite (AC) est orthogonale au plan (BAD).

2. On appelle *bicoin* un tétraèdre dont les quatre faces sont des triangles rectangles.
Montrer que le tétraèdre ABCD est un bicoin.

3. a) Justifier que l'arête [CD] est la plus longue arête du bicoin ABCD.

b) On note I le milieu de l'arête [CD].
Montrer que le point I est équidistant des quatre sommets du bicoin ABCD.

Partie B

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère le point $A(3\,;1\,;-5)$ et la droite d de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2t+1 \\ y = -2t+9 \\ z = t-3 \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$.

1. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ orthogonal à la droite d et passant par le point A.

2. Montrer que le point d'intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la droite d est le point $B(5\,;5\,;-1)$.

3. Justifier que le point $C(7\,;3\,;-9)$ appartient au plan $\mathscr{P}$, puis montrer que le triangle ABC est un triangle rectangle isocèle en A.

4. Soit t un réel différent de 2 et M le point de paramètre t appartenant à la droite d.

a) Justifier que le triangle ABM est rectangle.

b) Montrer que le triangle ABM est isocèle en B si, et seulement si, le réel t vérifie l'équation $t^2 - 4t = 0$.

c) En déduire les coordonnées des points M_1 et M_2 de la droite d tels que les triangles rectangles ABM_1 et ABM_2 soient isocèles en B.

Partie C

On donne le point $D(9\,;1\,;1)$ qui est un des deux points solutions de la question **4. c)** de la **partie B**.
Les quatre sommets du tétraèdre ABCD sont situés sur une sphère.
En utilisant les résultats des questions des **parties A** et **B** précédentes, déterminer les coordonnées du centre de cette sphère et calculer son rayon.

> **Guide de résolution**
> **1.** Pour montrer qu'une droite est orthogonale à un plan, il suffit de montrer qu'elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

> **Guide de résolution**
> **3. b)** I est le milieu de l'hypoténuse des triangles rectangles BCD et ACD.

> **Guide de résolution**
> **4. b)** Utiliser le fait que $AM = BM$ équivaut à $AM^2 = BM^2$.

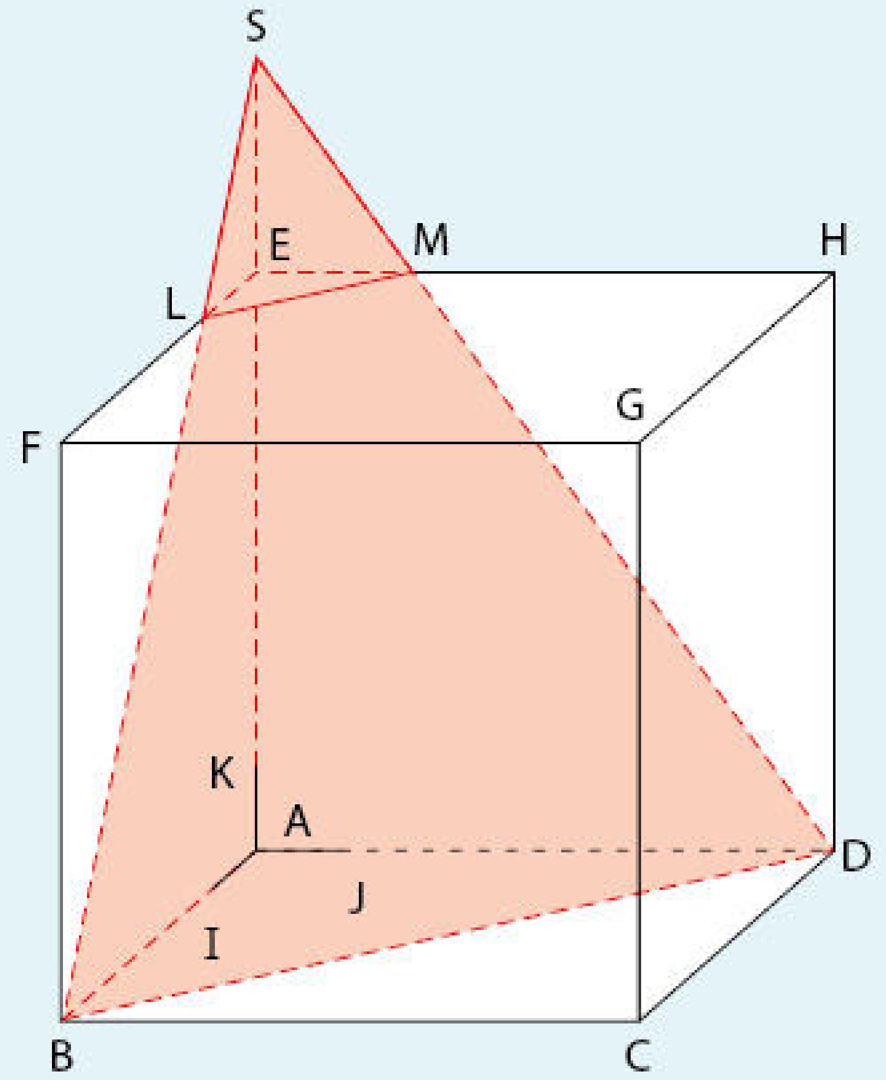
98 Respecter une contrainte

40 min

D'après Bac, Antilles – Guyane 2018

Un artiste souhaite réaliser une sculpture composée d'un tétraèdre posé sur un cube de 6 m d'arête.

Ces deux solides sont représentés par le cube ABCDEFGH et par le tétraèdre SELM ci-dessous.



On munit l'espace du repère orthonormé $(A\,;\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{AK})$ tels que :

$$I \in [AB], J \in [AD], K \in [AE] \text{ et } AI = AJ = AK = 1,$$

l'unité graphique représentant 1 mètre.

Les points L, M, S sont définis de la façon suivante :

- L est le point tel que $\overrightarrow{FL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{FE}$;
- M est le point d'intersection du plan (BDL) et de la droite (EH) ;
- S est le point d'intersection des droites (BL) et (AK).

1. Démontrer, sans calcul de coordonnées, que les droites (LM) et (BD) sont parallèles.

2. Démontrer que les coordonnées du point L sont $(2\,;0\,;6)$.

3. a) Donner une représentation paramétrique de la droite (BL).

b) Vérifier que les coordonnées du point S sont $(0\,;0\,;9)$.

4. Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $(3\,;3\,;2)$.

a) Vérifier que $\vec{n}$ est normal au plan (BDL).

b) Démontrer qu'une équation cartésienne du plan (BDL) est :

$$3x + 3y + 2z - 18 = 0.$$

c) On admet que la droite (EH) a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 0 \\ y = s \\ z = 6 \end{cases}$ $(s \in \mathbb{R})$.

Calculer les coordonnées du point M.

5. Calculer le volume du tétraèdre SELM.

6. L'artiste souhaite que la mesure de l'angle $\widehat{SLE}$ soit comprise entre 55° et 60°. Cette contrainte d'angle est-elle respectée ?

Guide de résolution
1. Utiliser les plans parallèles (EFG) et (ABC). Étudier leurs intersections avec le plan (BDL).

Guide de résolution
5. Le volume V d'un tétraèdre de base d'aire $\mathcal{B}$ et de hauteur h est :

$$V = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h.$$

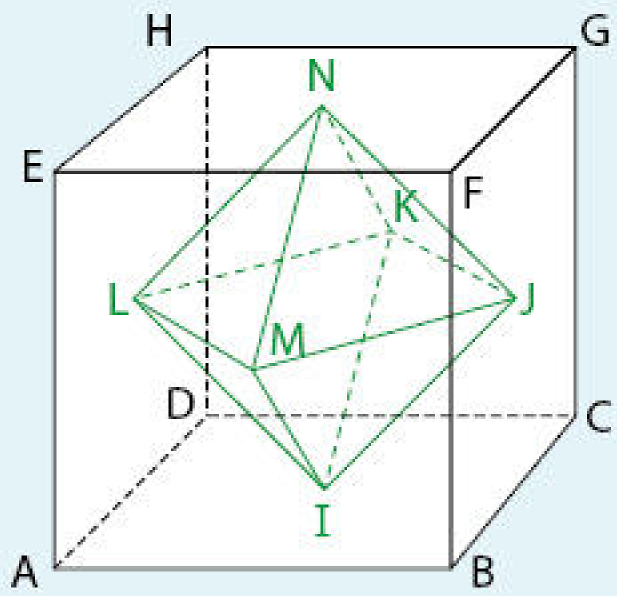
99 Visualiser une droite d'intersection

30 min

D'après Bac, Amérique du Nord 2019

On relie les centres de chaque face d'un cube ABCDEFGH pour former un solide IJKLMN comme sur la figure ci-contre. I, J, K, L, M et N sont les centres respectifs des faces carrées ABCD, BCGF, CDHG, ADHE, ABFE et EFGH.

On se place dans le repère orthonormé $(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ et on prend $N\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\,;1\right)$.



1. a) Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{NC}$ et $\overrightarrow{ML}$.

b) En déduire que les droites (NC) et (ML) sont orthogonales.

c) Déduire des questions précédentes une équation cartésienne du plan (NCI).

2. a) Montrer qu'une équation cartésienne du plan (NJM) est $x - y + z = 1$.

b) La droite (DF) est-elle orthogonale au plan (NJM) ? Justifier.

c) Montrer que l'intersection des plans (NJM) et (NCI) est une droite dont on donnera un point et un vecteur directeur.

Nommer la droite ainsi obtenue en utilisant deux points de la figure.

Guide de résolution

1. b) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{NC} \cdot \overrightarrow{ML}$.

Se préparer À L'ORAL

100 Présenter un exposé

a) L'espace est muni d'un repère orthonormé. Recenser un certain nombre de situations conduisant à la résolution d'un système d'équations linéaires.

b) Dans un exposé oral de 10 min, présenter sa recherche et développer un exemple.

101 Travailler l'oral en groupe

Résoudre cet exercice en petit groupe, puis en présenter les résultats à l'oral.

Dans un repère orthonormé, on donne les points : $A(-1\,;0\,;2)$, $B(3\,;2\,;-4)$, $C(1\,;-4\,;2)$ et $D(5\,;-2\,;4)$.
I et K sont les milieux respectifs des segments [AB] et [CD]. Le point J est tel que $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$.

1. Démontrer que I, J, K ne sont pas alignés.

2. On donne les vecteurs $\vec{u}(1\,;-2\,;2)$ et $\vec{v}(3\,;-1\,;-3)$. Démontrer que les plans (IJK) et $\mathcal{P}(I, \vec{u}, \vec{v})$ sont confondus.

3. a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AD).

b) Démontrer que le plan $\mathcal{P}$ et la droite (AD) sont sécants au point L de coordonnées $\left(\frac{1}{2}\,;-\frac{1}{2}\,;\frac{5}{2}\right)$.

c) Vérifier que $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.

102 Présenter un exposé

▶ **ANTICIPER LES QUESTIONS DU JURY**

1. Préparation de la restitution orale (5 min)

Par groupe de 3, résoudre l'exercice ci-dessous, chaque élève travaillant sur l'une des trois propositions.

2. Jeu de rôle (30 min)

Chaque élève présente son résultat à l'oral (2 min), pendant que les deux autres composent le jury. Chaque juré pose une question au candidat (5 min).

Énoncé : L'espace est muni d'un repère orthonormé. Pour chaque affirmation, dire si elle est vrai ou fausse. Justifier.

a) La droite de représentation paramétrique ci-contre ($t \in \mathbb{R}$), est parallèle au plan passant par $A(3\,;0\,;0)$ et dont deux vecteurs non colinéaires sont $\vec{u}(-1\,;1\,;1)$ et $\vec{v}(0\,;1\,;-2)$.

$$\begin{cases} x = t + 2 \\ y = 2t \\ z = 3t - 1 \end{cases}$$

b) Les droites de représentations paramétriques respectives :

$$\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 + t \\ z = -3 + 2t \end{cases} (t \in \mathbb{R}) \text{ et } \begin{cases} x = 7 + 2u \\ y = 2 + 2u \\ z = -6 - u \end{cases} (u \in \mathbb{R})$$

sont sécantes.

103 Intersection de deux plans

L'espace est muni d'un repère orthonormé.

1. Première situation

$\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont les plans d'équations cartésiennes respectives :

$$2x - 3y + z - 1 = 0 \text{ et } -\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y - \frac{1}{4}z + \frac{1}{4} = 0.$$

a) Démontrer que les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont parallèles.

b) Déterminer les coordonnées d'un point de $\mathcal{P}$.

c) En déduire que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont confondus.

2. Deuxième situation

$\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont les plans d'équations cartésiennes respectives :

$$-x + 2y + \frac{1}{3}z - 1 = 0 \text{ et } 9x - 18y - 3z + 2 = 0.$$

Démontrer que les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont strictement parallèles.

3. Troisième situation

$\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont les plans d'équations cartésiennes respectives $2x - y + z + 2 = 0$ et $-x + y + 2z + 6 = 0$.

a) Démontrer que les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont sécants.

On note Δ la droite d'intersection de ces deux plans.

b) Expliquer pourquoi déterminer l'intersection de ces plans revient à résoudre le système :

$$\begin{cases} 2x - y = -2 - z \\ -x + y = -6 - 2z \end{cases}.$$

c) Justifier que ce système équivaut à :

$$\begin{cases} x = -8 - 3z \\ y = -14 - 5z. \\ z = 0 + 1z \end{cases}$$

d) En déduire un point et un vecteur directeur de la droite Δ.

104 Vecteur orthogonal à deux vecteurs

L'espace est muni d'un repère orthonormé.

1. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non colinéaires.

$\vec{n}$ est un vecteur orthogonal au vecteur $\vec{u}$ et au vecteur $\vec{v}$.

a) Réaliser une figure à main levée.

b) Le vecteur $\vec{n}$ est-il unique ?

2. Dans cette question, on donne $\vec{u}(-1 ; 2 ; 3)$ $\vec{v}(2 ; -2 ; -1)$ et $\vec{n}(a ; b ; c)$ avec a, b, c nombres réels non tous nuls.

a) Traduire l'orthogonalité de $\vec{n}$ aux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ par un système de deux équations à trois inconnues.

b) Résoudre ce système en exprimant a et b en fonction de c.

c) Proposer deux vecteurs orthogonaux à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

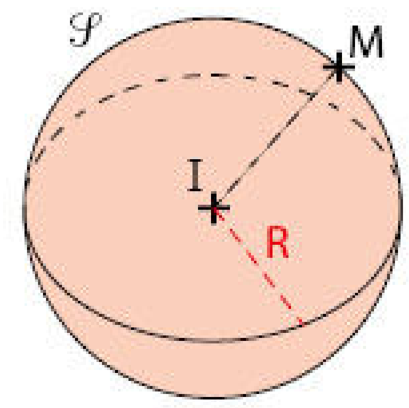
3. Application

Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC) où $A(2 ; 1 ; 0)$, $B(1 ; 1 ; -1)$ et $C(-2 ; 0 ; -3)$.

105 Équations de sphères

L'espace est muni d'un repère orthonormé.

1. Équation d'une sphère



$\mathcal{S}$ est la sphère de rayon R et de centre $I(a ; b ; c)$ représentée ci-contre.

Utiliser le fait que IM = R, c'est-à-dire $IM^2 = R^2$ pour démontrer qu'un point $M(x ; y ; z)$ appartient à $\mathcal{S}$ si, et seulement si, $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$.

2. Étude de cas particuliers

a) • Démontrer que, pour tous réels x, y, z :

(1) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 6z + 10 = 0$ équivaut à $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 4$.

• En déduire l'ensemble des points $M(x ; y ; z)$ qui vérifient l'équation **(1)**.

b) • Démontrer que, pour tous réels x, y, z :

(2) $x^2 + y^2 + z^2 + 8x - 6y + 2z + 26 = 0$ équivaut à $(x+4)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 0$.

• En déduire que l'ensemble des points $M(x ; y ; z)$ qui vérifient l'équation **(2)** est un point dont on précisera les coordonnées.

c) • Démontrer que, pour tous réels x, y, z :

(3) $x^2 + y^2 + z^2 + 10x + 2y - 4z + 70 = 0$ équivaut à $(x+5)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = -40$.

• En déduire que l'ensemble des points $M(x ; y ; z)$ qui vérifient l'équation **(3)** est vide.

106 Intersection d'une sphère et d'une droite

L'espace est muni d'un repère orthonormé.

d est la droite passant par le point $A(x_A ; y_A ; z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a ; b ; c)$.

$\mathcal{S}$ est la spère de centre $I(2 ; -3 ; 1)$ et de rayon 5.

1. Démontrer qu'un point M de coordonnées $(x ; y ; z)$ appartient à la sphère $\mathcal{S}$ si, et seulement si :

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 25.$$

2. Première situation

Dans cette question, $A(1 ; 1 ; 2)$ et $\vec{u}(-1 ; 3 ; 2)$.

a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite d.

b) Justifier $P(x ; y ; z) \in \mathcal{S} \cap d$ si, et seulement si,

$$\text{(S)} \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + 3t \\ z = 2 + 2t \\ (x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 25 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

c) Résoudre ce système (S) et déterminer les coordonnées des deux points d'intersection de la sphère $\mathcal{S}$ et de la droite d.

3. Deuxième situation

Dans cette question, $A(5\,;-3\,;5)$ et $\vec{u}(4\,;0\,;-3)$.

a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite d.

b) Résoudre le système analogue à celui de la question **2. b)**. Que peut-on en conclure ?

c) Calculer la distance du point I à la droite $\mathcal{D}$.

Pouvait-on prévoir ce résultat ?

4. Troisième situation

Dans cette question, $A(1\,;10\,;-2)$ et $\vec{u}(1\,;2\,;1)$.

a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite d.

b) Calculer la distance du point I à la droite d.

Que peut-on en conclure ?

107 Application de l'espace dans lui-même

Vocabulaire : Une **application** d'un ensemble E vers un ensemble F fait correspondre à chaque élément de E un unique élément de F.

L'espace est muni d'un repère orthonormé.

f est l'application de l'espace dans lui-même qui à un point M de coordonnées $(x\,;y\,;z)$ associe le point M′ de coordonnées $(x'\,;y'\,;z')$ telles que :

$$\begin{cases} x' = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{3}y - \dfrac{1}{3}z \\[2mm] y' = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{2}{3}y + \dfrac{1}{3}z \\[2mm] z' = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{3}y + \dfrac{2}{3}z \end{cases}.$$

1. a) Démontrer que l'ensemble des points $M(x\,;y\,;z)$ qui sont leur propre image par f est un plan $\mathcal{P}$ dont on donnera une équation cartésienne.

b) Démontrer que l'image $M(x'\,;y'\,;z')$ d'un point $M(x\,;y\,;z)$ par l'application f appartient toujours au plan $\mathcal{P}$.

c) Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est normal au plan $\mathcal{P}$.

d) Réaliser une figure à main levée qui illustre les résultats des questions précédentes.

Quel nom donne-t-on à l'application f ?

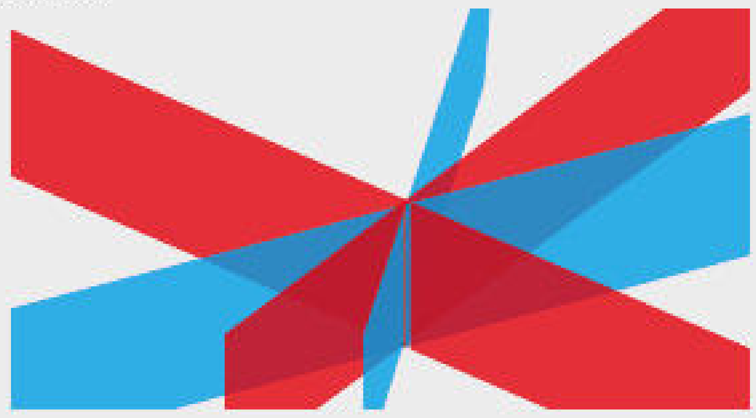
2. a) Vérifier que le point $A(10\,;1\,;-7)$ n'appartient pas au plan $\mathcal{P}$.

b) Calculer les coordonnées de l'image A′ du point A par l'application f.

c) Déterminer une représentation paramétrique de l'ensemble des points qui ont pour image A′ par l'application f.

108 Équations cartésiennes des plans bissecteurs

Vocabulaire : Les **plans bissecteurs** (en rouge) de deux plans sécants $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ (en bleu) sont les deux plans constitués des points équidistants des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$.



L'espace est muni d'un repère orthonormé. $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont les plans d'équations cartésiennes respectives :

$12x + 4y + 3z - 19 = 0$ et $-3x + 12y - 4z - 5 = 0$.

1. a) Démontrer que les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont sécants.

b) Démontrer que la droite Δ d'intersection de ces deux plans a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 - 52t \\ y = 1 + 39t \\ z = 1 + 156t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

2. a) Utiliser la formule établie à l'exercice **86** pour démontrer qu'un point M de coordonnées $(x\,;y\,;z)$ appartient aux plans bissecteurs des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ si, et seulement si,

$$(12x + 4y + 3z - 19)^2 = (-3x + 12y - 4z - 5)^2.$$

b) En déduire une équation cartésienne de chacun des plans bissecteurs.

Des Défis

109 Utiliser des médiatrices

Dans un repère orthonormé de l'espace, on donne les points $A(5\,;4\,;-1)$ et $B(2\,;-1\,;3)$.

Déterminer les représentations paramétriques de toutes les droites de l'espace qui sont médiatrices du segment [AB].

110 Étudier des plans concourants

Dans un repère orthonormé de l'espace, $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont les plans d'équations cartésiennes respectives :

$$x - 4y + z - 3 = 0 \text{ et } 2x + y - z + 1 = 0.$$

Déterminer une équation cartésienne d'un plan $\mathcal{R}$ tel que les plans $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$ soient concourants, c'est-à-dire qu'ils se coupent en un même point.