Avant d'aborder le chapitre EN AUTONOMIE

LES ACQUIS INDISPENSABLES

● 1^{re} Enseignement de spécialité ● 1^{re} Enseignement scientifique

● Le **référentiel géocentrique** est constitué par le centre de la Terre et trois axes qui pointent vers des étoiles assez lointaines pour être considérées comme fixe.

● Le **référentiel héliocentrique** est constitué par le centre du Soleil et trois axes qui pointent vers des étoiles assez lointaines pour être considéré comme fixes.

● La **force d'interaction gravitationnelle** modélise l'interaction à distance entre deux systèmes A et B de masses respectives m_A et m_B :

expressions vectorielles des forces modélisant l'interaction entre A et B (valeur de *F* en **N**)

masse de A et B (en **kg**)

$$\vec{F}_{A/B} = -\vec{F}_{B/A} = G\frac{m_A \cdot m_B}{d^2}\vec{u}_{BA}$$

constante de gravitation universelle $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ $\mathbf{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$

distance entre A et B (en **m**)

vecteur unitaire porté par la droite (AB) et orienté de B vers A

● **2^e loi de Newton** (chap 11).

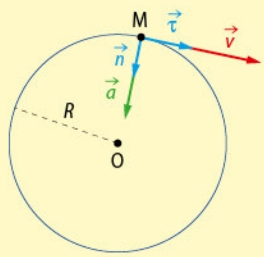
résultante des forces

masse du système

$$\sum \vec{F}_{\text{extérieur/système}} = m \cdot \vec{a}_G$$

accélération du centre de masse

● Dans le **repère** dit **de Frenet** $(M, \vec{\tau}, \vec{n})$ pour un mouvement circulaire on a les relations suivantes (chap 10).



$$\vec{v} = v\vec{\tau} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{a} = \frac{v^2}{R}\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v^2}{R} \end{pmatrix}$$

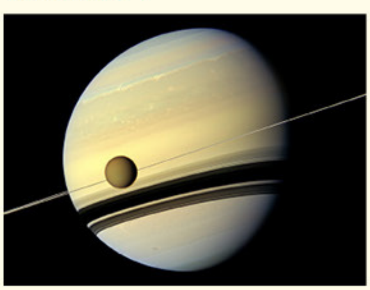
d'où : $$a = \frac{v^2}{R}$$

POUR VÉRIFIER LES ACQUIS

bordas Flash PAGE corrigés détaillés

Pour chaque situation, rédiger une réponse qui explique en quelques lignes le raisonnement.

SITUATION 1

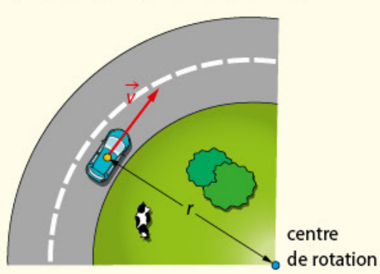


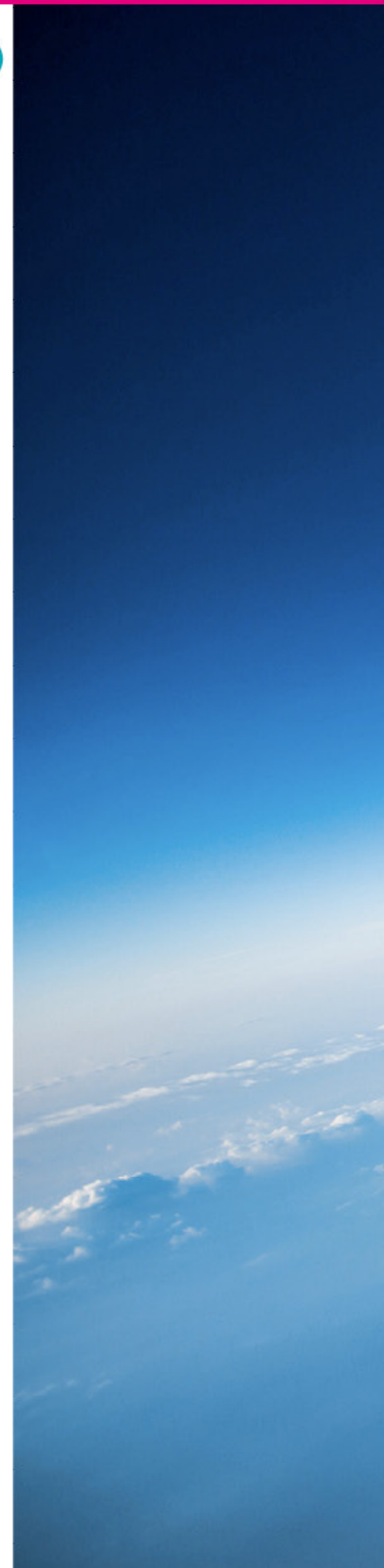
Titan est un satellite de Saturne. Quelle force maintient Titan autour de Saturne ? Quel type de trajectoire Titan est-il susceptible d'avoir ?

SITUATION 2

Une voiture tourne sur un rond-point à vitesse constante de 50 km · h^{-1} et décrit une trajectoire circulaire d'un rayon de 50 m.

Déterminer la valeur de l'accélération puis la tracer sur un schéma.





CHAPITRE 13 PHYSIQUE

un champ de gravitation

La planète Terre a une masse de $6{,}0 \times 10^{24}$ kg et possède un seul satellite naturel, la Lune. Sachant que la période de révolution de la Lune autour du Soleil est de 27 jours, comment déterminer le rayon de son orbite autour de la Terre et la valeur de sa vitesse et de son accélération ?

➥ EXERCICE 36

NOTIONS ET CONTENUS

- Mouvement des satellites et des planètes. Orbite. Période de révolution.
- Lois de Kepler.
- Satellite géostationnaire.

CAPACITÉS EXPÉRIMENTALES ET NUMÉRIQUES

- Exploiter, à l'aide d'un langage de programmation, des données astronomiques ou satellitaires pour tester les deuxième et troisième lois de Kepler.
  ➥ Activités 2, 3 et 4

1. ACTIVITÉ DE DÉCOUVERTE

COMPÉTENCES :
APP Rechercher et organiser l'information
AN/RAI Choisir un modèle pertinent

Le système solaire à travers les siècles

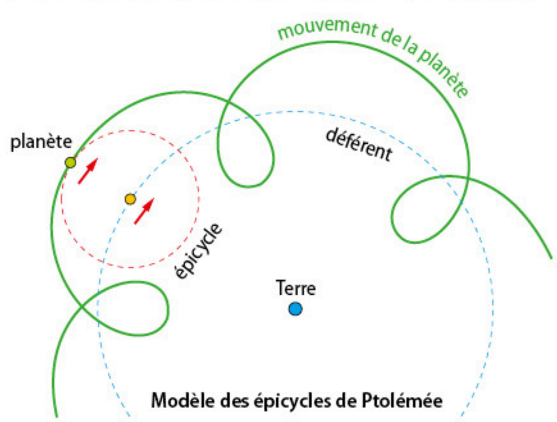
Différents modèles de représentation ont ainsi émergé au fil des siècles, reflétant l'évolution de notre conception du système solaire.

DOC 1 Le modèle d'Aristote

Aristote (384 av. J.-C. –322 av. J.-C.), philosophe, mathématicien et astronome grec de l'Antiquité, construit par la pensée un modèle du monde qui l'entoure. L'Univers est fini et la Terre sphérique est placée au centre d'un système où tourne d'abord la Lune, puis les planètes en cercles concentriques. Ce modèle peine néanmoins à expliquer les trajectoires rétrogrades de certaines planètes comme Mars, à justifier les variations de vitesse et d'intensité lumineuse émises de ces planètes.

DOC 2 Le modèle de Ptolémée

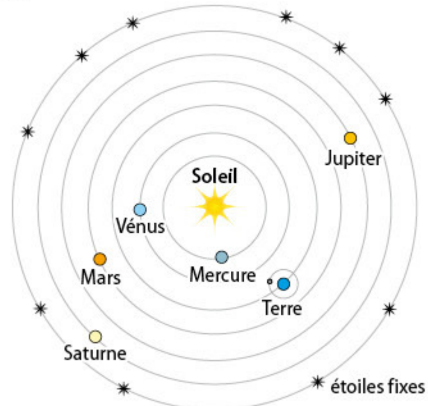
L'astronome grec Claude Ptolémée (IIe siècle apr. J.-C.) se place dans la continuité d'Aristote et construit un modèle géocentrique plus complet et surtout permettant d'interpréter la rétrogradation de certaines planètes. Le cercle reste la figure géométrique essentielle, la planète tourne selon un déférent autour d'un épicycle. Un exemple de représentation est donné ci-dessous.



Modèle des épicycles de Ptolémée

DOC 3 Le modèle de Copernic

Nicolas Copernic (1473–1523) reprend l'idée longtemps oublié d'un système héliocentrique. Les orbites des planètes sont des cercles. Ce modèle est incomplet car il ne permet pas d'expliquer les variations de vitesse des planètes.



DOC 4 Kepler et l'orbite elliptique

Johannes Kepler (1571–1630) utilise des relevés d'observations accumulés durant des années par l'astronome danois Tycho Brahe (1546–1601) pour décrire un nouveau modèle du système solaire basé sur l'héliocentrisme. Les orbites ne sont plus circulaires mais elliptiques, le Soleil étant placé à un des foyers de l'ellipse, ce qui lui permet d'expliquer la variation de vitesse des planètes. Il énonce alors trois lois, sans les démontrer ; elles lui permettent de prévoir avec une grande précision la position des différentes planètes.

Isaac Newton (1643–1727) valide définitivement les lois de Kepler en les démontrant. Il ouvre ainsi la voie à une explication et des prédictions des phénomènes d'astronomie.

EXPLOITATION ET ANALYSE

1 **a.** Indiquer quels sont les phénomènes que le modèle d'Aristote ne permet pas d'expliquer simplement.
b. Schématiser le système géocentrique du modèle d'Aristote avec la Lune et quelques planètes.

2 **a.** Dans le modèle de Ptolémée, les épicycles et déférents sont-ils des trajectoires ?
b. Quel phénomène essaie-t-il de montrer avec ce type d'artifice mathématique ?

3 Pourquoi le modèle de Copernic ne permet-il pas d'expliquer la variation de vitesse d'une planète ?

4 Quelle différence y a-t-il entre le modèle de Copernic et celui de Kepler ?

VOCABULAIRE

▸ Une **planète rétrograde** est une planète dont le mouvement apparent semble s'inverser.

SYNTHÈSE

5 Donner les éléments essentiels qui caractérisent le système solaire d'après Kepler.

Je réussis si...

- **Je sais extraire les éléments importants des documents.**
- **Je sais modéliser le système solaire d'après Kepler.**

TP

COMPÉTENCES :
RÉA Utiliser un modèle
APP Schématiser une situation

Orbite de Mercure

Dans cette activité, on se propose de vérifier la première loi de Kepler en utilisant un simulateur d'orbite créé à l'aide d'un langage de programmation.

DOC 1 Simulateur d'orbite

Le programme modélise l'orbite de Mercure dont la position est repérée à intervalles de temps constants. Il est adaptable à d'autres planètes du système solaire.
N correspond au nombre de positions mesurées.

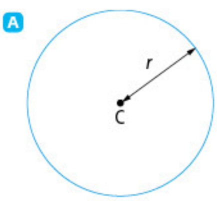
PYTHON

```
import matplotlib.pyplot as plt
import math as m
import scipy.optimize as op
#déclaration des listes
t,M,u,theta,R,X,Y = [],[],[],[],[],[],[]
# Données d'astronomie
T_rev = 0.240 #période de révolution (an)
e = 0.206 # excentricité
a = 0.387# demi grand axe en (UA)
N = 40 # Nombre de position
# résolution des équations de Kepler
for i in range(N):
    t.append(i*T_rev /N)
    M.append(2*m.pi/T_rev *t[i])
    u.append(float(op.fsolve (lambda x:x-e*m.
  sin(x)-M[i],0) ))
# Calcul des coordonnées
    theta.append(2*m.atan((m.sqrt((1+e)/
  (1-e))*m.tan(u[i]/2))))
    R.append(a*(1-e**2)/(1+e*m.cos(theta[i])))
    X.append(R[i]*m.cos(theta[i]))
    Y.append(R[i]*m.sin(theta[i]))
#affichage de l'orbite
plt.grid(True)
plt.xlabel("distance (U.A)")
plt.ylabel("distance (U.A)")
plt.axis('equal')
plt.plot(X,Y,"bo")
plt.plot(0,0,"go")
plt.show()
```

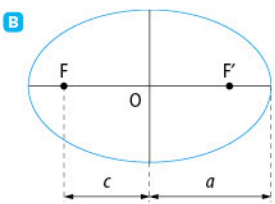
DOC 2 Caractéristiques d'une orbite elliptique

Les orbites des planètes autour du Soleil ne sont pas des cercles, mais des ellipses. Un cercle est caractérisé par son centre C et son rayon *r* (A), tandis qu'une ellipse est caractérisée par son centre O, son demi-grand axe *a*, ses deux foyers F et F', et son **excentricité** $e = c/a$, où $c = OF = OF'$ (B). Le Soleil occupe l'un des deux foyers de cette ellipse. La position de la planète au plus proche du Soleil est appelée **périhélie** et l'**aphélie** le point le plus lointain.

A



B



DOC 3 Données planétaires

Planète	*a* (UA)	*T* (an)	*e*
Mercure	0,387	0,240	0,206
Vénus	0,723	0,615	0,007
Terre	1,00	1,00	0,017
Mars	1,52	1,88	0,093
Jupiter	5,20	11,9	0,048
Saturne	9,54	29,4	0,054
Uranus	19,2	84,0	0,046
Neptune	30,0	165	0,010

UA : l'unité astronomique, elle correspond à la distance moyenne entre la Terre et le Soleil soit 150 millions de km.

EXPLOITATION ET ANALYSE

1 Lancer le programme pour la planète Mercure.

a. Dans quel référentiel considéré galiléen est représentée son orbite ?

b. À quelle distance du Soleil se trouve l'aphélie de Mercure ? son périhélie ?

c. En utilisant la représentation obtenue par la simulation, déterminer la vitesse à l'aphélie et périhélie de Mercure.

2 En faisant évoluer le programme, on peut identifier les planètes dont l'orbite est proche d'un cercle. Pour cela, il suffit de changer les données (valeur des demi-grand axe *a*, excentricité, période de révolution) des différentes planètes dans le code. On peut aussi modifier le nombre *N* de positions affichées.

a. Dans ce cas, de quelle valeur est proche l'excentricité *e* ?

b. Donner les noms des planètes concernées.

c. Que peut-on dire de la vitesse de ces planètes ?

CONCLUSION

3 Représenter sur un schéma quelques vecteurs vitesses et accélérations de la planète étudiée :
- dans le cas de Mercure ;
- dans le cas d'une planète ayant une orbite quasi circulaire.

Je réussis si…

- **Je sais repérer les orbites elliptiques et leurs caractéristiques.**
- **Je sais mettre en évidence la variation de vitesse sur une orbite elliptique.**

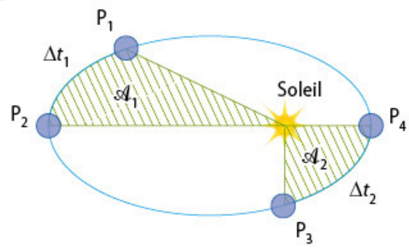
TP

COMPÉTENCES :
RÉA Mettre en œuvre les étapes d'une démarche
VAL Confronter un modèle à des résultats expérimentaux

La comète de Halley

La deuxième loi de Kepler est complexe à vérifier par l'expérience, aussi l'outil informatique permet de modéliser le calcul de l'aire balayée par une trajectoire comme dans l'étude de la comète de Halley.

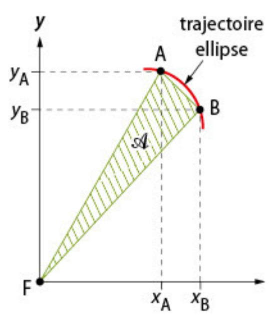
DOC 1 Deuxième loi de Kepler



On appelle $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ des aires balayées par le rayon vecteur partant du Soleil vers la planète durant les intervalles de temps Δt_1 et Δt_2.
D'après la 2e loi de Kepler (loi des aires) : si les durées de parcours sont identiques $\Delta t_1 = \Delta t_2$ alors $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$.

DOC 2 Principe de calcul d'une aire balayée

Pour calculer l'aire balayée, on estime l'aire d'un triangle. Cette approximation reste correcte si les instants considérés sont proches.



L'aire du triangle $\mathcal{A}$ est calculée en utilisant le demi-périmètre :

$$p = \frac{AF + AB + FB}{2}$$

et la formule de Héron telle que :

$$\mathcal{A} = \sqrt{p(p - AF)(p - AB)(p - FB)}$$

avec AF, AB et FB les longueurs du triangle.

DOC 3 Programme de calcul des aires balayées

PYTHON

La portion de programme du calcul des aires balayées est à insérer dans les lignes de codes du programme de l'activité précédente (qui permet de représenter à l'aide d'un langage de programmation l'orbite d'une planète), juste avant la partie correspondant à l'affichage de l'orbite. Les intervalles de temps sont modifiables en changeant les dates de mesures.

```
# Aires des triangles
# t1,t2 dates première aire et t2, t3 date de la seconde aire
t1,t2 = 0,2
t3,t4 = 10,12
#calcul de l'aire balayée entre t0 et t1
Delta_t1 =t2-t1
AIRE1,AIRE2 = 0,0
i1,i2 = 0,0
for i1 in range(Delta_t1):
  long1 = m.sqrt((X[t1+i1])**2+(Y[t1+i1])**2)
  long2 = m.sqrt((X[t2+i1])**2+(Y[t2+i1])**2)
  long3 = m.sqrt((X[t2+i1]-X[t1+i1])**2+(Y[t2+i1]-Y[t1+i1])**2)
  S_1 = 1/2*(long1+long2+long3)
  AIRE1 = m.sqrt(S_1*(S_1-long1)*(S_1-long2)*(S_1-long3))+AIRE1
#calcul de l'aire balayée entre t2 et t3
Delta_t2 =t4-t3
for i2 in range(Delta_t2):
  long1b = m.sqrt((X[t3+i2])**2+(Y[t3+i2])**2)
  long2b = m.sqrt((X[t4+i2])**2+(Y[t4+i2])**2)
  long3b = m.sqrt((X[t4+i2]-X[t3+i2])**2+(Y[t4+i2]-Y[t3+i2])**2)
  S_1b = 1/2*(long1b+long2b+long3b)
  AIRE2 =m.sqrt(S_1b*(S_1b-long1b)*(S_1b-long2b)*(S_1b-long3b))
  +AIRE2

print('aire balayée entre t1 et t2 --> ' + str(AIRE1))
print('aire balayée entre t3 et t4 --> ' + str(AIRE2))
```

DOC 4 La comète de Halley

La comète de Halley possède une période de révolution de 76,09 années autour du Soleil, son excentricité est de 0,967 et la valeur du demi-grand axe est de 17,83 UA.

EXPLOITATION ET ANALYSE

1 Repérer dans le programme les parties concernant : le calcul de la longueur de chaque segment, le calcul du demi-périmètre et la formule de Héron.

2 Vérifier pour plusieurs planètes (en utilisant les données planétaires du doc. 3 de l'activité 2) et différentes dates, que la 2e loi de Kepler est vérifiée.

3 **a.** Pour une comète comme celle de Halley, les variations de vitesses observées sur son orbite sont-elles compatibles avec la 2e loi de Kepler ?
b. Justifier que la mesure des aires balayées est fortement imprécise dans le cas de la comète de Halley. Montrer, en justifiant, que l'on peut résoudre ce problème en modifiant certains paramètres du programme.

CONCLUSION

4 La deuxième loi de Kepler est-elle applicable à tous les astres ?

Je réussis si…

- **Je sais repérer les expressions mathématiques dans le code.**
- **Je sais vérifier la deuxième loi de Kepler à l'aide du programme.**
- **Je sais reconnaître les limites de l'approximation.**

COMPÉTENCES :
RÉA Utiliser un modèle
AN/RAI Faire des prévisions à l'aide d'un modèle

La masse de Jupiter

La loi des périodes ou troisième loi de Kepler s'applique non seulement au système solaire mais aussi aux systèmes satellitaires.

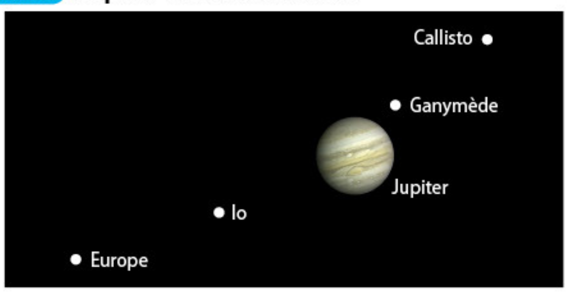
DOC 1 Expression de la 3e loi de Kepler

Après l'énoncé de la loi des périodes par Johannes Kepler, Isaac Newton la démontre et l'écrit ainsi :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot M} = \text{constante.}$$

Où T est la période de révolution de l'astre sur son orbite, a la valeur du demi-grand axe de l'orbite, G est la constante de gravitation universelle : $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}$ et M la masse, en kg, de l'astre attracteur (le Soleil dans le cas du système solaire).

DOC 2 Jupiter et ses satellites



Jupiter est la planète la plus grande et massive du système solaire ; sa masse est de $1{,}898 \times 10^{27}$ kg. Jupiter possède de nombreux satellites ; quelques-uns de ses satellites ainsi que leurs caractéristiques (demi-grand axe, excentricité et période de révolution) sont donnés ci-dessous.

Satellites	a ($\times 10^3$ km)	e	T (jour)
Amalthée	181	0,0031	0,498
Thébé	221	0,0177	0,674
Io	421	0,0041	1,769
Europe	671	0,0094	3,551
Ganymède	1 070	0,0011	7,155
Callisto	1 882	0,0074	16,689

QUESTIONS PRÉLIMINAIRES

1 Lancer le programme pour le système solaire.

2 Tester la 3e loi de Kepler en vérifiant la proportionnalité entre T^2 et a^3.

PROBLÈME À RÉSOUDRE

3 **a.** Adapter le programme aux satellites de Jupiter.
b. Mettre en œuvre une stratégie pour déterminer la masse de Jupiter.
c. Comparer la valeur de la masse trouvée par cette stratégie à celle donnée dans le **document 2**.

DOC 3 Régression linéaire

PYTHON

La régression linéaire est une méthode statistique permettant de trouver l'équation d'une fonction affine à partir d'un nuage de points issu de mesures. Le modèle est validé, si le coefficient de corrélation est proche de 1 ou –1 ; 0,999… est une valeur convenable.

En langage Python, l'instruction (`stat.linregress()`) permet de trouver le coefficient directeur, l'ordonnée à l'origine et le coefficient de corrélation, valeurs stockées dans un tableau de trois valeurs.

DOC 4 Programme « vérification de la 3e loi de Kepler »

Le programme suivant permet de vérifier la 3e loi de Kepler pour le système solaire. Il est adaptable à d'autres systèmes notamment les systèmes satellitaires.

PYTHON

```
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy.stats as stat
# listes des demi-grands axes a en U.A et périodes
  des planètes en années
LIST_a = [0.39,0.72,1,1.5,5.2,9.5,19.2,30]
LIST_T = [0.24,0.615,1,1.88,11.9,29.4,84,165.0]
LIST_P = ['Mercure','Venus','Terre','Mars',
  'Jupiter','Saturne','Uranus','Neptune']
# a au cube et T au carré
for i in range(0, len(LIST_a)):
    LIST_a[i] = (LIST_a[i]*150e9)**3
    LIST_T[i] = (LIST_T[i]*365*24*3600)**2
# régression linéaire
regression = stat.linregress(LIST_a,LIST_T)
pente =regression[0]
print('pente --> '+str(pente))
ordorigine =regression[1]
print('ordonnée à l origine --> '+str(ordorigine))
coeffcorel = regression[2]
print('coefficient de corrélation -->
  '+str(coeffcorel))
#affichage point et droite de regression
a_3_max = LIST_a[len(LIST_a)-1]
T_2_max =pente *a_3_max + ordorigine
plt.grid(True)
plt.xlabel(' a au cube (m3)')
plt.ylabel('periode au carré (s2)')
plt.scatter(LIST_a,LIST_T,s = 100,c ='red',
  marker ='+')
for i in range (0,len(LIST_a)):
  plt.text(LIST_a[i],LIST_T[i], LIST_P[i],fontsize =8)
plt.plot ([0,a_3_max],[ordorigine,T_2_max],c ='blue')
plt.show()
```

Je réussis si…

- **je sais vérifier la troisième loi de Kepler pour le système solaire.**
- **Je sais adapter le programme pour le système satellitaire de Jupiter.**
- **Je sais déterminer la valeur de la masse de Jupiter.**

1 Mouvements des planètes, des satellites et lois de Kepler

Définition d'une orbite

Les astres décrivent des trajectoires lorsqu'ils tournent autour d'un astre attracteur, elles sont appelées orbites.

L'**orbite** d'une planète ou d'un satellite désigne la trajectoire de son centre de masse dans le référentiel lié au centre de l'astre attracteur.
Pour le Soleil, le référentiel est héliocentrique.

Définition d'une période de révolution

La période de révolution T d'une planète ou d'un satellite est la durée nécessaire pour parcourir l'ensemble de son orbite.

Lois de Kepler

Au XVII^e^ siècle, Johannes Kepler **(FIG. 1)** constate que les planètes tournent autour du Soleil selon des trajectoires qui ne sont pas parfaitement circulaires et énonce trois lois pour décrire leur mouvement.

FIG. 1 Portrait de Johannes Kepler (1571-1630).

1^re^ loi de Kepler ou loi des orbites : dans le référentiel héliocentrique, l'orbite d'une planète est une ellipse **(FIG. 2)** et le centre du Soleil occupe un des deux foyers.
2^e^ loi de Kepler ou loi des aires : le segment reliant le Soleil à la planète balaye des aires égales pendant des durées égales **(FIG. 3)**.

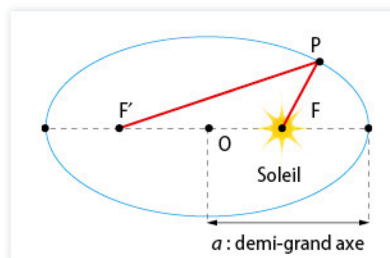


FIG. 2 Le centre d'une planète P décrit une ellipse de foyers F et F' (à chaque instant PF + PF' = 2a).

La vitesse d'une planète n'est donc pas constante : elle augmente lorsque la planète se rapproche du Soleil et diminue lorsqu'elle s'en éloigne.

Remarque. Une orbite est circulaire si le foyer et le centre de l'ellipse sont confondus. La distance entre le centre du Soleil et la planète est alors constante et représentée par le rayon du cercle. Ainsi, d'après la deuxième loi de Kepler, les aires balayées sont identiques pendant des durées égales, donc les arcs de cercles parcourus sont égaux et donc la vitesse est constante sur l'ensemble de l'orbite circulaire.

3^e^ loi de Kepler ou loi des périodes : la période de révolution T au carré est proportionnelle au cube du demi-grand axe a.
Ce qui s'écrit :

$$\frac{T^2}{a^3} = k = \text{constante}$$

période (s) → T ; demi-grand axe (m) → a

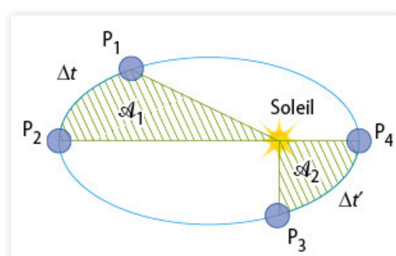


FIG. 3 Si les durées Δt et $\Delta t'$ sont égales, alors les aires balayées par la planète $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont égales.

La constante de la 3^e^ loi de Kepler ne dépend que de l'astre attracteur :
$k = \dfrac{4\pi^2}{G \cdot M}$, avec $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}$, constante universelle de gravitation, et M la masse (en kg) de l'astre attracteur.

VOCABULAIRE

- Le **périapside** et l'**apoapside** sont des termes désignant deux points particuliers d'une orbite d'un objet gravitant autour d'un astre attracteur. Il s'agit respectivement de la position la plus proche et de la plus éloignée de l'astre attracteur.
- Pour la Terre ces points sont appelés le **périgée** et l'**apogée**, pour le Soleil les termes utilisés sont le **périhélie** et l'**aphélie**.

2 Cas des mouvements circulaires

Dans le référentiel lié au centre d'un astre attracteur et dans des conditions d'approximations de trajectoires assimilées à des trajectoires circulaires, la planète ou le satellite de centre S et de masse m tourne autour de l'astre attracteur de masse M, selon une orbite circulaire de rayon r.

La planète ou le satellite n'est soumis qu'à l'action mécanique exercée par l'astre attracteur qui se modélise par la force gravitationnelle.

D'après la deuxième loi de Newton, on peut écrire :

$\vec{F}_{O/S} = m \cdot \vec{a}$ or $\vec{F}_{O/S} = G\dfrac{m \cdot M}{r^2}\vec{n}$ ainsi $G\dfrac{m \cdot M}{r^2}\vec{n} = m \cdot \vec{a}$. Soit $\vec{a} = G\dfrac{M}{r^2}\vec{n}$.

Une planète ou un satellite tournant autour de son astre attracteur a un vecteur accélération dirigé vers le centre de sa trajectoire circulaire. Le **vecteur accélération** est donc **radial et centripète** (FIG. 4).

L'accélération dans le repère de Frenet s'écrit : $\vec{a} = \dfrac{dv}{dt} \cdot \vec{\tau} + \dfrac{v^2}{r} \cdot \vec{n}$

L'expression trouvée précédemment impose que le terme $\dfrac{dv}{dt} \cdot \vec{\tau} = \vec{0}$ et donc que $\dfrac{dv}{dt} = 0$. La vitesse est donc constante.

Une planète ou un satellite possède une vitesse constante sur une orbite circulaire. Le **mouvement** est dit **circulaire** et **uniforme**.
L'accélération a pour expression :

vitesse du satellite ou planète ($m \cdot s^{-1}$)

vecteur accélération (de valeur en $m \cdot s^{-2}$) → $\boxed{\vec{a} = \dfrac{v^2}{r} \cdot \vec{n}}$ ← vecteur unitaire du repère de Frenet radial et centripète

rayon du cercle (m)

La vitesse est perpendiculaire à l'accélération et s'écrit :
$\vec{v} = v \cdot \vec{\tau}$ où $\vec{\tau}$ est le vecteur unitaire dans le repère de Frenet tangent à la trajectoire (FIG. 4).

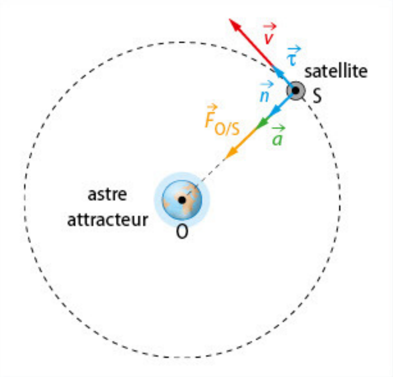


FIG. 4 Accélération et vitesse sur une orbite circulaire.

Vitesse d'une planète ou d'un satellite

D'après ce qui précède, le mouvement étant circulaire et uniforme, on a :
$a = \dfrac{G \cdot M}{r^2} = \dfrac{v^2}{r}$ donc : $v = \sqrt{\dfrac{G \cdot M}{r}}$.

La **vitesse** d'une planète ou d'un satellite sur une orbite circulaire autour d'un astre attracteur est :

constante universelle de gravitation $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ $m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}$

vitesse ($m \cdot s^{-1}$) → $\boxed{v = \sqrt{\dfrac{G \cdot M}{r}}}$ ← masse (kg) de l'astre attracteur

rayon du cercle (m)

Dans le cas d'un satellite terrestre, le référentiel est géocentrique et on note : $r = R_T + h$, où R_T désigne le rayon terrestre ($R_T = 6{,}37 \times 10^6$ m) et h l'altitude du satellite (FIG. 5).

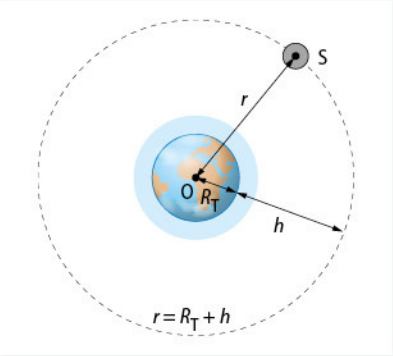


FIG. 5 L'altitude du satellite est notée h.

DYS

Période de révolution

Si l'orbite décrite par une planète ou un satellite est un cercle de rayon r, la distance parcourue pendant une durée T est la circonférence du cercle $2\pi r$.

On en déduit que donc que : $v = \frac{2\pi r}{T} = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$ et donc $T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{G \cdot M}}$.

La **période de révolution T** d'une planète ou d'un satellite sur une orbite circulaire autour d'un astre attracteur est :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{G \cdot M}}$$

- T : période de révolution (**s**)
- r : rayon du cercle (**m**)
- M : masse (**kg**) de l'astre attracteur
- G : constante universelle $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ $\mathbf{m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}}$

FIG. 6 Exemple de satellite.

EXEMPLE

Un satellite (**FIG. 6**) orbite autour de la Terre en décrivant une trajectoire circulaire de rayon $r = 7{,}23 \times 10^6$ m. Sachant que la masse de la Terre est $M_T = 5{,}97 \times 10^{24}$ kg, alors la période est :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(7{,}23 \times 10^6)^3}{6{,}67 \times 10^{-11} \times 5{,}97 \times 10^{24}}} = 6{,}12 \times 10^3 \text{ s soit } 1{,}70 \text{ h.}$$

De la période à la troisième loi de Kepler

En élevant au carré la relation précédente, cela permet d'écrire que :

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{r^3}{G \cdot M}$$

On retrouve alors la relation $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot M}$ correspondant à la troisième loi de Kepler pour un mouvement circulaire.

3 Les satellites géostationnaires

Les satellites géostationnaires possèdent la particularité d'être toujours positionnés au-dessus du même point de la surface de la Terre. Par conséquent, ils doivent tourner à la même vitesse que celle de la Terre et l'orbite doit être placée sur le plan équatorial pour posséder le même axe de rotation (**FIG. 7**).

L'altitude d'une telle orbite peut se déterminer par la relation de la période telle que : $T = 2\pi\sqrt{\frac{(R_T + h)^3}{G \cdot M}}$ donc $h = \left(\frac{T^2}{4\pi^2} G \cdot M\right)^{\frac{1}{3}} - R_T$

La période de rotation sidérale de la Terre est de 23 h 56 min 4 s, soit $T = 86\,204$ s.

$$h = \left(\frac{(86\,204)^2}{4\pi^2} \times 6{,}67 \times 10^{-11} \times 5{,}97 \times 10^{24}\right)^{\frac{1}{3}} - 6{,}37 \times 10^6 = 3{,}59 \times 10^7 \text{ m}$$

Un satellite géostationnaire est placé sur une orbite située à environ 36 000 km de la Terre sur son plan équatorial.

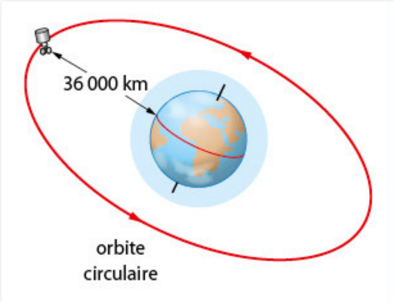


FIG. 7 Orbite d'un satellite géostationnaire.

VOCABULAIRE

La période sidérale est la durée nécessaire pour que l'astre retrouve la même position par rapport aux étoiles considérées comme fixes.

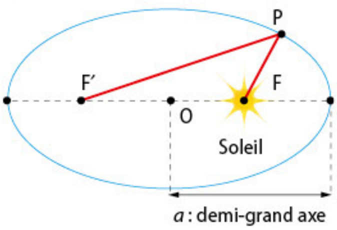
FICHE MÉMO PRÉPA BAC

Le vocabulaire à retenir

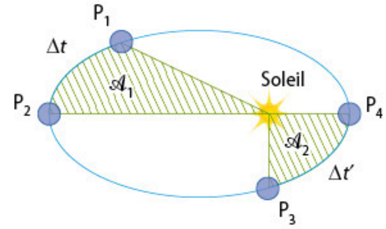
Les relations à connaître

1 Mouvements des planètes, des satellites et lois de Kepler

- **1re loi de Kepler ou loi des orbites :** dans le référentiel héliocentrique, l'orbite d'une planète est une ellipse et le centre du Soleil occupe un des deux foyers.



- **2e loi de Kepler ou loi des aires :** le segment reliant le Soleil à la planète balaye des aires égales pendant des durées égales.



Si les durées Δt et $\Delta t'$ sont égales, alors les aires balayées par la planète $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont égales.

- **3e loi de Kepler ou loi des périodes :**

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot M} = \text{constante}$$

période (**s**) → T^2 ; demi-grand axe (**m**) → a^3

constante universelle de gravitation $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ $\mathbf{m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}}$; masse de l'astre attracteur (**kg**)

2 Cas des mouvements circulaires

- Pour un mouvement circulaire et uniforme dans le repère de Frenet $(S, \vec{\tau}, \vec{n})$:

$$\vec{v} = v \cdot \vec{\tau} \quad \text{et} \quad \vec{a} = \frac{v^2}{r}\vec{n}$$

- La période de révolution d'une planète ou d'un satellite autour d'un astre attracteur s'écrit :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{G \cdot M}}$$

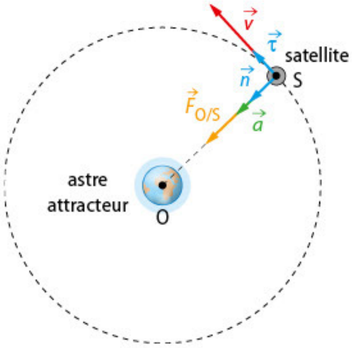
- Avec la deuxième loi de Newton, on obtient :

$$\vec{a} = G\frac{M}{r^2}\vec{n}$$

Le vecteur accélération est **radial** et **centripète**.

La vitesse d'une planète ou d'un satellite autour d'un astre attracteur est définie par :

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$



Orbite circulaire de rayon r (m) d'un satellite ou d'une planète de masse M (kg).

3 Les satellites géostationnaires

- Les **satellites géostationnaires** possèdent la particularité d'être toujours positionnés au-dessus du même point de la surface de la Terre.

Vérifier l'essentiel EN AUTONOMIE

Pour chaque question, choisir la ou les bonnes réponses. ➥ SOLUTIONS EN PAGE 593

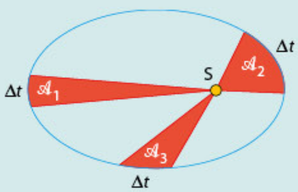
bordas Flash PAGE corrigés détaillés

bordas Flash PAGE QCM interactifs

DONNÉES

- Constante de gravitation universelle $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}$, rayon terrestre $R_T = 6{,}4 \times 10^3$ km, masse de la Terre $M_T = 5{,}97 \times 10^{24}$ kg.

1 Mouvements des planètes, des satellites et lois de Kepler

	A	B	C
1 Les planètes décrivent une ellipse dans le référentiel :	géocentrique.	terrestre.	héliocentrique.
2 D'après la 1re loi de Kepler, le Soleil est situé :	au centre de l'ellipse.	à l'un des foyers de l'ellipse.	sur l'orbite.
3 La troisième loi de Kepler s'écrit :	$T^3 = k \cdot a^2$	$T^2 = k \cdot a^3$	$k = \dfrac{a^3}{T^2}$
4 La deuxième loi de Kepler impose pour une orbite circulaire que :	la vitesse augmente ou diminue sur certaines portions de l'orbite.	l'accélération est nulle.	la valeur de la vitesse est constante.
5 On considère une planète en orbite autour du Soleil représentée par le schéma ci-dessous. On peut dire que : 	les aires $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ et $\mathcal{A}_3$ ne sont pas égales.	les aires $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont égales mais pas celle de $\mathcal{A}_3$.	les trois aires sont égales $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_3$.

2 Cas des mouvements circulaires

	A	B	C
6 Dans le cas d'une orbite circulaire :	le vecteur vitesse est constant.	l'accélération est radiale, centripète et constante.	l'accélération est nulle.
7 L'expression de la vitesse sur une orbite circulaire est :	$v = \sqrt{\dfrac{r}{G \cdot M}}$	$v = \left(\dfrac{G \cdot M}{r}\right)^{\frac{1}{2}}$	$v = \sqrt{\dfrac{G \cdot M}{r}}$
8 Un satellite à une orbite circulaire à une altitude de 800 km. Quelle est la période de révolution de ce satellite ?	$T = 43\,920$ s	$T = 6\,083$ s	$T = 9\,067$ s

3 Les satellites géostationnaires

	A	B	C
9 La période de révolution d'un satellite géostationnaire correspond à :	la période sidérale de la Terre.	la période de révolution de la Terre.	la période correspondant un jour solaire.
10 Un satellite est géostationnaire si :	il est placé à une altitude de 36 000 km et sur le plan équatorial terrestre.	le satellite est synchrone avec la rotation terrestre.	le satellite est sur le plan équatorial à une altitude quelconque.

Exercices de numéro bleu : solutions en fin de manuel, corrigés détaillés en version numérique corrigés détaillés

Acquérir les bases

1 Mouvements des satellites, des planètes et lois de Kepler

EN AUTONOMIE

Ce qu'on attend de moi le jour du BAC

Mouvement des satellites et des planètes.
Les lois de Kepler.

- Montrer que l'orbite d'un satellite ou d'une planète est une ellipse dont le foyer est occupé par l'astre attracteur.
- Utiliser la deuxième loi de Kepler pour montrer la variation de vitesse sur une orbite.
- Montrer la proportionnalité énoncée dans la 3e loi de Kepler avec des données astronomiques.
- Utiliser la relation $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot M}$ pour trouver la période de révolution, la masse de l'astre attracteur ou la valeur du demi-grand axe

➥ **Acquérir les bases : 14** ➥ **S'entraîner : 25 26**

11 Lois de Kepler

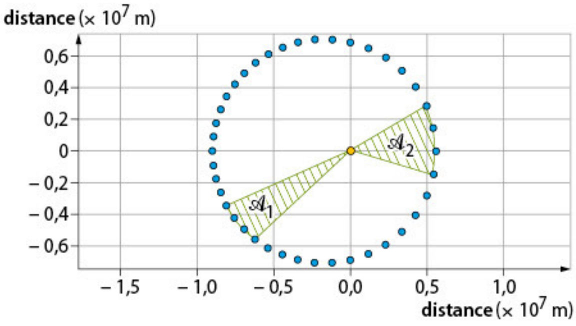
1. Donner la définition d'un référentiel planétocentrique.

2. Énoncer les trois lois de Kepler dans un référentiel planétocentrique pour un satellite.

3. On considère que ce satellite a une trajectoire circulaire.
a. Que peut-on alors déduire de la deuxième loi de Kepler ?
b. Écrire la relation de la 3e loi de Kepler dans ce cas.

12 Thémisto, satellite de Jupiter

Thémisto est un des satellites de Jupiter. La simulation de la trajectoire de ce satellite donne la représentation suivante. Chaque position de Thémisto, modélisée par un point bleu, est relevée à intervalle de temps constant. Deux aires balayées $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont représentées.



1. Dans quel référentiel considéré galiléen a-t-on obtenu cette trajectoire ?

2. Jupiter, le point jaune, est-elle au centre de l'orbite de Thémisto ?

3. En utilisant la première loi de Kepler, justifier l'allure de la trajectoire.

4. Quelle relation existe-t-il entre les aires $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$? Justifier.

5. Que peut-on dire des distances parcourues par le satellite dans le cas des aires $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$? Quelle est la conséquence pour la vitesse du satellite ?

6. Est-ce en accord avec les différentes positions des points ?

13 Orbite de Mars

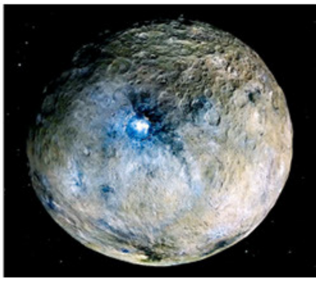
Mars est éloignée du Soleil au maximum de $2{,}46 \times 10^8$ km et au minimum de $2{,}06 \times 10^8$ km.

1. Quelle est la nature de l'orbite de Mars ?

2. Où se place le Soleil par rapport à cette orbite ?

3. En quel point la vitesse de Mars est-elle maximale ? minimale ?

14 La planète naine Cérès



Cérès, astre classé dans la catégorie des planètes naines, gravite autour du Soleil dans une ceinture d'astéroïdes située entre Mars et Jupiter. Les distances de l'aphélie et du périhélie sont respectivement de $4{,}47 \times 10^8$ km et $3{,}81 \times 10^8$ km.

***Données :** demi-grand axe Terre-Soleil : $a_T = 1{,}50 \times 10^8$ km ; période de révolution : $T = 365{,}25$ jours.*

1. Que peut-on déduire des distances du périhélie et de l'aphélie sur la nature de la trajectoire ?

2. Représenter, sans souci d'échelle, l'orbite de Cérès. Indiquer les positions de l'aphélie et du périhélie.

3. Calculer la valeur du demi-grand axe a_c.

4. En utilisant la 3e loi de Kepler, la période de rotation de la Terre et la valeur du demi-grand axe de la Terre, calculer la période de révolution de Cérès.

15 Les satellites de Saturne

Saturne possède de nombreux satellites, quelques-uns d'entre eux sont donnés avec leur période de révolution et le rayon de l'orbite dans le tableau suivant. On considère l'orbite de ces satellites quasi circulaire.

Satellite	*T* (jours)	*R* (Gm)
Théthys	1,89	0,294
Dioné	2,74	0,377
Rhéa	4,52	0,527
Titan	15,95	1,222
Japet	79,33	3,561

***Donnée :** constante gravitationnelle : $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}$*

1. Écrire la troisième loi de Kepler pour le système satellitaire de Saturne.

2. Déterminer l'équation numérique entre la période et le rayon.

3. Encelade est un autre satellite de Saturne de trajectoire quasi circulaire de $0{,}238 \times 10^6$ km de rayon. Déterminer sa période de révolution.

16 La masse de Jupiter

La troisième loi de Kepler pour les satellites de Jupiter s'écrit $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot M_J}$ où a est le demi-grand axe de l'orbite du satellite, T la période de révolution d'un satellite et M_J La masse de Jupiter. Ganymède, satellite naturel de Jupiter, possède une période de révolution de 7,15 jours et son demi-grand axe est de 1,07 million de km. Calculer la masse de Jupiter.

2 Cas des mouvements circulaires

EN AUTONOMIE

Ce qu'on attend de moi le jour du BAC

Mouvement des satellites et des planètes dans le cas d'un mouvement circulaire.

- Déterminer les caractéristiques des vecteurs vitesse et accélération du centre de masse d'un système en mouvement circulaire dans un champ de gravitation newtonien.
- Établir et exploiter la troisième loi de Kepler dans le cas du mouvement circulaire.

➥ **Acquérir les bases : 19** ➥ **S'entraîner : 23 27**

DONNÉES

- Rayon terrestre : $R_T = 6\,370$ km ; masse de la Terre : $M_T = 6{,}0 \times 10^{24}$ kg ; constante gravitationnelle : $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}$.
- Période de rotation de la Terre sur elle-même : 23 h 56 min 4 s ; masse du Soleil : $M_S = 1{,}99 \times 10^{30}$ kg.

17 Mouvement de la Terre autour du Soleil

On étudie le mouvement de la Terre autour du Soleil dans le cadre de l'approximation des trajectoires circulaires.

Donnée : *distance entre les centres de la Terre et du Soleil :* $d_{ST} = 149{,}6 \times 10^9$ *m.*

1. Dans quel référentiel considéré galiléen doit-on se placer afin d'étudier ce mouvement ?

2. Exprimer vectoriellement la force qui modélise l'action mécanique exercée par le Soleil sur la Terre, puis la représenter sur un schéma, sans souci d'échelle.

3. Montrer que le mouvement de la Terre est uniforme.

4. Exprimer littéralement la vitesse de la Terre autour du Soleil, puis calculer sa valeur.

5. Exprimer puis calculer la période de révolution T_T de la Terre autour du Soleil, en seconde puis en jour.

18 Les satellites GPS

La myriade de satellites GPS (*global positioning system*) est placée sur une orbite en étant animée d'un mouvement circulaire et uniforme à une altitude $h = 1{,}38 \times 10^4$ km.

1. Dans quel référentiel considéré galiléen le mouvement d'un satellite GPS est-il décrit ?

2. En utilisant la deuxième loi de Newton, montrer que la vitesse de ce type de satellite s'écrit $v = \sqrt{\dfrac{G \cdot M_T}{R_T + h}}$.

3. a. En déduire que la période de révolution du satellite est :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(R_T + h)^3}{G \cdot M_T}}.$$

b. Calculer la période de révolution.

c. Combien de tours de la Terre réalisent ces satellites par jour ?

19 Troisième loi de Kepler pour un mouvement circulaire

Dans un modèle simplifié, les planètes peuvent être représentées par une orbite circulaire. Dans ce cas on considère que la vitesse de la planète a pour relation :

$v = \sqrt{\dfrac{G \cdot M_S}{r}}$, avec r la distance entre le centre du Soleil et le centre de la planète, M_S la masse du Soleil et G la constante gravitationnelle.

1. Indiquer le référentiel considéré galiléen dans lequel sont décrites ces orbites.

2. Montrer que pour une planète du système solaire dans les conditions données, on obtient $\dfrac{T^2}{r^3} = \dfrac{4\pi^2}{G \cdot M_S}$.

3. En utilisant les données du document 3 de l'activité 2 p. 319, montrer avec un tableau que la relation est vérifiée.

20 Vecteur accélération d'un mouvement circulaire

Le programme Python suivant représente les différentes positions de la Terre et l'accélération subie par celle-ci autour du Soleil dans l'approximation d'un mouvement circulaire.

```
import matplotlib.pyplot as plt
import math as ma
#declaration des différents tableaux
X,t,Y,VX,VY,AX,AY = [],[],[],[],[],[],[]
# période de révolution de l'astre en sende
T_revolution = 3.16e7
#Rayon de l'orbite circulaire en mètre
R = 1.5e11
# période de révolution divisées par 30
for i1 in range(35):
    t.append(i1*T_revolution/30)
t.append(T_revolution)
# Calcul des positions
for i in range (35) :
    X.append(R*ma.cos(2*ma.pi*t[i]/T_revolution))
    Y.append(R*ma.sin(2*ma.pi*t[i]/T_revolution))
# calcul des vecteurs vitesses
for i in range (1,34) :
    VX.append((X[i+1]-X[i-1])/(2*T_revolution/30))
    VY.append((Y[i+1]-Y[i-1])/(2*T_revolution/30))
# calcul des vecteurs accélération
for i in range (1,32) :
    print(i)
    AX.append((VX[i+1]-VX[i-1])/(2*T_revolution/30))
    AY.append((VY[i+1]-VY[i-1])/(2*T_revolution/30))
# affichage des positions
plt.axis('equal')
plt.text(0,0 ," Soleil", fontsize = 15,color ='g')
plt.plot(X,Y,"bo")
plt.plot(0,0,"go")
#affichage des vecteurs accélérations
for i in range (31) :
    plt.arrow(X[i+2],Y[i+2],1e13*AX[i],1e13*AY[i]
  ,head_width = 0.5e10,head_length =0.5e10,length_
  includes_head = True)
plt.show()
```

1. Exécuter le programme.

2. Dans quel référentiel considéré galiléen est obtenu le graphe simulé ?

3. Que peut-on dire de l'accélération (direction, sens et valeur) observée sur le graphe simulé ?

4. a. En utilisant la deuxième loi de Newton donner l'expression vectorielle de l'accélération $\vec{a}$.

b. Montrer que l'expression obtenue est compatible avec les résultats observés avec la simulation.

bordas Flash PAGE corrigés détaillés

3 Les satellites géostationnaires

EN AUTONOMIE

Ce qu'on attend de moi le jour du BAC

Les satellites géostationnaires.

- Montrer que l'orbite d'un satellite géostationnaire est à une hauteur particulière sur le plan équatorial.

➥ **Acquérir les bases : 22**

DONNÉES

- rayon terrestre : $R_T = 6\,370$ km
- masse de la Terre : $M_T = 6{,}0 \times 10^{24}$ kg
- constante gravitationnelle : $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}$
- période de rotation de la Terre sur elle-même : 23 h 56 min 4 s

21 Satellite géosynchrone et géostationnaire

Un satellite géosynchrone est un satellite possédant une orbite circulaire et une période de révolution $T = 86\,164$ s.

La période de révolution d'un satellite s'écrit :

$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{(R_T + h)^3}{G \cdot M_T}}$ où h est la hauteur par rapport au sol, R_T le rayon de la Terre et M_T la masse de la Terre.

1. Comparer la période de révolution d'un satellite géosynchrone et la période de rotation de la Terre sur elle-même.

2. Calculer la distance par rapport au sol de ce satellite.

3. a. Trois orbites circulaires sont données sur les figures ❶, ❷ et ❸. Montrer l'une des orbites est incompatible avec les lois de la mécanique.

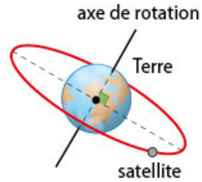


Figure ❶

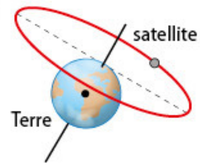


Figure ❷

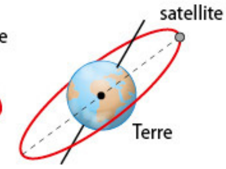


Figure ❸

b. D'après les figures ci-dessus, indiquer les situations qui sont susceptibles de représenter une orbite géosynchrone.

4. a. Un satellite géosynchrone est géostationnaire si celui-ci reste à la verticale d'un point sur Terre. Quel est le plan de son orbite ?

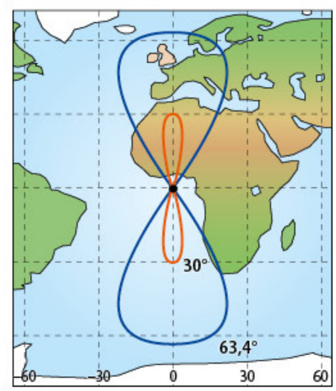
b. Quel est le sens de rotation de ce satellite ?

c. Indiquer à quelle figure ci-dessus correspond ce type de satellite.

22 Orbite d'un satellite géostationnaire

La représentation ci-contre montre la trajectoire de deux satellites géosynchrones dont le plan orbital est décalé de 30° et de 63,4° par rapport au plan équatorial.

Un satellite géosynchrone possède une orbite circulaire et une période de révolution égale à la période de rotation de la Terre sur elle-même.



1. Dans quel référentiel considéré galiléen sont représentés les trajectoires de ces deux satellites ?

2. Quelle forme obtiendrait-on avec un satellite géostationnaire ?

Faire le point avant d'aller plus loin

PRÉPA BAC

Pour vérifier ses connaissances, répondre aux questions suivantes (sans regarder le cours !)

Citer la première loi de Kepler et expliquer ce qu'elle implique sur la nature de l'orbite d'un astre.

Montrer en utilisant la 2e loi de Kepler que la vitesse d'un astre est uniforme sur une orbite circulaire.

Montrer que l'accélération d'un objet spatial en mouvement circulaire autour d'un astre attracteur est radial et centripète.

Sur quel plan doit se placer un satellite géostationnaire ?

Deux satellites possèdent des orbites circulaires autour de la même planète. Le premier est éloigné de $1{,}0 \times 10^3$ km du centre de sa planète avec 15 jours comme période de révolution. Si le second satellite a une période de révolution de 24 jours, quelle distance le sépare du centre de la planète ?

Énoncer la troisième loi de Kepler. Peut-elle être utilisée pour décrire l'orbite d'un satellite autour d'une planète ?

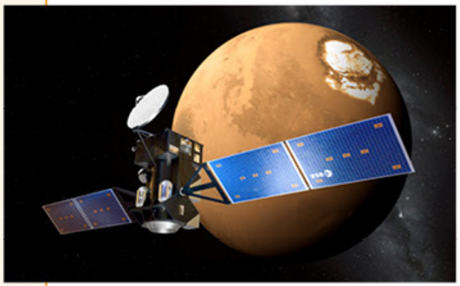
Qu'est-ce qu'un satellite géostationnaire ?

Retrouver l'expression de la vitesse $v = \sqrt{\dfrac{G \cdot M}{r}}$ pour un objet spatial en mouvement circulaire et uniforme autour d'un astre attracteur.

Retrouvez ces questions en version numérique — bordas Flash PAGE cartes mémos

Exercice résolu EN AUTONOMIE

23 Étude de l'orbiteur *Exomars Trace Gas Orbiter* (ETGO)



La sonde *Exomars Trace Gas Orbiter* de l'ESA (agence spatiale européenne), lancée le 14 mars 2016, a fini de se satelliser autour de la planète Mars en avril 2018. Après de multiples manœuvres orbitales, elle s'est placée sur une trajectoire circulaire à une altitude de 400 km de la surface de Mars. Sa mission est d'étudier la présence et l'origine des gaz présents dans l'atmosphère martienne.

1. Dans quel référentiel considéré galiléen est décrit le mouvement ?

2. **Donner** l'expression vectorielle de la force gravitationnelle.

3. **Montrer** en utilisant la deuxième loi de Newton que la vitesse du satellite est constante.

4. **Déterminer** la relation de la vitesse en fonction de M_M, G, R_M et h.

EXEMPLE DE RÉDACTION

1. Le référentiel est le **référentiel marsocentrique** considéré comme galiléen.

2. L'expression de la force gravitationnelle appliquée au satellite s'écrit :

$\vec{F} = G\dfrac{M_M \cdot m_S}{(R_M + h)^2}\vec{n}$; où $\vec{n}$ est le vecteur élémentaire lié au repère de Frenet.

3. $m_S \cdot \vec{a} = \vec{F} = G\dfrac{M_M \cdot m_S}{(R_M + h)^2}\vec{n}$

or l'accélération dans le repère de Frenet s'écrit :

$\vec{a} = \dfrac{dv}{dt} \cdot \vec{\tau} + \dfrac{v^2}{R_M + h} \cdot \vec{n}$ donc la relation précédente devient :

$m_S \cdot \dfrac{dv}{dt} \cdot \vec{\tau} + m_S \cdot \dfrac{v^2}{R_M + h} \cdot \vec{n} = G\dfrac{M_M \cdot m_S}{(R_M + h)^2}\vec{n}$. Ainsi en effectuant la projection sur $\vec{\tau}$ on obtient que : $m_S \cdot \dfrac{dv}{dt} = 0$ donc que $\dfrac{\mathbf{dv}}{\mathbf{dt}} = \mathbf{0}$. On a donc une **vitesse constante**.

4. En projetant sur $\vec{n}$, on obtient : $m_S \cdot \dfrac{v^2}{R_M + h} = G\dfrac{M_M \cdot m_S}{(R_M + h)^2}$, en simplifiant les différents termes, on trouve que : $v^2 = G\dfrac{M_M}{R_M + h}$ soit : $\boldsymbol{v = \sqrt{\dfrac{G \cdot M_M}{R_M + h}}}$

LES CLÉS DE L'ÉNONCÉ

- La nature de l'orbite permet d'en déduire que l'accélération est radiale.
- L'**altitude** est prise par rapport à la surface de l'astre, il faut donc ajouter le rayon de l'astre attracteur.

LES VERBES D'ACTION

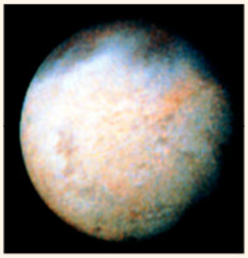
- **Donner :** écrire sans démontrer une loi.
- **Montrer :** produire une démonstration, souvent mathématique.
- **Déterminer :** mettre en œuvre une stratégie pour trouver un résultat.

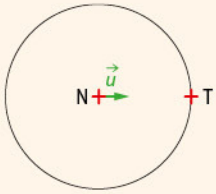
QUELQUES CONSEILS

3. Écrire la relation issue de la deuxième loi de Newton et exprimer l'accélération dans le repère de Frenet, puis associer les deux expressions. Il faut être rigoureux dans l'expression des vecteurs unitaires.

EXERCICE SIMILAIRE

24 Triton, satellite de Neptune





L'orbite de Triton est circulaire. On appelle N le centre d'inertie de Neptune, T le centre d'inertie de Triton et $\vec{u}$ le vecteur unitaire de direction (NT).
Le schéma ci-contre représente l'orbite de Triton autour de Neptune.

1. Dans quel référentiel considéré galiléen est représentée l'orbite de Triton ?

2. Utiliser la deuxième loi de Kepler pour montrer que la vitesse de Triton est constante.

3. Représenter la force gravitationnelle, l'accélération et la vitesse de Triton.

Données : *masse de Neptune :* $M_N = 1{,}02 \times 10^{26}$ *kg ; rayon de l'orbite de Triton :* $R_{NT} = 3{,}55 \times 10^5$ *km ; constante gravitationnelle :* $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}$.

4. La troisième loi de Kepler s'écrit pour le système satellitaire de Neptune $\dfrac{T^2}{R_{NT}^3} = \dfrac{4\pi^2}{G \cdot M_N}$.

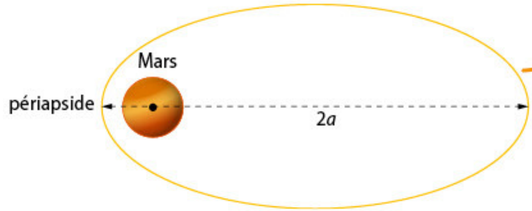
a. Calculer la valeur de la période de révolution de Triton.

b. En déduire l'expression de la vitesse. La calculer.

Exercice résolu EN AUTONOMIE

25 Étude de l'orbiteur *Mars Orbiter Mission* (MOM)

L'Inde est devenue, le 24 septembre 2014, la quatrième nation à placer dans l'orbite de Mars un satellite d'observation de la planète (MOM). Ce satellite possède une orbite fortement elliptique, distante de la surface de la planète au périapside (P) de $h_1 = 422$ km et à l'apoapside (A) de $h_2 = 76\,994$ km. La trajectoire du satellite est représentée sur la figure suivante où a est le demi-grand axe de l'ellipse.



LES CLÉS DE L'ÉNONCÉ

- Il faut repérer les positions sur le schéma du périapside, de l'apoapside ainsi que les différentes longueurs : a, h_1, h_2 et R_M.

***Données :** rayon de Mars : $R_M = 3\,390$ km ; rayon de l'orbite circulaire de Phobos : 9 377 km ; période de révolution de Phobos : 7 h 39 min.*

1. Dans quel référentiel est décrite l'orbite de MOM ?
2. En utilisant la première loi de Kepler, **justifier** la position du centre de Mars.
3. Écrire l'expression du demi-grand axe en fonction des différentes altitudes et le rayon de Mars. **En déduire** sa valeur.
4. La troisième loi de Kepler permet d'écrire que $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot M_M}$ où M_M et G sont respectivement la masse de Mars et la constante gravitationnelle.

En utilisant les données de Phobos, satellite naturel de Mars, **déterminer** la période de révolution de MOM.

LES VERBES D'ACTION

- **Justifier :** donner une explication au choix effectué à l'aide de l'énoncé.
- **Déterminer :** mettre en œuvre une stratégie pour trouver un résultat.
- **En déduire :** utiliser le résultat précédent pour répondre.

EXEMPLE DE RÉDACTION

1. Le référentiel est le **référentiel marsocentrique** considéré galiléen.
2. D'après la première loi de Kepler, le centre de Mars est placé à **l'un des foyers de la trajectoire elliptique**.
3. En se servant du schéma, on voit que : $2a = h_1 + 2 \cdot R_M + h_2$;

donc : $\boldsymbol{a} = \frac{h_1 + 2 \cdot R_M + h_2}{2} = \frac{422 + 2 \times 3\,390 + 76\,994}{2} = \mathbf{4{,}21 \times 10^4\ km}$

4. On obtient $\frac{T^2}{a^3} = \frac{T_P^2}{R_P^3}$ donc $T^2 = \frac{T_P^2}{R_P^3} \cdot a^3$

soit $T = T_P\sqrt{\frac{a^3}{R_P^3}} = 459 \times \sqrt{\frac{(4{,}21 \times 10^7)^3}{(9\,377 \times 10^3)^3}} = 4{,}37 \times 10^3$ min soit près de 73 heures.

QUELQUES CONSEILS

3. Placer sur le schéma les différentes longueurs permet de voir plus facilement la relation avec $2a$.
4. La masse de Mars et de la constante gravitationnelle n'étant pas données, il faut utiliser les données de Phobos pour trouver la période de révolution du satellite.

EXERCICE SIMILAIRE

26 La comète Hale-Bopp

Hale-Bopp est une comète de type périodique. Elle est passée pour la dernière fois près de son périhélie le 1er avril 1997. La valeur de son demi-grand axe est de 186 UA et a été modifiée récemment par la perturbation engendrée par Jupiter.

***Données :** masse du Soleil : $M_S = 2{,}0 \times 10^{30}$ kg ; constante gravitationnelle : $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}$; 1 UA = 150 millions de km.*

1. Dans quel référentiel est décrit le mouvement de la comète Hale-Bopp ?
2. À quoi est due la perturbation engendrée par Jupiter ?
3. D'après la troisième loi de Kepler, on a $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot M_S}$ où M_S et G sont respectivement la masse du Soleil et la constante gravitationnelle.

Calculer la période de révolution de Hale-Bopp.

S'entraîner pour maîtriser

SAVOIR RÉDIGER

27 Proposer une correction de la solution proposée par un élève à l'énoncé.

Énoncé

l'ISS est une station spatiale internationale de masse m, en orbite circulaire autour de la Terre à l'altitude de $h = 430$ km. Elle est le lieu d'expériences et d'observation de la Terre.

***Données :** la masse de la Terre : $M = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg ; le rayon de la Terre : $R = 6{,}37 \times 10^{3}$ km ; constante gravitationnelle $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ $m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}$.*

1. Dans quel référentiel considéré galiléen est décrit le mouvement ?

2. Donner l'expression de la distance r entre le centre de la Terre et le centre d'inertie de la station. Calculer sa valeur.

3. Donner l'expression vectorielle de la force de gravitation exercée par la Terre sur la station.

4. Donner l'expression vectorielle de l'accélération dans le repère de Frenet de la station

5. En utilisant la deuxième loi de Newton, en déduire l'expression v de la vitesse puis la calculer.

6. Calculer la période de révolution de la station.

Solution proposée par un élève

1. Le référentiel est le centre de la Terre.
Votre réponse est incomplète.

2. La distance est $470 + 6{,}37 \times 10^3 = 6\,840$ km
Écrire l'expression littérale avant de faire l'application numérique.
Le nombre de chiffres significatifs est incorrect

3. L'expression de la force est $F = -G\dfrac{m \cdot M}{r^2}\vec{u}$
Il manque une flèche sur la force. Quel est ce vecteur unitaire ?
Faire un schéma, ça aide…

4. Le vecteur accélération pour un mouvement circulaire s'écrit : $\vec{a} = \dfrac{v^2}{r}\vec{n}$
Schéma ?

5. D'après la deuxième loi de Newton, on a : $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$

$\dfrac{v^2}{r}\vec{n} = -G\dfrac{m \cdot M}{r^2}\vec{u}$ donc $v^2 = -G\dfrac{M}{r}$ et $v = \sqrt{\dfrac{G \cdot M}{r}}$

$v = \sqrt{\dfrac{6{,}67 \times 10^{-11} \times 5{,}98 \times 10^{24}}{6\,840}} = 2{,}41 \times 10^5 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

Démonstration peu rigoureuse… Mauvaise conversion.

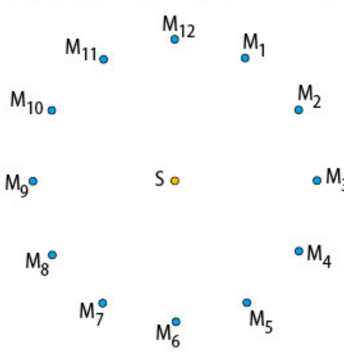
6. La période $v = \dfrac{2\pi r}{T}$ soit

$T = \dfrac{2\pi r}{v} = \dfrac{2\pi \times 6\,840 \times 10^3}{2{,}41 \times 10^5} = 178$ s

Être critique par rapport à la valeur trouvée.

28 Mouvement de la Terre autour du Soleil

Les différents points notés M_i représentent les différentes positions de la Terre à différentes dates successives. S est le centre du Soleil. Il s'écoule entre chaque point successif $\Delta t = 30{,}4$ jours et la distance Terre-Soleil est de 150×10^6 km.



1. Dans quel référentiel considéré galiléen observe-t-on une telle trajectoire ?

2. Que peut-on dire du mouvement de la Terre autour du Soleil ?

3. Reproduire la figure ci-dessus avec par exemple un papier calque.

4. Déterminer et tracer les vecteurs vitesses $\vec{v}_{M_6}$ et $\vec{v}_{M_4}$ en utilisant une échelle adaptée.

5. a. Déterminer et tracer, en utilisant une échelle adaptée, le vecteur accélération en M_5 tel que $\vec{a}_{M_5} = \dfrac{\vec{v}_{M_6} - \vec{v}_{M_4}}{2 \times \Delta t}$.

b. Que peut-on déduire quant à la direction et le sens du vecteur accélération en ce point ?

6. a. Calculer le rapport $\dfrac{v^2}{a}$.

b. Quelle valeur correspond à ce rapport ?

c. En déduire une relation vectorielle de l'accélération en fonction de v, de la grandeur trouvée précédemment et du vecteur unitaire $\vec{u}_n$ unitaire, radial et centripète.

29 Accélération de Mercure

TABLEUR-GRAPHEUR PYTHON

Le programme Python simule les positions de Mercure à intervalles de temps constants sur une orbite elliptique. Pour ces différentes positions, le vecteur accélération est représenté.

```
import matplotlib.pyplot as plt
import math as m
import scipy.optimize as op
#declaration des listes de données
t,M,u,theta,R,X,Y,VX,VY,AX,AY = [],[],[],
  [],[],[],[],[],[],[],[]
# Données d'astronomie
T_revolution = 0.240#période de révolution en année
e = 0.206 # excentricité
a = 5.8e12 # demi grand axe en mètre (m)
```

```
N = 40 # Nombre d'intervalles de temps
# résolution des équations de Kepler
for i in range(N+5):
    t.append(i*T_revolution /N)
    M.append(2*m.pi/T_revolution *t[i])
    u.append(float(op.fsolve (lambda x:x-e*m.sin(x)
    -M[i],0) ))
# Calculs des coordonnées
    theta.append(2*m.atan((m.sqrt((1+e)/(1-e))
    *m.tan(u[i]/2))))
    R.append(a*(1-e**2)/(1+e*m.cos(theta[i])))
    X.append(R[i]*m.cos(theta[i]))
    Y.append(R[i]*m.sin(theta[i]))
# calcul du vecteurs vitesses
for i in range (1,N+4) :
    VX.append((X[i+1]-X[i-1])/(2*T_revolution/N))
    VY.append((Y[i+1]-Y[i-1])/(2*T_revolution/N))
# calcul des vecteurs accélérations
for i in range (1,N+2) :
    AX.append((VX[i+1]-VX[i-1])/(2*T_revolution/N))
    AY.append((VY[i+1]-VY[i-1])/(2*T_revolution/N))
#Affichage
plt.figure('Mouvement de Mercure')
plt.axis('equal')
plt.text(0,0 ," Soleil", fontsize = 15,color ='g')
plt.plot(X,Y,"bo")
plt.plot(0,0,"go")
#Affichage vecteurs accélérations
for i in range (N+1) :
    plt.arrow(X[i+2],Y[i+2],5e-4*AX[i],5e-4*AY[i],
    head_width = 1e11,head_length =1e11,length_
    includes_head = True)
plt.show()
```

1. Exécuter le programme.

2. Dans quel référentiel considéré galiléen est décrite l'orbite de Mercure ?

3. En observant le graphe obtenu, décrire les variations de vitesse de Mercure.

4. Montrer que les vecteurs accélérations représentés sur le graphe simulé sont compatibles avec la deuxième loi de Newton.

5. Vérifier que les variations de vitesse sont compatibles avec la deuxième loi de Kepler.

6. En changeant les données de Mercure dans le programme par les données d'une autre planète (voir **doc. 3** de l'activité 2 page 319), montrer que les propriétés sur les vecteurs restent identiques.

30 What is this planet ?

A satellite (S) orbits a planet (P) in a uniform circular motion.

Data : *(S)'s orbital radius : $r_S = 6{,}7 \times 10^5$ km. (S)'s orbital period : $T_S = 3$ d 13 h 14 min.*

Planet	Mass (kg)
Venus	$4{,}87 \times 10^{24}$
Terre	$5{,}98 \times 10^{24}$
Mars	$6{,}42 \times 10^{23}$
Jupiter	$1{,}90 \times 10^{27}$

Mass of some planets

1. What happens to Kepler's third law in the case of this satellite (S) moving in uniform circular motion ?

2. Calculate the orbital period of the satellite (S) in seconds.

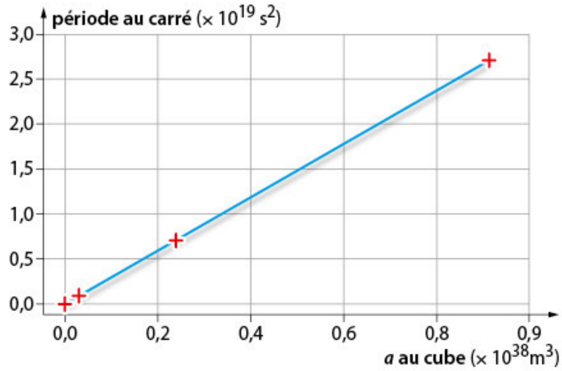
3. a. Express the mass M_P of the planet (P), then calculate it.
b. Deduce the planet's identity from the above result.

31 L'astéroïde Ida et sa lune Dactyle

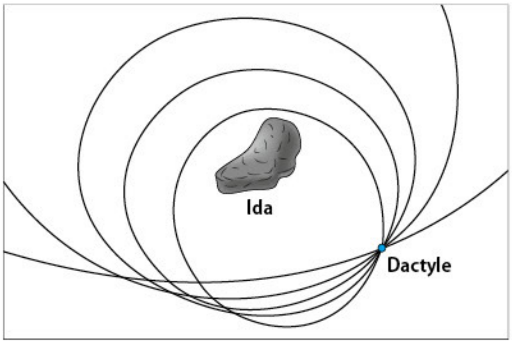
L'astéroïde Ida est situé dans la ceinture d'astéroïdes entre Mars et Jupiter, il a été découvert en 1884 par l'astronome autrichien Johann Palisa. La mission Galileo, sonde spatiale, passe à proximité et photographie le satellite d'Ida, Dactyle. D'après les photos, quelques relevés sont effectués : le temps de révolution est de 1,54 jour et la valeur de son demi-grand axe est de 108 km.

Données : *périhélie d'Ida = $4{,}08 \times 10^8$ km ;*
aphélie d'Ida = $4{,}48 \times 10^8$ km ;
constante gravitationnelle $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ m$^3 \cdot$ kg$^{-1} \cdot$ s^{-2}.

Le graphe suivant représente $T^2 = f(a^3)$ de l'ensemble des planètes du système solaire, chaque point de la droite correspond à une planète.



1. En utilisant le graphique, déterminer l'équation $T^2 = k \cdot a^3$.
2. Calculer la valeur du demi-grand axe de l'orbite d'Ida.
3. En déduire la période de révolution d'Ida autour du Soleil.
4. Malgré la mesure du demi-grand axe de Dactyle autour d'Ida, l'orbite de celle-ci n'est pas connue avec précision. La simulation représentée ci-dessous montre les différentes possibilités.



a. Dans quel référentiel considéré galiléen sont représentées ces trajectoires ?
b. Comment appelle-t-on ce type d'orbite ?
c. Où est placée Ida dans ce type de trajectoire ? Justifier.
d. En utilisant la relation de la 3^e loi de Kepler, calculer la masse d'Ida.

32 L'exoplanète Gliese 581c

L'exoplanète Gliese 581c a été découverte le 4 avril 2007 par une équipe d'astronomes européens. Cette lointaine exoplanète gravite autour d'une naine rouge Gliese 581 dont la masse est évaluée à 31 % de celle du Soleil. Cette découverte a permis aussi de déterminer les valeurs des caractéristiques orbitales.

Demi-grand axe : $7{,}2993 \times 10^{-2}$ UA avec une incertitude-type $2{,}2 \times 10^{-5}$ UA, la période de révolution est de 12,9191 jours avec une incertitude-type $5{,}8 \times 10^{-3}$ jour.

Données : *Troisième loi de Kepler :* $\dfrac{T^2}{a^3} = \dfrac{4\pi^2}{G \cdot M_{\text{étoile}}}$

Constante gravitationnelle :

$$G = (6{,}67408 \pm 0{,}00031) \times 10^{-11}\, m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}$$

L'incertitude-type de la masse se calcule par la relation suivante :

$$u(M) = M \times \sqrt{\left(\frac{u(G)}{G}\right)^2 + \left(3 \times \frac{u(a)}{a}\right)^2 + \left(2 \times \frac{u(T)}{T}\right)^2}$$

Unité astronomique : 1 UA = $1{,}50 \times 10^{11}$ m
Masse du Soleil : $1{,}989 \times 10^{30}$ kg

1. Dans quel référentiel considéré galiléen les caractéristiques orbitales sont-elles données ?

2. Calculer la masse de l'étoile Gliese 581.

3. Calculer l'incertitude-type de la masse de l'étoile, puis exprimer l'intervalle de confiance de la masse.

4. Comparer le résultat obtenu, en utilisant la relation suivante : $\dfrac{|M_{\text{mes}} - M_{\text{ref}}|}{u(M)}$ telle que M_{mes} est la masse issue de la mesure, M_{ref} la mesure de référence donnée dans l'énoncé et $u(M)$ l'incertitude-type. Conclure.

33 La sonde Rosetta et la comète Tchouri

La sonde spatiale Rosetta accompagnée de son petit robot atterrisseur Philae a été envoyée pour étudier la comète 67P/Tchourioumov-Guérassimenko surnommée « Tchouri ». Rosetta devient le satellite de la comète durant plusieurs mois en restant dans le sillage de son champ de gravitation. Elle réussit à rester plusieurs jours sur une orbite circulaire à une altitude de 10 km de la surface de la comète. Pour simplifier l'étude, on considère la comète sphérique avec un rayon de 2,5 km.

Données : *masse de la comète : $M_c = 1{,}0 \times 10^{13}$ kg ;*
masse du satellite $m_s = 3{,}0$ tonnes ;
constante gravitationnelle : $G = 6{,}67408 \times 10^{-11}\, m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}$;
troisième loi de Kepler : $\dfrac{T^2}{R^3} = \dfrac{4\pi^2}{G \cdot M_c}$.

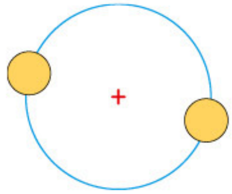
1. Dans quel référentiel considéré galiléen est décrite la trajectoire de Rosetta ?

2. Calculer la période de révolution de Rosetta autour de la comète.

3. Écrire l'expression vectorielle de la force de gravitation appliquée à la sonde Rosetta.

4. En déduire la relation vectorielle du champ de gravitation $\vec{\mathcal{G}}$.

34 Système d'étoiles binaires



Deux étoiles ont la même masse. On considère qu'elles sont sur une même orbite circulaire de rayon r mais diamétralement opposées comme le montre le schéma ci-contre.

1. Schématiser le système des deux étoiles, représenter sans souci d'échelle la force d'interaction gravitationnelle exercée par l'une des deux étoiles sur l'autre et donner l'expression de sa valeur en fonction de G, m et r.

2. Le référentiel dans lequel les étoiles sont en mouvement circulaire et uniforme est considéré galiléen. On considère le centre de la trajectoire fixe dans ce référentiel.

a. Montrer que la vitesse v des étoiles peut s'écrire :

$$v = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{G \cdot m}{r}}.$$

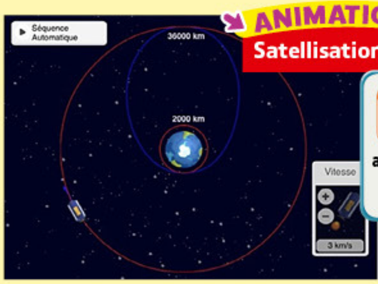
b. En déduire que le rayon de l'orbite est lié à la période de révolution des étoiles par la relation :

$$r^3 = \frac{G \cdot m}{16 \cdot \pi^2} \cdot T^2.$$

À L'ORAL

35 Satellisation en orbite géostationnaire

On considère l'animation ci-contre illustrant la mise en orbite d'un satellite géostationnaire.



ANIMATION Satellisation

bordas Flash PAGE animation

Les mots-clés à utiliser

- orbites elliptique et circulaire,
- lois de Kepler,
- force gravitationnelle,
- vecteur vitesse et vecteur accélération,
- poussée moteur,
- orbite géostationnaire,
- orbite de transition.

Élaborer un exposé de quelques minutes expliquant la méthode utilisée pour placer un satellite en orbite géostationnaire. Il est attendu la maîtrise du langage scientifique.

36 RETOUR SUR LA PAGE D'OUVERTURE

La planète Terre a une masse de $6{,}0 \times 10^{24}$ kg et possède un seul satellite naturel, la Lune. Sachant que la période de révolution de la Lune autour du Soleil est de 27 jours, **préparer un exposé oral expliquant comment déterminer le rayon de son orbite autour de la Terre, sa vitesse et son accélération.**

Développer ses compétences

37 **Découverte d'une exoplanète habitable** RÉSOLUTION DE PROBLÈME

50 min

ANA/RAI Proposer une stratégie de résolution APP Rechercher et organiser l'information

En 2017, un système de quatre exoplanètes a été mis en évidence autour de l'étoile de Luyten GJ273.

DOC 1 L'étoile de Luyten

L'étoile de Luyten (GJ273) est une étoile de type naine rouge située à 12,4 années de lumière de la Terre. Elle est de dimension modeste par rapport à notre Soleil, sa masse représente le quart de la masse du Soleil et un dixième de son rayon.

La température de surface de l'étoile de Luyten est de 3 150 kelvins.

DOC 2 Les caractéristiques des exoplanètes

Nom de l'exoplanète	**Masse** (multiple de masse de la Terre)	**Demi-grand axe *a*** (UA)	**Période orbitale** (jours)	**Excentricité *e***
GJ 273 b	$2{,}89 \pm 0{,}26$	0,09110	18,650	$0{,}10 \pm 0{,}08$
GJ 273 c	$1{,}18 \pm 0{,}16$	0,036467	4,7234	0,12
GJ 273 d	$10{,}8 \pm 3{,}9$	0,712	413,9	0,17
GJ 273 e	$9{,}3 \pm 4{,}3$	0,849	542	0,03

Les rayons des exoplanètes ne sont pas connus.

DOC 3 Position des trois premières planètes du système solaire

DOC 4 Expression de la troisième loi de Kepler

$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot M} = k$ avec T la période de révolution, a le demi-grand axe, G la constante gravitationnelle et M la masse de l'astre attracteur.

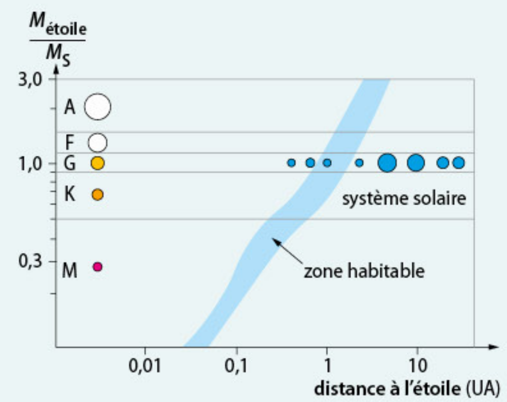
DONNÉES

- Plus la valeur de l'excentricité est proche de 1 plus la trajectoire est elliptique et les foyers éloignés du centre de l'orbite. Plus la valeur de e est proche de 0, plus la trajectoire est circulaire.
- Masse du Soleil : $M_S = 2{,}0 \times 10^{30}$ kg.
- 1 UA = 150 millions de km correspondant à la distance moyenne entre la Terre et le Soleil.
- $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}$.

DOC 5 Zone d'habitabilité dans un système stellaire

La zone bleue délimite la température de la planète acceptable pour que la vie puisse s'y installer.

La température de la planète dépend de la distance et de la nature de l'étoile qui est plus ou moins chaude.



ANALYSE

1. Reproduire la représentation du **document 3** et superposer le même graphique pour le système d'exoplanètes.

2. a. Justifier qu'une planète ayant une orbite quasi circulaire est moins soumise aux variations de luminosité et donc de température.

b. Quelles sont les exoplanètes dont l'orbite est quasi circulaire ?

3. Montrer que la 3e loi de Kepler est vérifiée pour les exoplanètes du système de l'étoile GJ273.

4. a. En déduire la valeur de la masse de l'étoile de Luyten.

b. Comparer à celle donnée dans les documents.

c. Quelle donnée sur les exoplanètes manque-t-il afin de connaître le champ de gravitation à leur surface ?

SYNTHÈSE

En vous aidant des documents, des questions précédentes et de vos connaissances, justifier que certaines de ces exoplanètes sont susceptibles d'être habitables ou non habitables.

Indiquer les données qui vous manquent pour conclure.

Toute prise d'initiatives et de présentation de la démarche suivie sera valorisée même si elle n'a pas abouti.

38 Estimation de la masse d'un trou noir RÉSOLUTION DE PROBLÈME

50 min

ANA/RAI Proposer une stratégie de résolution APP Rechercher et organiser l'information

Certaines étoiles très proches du centre galactique sont suivies depuis plusieurs années par une équipe internationale de chercheurs.

DOC 1 La traque du trou noir en infrarouge

Les premières mesures ont révélé que ces étoiles décrivent des trajectoires elliptiques, ce qui implique effectivement qu'un objet sombre de plusieurs millions de fois la masse du Soleil doit résider dans un volume très petit au centre de la galaxie. Il s'agissait là d'un premier résultat important.

C'est dans la période du printemps et de l'été 2002 que les choses ont pleinement évolué.

La chance a voulu que, d'une part, l'une des étoiles surveillées – dénommée S2 – est passée au plus proche du centre de masse durant cette période et que, d'autre part, cette approche s'est faite à une distance remarquablement petite : seulement 17 heures-lumière.

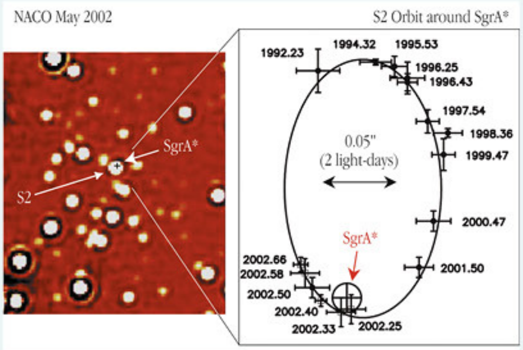
Le fait que la trajectoire soit restée purement képlérienne a ainsi permis d'éliminer définitivement toute possibilité que la masse de quelques millions de masses solaires soit sous forme d'un amas dense stellaire sombre. En effet, la taille de toutes ces structures est bien plus grande que les 17 heures-lumière de la distance d'approche. Seule reste la possibilité du trou noir très massif.

DOC 2 Expression de la troisième loi de Kepler

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot M}$$

Avec T la période de révolution, a le demi-grand axe, G la constante gravitationnelle et M la masse de l'astre attracteur.

DOC 3 Orbite de l'étoile S2



Light-days est la distance en jour-lumière, elle correspond à la distance parcourue par la lumière en une journée.

DOC 4 Quelques notions

- Une année de lumière est la distance parcourue par la lumière en une année. Les sous-multiples sont le jour-lumière et l'heure-lumière.
- Lorsque qu'un astre est au périapside, correspondant à sa position la plus proche de l'astre attracteur, alors la distance $r_{\text{péri}}$ séparant les deux astres se détermine par la relation : $r_{\text{péri}} = a(1 - e)$ où a est le demi-grand axe et e l'excentricité.
- Plus la valeur de e est proche de 1 plus la trajectoire est elliptique et les foyers éloignés du centre de l'orbite. Plus e est proche de 0, plus la trajectoire est circulaire.
- La vitesse orbitale d'un astre le long d'une orbite elliptique s'écrit : $v = \sqrt{G \cdot M\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}$ ou G est la constante gravitationnelle, M la masse de l'astre attracteur, a est le demi-grand axe de l'ellipse et r la distance entre le centre de gravité de l'astre attracteur et le centre de l'astre en mouvement.
- En prenant une limite à 1 % d'erreur entre la mécanique newtonienne et la mécanique relativiste, la limite entre vitesse non relativiste et relativiste se situe à un dixième (10 %) de la vitesse de la lumière ($0{,}1 \cdot c$).
- Masse du Soleil : $M_S = 2{,}0 \times 10^{30}$ kg.
- Constante de gravitation : $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}$
- Vitesse de la lumière : $c = 3{,}00 \times 10^8\ m \cdot s^{-1}$

ANALYSE

1. Quels arguments laissent penser que le centre de notre galaxie est un trou noir ?

2. a. Que signifie la phrase en italique dans le **document 1** quant à la nature de la trajectoire ?

b. Quelle est la position du trou noir par rapport à l'orbite de cette étoile ?

3. a. Estimer la durée de révolution de l'étoile S2 autour du trou noir.

b. Évaluer la valeur du demi-grand axe de l'ellipse qui correspond à l'orbite de l'étoile.

4. a. Calculer la vitesse lorsque l'étoile est au plus proche du trou noir.

b. Comparer cette vitesse à celle de la lumière.

SYNTHÈSE

Évaluer la masse de ce trou noir. Discuter l'importance de la valeur et la validité de celle-ci.

Toute prise d'initiatives et de présentation de la démarche suivie sera valorisée même si elle n'a pas abouti.

Flash PAGE corrigé détaillé

Retrouvez des exercices de synthèse p. 364

PRÉPA BAC

39 Le LEM et la capsule Apollo RÉSOLUTION DE PROBLÈME

30 min

ANA/RAI Proposer une stratégie de résolution

Apollo XI est la première mission à être parvenue à déposer des hommes à la surface de la Lune. Une des phases de cette mission est la mise en orbite de la capsule Apollo à une altitude h égale à 110 km. Son mouvement est circulaire et uniforme autour du centre de la Lune. Le module lunaire (LEM) est alors envoyé sur la Lune, avec deux astronautes à son bord. Le troisième astronaute reste à bord de la capsule Apollo. Dans cette étude, on néglige la rotation de la Lune sur elle-même.

QUESTIONS PRÉLIMINAIRES

1. Dans quel référentiel considéré galiléen est décrit le mouvement de la capsule ?

2. Donner l'expression de la valeur du vecteur accélération de la capsule sur son orbite en fonction de G, M_L, h, R_L.

3. Montrer que la valeur v de la vitesse de la capsule est donnée par :

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M_L}{R_L + h}}.$$

4. Vérifier que la durée entre deux passages successifs de la capsule Apollo à la verticale du module lunaire posé sur la Lune vaut environ 2 h.

DONNÉES

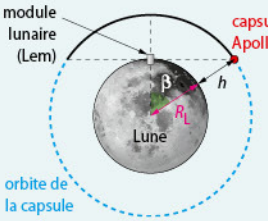
- rayon lunaire : $R_L = 1\,737$ km ; masse de la Lune : $M_L = 7{,}34 \times 10^{22}$ kg ; constante de gravitation : $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ m$^3 \cdot$ kg$^{-1} \cdot$ s^{-2}.

LE PROBLÈME À RÉSOUDRE

Après avoir expliqué pourquoi la communication entre les astronautes sur la Lune et leur collègue resté dans la capsule ne peut se faire que sur la partie de l'orbite représentée en gras, élaborer une stratégie afin de déterminer la durée possible de communication à chaque révolution de la capsule.

DOC 2 Orbite d'Apollo

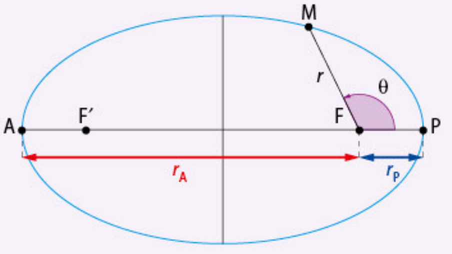
Le schéma ci-contre représente l'orbite de la capsule Apollo autour de la Lune. Les échelles ne sont pas respectées.



VERS LE SUP'

40 Trajectoire elliptique et orbite de transfert

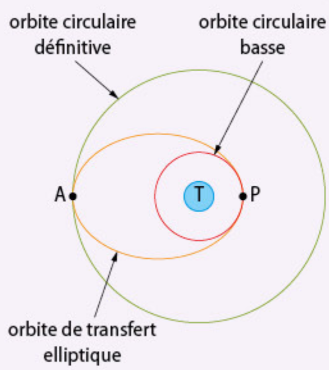
Soit F le foyer d'une ellipse et M un point quelconque de cette ellipse. On peut déterminer la distance r = FM à l'aide de la relation suivante : $r = \dfrac{p}{1 + e \cdot \cos\theta}$ avec p, paramètre de l'ellipse (en m) et e, excentricité de l'ellipse (sans unité). θ est l'angle orienté défini sur le schéma suivant. Le point P est le *périgée* et le point A est l'*apogée*.



1. a. Déterminer l'expression de la distance r_P = FP en fonction de p et de e.
b. Faire de même pour la distance r_A = FA.

2. Pour quelles valeurs de θ a-t-on $r = p$?

3. On considère un satellite (S) placé sur une orbite circulaire basse autour de la Terre (T). On souhaite le faire passer sur une orbite circulaire définitive. Ce transit s'opère sur une orbite de transfert qui est elliptique. Son périgée P est sur l'orbite circulaire basse et son apogée A est sur l'orbite circulaire définitive.



***Données :** rayon de l'orbite circulaire basse : r_1 = 200 km ; rayon de l'orbite circulaire définitive : r_2 = 800 km.*

a. Une fois sur son orbite circulaire définitive, la période de révolution T_2 de ce satellite sera-t-elle plus grande ou moins grande que sa période de révolution T_1 lorsqu'il était sur son orbite circulaire basse ? Justifier.
b. Calculer alors le rapport.

4. a. Que représente le centre de la Terre pour l'ellipse correspondant à l'orbite de transfert ?
b. En déduire la relation entre r_P et r_1, puis entre r_A et r_2.

5. a. Exprimer le paramètre p et l'excentricité e de l'orbite de transfert en fonction de r_1 et r_2.
b. Calculer les valeurs de p et e.

6. a. Exprimer le demi-grand axe a de l'orbite de transfert en fonction de r_1 et r_2.
b. Calculer sa valeur.

Étude d'un système d'exoplanètes

Contexte

L'objectif est d'étudier un système d'exoplanètes et d'utiliser la troisième loi de Kepler.

MESURE ET INCERTITUDES PYTHON

Documents mis à disposition

Le tableau suivant indique les caractéristiques d'exoplanètes agissant autour de l'étoile **Tau Ceti**.

Planète	Masse (M_T = masse de la Terre)	Demi-grand axe (UA)	Période orbitale (jours)
Tau Ceti b	$2{,}00 \pm 0{,}79\ M_T$	$0{,}105 \pm 0{,}006$	$13{,}965 \pm 0{,}02$
Tau Ceti c	$3{,}11 \pm 1{,}40\ M_T$	$0{,}195 \pm 0{,}01$	$35{,}362 \pm 0{,}1$
Tau Ceti d	$3{,}50 \pm 1{,}59\ M_T$	$0{,}374 \pm 0{,}02$	$94{,}11 \pm 0{,}7$
Tau Ceti e	$4{,}29 \pm 2{,}00\ M_T$	$0{,}552 \pm 0{,}02$	$168{,}12 \pm 2{,}0$
Tau Ceti f	$6{,}67 \pm 3{,}50\ M_T$	$1{,}35 \pm 0{,}1$	642 ± 30
Tau Ceti g	$1{,}80 \pm 0{,}3\ M_T$		$20 \pm 0{,}10$
Tau Ceti h	$1{,}80 \pm 0{,}3\ M_T$	$0{,}243 \pm 0{,}003$	$49{,}41 \pm 0{,}80$

L'incertitude type de la constante k se détermine par la relation (FICHE MÉTHODE ➥ p. 538)

$$u(\mathrm{k}) = \mathrm{k} \cdot \sqrt{\left(2 \times \frac{u(T)}{T}\right)^2 + \left(3 \times \frac{u(a)}{a}\right)^2}$$

La troisième loi de Kepler s'écrit $\frac{T^2}{a^3} = \mathrm{k}$ où k est une constante telle que $\mathrm{k} = \frac{4\pi^2}{G \cdot M_{\text{étoile}}}$, avec G la constante gravitationnelle $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \mathrm{m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}}$ et $M_{\text{étoile}}$ la masse de Tau Ceti.

La régression linéaire est une méthode statistique permettant de trouver l'équation d'une fonction affine à partir d'un nuage de points issu de mesures. Le modèle est validé si le coefficient de corrélation, proche de 1 ou –1, 0,999..., est une valeur convenable.

Programme utilisé pour montrer la troisième loi de Kepler du système solaire

```
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy.stats as stat
# listes des demi-grands axes a en U.A et périodes des
  planètes en années
LIST_a=[0.387,0.723,1.0,1.52,5.20,9.51,19.2,30.0]
LIST_T=[0.240,0.615,1.0,1.88,11.9,29.4,84.0,165.0]
LIST_P=['Mercure','Venus','Terre','Mars',
  'Jupiter','Saturne','Uranus','Neptune']
# Les valeurs dans listes a au cube et T au carré
for i in range(0, len(LIST_a)):
      LIST_a[i]=(LIST_a[i]*150e9)**3
      LIST_T[i]=(LIST_T[i]*365*24*3600)**2
# régression linéaire afin de vérifier la troisième loi de
  Kepler
regression = stat.linregress(LIST_a,LIST_T)
pente =regression[0]
print('pente --> '+str(pente))
ordorigine =regression[1]
print('ordonnée à l origine --> '+str(ordorigine))
coeffcorel=regression[2]
print('coefficient de corrélation --> '+str(coeffcorel))
#affichage point et droite de regression
a_3_max=LIST_a[len(LIST_a)-1]
T_2_max =pente *a_3_max + ordorigine
plt.grid(True)
plt.xlabel(' a au cube (m3)')
plt.ylabel('periode au carré (s2)')
plt.scatter(LIST_a,LIST_T,s=100, c='red',marker='+')
for i in range (0,len(LIST_a)):
      plt.text(LIST_a[i],LIST_T[i], LIST_P[i],fontsize =8)
plt.plot ([0,a_3_max],[ordorigine,T_2_max],c='blue')
plt.show()
```

Matériel mis à disposition

- Un ordinateur avec un éditeur Python.
- Le programme 3e Loi de Kepler pour le système solaire.

Travail à effectuer

1. AN/RAI RÉA **Proposition de protocole expérimental** *(20 min conseillées)*

- Modifier le programme afin de tracer le graphe $T^2 = f(a^3)$ pour le système planétaire de l'étoile Tau Ceti.

Être en mesure de présenter le protocole

2. RÉA **Mise en œuvre du protocole expérimental proposé** *(20 min conseillées)*

- Mettre en œuvre le protocole, tracer le graphe $T^2 = f(a^3)$ et trouver la valeur de k.

Être en mesure d'utiliser le langage informatique

3. VAL **Exploitation du résultat obtenu** *(20 min conseillées)*

- Estimer l'incertitude-type pour une valeur de la constante k.
- Déterminer la masse de l'étoile Tau Ceti.
- Déterminer la valeur du demi-grand axe de Tau Ceti *g*.

Fermer le logiciel utilisé sans sauvegarder.

PISTE POUR LE GRAND ORAL PRÉPA BAC

Pour se préparer à l'Oral
➥ Livret LES CLÉS DU BAC
(en début de manuel)

UNE QUESTION

Existe-t-il des planètes habitables dans l'univers?

Enjeu de la question

Depuis 1990 et la découverte des premières exoplanètes, la traque aux exoplanètes habitables se poursuit à l'aide de télescopes de plus en plus performants. Il est important de préciser les conditions à réunir pour qu'une planète puisse être considérée comme habitable.

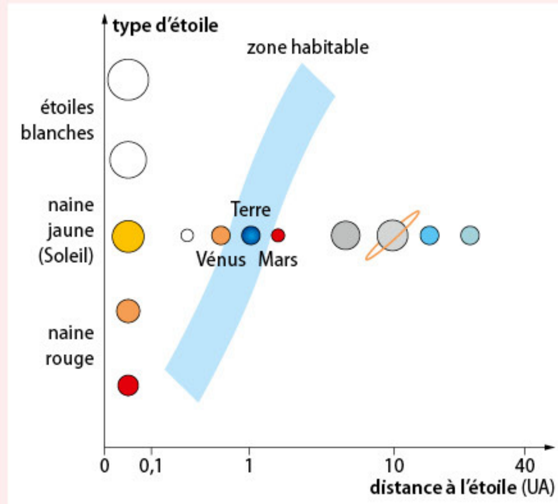
Proposition de plan de présentation

1. Définition du concept de l'habitabilité.
2. La position de la planète par rapport à son étoile.
3. Le type d'orbite de la planète et conséquence sur l'habitabilité.
4. La position du système étoile-planètes dans la galaxie.
5. La taille de la planète et son champ de gravitation.
6. Conclusion : Critique et limite du concept.

Les mots-clés

orbite ◗ loi de Kepler ◗ rayonnement électromagnétique ◗ champ de gravitation

Exemple de support de présentation



Zone d'habitabilité dans le système solaire

QUESTIONS D'APPROFONDISSEMENT POSSIBLES

À propos des exoplanètes...

- **A-t-on découvert des exoplanètes entrant dans le critère d'habitabilité ?**
- **Une lune d'une exoplanète peut-elle être habitable ?**
- **Comment sont déterminées les limites de l'habitabilité ?**
- **Le terme d'habitabilité signifie-t-il qu'il y ait obligatoirement de la vie ?**
- **Une vie extraterrestre peut-elle s'établir sur une exoplanète n'étant pas située dans zone d'habitabilité ?**

UN EXEMPLE DE PROJET PROFESSIONNEL

Les métiers relatifs à l'astrophysique ou l'astronomie sont liés à la recherche fondamentale universitaire. Les postes sont peu nombreux et très sélectifs.

Après le bac : *il faut compter pas moins de 11 ans d'études, 5 ans pour obtenir un master de physique théorique ou éventuellement de mathématiques. Puis, 3 années de doctorat et 3 années de postdoctorat.*
Autres métiers : *géotechnicien(ne) , géologue.*

L'astronome étudie l'Univers qui nous entoure, ses origines et son évolution. Il peut faire le choix de se spécialiser dans le domaine de l'astrophysique (physique appliquée à l'astronomie).