Trabajo Práctico 2
Eliminando Ruido con la DCT

Métodos Numéricos

Departmento de Computación
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

1er cuatrimestre 2013

Transformada Discreta del Coseno

Idea intuitiva (continua)

- Expresar una función real f en la base $\{1, \cos(x), \cos(2x), \ldots\}$

En el plano discreto...

- Es un cambio de base
- La base usada se compone de cosenos discretizados a distintas frecuencias

Transformada Discreta del Coseno

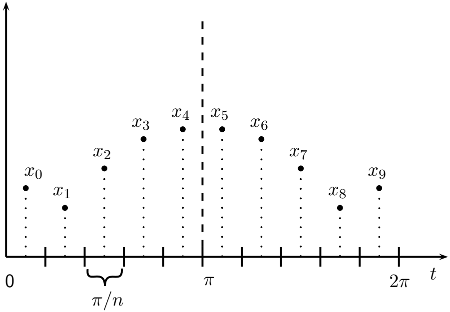
Derivación

Aprovechando paridad

- El coseno es par alrededor de π: $\cos(\pi + x) = \cos(\pi - x)$

Dado x_i datos $(i = 0, \ldots, n-1)$, generamos una versión simétrica de $2n$ valores:

$$x_n = x_{n-1}$$
$$x_{n+1} = x_{n-2}$$
$$\vdots$$
$$x_{2n-1} = x_0$$



Transformada Discreta del Coseno

Aprovechando paridad

- Duplico la cantidad de puntos a $2n$ (ahora: $x_0, x_1, \dots, x_{2n-1}$)
- Me ubico en intervalo $[0, 2\pi]$
- Divido en intervalos de longitud π/n
- Ubico los puntos en $(t_0, x_0), (t_1, x_1), \dots, (t_{2n-1}, x_{2n-1})$ donde
  $t_0 = \frac{\pi}{2n}$
  $t_1 = t_0 + \frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{n} = (1 + \frac{1}{2})\frac{\pi}{n}$
  $\vdots$
  $t_i = (i + \frac{1}{2})\frac{\pi}{n}$
- En puntos t_i discretizo la familia del coseno

Aprovechando paridad

- Utilizando estos puntos genero los vectores de mi base

$$w^{(0)} = \begin{pmatrix} \cos(0 \cdot t_0) \\ \cos(0 \cdot t_1) \\ \vdots \\ \cos(0 \cdot t_{2n-1}) \end{pmatrix}, w^{(1)} = \begin{pmatrix} \cos(1 \cdot t_0) \\ \cos(1 \cdot t_1) \\ \vdots \\ \cos(1 \cdot t_{2n-1}) \end{pmatrix}, \ldots$$

$$w^{(n-1)} = \begin{pmatrix} \cos((n-1) \cdot t_0) \\ \cos((n-1) \cdot t_1) \\ \vdots \\ \cos((n-1) \cdot t_{2n-1}) \end{pmatrix}$$

Transformada Discreta del Coseno

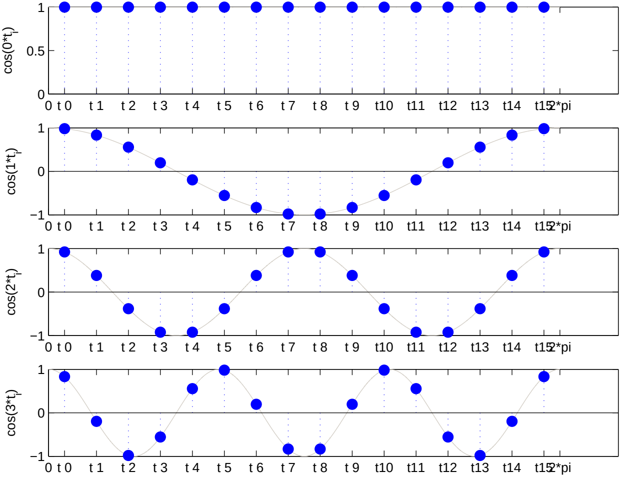
Derivación $(n = 8)$

$w^{(0)}$

$w^{(1)}$

$w^{(2)}$

$w^{(3)}$



Transformada Discreta del Coseno

Derivación $(n = 8)$

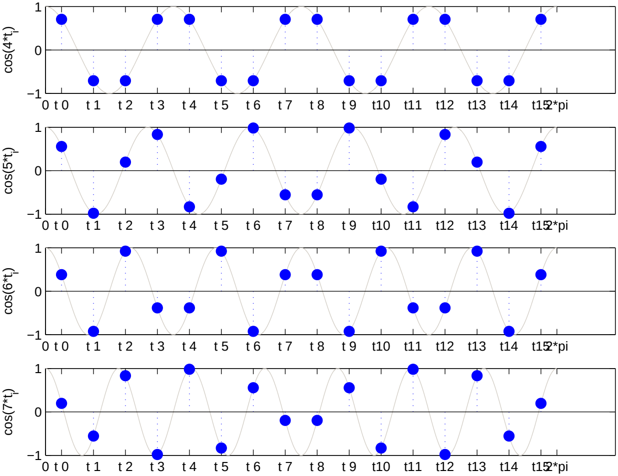
$w^{(4)}$

$w^{(5)}$

$w^{(6)}$

$w^{(7)}$

$\vdots$



Propiedad

- El conjunto de vectores $\{w^{(0)}, w^{(1)}, \ldots, w^{(n-1)}\}$ es una base ortogonal.

$$w^{(k)^t} w^{(j)} = \sum_{i=0}^{2n-1} \cos(k \cdot t_i) \cos(j \cdot t_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq j \\ n & \text{si } k = j \neq 0 \\ 2n & \text{si } k = j = 0 \end{cases}$$

Transformada Discreta del Coseno

Derivación

Propiedad

- El conjunto de vectores $\{w^{(0)}, w^{(1)}, \ldots, w^{(n-1)}\}$ es una base ortogonal.

$$w^{(k)^t} w^{(j)} = \sum_{i=0}^{2n-1} \cos(k \cdot t_i) \cos(j \cdot t_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq j \\ n & \text{si } k = j \neq 0 \\ 2n & \text{si } k = j = 0 \end{cases}$$

Luego,

$$\|w^{(0)}\|_2 = \sqrt{w^{(0)^t} w^{(0)}} = \sqrt{2n}$$

$$\|w^{(k)}\|_2 = \sqrt{w^{(k)^t} w^{(k)}} = \sqrt{n}, \quad \text{si } k \neq 0$$

Propiedad

- El conjunto de vectores $\{w^{(0)}, \dots, w^{(n-1)}\}$ es una base ortogonal.

$$\|w^{(0)}\|_2 = \sqrt{{w^{(0)}}^t w^{(0)}} = \sqrt{2n}$$

$$\|w^{(k)}\|_2 = \sqrt{{w^{(k)}}^t w^{(k)}} = \sqrt{n}, \qquad \text{si } k \neq 0$$

Para que todos tengan la misma norma:

- Defino $\boxed{v^{(k)} = C(k) \cdot w^{(k)}}$, con $C(k) = \begin{cases} \sqrt{1/n} & \text{si } k = 0 \\ \sqrt{2/n} & \text{si } k \neq 0 \end{cases}$

Así,

$$\|v^{(k)}\|_2 = \|C(k) \cdot w^{(k)}\|_2 = |C(k)|\,\|w^{(k)}\|_2 = \sqrt{2}$$

Transformada Discreta del Coseno

Derivación

Objetivo

- Sea $\mathbf{x} = [x_0, x_1, \ldots, x_{2n-1}]^t$ nuestra vector (o señal) a transformar.
- Queremos escribirla como combinación lineal de los n vectores $v^{(k)}$:

$$\mathbf{x} = \sum_{k=0}^{n-1} d_k v^{(k)}$$

- ¿Cuáles son los coeficientes en esta base? (¿quiénes son d_k?)

Transformada Discreta del Coseno

Derivación

Hallando los coeficientes en esta nueva base.

- Consideremos un elemento de la base $v^{(j)}$, con $0 \leq j < n$.

$$\mathbf{x}^t\, v^{(j)} = \left(\sum_{k=0}^{n-1} d_k v^{(k)}\right)^t v^{(j)} = \sum_{k=0}^{n-1} d_k \underbrace{{v^{(k)}}^t v^{(j)}}_{\substack{0 \\ (\text{si } k \neq j)}} = d_j\, {v^{(j)}}^t v^{(j)} = 2d_j$$

$$\Rightarrow d_j = \frac{1}{2}\,\mathbf{x}^t\, v^{(j)}$$

Hallando los coeficientes en esta nueva base.

$$\Rightarrow d_j = \frac{1}{2}\,\mathbf{x}^t\, v^{(j)} = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{2n-1} x_i v_i^{(j)} = \frac{1}{2}[x_0 v_0^{(j)} + \ldots + x_{2n-1} v_{2n-1}^{(j)}]$$

- Pero recordemos que:
  $x_n = x_{n-1},\, x_{n+1} = x_{n-2}, \ldots, x_{2n-1} = x_0.$
- También (coseno par):
  $v_n^{(j)} = v_{n-1}^{(j)},\, v_{n+1}^{(j)} = v_{n-2}^{(j)}, \ldots, v_{2n-1}^{(j)} = v_0^{(j)}.$

$$\Rightarrow d_j = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{2n-1} x_i v_i^{(j)} = \frac{1}{2}\left(2\sum_{i=0}^{n-1} x_i v_i^{(j)}\right) = \sum_{i=0}^{n-1} x_i \cdot C(j) \cdot \cos(j \cdot t_i)$$

Matriz $\widehat{M} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ de cambio de base

$$\widehat{M} = \begin{pmatrix} C(0)\cos(0\cdot t_0) & C(0)\cos(0\cdot t_1) & \dots & C(0)\cos(0\cdot t_{n-1}) \\ C(1)\cos(1\cdot t_0) & C(1)\cos(1\cdot t_1) & \dots & C(1)\cos(1\cdot t_{n-1}) \\ \vdots & & & \vdots \\ C(n)\cos((n)\cdot t_0) & C(n)\cos((n)\cdot t_1) & \dots & C(n)\cos((n)\cdot t_{n-1}) \end{pmatrix}$$

$$\widehat{M} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_0 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \end{pmatrix}$$

Transformada Discreta del Coseno

Derivación

Matriz $\widehat{M} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ de cambio de base

- La matriz $\widehat{M}$ es ortogonal: $\widehat{M}^t \widehat{M} = I$
- En el TP usamos una versión modificada

$$M = \operatorname{round}\left(\frac{q}{2}\,\widehat{M}\right)$$

Transformada Discreta del Coseno

Proceso de eliminación de ruido

1. $y := Mx$ [Transformar]
2. $\tilde{y} := f(y)$ [Modificar]
3. Resolver $M\tilde{x} = \tilde{y}$ [Reconstruir]

Transformada Discreta del Coseno

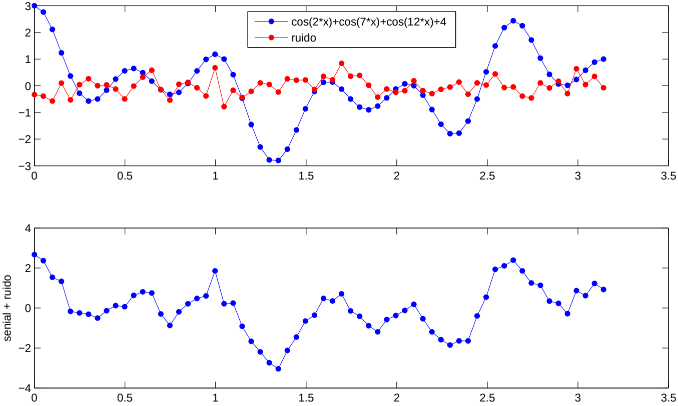
Código Matlab para crear matriz M

matrizDCT.m

```
function M = matrizDCT(N)
    unos = ones(N,1);
    C = [1; unos(1:N-1)+1] / N;
    C = sqrt(C);
    t = ([0:N-1]' + 0.5) * (pi/N);
    f = [0:N-1]';
    Mo = (C * unos') .* cos(f * t');
    M = round(Mo * 128);
```

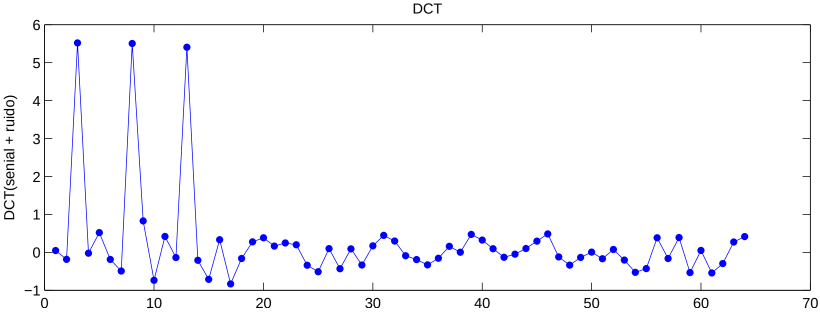
Transformada Discreta del Coseno

Eliminando ruido



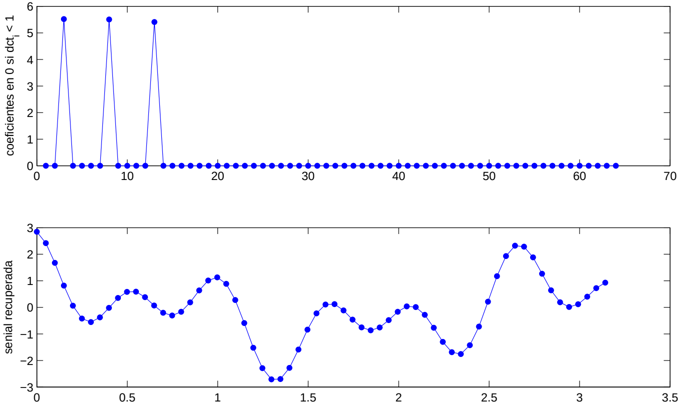
Transformada Discreta del Coseno

Eliminando ruido



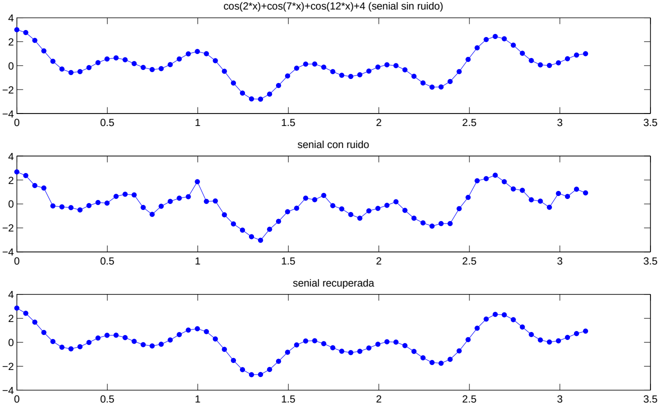
Transformada Discreta del Coseno

Eliminando ruido



Transformada Discreta del Coseno

Eliminando ruido



Algunas de estrategias para eliminar coeficientes

- Aplicar un umbral conveniente:

$$\mu_\beta(x) = \begin{cases} 0 & |x| \leq \beta \\ x & |x| > \beta \end{cases}$$

- Multiplicar por una matriz ‘conveniente’ que disminuya los valores de los coeficientes asociados al ruido.
- Setear en 0 un porcentaje de coeficientes más pequeños en magnitud.
- Las que se les ocurran.

Midiendo la calidad de la recuperación

$$PSNR = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{MAX_x^2}{ECM}\right)$$

- MAX_x define el rango máximo de la señal
- *Error Cuadrático Medio*, definido como

$$ECM = \frac{1}{n}\sum_i (x_i - \tilde{x}_i)^2 = \frac{\|x - \tilde{x}\|_2^2}{n}$$

  - n es la cantidad de elementos de la señal,
  - x es la señal original
  - $\tilde{x}$ es la señal recuperada (con ruido eliminado)