

**SVEUČILIŠTE U RIJECI
GRAĐEVINSKI FAKULTET U RIJECI**

Manuela Andrić

**Analiza stabilnosti i teorije 2.reda
na štapovima promjenjive krutosti**

Diplomski rad

Rijeka, 2017.

**SVEUČILIŠTE U RIJECI
GRAĐEVINSKI FAKULTET U RIJECI**

**Diplomski svučilišni studij
Konstrukcije
Stabilnost konstrukcija**

**Manuela Andrić
JMBAG: 0114024503**

**Analiza stabilnosti i teorije 2. reda
na štapovima promjenjive krutosti**

Diplomski rad

Rijeka, rujan 2017.

Naziv studija: Sveučilišni diplomski studij
Znanstveno područje/područja: 2. Tehničke znanosti
Znanstveno polje/polja: 2.05 Građevinarstvo
Znanstvena grana/grane: 2.05.02 Nosive konstrukcije

Tema diplomskog rada

Analiza stabilnosti i teorije 2. reda na štapovima promjenljive krutosti
Stability analysis and 2nd order theory on variable stiffness beams

Kandidat: **MANUELA ANDRIĆ**

Kolegij: **Stabilnost konstrukcija**

Završni rad broj: _____

Zadatak:

Primijeniti teoriju drugog reda i analizirati stabilnost na modelima ravnih vitkih štapova presjeka promjenljive krutosti za međudjelovanje uzdužne sile i poprečnog opterećenja. Prikazati moguće numeričke postupke proračuna, te ih primijeniti na poznatim primjerima takvih štapova iz prakse. Napraviti usporedbu proračunskih postupaka, kao i analizirati konvergenciju rezultata pri progušćenju diskretizacije analiziranih problema. Također, usporediti rezultate numeričkih modela s rezultatima iz literature. Izvesti zaključke o provedenim usporednim postupcima proračuna.

Tema rada je uručena: _____

Komentor:

Mentor:

doc. dr. sc. Dragan Ribarić

IZJAVA

Diplomski rad izradila sam samostalno, u suradnji s mentorom i uz poštivanje pozitivnih građevinskih propisa i znanstvenih dostignuća iz područja građevinarstva. Građevinski fakultet u Rijeci je nositelj prava intelektualnog vlasništva u odnosu na ovaj rad.

Manuela Andrić

U Rijeci, 04. rujna 2017.

Analiza stabilnosti i teorije 2. reda na štapovima promjenjive krutosti

Sažetak

Proračun štapova promjenjive krutosti objašnjen je teorijski i numerički na primjeru konzolnog čeličnog stupa promjenjive krutosti korištenjem programskog jezika *Python*. Zadatak je riješen korištenjem diferencijalnog postupka i metode prijenosnih matrica. Diferencijalni postupak korišten je za stup linearno promjenjive krutosti, a metoda prijenosnih matrica za stup kod kojeg je moment tromosti svakog pojedinog segmenta konstantan i jednak onome u sredini.

Stup promjenjive krutosti odnosno promjenjivog poprečnog presijeka podijeljen je u svrhu rješavanja problema na tri segmenata, zatim na šest te na dvanaest sa ciljem utvrđivanja točnosti rješenja povećavanjem broja segmenata. Kroz rad obje metode pokazale su se pouzdane i točnost rješenja povećavala se proporcionalno povećanjem broja segmenata štapa.

Ključne riječi: štap linearno promjenjive krutosti, analiza stabilnosti konstrukcija, teorija 2. reda, štap skokovito promjenjive krutosti

Stability analysis and 2nd order theory on variable stiffness beams

Abstract

Calculation of variable stiffness beams is explained in theoretical and numerical terms using the Python programming language for a console-based steel beam of varying stiffness. The task was solved using both the differential method and the transfer matrix method.

The differential method was used for a linearly varying stiffness beam and the transfer matrix method was used for the beam in which each segment has constant stiffness calculated based on the average segment stiffness.

The variable stiffness beam was divided on three, six and twelve segments to determinate the accuracy of the solution by increasing the number of segments. Both methods proved to be reliable with accuracy increase proportional to number of segments/divisions.

Key words: linearly/continuously varying stiffness beam, structural stability analysis, 2nd order theory, discretely varying stiffness beam

SADRŽAJ:

1. UVOD.....	1
2. OPĆI POJMOVI.....	2
2.1. Pretpostavke teorije drugog reda.....	2
2.2. Pojam stabilnosti i kritičnog opterećenja.....	2
3. ŠTAP SA KONTINUIRANO PROMJENJIVIM POPREČNIM PRESJEKOM.....	3
3.1. Primjena integro-diferencijskog postupka za proračun utjecaja po teoriji drugog reda.....	3
3.2. Primjena integro-diferencijskog postupka na problemu stabilnosti.....	5
4. ŠTAP SA SKOKOVITOM PROMJENOM POPREČNOG PRESIJEKA.....	7
4.1. Proračun utjecaja po teoriji drugog reda.....	7
4.2. Stabilnost štapova primjenom prijenosnih matrica.....	9
5. PRORAČUN KRITIČNOG OPTEREĆENJA.....	10
5.1. Python kod za primjenu diferencijalnog postupka.....	11
5.2. Python kod za primjenu prijenosnih matrica.....	12
5.3. Proračun kritične sile primjenom diferencijalnog postupka.....	13
5.4. Primjena prijenosnih matrica.....	17
5.5. Usporedba rezultata.....	24
6. PRORAČUN STATIČKIH I DEFORMACIJSKIH VELIČINA PREMA TEORIJI 2. REDA.....	25
6.1. Python kod za primjenu diferencijalnog postupka.....	26
6.2. Python kod za primjenu prijenosnih matrica.....	27
6.3. Primjena diferencijalnog postupka.....	29
6.4. Primjena prijenosnih matrica.....	35
6.5. Usporedba rezultata.....	39
7. ZAKLJUČAK.....	43
8. LITERATURA.....	44

1. UVOD

Tema rada je prikazati proračun kritičnog opterećenja, statičke i deformacijske veličine prema teoriji drugog reda na primjeru štapnih elemenata koji imaju kontinuirano promjenjiv moment tromosti odnosno poprečni presijek.

Rad je koncipiran kroz dva dijela, u prvom dijelu iznose se teorijski izrazi na osnovu kojih se rade proračuni u drugom dijelu. Proračun kritičnog opterećenja, kao i statičkih i deformacijskih veličina, prikazan je analitički i korištenjem programa Python i Mathcad.

Korištena su dva postupka rješavanja: diferencijski postupak i metoda prijenosnih matrica sa ciljem utvrđivanja pouzdanosti metoda. Kako se proračun provodi diskretizacijom štapa na manje segmente, štapni element podijeljen je na tri segmenta te radi utvrđivanja točnosti postupaka podijeljen na šest zatim na dvanaest segmenata. Prikazan je štapni element sa linearno kontinuranom promjenom momenta tromosti koji je na jednom kraju upet a na drugom slobodno oslonjen te na slobodnom kraju djeluje tlačna sila.

2. OPĆI POJMOVI

2.1. Pretpostavke teorije drugog reda

Osnovne pretpostavke linearne teorije su:

- pretpostavka o malim deformacijama koja osigurava geometrijsku linearnost
- pretpostavka malih pomaka koja osigurava statičku linearnost
- pretpostavka o linearnoj vezi između dilatacija i naprezanja, odnosno temperaturnih promjena (Hookeov zakon) osigurava materijalnu (fizičku) linearnost

Teorija prvog reda uzima u obzir da su deformacije sustava premale da bi utjecale na formiranje uvjeta ravnoteže pa se one mogu zanemariti, odnosno jednačbe ravnoteže postavljaju se na nedeformiranom sustavu. Dok teorija drugog reda odbacuje pretpostavku o malim pomacima a zadržava pretpostavke o malim deformacijama i Hookeov zakon. Jednačbe ravnoteže se u tom slučaju formiraju na deformiranom sustavu (Čaušević, 2013.).

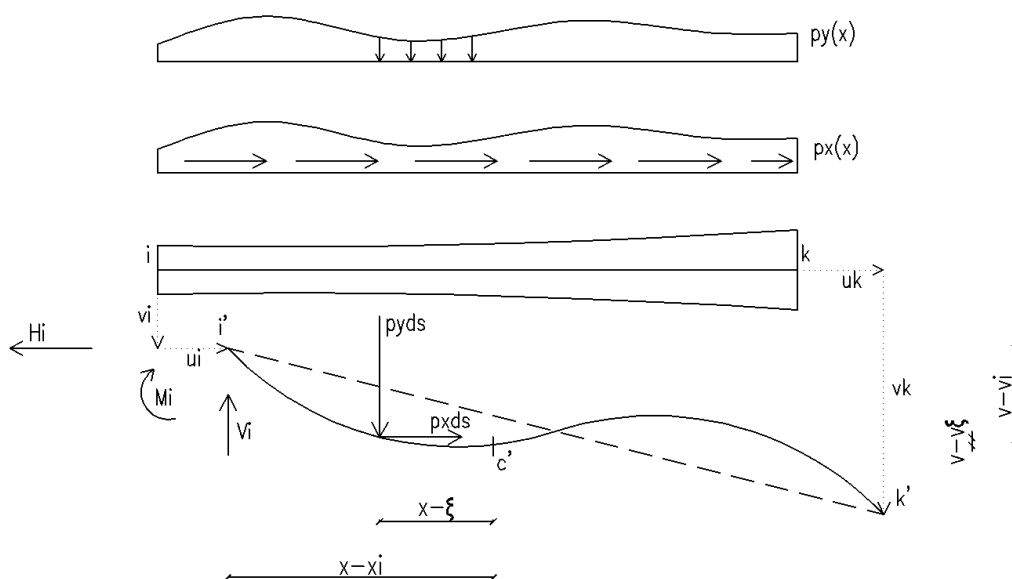
2.2. Pojam stabilnosti i kritičnog opterećenja

Stabilnost konstrukcije predstavlja sposobnost konstrukcije da se pri prestanku djelovanja vanjskog opterećenja vrati u prvobitni položaj. Zadatak teorije stabilnosti konstrukcija je da se odrede uvjeti pri kojima će konstruktivni sustav koji je u ravnoteži izgubiti svojstvo stabilnosti sustava. Nestabilnost je karakteristična za vitke linijske elemente, tanke ploče ili tanke ljuske. Promjena stabilnog stanja konstrukcije u nestabilno stanje naziva se gubitak stabilnosti. Najmanja vrijednost opterećenja za koje stabilan ravnotežni položaj postaje nestabilan odnosno gubi stabilan položaj naziva se kritično opterećenje. Definicija statičkog kritičkog opterećenja prema Euleru glasi: „Kritično opterećenje je najmanje opterećenje na konstrukciju pri kojem pored njenog osnovnog ravnotežnog položaja postoji barem jedan drugi ravnotežni položaj“. Kritično opterećenje jednako je najmanjoj vrijednosti opterećenja za koje homogeni sustav linearnih jednačbi ima barem jedno netrivialno rješenje. Za određivanje barem jednog rješenja različitog od trivijalnog potrebno je u sustav jednačbi uvesti rubne uvjete. Uvjet za postojanje netrivialnog rješenja je da determinanta sustava bude jednaka nuli (Čaušević, 2013.).

3. ŠTAP SA KONTINUIRANO PROMJENJIVIM PRESJEKOM

3.1. Primjena integro-diferencijskog postupka za proračun utjecaja po teoriji drugog reda

Ukoliko se kontinuirano opterećenje i/ili moment tromosti mijenjaju duž osi štapu primjenjuje se diferencijski postupak. Na pravom štapu promjenjivog poprečnog presjeka koji je opterećen kontinuiranim opterećenjem p_x i p_y duž osi štapu, prikazanog na slici 1., objasniti će se integro-diferencijska jednačba.



Slika 1. Štap sa kontinuirano promjenjivim poprečnim presjekom

Izraz za moment u proizvoljnoj točki „c“ na deformiranoj osi ima oblik:

$$M_c = M_i + V_i(x - x_i) - H_i(v - v_i) - \int_i^c p_y(x - \xi)d\xi + \int_i^c p_x(v - v_\xi)d\xi \quad (3.1)$$

Iz sustava diferencijalnih jednačbi drugog reda dobiven je izraz za moment koji glasi:

$$M = -EI \frac{d^2v}{dx^2} - EI\alpha_t \frac{\Delta t}{h} \quad (3.2)$$

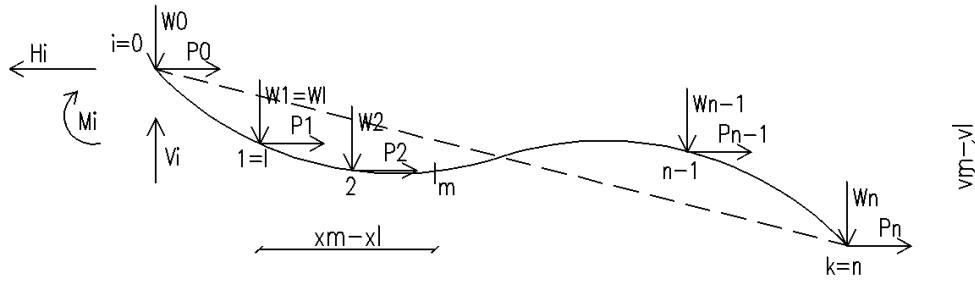
Kada se u jednačbu (3.1) uvede izraz za moment prema jednačbi (3.2) i uvedu slijedeće oznake:

$$I = I_c \psi(x), \quad \psi(x)\alpha_t \frac{\Delta t}{h} = F(x) \quad (3.3)$$

gdje je $\psi(x)$ funkcija koja definira promjenu momenta tromosti, a $F(x)$ funkcija promjene opterećenja po pravcu te dijeljenjem jednačbe sa konstantom EI_c ona poprima slijedeći oblik:

$$\begin{aligned}
& \psi(x)v'' - \frac{H_i}{EI_c}(v - v_i) + \frac{1}{EI_c} \int_i^c p_x(v - v_\xi) d\xi = \\
& = \frac{1}{EI_c} \left[-M_i - V_i(x - x_i) + \int_i^c p_y(x - \xi) d\xi \right] - F(x)
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Kako se nepoznata veličina, progib osi štapa $v(x)$, nalazi pod integralom i u diferencijalu dobivena jednačba (3.4) se naziva integro-diferencijalna jednačba pravog štapa promjenjivog poprečnog presjeka. Rješava se numeričkim putem dijeleći štap na „n“ jednakih dijelova λ , kako je prikazano na slici 2. odnosno primjenom diferencijskog postupka.



Slika 2. Podijela štapa na „n“ jednakih dijelova

Kontinuirano opterećenje p_x i p_y zamjenjuje se koncentriranim silama P i W u svakoj točki prema usvojenoj podijeli štapa. Za opterećenje koje se mijenja linearno izraz za koncentriranu silu glasi (Čaušević, 2013.):

$$\begin{aligned}
P_l &= \frac{\lambda}{6} (p_{x,l-1} + 4p_{x,l} + p_{x,l+1}) \\
W_l &= \frac{\lambda}{6} (p_{y,l-1} + 4p_{y,l} + p_{y,l+1}), \quad l = 0, 1, 2, \dots, n
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Vrijednosti integrala u jednačbi (3.3) mogu se odrediti na slijedeći način:

$$\begin{aligned}
\int_i^c p_x(v - v_\xi) d\xi &= \sum_{l=0}^{m-1} P_l(v_m - v_l) \\
\int_i^c p_y(x - \xi) d\xi &= \sum_{l=0}^{m-1} W_l(x_m - x_l)
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Kada uvrstimo jednađbe (3.6) u jednađbu (3.3) te se druga derivacija progiba prikaže kao promjena prve derivacije po jedinici duljine dobiva se za proizvoljni presjek „m“ integro-diferencijalna jednađba slijedećeg oblika (Čaušević, 2013.):

$$EI_m \frac{v_{m-1} - 2v_m + v_{m+1}}{\lambda^2} - H_i(v_m - v_i) + \sum_{l=0}^{m-1} P_l(v_m - v_l) = M_i - V_i(x_m - x_i) + \sum_{l=0}^{m-1} W_l(x_m - x_l) - F(x_m), \quad m = 0, 1, 2, \dots, n \quad (3.7)$$

3.2. Primjena integro-diferencijskog postupka na problem stabilnosti

Za razmatranje problema stabilnosti usvajaju se pretpostavke da su poprečno opterećenje i tempereturni utjecaji jednaki nuli:

$$p_y = 0 \quad W_l = 0, \quad l = 0, 1, 2, \dots, n \quad (3.8)$$

$$\Delta t = 0, \quad F(x) = 0$$

Prema tome integro-diferencijalna jednađba ima oblik:

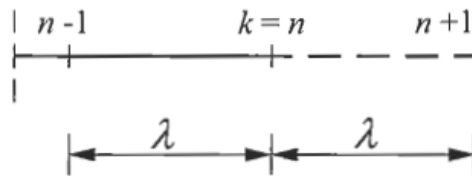
$$\psi_m \frac{v_{m-1} - 2v_m + v_{m+1}}{\lambda^2} - \frac{H_i}{EI_c}(v_m - v_i) + \frac{1}{EI_c} \sum_{l=0}^{m-1} P_l(v_m - v_l) = -\frac{1}{EI_c}(M_i + V_i(x_m - x_i)),$$

$$l = 0, 1, 2, \dots, n \quad (3.9)$$

Dodavanjem četiri homogena rubna uvjeta u gornji sustav dobije se homogeni sustav sa $n+5$ jednađbi sa istim brojem nepoznanica. Najmanja vrijednost parametra opterećenja za takav homogen sustav sa $n+5$ jednađbi koji ima barem jedno netrivialno rješenje predstavlja kritično opterećenje (Đurić, 1980.).

Rubni uvjeti ovisno o tipu oslonca štapa u kojima se za krajeve koriste oznake „i“ i „n“ kod primjene integro-diferencijskog postupka glase:

- Slobodni kraj štapa



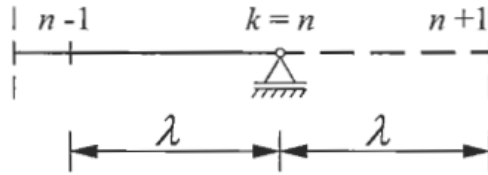
Slika 3. Slobodni kraj štapa(Čaušević, 2013.)

$$M_i = 0$$

$$V_i = 0$$

$$v_n'' = \frac{v_{n-1} - 2v_n + v_{n+1}}{\lambda^2} = 0$$

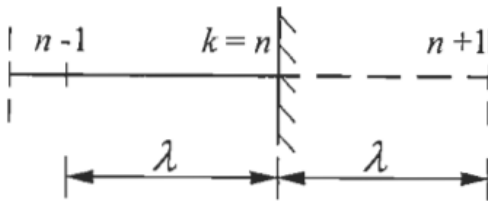
- Pokretni ili nepokretni ležaj



Slika 4. Pokretni ili nepokretni ležaj (Čaušević, 2013.)

$$\begin{aligned} v_n &= 0 \\ M_n &= 0 \\ v_n'' &= \frac{v_{n+1} + v_{n-1}}{\lambda^2} = 0 \\ v_{n+1} &= v_{n-1} \end{aligned}$$

- Upeti kraj štapa



Slika 5. Upeti kraj štapa (Čaušević, 2013.)

$$\begin{aligned} v_n &= 0 \\ v_n' &= \frac{v_{n+1} - v_{n-1}}{2\lambda} = 0 \\ v_{n+1} &= v_{n-1} \end{aligned}$$

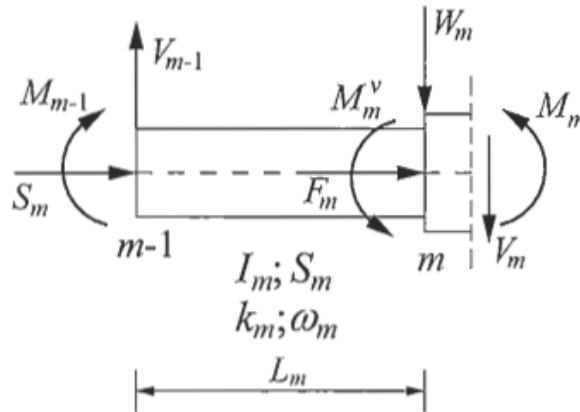
4. ŠTAP SA SKOKOVITOM PROMJENOM POPREČNOG PRESJEKA

4.1. Proračun utjecaja po teoriji drugog reda

Za štap sa skokovito promjenjivim poprečnim presijekom traže se veličine v , φ , M , V koje označavaju oznake za progib, kut rotacije, moment savijanja i poprečnu silu. Promatra li se presijek beskonačno blizu desno od čvora m prikazan na slici 6. vrijednosti v , φ , M , V predstavljaju početne parametre za segment $(m, m+1)$:

$$\begin{aligned} v_m &= v_{m-1} + \varphi_{m-1} \frac{\sin \omega_m}{k_m} - M_{m-1} \frac{1 - \cos \omega_m}{S_m} - V_{m-1} \frac{\omega_m - \sin \omega_m}{k_m S_m} \\ \varphi_m &= \varphi_{m-1} \cdot \cos \omega_m - M_{m-1} \frac{k_m \sin \omega_m}{S_m} - V_{m-1} \frac{1 - \cos \omega_m}{S_m} \\ M_m &= \varphi_{m-1} \cdot EI_m \cdot k_m \cdot \sin \omega_m + M_{m-1} \cdot \cos \omega_m + V_{m-1} \frac{\sin \omega_m}{k_m} - M_m^v \\ V_m &= V_{m-1} - W_m \end{aligned} \quad (4.1)$$

Pri čemu su S_m , V_{m-1} i M_{m-1} rezne sile u presijeku beskonačno blizu desno od čvora $m-1$, a W_m vanjska sila koja djeluje okomito na os štapa i M_m^v vanjski moment savijanja.



Slika 6. Segment štapa od presjeka beskonačno blizu desno od čvora $m-1$ do čvora m (Čaušević, 2013.)

U sustavu jednačbi (4.1) ω_m jednak je:

$$\omega_m = k_m \cdot L_m = L_m \sqrt{\frac{S_m}{EI_m}} \quad (4.2)$$

Gdje se uvodi oznaka ω koja u dinamici konstrukcija označava vlastitu kružnu frekvenciju kako bi se pokazalo da i u stabilnosti konstrukcija postoji termin vlastita vrijednost jer se u

izrazu (4.2) nalazi kritična sila (Čaušević, 2013.). Kako veličine v , φ , M , V imaju različite dimenzije koeficijenti u izrazu (4.1) imati će također različite dimenzije i različiti red veličine zbog čega je otežana njihova numerička primjena. Radi pojednostavljenja uvode se reducirane vrijednosti početnih parametara \bar{v} , $\bar{\varphi}$, \bar{M} , \bar{V} koje su jednake produktu jednadžbi sustava (4.1) i $EI_c \cdot k_c^3$, $EI_c \cdot k_c^2$, k_c i 1, odnosno:

$$\begin{aligned}\bar{v} &= EI_c \cdot k_c^3 \cdot v \\ \bar{\varphi} &= EI_c \cdot k_c^2 \cdot \varphi \\ \bar{M} &= k_c \cdot M \\ \bar{V} &= V\end{aligned}\tag{4.3}$$

Od koeficijenata uz \bar{v} , $\bar{\varphi}$, \bar{M} , \bar{V} na desnoj strani na ovaj način formiranog sustava jednadžbi može se definirati matrica od čvora m-1 do čvora m koja se naziva prijenosna matrica A_m (Čaušević, 2013.). Prijenosna matrica je slijedećeg oblika:

$$A_m = \begin{bmatrix} 1 & \frac{k_c}{k_m} \sin \omega_m & -\frac{I_c}{I_m} \left[\frac{k_c}{k_m} \right]^2 (1 - \cos \omega_m) & -\frac{I_c}{I_m} \left[\frac{k_c}{k_m} \right]^3 (\omega_m - \sin \omega_m) \\ 0 & \cos \omega_m & -\frac{I_c}{I_m} \frac{k_c}{k_m} \sin \omega_m & -\frac{I_c}{I_m} \left[\frac{k_c}{k_m} \right]^2 (1 - \cos \omega_m) \\ 0 & \frac{I_m}{I_c} \frac{k_m}{k_c} \sin \omega_m & \cos \omega_m & \frac{k_c}{k_m} \sin \omega_m \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\tag{4.4}$$

Za općeniti slučaj vrijednosti \bar{v}_n , $\bar{\varphi}_n$, \bar{M}_n , \bar{V}_n za čvor „n“ mogu se odrediti pomoću izraza:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \bar{v}_n \\ \bar{\varphi}_n \\ \bar{M}_n \\ \bar{V}_n \end{bmatrix} &= A_n \begin{bmatrix} \bar{v}_{n-1} \\ \bar{\varphi}_{n-1} \\ \bar{M}_{n-1} \\ \bar{V}_{n-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{M}_n^v \\ W_n \end{bmatrix} = A_n A_{n-1} A_{n-2} \dots A_1 \begin{bmatrix} \bar{v}_0 \\ \bar{\varphi}_0 \\ \bar{M}_0 \\ \bar{V}_0 \end{bmatrix} - A_n A_{n-1} A_{n-2} \dots A_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{M}_1^v \\ W_1 \end{bmatrix} - \\ &A_n A_{n-1} A_{n-2} A_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{M}_2^v \\ W_2 \end{bmatrix} - \dots - A_n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{M}_n^v \\ W_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{M}_n^v \\ W_n \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{4.5}$$

4.2. Stabilnost štapova primjenom prijenosnih matrica

Pri razmatranju problema stabilnosti štapa sa skokovitom promjenom poprečnog presjeka usvoja se da su poprečne sile i vanjski momenti jedanki nuli. Matrična jednadžba (4.5) ima slijedeći izgled:

$$\begin{bmatrix} \bar{v}_n \\ \bar{\varphi}_n \\ \bar{M}_n \\ \bar{V}_n \end{bmatrix} = \mathbf{A}_n \mathbf{A}_{n-1} \dots \mathbf{A}_1 \begin{bmatrix} \bar{v}_0 \\ \bar{\varphi}_0 \\ \bar{M}_0 \\ \bar{V}_0 \end{bmatrix} = \mathbf{B} \begin{bmatrix} \bar{v}_0 \\ \bar{\varphi}_0 \\ \bar{M}_0 \\ \bar{V}_0 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Gdje je matrica \mathbf{B} svukupna prijenosna matrica, koja izgleda:

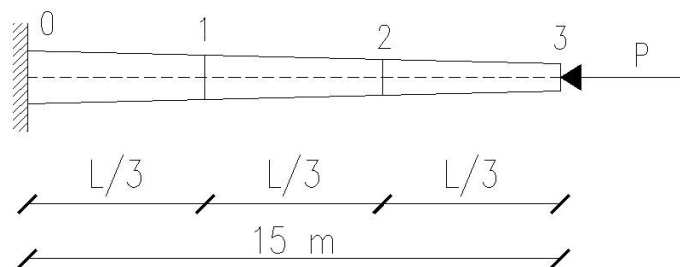
$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ 0 & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Matrična jednadžba (4.6) predstavlja sustav od četiri jednadžbe sa osam nepoznatih veličina. Ukoliko se uvrste rubni uvjeti dolazi se do homogenog sustava sa četiri jednadžbe i četiri nepoznanice. Kritično opterećenje jednako je najmanjoj vrijednosti opterećenja za koje sustav sa četiri jednadžbe i četiri nepoznanice ima barem jedno netrivialno rješenje. Odnosno potrebno je odrediti najmanju vrijednost opterećenja pri kojoj je determinanta matrice \mathbf{B} jednaka nuli:

$$\det \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 1 & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ 0 & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (4.8)$$

5. PRORAČUN KRITIČNOG OPTEREĆENJA

Proračun kritične sile provest će se za štap sa slike 7. Štap je linearno promjenjivog poprečnog presijeka, te je opterećen tlačnom silom P na slobodno oslonjenom kraju dok je na drugom kraju štap upeto oslonjen što znači da su spriječeni pomaci i rotacije na tom kraju štapa.



Slika 7. Skica štapa promjenjive krutosti

Vrijednost kritičnog opterećenja za opterećenje P određuje se primjenom:

- diferencijskog postupka
- metode prijenosnih matrica, usvajajući da je moment tromosti svakog segmenta konstantan i jednak onome u sredini segmenta

Primjer se rješava dijeleći štap na tri segmenta, te se radi procjene točnosti rješenja proglašava broj isječaka sa tri na šest, pa zatim na dvanaest. Proračun kritične sile za štap podijeljen na tri segmenta rješava se analitičkom analizom dok se štap podijeljen na šest odnosno dvanaest segmenata rješava korištenjem programskog jezika Python.

Pomoću programskog jezika Python isprogramiran je postupak određivanja kritične sile prema diferencijalnom postupku i metodi prijenosnih matrica. Programski kod može se primijeniti za slučaj štapa kontinuirano promjenjivog poprečnog presjeka koji je slobodno oslonjen na jednom kraju a upet u drugom, te za podijelu štapa na najmanje šest segmenata..

5.1. Python kod za primjenu diferencijalnog postupka

```
import numpy as np
from sympy import Symbol, Matrix, sin, cos, nsolve, plot

def stvoriMatricu(dimenzije, pocetna):
    x = Symbol("x")
    M=Matrix.zeros(dimenzije)
    delta = pocetna-1
    pozicija = dimenzije-4

    for i in range(dimenzije):
        if(i==0):
            M[i,dimenzije-3] = pocetna
            M[i,dimenzije-2] = x-2*pocetna
            M[i,dimenzije-1] = pocetna-x
        elif(i==dimenzije-2):
            M[i,0] = x-(delta*(dimenzije-1)+1)*2
            M[i,1] = (delta*(dimenzije-1)+1)
            M[i,dimenzije-1] = -x
        elif(i==dimenzije-1):
            M[i,0] = 8
            M[i,dimenzije-1] = -x
        else:
            M[i, pozicija-i+1] = delta*(i+1)+1
            M[i, pozicija-i+2] = x - (delta*(i+1)+1)*2
            M[i, pozicija-i+3] = delta*(i+1)+1
            M[i, dimenzije-1] = -x

    return M

x = Symbol("x")
l = Symbol("l")
E = Symbol("E")
I = Symbol("I")
lmbd = l/#broj segmenata
M=stvoriMatricu(#broj segmenata,pocetni moment tromosti)

rez=nsolve(M.det(),x,-1)
print("Vrijednost kritičnog opterećenja: Pcr = {}".format(rez*(E*I/lmbd**2)))
plot(M.det(),x)
```

5.2. Python kod za primjenu prijenosnih matrica

```
def generirajMatricuB(W,kc,Ic,km,Im):
    B=1
    for i in reversed(range(len(W))):
        B*=Matrix([
            [1,          kc/km[i]*sin(W[i]),          -Ic/Im[i]*(kc/km[i])**2*(1-cos(W[i])),          -
Ic/Im[i]*(kc/km[i])**3*(W[i]-sin(W[i]))],
            [0, cos(W[i]), -(Ic/Im[i])*(kc/km[i])*sin(W[i]), -Ic/Im[i]*(kc/km[i])**2*(1-cos(W[i]))],
            [0, (Im[i]/Ic)*(km[i]/kc)*sin(W[i]), cos(W[i]), kc/km[i]*sin(W[i])],
            [0, 0, 0, 1]
        ])

    return B

#deklaracija
P = Symbol('P')
w = Symbol('w')
Io = Symbol('Io')
w1 = #potrebno napisti vrijednost w1 u ovisnosti o w

#vrijednosti po segmentima
Im = #napisati vrijednosti momenata tromosti po segmentima
km = #napisati vrijednosti krutosti po segmentima
kc = km[0] #definirati krutost prvog segmenta
Ic = Im[0] #definirati moment tromosti prvog segmenta
W=[w1,w2,w3,w4,w5,w6] #vektor ovisan o broju segmenata

#stvari matricu B
B = generirajMatricuB(W,kc,Ic,km,Im)

#jednadzba u matrici B na B22
B22 = B.row(1)[1]

#riješ numerickom metodom
result_numeric = nsolve(B22, w, 0)
print("Rezultat numerickom metodom: w = {}".format(result_numeric))
Sila=result_numeric**2
print('Kritična sila: Pcr= {}*EI/L**2'.format(Sila))

#graf jednadzbe B22
plot(B22).save('./plots/B22.png')
```

5.3. Proračun kritične sile primjenom diferencijskog postupka

Štap se dijeli na tri jednaka segmenta λ te je za svaki presjek potrebno odrediti moment tromosti, integro-diferencijalne jednačbe koje zajedno s rubnim uvjetima formiraju funkciju iz koje se korištenjem programa Mathcad određuje parametara opterećenja, a potom i kritično opterećenje. Radi jednostavnosti momenti tromosti u presjecima prikazuju se u odnosu na početni moment tromosti:

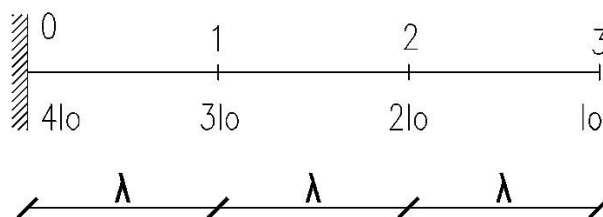
$$I(0) = 4 I_0$$

$$I(5) = 3 I_0$$

$$I(10) = 2 I_0$$

$$I(15) = I_0$$

$$\lambda = \frac{L}{3} = \frac{15}{3} = 5$$



Slika 8. Raspodijela momenta tromosti po „čvorovima“

Integro-diferencijalna jednačba po presjecima:

Presjek 3:

$$EI \frac{(v_2 - 2v_3 + v_4)}{\lambda^2} = M_3$$

Presjek 2:

$$2EI_2 \frac{(v_1 - 2v_2 + v_3)}{\lambda^2} + P(v_2 - v_3) = 0$$

Presjek 1:

$$3EI_1 \frac{(v_0 - 2v_1 + v_2)}{\lambda^2} + P(v_1 - v_3) = 0$$

Presjek 0:

$$4EI_0 \frac{(v_{-1} - 2v_0 + v_1)}{\lambda^2} + P(v_0 - v_3) = 0$$

Uvodi se oznaka:

$$c = \frac{EI}{\lambda^2}$$

Odnosno:

$$c = \frac{EI}{\lambda^2}, \quad 2c = \frac{EI_2}{\lambda^2}, \quad 3c = \frac{EI_1}{\lambda^2}, \quad 4c = \frac{EI_0}{\lambda^2}$$

Rubni uvjeti za upeti oslonac u čvoru 0 i slobodni kraj u čvoru 3, prema slikama 5. i 3.:

$$M_3 = 0 \quad V_3 = 0 \quad v_0 = 0 \quad \varphi_0 = 0$$

Iz uvjeta $\varphi_0 = 0$ slijedi:

$$\varphi_0 = v'_0 = \frac{v_1 - v_{-1}}{2\lambda} = 0$$

$$v_{-1} = v_1$$

Uvrštavanjem oznake c i rubnih uvjeta, sustav jednadžbi ima oblik:

$$c(v_2 - 2v_3 + v_4) = 0$$

$$2c(v_1 - 2v_2 + v_3) + P(v_2 - v_3) = 0$$

$$3c(-2v_1 + v_2) + P(v_1 - v_3) = 0$$

$$4c(v_1 + v_1) + P(-v_3) = 0$$

Sustav jednadžbi može se zapisati u matričnom obliku te kako je kritično opterećenje jednako najmanjoj vrijednosti „parametra opterećenja“ za koji se uvodi oznaka α , $\alpha = \frac{p}{c}$ sustav poprima izgled:

$$\begin{bmatrix} 2 & \alpha - 4 & 2 - \alpha \\ \alpha - 6 & 3 & -\alpha \\ 8 & 0 & -\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

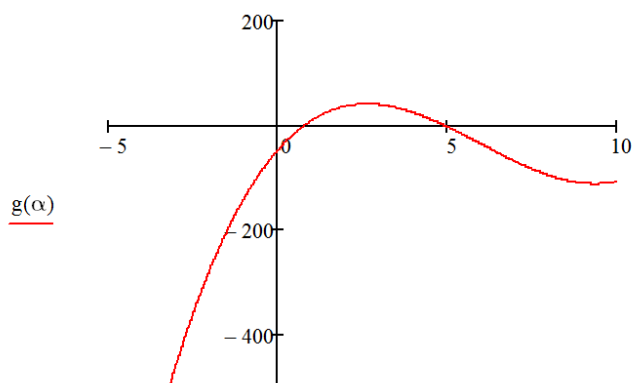
Najmanje kritično opterećenje jednako je netrivialnom rješenju sustava jednadžbi. Uvjet za postojanje netrivialnog rješenja je da determinanta sustava bude jednaka nuli:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & \alpha - 4 & 2 - \alpha \\ \alpha - 6 & 3 & -\alpha \\ 8 & 0 & -\alpha \end{vmatrix} = 0$$

Iz determinante dobije se polinom trećeg stupnja:

$$\alpha^3 - 18\alpha^2 + 74\alpha - 48 = 0$$

Graf funkcije:



Slika 9. Graf jednadžbe kritičnog opterećenja

Pomoću Mathcada dobivena su rješenja sustava :

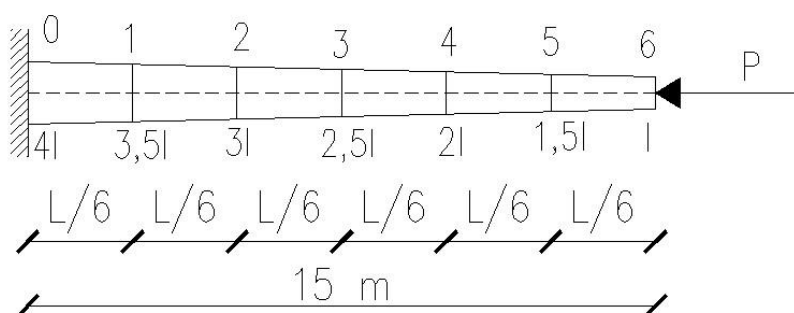
$$\alpha_1 = 12,3 \quad \alpha_2 = 0,7959 \quad \alpha_3 = 4,902$$

Kako je $P = \alpha \cdot c = \frac{EI}{\lambda^2} \alpha$, vrijednost najmanjeg kritičnog opterećenja jednaka za $\alpha_2 = 0,7959$

$$P_{kr} = \alpha \cdot c = \alpha \cdot \frac{EI}{\lambda^2} = 0,7959 \cdot \frac{EI}{\left(\frac{L}{3}\right)^2} = 7,1633 \frac{EI}{L^2}$$

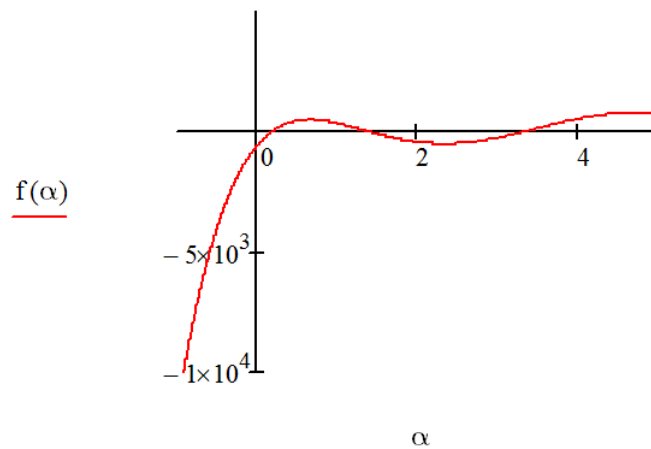
Podjela štapa na šest segmenata

Za dobivanje rezultata i njihovo grafičko prikazivanje korišten je Python programski kod. Proračun se može riješiti i analitički prema postupku opisan prethodno. Na slici 10. prikazana je podjela štapa na šest segmenata i odnosi momenata tromosti po presjecima ovisno o početnom momentu tromosti.



Slika 10. Raspodjela momenta tromosti po presjecima za podijelu na 6 segmenata

Graf funkcije:



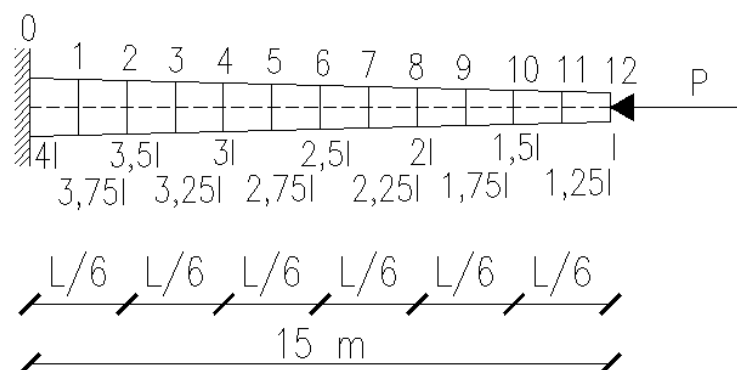
Slika 11. Graf funkcije za šest segmenata

Vrijednost kritičnog opterećenja:

$$P_{kr} = 7,21644 \frac{EI}{L^2}$$

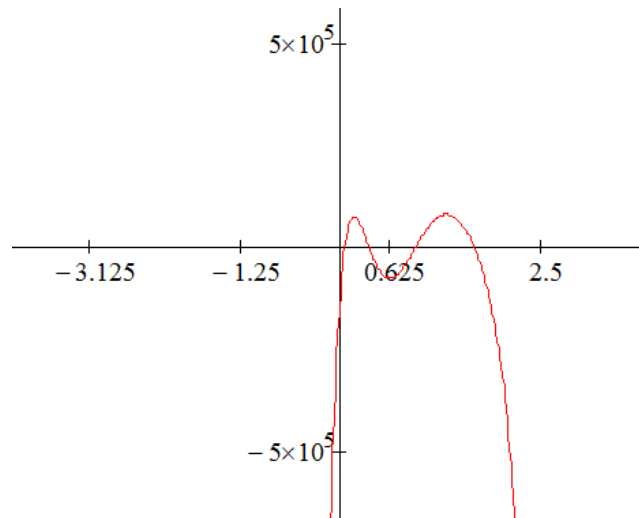
Podjela štapa na dvanaest segmenata

Na slici 12. prikazana je podjela štapa na dvanaest segmenata i odnosi momenata tromosti po presjecima ovisno o početnom momentu tromosti.



Slika 12. Raspodijela momenta tromosti po presjecima za podijelu na 12 segmenata

Graf funkcije:



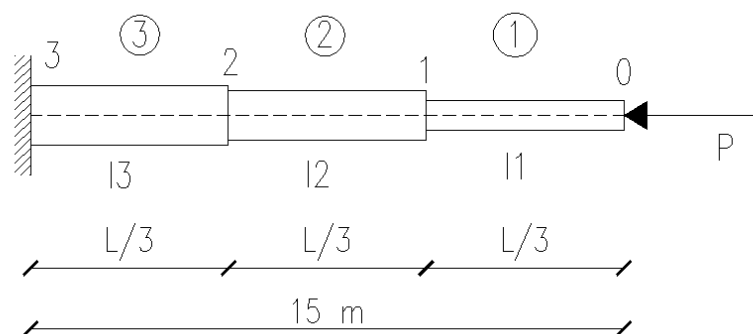
Slika 13. Graf funkcije za dvanaest segmenata

Vrijednost kritičnog opterećenja:

$$P_{kr} = 7,23487 \frac{EI}{L^2}$$

5.4. Primjena metode prijenosnih matrica

Štap sa kontinuirano promijenjivim poprečnim presjekom zamjenjuje se štapom sa skokovitom promjenom poprečnog presjeka, slika 14., na način da je moment tromosti svakog segmenta konstantan i jednak onome u sredini segmenta.



Slika 14. Štap sa skokovitom promjenom poprečnog presjeka

Momenti tromosti po segmentima:

$$I_1 = 1,5 I_0$$

$$I_2 = 2,5 I_0$$

$$I_3 = 3,5 I_0$$

$$\lambda = \frac{L}{3} = \frac{15}{3} = 5$$

Prije određivanja elemenata prijenosnih matrica za svaki segment potrebno je odrediti vrijednosti:

	Segment 0-1	Segment 1-2	Segment 2-3
	A_1	A_2	A_3
S_m	P	P	P
I_m	$1,5 I_0$	$2,5 I_0$	$3,5 I_0$
k_m	$0,8165 \sqrt{\frac{P}{EI_0}}$	$0,6325 \sqrt{\frac{P}{EI_0}}$	$0,5345 \sqrt{\frac{P}{EI_0}}$
ω_m	$0,8165 \cdot \frac{L}{3} \sqrt{\frac{P}{EI_0}}$	$0,6325 \cdot \frac{L}{3} \sqrt{\frac{P}{EI_0}}$	$0,5345 \cdot \frac{L}{3} \sqrt{\frac{P}{EI_0}}$

Vrijednosti za ω_m u tablici dobivene su prema izrazu:

$$\omega_m = k_m \cdot l_m$$

Iz kojeg je izveden izraz za krutost k_m :

$$k_m = \sqrt{\frac{S_m}{EI_m}}$$

Pri čemu je $k_c = k_{0-1}$, $I_c = I_{0-1}$.

Vektor deformacijskih i statičkih vrijednosti u presjeku 0 izgleda:

$$\begin{bmatrix} \bar{v}_3 \\ \bar{\varphi}_3 \\ \bar{M}_3 \\ \bar{V}_3 \end{bmatrix} = A_3 \cdot A_2 \cdot A_1 \begin{bmatrix} \bar{v}_0 \\ \bar{\varphi}_0 \\ \bar{M}_0 \\ \bar{V}_0 \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} \bar{v}_0 \\ \bar{\varphi}_0 \\ \bar{M}_0 \\ \bar{V}_0 \end{bmatrix}$$

Rubni uvjeti za slučaj štapa upetog na jednom kraju a slobodan na drugom glase:

$$\bar{M}_0 = 0 \quad \bar{V}_0 = 0 \quad \bar{v}_3 = 0 \quad \bar{\varphi}_3 = 0$$

Uvođenjem rubnih uvjeta sustav postaje:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{M}_3 \\ \bar{V}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ 0 & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_0 \\ \bar{\varphi}_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Izdvoje li se prve dvije jednadžbe dobije se:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & b_{12} \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_0 \\ \bar{\varphi}_0 \end{bmatrix}$$

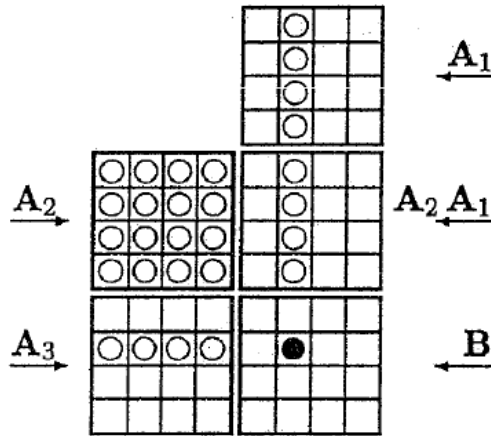
Za pronalazak netrivialnog rješenja determinanta matrice \mathbf{B} mora biti jednaka nuli:

$$|\mathbf{B}| = \begin{vmatrix} 1 & b_{12} \\ 0 & b_{22} \end{vmatrix} = 0,$$

Odnosno:

$$b_{22} = 0$$

Za daljnje rješavanje nije potrebno odrediti sve članove prijenosnih matrica, već utvrditi koji su članovi prijenosnih matrica \mathbf{A}_1 , \mathbf{A}_2 i \mathbf{A}_3 neophodni za određivanje člana b_{22} . Sa slike 15. vidi se da je za dobivanje člana b_{22} potrebno odrediti drugi stupac matrice \mathbf{A}_1 , sve članove matrice \mathbf{A}_2 i drugi redak matrice \mathbf{A}_3 .



Slika 15. Shema množenja matrica za određivanje člana b_{22} (Salatić i sur., 2001.)

Drugi stupac matrice \mathbf{A}_1 jednak je:

$$a_1^T = \{\sin \omega_1 \quad \cos \omega_1 \quad \sin \omega_1 \quad 0\}$$

Matrica \mathbf{A}_2 :

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1,0049 \sin \omega_2 & -1,4137(1 - \cos \omega_2) & -1,4205(\omega_2 - \sin \omega_2) \\ 0 & \cos \omega_2 & -1,4068 \sin \omega_2 & -1,4137(1 - \cos \omega_2) \\ 0 & 0,7107 \sin \omega_2 & \cos \omega_2 & 1,0049 \sin \omega_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Drugi redak matrice \mathbf{A}_3 :

$$a_3 = \{0 \quad \cos \omega_3 \quad -2,9481 \sin \omega_3 \quad -3,7300(1 - \cos \omega_3)\}$$

Radi pojednostavljenja uzima se:

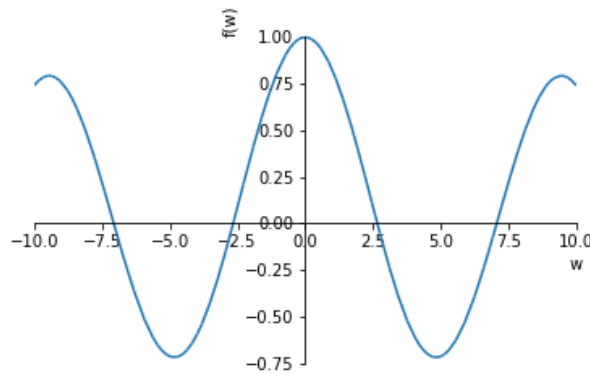
$$\omega_1 = k_1 \cdot L_1 = 0,8165 \sqrt{\frac{P}{EI_0}} \cdot \frac{L}{3} = 0,2721 \cdot L \cdot \sqrt{\frac{P}{EI_0}} = 0,2721 \omega$$

$$\omega_2 = k_2 \cdot L_2 = 0,6325 \sqrt{\frac{P}{EI_0}} \cdot \frac{L}{3} = 0,2108 \cdot L \cdot \sqrt{\frac{P}{EI_0}} = 0,2108 \omega$$

$$\omega_3 = k_3 \cdot L_3 = 0,5345 \sqrt{\frac{P}{EI_0}} \cdot \frac{L}{3} = 0,1782 \cdot L \cdot \sqrt{\frac{P}{EI_0}} = 0,1782 \omega$$

Dobivanjem izraza za b_{22} dobivena je jednačba za određivanje kritične sile. Iz grafa funkcije b_{22} može se uočiti da jednačba ima beskonačno mnogo rješenja ali zanima nas vrijednosti ω koja je najbliža nuli ali pozitivna.

Graf funkcije:



Slika 16. Graf funkcije za 3 segmenata

Korištenjem programskog jezika Python određena je vrijednost $\omega = 2,661$. Iz čega slijedi:

$$\omega_{kr} = L \sqrt{\frac{P}{EI_0}} = 2,661$$

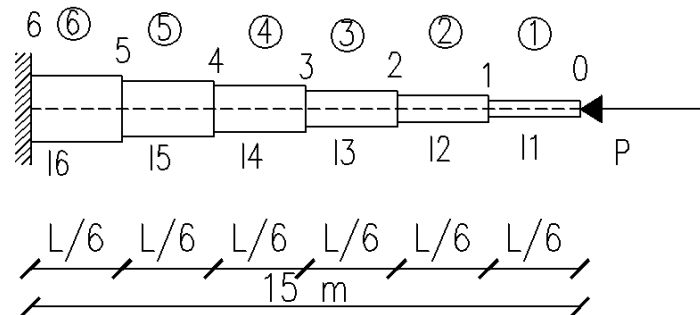
$$P_{kr} = \frac{\omega^2 \cdot E \cdot I_0}{L^2} = 7,0811 \frac{E \cdot I_0}{L^2}$$

Razlika u rješenjima za kritično opterećenje određeno prema diferencijalnom postupku i metodi prijenosnih matrica iznosi:

$$\Delta = \frac{7,1633 - 7,0811}{7,0811} \cdot 100\% = 1,16\%$$

Podjela štapa na šest segmenata

Na slici 17. prikazana je podjela štapa na šest segmenata i odnosi momenata tromosti po presjecima ovisno o početnom momentu tromosti.

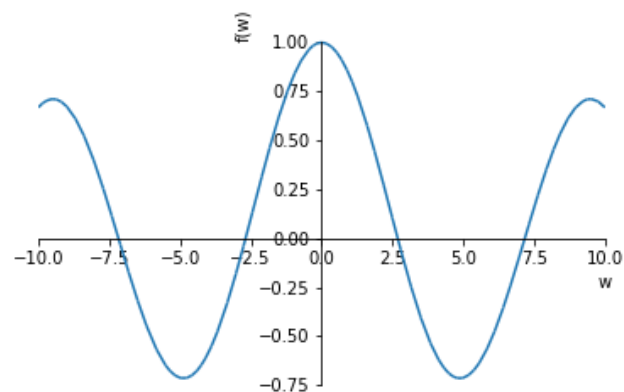


Slika 17. Raspodijela momenta tromosti po presjecima za podjelu na 6 segmenata

Za dobivanje rezultata pomoću Pythona potrebno je definirati slijedeće vrijednosti:

Segment	0-1	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6
S_m	P	P	P	P	P	P
I_m	$1,25 I_0$	$1,75 I_0$	$2,25 I_0$	$2,75 I_0$	$3,25 I_0$	$3,75 I_0$
k_m	$0,894 \sqrt{\frac{P}{EI}}$	$0,769 \sqrt{\frac{P}{EI}}$	$0,667 \sqrt{\frac{P}{EI}}$	$0,603 \sqrt{\frac{P}{EI}}$	$0,5547 \sqrt{\frac{P}{EI}}$	$0,5164 \sqrt{\frac{P}{EI}}$
ω_m	$0,149L \sqrt{\frac{P}{EI}}$	$0,126L \sqrt{\frac{P}{EI}}$	$0,111L \sqrt{\frac{P}{EI}}$	$0,101L \sqrt{\frac{P}{EI}}$	$0,092L \sqrt{\frac{P}{EI}}$	$0,086L \sqrt{\frac{P}{EI}}$

Graf funkcije b_{22} :



Sliak 18. Graf funkcije za 6 segmenata

Najmanja vrijednost $\omega = 2,6843$. Iz čega slijedi:

$$\omega_{kr} = L \sqrt{\frac{P}{EI_0}} = 2,6843$$

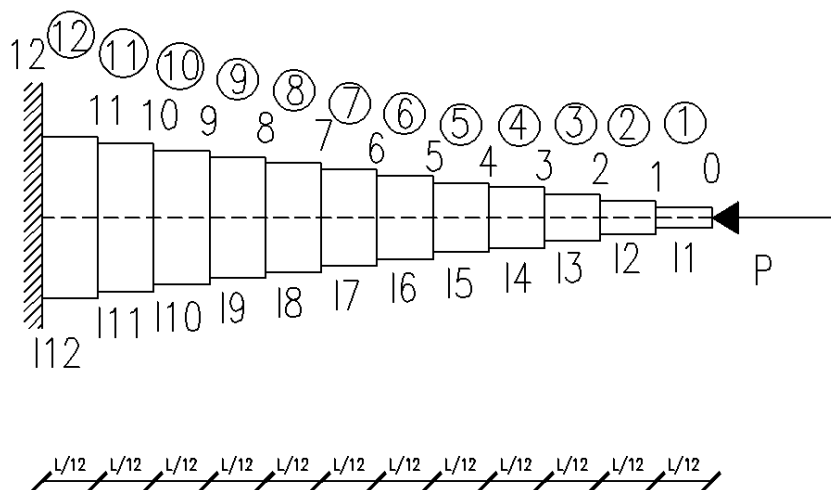
$$P_{kr} = \frac{\omega^2 \cdot E \cdot I_0}{L^2} = 7,2058 \frac{E \cdot I_0}{L^2}$$

Razlika u rješenjima za kritično opterećenje određeno prema diferencijском postupku i metodi prijenosnih matrica iznosi:

$$\Delta = \frac{7,2164 - 7,2058}{7,2058} \cdot 100\% = 0,14\%$$

Podjela štapa na dvanaest segmenata

Na slici 19. prikazana je podjela štapa na dvanaest segmenata i odnosi momenata tromosti po presjecima ovisno o početnom momentu tromosti.



Slika 19. Raspodijela momenta tromosti po presjecima za podjelu na 12 segmenata

Ulazni podatci za Python prikazani su u tablici:

<i>Segment</i>	<i>S_m</i>	<i>I_m</i>	<i>k_m</i>	<i>ω_m</i>
1	P	1,125	$0,9428 \sqrt{\frac{P}{EI_0}}$	$0,0785L \sqrt{\frac{P}{EI_0}}$
2	P	1,375	$0,8528 \sqrt{\frac{P}{EI_0}}$	$0,0711L \sqrt{\frac{P}{EI_0}}$
3	P	1,625	$0,7845 \sqrt{\frac{P}{EI_0}}$	$0,0654L \sqrt{\frac{P}{EI_0}}$
4	P	1,875	$0,7303 \sqrt{\frac{P}{EI_0}}$	$0,0608L \sqrt{\frac{P}{EI_0}}$
5	P	2,125	$0,6859 \sqrt{\frac{P}{EI_0}}$	$0,0572L \sqrt{\frac{P}{EI_0}}$
6	P	2,375	$0,6488 \sqrt{\frac{P}{EI_0}}$	$0,0541L \sqrt{\frac{P}{EI_0}}$
7	P	2,625	$0,6172 \sqrt{\frac{P}{EI_0}}$	$0,0514L \sqrt{\frac{P}{EI_0}}$
8	P	2,875	$0,5897 \sqrt{\frac{P}{EI_0}}$	$0,0491L \sqrt{\frac{P}{EI_0}}$
9	P	3,125	$0,5656 \sqrt{\frac{P}{EI_0}}$	$0,0471L \sqrt{\frac{P}{EI_0}}$
10	P	3,375	$0,5443 \sqrt{\frac{P}{EI_0}}$	$0,0454L \sqrt{\frac{P}{EI_0}}$
11	P	3,625	$0,5252 \sqrt{\frac{P}{EI_0}}$	$0,0437L \sqrt{\frac{P}{EI_0}}$
12	P	3,875	$0,5080 \sqrt{\frac{P}{EI_0}}$	$0,0423L \sqrt{\frac{P}{EI_0}}$

Najmanja vrijednost $\omega = 2,6899$. Iz čega slijedi:

$$\omega_{kr} = L \sqrt{\frac{P}{EI_0}} = 2,6899$$

$$P_{kr} = \frac{\omega^2 \cdot E \cdot I_0}{L^2} = 7,2356 \frac{E \cdot I_0}{L^2}$$

Razlika u rješenjima za kritično opterećenje određeno prema diferencijskom postupku i metodi prijenosnih matrica iznosi:

$$\Delta = \frac{7,2356 - 7,2348}{7,2348} \cdot 100\% = 0,01\%$$

5.5. Usporedba rezultata

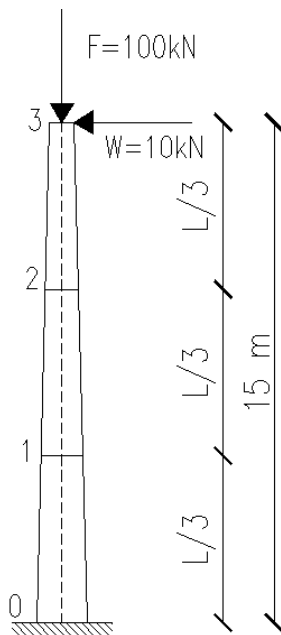
Vrijednosti kritične sile ovisno o metodi proračuna i broju segmenata prikazana je u tablici:

	3 segmenta	6 segmenta	12 segmenta
Diferencijalni postupak	7,1633 EI/L ²	7,2164 EI/L ²	7,2348 EI/L ²
Prijenosne matrice	7,0811 EI/L ²	7,2058 EI/L ²	7,2356 EI/L ²
Razlika [%]	1,16	0,14	0,01

Uspoređujući rezultate pojedine metode uočava se da se povećavanjem broja segmenata dolazi do točnijeg rješenja. Razlike metoda su jako male te se i za grubu diskretizaciju štapa odnosno podjelu štapa na tri isječka dolazi do prihvatljivog rješenja kritične sile.

6. PRORAČUN STATIČKIH I DEFORMACIJSKIH VELIČINA PREMA TEORIJI 2. REDA

U ovom dijelu riješit će se primjer sa ciljem određivanja statičkih i deformacijskih veličina prema teoriji 2. reda. Zadan je štap konstantno promjenjivog poprečnog presijeka koji je na jednom kraju upeto oslonjen a na drugom kraju slobodan. Na slobodnom kraju štapa djeluje tlačna sila F i sila okomita na os štapa W . Veličina sila prikazana je na slici 20.



Slika 20. Skica štapa promjenjive krutosti i opterećenja

Vrijednost statičkih i deformacijskih veličina određuju se primjenom:

- diferencijskog postupka
- metode prijenosnih matrica, usvajajući da je moment tromosti svakog segmenta konstantan i jednak onome u sredini segmenta

Primjer se rješava dijeleći štap na tri segmenta, te se radi procjene točnosti rješenja progušćava broj isječaka sa tri na šest, pa zatim na dvanest. Proračun statičkih i deformacijskih veličina za štap podijeljen na tri segmenta rješava se analitičkom analizom dok se štap podijeljen na šest odnosno dvanaest segmenata rješava korištenjem programskog jezika Python.

Pomoću programskog jezika Python isprogramiran je postupak određivanja statičkih i deformacijskih veličina prema diferencijalnom postupku i metodi prijenosnih matrica. Programski kod može se primjeniti za slučaj štapa kontinuirano promjenjivog poprečnog presjeka koji je slobodno oslonjen na jednom kraju a upet u drugom. Najmanji broj podjela

za korištenje koda je šest. Usvaja se da je stup izveden od čelika čiji je Youngov modul elastičnosti jednak $2,1 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$. Poprečni presijek na slobodnom kraju štapa je širokopojasni H profil, HE 320 A, čiji je moment tromosti jednak 22930 cm^4 .

6.1. Python kod za primjenu diferencijalong postupka

```
from sympy import Symbol, Matrix, solve_linear_system

#generiraj matricu (dimenzije min>6)
def stvoriMatricu(dimenzije, lamb, F, W, c):
    pocetna = lamb
    M=Matrix.zeros(dimenzije, dimenzije+1)
    delta = pocetna-1
    pozicija = dimenzije-4
    if(dimenzije<6):
        print("Dimenzije min 6*6!")
        return 0
    for i in range(dimenzije):
        #iznimke pravila za prvi red
        if(i==0):
            M[i,dimenzije-3] = pocetna
            M[i,dimenzije-2] = F/c-2*pocetna
            M[i,dimenzije-1] = pocetna-F/c
            M[i,dimenzije] = (i+1)*W*lamb/c
        #iznimke pravila za predzadnji red
        elif(i==dimenzije-2):
            M[i,0] = F/c-(delta*(dimenzije-1)+1)*2
            M[i,1] = (delta*(dimenzije-1)+1)
            M[i,dimenzije-1] = -F/c
            M[i,dimenzije] = (i+1)*W*lamb/c
        #iznimke pravila za zadnji red
        elif(i==dimenzije-1):
            M[i,0] = 8
            M[i,dimenzije-1] = -F/c
            M[i,dimenzije] = (i+1)*W*lamb/c
        #ostali redovi
        else:
            M[i, pozicija-i+1] = delta*(i+1)+1
            M[i, pozicija-i+2] = F/c - (delta*(i+1)+1)*2
            M[i, pozicija-i+3] = delta*(i+1)+1
            M[i, dimenzije-1] = -F/c
            M[i,dimenzije] = (i+1)*W*lamb/c
    return M

#deklaracija pocetnih uvjeta
F = #upisati vrijednost
W = #upisati vrijednost
c = #upisati vrijednost
lamb = #upisati vrijednost
```

```

dimenzije = #upisati vrijednost
system=stvariMatricu(dimenzije, lamb, F, W, c)

#deklaracija simbola u listu
v = []
for i in range(dimenzije):
    v.insert(i, Symbol('v{}'.format(i+1)))
#izracunaj sustav
A=solve_linear_system(system,v[0],v[1],v[2],v[3],v[4],v[5],v[6],v[7],v[8],v[9],v[10],v[11])
#izracunaj M vrijednosti
M = []
for i in range(dimenzije):
    if i == 0:
        M.insert(i, F*(-A[v[dimenzije-1]])-W*lamb*dimenzije)
    else:
        M.insert(i, F*A[v[i-1]]-A[v[dimenzije-1]]-(dimenzije-i)*W*lamb)
print(A)
print(M)

```

6.2. Python kod za primjenu prijenosnih matrica

```

#generiraj matrice A
def stvariMatriceA(W,kc,Ic,km,Im):
    A = []
    for i in range(len(W)):
        temp=Matrix([
            [1, kc/km[i]*sin(W[i]), -Ic/Im[i]*(kc/km[i])**2*(1-cos(W[i])), -
Ic/Im[i]*(kc/km[i])**3*(W[i]-sin(W[i]))],
            [0, cos(W[i]), -(Ic/Im[i]*(kc/km[i])*sin(W[i]), -Ic/Im[i]*(kc/km[i])**2*(1-cos(W[i]))],
            [0, (Im[i]/Ic)*(km[i]/kc)*sin(W[i]), cos(W[i]), kc/km[i]*sin(W[i])],
            [0, 0, 0, 1]
        ])
        A.append(temp)
    return A
#deklaracija
E = 2.1*10**8
F = 100
L = 15
Io = 2.2930*10**(-4)
H = 10
#broj presjeka
N = #upisati broj segmenata
#deklaracija simbola jednadzbe
v = 0
ro = 0
M0 = Symbol("M0")
V0 = Symbol("V0")

```

```

#vrijednosti po segmentima
Im = []
km = []
W = []
delta = 1 + (3/N/2)
for i in range(N):
    Im.append(delta*Io)
    km.append(np.sqrt(1/delta)*np.sqrt(F/(E*Io)))
    W.append(km[i]*L/N)
    delta = delta + (3/N)
kc = km[0]
Ic = Im[0]

#stvari matrice A
A = []
A = stvariMatriceA(W,kc,Ic,km,Im)

#jednadzbe po segmentima
S = []
for i in reversed(range(N)):
    temp = i
    mat = A[temp]
    for j in range(N-i):
        if temp != i:
            mat = mat * A[temp]
        temp += 1
    if i != 0:
        S.append(mat * Matrix([v,ro,M0,V0]))
    else:
        S.append(mat * Matrix([v,ro,M0,V0])-Matrix([0,0,0,H]))

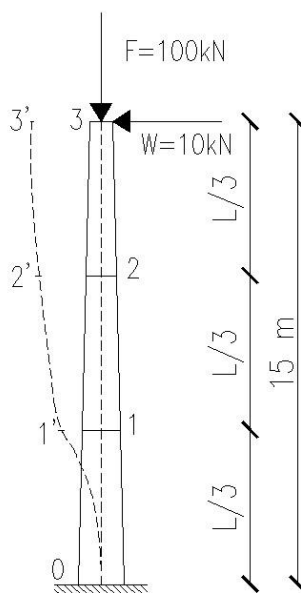
#racunanje M0 i V0 te substitucija rezultata
res = linsolve((S[N-1][2],S[N-1][3]),(M0,V0))
(M0, V0) = next(iter(res))
print(M0/kc)

for i in range(N):
    S[i] = S[i].subs({"M0": M0, "V0": V0})
    S[i][0] = S[i][0]/(E*Ic*kc**3)
    S[i][1] = S[i][1]/(E*Ic*kc**2)
    S[i][2] = S[i][2]/kc
    pprint(S[i])

```

6.3. Proračun statičkih i deformacijskih veličina primjenom diferencijskog postupka

Štap je podijeljen na tri isječka te je na skici 21. prikazana deformacijska linija. Raspodijela momenta tromosti po dužini štapa ostaje jednaka kao u poglavlju 5.3.



Slika 21. Deformacijska linija

Potrebno je za svaki presjek napisati integro-diferencijalne jednačbe:

Presjek 3:

$$EI \frac{(v_2 - 2v_3 + v_4)}{\lambda^2} = M_3$$

Presjek 2:

$$2EI_2 \frac{(v_1 - 2v_2 + v_3)}{\lambda^2} + F(v_2 - v_3) + W(x_2 - x_3) = 0$$

Presjek 1:

$$3EI_1 \frac{(v_0 - 2v_1 + v_2)}{\lambda^2} + F(v_1 - v_3) + W(x_1 - x_3) = 0$$

Presjek 0:

$$4EI_0 \frac{(v_{-1} - 2v_0 + v_1)}{\lambda^2} + F(v_0 - v_3) + W(x_0 - x_3) = 0$$

Uvodi se oznaka:

$$c = \frac{EI}{\lambda^2}$$

Odnosno:

$$c = \frac{EI}{\lambda^2}, \quad 2c = \frac{EI_2}{\lambda^2}, \quad 3c = \frac{EI_1}{\lambda^2}, \quad 4c = \frac{EI_0}{\lambda^2}$$

Rubni uvjeti za upeti oslonac u čvoru 0 i slobodni kraj u čvoru 3, prema slikama 5. i 3.:

$$M_3 = 0 \quad V_3 = 0 \quad v_0 = 0 \quad \varphi_0 = 0$$

Iz uvjeta $\varphi_0 = 0$ slijedi:

$$\varphi_0 = v'_0 = \frac{v_1 - v_{-1}}{2\lambda} = 0$$

$$v_{-1} = v_1$$

Uvrštavanjem oznake c i rubnih uvjeta, sustav jednadžbi ima oblik:

$$c(v_2 - 2v_3 + v_4) = 0$$

$$2c(v_1 - 2v_2 + v_3) + F(v_2 - v_3) + W(x_2 - x_3) = 0$$

$$3c(-2v_1 + v_2) + F(v_1 - v_3) + W(x_1 - x_3) = 0$$

$$4c(v_1 + v_1) + F(-v_3) + W(x_0 - x_3) = 0$$

Odnosno:

$$(v_2 - 2v_3 + v_4) = 0$$

$$2v_1 + \left(\frac{F}{c} - 4\right)v_2 + \left(2 - \frac{F}{c}\right) + W\frac{\lambda}{c} = 0$$

$$\left(\frac{F}{c} - 6\right)v_1 + 3v_2 + 2W\frac{\lambda}{c} = 0$$

$$8v_1 - \frac{F}{c}v_3 + 3W\frac{\lambda}{c} = 0$$

Uvrštavanjem vrijednosti za silu F i W te koeficijent c i duljinu segmenta λ u sustav jednadžbi određuju se vrijednosti pomaka.

Traženi momenti savijanja u označenim presjecima po teoriji 2. reda imaju slijedeće vrijednosti:

$$M_3 = 0$$

$$M_2 = F(v_2 - v_3) - W(x_2 - x_3) = F(v_2 - v_3) - W\lambda$$

$$M_1 = F(v_1 - v_3) - W(x_1 - x_3) = F(v_1 - v_3) - 2W\lambda$$

$$M_0 = F(v_0 - v_3) - W(x_0 - x_3) = F(-v_3) - 3W\lambda$$

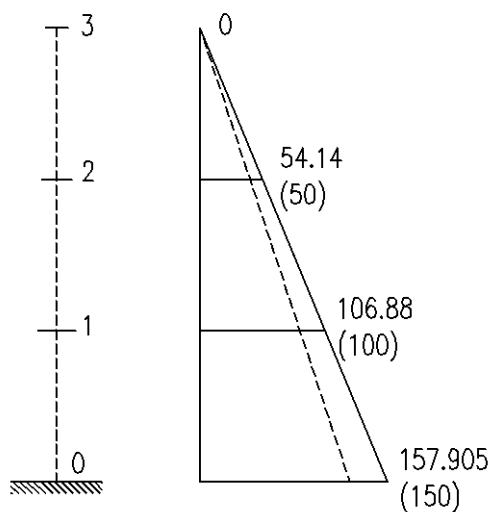
Uvrštavanjem poznatih podataka odnosno vrijednosti sila F i W koje su jednake 100 kN i 10 kN, Youngov modul elastičnosti jednak $2,1 \times 10^8$ kN/m² i moment tromosti na slobodnom kraju 22930 cm⁴. Prema prije navedenom izrazu određuje se veličina pomoćnog koeficijenta $c = 1926,12$ kN.

Vrijednosti pomaka i momenata po presjecima prikazani su u tablici:

$v_1 [m]$	0,01024
$v_2 [m]$	0,03762
$v_3 [m]$	0,07905

$M_0 [kNm]$	157,905
$M_1 [kNm]$	106,88
$M_2 [kNm]$	54,14

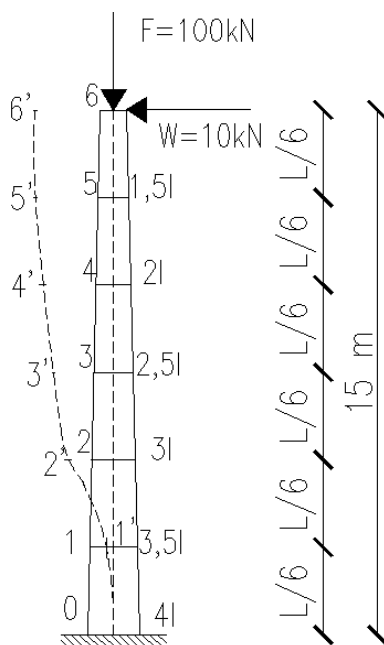
Momenti savijanja prema teoriji 1. i 2. reda prikazani su na slici 22.:



Slika 22. Momenti savijanja prema teoriji 1. reda u zagradi i 2. reda

Podjela štapa na šest segmenata

Za dobivanje rezultata korišten je Pythonov programski kod. Zadatak se može riješiti i analitički prema postupku opisan prethodno. Na slici 23. prikazana je podjela štapa na šest segmenata, odnosi momenata tromosti po presjecima ovisno o početnom momentu tromosti i deformacijska linija.



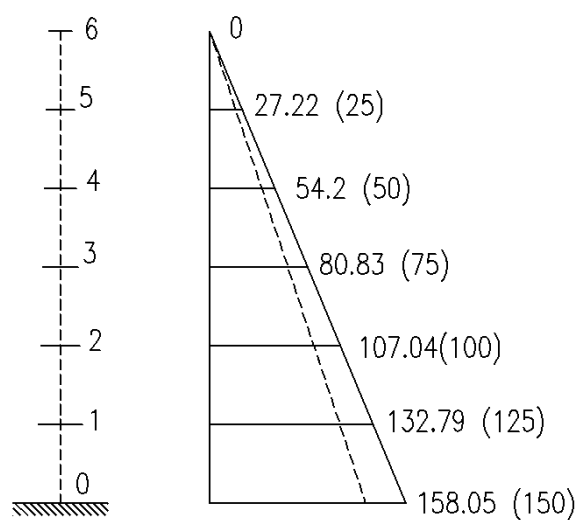
Slika 23. Raspodijela momenta tromosti po presjecima za podijelu na 6 segmenata

Uvrštavanjem poznatih podataka i definiranjem veličine pomoćnog koeficijenta $c = 7704,48 \text{ kN}$. Vrijednosti pomaka i momenata savijanja po presjecima prikazani su u tablici:

$v_1 [m]$	0,00256
$v_2 [m]$	0,01005
$v_3 [m]$	0,02217
$v_4 [m]$	0,03849
$v_5 [m]$	0,05832
$v_6 [m]$	0,08051

$M_0 [kNm]$	158,05
$M_1 [kNm]$	132,79
$M_2 [kNm]$	107,04
$M_3 [kNm]$	80,83
$M_4 [kNm]$	54,20
$M_5 [kNm]$	27,22

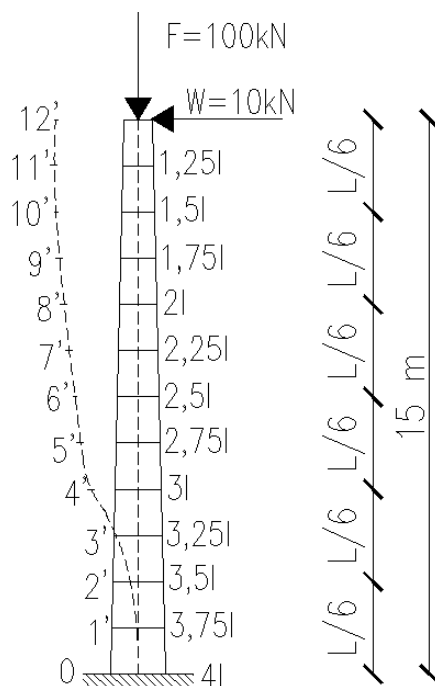
Momenti savijanja prema teoriji 1. i 2. reda prikazani su na slici 24.:



Slika 24. Momenti savijanja prema teoriji 1. i 2. reda

Podjela štapa na dvanaest segmenata

Na slici 25. prikazana je podjela štapa na dvanaest segmenata i odnosi momenata tromosti po presjecima ovisno o početnom momentu tromosti i deformacijska linija.



Slika 25. Raspodijela momenta tromosti po presjecima za podijelu na 12 segmenata

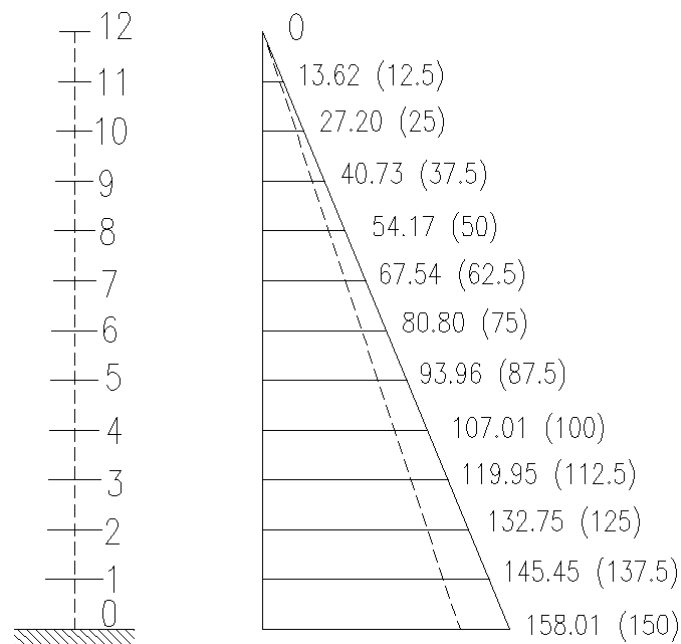
Vrijednosti sila F i W ostaju jednake prethodnim podjelama štapa. Modul elastičnosti i moment tromosti na slobodnom kraju također ostaju jednaki. Pomoćni koeficijent c

mijenja se i iznosi 30817,92 kN. Vrijednosti pomaka i momenata savijanja po presjecima prikazani su u tablici:

$v_1 [m]$	0,00064
$v_2 [m]$	0,00254
$v_3 [m]$	0,00567
$v_4 [m]$	0,00999
$v_5 [m]$	0,01548
$v_6 [m]$	0,02207
$v_7 [m]$	0,02972
$v_8 [m]$	0,03833
$v_9 [m]$	0,04783
$v_{10} [m]$	0,05808
$v_{11} [m]$	0,06892
$v_{12} [m]$	0,08011

$M_0 [kNm]$	158,011
$M_1 [kNm]$	145,45
$M_2 [kNm]$	132,75
$M_3 [kNm]$	119,95
$M_4 [kNm]$	107,01
$M_5 [kNm]$	93,96
$M_6 [kNm]$	80,80
$M_7 [kNm]$	67,54
$M_8 [kNm]$	54,17
$M_9 [kNm]$	40,73
$M_{10} [kNm]$	27,20
$M_{11} [kNm]$	13,62

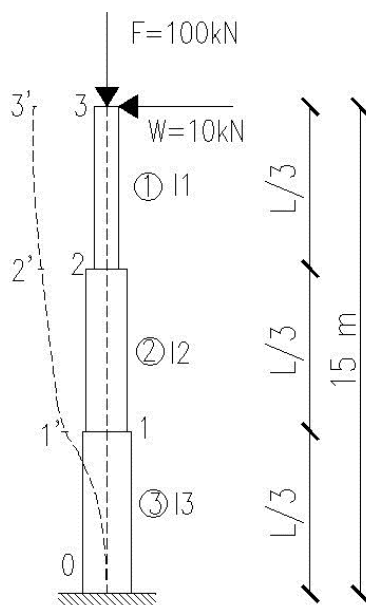
Momenti savijanja prema teoriji 1. i 2. reda prikazani su na slici 26.:



Slika 26. Momenti savijanja prema teoriji 1. i 2. reda

6.4. Proračun statičkih i deformacijskih veličina primjenom metode prijenosnih matrica

Štap sa kontinuirano promijenjivim poprečnim presjekom zamijenjuje se štapom sa skokovitom promjenom poprečnog presjeka na način da je moment tromosti svakog segmenta konstantan i jednak onome u sredini segmenta. Djelovanje vanjskog opterećenja, deformacijska linija i raspodijela momenata tromosti po segmentima prikazana je na slici 27.



Slika 27. Prikaz djelovanja vanjskog opterećenja

Iz rubnih uvjeta za štap u cijelini prema izrazu 4.5 može se napisati:

$$\begin{bmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{\varphi}_1 \\ \bar{M}_1 \\ \bar{V}_1 \end{bmatrix} = A_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{M}_0 \\ \bar{V}_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{v}_2 \\ \bar{\varphi}_2 \\ \bar{M}_2 \\ \bar{V}_2 \end{bmatrix} = A_2 \begin{bmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{\varphi}_1 \\ \bar{M}_1 \\ \bar{V}_1 \end{bmatrix} = A_2 A_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{M}_0 \\ \bar{V}_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{v}_3 \\ \bar{\varphi}_3 \\ \bar{M}_3 \\ \bar{V}_3 \end{bmatrix} = A_1 \begin{bmatrix} \bar{v}_2 \\ \bar{\varphi}_2 \\ \bar{M}_2 \\ \bar{V}_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ W \end{bmatrix} = A_1 A_2 A_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{M}_0 \\ \bar{V}_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ W \end{bmatrix}$$

Uvrštavanjem poznatih podataka odnosno vrijednosti sila F i W koje su jednake 100 kN i 10 kN, Youngovog modula elastičnosti za čelik $2,1 \times 10^8$ kN/m² i početnog momenta tromosti mogu se odrediti prijenosne matrice prema izrazu 4.4.

Vrijednosti momenta tromosti, krutosti i kružne frekvencije po segmentima prikazane su u tablici:

	<i>Segment 0-1</i>	<i>Segment 1-2</i>	<i>Segment 2-3</i>
	A_1	A_2	A_3
$S_m [kN]$	F	F	F
$I_m [m^4]$	$1,5 I_0$	$2,5 I_0$	$3,5 I_0$
k_m	$0,8165 \sqrt{\frac{F}{EI_0}}$	$0,6325 \sqrt{\frac{F}{EI_0}}$	$0,5345 \sqrt{\frac{F}{EI_0}}$
ω_m	$0,8165 \cdot \frac{L}{3} \sqrt{\frac{F}{EI_0}}$	$0,6325 \cdot \frac{L}{3} \sqrt{\frac{F}{EI_0}}$	$0,5345 \cdot \frac{L}{3} \sqrt{\frac{F}{EI_0}}$

Pri čemu je $k_c = k_{0-1}$, $I_c = I_{0-1}$.

Prijenosne matrice:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0,18497 & -0,01726 & -1,07136 \cdot 10^{-3} \\ 0 & 0,98274 & -0,18497 & -0,01726 \\ 0 & 0,18497 & 0,98274 & 0,18497 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0,1854 & -0,01037 & -6,4326 \cdot 10^{-4} \\ 0 & 0,98963 & -0,11124 & -0,01037 \\ 0 & 0,1854 & 0,98963 & 0,1854 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0,18558 & -7,407 \cdot 10^{-3} & -4,596 \cdot 10^{-4} \\ 0 & 0,99256 & -0,07954 & -7,407 \cdot 10^{-3} \\ 0 & 0,18558 & 0,99256 & 0,18558 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rubni uvjeti za slučaj štapa upetog na jednom kraju a slobodan na drugom glase:

$$\bar{M}_3 = 0 \quad \bar{V}_3 = 0 \quad \bar{v}_0 = 0 \quad \bar{\varphi}_0 = 0$$

Nepoznati početni parametri \bar{M}_0 i \bar{V}_0 mogu se odrediti rješavanjem slijedećeg sustava jednačbi nastalih uvrštavanjem rubnih uvjeta u prethodno napisane jednačbe u matričnom obliku:

$$0,5389 \cdot \bar{V}_0 + 0,916 \cdot \bar{M}_0 = 0$$

$$\bar{V}_0 - 10 = 0$$

Kako su dobivene veličine \bar{v} , $\bar{\varphi}$, \bar{M} , \bar{V} reducirane vrijednosti početnih parametara potrebno je korištenjem slijedećih izraza dobiti stvarne veličine v , φ , M , V :

$$v = \frac{\bar{v}}{EI_c \cdot k_c^3}$$

$$\varphi = \frac{\bar{\varphi}}{EI_c \cdot k_c^2}$$

$$M = \frac{\bar{M}}{k_c}$$

$$V = \bar{V}$$

Vrijednosti pomaka i momenata savijanja po presjecima prikazani su u tablici:

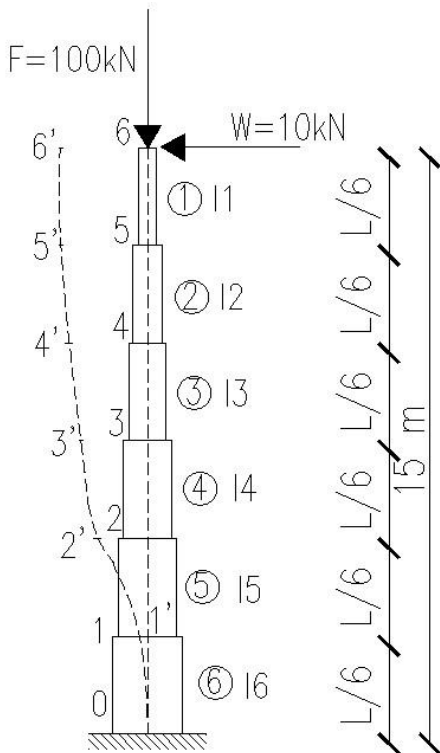
$v_1 [m]$	0,01048
$v_2 [m]$	0,03947
$v_3 [m]$	0,08219

$\varphi_1 [rad]$	0,00393
$\varphi_2 [rad]$	0,00729
$\varphi_3 [rad]$	0,00917

M_0 [kNm]	158,11
M_1 [kNm]	107,06
M_2 [kNm]	54,16

Podjela štapa na šest segmenata

Za dobivanje rezultata korišten je Python programski kod. Na slici 28. prikazana je podjela štapa na šest segmenata, odnosi momenata tromosti po presjecima ovisno o početnom momentu tromosti i deformacijska linija.



Slika 28. Raspodijela momenta tromosti po presjecima za podjelu na 6 segmenata

Za određivanje traženih vrijednosti korištena je tablica prikazana u poglavlju 5.4. Vrijednosti pomaka, kutova rotacije i momenata savijanja po presjecima prikazani su u tablici:

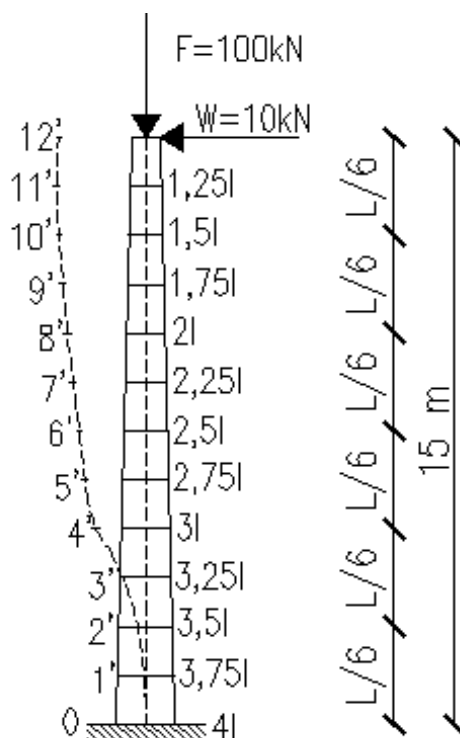
$v_1 [m]$	0,00259
$v_2 [m]$	0,01011
$v_3 [m]$	0,02225
$v_4 [m]$	0,03859
$v_5 [m]$	0,05842
$v_6 [m]$	0,08054

$\varphi_1 [rad]$	0,00201
$\varphi_2 [rad]$	0,00393
$\varphi_3 [rad]$	0,00570
$\varphi_4 [rad]$	0,00726
$\varphi_5 [rad]$	0,00847
$\varphi_6 [rad]$	0,00903

$M_0 [kNm]$	158,05
$M_1 [kNm]$	132,78
$M_2 [kNm]$	107,04
$M_3 [kNm]$	80,82
$M_4 [kNm]$	54,18
$M_5 [kNm]$	27,20

Podjela štapa na dvanaest segmenata

Na slici 29. prikazana je podjela štapa na dvanaest segmenata i odnosi momenata tromosti po presjecima ovisno o početnom momentu tromosti.



Slika 29. Raspodijela momenta tromosti po presjecima za podjelu na 12 segmenata

Za određivanje traženih vrijednosti korištena je tablica prikazana u poglavlju 5.4. Vrijednosti pomaka, kutova rotacije i momenata savijanja po presjecima prikazani su u tablici:

$v_1 [m]$	0,00064	$\varphi_1 [rad]$	0,00102	$M_0 [kNm]$	158,05
$v_2 [m]$	0,00254	$\varphi_2 [rad]$	0,00201	$M_1 [kNm]$	145,45
$v_3 [m]$	0,00568	$\varphi_3 [rad]$	0,00298	$M_2 [kNm]$	132,76
$v_4 [m]$	0,01001	$\varphi_4 [rad]$	0,00393	$M_3 [kNm]$	119,94
$v_5 [m]$	0,0155	$\varphi_5 [rad]$	0,00483	$M_4 [kNm]$	107,00
$v_6 [m]$	0,0221	$\varphi_6 [rad]$	0,00569	$M_5 [kNm]$	93,96
$v_7 [m]$	0,02974	$\varphi_7 [rad]$	0,00651	$M_6 [kNm]$	80,80
$v_8 [m]$	0,03836	$\varphi_8 [rad]$	0,00725	$M_7 [kNm]$	67,54
$v_9 [m]$	0,04786	$\varphi_9 [rad]$	0,00791	$M_8 [kNm]$	54,17
$v_{10} [m]$	0,05811	$\varphi_{10} [rad]$	0,00845	$M_9 [kNm]$	40,73
$v_{11} [m]$	0,06894	$\varphi_{11} [rad]$	0,00884	$M_{10} [kNm]$	27,19
$v_{12} [m]$	0,08012	$\varphi_{12} [rad]$	0,00899	$M_{11} [kNm]$	13,62

6.5. Usporedba rezultata

Vrijednosti pomaka za podjelu štapa na tri segmenta ovisno o metodi proračuna prikazana je u tablici:

	$v_1 [m]$	$v_2 [m]$	$v_3 [m]$
Diferencijalni postupak	0,01024	0,03762	0,07905
Prijenosne matrice	0,01048	0,03947	0,08219
Razlika [%]	2,34	4,92	3,97

Vrijednosti momenta savijanja za podjelu štapa na tri segmenta ovisno o metodi proračuna prikazana je u tablici:

	$M_0 [kNm]$	$M_1 [kNm]$	$M_2 [kNm]$
Diferencijalni postupak	157,905	106,88	54,14
Prijenosne matrice	158,108	107,06	54,16
Razlika [%]	0,13	0,17	0,04

Vrijednosti pomaka za podjelu štapa na šest segmenta ovisno o metodi proračuna prikazana je u tablici:

	Diferencijalni postupak	Prijenosne matrice	Razlika [%]
$v_1 [m]$	0,00256	0,00259	1,17
$v_2 [m]$	0,01005	0,01011	0,59
$v_3 [m]$	0,02217	0,02225	0,36
$v_4 [m]$	0,03849	0,03859	0,26
$v_5 [m]$	0,05832	0,05842	0,17
$v_6 [m]$	0,08051	0,08054	0,04

Vrijednosti momenta savijanja za podjelu štapa na šest segmenta ovisno o metodi proračuna prikazana je u tablici:

	Diferencijalni postupak	Prijenosne matrice	Razlika [%]
$M_0 [kNm]$	158,05	158,05	0,0
$M_1 [kNm]$	132,79	132,78	0,007
$M_2 [kNm]$	107,04	107,04	0,0
$M_3 [kNm]$	80,83	80,82	0,007
$M_4 [kNm]$	54,20	54,18	0,04
$M_5 [kNm]$	27,22	27,20	0,07

Vrijednosti pomaka za podjelu štapa na dvanaest segmenta ovisno o metodi proračuna prikazana je u tablici:

	Diferencijalni postupak	Prijenosne matrice	Razlika [%]
$v_1 [m]$	0,00064	0,00064	0,0
$v_2 [m]$	0,00254	0,00254	0,0
$v_3 [m]$	0,00567	0,00568	0,17
$v_4 [m]$	0,00999	0,01001	0,20
$v_5 [m]$	0,01548	0,0155	0,13
$v_6 [m]$	0,02207	0,0221	0,16
$v_7 [m]$	0,02972	0,02974	0,067
$v_8 [m]$	0,03833	0,03836	0,08
$v_9 [m]$	0,04783	0,04786	0,06
$v_{10} [m]$	0,05808	0,05811	0,05
$v_{11} [m]$	0,06892	0,06894	0,03
$v_{12} [m]$	0,08011	0,08012	0,01

Vrijednosti momenta savijanja za podjelu štapa na dvanaest segmenta ovisno o metodi proračuna prikazana je u tablici:

	Diferencijalni postupak	Prijenosne matrice	Razlika [%]
$M_0 [kNm]$	158,011	158,05	0,0
$M_1 [kNm]$	145,45	145,45	0,0
$M_2 [kNm]$	132,75	132,76	0,17
$M_3 [kNm]$	119,95	119,94	0,20
$M_4 [kNm]$	107,01	107,00	0,13
$M_5 [kNm]$	93,96	93,96	0,16
$M_6 [kNm]$	80,80	80,80	0,067
$M_7 [kNm]$	67,54	67,54	0,08
$M_8 [kNm]$	54,17	54,17	0,06
$M_9 [kNm]$	40,73	40,73	0,05
$M_{10} [kNm]$	27,20	27,19	0,03
$M_{11} [kNm]$	13,62	13,62	0,01

Uspoređujući rezultate pojedinih metoda uočava se da se povećavanjem broja segmenata dolazi do točnijeg rješenja. Razlike rješenja za podjelu štapa na šest i dvanaest segmenata su jako male, dok se za podjelu štapa na tri isječka dolazi do većih odstupanja kod proračuna pomaka. Stoga za preciznija rješenja potrebno koristiti najmanje šest segmenata.

7. ZAKLJUČAK

Na primjeru štapnih elemenata koji imaju kontinuirano promjenjiv moment tromosti odnosno poprečni presijek, prikazao se proračun kritičnog opterećenja, statičke i deformacijske veličine prema teoriji drugog reda. Za analizu korištene su dvije metode proračuna: diferencijski postupak i metoda prijenosnih matrica.

Proračun za štap promjenjive krutosti koji je na jednom kraju upet a na drugom slobodno oslonjen proveden je na način da se štap podijelio na manje segmente, prvo na tri segmenta potom na šest zatim na dvanaest segmenata. Za veći broj segmenata od šest ispisivanje matematičkih jednažbi postaje složenije jer je za svaki segment potrebno definirati njegove integro-diferencijalne jednažbe za primjenu diferencijalnog postupka, odnosno matrične jednažbe za metodu prijenosnih matrica. Stoga je nužno korištenje programa.

U radu je korišten programski jezik Python odabran zbog velikog broja već postojećih modula za numeričko integriranje i diferenciranje te matrične operacije.

Uspoređujući dobivene rezultate korištenjem navedenih metoda, obje metode proračuna pokazale su se pouzdane. Povećanjem broja segmenata štapa dolazi do točnijih vrijednosti kritičnog opterećenja, statičkih i deformacijskih veličina prema teoriji drugog reda.

8. LITERATURA

- [1] Čaušević, M.; Bulić, M. *Stabilnost konstrukcija*, Golden marketing-Tehnička knjiga, Zagreb, 2013.
- [2] Salatić, R.; Ćorić, B.; Živanović, S. *Stabilnost i dinamika konstrukcija*, Građevinska knjiga, Beograd, 2001.
- [3] Đurić, M. *Stabilnost i dinamika konstrukcija*, Zavod za grafičku tehniku, Beograd, 1980.