



**Manuel Augusto
Tomás Gomes**

**Condições necessárias e suficientes de otimalidade para
funcionais dependendo de derivadas fracionárias de
ordem variável**



**Manuel Augusto
Tomás Gomes**

**Condições necessárias e suficientes de otimalidade
para funcionais dependendo de derivadas
fracionárias de ordem variável**

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para o cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática e Aplicações, Programa de Mestrado em Matemática e Aplicações 2017-2019, realizada sob a orientação científica do Prof. Doutor Ricardo Miguel Moreira de Almeida, Professor Auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro.

o júri

Presidente

Prof. Doutor Eugénio Alexandre Miguel Rocha
Professor Auxiliar da Universidade do Aveiro

Prof. Doutor Nuno Rafael de Oliveira Bastos
Professor Adjunto do Instituto Politécnico de Viseu

Prof. Doutor Ricardo Miguel Moreira de Almeida
Professor Auxiliar da Universidade do Aveiro (orientador)

dedicatória

Dedico este trabalho à minha amada companheira e aos meus filhos, pelo amor e carinho que me proporcionaram durante a formação. Com vocês pecebi que a família é o bem mais precioso que o homem pode ter, pois a experiência de vida ao vosso lado, em comunhão com Deus, foram a minha maior força e motivação nos momentos de angústia durante a realização deste Mestrado.

agradecimentos

Em primeiro lugar quero agradecer a JEOVÁ pelo fôlego de vida, por iluminar o meu caminho e por permitir que este sonho fosse realizado. Ao longo da realização deste Mestrado, foram várias as pessoas que, de diversas formas, incentivaram-me e apoiaram-me de modo a poder concretizá-lo. Deste modo, gostaria de expressar os meus agradecimentos ao meu orientador, Professor Doutor Ricardo Almeida pela sugestão do tema, pela paciência, pelo grande apoio, pela partilha de saber, pela sabedoria na orientação e realização deste trabalho, pelo constante incentivo e carinho. Agradeço ainda à minha mulher Victória Marilda e aos meus filhos Emanuel e Nadianeth, pelo imenso amor que têm demonstrado, pelo suporte emocional e pela força que sempre me transmitiram, mesmo distantes.

Aos meus pais, em especial à minha mãe, que com amor dedicou a sua vida em função da felicidade dos seus filhos; à minha segunda mãe Ana Maria (Mana), uma das responsáveis por esta realização; à tia Caetana Giovetty; a todos os meus irmãos, especialmente ao Edson Mauro, Fefa, Julinho, Avozinho e Sousa. Ao diretor do curso, professor Agostinho Agra, pelo apoio incondicional e pela forma sábia em dar solução a determinados problemas que surgiram ao longo do Mestrado; aos professores Pedro Macedo e Natália Martins, pelos ensinamentos; aos colegas D. Ilombo, C. Tendai, J. Camisola, Ana Martins e A. Vieira; ao primo Kaly, aos professores Manuel Osório e Rogério Barroso; a todos os meus amigos, em especial ao Brito Vieira, Domingos João, Isaac Campos, Euclides, Mateus, Arsénio, Maura, Cárlina, Lúcia, Casimiro, Zinga, Romão, Vunda, Damásio, Lourenço, Vasco, Aguinaldo, Zeferino, Gomes, Kidiaca, Tanilson, Carlos, Canzenze, Narciso, Noeldina, Venâncio e a todos aqueles que de alguma forma, contribuíram para mais esta conquista, gostaria de expresser o meu sincero agradecimento.

Gostaria de agradecer à direção da Escola Superior Politécnica de Malanje por acreditar em mim neste projeto, especialmente aos professores Infeliz Coxe e Tomásia João, sem esquecer o coletivo de funcionários; à direção da Sociedade Educacional Victorino 1º Lda.; ao VAB Colégio, na pessoa do senhor Luindula Bendo. Um especial agradecimento ao INAGBE pelo apoio financeiro que me concedeu através da bolsa de Mestrado com a referência 259/2017.

palavras-chave

Cálculo das Variações, Cálculo Fracionário, Equações de Euler-Lagrange, Condições de transversalidade, Problema isoperimétrico.

resumo

O cálculo de ordem não inteira, mais conhecido por Cálculo Fracionário, consiste numa generalização do Cálculo Diferencial e Integral de ordem inteira. Na presente Dissertação dedicamo-nos ao estudo do Cálculo das Variações com operadores fracionários de ordem variável, envolvendo as derivadas de Caputo de ordem variável. Apresentamos a condição necessária de otimalidade de Euler–Lagrange para o problema fundamental, as condições de transversalidade, as condições suficientes de otimalidade, o problema isoperimétrico fracionário e o problema variacional fracionário com restrições holonómicas.

Keywords

Calculus of Variations, Fractional Calculus, Euler-Lagrange Equations, Conditions of transversality Isoperimetric problem.

Abstract

The calculus of non-integer order consists of a generalization of Integral and Differential integer order Calculus. In this Dissertation we dedicate ourselves to the study of Calculus of Variations problems with fractional operators, involving Caputo derivatives of variable order. We present the necessary conditions of optimality of Euler – Lagrange for the fundamental problem, the conditions of transversality, the sufficient conditions of optimality, the isoperimetric problem and the fractional variational problem with holonomic constraints.

Conteúdo

Introdução	1
1 Cálculo das Variações	3
1.1 Contexto histórico	4
1.2 Definições Básicas	5
1.2.1 Lema Fundamental do Cálculo das Variações	7
1.3 Condição Necessária de Optimalidade	8
1.3.1 Equação de Euler-Lagrange	8
1.3.2 Alguns casos especiais	12
1.4 Algumas Generalizações	15
1.4.1 Funcionais envolvendo derivadas de ordem superior	15
1.4.2 Funcionais com mais de uma variável dependente	18
1.4.3 Condições de transversalidade	23
1.4.4 Problema Isoperimétrico	27
1.4.5 Condição suficiente de optimização	31
2 Cálculo Fracionário	34
2.1 Funções especiais	36
2.1.1 Função Gama	36
2.1.2 Função Beta	37
2.1.3 Função de Mittag -Leffler	38
2.2 O Integral Fracionário e a Derivada Fracionária de Riemann-Liouville	39

2.2.1	O Integral Fracionário de Riemann-Liouville	39
2.2.2	A Derivada Fracionária de Riemann-Liouville	40
2.3	Derivada Fracionária de Caputo	41
2.3.1	Relação entre integrais e derivadas	48
2.4	Operadores de ordem variável	52
2.4.1	Integral Fracionário de ordem variável de Riemann-Liouville	53
2.4.2	Derivada Fracionária de ordem variável de Riemann-Liouville	53
2.4.3	Derivada Fracionária de ordem variável segundo Caputo	53
2.4.4	Integração fracionária generalizada por partes	54
3	Cálculo das Variações Fracionário	55
3.1	O Problema Variacional Fracionário	55
3.1.1	Condição Necessária de Otimalidade	56
3.2	O Problema Isoperimétrico Fracionário	59
3.3	Problema Variacional Fracionário com Restrições Holonómicas	62
3.4	Condições Suficientes de Otimalidade	65
	Considerações finais	71
Bibliografia		73

Introdução

Desde os tempos mais remotos que a Matemática tem acompanhado o homem e tem-no ajudado a dar passos largos no âmbito das descobertas científicas e no âmbito social. A Matemática tem sido uma ferramenta fundamental para a resolução dos problemas do quotidiano. O Homem tem utilizado conceitos matemáticos como ferramenta para solucionar determinados problemas de ordem prática. Atualmente, com os avanços científicos e tecnológicos e a concepção de novas áreas do conhecimento, a Matemática torna-se ainda mais necessária à vida do Homem.

Um dos grandes problemas que o mundo moderno tem estado a enfrentar está relacionado com o fato de o Homem criar mecanismos para melhor planejar, de modo a maximizar as suas receitas e minimizar os seus custos. Certamente que os problemas que se referem a valores de máximos e mínimos são bem mais atrativos do que outros problemas matemáticos de dificuldades comparáveis. Isso ocorre devido a uma razão muito simples, estes problemas refletem vários problemas do quotidiano do Homem. Em diferentes situações queremos comprar um objeto com o menor preço possível, realizar o máximo trabalho num determinado tempo, alcançar um objetivo realizando o menor esforço possível. Portanto, um problema desta natureza em Matemática, traduz-se num problema de otimização.

Resolver um problema de otimização significa, como o próprio nome diz, buscar o melhor resultado, de acordo com algum critério pré-estabelecido. Na Matemática, os problemas de otimização são representados por problemas de máximos e mínimos sendo frequentes os termos: lucro máximo, custo mínimo, tempo mínimo e caminho mais curto [19]. Uma área da Matemática que é muito útil na solução de problemas de optimização é o Cálculo das Variações.

O Cálculo das Variações é um ramos da Análise Matemática cujo objetivo é encontrar maximizantes ou minimizantes de um funcional determinado.

Por outro lado, o Cálculo Fracionário é considerado como um ramo da Análise Matemática que lida com a investigação e aplicações de integrais e derivadas de ordem arbitrária, quer seja real ou complexa.

Nos últimos anos, o Cálculo Fracionário tem atraído a atenção de muitos matemáticos e outros pesquisadores, em diferentes áreas, como a Física, Química e Engenharia.

Como é bem conhecido, vários fenómenos físicos são frequentemente melhor descritos a partir de derivadas de ordem fracionária [14]. De facto, inúmeras aplicações foram encontradas em diversas áreas na ciência, economia, engenharia, etc. Para citar algumas, mencionamos algumas aplicações na Teoria do Controlo [28],[33], circuitos elétricos [25], condução de calor [13], equações de difusão [20],[21], e propagação de ondas sonoras [11].

Isso deve-se principalmente pelo facto de que às vezes o Cálculo de ordem inteira não descreve completamente a realidade. Portanto, as derivadas de ordem fracionária podem ser mais adequadas [15].

Existe uma estreita relação entre o Cálculo das Variações e o Cálculo Fracionário. Esta relação surge a partir do momento em que Niels Heinrik Abel aplicou o Cálculo Fracionário para a resolução de equações integrais que surgiram na formulação do problema de tautócrona. A partir do século XX as duas áreas juntaram-se numa única área de pesquisa tendo-se designado por Cálculo das Variações Fracionário [24], cujo objetivo é encontrar os extremantes (minimizante ou maximizante) do funcional, cujo Lagrangiano contém integrais e derivadas de ordem arbitrária.

Na presente dissertação pretendemos fazer uma abordagem sobre o estudo do Cálculo das Variações Fracionário, envolvendo o operador fracionário de Caputo de ordem variável. Ou seja, o Lagrangiano depende da variável independente x , que habitualmente se designa por tempo, uma função arbitrária y e a derivada fracionária de Caputo de ordem variável ${}^cD_{a+}^{\alpha(x)}y$.

Esta dissertação está essencialmente dividida em três capítulos. No primeiro capítulo, apresentamos o Cálculo Clássico da Variações, onde provamos o Lema Fundamental do Cálculo das Variações, a condição necessária de otimalidade Euler-Lagrange e algumas generalizações da Equação de Euler-Lagrange, onde foi possível apresentarmos as condições de transversalidade e os problemas isoperimétricos. Apresentamos ainda uma condição suficiente de otimalidade.

No segundo capítulo abordamos o Cálculo Fracionário, onde destacamos algumas funções especiais relacionadas com o cálculo de ordem arbitrária, bem como as suas propriedades. Apresentamos as definições das derivadas fracionárias de Riemann-Liouville e de Caputo de ordem constante e de ordem variável, bem como as suas principais propriedades. Fizemos também a apresentação de alguns resultados da relação entre derivadas e integrais fracionários, as semelhanças e diferenças entre as definições de derivadas propostas por Riemann-Liouville e por Caputo. Apresentamos ainda a fórmula de integração por partes de um integral fracionário, fórmula esta que terá grande utilidade na dedução da Equação Fracionária de Euler-Lagrange.

O terceiro capítulo destina-se à união do Cálculo das Variações e do Cálculo Fracionário, onde, através do mesmo, apresentamos o problema fundamental do Cálculo das Variações Fracionário, as condições necessárias e suficientes de otimalidade de Euler-Lagrange, o problema isoperimétrico fracionário e o problema variacional fracionário com restrições holonómicas. As considerações finais encerram esta dissertação.

Capítulo 1

Cálculo das Variações

O Cálculo das Variações é uma área da Matemática que consiste em determinar os máximos e mínimos, ou, mais geral, os extremos relativos de funções contínuas definidas sobre algum espaço de funções. Constitui uma generalização do cálculo elementar de máximos e mínimos de funções reais de uma variável. Ao contrário deste, o Cálculo das Variações lida com funcionais, enquanto o cálculo ordinário trata de funções de variável real.

Funcionais podem, por exemplo, ser formados por integrais envolvendo uma função incógnita e suas derivadas. O seu real interesse está em funções extremas, ou seja, aquelas que fazem o funcional atingir um valor máximo ou mínimo [6].

Talvez o exemplo mais simples seja o de encontrar a curva com o menor comprimento possível unindo dois pontos. Se não houver restrições, a solução é, obviamente uma reta unindo estes pontos. No entanto, se as possibilidades para esta curva estiverem restritas a uma determinada superfície no espaço, então a solução é menos óbvia e, possivelmente, muitas soluções podem existir. Tais soluções são conhecidas como geodésicas. Este problema consiste em encontrar a linha de menor comprimento entre dois pontos da terra [7].

O problema fundamental do Cálculo das Variações consiste em determinar os extremos entre todas as funções diferenciáveis $y : [x_0, x_1] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $y(x_0) = A$ e $y(x_1) = B$, onde A, B são números reais fixos [16]. O foco principal é encontrar uma função $y = f(x)$ que minimiza ou maximiza o funcional do tipo

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y') dx,$$

ou seja, determinar os pontos críticos (máximos ou mínimos ou, mais geralmente, pontos estacionários) de funcionais. Estes pontos são na verdade funções que satisfazem a equação diferencial do

tipo

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0,$$

conhecida como Equação de Euler-Lagrange, a qual apresentaremos ao longo do trabalho.

1.1 Contexto histórico

Sem sombra de dúvidas, a Matemática está cada vez mais presente no nosso dia-a-dia. Situações que já foram referenciadas anteriormente neste trabalho, como: obter lucro máximo, realizar um determinado trajeto no menor tempo possível, minimizar o custo de fabricação de um determinado produto são alguns, dentre muitos, problemas que ilustram os desafios do Homem. Tais problemas, conhecidos como problemas de otimização, têm interessado a matemáticos ao longo de toda a história, e muitos deles foram resolvidos por métodos engenhosos.

Os gregos antigos sabiam que, de todas as curvas com um dado perímetro, a que delimita maior área é o círculo. Os precursores do Cálculo das Variações foram os irmãos Jakob Bernoulli (1654-1705) e Johann Bernoulli (1667-1748). Em 1696, Johann Bernoulli propôs no jornal científico *Acta Eruditorium* o problema da Braquistócrona, já estudado anteriormente por Sir Isaac Newton, em 1686 [37].

Tal problema consiste em determinar, de entre todas as curvas possíveis que unem dois pontos num plano vertical, aquela para a qual uma partícula deslizando (sem atrito) ao longo da curva, sob a ação da gravidade, fará o percurso do ponto mais alto ao mais baixo em tempo mínimo. Ambos os irmãos resolveram o problema e suas soluções, embora distintas, foram publicadas em 1696 [6].

A solução apresentada por Johann Bernoulli baseou-se na analogia com o problema em determinar o caminho percorrido por um raio de luz num meio com índice de refração variável, método este de difícil aplicação a outros problemas. Já o método utilizado por Jakob Bernoulli na resolução do problema da Braquistócrona, possibilitou a resolução de uma série de problemas, inclusive a de um problema isoperimétrico, em que o perímetro é mantido fixo, proposto como réplica ao problema de seu irmão [38].

Motivado pelo trabalho dos irmãos Bernoulli, Leonhard Euler (1701-1783), discípulo de Johann Bernoulli, começou a estudar e aprimorar o método utilizado por Jakob Bernoulli e, em 1744, publicou a obra *A method for discovering curved lines having a maximum or minimum property or the solution of the isoperimetric problem taken in its widest sense*, cujo principal resultado foi a

equação diferencial

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0$$

denominada equação de Euler [7].

Joseph Louis Lagrange (1736-1813) é o mais notável matemático do século XVIII, sendo somente Euler (1701-1783) um sério rival. A primeira e talvez maior contribuição de Lagrange para a Matemática foi em Cálculo das Variações [30]. Esse era um ramo novo da Matemática, cujo nome se originou das notações usadas por Lagrange aproximadamente a partir de 1760.

Em 1755 Lagrange escreveu a Euler sobre os métodos gerais que tinha desenvolvido para tratar de problemas isoperimétricos, e Euler generosamente retardou a publicação de um trabalho seu sobre tema semelhante, a fim de que o autor mais jovem recebesse todo o crédito pelos novos métodos que Euler considerava superiores.

E foi em 1760 que Lagrange aprofundou o estudo desenvolvido por Euler com outros métodos importantes na construção da equação, e por este motivo ela é conhecida por equação de Euler-Lagrange, que é uma das condições necessárias de otimalidade.

Carl Gustav Jacobi (1804-1851) também contribuiu para essa área e David Hilbert (1862-1943) estudou Cálculo de Variações de 1900 a 1905 [30].

Outros problemas específicos foram resolvidos e uma teoria geral desenvolvida ao longo dos anos. As primeiras aplicações de Cálculo das Variações em Economia surgiram no final de 1920 e início de 1930 por Roos, Evans, Hotelling e Ramsey, com outras aplicações publicadas mais tarde. Uma nova era começou no início de 1960 com grupos de economistas e cientistas interessados em certos problemas dinâmicos [7].

A Teoria do Controlo Ótimo, desenvolvida na Rússia por Pontryagin e seus colaboradores no final de 1950 e publicada em língua inglesa em 1962, é uma generalização do Cálculo de Variações, que amplia a aplicabilidade matemática [12].

O objetivo deste capítulo é o estudo introdutório sobre o Cálculo das Variações como requisitos à discussão dos próximos capítulos.

1.2 Definições Básicas

Nesta secção vamos apresentar algumas definições básicas e resultados importantes do Cálculo das Variações que serão utilizados ao longo do trabalho.

Definição 1.2.1. Consideremos um espaço vectorial \mathbb{L} e $y \in \mathbb{L}$ um vector. Uma norma de y em \mathbb{L}

é uma aplicação, denotada por $\|y\|$, que satisfaz as seguintes propriedades:

1. $\|y\| \geq 0$, para todo $y \in \mathbb{L}$ e $\|y\| = 0$ se e somente se $y = 0$;
2. $\|\alpha y\| = |\alpha| \|y\|$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{L}$;
3. $\|y + z\| \leq \|y\| + \|z\|$, para todo $y, z \in \mathbb{L}$.

Definição 1.2.2. Denomina-se por espaço vetorial normado a um par $(\mathbb{L}, \|\cdot\|)$ onde \mathbb{L} é um espaço vetorial e $\|\cdot\|$ é uma norma em \mathbb{L} . A $\|y\|$ diz-se norma de y .

Definição 1.2.3. Um funcional J é uma regra de correspondência que associa a cada função y numa certa classe \mathbb{L} , um único número real. O conjunto \mathbb{L} é chamado domínio do funcional e o conjunto de números reais associados com as funções em \mathbb{L} é chamado de conjunto imagem do funcional.

O domínio de um funcional é uma classe de funções. Intuitivamente, pode-se dizer que um funcional é uma função de funções [12].

Definição 1.2.4. Se y e $y + \epsilon\eta$ são funções para os quais o funcional J está definido, então o incremento de J , denotado por ΔJ , é dado por

$$\Delta J = J[y + \epsilon\eta] - J[y]$$

onde $\epsilon\eta$ é chamado de variação da função y . Aqui, $y, \eta \in \mathbb{L}$ e $\epsilon \in \mathbb{R}$.

O incremento ΔJ também pode ser denotado por $J[y, \epsilon\eta]$ para enfatizar que depende das funções de y e $\epsilon\eta$.

O problema fundamental do Cálculo das Variações é encontrar os candidatos a minimizantes ou maximizantes de funcionais. Ou seja, é determinar a função, ou as funções, que extremizam o funcional considerado. Consideremos o seguinte funcional:

$$J[y] = \int_a^b f(x, y, y') dx \tag{1.1}$$

Definição 1.2.5. Um funcional J , com domínio \mathbb{L} , tem um minimizante local (respetivamente maximizante local) em \bar{y} se existe um $\epsilon > 0$ tal que, para todas as funções $y \in \mathbb{L}$ que satisfazem $\|\bar{y} - y\| < \epsilon$, implica $J[\bar{y}] \leq J[y]$ (respetivamente $J[\bar{y}] \geq J[y]$).

O nosso objetivo é determinar um candidato a minimizante ou a maximizante local do funcional. Para tal, devemos encontrar uma condição necessária para que uma dada função que extremize o

funcional (1.1) deve satisfazer. Essa condição, é conhecida como Equação de Euler-Lagrange, que é uma condição necessária do problema onde $y \in C^2[a, b]$ satisfaz as seguintes condições de fronteira.

$$y(a) = y_1 \quad e \quad y(b) = y_2 \quad (1.2)$$

onde y_1, y_2 são números reais fixos.

1.2.1 Lema Fundamental do Cálculo das Variações

O lema a seguir apresentado é importante para o desenvolvimento da teoria do Cálculo das Variações.

Lema 1.2.1. (Lema fundamental do Cálculo das Variações). Se f é uma função contínua em $[a, b]$ e

$$\int_a^b f(x)\eta(x)dx = 0, \quad (1.3)$$

para toda a função $\eta \in C^2([a, b], \mathbb{R})$, tal que $\eta(a) = \eta(b) = 0$, então $f(x) = 0, \forall x \in [a, b]$.

Demonstração. A demonstração deste lema baseia-se na contraposição. Suponhamos por absurdo que existe algum $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) \neq 0$. Podemos supor, sem perda de generalidade que $f(x_0) > 0$. Pela continuidade de f , existe necessariamente alguma vizinhança de x_0 , $]x_1, x_2[$, na qual $f(x) > 0$ para qualquer $x \in]x_1, x_2[$.

Mas então (1.3) não é válido para toda a função η . Por exemplo, consideremos a função $\eta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in [a, x_1] \\ (x - x_1)(x_2 - x), & \text{se } x \in]x_1, x_2[\\ 0, & \text{se } x \in [x_2, b] \end{cases}$$

Podemos verificar que a função η é contínua em $[a, b]$ e verifica-se que $\eta(a) = \eta(b) = 0$, conforme ilustra a Figura 1. Assim, substituindo em (1.3), temos:

$$\int_a^b f(x)\eta(x)dx = \int_a^{x_1} f(x) \cdot 0 dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) \cdot (x - x_1)(x_2 - x) dx + \int_{x_2}^b f(x) \cdot 0 dx > 0,$$

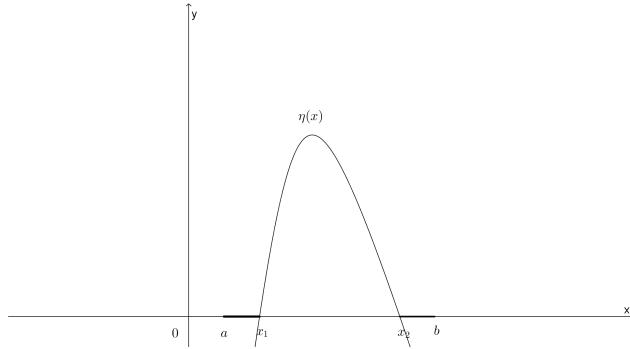


Figura 1.1: Gráfico da função $\eta(x)$, contínua e duas vezes diferenciável

uma vez que f é positiva em $]x_1, x_2[$, o que contradiz a hipótese do funcional (1.3) ser nulo. Portanto, o lema fica provado. \square

1.3 Condição Necessária de Optimalidade

Até agora estudamos alguns conceitos preliminares necessários para compreendermos o tema em estudo. Neste capítulo veremos uma condição necessária para a ocorrência de extremos de funcionais. Ela é conhecida como Equação de Euler-Lagrange. Existem outras condições necessárias de optimalidade, mas para o presente trabalho, abordaremos apenas Equação de Euler-Lagrange e daremos exemplos de como trabalhar com esta condição.

Antes de enunciarmos e demonstrarmos a condição necessária, apresentaremos algumas definições que serão utilizadas durante o trabalho.

Definição 1.3.1. Uma função $y \in C^2[a, b]$ diz-se admissível para o problema (1.1), se esta satisfaz as condições de fronteira (1.2).

Definição 1.3.2. Uma função $\eta \in C^2[a, b]$ diz-se que é uma variação admissível para (1.1)-(1.2) se $\eta(a) = \eta(b) = 0$.

1.3.1 Equação de Euler-Lagrange

Nesta parte iremos obter um resultado extremamente importante do Cálculo das Variações, que é a Equação de Euler-Lagrange. Ela constitui uma condição necessária de optimalidade para um problema do tipo (1.1).

Teorema 1.3.1. Se uma função $y \in C^2[a, b]$, tal que $y(a) = y_1$ e $y(b) = y_2$ é minimizante local (ou maximizante local) para o funcional

$$J[y] = \int_a^b f(x, y, y') dx, \quad (1.4)$$

então y satisfaz a equação

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0. \quad (1.5)$$

Demonastração. Consideremos uma curva denotada por \bar{y} e definida por

$$\bar{y} = y + \epsilon \eta \quad (1.6)$$

onde $\epsilon \in \mathbb{R}$, $|\epsilon| \leq 1$ e $\eta \in C^2[a, b]$ uma função que se anula nos extremos, ou seja, $\eta(a) = \eta(b) = 0$. Seja $\phi(\epsilon) = J[\bar{y}]$. Substituindo y por \bar{y} em (1.4) temos

$$J[\bar{y}] = \int_a^b f(x, \bar{y}, \bar{y}') dx = \phi(\epsilon).$$

Por hipótese, quando $\epsilon = 0$, temos $\bar{y} = y$. Como $\phi'(0) = 0$, resulta que

$$\int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial y} \cdot \eta + \frac{\partial f}{\partial y'} \cdot \eta' \right) dx = 0. \quad (1.7)$$

Usando a técnica da integração por partes no segundo termo de (1.7) e considerando

$$u = \frac{\partial f}{\partial y'} \Rightarrow du = \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right)$$

$$dv = \eta' \Rightarrow v = \eta,$$

temos

$$\int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \cdot \eta' \right) dx = \left[\frac{\partial f}{\partial y'} \cdot \eta \right]_a^b - \left(\int_a^b \eta \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx \right) \quad (1.8)$$

Uma vez que $\eta(a) = \eta(b) = 0$, de (1.7) e (1.8) obtém-se

$$\int_a^b \eta \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] dx = 0. \quad (1.9)$$

Pela arbitrariedade de η , sendo que η é nula nas extremidades e pelo Lema fundamental do Cálculo

das Variações, conclui-se que

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0. \quad (1.10)$$

□

Esta equação é conhecida como Equação de Euler-Lagrange e é geralmente uma equação diferencial de segunda ordem. Sua solução, para qualquer problema do tipo que apresentaremos ao longo deste trabalho, dá-nos uma função candidata a mínimo (ou máximo) para o integral do problema. Ou seja, é uma condição necessária para que y seja minimizante (ou maximizante) do funcional (1.4).

Exemplo 1.3.1. Consideremos o funcional

$$J[y] = \int_0^1 25x + 8y + y'^2 dx \quad (1.11)$$

com

$$y(0) = 0 \quad \text{e} \quad y(1) = 1, \quad \text{onde} \quad y \in C^2[0, 1]. \quad (1.12)$$

Vamos determinar as funções y candidatas a extremantes de (1.11), e para o efeito, vamos aplicar a Equação de Euler-Lagrange que é uma condição necessária

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0, \quad \forall x \in [0, 1].$$

Uma vez que

$$f(x, y, y') = 25x + 8y + y'^2,$$

então

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 8; \quad \frac{\partial f}{\partial y'} = 2y'; \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 2y''.$$

Logo,

$$8 - 2y'' = 0 \Rightarrow 2y'' = 8.$$

Por cálculos diretos, temos que

$$\int 4dx = 4x + C_1$$

e

$$\int (4x + C_1)dx = 2x^2 + C_1x + C_2.$$

Logo,

$$y = 2x^2 + C_1x + C_2 \quad \text{para } C_i \in \mathbb{R}, \quad \text{com } i = 1, 2.$$

Pelas condições de fronteira, temos:

$$\begin{aligned} y(0) &\Rightarrow C_2 = 0 \\ y(1) &\Rightarrow C_1 = -1. \end{aligned}$$

Portanto, a função $\bar{y} = 2x^2 - x$, $x \in [0, 1]$ é candidata a extremante do funcional (1.11)-(1.12).

Exemplo 1.3.2. Consideremos o funcional

$$J[y] = \int_0^1 (y'^2 - 3xy) dx \quad (1.13)$$

com as condições inicial $y(0) = 0$ e final $y(1) = 1$.

Vamos determinar uma função y candidata a extremante do funcional J . Neste caso,

$$f(x, y, y') = y'^2 - 3xy.$$

Assim, pela Equação de Euler-Lagrange, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} (y'^2 - 3xy) - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial}{\partial y'} (y'^2 - 3xy) \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow -3x - \frac{d}{dx} (2y') &= 0 \Leftrightarrow 2y'' + 3x = 0 \end{aligned}$$

Então,

$$y'' = \frac{-3x}{2}.$$

Uma vez que

$$\int \frac{-3x}{2} dx = \frac{-3x^2}{4} + C_1$$

e

$$\int \left(\frac{-3x^2}{4} + C_1 \right) dx = \frac{-x^3}{4} + C_1 x + C_2$$

resulta que

$$y = \frac{-x^3}{4} + C_1 x + C_2.$$

Usando as condições de fronteira, vamos determinar as constantes C_1 e C_2 . Temos:

$$\begin{cases} C_2 = 0 \\ C_1 = \frac{5}{4} \end{cases}$$

Logo, a função

$$\bar{y} = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{5}{4}x$$

é candidata a extremante do funcional (1.13).

1.3.2 Alguns casos especiais

A Equação de Euler-Lagrange é uma equação diferencial não-linear de segunda ordem, e tais equações são geralmente difíceis de simplificar e muito menos de resolver. Ou seja, em muitos casos, não é possível resolvê-la de maneira exata. Mas, contudo, existem certos casos em que esta equação diferencial pode ser simplificada. Nesta secção, iremos apresentar dois desses casos.

Se f é independente da variável y

Suponhamos que f é independente da variável y , isto é, $f = f(x, y')$. Então, consideremos o funcional dado na forma

$$J[y] = \int_a^b f(x, y') dx \quad (1.14)$$

onde a variável y não aparece na função integranda. Evidentemente, a Equação de Euler-Lagrange (1.10) reduz-se a

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0 \quad \text{ou seja,} \quad \frac{\partial f}{\partial y'} = C_1 \quad (1.15)$$

onde C_1 é uma constante arbitrária.

Neste caso, para encontrar uma função candidata a extremante, a Equação de Euler-Lagrange é reduzida à resolução de uma equação diferencial de primeira ordem envolvendo somente y' e x .

Exemplo 1.3.3. Determinemos uma função candidata a extremante do funcional

$$J[y] = \int_a^b (xy' + y'^2) dx \quad (1.16)$$

Como f depende somente de x e de y' , a equação (1.10) reduz-se à expressão

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial y'} = C. \quad (1.17)$$

Seja

$$f = xy' + y'^2,$$

logo, temos que

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = x + 2y'.$$

Assim, de (1.17) vem

$$y' = C - \frac{x}{2}.$$

Integrando obtemos a expressão

$$y = C_1 x - \frac{x^2}{4} + C_2$$

onde C_1 e C_2 são constantes de integração que podem ser calculadas a partir das condições de valores inicial e final.

Exemplo 1.3.4. Determinemos as funções que, unindo os pontos $A = (1, 3)$ e $B = (2, 5)$ sejam candidatas a extremantes do funcional

$$J[y] = \int_1^2 (y'(1 + x^2 y')) dx \quad (1.18)$$

A Equação de Euler-Lagrange para este funcional fica

$$-\frac{d}{dx} (1 + 2x^2 y') = 0$$

e, portanto, de (1.15) temos que

$$1 + 2x^2 y' = C$$

o que integrando resulta em

$$y = \frac{C_1}{x} + C_2$$

com

$$C_1 = \frac{1 - C}{2}.$$

A fim de se escolher qual a hipérbole desta família que passa pelos pontos dados, obtemos o sistema

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 3 \\ \frac{C_1}{2} + C_2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = -4 \\ C_2 = 7 \end{cases}$$

Portanto,

$$\bar{y} = 7 - \frac{4}{x}$$

é a função procurada.

Se f é independente de x

Outra simplificação está disponível quando f não dependente explicitamente de x . Neste caso, $f = f(y, y')$, e a equação de Euler-Lagrange será dada por

$$f(y, y') - y' \frac{\partial f}{\partial y'} = C. \quad (1.19)$$

De fato, temos o resultado seguinte

Teorema 1.3.2. Seja J um funcional da forma

$$J[y] = \int_a^b f(y, y') dx. \quad (1.20)$$

Seja H a função

$$H(y, y') = y' \frac{\partial f}{\partial y'} - f. \quad (1.21)$$

Então, H é constante ao longo de qualquer extremante de J .

Demonstração. Suponhamos que y é um extremante do funcional (1.20). Logo, temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} H(y, y') &= \frac{d}{dx} \left(y' \frac{\partial f}{\partial y'} - f \right) \\ &= y'' \frac{\partial f}{\partial y'} + y' \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) - y' \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) - y'' \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \\ &= y' \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) - \frac{\partial f}{\partial y} \right]. \end{aligned}$$

Uma vez que y é um extremante do funcional, a Equação de Euler-Lagrange (1.10) é satisfeita.

Assim,

$$\frac{d}{dx}H(y, y') = 0$$

e, consequentemente, H é constante ao longo de um extremante. \square

1.4 Algumas Generalizações

1.4.1 Funcionais envolvendo derivadas de ordem superior

O mesmo raciocínio usado para determinar a Equação de Euler-Lagrange na Secção 1.3 pode ser estendido para funcionais envolvendo derivadas de ordem superior.

No que se segue, f é uma função derivável.

Teorema 1.4.1. Se uma função $y \in C^{2n}[a, b]$, tal que

$$y(a) = y_1, y'(a) = y'_1, \dots, y^{(n-1)}(a) = y_1^{(n-1)} \quad \text{e} \quad y(b) = y_2, y'(b) = y'_2, \dots, y^{(n-1)}(b) = y_2^{(n-1)}$$

são fixos e se y é extremante para o funcional

$$J[y] = \int_a^b f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) dx, \quad (1.22)$$

então y satisfaz a equação

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} \left(\frac{\partial f}{\partial y^{(k)}} \right) = 0. \quad (1.23)$$

Demonstração. Para simplificar a prova, iremos considerar em primeiro lugar o caso $n = 2$.

Consideremos o funcional dado por

$$J[y] = \int_a^b f(x, y, y', y'') dx, \quad (1.24)$$

com as condições de fronteira

$$y(a) = y_0; y'(a) = y'_0 \quad \text{e} \quad y(b) = y_1; y'(b) = y'_1. \quad (1.25)$$

Consideremos o conjunto \mathbb{S} definido por

$$\mathbb{S} = \{y \in C^4[a, b] : y(a) = y_0; y'(a) = y'_0; y(b) = y_1; y'(b) = y'_1\} \quad (1.26)$$

e o conjunto \mathbb{H} dado por

$$\mathbb{H} = \{\eta \in C^4[a, b] : \eta(a) = \eta'(a) = \eta(b) = \eta'(b) = 0\}. \quad (1.27)$$

Suponhamos que o funcional (1.24) tem um maximizante ou minimizante local em (1.26), ou seja, $y \in \mathbb{S}$. Consideremos uma função \bar{y} definida por $\bar{y} = y + \epsilon\eta$, onde ϵ é uma constante e $\eta \in \mathbb{H}$ é uma função arbitrária.

Fazendo $\phi(\epsilon) = J[\bar{y}]$ e substituindo \bar{y} por $y + \epsilon\eta$ em (1.24), obtém-se

$$J[\bar{y}] = \int_a^b f(x, y + \epsilon\eta, y' + \epsilon\eta', y'' + \epsilon\eta'') dx = \phi(\epsilon). \quad (1.28)$$

Novamente, a condição necessária para a ocorrência de um valor extremo deve ser satisfeita. Assim, derivando (1.28) em relação a ϵ e aplicando a regra da cadeia, obtém-se

$$\frac{dJ}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} = \int_a^b \left(\eta \frac{\partial f}{\partial y} + \eta' \frac{\partial f}{\partial y'} + \eta'' \frac{\partial f}{\partial y''} \right) dx = 0. \quad (1.29)$$

Integrando por partes, reduziremos o termo η' em η , e tendo em conta as condições de fronteira, obtemos

$$\begin{aligned} \int_a^b \left(\eta' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx &= \eta \frac{\partial f}{\partial y'} \Big|_a^b - \int_a^b \eta \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] dx \\ &= - \int_a^b \eta \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] dx. \end{aligned}$$

Integrando por partes duas vezes, reduziremos o termo η'' a um equivalente a η e, levando em consideração as condições de fronteira temos

$$\begin{aligned} \int_a^b \left(\eta'' \frac{\partial f}{\partial y''} \right) dx &= \eta' \frac{\partial f}{\partial y''} \Big|_a^b - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y''} \right) \eta \Big|_a^b + \int_a^b \eta \left[\frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial f}{\partial y''} \right) \right] dx \\ &= \int_a^b \eta \left(\frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial f}{\partial y''} \right) dx. \end{aligned}$$

A equação (1.29) fica

$$\int_a^b \eta \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial f}{\partial y''} \right) \right] dx = 0, \quad (1.30)$$

que deve ser válida para todo o $\eta \in \mathbb{H}$. Por suposição, para qualquer $y \in C^4[a, b]$

$$E(x) = \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial f}{\partial y''} \right) \right], \quad (1.31)$$

deve ser contínua no intervalo $[a, b]$. Pelo Lema 1.2.1, \bar{y} satisfaz a equação

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{y}} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial f}{\partial y''} \right) = 0. \quad (1.32)$$

Portanto, a equação (1.32) é a condição necessária para $y \in \mathbb{S}$ ser extremante do funcional (1.24). Podemos observar também que é uma a equação diferencial de quarta ordem, e é a Equação de Euler-Lagrange para o integrando da forma $f = f(x, y, y', y'')$. Porém, se o integrando for da forma $f = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})$, a equação será da forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial f}{\partial y''} \right) - \frac{d^3}{dx^3} \left(\frac{\partial f}{\partial y'''} \right) + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial y} + \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} \left(\frac{\partial f}{\partial y^{(k)}} \right) &= 0. \end{aligned}$$

□

Exemplo 1.4.1. Consideremos o funcional

$$J[y] = \int_0^1 (y''^2 - 240xy) dx \quad (1.33)$$

satisfazendo as condições

$$y(0) = 0; \quad y'(0) = \frac{1}{2}; \quad y(1) = 1; \quad y'(1) = \frac{1}{2}. \quad (1.34)$$

Determinemos as funções candidatas a extremantes do funcional J . Pela equação (1.32) vem que

$$y^{(4)} = 120x,$$

cuja solução geral é

$$y = x^5 + C_1x^3 + C_2x^2 + C_3x + C_4.$$

Determinando os valores das constantes a partir das condições iniciais, obtemos

$$\begin{cases} y(0) = 0 \Rightarrow C_4 = 0 \\ y'(0) = \frac{1}{2} \Rightarrow C_3 = \frac{1}{2} \\ y(1) = 1 \Rightarrow 1 + C_1 + C_2 + \frac{1}{2} = 1 \\ y'(1) = \frac{1}{2} \Rightarrow 5 + 3C_1 + 2C_2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Das últimas duas igualdades obtém-se

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = -\frac{1}{2} \\ 3C_1 + 2C_2 = -5 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos os valores das constantes

$$C_4 = 0, \quad C_3 = \frac{1}{2}, \quad C_2 = \frac{7}{2}, \quad C_1 = -4.$$

Portanto,

$$\bar{y} = x^5 - 4x^3 + \frac{7}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$$

é a função candidata a extremante do funcional dado.

1.4.2 Funcionais com mais de uma variável dependente

Nesta secção vamos abordar sobre Equações de Euler-Lagrange para funcionais que dependem de várias variáveis dependentes e uma variável independente.

Este problema é várias vezes observado em Física. Por exemplo, na mecânica clássica, até mesmo o movimento de uma única partícula no espaço, requer três variáveis dependentes $(x(t), y(t), z(t))$ para descrever a posição da partícula no tempo t [6].

Vejamos o problema de se obter as condições necessárias para que um certo funcional seja estacionário, pode ser extendido para o caso de n funções $y_i = y_i(x)$, com $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Desta forma, o funcional que queremos encontrar os valores extremos é

$$J[q] = \int_a^b L(x, q_1, q_2, \dots, q_n, q'_1, q'_2, \dots, q'_n) dx \quad (1.35)$$

onde L tem segunda derivada contínua e $q = (q_1, \dots, q_n)$.

O problema consiste em determinar um extremante para o funcional (1.35). Considerando a

família das funções

$$q_i(x) + \epsilon\eta_i(x) \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (1.36)$$

onde

$$\eta_1(x), \eta_2(x), \eta_3(x), \dots, \eta_n(x)$$

são n funções contínuas com derivadas contínuas em $[a, b]$, escolhidas arbitrariamente e satisfazem as condições de valores iniciais e finais

$$\eta_i(a) = \eta_i(b) = 0.$$

Assim, o funcional (1.35) fica

$$\phi(\epsilon) = \int_a^b L(x, q_1 + \epsilon\eta_1, \dots, q_n + \epsilon\eta_n, q'_1 + \epsilon\eta'_1, \dots, q'_n + \epsilon\eta'_n) dx. \quad (1.37)$$

Deste modo, para $\epsilon = 0$, teremos $\phi'(0) = 0$. Como as funções η_i são arbitrárias, então podemos escolher

$$\eta_1 \neq 0 \text{ e } \eta_2 = \eta_3 = \eta_4 = \dots = \eta_n = 0,$$

com isso, o funcional (1.37) reduz-se a

$$\phi(\epsilon) = \int_a^b L(x, q_1 + \epsilon\eta_1, q_2, \dots, q_n, q'_1 + \epsilon\eta'_1, q_2, \dots, q'_n) dx. \quad (1.38)$$

e consequentemente

$$\phi'(0) = \int_a^b \left[\eta_1 \frac{\partial L}{\partial q_1} + \eta'_1 \frac{\partial L}{\partial q'_1} \right] dx = 0. \quad (1.39)$$

Integrando por partes o segundo termo de (1.39), vem

$$\int_a^b \left(\eta'_1 \frac{\partial L}{\partial q'_1} \right) dx = \eta_1 \frac{\partial L}{\partial q'_1} \Big|_a^b - \int_a^b \left[\eta_1 \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial q'_1} \right) \right] dx \quad (1.40)$$

e pelas condições de fronteira $\eta_1(a) = \eta_1(b) = 0$ temos

$$\int_a^b \left(\eta'_1 \frac{\partial L}{\partial q'_1} \right) dx = - \int_a^b \left[\eta_1 \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial q'_1} \right) \right] dx. \quad (1.41)$$

Logo, (1.39) fica

$$\phi'(0) = \int_a^b \left\{ \eta_1 \left[\frac{\partial L}{\partial q_1} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial q'_1} \right) \right] \right\} dx = 0. \quad (1.42)$$

Portanto, sabemos a partir da Secção 1.3 que esta circunstância conduz à Equação de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial q'_1} \right) = 0 \quad (1.43)$$

como condição necessária para um extremante. Assim, obtemos de modo análogo:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial q'_i} \right) = 0 \quad i = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (1.44)$$

Então as n funções q_i satisfazem este sistema de n equações diferenciais de segunda ordem. Em resumo, temos o seguinte resultado:

Teorema 1.4.2. Seja $J : C^2[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional da forma

$$J[q] = \int_a^b L(x, q, q') dx, \quad (1.45)$$

onde $q = (q_1, q_2, q_3, \dots, q_n)$ e L tem derivadas parciais contínuas com respeito a x, q_i e q'_i , com $i = 1, \dots, n$. Seja

$$\mathbb{S} = \{q \in C^2[a, b] : q(a) = \alpha \text{ e } q(b) = \beta\},$$

onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$ são vectores. Se q é um extremante para o funcional J em \mathbb{S} , então

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial q'_i} \right) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.46)$$

Observação 1.4.1. Se o funcional depende somente de duas funções $y = y(x)$ e $z = z(x)$, ou seja

$$J[y, z] = \int_a^b L(x, y, z, y', z') dx$$

então o sistema de equações de Euler-Lagrange será

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial y'} \right) = 0; \quad \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial z'} \right) = 0. \quad (1.47)$$

Exemplo 1.4.2. Vamos encontrar as funções candidatas a extremantes do seguinte funcional

$$J = [y, z] = \int_0^1 (y'^2 + z'^2 + 2y) dx. \quad (1.48)$$

com as condições iniciais e finais dadas por

$$y(0) = 1; \quad y(1) = \frac{3}{2}; \quad z(0) = 0 \quad z(1) = 1.$$

Existem duas variáveis dependentes neste problema, e assim os extremantes devem satisfazer as duas Equações de Euler-Lagrange:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial y'} \right) &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial z'} \right) &= 0 \end{aligned}$$

onde

$$L(y, y', z') = y'^2 + z'^2 + 2y.$$

Obtendo as derivadas parciais vem

$$2 - \frac{d}{dx}(2y') = 0$$

e

$$-\frac{d}{dx}(-2z') = 0.$$

Deste modo temos

$$\begin{aligned} y'' &= 1 \\ z'' &= 0. \end{aligned}$$

Obtemos deste modo as soluções

$$y(x) = \frac{x^2}{2} + C_1x + C_2$$

e

$$z(x) = C_3x + C_4.$$

Substituindo as condições de valor inicial, determinamos as constantes C_1, C_2, C_3 e C_4 . Então,

$$\begin{cases} y(0) = 1 \Rightarrow C_2 = 1 \\ y(1) = \frac{3}{2} \Rightarrow C_1 = 0 \\ z(0) = 0 \Rightarrow C_4 = 0 \\ z(1) = 1 \Rightarrow C_3 = 1 \end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}y(x) &= \frac{x^2}{2} + 1 \\z(x) &= x\end{aligned}$$

Exemplo 1.4.3. Vamos determinar os extremantes do funcional

$$J = [y, z] = \int_a^b (2yz - 2y^2 + y'^2 - z'^2) dx. \quad (1.49)$$

De modo análogo ao exemplo anterior, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial y'} \right) &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial z'} \right) &= 0\end{aligned}$$

onde

$$L(y, z, y', z') = 2yz - 2y^2 + y'^2 - z'^2.$$

Obtendo as derivadas parciais vem

$$\begin{aligned}2z - 4y - \frac{d}{dx}(2y') &= 0 \\ 2y - \frac{d}{dx}(-2z') &= 0.\end{aligned}$$

Deste modo temos

$$\begin{aligned}2y'' + 4y - 2z &= 0 \\ 2y + 2z'' &= 0.\end{aligned}$$

Dividindo ambas as equações por 2 e diferenciando duas vezes a primeira, combinada com a segunda equação obtemos

$$\begin{aligned}y^{(4)} + 2y'' - z'' &= 0 \\ y + z'' &= 0\end{aligned}$$

e consequentemente

$$y^{(4)} + 2y'' + y = 0.$$

Logo, estamos perante uma equação diferencial homogénea de quarta ordem, e as soluções serão

dadas pela equação característica

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0.$$

Como $\lambda = \pm i$, a solução é

$$y(x) = (C_1x + C_2)\cos(x) + (C_3x + C_4)\sin(x).$$

Neste caso, as constantes C_1, C_2, C_3 e C_4 são determinadas pelas condições de valor inicial e final.

Como

$$z = y'' + 2y,$$

então,

$$z(x) = C_1[x\cos(x) - 2\sin(x)] + C_2\cos(x) + C_3[2\cos(x) + x\sin(x)] + C_4\sin(x).$$

1.4.3 Condições de transversalidade

Em todos os problemas até agora envolvendo o funcional (1.1) e os análogos dele em dimensão superior, assume-se que os pontos de fronteira são dados. Nesta secção, iremos apresentar problemas em que pelo menos uma das condições não é especificada. Portanto, trata-se de supor que os problemas assumam uma fronteira não fixada.

A Equação de Euler-Lagrange (1.10) com fronteira fixa fornece uma solução geral contendo duas constantes arbitrárias, e para a determinação dessas tem-se as condições de fronteira

$$y(a) = y_1 \quad e \quad y(b) = y_2.$$

Já no problema de fronteira livre, podem não existir uma ou ambas as condições acima para a determinação das constantes.

Problema com fronteira inicial fixa e final livre

Consideremos o funcional,

$$J[y] = \int_a^b f(x, y, y') dx \tag{1.50}$$

onde $y(a) = y_1$ e $y(b)$ é livre.

Para tal, procuraremos determinar os seus extremantes na classe das funções reais diferenciáveis, definidas no intervalo $[a, b]$, com variações mais gerais do que as consideradas anteriormente.

Consideremos a variação $\Delta J[y, \eta]$ como a variação $y + \epsilon\eta$ do extremal y . As condições satisfazem apenas $\eta(a) = 0$, pois $\eta(b)$ é arbitrária.

Neste caso,

$$\eta \frac{\partial f}{\partial y'} \Big|_a^b + \int_a^b \left[\eta \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \eta \right) \right] dx = 0.$$

Como $\eta(a) = 0$ e $\eta(b)$ é arbitrário, então,

$$\int_a^b \eta \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] dx + \frac{\partial f}{\partial y'} (b, y(b), y'(b)) \eta(b) = 0. \quad (1.51)$$

Portanto, para qualquer $\eta \in C^2[a, b]$, satisfazendo $\eta(b) = 0$, a condição

$$\int_a^b \eta \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] dx = 0$$

é satisfeita e com isso, a Equação de Euler-Lagrange verifica-se. Substituindo

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0$$

em (1.51) vem

$$\frac{\partial f}{\partial y'} (b, y(b), y'(b)) \eta(b) = 0.$$

Pela arbitrariedade de $\eta(b)$ obtemos a **condição de transversalidade**.

$$\frac{\partial f}{\partial y'} (b, y(b), y'(b)) = 0. \quad (1.52)$$

A condição necessária para um problema com fronteira inicial fixa e final livre é expressa por

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0, & x \in [a, b] \\ \frac{\partial f}{\partial y'} (b, y(b), y'(b)) = 0. \end{cases}$$

Exemplo 1.4.4. Considere o funcional

$$J[y] = \int_0^1 (y'^2 + y^2 + 8) dx$$

com a condição de fronteira $y(0) = 1$ e $y(1)$ livre.

Sabendo que $f(x, y, y') = y'^2 + y^2 + 8$, então, obtendo as derivadas parciais vem

$$\frac{\partial}{\partial y} = 2y; \quad \frac{\partial}{\partial y'} = 2y'; \quad \frac{d}{dx}(2y') = 2y'',$$

e pela Equação de Euler-Lagrange temos

$$2y - 2y'' = 0 \Leftrightarrow y'' - y = 0. \quad (1.53)$$

Vamos determinar as raízes da equação característica associada a equação diferencial descrita em (1.53):

$$\lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1.$$

Portanto, a função candidata a extremante do funcional J é

$$\bar{y} = C_1 e^x + C_2 e^{-x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Recorremos então às condições de fronteira e de transversalidade para determinarmos as constantes C_1 e C_2 . Logo,

$$y(0) = 1 \Rightarrow C_1 e^0 + C_2 e^0 = 1 \Leftrightarrow C_1 + C_2 = 1$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial f y'}(1, y(1), y'(1)) = 0 \Rightarrow y'(1) = 0 \Rightarrow C_1 e - C_2 e^{-1} = 0.$$

Consequentemente,

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1 e - C_2 e^{-1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{e^{-1}}{e+e^{-1}} \\ C_2 = \frac{e}{e+e^{-1}} \end{cases}.$$

Portanto, a função

$$\bar{y} = \frac{e^{x-1} + e^{1-x}}{e + e^{-1}}$$

é uma candidata a extremante.

Problema com fronteira inicial livre e final fixa

Usando o mesmo raciocínio da secção anterior, consideremos o funcional

$$J[y] = \int_a^b f(x, y, y') dx \quad (1.54)$$

onde $y(b) = y_2$ e $y(a)$ é livre. Como $\eta(b) = 0$ e $\eta(a)$ é desconhecida, vamos novamente considerar, que independentemente das condições de fronteira, a Equação de Euler-Lagrange é uma condição necessária e deve ser satisfeita. De modo análogo obtém-se a expressão

$$\frac{\partial f}{\partial y'}(a, y(a), y'(a)) \eta(a) = 0,$$

e consequentemente pela arbitrariedade de $\eta(a)$, a **condição de transversalidade**

$$\frac{\partial f}{\partial y'}(a, y(a), y'(a)) = 0. \quad (1.55)$$

A condição necessária de otimalidade para um problema com fronteira inicial livre e final fixa é dada por

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0, & x \in [a, b] \\ \frac{\partial f}{\partial y'}(a, y(a), y'(a)) = 0. \end{cases}$$

Exemplo 1.4.5. Considere o funcional

$$J[y] = \int_0^1 (6y'^2 + 6y^2 + 4) dx$$

com a condição de fronteira é $y(0)$ livre e $y(1) = 1$.

Queremos determinar a função candidata a extremante do funcional J . Uma vez que

$$f(x, y, y') = 6y'^2 + 6y^2 + 4,$$

logo as derivadas parciais obtidas são

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 12y; \quad \frac{\partial f}{\partial y'} = 12y'; \quad \frac{d}{dx}(12y') = 12y''.$$

Pela Equação de Euler-Lagrange obtemos

$$12y - 12y'' = 0. \quad (1.56)$$

Resolvendo a equação diferencial descrita em (1.56) temos

$$12 - 12\lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1.$$

Assim, a função candidata a extremante do funcional J é

$$\bar{y} = C_1 e^x + C_2 e^{-x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Pelas condições de fronteira e transversalidade temos

$$\begin{cases} C_1 e + C_2 e^{-1} = 1 \\ C_1 - C_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_2 = \frac{1}{e+e^{-1}} \\ C_1 = \frac{1}{e+e^{-1}} \end{cases}.$$

Portanto, a função

$$\bar{y} = \frac{e^x + e^{-x}}{e + e^{-1}}$$

é uma candidata a extremante do funcional J .

1.4.4 Problema Isoperimétrico

No Cálculo das Variações existem determinados problemas que acarretam consigo algumas restrições. Estas restrições podem ser apresentadas de várias formas. Por isso, nesta secção iremos apresentar alguns problemas com restrições isoperimétricas.

Num problema isoperimétrico pretende-se minimizar ou maximizar um funcional com condições de fronteiras e impondo alguma restrição de tipo integral, onde este integral tem um valor definido. Um problema isoperimétrico consiste na determinação dos extremos do funcional

$$J[y] = \int_a^b f(x, y, y') dx, \tag{1.57}$$

no domínio das funções $y \in C^2[a, b]$ satisfazendo a restrição isoperimétrica

$$L[y] = \int_a^b g(x, y, y') dx = C, \quad C \in \mathbb{R}, \tag{1.58}$$

e as condições de fronteira

$$y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b. \tag{1.59}$$

Suponhamos que J tem um extremo em y , sujeito às condições de fronteira e à condição isoperimétrica. Poderíamos proceder de forma análoga à resolução de problemas sem restrição e considerar uma vizinhança da forma $\bar{y} = y + \epsilon\eta$, onde $\eta \in C^2[a, b]$ e $\eta(a) = \eta(b) = 0$. Acontece que a condição subsidiária (1.58) impõe uma restrição adicional sobre η , e o Lema 1.2.1, não é válido. Para tal,

introduzimos uma outra função e parâmetros de modo que

$$\bar{y} = y + \epsilon_1 \eta_1 + \epsilon_2 \eta_2 \quad (1.60)$$

onde ϵ_i são parâmetros e $\eta_i \in C^2[a, b]$, com

$$\eta_i(a) = \eta_i(b) = 0, \quad \text{para } i = 1, 2 \quad (1.61)$$

são funções diferenciáveis.

Definição 1.4.1. Dado $\bar{y} \in C^2[a, b]$, diz-se que \bar{y} é minimizante local (ou maximizante local) para o problema isoperimétrico (1.57)-(1.58) se \bar{y} satisfaz (1.58) e se existir $\delta > 0$ tal que $J[\bar{y}] \leq J[y]$, ($J[\bar{y}] \geq J[y]$) para todo $y \in C^2[a, b]$, satisfazendo a restrição isoperimétrica (1.58) e $\| \bar{y} - y \| < \delta$.

Definição 1.4.2. Diz-se que $y \in C^2[a, b]$ é um extremal para J se y satisfaz a equação de Euler-Lagrange relativamente a J . Um extremante (minimizante local ou maximizante local) do problema (1.57)-(1.58) que não é extremal de J designa-se por extremante normal, caso contrário, é dito extremante anormal.

Teorema 1.4.3. Seja y um minimizante local ou maximizante local para o funcional (1.57) definido em

$$D = \{y \in C^2[a, b] : y(a) = y_a \text{ e } y(b) = y_b\} \quad (1.62)$$

sujeito à restrição (1.58). Se y não é extremal de (1.58), então existe um número real λ tal que y satisfaz a equação

$$\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial H}{\partial y'} \right) = 0, \quad x \in [a, b] \quad \text{e} \quad H = f + \lambda g. \quad (1.63)$$

Demonstração. Consideremos uma variação de y com dois parâmetros $\bar{y} = y + \epsilon_1 \eta_1 + \epsilon_2 \eta_2$ onde

$$|\epsilon| \leq 1, \quad \eta_1, \eta_2 \in C^2[a, b] \quad \text{e} \quad \eta_1(a) = \eta_1(b) = 0 \quad \text{e} \quad \eta_2(a) = \eta_2(b).$$

Sejam j e l funções com dois parâmetros (ϵ_1, ϵ_2) , definidas numa vizinhança de $(0, 0)$, com

$$j(\epsilon_1, \epsilon_2) = J[y + \epsilon_1 \eta_1 + \epsilon_2 \eta_2] \quad \text{e} \quad l(\epsilon_1, \epsilon_2) = L[y + \epsilon_1 \eta_1 + \epsilon_2 \eta_2] - C \quad (1.64)$$

A condição (1.61) assegura que $\bar{y}(a) = y(a) = y_a$ e $\bar{y}(b) = y(b) = y_b$, como desejamos para todos os valores dos parâmetros ϵ_1 e ϵ_2 .

Trocando y por \bar{y} em (1.57) e (1.58) obtemos

$$j(\epsilon_1, \epsilon_2) = \int_a^b f(x, \bar{y}, \bar{y}') dx \quad (1.65)$$

e

$$l(\epsilon_1, \epsilon_2) = \int_a^b g(x, \bar{y}, \bar{y}') dx - C. \quad (1.66)$$

É claro que ϵ_1, ϵ_2 não são independentes, já que C de (1.58) é constante. Então, de (1.66) percebe-se que existe uma relação funcional entre ϵ_1 e ϵ_2 ,

$$\psi(\epsilon_1, \epsilon_2) = 0 \quad (1.67)$$

Substituindo (1.60) em (1.57) e em (1.58), obtemos

$$j(\epsilon_1, \epsilon_2) = \int_a^b f(x, y + \epsilon_1\eta_1 + \epsilon_2\eta_2, y' + \epsilon_1\eta_1 + \epsilon_2\eta_2) dx$$

e

$$l(\epsilon_1, \epsilon_2) = \int_a^b g(x, y + \epsilon_1\eta_1 + \epsilon_2\eta_2(x), y' + \epsilon_1\eta_1 + \epsilon_2\eta_2) dx = C.$$

Uma vez que

$$\frac{\partial l}{\partial \epsilon_2}(0, 0) = \int_a^b \left[\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial g}{\partial y'} \right) \right] \cdot \eta_2 dx$$

e y não é extremal de L , existe uma função η_2 tal que $\frac{\partial l}{\partial \epsilon_2}(0, 0) \neq 0$. Mantendo fixo η_2 , tendo em conta que $l(0, 0) = 0$, então, pelo Teorema da Função Implícita, existe uma função $\epsilon_2(\cdot)$, definida na vizinhança V de zero, tal que $\epsilon_2(0) = 0$ e $l(\epsilon_1, \epsilon_2(\epsilon_1)) = 0$ para qualquer $\epsilon_1 \in V$ [1].

Significa que existe um conjunto de curvas $\bar{y} = y + \epsilon_1\eta_2 + \epsilon_2(\epsilon_1)\eta_2$ que satisfazem a restrição isoperimétrica.

Note que $(0, 0)$ é minimizante de j sujeito a restrição $l(\epsilon_1, \epsilon_2) = 0$ e $\nabla l(0, 0) \neq (0, 0)$, pelo método dos multiplicadores de Lagrange, existe uma constante $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla(j + \lambda l) = (0, 0).$$

Como

$$\frac{\partial(j + \lambda l)}{\partial \epsilon_1}(0, 0) = \int_a^b \left[\frac{\partial}{\partial y}(f + \lambda g) - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial}{\partial y'}(f + \lambda g) \right) \right] \cdot \eta_1(x) dx,$$

provamos o pretendido. \square

Teorema 1.4.4. Suponhamos que J tem um extremo em $y \in C^2[a, b]$ sujeito às condições de fronteira $y(a) = y_a$ e $y(b) = y_b$ e à restrição isoperimétrica (1.41). Então existem dois números reais λ_0 e λ , ambos não simultaneamente nulos, tal que y satisfaz a Equação de Euler-Lagrange para o funcional

$$K[y] = \int_a^b H(x, y, y') dx,$$

onde

$$H = \lambda_0 f(x, y, y') + \lambda g(x, y, y').$$

Assim,

$$\lambda_0 \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] + \lambda \left[\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial g}{\partial y'} \right) \right] = 0.$$

Demonstração. Suponhamos que y é um minimizante ou maximizante normal, então, considerando $\lambda_0 = 1$, a prova deste teorema é semelhante à prova do Teorema 1.4.3. Para minimizantes ou maximizantes anormais, basta tomar $\lambda_0 = 0$ e $\lambda = 1$. \square

Exemplo 1.4.6. Consideremos o problema:

$$\min J[y] = \int_0^2 y'^2 dx$$

sujeito a

$$L[y] = \int_0^2 y dx = 1$$

e

$$y(0) = 0, \quad y(2) = 1.$$

Podemos ver que estamos perante um problema isoperimétrico. Deste modo, temos que

$$f = y'^2 \quad \text{e} \quad g = y.$$

Pelo Teorema 1.4.3 definimos $H = f + \lambda g$, consequentemente temos

$$H = y'^2 + \lambda y.$$

Assim, calculando as derivadas parciais obtemos

$$\frac{\partial H}{\partial y} = \lambda, \quad \frac{\partial H}{\partial y'} = 2y', \quad \frac{d}{dx}(2y') = 2y''.$$

Pela Equação de Euler-Lagrange vem

$$\lambda - 2y'' = 0.$$

Logo,

$$y'' = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow y' = \frac{\lambda x}{2} + C_1,$$

e portanto

$$y = \frac{\lambda x^2}{4} + C_1 x + C_2.$$

Usando as condições de fronteira resulta que

$$\begin{cases} \frac{\lambda \times 0}{4} + C_1 \times 0 + C_2 = 0 \\ \frac{\lambda \times 4}{4} + C_1 \times 2 + C_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_2 = 0 \\ C_1 = \frac{1 - \lambda}{2}. \end{cases}$$

Portanto, a função seguinte é candidata a minimizante do funcional

$$y = \frac{\lambda x^2}{4} + \frac{(1 - \lambda)}{2}x \quad (1.68)$$

Queremos agora determinar o valor de λ . Recorrendo à restrição isoperimétrica temos

$$\int_0^2 y dx = \int_0^2 \left[\frac{\lambda x^2}{4} + \frac{(1 - \lambda)}{2}x \right] dx = \left[\frac{\lambda x^3}{12} + \frac{(1 - \lambda)}{4}x^2 \right]_0^2 = 1.$$

Substituindo os limites de integração, temos que $\lambda = 0$. Fazendo a devida substituição do valor de λ na solução (1.68) obtemos

$$y = \frac{x}{2}.$$

1.4.5 Condição suficiente de otimalidade

O trabalho desenvolvido até aqui apresentou apenas condições e técnicas para determinar candidatos a extremos de um funcional, mas não conseguimos saber se este extremo é de facto um mínimo ou um máximo. Isto ocorre porque as condições de otimalidade para extremos de funcionais, que abordamos até agora, são apenas necessárias. Porém, existem problemas em que se pode tornar complicado classificar um extremo usando apenas as condições necessárias de otimalidade.

Por esta razão, nesta secção iremos enunciar e demonstrar uma condição suficiente de otimalidade que nos permitirá afirmar com toda segurança que um extremante é minimizante ou maximizante global para um determinado funcional.

Definição 1.4.3. Dada uma função $f : [a, b] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, diz-se que $f(x, y, y')$ é convexa (respetivamente côncava) em (y, y') se as suas derivadas parciais estão definidas e, são contínuas em $[a, b] \times \mathbb{R}^2$ e verificam a seguinte condição:

$$f(x, y + \bar{y}, y' + \bar{y}') - f(x, y, y') \geq (\text{resp. } \leq) \frac{\partial f}{\partial y} f(x, y, y') \bar{y} + \frac{\partial f}{\partial y'} f(x, y, y') \bar{y}'$$

para todos os

$$(x, y, y'), (x, y + \bar{y}, y' + \bar{y}') \in [a, b] \times \mathbb{R}^2.$$

Teorema 1.4.5. Seja

$$\mathcal{S} = \{y \in C^2[a, b] : y(a) = y_a, y(b) = y_b\}.$$

Se $f(x, y, y')$ é diferenciável e convexa (respetivamente côncava) em (y, y') , e se $\bar{y} \in \mathcal{S}$ é uma solução da Equação de Euler-Lagrange associada a J , então \bar{y} é um minimizante (respetivamente maximizante) global para o funcional J em \mathcal{S} .

Demonstração. Vamos proceder a demonstração para caso em que a função é convexa. Assim, pela convexidade assumida de f em (y, y') , então para qualquer $\eta \in C^2[a, b]$,

$$\begin{aligned} J[\bar{y} + \eta] - J[\bar{y}] &= \int_a^b f(x, \bar{y} + \eta \bar{y}' + \eta') - f(x, \bar{y}, \bar{y}') dx \\ &\geq \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \cdot \eta + \frac{\partial f}{\partial \bar{y}'} \cdot \eta' \right) dx. \end{aligned}$$

Integrando por partes e procedendo conforme a demonstração do Teorema 1.3.1, obtém-se

$$J[\bar{y} + \eta] - J[\bar{y}] \geq \int_a^b \eta \left[\frac{\partial f}{\partial \bar{y}} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{y}'} \right) \right] dx + \left[\eta \frac{\partial f}{\partial \bar{y}'} \right]_a^b$$

Pelas condições de fronteira e pela Equação de Euler-Lagrange, temos

$$J[\bar{y} + \eta] - J[\bar{y}] \geq 0,$$

e portanto, fica concluída a prova. \square

Exemplo 1.4.7. Consideremos o funcional definido por

$$J[y] = \int_0^2 (3xy + y'^2) dx \tag{1.69}$$

sujeito a

$$y(0) = 1 \quad \text{e} \quad y(2) = 2. \quad (1.70)$$

Determinemos a função candidata a extremante do funcional (1.69), e demonstremos que a solução encontrada é minimizante global de J , caso exista. Pela Equação de Euler-Lagrange temos,

$$3x - \frac{d}{dx}(2y') = 0 \Leftrightarrow y'' = \frac{3}{2}x.$$

Logo, resulta que

$$y' = \frac{3}{4}x^2 + C_1 \quad \text{e} \quad y = \frac{x^3}{4} + C_1x + C_2.$$

Usando as condições (1.70), vamos determinar as constantes C_1 e C_2 .

$$\begin{aligned} 0 + 0 + C_2 &= 1 \Rightarrow C_2 = 1 \\ 2 + 2C_1 &= 1 \Rightarrow C_1 = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Portanto, a função candidata a extremante para o problema (1.69)-(1.70) é

$$\bar{y} = \frac{x^3}{4} - \frac{x}{2} + 1 \quad (1.71)$$

Agora, vamos verificar se a função f é convexa. Então temos

$$\begin{aligned} f(x, y + \bar{y}, y' + \bar{y}') - f(x, y, y') &\geq \frac{\partial f}{\partial y} f(x, y, y') \bar{y} + \frac{\partial f}{\partial y'} f(x, y, y') \bar{y}' \\ \Leftrightarrow (y' + \bar{y}')^2 + 3(y + \bar{y})x - (y')^2 - 3xy &\geq 3x\bar{y} + 2y'\bar{y}' \\ \Leftrightarrow (y')^2 + (\bar{y}')^2 + 2y'\bar{y}' + 3xy + 3x\bar{y} - (y')^2 - 3xy &\geq 3x\bar{y} + 2y'\bar{y}' \\ \Leftrightarrow (\bar{y}')^2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Podemos ver que é verdade, e com isso verifica-se que f é convexa, provando deste modo que (1.71) é minimizante do problema (1.69)-(1.70).

Capítulo 2

Cálculo Fracionário

Neste capítulo apresentamos o estudo de derivadas e integrais de ordem arbitrárias, mais conhecido como Cálculo Fracionário.

O objetivo principal deste capítulo é introduzir as ferramentas básicas a fim de discutir um particular problema, integrais e derivadas de ordem arbitrária. De modo a atingir este objetivo, procuramos apresentar algumas funções especiais, como a função Gama, função Beta e a função de Mittag-Leffler de um parâmetro que, por sua vez, servirão de pré-requisitos para sustentar o capítulo em questão.

Para uma melhor compreensão, num primeiro momento introduzimos o conceito de integral fracionário para depois, utilizar tal conceito e introduzir a derivada fracionária que, neste trabalho, são apresentadas apenas as formulações conforme propostas por Riemann-Liouville e por Caputo, com maior ênfase para esta última.

O Cálculo Fracionário foi desenvolvido a partir do Cálculo diferencial de ordem inteira [27]. Com base nestes requisitos, foi possível apresentarmos as definições e algumas propriedades dos operadores integral e derivada fracionários, com ênfase na derivada fracionária proposta por Caputo.

O Cálculo Fracionário tem sua origem datada em 1695, por Leibniz, quando L'Hôspital escreveu uma carta a Leibniz perguntando qual seria o significado de uma derivada não inteira pela necessidade de responder à questão de que "se era possível estender a derivada de ordem inteira $\frac{d^n y}{dx^n}$, para ter algum significado quando n é uma fração", por exemplo, $n = \frac{1}{2}$ [1].

Em sua resposta, datada em 30 de setembro de 1695, Leibniz diz que um dia consequências úteis serão extraídas [35]. Hoje podemos verificar a veracidade das palavras de Leibniz.

Outras citações a respeito do Cálculo Fracionário, num diferente contexto, são feitas, por exem-

plo, em 1730, quando Euler investigou o resultado da derivada de ordem n , para n fracionário. Outros matemáticos estudaram este problema, como Lagrange, em 1772, e Laplace, em 1812. Mas somente em 1819, com Lacroix, apareceu a primeira definição de derivada fracionária, no seu trabalho *Traité du Calcul Différentiel et du Calcul Intégral*. Dedica duas páginas ao Cálculo Fracionário e mostra que [22]

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}x}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}.$$

Mais tarde surgiram as contribuições de Fourier, em 1822, e de Liouville, que em 1832 estendeu os resultados obtidos por Lacroix no seu trabalho *Mémoire sur le Calcul des Différentielles à Indices Quelconques*, usando a noção de função Gama. Riemann e Liouville em 1876 em *Versuch Liner Auffassung der Integration und Differentiation*, conseguiram derivar fracionalmente um monómio com qualquer expoente [22]. Porém, o primeiro trabalho dedicado exclusivamente ao Cálculo Fracionário foi publicado em 1974 por Oldham e Spanier, intitulado *The Fractional Calculus* [26].

Durante todo este tempo, o Cálculo Fracionário era um assunto exclusivamente estudado por matemáticos. Porém, nas últimas décadas, muitos autores mostraram que o Cálculo Fracionário é adequado para a descrição de propriedades de fenómenos reais. A partir do século XX começaram inúmeras publicações sobre o Cálculo Fracionário [31].

Até então, poucos trabalhos a respeito do tema foram publicados. Por esta razão, o Cálculo Fracionário é considerado um ramo novo na área da Matemática aplicada, sendo uma ferramenta muito útil para alguns resultados importantes [36].

Hoje, o Cálculo Fracionário conta com vários meios especializados para a sua divulgação, em particular, revistas e congressos consolidados. A gama de aplicações conta com vários campos do saber, como Engenharia [27], Física [5], Finanças [32], Epidemiologia [10], dentre outros.

2.1 Funções especiais

Neste capítulo, iremos apresentar algumas funções especiais que servirão como ponto de partida para o tema em abordagem. Destacaremos a função Gama, a função Beta e a função de Mittag-Leffler de um parâmetro.

2.1.1 Função Gama

A função Gama é uma extensão da função fatorial, e surge a partir da necessidade de se obter uma representação para a função fatorial que funcione não apenas para os números naturais. Ela foi apresentada por Euler e tem grande utilidade em vários campos da Matemática, especificamente, no estudo das funções de Mittag-Leffler. Sua real utilidade aplica-se para valores de x não inteiros, e para variáveis complexas [27].

Existem várias maneiras de se introduzir o conceito de função Gama, mas para o presente trabalho, vamos optar pela representação integral. A sua interpretação mais simples consiste na generalização do conceito fatorial para qualquer número arbitrário (real ou complexo). Por isso, a função Gama está intrinsecamente relacionada com o Cálculo Fracionário.

A função Gama é definida como sendo um integral que coincide com a função fatorial para valores inteiros, e que é contínua para os reais [22].

Definição 2.1.1. A função Gama em \mathbb{R}^+ é dada pelo integral impróprio de Euler definida por:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt. \quad (2.1)$$

Observação 2.1.1. A função Gama pode ser estendida para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_0^-$ da seguinte forma:

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + \frac{1}{n})^x}{1 + \frac{x}{n}}.$$

Propriedade fundamental da Função Gama

Vejamos uma das propriedades fundamentais da função Gama:

Propriedade 2.1.1. A função Gama goza da seguinte propriedade:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x),$$

onde $x > 0$.

Demonastração. Consideremos então,

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t} dt.$$

Fazendo

$$u = t^x \Rightarrow du = xt^{x-1} dt$$

$$dv = e^{-t} \Rightarrow v = -e^{-t},$$

resulta que,

$$\Gamma(x+1) = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-t^x e^{-t} \Big|_0^b + x \int_0^b e^{-t} xt^{x-1} dt \right).$$

Como

$$\lim_{b \rightarrow \infty} b^x e^{-b} = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{b^x}{e^b} = 0,$$

então

$$\Gamma(x+1) = x \cdot \int_0^\infty e^{-t} xt^{x-1} dt.$$

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

□

Observação 2.1.2.

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n \cdot (n-1)\Gamma(n-1) = \dots = n(n-1)\dots 2 \cdot 1\Gamma(1).$$

Como $\Gamma(1) = 1$, segue que

$$\Gamma(n+1) = n!.$$

2.1.2 Função Beta

Definição 2.1.2. Em Matemática, a função Beta, também chamada de integral de Euler de primeiro tipo, é uma função especial dada por [27]

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt, \quad \text{onde } p > 0, q > 0. \quad (2.2)$$

Propriedades da Função Beta

A função Beta goza de algumas propriedades, das quais apresentaremos as seguintes:

Propriedade 2.1.2. A função Beta goza da propriedade da simetria, o que significa que

$$B(p, q) = B(q, p). \quad (2.3)$$

Podemos provar esta propriedade a partir da expressão (2.2), e usando uma mudança de variável,

$$x = 1 - t \Leftrightarrow t = 1 - x \Rightarrow -dx = dt,$$

obtemos

$$B(p, q) = \int_1^0 (1-x)^{p-1} x^{q-1} (-dx) = \int_0^1 (1-x)^{p-1} x^{q-1} dx = B(q, p).$$

Propriedade 2.1.3. A propriedade que se segue apresenta uma importante relação envolvendo as funções Gama e Beta, que é essencial para mostrar alguns resultados ao longo do trabalho:

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \quad (2.4)$$

Para obter a prova desta propriedade, ver [8].

Propriedade 2.1.4. Mostremos agora a propriedade da relação complementar:

$$B(p, 1-p) = \Gamma(p)\Gamma(1-p). \quad (2.5)$$

Tendo em consideração a igualdade (2.4) e fazendo $q = 1 - p$, temos

$$B(p, 1-p) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(1-p)}{\Gamma(p+(1-p))} = \frac{\Gamma(p)\Gamma(1-p)}{\Gamma(1)} = \Gamma(p)\Gamma(1-p).$$

2.1.3 Função de Mittag -Leffler

A função de Mittag-Leffler é uma das funções mais importantes no Cálculo Fracionário, desempenhando um papel preponderante no cálculo de equações diferenciais de ordem fracionária. Foi criada por Magnus Gösta Mittag-Leffler e assume o mesmo papel que a função exponencial de base e assume no cálculo usual [27]. Ou seja, assim como a função exponencial é solução de equações diferenciais lineares com coeficientes constantes, a função de Mittag-Leffler é solução de equações

diferenciais fracionárias lineares com coeficientes constantes e por esta razão é conhecida como a generalização fraccionária da função exponencial [36].

Para o presente trabalho destacamos a função de Mittag-Leffler de um parâmetro.

Função de Mittag -Leffler de um parâmetro

Definição 2.1.3. A função Mittag-Leffler de um parâmetro é dada pela série

$$E_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(1+\alpha k)}, \quad (2.6)$$

sendo $x, \alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, Γ é a função Gama.

A função exponencial é um caso particular de função E_α , tomando $\alpha = 1$, uma vez que

$$E_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(1+k)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x.$$

2.2 O Integral Fracionário e a Derivada Fracionária de Riemann-Liouville

Nas secções anteriores, além de mostrarmos os aspectos históricos referentes ao Cálculo Fracionário, apresentamos as funções especiais que constituem pré-requisitos para os conteúdos que iremos apresentar nesta secção.

2.2.1 O Integral Fracionário de Riemann-Liouville

Definição 2.2.1. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável em $[a, b]$. Define-se o operador I , agindo sobre f , como:

$$\begin{aligned} If(x) &= \int_a^x f(x_1) dx_1 \\ I^2 f(x) &= I[If(x)] = \int_a^x \int_a^{x_1} f(x_2) dx_2 dx_1 \\ &\vdots \\ I^n f(x) &= \int_a^x \int_a^{x_1} \dots \int_a^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n dx_{n-1} \dots dx_2 dx_1. \end{aligned}$$

Esta notação é uma generalização da fórmula de Cauchy para determinar a n -ésima primitiva de uma função. A fórmula de Cauchy é escrita como [17]

$$I^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.7)$$

Substituindo n por um número real $\alpha > 0$ e $(n-1)!$ por $\Gamma(\alpha)$, obtemos

$$I^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad \alpha \in \mathbb{R}^+.$$

Definição 2.2.2. Sejam $\alpha > 0$ e f uma função definida no intervalo $[a, b]$. Para $x \in [a, b]$ definimos os integrais fracionários de Riemann-Liouville de ordem α , à esquerda e à direita, respectivamente, como

$$I_{a+}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad x > a,$$

e

$$I_{b-}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad x < b.$$

2.2.2 A Derivada Fracionária de Riemann-Liouville

Definição 2.2.3. Sejam $\alpha \in \mathbb{R}^+, n = [\alpha] + 1$ (onde $[\alpha]$ representa a parte inteira de α) e f uma função definida em $[a, b]$. Os operadores definidos por

$$D_{a+}^\alpha f(x) = D^n [I_{a+}^{n-\alpha} f(x)] \quad \text{e} \quad D_{b-}^\alpha f(x) = (-1)^n D^n [I_{b-}^{n-\alpha} f(x)] \quad (2.8)$$

são designados por derivadas de ordem α de Riemann-Liouville à esquerda e à direita, respectivamente.

Observação 2.2.1. Se $\alpha = n$, $n \in \mathbb{N}$, então a derivada de Riemann-Liouville é equivalente à derivada inteira de ordem α , isto é,

$$D_{a+}^\alpha f(x) = f^{(n)}(x) \quad \text{e} \quad D_{b-}^\alpha f(x) = (-1)^n f^{(n)}(x).$$

As derivadas fracionárias de ordem $\alpha \in \mathbb{R}^+$, de Riemann-Liouville à esquerda e à direita, respectivamente, são, assim definidas por

$$D_{a+}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t) dt, \quad (x > a),$$

e

$$D_{b-}^{\alpha} f(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_x^b (t-x)^{n-\alpha-1} f(t) dt, \quad (x < b),$$

com $n = [\alpha] + 1$ e $\alpha > 0$.

2.3 Derivada Fracionária de Caputo

A derivada fracionária de Caputo foi proposta pelo italiano Michele Caputo, em 1967, e tem origem na definição da derivada fracionária de Riemann-Liouville em que há uma inversão na ordem dos operadores [8].

Caputo então propôs uma nova derivada fracionária invertendo a ordem entre a derivada e o integral fracionário propostos por Riemann-Liouville [1].

Para alguns autores, do ponto de vista matemático, a derivada de Caputo é mais restritiva no sentido que a função f deve admitir derivada de ordem n para podermos aplicá-la. Já no caso das derivadas de Riemann-Liouville, a função não precisa ser diferenciável. De fato, pode-se calcular a derivada de Riemann-Liouville mesmo de funções não diferenciáveis [8].

Apesar das diferenças, podemos relacionar a derivada de Caputo de uma função com sua derivada de Riemann-Liouville.

Nesta seção iremos abordar a definição da derivada de Caputo, e vamos restringir-nos para o caso em que $\alpha \notin \mathbb{N}$. Vamos estudar algumas das suas características e apresentar algumas das suas propriedades. Além disso, iremos provar os resultados de alguns teoremas e lemas que envolvem a derivada fracionária de Caputo, apenas para a derivada fracionária à esquerda, uma vez que os métodos são semelhantes para as derivadas fracionárias à direita, fazendo os ajustes necessários.

Definição 2.3.1. Sejam $\alpha > 0$, $n = [\alpha] + 1$ se $\alpha \notin \mathbb{N}$ e $n = \alpha$ se $\alpha \in \mathbb{N}$ e $f \in C^n([a, b], \mathbb{R})$. Os operadores definidos por

$${}^c D_{a+}^{\alpha} f(x) = I_{a+}^{n-\alpha} [D^n f(x)]$$

e

$${}^c D_{b-}^{\alpha} f(x) = I_{b-}^{n-\alpha} [(-1)^n D^n f(x)]$$

são chamados de operadores derivada de ordem α de Caputo à esquerda e à direita, respectivamente.

Assim, a derivada de Caputo à esquerda de ordem α , quando $\alpha \notin \mathbb{N}$, da função f , é dada por:

$${}^c D_{a+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t) dt, \quad (2.9)$$

e a derivada fracionária de Caputo à direita de ordem α , é dada por

$${}^cD_{b-}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^b (t-x)^{n-\alpha-1} (-1)^n f^{(n)}(t) dt. \quad (2.10)$$

Observação 2.3.1. Se $\alpha \in \mathbb{N}$, então a derivada de Caputo é equivalente a derivada inteira de ordem α , assim como ocorre na derivada de Riemann-Liouville. Quando $\alpha \in]0, 1[$, as derivadas de Caputo à esquerda e à direita respetivamente, são dadas por

$${}^cD_{a+}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{-\alpha} f'(t) dt,$$

e

$${}^cD_{b-}^\alpha f(x) = \frac{-1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_x^b (t-x)^{-\alpha} f'(t) dt.$$

Propriedade 2.3.1. Para a definição de Caputo, assim como para as derivadas de ordem inteira, a derivada de uma constante é nula. Seja $f(x) = k$, então

$${}^cD_{a+}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} \underbrace{\left(\frac{d^n}{dt^n}(k) \right)}_{=0} dt,$$

o que implica em

$${}^cD_{a+}^\alpha k = 0. \quad (2.11)$$

No entanto, para a derivada de Riemann-Liouville, tal não se verifica. Por exemplo, consideremos a função $f(x) = 1$, com $\alpha \in]0, 1[$. Vamos determinar a derivada da função f na versão de Riemann-Liouville. Temos que,

$$\begin{aligned} D_{a+}^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x (x-t)^{-\alpha} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \left[-\frac{(x-t)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_{t=a}^{t=x} \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \left[\frac{(x-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \times \frac{1}{1-\alpha} \times (1-\alpha) \times \frac{1}{(x-a)^\alpha} \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \times (x-a)^{-\alpha}. \end{aligned}$$

No que se segue, excepto se dito o contrário, $\alpha > 0$ é um real e $n = [\alpha] + 1$. Iremos considerar o

caso $\alpha \notin \mathbb{N}$ apenas.

Teorema 2.3.1. Suponhamos que $f \in C^{n+1}[a, b]$. Então, para todo o $\alpha > 0$,

$$\begin{aligned} {}^cD_{a+}^\alpha f(x) &= \frac{(x-a)^{n-\alpha}}{\Gamma(n+1-\alpha)} f^{(n)}(a) + \frac{1}{\Gamma(n+1-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha} \frac{d}{dt} f^{(n)}(t) dt \\ &\text{e} \\ {}^cD_{b-}^\alpha f(x) &= (-1)^n \frac{(b-x)^{n-\alpha}}{\Gamma(n+1-\alpha)} f^{(n)}(b) - \frac{1}{\Gamma(n+1-\alpha)} \int_x^b (t-x)^{n-\alpha} (-1)^n \frac{d}{dt} f^{(n)}(t) dt. \end{aligned}$$

Demonastração. Fazendo a integração por partes a partir da expressão (2.9) temos,

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = (x-t)^{n-\alpha-1} \Rightarrow u = -\frac{(x-t)^{n-\alpha}}{n-\alpha} \\ v = f^{(n)}(t) \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} f^{(n)}(t) \end{cases},$$

obtemos,

$${}^cD_{a+}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left\{ \left[\frac{-(x-t)^{n-\alpha} f^{(n)}(t)}{n-\alpha} \right]_{t=a}^{t=x} + \int_a^x \frac{(x-t)^{n-\alpha}}{n-\alpha} \frac{d}{dt} f^{(n)}(t) dt \right\}.$$

Pela Propriedade 2.1.1 temos que

$${}^cD_{a+}^\alpha f(x) = \frac{(x-a)^{n-\alpha}}{\Gamma(n+1-\alpha)} f^{(n)}(a) + \frac{1}{\Gamma(n+1-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha} \frac{d}{dt} f^{(n)}(t) dt,$$

que é justamente o resultado desejado. De modo análogo se prova

$${}^cD_{b-}^\alpha f(x) = (-1)^n \frac{(b-x)^{n-\alpha}}{\Gamma(n+1-\alpha)} f^{(n)}(b) - \frac{1}{\Gamma(n+1-\alpha)} \int_x^b (t-x)^{n-\alpha} (-1)^n \frac{d}{dt} f^{(n)}(t) dt.$$

□

Da definição, é evidente que se $\alpha \rightarrow (n-1)^+$, então temos

$$\lim_{\alpha \rightarrow (n-1)^+} {}^cD_{a+}^\alpha f(x) = \int_a^x f^{(n)}(t) dt = f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)$$

e

$$\lim_{\alpha \rightarrow (n-1)^+} {}^cD_{b-}^\alpha f(x) = \int_x^b f^{(n)}(t) dt = (-1)^{n-1} (f^{(n-1)}(b) - f^{(n-1)}(x)).$$

Se f é uma função de classe C^{n+1} , usando o Teorema 2.3.1 obtemos

$$\lim_{\alpha \rightarrow n^-} {}^c D_{a+}^\alpha f(x) = f^{(n)}(x)$$

e

$$\lim_{\alpha \rightarrow n^-} {}^c D_{b-}^\alpha f(x) = (-1)^n f^{(n)}(x).$$

Consideremos as normas

$$\|\cdot\|_C : C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

e

$$\|\cdot\|_{C^{[n]}} : C^n[a, b] \rightarrow \mathbb{R},$$

dadas por

$$\|f\|_C := \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$$

e

$$\|f\|_{C^{(n)}} := \sum_{k=0}^n \|f^{(k)}\|_C.$$

Teorema 2.3.2. As derivadas fracionárias de Caputo são operadores limitados. Para todo o $\alpha > 0$,

$$\|{}^c D_{a+}^\alpha f\|_C \leq K \|f\|_{C^{(n)}} \quad \text{e} \quad \|{}^c D_{b-}^\alpha f\|_C \leq K \|f\|_{C^{(n)}},$$

onde

$$K = \frac{(b-a)^{n-\alpha}}{\Gamma(n+1-\alpha)}.$$

Demonstração. Uma vez que $|f^{(n)}(t)| \leq \|f\|_{C^{(n)}}$, para todo $t \in [a, b]$, temos que

$$\|{}^c D_{a+}^\alpha f\|_C \leq \frac{\|f\|_{C^{(n)}}}{\Gamma(n-\alpha)} \max_{x \in [a, b]} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} dt \leq K \|f\|_{C^{(n)}}.$$

□

Seguindo a prova concluímos que

$${}^c D_{a+}^\alpha f(a) = {}^c D_{b-}^\alpha f(b) = 0,$$

uma vez que,

$$|{}^c D_{a+}^\alpha f| \leq \|f\|_{C^{(n)}} \frac{(x-a)^{n-\alpha}}{\Gamma(n+1-\alpha)}$$

e

$$|{}^cD_{b-}^\alpha f| \leq \|f\|_{C^{(n)}} \frac{(b-x)^{n-\alpha}}{\Gamma(n+1-\alpha)}.$$

A relação entre os dois tipos de derivadas fracionárias é estabelecida no teorema seguinte.

Teorema 2.3.3. Se $f \in C^{n-1}[a, b]$ e $\alpha > 0$, então

$${}^cD_{a+}^\alpha f(x) = D_{a+}^\alpha \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} (x-a)^k f^{(k)}(a) \right]$$

e

$${}^cD_{b-}^\alpha f(x) = D_{b-}^\alpha \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} (b-x)^k f^{(k)}(b) \right].$$

Demonastração. Partindo da definição da derivada de Riemann-Liouville temos que

$$\Gamma(n-\alpha) \cdot D_{a+}^\alpha f(x) = \left(\frac{d}{dx} \right)^n \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t) dt.$$

Usando a definição da derivada de Riemann-Liouville e a técnica de integração por partes, temos:

$$\begin{aligned} & \Gamma(n-\alpha) \cdot D_{a+}^\alpha \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right] \\ &= \left(\frac{d}{dx} \right)^n \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right] dt \\ &= \left(\frac{d}{dx} \right)^n \int_a^x \frac{(x-t)^{n-\alpha}}{n-\alpha} \left[f^{(1)}(t) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{(k-1)!} (t-a)^{k-1} \right] dt \\ &= \left(\frac{d}{dx} \right)^{n-1} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} \left[f^{(1)}(t) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{(k-1)!} (t-a)^{k-1} \right] dt. \end{aligned}$$

Repetindo este procedimento obtemos

$$\left(\frac{d}{dx} \right)^{n-2} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} \left[f^{(2)}(t) - \sum_{k=2}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{(k-2)!} (t-a)^{k-2} \right] dt$$

Repetindo o procedimento $(n-3)$ vezes obtemos a fórmula pretendida. \square

Deste modo, para todo o $k = 0, \dots, n-1$, se $f^{(k)}(a) = 0$, então

$${}^cD_{a+}^\alpha f(x) = D_{a+}^\alpha f(x),$$

e se $f^{(k)}(b) = 0$, para todo o $k = 0, \dots, n - 1$, então

$${}^cD_{b-}^\alpha f(x) = D_{b-}^\alpha f(x).$$

Lema 2.3.1. Dado $\beta \in \mathbb{R}$, consideremos as funções $f(x) = (x - a)^{\beta-1}$ e $g(x) = (b - x)^{\beta-1}$, onde $\beta \geq n$. Então, para $\alpha > 0$,

$${}^cD_{a+}^\alpha f(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta - \alpha)}(x - a)^{\beta-\alpha-1}$$

e

$${}^cD_{b-}^\alpha f(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta - \alpha)}(b - x)^{\beta-\alpha-1}.$$

Demonastração. Uma vez que

$$f^{(n)}(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta - n)}(x - a)^{\beta-n-1},$$

temos que

$${}^cD_{a+}^\alpha f(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(n - \alpha)\Gamma(\beta - n)}(x - a)^{n-\alpha-1} \times \int_a^x \left(1 - \frac{t - a}{x - a}\right)^{n-\alpha-1} (t - a)^{\beta-n-1} dt. \quad (2.12)$$

Usando a técnica da substituição de variável, temos

$$u = \frac{t - a}{x - a} \Rightarrow dt = (x - a)du.$$

Fazendo a substituição dos limites de integração, temos

$$\begin{cases} t = a \Rightarrow u = 0 \\ t = x \Rightarrow u = 1 \end{cases}.$$

Substituindo na equação (2.12) temos

$${}^cD_{a+}^\alpha f(x) = \frac{\Gamma(\beta) \cdot (x - a)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n - \alpha)\Gamma(\beta - n)} \times \int_0^1 (1 - u)^{n-\alpha-1} \times (u(x - a))^{\beta-n-1} (x - a) du.$$

Consequentemente, obtém-se

$${}^cD_{a+}^\alpha f(x) = \frac{\Gamma(\beta) \cdot (x - a)^{\beta-\alpha-1}}{\Gamma(n - \alpha)\Gamma(\beta - n)} \times \int_0^1 (1 - u)^{n-\alpha-1} \times u^{\beta-n-1} du. \quad (2.13)$$

Recorrendo à função Beta

$$B(n - \alpha, \beta - n) = \int_0^1 u^{\beta-n-1} (1-u)^{n-\alpha-1} du,$$

obtém-se

$${}^cD_{a+}^\alpha f(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(n - \alpha)\Gamma(\beta - n)} (x - a)^{\beta - \alpha - 1} \times B(n - \alpha, \beta - n).$$

Usando a Propriedade 2.1.3 da função Beta, temos

$$B(n - \alpha, \beta - n) = \frac{\Gamma(n - \alpha)\Gamma(\beta - n)}{\Gamma(n - \alpha + \beta - n)} = \frac{\Gamma(n - \alpha)\Gamma(\beta - n)}{\Gamma(\beta - \alpha)}. \quad (2.14)$$

Substituindo (2.14) em (2.13) obtém-se

$${}^cD_{a+}^\alpha f(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(n - \alpha)\Gamma(\beta - n)} (x - a)^{\beta - \alpha - 1} \times \frac{\Gamma(n - \alpha)\Gamma(\beta - n)}{\Gamma(\beta - \alpha)}.$$

Logo,

$${}^cD_{a+}^\alpha f(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta - \alpha)} (x - a)^{\beta - \alpha - 1}.$$

Portanto, fica assim concluída a prova. \square

Lema 2.3.2. Dado $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\alpha > 0$, consideremos as funções $f(x) = E_\alpha(\lambda(x - a))^\alpha$ e $g(x) = E_\alpha(\lambda(b - x))^\alpha$, onde E_α é a função de Mittag-Leffler. Então,

$${}^cD_{a+}^\alpha f(x) = \lambda f(x) \quad \text{e} \quad {}^cD_{b-}^\alpha g(x) = \lambda g(x).$$

Demonstração. Recorrendo à definição da função de Mittag-Leffler obtemos

$$E_\alpha(\lambda(x - a))^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} (x - a)^{\alpha k} = f(x).$$

Assim,

$${}^cD_{a+}^\alpha f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} {}^cD_{a+}^\alpha (x - a)^{\alpha k}. \quad (2.15)$$

Usando o Lema 2.3.1, e fazendo $\beta - 1 = \alpha k$, obtemos

$$\begin{aligned}
{}^cD_{a+}^\alpha f(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \times \frac{\Gamma(\alpha k + 1)}{\Gamma(\alpha k + 1 - \alpha)} (x - a)^{\alpha k - \alpha} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{\Gamma(\alpha k + 1 - \alpha)} (x - a)^{\alpha k - \alpha} \\
&= \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{\Gamma(\alpha(k-1) + 1)} (x - a)^{\alpha(k-1)} \\
&= \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} (x - a)^{\alpha k} \\
&= \lambda f(x).
\end{aligned}$$

□

2.3.1 Relação entre integrais e derivadas

Nesta secção vamos apresentar a relação entre integrais e derivadas. Iremos mostrar que a derivada fracionária de Caputo é uma operação inversa para o integral fracionário.

Teorema 2.3.4. Dada uma função $f \in C^n[a, b]$ e $\alpha > 0$, tem-se que

$$I_{a+}^\alpha {}^cD_{a+}^\alpha f(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k$$

e

$$I_{b-}^\alpha {}^cD_{b-}^\alpha f(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{f^{(k)}(b)}{k!} (b - x)^k.$$

Demonstração. Usando a lei de semigrupo [17] temos

$$I_{a+}^\alpha {}^cD_{a+}^\alpha f(x) = I_{a+}^\alpha I_{a+}^{n-\alpha} f^{(n)}(x) = I_{a+}^n f^{(n)}(x). \quad (2.16)$$

Substituindo a expressão (2.7) em (2.16), temos

$$\begin{aligned}
I_{a+}^\alpha {}^cD_{a+}^\alpha f(x) &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t) dt \\
&= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} \frac{d}{dt} f^{(n-1)}(t) dt.
\end{aligned}$$

Usando a fórmula de integração por partes temos

$$\begin{aligned}
I_{a+}^\alpha {}^c D_{a+}^\alpha f(x) &= \frac{1}{(n-2)!} \int_a^x (x-t)^{n-2} \frac{d}{dt} f^{(n-2)}(t) dt - \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} (x-a)^{n-1} \\
&= \frac{1}{(n-3)!} \int_a^x (x-t)^{n-3} \frac{d}{dt} f^{(n-3)}(t) dt - \sum_{k=n-2}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \\
&= \dots = \int_a^x \frac{d}{dt} f(t) dt - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \\
&= f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k.
\end{aligned}$$

□

Observação 2.3.2. Em particular, dado $\alpha \in]0, 1[$, temos que

$$I_{a+}^\alpha {}^c D_\alpha^{a+} f(x) = f(x) - f(a) \quad \text{e} \quad I_{b-}^\alpha {}^c D_{b-}^\alpha f(x) = f(x) - f(b).$$

A partir do Teorema 2.3.4 deduz-se a fórmula de Taylor:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + I_{a+}^\alpha {}^c D_{a+}^\alpha f(x) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{f^{(k)}(b)}{k!} (b-x)^k + I_{b-}^\alpha {}^c D_{b-}^\alpha f(x).
\end{aligned}$$

Teorema 2.3.5. Dada uma função $f \in C^1[a, b]$ e $\alpha > 0$, tem-se que

$${}^c D_{a+}^\alpha I_{a+}^\alpha f(x) = f(x) \quad \text{e} \quad {}^c D_{b-}^\alpha I_{b-}^\alpha f(x) = f(x).$$

Demonstração. Por definição

$${}^c D_{a+}^\alpha I_{a+}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} F^{(n)}(t) dt, \quad (2.17)$$

onde

$$F(x) = I_{a+}^\alpha f(x).$$

Por cálculos diretos obtemos:

$$F^{(n-1)}(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha - n + 1)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-n} f(t) dt. \quad (2.18)$$

Integrando por partes a expressão (2.18), obtemos o seguinte resultado

$$F^{(n-1)}(x) = \frac{f(a)}{\Gamma(\alpha - n + 2)} (x-a)^{\alpha-n+1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha - n + 2)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-n+1} f'(t) dt,$$

e, consequentemente,

$$F^{(n)}(x) = \frac{f(a)}{\Gamma(\alpha - n + 1)} (x-a)^{\alpha-n} + \frac{1}{\Gamma(\alpha - n + 1)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-n} f'(t) dt. \quad (2.19)$$

Substituindo (2.19) em (2.17) e usando a fórmula de Dirichlet ¹, obtemos

$$\begin{aligned} {}^c D_{a+}^\alpha I_{a+}^\alpha f(x) &= \frac{f(a)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\alpha-n+1)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} (t-a)^{\alpha-n} dt \\ &+ \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\alpha-n+1)} \int_a^x \int_a^t (x-t)^{n-\alpha-1} (t-\phi)^{\alpha-n} f'(\phi) d\phi dt \\ &= \frac{f(a)(x-a)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\alpha-n+1)} \int_a^x \left(1 - \frac{t-a}{x-a}\right)^{n-\alpha-1} (t-a)^{\alpha-n} dt \\ &+ \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\alpha-n+1)} \int_a^x \int_t^x (x-\phi)^{n-\alpha-1} (\phi-t)^{\alpha-n} f'(\phi) d\phi dt. \end{aligned}$$

Usando a técnica de substituição de variável, temos

$$u = \frac{t-a}{x-a} \Rightarrow dt = (x-a)du.$$

Fazendo a substituição dos limites de integração, temos

$$\begin{cases} t=a \Rightarrow u=0 \\ t=x \Rightarrow u=1 \end{cases}.$$

¹Fórmula de Dirichlet: Se f é uma função contínua e $u, v > 0$, então

$$\int_a^t (t-x)^{u-1} dx \int_a^x (x-\tau)^{v-1} f(x, \tau) d\tau = \int_a^t d\tau \int_\tau^t (t-x)^{u-1} (x-\tau)^{v-1} f(x, \tau) dx$$

Substituindo na expressão anterior obtemos

$$\begin{aligned}
{}^c D_{a+}^\alpha I_{a+}^\alpha f(x) &= \frac{f(a)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\alpha-n+1)} \int_0^1 (1-u)^{n-\alpha-1} u^{\alpha-n} du \\
&+ \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\alpha-n+1)} \int_a^x f'(t) \int_t^x (x-\phi)^{n-\alpha-1} (\phi-t)^{\alpha-n} d\phi dt \\
&= \frac{f(a)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(n-\alpha+1)} \Gamma(n-\alpha)\Gamma(n-\alpha+1) \\
&+ \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(n-\alpha+1)} \int_a^x f'(t) dt \Gamma(n-\alpha)\Gamma(\alpha-n+1) \\
&= f(a) + f(x) - f(a) \\
&= f(x).
\end{aligned}$$

□

O teorema que se segue apresenta uma fórmula para obtermos integração por partes na presença de derivadas fracionárias.

Teorema 2.3.6. Sejam $f \in C[a, b]$ e $g \in C^n[a, b]$, então para $\alpha > 0$ temos,

$$\int_a^b f(x) {}^c D_{a+}^\alpha g(x) dx = \int_a^b D_{b-}^\alpha f(x) g(x) dx + \left[\sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{d}{dx} \right)^k I_{b-}^{n-\alpha} f(x) g^{(n-k-1)}(x) \right]_{x=a}^{x=b}$$

e

$$\int_a^b f(x) {}^c D_{b-}^\alpha g(x) dx = \int_a^b D_{a+}^\alpha f(x) g(x) dx + \left[\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k} \left(\frac{d}{dx} \right)^k I_{a+}^{n-\alpha} f(x) g^{(n-k-1)}(x) \right]_{x=a}^{x=b}.$$

Demonstração. Usando a fórmula de Dirichlet, obtém-se

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x) {}^c D_{a+}^\alpha g(x) dx &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^b \int_a^x f(x) (x-t)^{n-\alpha-1} \frac{d}{dt} g^{(n-1)}(t) dt dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^b \int_x^b f(t) (t-x)^{n-\alpha-1} dt \cdot \frac{d}{dx} g^{(n-1)}(x) dx.
\end{aligned}$$

Integrando por partes obtém-se

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)^c D_{a+}^\alpha g(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left[\int_x^b f(t)(t-x)^{n-\alpha-1} dt \cdot g^{(n-1)}(x) \right]_{x=a}^{x=b} \\
&- \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^b \frac{d}{dx} \left(\int_x^b f(t)(t-x)^{n-\alpha-1} dt \right) g^{(n-1)}(x) dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left[\int_x^b f(t)(t-x)^{n-\alpha-1} dt \cdot g^{(n-1)}(x) \right]_{x=a}^{x=b} \\
&+ \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^b \left(-\frac{d}{dx} \right) \left(\int_x^b f(t)(t-x)^{n-\alpha-1} dt \right) \cdot \frac{d}{dx} g^{(n-2)}(x) dx.
\end{aligned}$$

Usando novamente a técnica de integração por partes na expressão anterior, obtém-se

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)^c D_{a+}^\alpha g(x) &= \left[\sum_{k=0}^1 \left(-\frac{d}{dx} \right)^k \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^b f(t)(t-x)^{n-\alpha-1} dt \cdot g^{(n-k-1)}(x) \right]_{x=a}^{x=b} \\
&+ \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^b \left(-\frac{d}{dx} \right)^2 \left(\int_x^b f(t)(t-x)^{n-\alpha-1} dt \right) \cdot \frac{d}{dx} g^{(n-3)}(x) dx.
\end{aligned}$$

Repetindo este procedimento, encontraremos a n -ésima derivada

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)^c D_{a+}^\alpha g(x) &= \left[\sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{d}{dx} \right)^k \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^b f(t)(t-x)^{n-\alpha-1} dt \cdot g^{(n-k-1)}(x) \right]_{x=a}^{x=b} \\
&+ \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^b \left(-\frac{d}{dx} \right)^n \left(\int_x^b f(t)(t-x)^{n-\alpha-1} dt \right) \cdot g(x) dx \\
&= \left[\sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{d}{dx} \right)^k I_{b-}^{n-\alpha} f(x) g^{(n-k-1)}(x) \right]_{x=a}^{x=b} + \int_a^b D_{b-}^\alpha f(x) g(x) dx.
\end{aligned}$$

Com isso, fica concluída a prova. \square

2.4 Operadores de ordem variável

Até aqui apresentamos integrais e derivadas de ordem $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Nesta secção iremos estudar integrais e derivadas cuja ordem é uma função. Iremos considerar que $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ é uma função contínua.

2.4.1 Integral Fracionário de ordem variável de Riemann-Liouville

Definição 2.4.1. Sejam α e f duas funções definidas no intervalo $[a, b]$. Os integrais fracionários de Riemann-Liouville de ordem $\alpha(\cdot)$, à esquerda e à direita, respectivamente, são definidos por [35]

$$I_{a^+}^{\alpha(x)} f(x) = \int_a^x \frac{1}{\Gamma(\alpha(x))} f(t)(x-t)^{\alpha(x)-1} dt, \quad x > a$$

e

$$I_{b^-}^{\alpha(x)} f(x) = \int_x^b \frac{1}{\Gamma(\alpha(t))} f(t)(t-x)^{\alpha(t)-1} dt, \quad x < b.$$

2.4.2 Derivada Fracionária de ordem variável de Riemann-Liouville

Definição 2.4.2. Sejam $\alpha : [a, b] \rightarrow]0, 1[$ e $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções. As derivadas fracionárias de ordem $\alpha(\cdot)$ de Riemann-Liouville à esquerda e à direita, respectivamente, são definidas por

$$D_{a^+}^{\alpha(x)} f(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{1}{\Gamma(1-\alpha(x))} (x-t)^{-\alpha(x)} f(t) dt, \quad (x > a)$$

e

$$D_{b^-}^{\alpha(x)} f(x) = \frac{d}{dx} \int_x^b \frac{-1}{\Gamma(1-\alpha(t))} (t-x)^{-\alpha(t)} f(t) dt, \quad (x < b).$$

2.4.3 Derivada Fracionária de ordem variável segundo Caputo

Definição 2.4.3. Sejam $\alpha : [a, b] \rightarrow]0, 1[$ e $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções. As derivadas fracionárias de Caputo de ordem $\alpha(\cdot)$ à esquerda e à direita, respectivamente, são definidas por [35]

$${}^c D_{a^+}^{\alpha(x)} f(x) = \int_a^x \frac{1}{\Gamma(1-\alpha(x))} (x-t)^{-\alpha(x)} f'(t) dt$$

e

$${}^c D_{b^-}^{\alpha(x)} f(x) = \int_x^b \frac{-1}{\Gamma(1-\alpha(t))} (t-x)^{-\alpha(t)} f'(t) dt.$$

Observação 2.4.1. Para o caso geral, $\alpha_n : [a, b] \rightarrow]n-1, n[$, tem-se:

$${}^c D_{a^+}^{\alpha(x)} f(x) = \int_a^x \frac{1}{\Gamma(n-\alpha(x))} (x-t)^{n-\alpha(x)-1} f^{(n)}(t) dt$$

e

$${}^c D_{b^-}^{\alpha(x)} f(x) = \int_x^b \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha(t))} (t-x)^{n-\alpha(t)-1} f^{(n)}(t) dt.$$

De modo análogo, se definem integrais e derivadas de Riemann-Liouville de ordem $\alpha : [a, b] \rightarrow]n - 1, n[$.

Lema 2.4.1. Sejam $\beta \in \mathbb{R}$, considerando as funções $f(x) = (x - a)^{\beta-1}$ e $g(x) = (b - x)^{\beta-1}$, onde $\beta \geq n$. Então para $\alpha(\cdot)$, tal que $\alpha : [a, b] \rightarrow]n - 1, n[$ tem-se

$${}^c D_{a^+}^{\alpha(x)} f(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta - \alpha(x))} (x - a)^{\beta - \alpha(x) - 1}$$

e

$${}^c D_{b^-}^{\alpha(x)} f(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta - \alpha(x))} (b - x)^{\beta - \alpha(x) - 1}.$$

Observação 2.4.2. Para provar estes resultados, basta substituir α por $\alpha(x)$ no Lema 2.3.1.

2.4.4 Integração fracionária generalizada por partes

As fórmulas de integração por partes têm um papel importante no Cálculo Fracionário. As fórmulas aqui apresentadas são semelhantes às fórmulas apresentadas nas secções anteriores, com a diferença na ordem. No seguinte teorema, tais fórmulas são comprovadas para integrais envolvendo derivadas fracionárias de Caputo de ordem variável. Substituindo α por $\alpha(x)$ prova-se o seguinte:

Teorema 2.4.1. Seja $\alpha : [a, b] \rightarrow]0, 1[$, então são válidas as relações

$$\int_a^b f(x) {}^c D_{a^+}^{\alpha(x)} g(x) dx = \int_a^b D_{b^-}^{\alpha(x)} f(x) g(x) dx + \left[I_{b^-}^{1-\alpha(x)} f(x) g(x) \right]_{x=a}^{x=b}$$

e

$$\int_a^b f(x) {}^c D_{b^-}^{\alpha(x)} g(x) dx = \int_a^b D_{a^+}^{\alpha(x)} f(x) g(x) dx - \left[I_{a^+}^{1-\alpha(x)} f(x) g(x) \right]_{x=a}^{x=b}.$$

Teorema 2.4.2. As derivadas fracionárias de Caputo de ordem superior a ordem variável, com ordem $\alpha : [a, b] \rightarrow]n - 1, n[$, satisfazem as seguintes fórmulas de integração por partes:

$$\int_a^b f(x) {}^c D_{a^+}^{\alpha(x)} g(x) dx = \int_a^b D_{b^-}^{\alpha(x)} f(x) g(x) dx + \left[\sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{d}{dx} \right)^k I_{b^-}^{n-\alpha(x)} f(x) g^{(n-k-1)}(x) \right]_{x=a}^{x=b}$$

e

$$\int_a^b f(x) {}^c D_{b^-}^{\alpha(x)} g(x) dx = \int_a^b D_{a^+}^{\alpha(x)} f(x) g(x) dx + \left[\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k} \left(\frac{d}{dx} \right)^k I_{a^+}^{n-\alpha(x)} f(x) g^{(n-k-1)}(x) \right]_{x=a}^{x=b}.$$

Observação 2.4.3. Para provar estes resultados, basta substituir α por $\alpha(x)$ no Teorema 2.3.6.

Capítulo 3

Cálculo das Variações Fracionário

Neste capítulo apresentamos uma união do Cálculo clássico das Variações com o Cálculo Fracionário.

Apresentamos as condições necessárias e suficientes de otimalidade, através da Equação Fracionária de Euler-Lagrange, o problema isoperimétrico fracionário e o problema variacional fracionário com restrições holonómicas.

Cálculo das Variações Fracionário é um ramo da Análise Matemática que tem sido desenvolvido nas últimas duas décadas. O mesmo é uma generalização do Cálculo Clássico das Variações, onde a derivada de ordem inteira é substituída por uma derivada de ordem fracionária.

A teoria do Cálculo das Variações Fracionário teve início em 1996, com o trabalho desenvolvido por Riewe, a fim de descrever melhor os sistemas não conservativos em mecânica. Riewe formulou o problema do Cálculo das Variações com derivadas fracionárias e obteve a respetiva equação de Euler-Lagrange, onde explicou que o Lagrangiano tradicional e a mecânica Hamiltoniana não poderiam ser usados com forças não conservativas estando em fricção [29]. Depois do trabalho desenvolvido por Riewe, vários estudos foram surgindo a respeito do Cálculo das Variações Fracionário.

O objetivo deste capítulo é o estudo do Cálculo das Variações quando o funcional depende da derivada fracionária de Caputo de ordem variável.

3.1 O Problema Variacional Fracionário

Nesta secção dedicamo-nos a estabelecer a condição necessária de otimalidade para problemas com um Lagrangiano, dependendo da derivada fracionária de Caputo de ordem variável.

O problema fundamental do Cálculo das Variações Fracionário, no contexto da derivada fracionária de Caputo de ordem variável, é indicado como se segue.

Consideremos um funcional

$$J[y] = \int_a^b f(x, y, {}^cD_{a+}^{\alpha(x)}y) dx, \quad y \in C^1[a, b]. \quad (3.1)$$

O problema consiste em encontrar uma curva \bar{y} para a qual J atinge um valor mínimo ou máximo. Suponhamos que $f : [a, b] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e diferenciável com respeito ao segundo e terceiro argumento e para cada $y \in C^1[a, b]$, a função ${}^cD_{a+}^{\alpha(x)}y$ existe e é contínua no intervalo $[a, b]$.

No conjunto de funções admissíveis para o problema, as condições de fronteira $y(a) = y_a$ e $y(b) = y_b$, com $y_a, y_b \in \mathbb{R}$, podem ser impostas.

Definição 3.1.1. Uma curva $\bar{y} \in C^1[a, b]$ é um minimizante (local) para o funcional (3.1) se existir algum ϵ real positivo de tal forma que, para qualquer função $y \in C^1[a, b]$ e $\|\bar{y} - y\| < \epsilon$, implica que $J[\bar{y}] - J[y] \leq 0$.

3.1.1 Condição Necessária de Optimalidade

Teorema 3.1.1. Seja \bar{y} um minimizante do funcional (3.1) definido em

$$\mathcal{D} = \{y \in C^1[a, b] : y(a) = y_a \text{ e } y(b) = y_b\},$$

onde $y_a, y_b \in \mathbb{R}$ são fixos. Então, \bar{y} é uma solução da equação

$$\frac{\partial f}{\partial y} + D_{b^-}^{\alpha(x)} \frac{\partial f}{\partial {}^cD_{a+}^{\alpha(x)}y} = 0, \quad \forall x \in [a, b].$$

Demonstração. Seja $\bar{y} = y + \epsilon\eta$ uma variação de y e $\eta \in C^1[a, b]$. Uma vez que \bar{y} pertence ao conjunto \mathcal{D} , a condição de fronteira $\eta(a) = \eta(b) = 0$ deve-se verificar. Seja j uma função definida numa vizinhança de zero, dada por

$$j(\epsilon) = J[y + \epsilon\eta].$$

Seja \bar{y} um minimizante de J . Então, $\epsilon = 0$ é também minimizante de j e $j'(0) = 0$. Logo,

$$\int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial y} \eta + \frac{\partial f}{\partial {}^cD_{a+}^{\alpha(x)}y} {}^cD_{a+}^{\alpha(x)}\eta \right) dx = 0. \quad (3.2)$$

Fazendo a integração por partes ao segundo membro do integrando da equação (3.2), (Teorema 2.4.1) obtém-se:

$$\int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial^c D_{a^+}^{\alpha(x)}} {}^c D_{a^+}^{\alpha(x)} y \right) dx = \int_a^b D_{b^-}^{\alpha(x)} \frac{\partial f}{\partial^c D_{a^+}^{\alpha(x)} y} \eta dx + \left[I_{b^-}^{1-\alpha(x)} \frac{\partial f}{\partial^c D_{a^+}^{\alpha(x)} y} \eta \right]_{x=a}^{x=b} = 0. \quad (3.3)$$

Substituindo a equação (3.3) em (3.2) obtém-se

$$\int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial y} + D_{b^-}^{\alpha(x)} \frac{\partial f}{\partial^c D_{a^+}^{\alpha(x)} y} \right) \eta dx + \left[I_{b^-}^{1-\alpha(x)} \frac{\partial f}{\partial^c D_{a^+}^{\alpha(x)} y} \eta \right]_{x=a}^{x=b} = 0. \quad (3.4)$$

Uma vez que $\eta(a) = \eta(b) = 0$ nas extremidades da equação (3.4), então

$$\int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial y} + D_{b^-}^{\alpha(x)} \frac{\partial f}{\partial^c D_{a^+}^{\alpha(x)} y} \right) \eta dx = 0. \quad (3.5)$$

Pela arbitrariedade de η e pelo lema fundamental do Cálculo das Variações, conclui-se que

$$\frac{\partial f}{\partial y} + D_{b^-}^{\alpha(x)} \frac{\partial f}{\partial^c D_{a^+}^{\alpha(x)} y} = 0, \quad \forall x \in [a, b]. \quad (3.6)$$

□

Observação 3.1.1. A equação (3.6) é uma condição necessária para a existência de soluções para para o problema que envolve o funcional J . Ela é designada por Equação Fracionária de Euler-Lagrange.

Exemplo 3.1.1. Consideremos o seguinte funcional

$$J[y] = \int_0^1 \left({}^c D_{a^+}^{\alpha(x)} y - \frac{24}{\Gamma(5-\alpha(x))} x^{4-\alpha(x)} \right)^2 dx \quad (3.7)$$

com

$$y(0) = 0 \quad \text{e} \quad y(1) = 1. \quad (3.8)$$

Vamos determinar as funções y candidatas a extremantes de (3.7) pela Equação Fracionária de Euler-Lagrange, que é uma condição necessária para a determinação de extremos de um funcional dado:

$$\frac{\partial f}{\partial y} + D_{b^-}^{\alpha(x)} \frac{\partial f}{\partial^c D_{a^+}^{\alpha(x)} y} = 0, \quad \forall x \in [0, 1].$$

Tomando as respetivas derivadas, obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial {}^cD_{a^+}^{\alpha(x)}y} = 2 \left({}^cD_{a^+}^{\alpha(x)}y - \frac{24}{\Gamma(5-\alpha(x))} x^{4-\alpha(x)} \right).$$

Logo, a Equação Fracionária de Euler-Lagrange obtida é

$$D_{1^-}^{\alpha(x)} \left[2 \left({}^cD_{0^+}^{\alpha(x)}y - \frac{24}{\Gamma(5-\alpha(x))} x^{4-\alpha(x)} \right) \right] = 0. \quad (3.9)$$

Assumimos que uma dada função \hat{y} é candidata extremante do funcional dado. Tomando $\bar{y} = x^4$, obtemos, pelo Lema 2.4.1,

$$\begin{aligned} {}^cD_{0^+}^{\alpha(x)}\hat{y} &= \frac{\Gamma(5)}{\Gamma(5-\alpha(x))} x^{4-\alpha(x)} \\ &= \frac{4!}{\Gamma(5-\alpha(x))} x^{4-\alpha(x)} \\ &= \frac{24}{\Gamma(5-\alpha(x))} x^{4-\alpha(x)}. \end{aligned}$$

Então, \hat{y} satisfaz a equação (3.9).

Uma vez que $J[y] \geq 0$ e $J[\hat{y}] = 0$, então, \hat{y} é de facto minimizante do funcional J .

Exemplo 3.1.2. Consideremos o seguinte problema variacional:

$$J[y] = \int_0^1 \left[\left({}^cD_{a^+}^{\alpha(x)}y \right)^5 - 8y(x) {}^cD_{a^+}^{\alpha(x)}y \right] dx \rightarrow \min \quad (3.10)$$

sujeito a

$$y(0) = 0 \quad \text{e} \quad y(1) = 1. \quad (3.11)$$

Tomando as respetivas derivadas, obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -8 {}^cD_{0^+}^{\alpha(x)}y; \quad \frac{\partial f}{\partial {}^cD_{a^+}^{\alpha(x)}y} = 5 \left({}^cD_{a^+}^{\alpha(x)}y \right)^4 - 8y$$

Deste modo, a Equação Fracionária de Euler-Lagrange para o problema dado é

$$-8 {}^cD_{0^+}^{\alpha(x)}y + D_{1^-}^{\alpha(x)} \left[5 \left({}^cD_{0^+}^{\alpha(x)}y \right)^4 - 8y \right] = 0.$$

Uma vez que não existem métodos analíticos para resolver esta equação, métodos numéricos podem ser aplicados aqui.

3.2 O Problema Isoperimétrico Fracionário

Os problemas isoperimétricos são dos problemas mais antigos do Cálculo das Variações e consiste em maximizar ou minimizar um funcional sujeito a uma restrição integral, onde este último é constante [4].

Ao longo dos séculos, os problemas isoperimétricos têm desempenhado um papel importante em diversas áreas, tais como astronomia, geometria, álgebra e análise [3]. Atualmente, o estudo dos problemas isoperimétricos é feito de forma elegante e rigorosa, por meio da teoria do Cálculo das Variações, baseando-se na equação de Euler-Lagrange [4].

À semelhança do que vimos no Capítulo 1, nesta secção iremos apresentar o problema isoperimétrico fracionário como segue.

Dado um funcional

$$J[y] = \int_a^b f(x, y, {}^c D_{a+}^{\alpha(x)} y) dx \quad (3.12)$$

e $y \in C^1[a, b]$ uma função que minimiza ou maximiza o funcional J , com as condições de fronteira

$$y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b \quad (3.13)$$

e uma restrição integral

$$L[y] = \int_a^b g(x, y, {}^c D_{a+}^{\alpha(x)} y) dx = C, \quad C \in \mathbb{R}. \quad (3.14)$$

Consideremos uma função $g : [a, b] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e diferenciável em relação ao segundo e terceiro argumentos, tal que, para qualquer $y \in [a, b]$,

$$\frac{\partial g}{\partial {}^c D_{a+}^{\alpha(x)} y}$$

é contínua. A função $y \in [a, b]$ é admissível para o funcional (3.12) se satisfaz (3.13) e (3.14).

Definição 3.2.1. Uma função admissível y é extremal para L em (3.14) se satisfaz a equação

$$\frac{\partial g}{\partial y} + D_{b-}^{\alpha(x)} \frac{\partial g}{\partial {}^c D_{a+}^{\alpha(x)} y} = 0, \quad \forall x \in [a, b].$$

Teorema 3.2.1. Seja y um minimizante do funcional J dado em (3.12), sujeito às condições de fronteira (3.13) e à restrição isoperimétrica (3.14). Então, existe um número real λ tal que y é

solução da equação

$$\frac{\partial H}{\partial y} + D_{b^-}^{\alpha(x)} \frac{\partial H}{\partial {}^c D_{a^+}^{\alpha(x)} y} = 0, \quad \forall x \in [0, 1]. \quad (3.15)$$

onde $H : [a, b] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é a função definida por $H = f + \lambda g$.

Demonstração. Sejam $\eta_1, \eta_2 \in C^1[a, b]$ duas funções e ϵ_1, ϵ_2 dois números reais tais que $|\epsilon_1| \ll 1$ e $|\epsilon_2| \ll 1$. Consideremos uma variação de \bar{y} com dois parâmetros $\bar{y} = y + \epsilon_1 \eta_1 + \epsilon_2 \eta_2$, onde $\eta_1(a) = \eta_1(b) = 0$ e $\eta_2(a) = \eta_2(b) = 0$. Sejam j e l duas funções com dois parâmetros (ϵ_1, ϵ_2) , definidos numa vizinhança de $(0, 0)$, tal que

$$j(\epsilon_1, \epsilon_2) = J[y + \epsilon_1 \eta_1 + \epsilon_2 \eta_2] \quad \text{e} \quad l(\epsilon_1, \epsilon_2) = L[y + \epsilon_1 \eta_1 + \epsilon_2 \eta_2] - C.$$

Uma vez que

$$\frac{\partial l}{\partial \epsilon_2}(0, 0) = \int_a^b \left[\frac{\partial g}{\partial y} + D_{b^-}^{\alpha(x)} \frac{\partial g}{\partial {}^c D_{a^+}^{\alpha(x)} y} \right] \eta_2 dx \quad (3.16)$$

e assumindo que y não é extremal de (3.14), existe uma função ϵ_2 tal que $\frac{\partial l}{\partial \epsilon_2}(0, 0) \neq 0$.

Pelo Teorema da Função Implícita, existe uma única função $\eta_2(\cdot)$ de classe C^1 , definida numa vizinhança de zero, tal que $l(\epsilon_1, \epsilon_2(\epsilon_1)) = 0$.

Uma vez que $(0, 0)$ é minimizante de j sujeito a restrição $l(\cdot, \cdot) = 0$ e $\nabla l(0, 0) \neq (0, 0)$, recorrendo aos multiplicadores de Lagrange, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla(j + \lambda l)(0, 0) = (0, 0).$$

Tomando o diferencial de $j(\epsilon_1, \epsilon_2) + \lambda l(\epsilon_1, \epsilon_2)$ em relação a ϵ_1 e fazendo $(\epsilon_1, \epsilon_2) = (0, 0)$, obtemos

$$\int_a^b \left[\frac{\partial}{\partial y} (f + \lambda g) + D_{b^-}^{\alpha(x)} \frac{\partial}{\partial {}^c D_{a^+}^{\alpha(x)} y} (f + \lambda g) \right] \cdot \eta_1 dx + \left[I_{b^-}^{1-\alpha(x)} \frac{\partial(f + \lambda g)}{\partial {}^c D_{a^+}^{\alpha(x)} y} \eta_1 \right]_{x=a}^{x=b} = 0.$$

Como $\eta_1(a) = 0$, $\eta_1(b) = 0$ e $H = f + \lambda g$, então,

$$\frac{\partial H}{\partial y} + D_{b^-}^{\alpha(x)} \frac{\partial H}{\partial {}^c D_{a^+}^{\alpha(x)} y} = 0.$$

□

Teorema 3.2.2. Seja y um minimizante local para J dado em (3.12), sujeito às condições de

fronteira (3.13) e à restrição isoperimétrica (3.14). Então, existem duas constantes λ_0 e λ , com $(\lambda_0, \lambda) \neq (0, 0)$, tal que

$$\frac{\partial K}{\partial y} + D_{b^-}^{\alpha(x)} \frac{\partial K}{\partial {}^c D_{a^+}^{\alpha(x)} y} = 0,$$

onde $K = \lambda_0 f + \lambda g$.

Demonastração. Comecemos por dividir a prova deste teorema em duas partes:

1. Suponhamos que y não é extremal para (3.14). Então, pelo Teorema 3.2.1, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$H = f + \lambda g \quad \text{e} \quad \frac{\partial H}{\partial y} + D_{b^-}^{\alpha(x)} \frac{\partial H}{\partial {}^c D_{a^+}^{\alpha(x)} y} = 0.$$

Considerando $\lambda_0 = 1$, então, a primeira parte do teorema fica provada.

2. Suponhamos que y é extremal para (3.14), ou seja

$$\frac{\partial g}{\partial y} + D_{b^-}^{\alpha(x)} \frac{\partial g}{\partial {}^c D_{a^+}^{\alpha(x)} y} = 0.$$

Como $K = \lambda_0 f + \lambda g$, neste caso, tomado $\lambda_0 = 0$ e $\lambda = 1$, obtemos $K = g$. Isto é,

$$\underbrace{\lambda_0 \left[\frac{\partial f}{\partial y} + D_{b^-}^{\alpha(x)} \frac{\partial f}{\partial {}^c D_{a^+}^{\alpha(x)} y} \right]}_{=0} + \lambda \left[\frac{\partial g}{\partial y} + D_{b^-}^{\alpha(x)} \frac{\partial g}{\partial {}^c D_{a^+}^{\alpha(x)} y} \right] = \frac{\partial g}{\partial y} + D_{b^-}^{\alpha(x)} \frac{\partial g}{\partial {}^c D_{a^+}^{\alpha(x)} y} = 0.$$

□

Exemplo 3.2.1. Consideremos o seguinte problema

$$J[y] = \int_0^1 \left({}^c D_{a^+}^{\alpha(x)} y \right)^2 + \left(\frac{6}{\Gamma(4 - \alpha(x))} x^{3-\alpha(x)} \right)^2 dx \longrightarrow \min$$

sujeito às condições de fronteira $y(0) = 0$ e $y(1) = 1$ e à restrição isoperimétrica

$$L[y] = \int_0^1 \frac{x^{3-\alpha(x)}}{\Gamma(4 - \alpha(x))} {}^c D_{a^+}^{\alpha(x)} y dx = \int_0^1 \frac{6x^{6-2\alpha(x)}}{(\Gamma(4 - \alpha(x)))^2} dx.$$

Seja $H = f + \lambda g$, então, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$ tem-se que

$$H = \left({}^cD_{0^+}^{\alpha(x)} y \right)^2 + \left(\frac{6}{\Gamma(4 - \alpha(x))} x^{3-\alpha(x)} \right)^2 + \lambda \left[\frac{x^{3-\alpha(x)}}{\Gamma(4 - \alpha(x))} {}^cD_{0^+}^{\alpha(x)} y \right].$$

Tendo em conta a Equação de Euler-Lagrange, e calculando as derivadas parciais em relação ao segundo e terceiro argumentos, obtemos

$$\frac{\partial H}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial H}{\partial {}^cD_{a^+}^{\alpha(x)} y} = 2 \left({}^cD_{a^+}^{\alpha(x)} y \right) + \lambda \left(\frac{x^{3-\alpha(x)}}{\Gamma(4 - \alpha(x))} \right).$$

Logo, a Equação Fracionária de Euler-Lagrange associada ao problema dado é

$$D_{1^-}^{\alpha(x)} \left[2 \left({}^cD_{a^+}^{\alpha(x)} y \right) + \lambda \left(\frac{x^{3-\alpha(x)}}{\Gamma(4 - \alpha(x))} \right) \right] = 0. \quad (3.17)$$

Seja $\lambda = -12$ e $\bar{y} = x^3$. Então,

$${}^cD_{0^+}^{\alpha(x)} \bar{y} = \frac{3!}{\Gamma(4 - \alpha(x))} x^{3-\alpha(x)},$$

e consequentemente

$${}^cD_{0^+}^{\alpha(x)} \bar{y} = \frac{6}{\Gamma(4 - \alpha(x))} x^{3-\alpha(x)}.$$

Então $\bar{y} = x^3$ e $\lambda = -12$ satisfazem a equação (3.17). Além disso, como $J[y] \geq 0$ e $J[\bar{y}] = 0$, então $\bar{y} = x^3$ é minimizante de J .

3.3 Problema Variacional Fracionário com Restrições Holonómicas

Nesta secção iremos apresentar resultados de funcionais que dependem de um vetor de funções $y = (y_1, y_2)$.

Sejam $y_1, y_2 \in C^1[a, b]$ são duas funções contínuas e diferenciáveis e $y_1(a), y_2(a), y_1(b), y_2(b)$ números reais fixos, tais que $(y_1(a), y_2(a)) = y_a$ e $(y_1(b), y_2(b)) = y_b$. Consideremos o seguinte problema [2]:

$$J[y_1, y_2] = \int_a^b f \left(x, y_1, y_2, {}^cD_{a^+}^{\alpha(x)} y_1, {}^cD_{a^+}^{\alpha(x)} y_2 \right) dx \longrightarrow \min \quad (3.18)$$

sujeito às condições de fronteira

$$(y_1(a), y_2(a)) = y_a \quad \text{e} \quad (y_1(b), y_2(b)) = y_b, \quad y_a, y_b \in \mathbb{R}^2 \quad (3.19)$$

e à restrição holonómica

$$g(x, y_1, y_2) = 0. \quad (3.20)$$

Por hipótese, assumimos que as seguintes condições são satisfeitas [39]:

1. $f : [a, b] \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua e diferenciável em relação aos n -ésimos argumentos, com $n = 2, 3, 4, 5$;
2. Dada uma função qualquer $y = (y_1, y_2)$, $x \rightarrow D_{b^-}^{\alpha(x)} \frac{\partial f}{\partial^c D_{a^+}^{\alpha(x)} y_n}$ é contínua para $n = 1, 2$;
3. A função $g : [a, b] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e diferenciável com respeito ao segundo e terceiro argumentos.

Teorema 3.3.1. Seja o par (y_1, y_2) um minimizante de J em (3.18), sujeito às condições de fronteira (3.19) e à restrição holonómica (3.20). Se $\frac{\partial g}{\partial y_2} \neq 0$, para qualquer $x \in [a, b]$, então, existe uma função contínua $\mu : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que (y_1, y_2) é uma solução de

$$\frac{\partial f}{\partial y_1} + D_{b^-}^{\alpha(x)} \frac{\partial f}{\partial^c D_{a^+}^{\alpha(x)} y_1} + \mu \frac{\partial g}{\partial y_1} = 0 \quad (3.21)$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y_2} + D_{b^-}^{\alpha(x)} \frac{\partial f}{\partial^c D_{a^+}^{\alpha(x)} y_2} + \mu \frac{\partial g}{\partial y_2} = 0. \quad (3.22)$$

Demonstração. Consideremos uma variação $(\bar{y}_1, \bar{y}_2) = (y_1 + \epsilon \eta_1, y_2 + \epsilon \eta_2)$, onde η_1 e η_2 são duas funções contínuas definidas em $[a, b]$ satisfazendo as condições de fronteira $\eta_1(a) = \eta_2(a) = \eta_1(b) = \eta_2(b) = 0$, e $\epsilon \in \mathbb{R}$ um parâmetro suficientemente pequeno.

Uma vez que $\frac{\partial g}{\partial y_2} \neq 0$, para qualquer $x \in [a, b]$, pelo Teorema da Função Implícita existe uma única função $\eta_2(\epsilon, \eta_1)$ tal que $(y_1 + \epsilon \eta_1, y_2 + \epsilon \eta_2)$ satisfaz (3.20). Logo, para qualquer $x \in [a, b]$ tem-se que

$$g(x, y_1 + \epsilon \eta_1, y_2 + \epsilon \eta_2) = 0. \quad (3.23)$$

Então,

$$\frac{\partial g}{\partial y_1} \eta_1 + \frac{\partial g}{\partial y_2} \eta_2 = 0. \quad (3.24)$$

Tendo em conta que $\frac{\partial g}{\partial y_2} \neq 0$, para qualquer $x \in [a, b]$, provamos (3.22) se definirmos

$$\mu = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y_2} + D_{b^-}^{\alpha(x)} \frac{\partial f}{\partial {}^c D_{a^+}^{\alpha(x)} y_2}}{\frac{\partial g}{\partial y_2}}. \quad (3.25)$$

Multiplicando o numerador e o denominador do segundo membro de (3.25) por η_2 , obtemos

$$\mu \cdot \eta_2 = -\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial y_2} + D_{b^-}^{\alpha(x)} \frac{\partial f}{\partial {}^c D_{a^+}^{\alpha(x)} y_2} \right) \eta_2}{\frac{\partial g}{\partial y_2} \eta_2}. \quad (3.26)$$

Manipulando a equação (3.24), obtemos a igualdade

$$\frac{\partial g}{\partial y_1} \eta_1 = -\frac{\partial g}{\partial y_2} \eta_2. \quad (3.27)$$

Substituindo (3.27) em (3.26) obtemos

$$\mu \frac{\partial g}{\partial y_1} \eta_1 = \left(\frac{\partial f}{\partial y_2} + D_{b^-}^{\alpha(x)} \frac{\partial f}{\partial {}^c D_{a^+}^{\alpha(x)} y_2} \right) \eta_2. \quad (3.28)$$

Tendo em conta que $(\bar{y}_1, \bar{y}_2) = (y_1 + \epsilon \eta_1, y_2 + \epsilon \eta_2)$, então, se (\bar{y}_1, \bar{y}_2) é um minimizante de J , significa que

$$\int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial y_1} \eta_1 + \frac{\partial f}{\partial y_2} \eta_2 + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial {}^c D_{a^+}^{\alpha(x)} y_1} {}^c D_{a^+}^{\alpha(x)} \eta_1}_{\mathbf{m}_1} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial {}^c D_{a^+}^{\alpha(x)} y_2} {}^c D_{a^+}^{\alpha(x)} \eta_2}_{\mathbf{m}_2} \right] dx = 0. \quad (3.29)$$

Usando a fórmula de integração por partes nos termos \mathbf{m}_1 e \mathbf{m}_2 , obtém-se

$$\mathbf{m}_1 = \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial {}^c D_{a^+}^{\alpha(x)} y_1} {}^c D_{a^+}^{\alpha(x)} \eta_1 \right) dx = \int_a^b \left(D_{b^-}^{\alpha(x)} \frac{\partial f}{\partial {}^c D_{a^+}^{\alpha(x)} y_1} \eta_1 \right) dx + \left[I_{b^-}^{1-\alpha(x)} \frac{\partial f}{\partial {}^c D_{a^+}^{\alpha(x)} y_1} \eta_1 \right]_{x=a}^{x=b} \quad (3.30)$$

e

$$\mathbf{m}_2 = \int_a^b \left(\frac{\partial f}{c D_{a^+}^{\alpha(x)} y_2} {}^c D_{a^+}^{\alpha(x)} \eta_2 \right) dx = \int_a^b \left(D_{b^-}^{\alpha(x)} \frac{\partial f}{\partial {}^c D_{a^+}^{\alpha(x)} y_2} \eta_2 \right) + \left[I_{b^-}^{1-\alpha(x)} \frac{\partial f}{\partial {}^c D_{a^+}^{\alpha(x)} y_2} \eta_2 \right]_{x=a}^{x=b}. \quad (3.31)$$

Substituindo (3.30) e (3.31) em (3.29) obtém-se

$$\begin{aligned} & \int_a^b \left[\left(\frac{\partial f}{\partial y_1} + D_{b^-}^{\alpha(x)} \frac{\partial f}{\partial {}^c D_{a^+}^{\alpha(x)} y_1} \right) \eta_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y_2} + D_{b^-}^{\alpha(x)} \frac{\partial f}{\partial {}^c D_{a^+}^{\alpha(x)} y_2} \right) \eta_2 \right] dx \\ & + \left[I_{b^-}^{1-\alpha(x)} \frac{\partial f}{\partial {}^c D_{a^+}^{\alpha(x)} y_1} \eta_1 \right]_{x=a}^{x=b} + \left[I_{b^-}^{1-\alpha(x)} \frac{\partial f}{\partial {}^c D_{a^+}^{\alpha(x)} y_2} \eta_2 \right]_{x=a}^{x=b} = 0. \end{aligned}$$

Uma vez que $\eta_1(a) = \eta_2(a) = \eta_1(b) = \eta_2(b) = 0$, então, obtém-se

$$\int_a^b \left[\left(\frac{\partial f}{\partial y_1} + D_{b^-}^{\alpha(x)} \frac{\partial f}{\partial {}^c D_{a^+}^{\alpha(x)} y_1} \right) \eta_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y_2} + D_{b^-}^{\alpha(x)} \frac{\partial f}{\partial {}^c D_{a^+}^{\alpha(x)} y_2} \right) \eta_2 \right] dx = 0. \quad (3.32)$$

Usando a igualdade (3.28), a expressão (3.32) pode ser reduzida à expressão

$$\int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial y_1} + D_{b^-}^{\alpha(x)} \frac{\partial f}{\partial {}^c D_{a^+}^{\alpha(x)} y_1} + \mu \frac{\partial g}{\partial y_1} \right] \eta_1 dx = 0.$$

Pelo Lema 1.2.1 tendo em conta que η_1 é arbitrária, obtemos a equação

$$\frac{\partial f}{\partial y_1} + D_{b^-}^{\alpha(x)} \frac{\partial f}{\partial {}^c D_{a^+}^{\alpha(x)} y_1} + \mu \frac{\partial g}{\partial y_1} = 0.$$

□

3.4 Condições Suficientes de Optimalidade

Nesta secção pretendemos apresentar uma condição suficiente para que o funcional J dado em (3.1) atinja os extremos locais. Normalmente, algumas condições de convexidade sobre o Lagrangiano são necessárias. Para tal, recordamos a definição da função convexa.

Definição 3.4.1. Consideremos uma função $f(x, y, {}^c D_{a^+}^{\alpha(x)} y)$. Dizemos que f é uma função convexa

relativamente a y e ${}^cD_{a^+}^{\alpha(x)}y$ se $\frac{\partial f}{\partial y}$ e $\frac{\partial f}{\partial {}^cD_{a^+}^{\alpha(x)}y}$ existem e são contínuas e a condição

$$f(x, y + y_1, z + z_1) - f(x, y, z) \geq \frac{\partial f}{\partial y} y_1 + \frac{\partial f}{\partial z} z_1$$

é válida para cada $x, y, {}^cD_{0^+}^{\alpha(x)}y$.

Teorema 3.4.1. Suponhamos que a função $f(x, y, {}^cD_{a^+}^{\alpha(x)}y)$ é convexa relativamente a y e ${}^cD_{a^+}^{\alpha(x)}y$ em $[a, b] \times \mathbb{R}^2$, então cada solução da Equação Fracionária de Euler-Lagrange minimiza o funcional J definido em

$$\mathcal{D}\{y \in C^1[a, b] : y(a) = y_a \text{ e } y(b) = y_b\}.$$

Demonstração. Seja y uma solução da equação (3.6) e $y + \epsilon\eta$ uma variação de y , com

$$|\epsilon| \ll 1, \eta \in C^1[a, b] \text{ e } \eta(a) = \eta(b) = 0.$$

Então,

$$\begin{aligned} J[y + \epsilon\eta] - J[y] &= \int_a^b \left[f\left(x, y + \epsilon\eta, {}^cD_{a^+}^{\alpha(x)}y + \epsilon {}^cD_{a^+}^{\alpha(x)}\eta\right) - f\left(x, y, {}^cD_{a^+}^{\alpha(x)}y\right) \right] dx \\ &\geq \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial y} \eta + \frac{\partial f}{\partial {}^cD_{a^+}^{\alpha(x)}y} {}^cD_{a^+}^{\alpha(x)}\eta \right) dx. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Procedendo a integração por partes do segundo termo do integral da desigualdade (3.33) obtemos

$$\int_a^b \frac{\partial f}{\partial {}^cD_{a^+}^{\alpha(x)}y} {}^cD_{a^+}^{\alpha(x)}\eta dx = \left[I_{b^-}^{1-\alpha(x)} \frac{\partial f}{\partial {}^cD_{a^+}^{\alpha(x)}y} \eta \right]_{x=a}^{x=b} + \int_a^b D_{b^-}^{\alpha(x)} \frac{\partial f}{\partial {}^cD_{a^+}^{\alpha(x)}y} \eta dx. \quad (3.34)$$

Substituindo (3.34) em (3.33), obtemos

$$J[y + \epsilon\eta] - J[y] \geq \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y} \eta dx + \int_a^b D_{b^-}^{\alpha(x)} \frac{\partial f}{\partial {}^cD_{a^+}^{\alpha(x)}y} \eta dx + \left[I_{b^-}^{1-\alpha(x)} \frac{\partial f}{\partial {}^cD_{a^+}^{\alpha(x)}y} \eta \right]_{x=a}^{x=b}.$$

Como $\eta(a) = \eta(b) = 0$, então

$$\begin{aligned} J[y + \epsilon\eta] - J[y] &\geq \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y} \eta dx + \int_a^b D_{b^-}^{\alpha(x)} \frac{\partial f}{cD_{a^+}^{\alpha(x)} y} \eta dx = 0 \\ &\geq \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y} \eta + D_{b^-}^{\alpha(x)} \frac{\partial f}{cD_{a^+}^{\alpha(x)} y} \eta dx = 0 \\ &\geq \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial y} + D_{b^-}^{\alpha(x)} \frac{\partial f}{cD_{a^+}^{\alpha(x)} y} \right) \eta dx = 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$J[y + \epsilon\eta] - J[y] \geq 0.$$

□

Exemplo 3.4.1. Consideremos o seguinte problema variacional fracionário:

$$J[y] = \int_0^1 \left(cD_{a^+}^{\alpha(x)} y - \frac{5!}{\Gamma(6 - \alpha(x))} x^{5-\alpha(x)} \right)^2 + (y - x^5)^2 dx \longrightarrow \min$$

sujeito às condições de fronteira $y(0) = 0$ e $y(1) = 1$.

Vamos determinar uma função y que minimiza o funcional J . Tomando as derivadas parciais em relação ao segundo e terceiro argumentos, obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2(y - x^5); \quad \frac{\partial f}{\partial cD_{a^+}^{\alpha(x)} y} = 2 \left(cD_{0^+}^{\alpha(x)} y - \frac{5!}{\Gamma(6 - \alpha(x))} x^{5-\alpha(x)} \right).$$

Pela Equação de Euler-Lagrange (3.6), temos que

$$2(y - x^5) + D_{1^-}^{\alpha(x)} \left[2 \left(cD_{0^+}^{\alpha(x)} y - \frac{5!}{\Gamma(6 - \alpha(x))} x^{5-\alpha(x)} \right) \right] = 0.$$

Tomando $\bar{y} = x^5$, então, pelo Lema 2.4.1 temos

$$cD_{a^+}^{\alpha(x)} \bar{y} = \frac{\Gamma(6)}{\Gamma(6 - \alpha(x))} x^{5-\alpha(x)}.$$

Então $\bar{y} = x^5$ satisfaz a Equação de Euler-Lagrange. Como f é convexa, $\bar{y} = x^5$ é minimizante do funcional J .

Teorema 3.4.2. Suponhamos que para alguma constante $\lambda \geq 0$, as funções $f(x, y, {}^cD_{a^+}^{\alpha(x)}y)$ e $\lambda g(x, y, {}^cD_{a^+}^{\alpha(x)}y)$ são convexas em $[a, b] \times \mathbb{R}^2$. Então, qualquer solução \bar{y} na equação de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial H}{\partial y} + D_{b^-}^{\alpha(x)} \frac{\partial H}{\partial {}^cD_{a^+}^{\alpha(x)}y} = 0 \quad (3.35)$$

é minimizante do problema isoperimétrico (3.12), (3.13), (3.14), onde $H = f + \lambda g$.

Demonstração. Tendo em conta que as funções f e g são convexas, então, $H = f + \lambda g$ também é convexa.

Se \bar{y} satisfaz a equação (3.35), então, pelo Teorema 3.4.1 \bar{y} é minimizante de

$$\int_a^b H(x, y, {}^cD_{a^+}^{\alpha(x)}y) dx. \quad (3.36)$$

Uma vez que $\bar{y} = y + \epsilon\eta$, então

$$\int_a^b H(x, \bar{y} + \eta, {}^cD_{a^+}^{\alpha(x)}\bar{y} + {}^cD_{a^+}^{\alpha(x)}\eta) dx \geq \int_a^b H(x, \bar{y}, {}^cD_{a^+}^{\alpha(x)}\bar{y}) dx. \quad (3.37)$$

Como $H = f + \lambda g$, então de (3.37) obtemos

$$\begin{aligned} & \int_a^b f(x, \bar{y} + \eta, {}^cD_{a^+}^{\alpha(x)}\bar{y} + {}^cD_{a^+}^{\alpha(x)}\eta) dx + \lambda \underbrace{\int_a^b g(x, \bar{y} + \eta, {}^cD_{a^+}^{\alpha(x)}\bar{y} + {}^cD_{a^+}^{\alpha(x)}\eta) dx}_{=C} \geq \int_a^b f(x, \bar{y}, {}^cD_{a^+}^{\alpha(x)}\bar{y}) dx + \\ & + \lambda \underbrace{\int_a^b g(x, \bar{y}, {}^cD_{a^+}^{\alpha(x)}\bar{y}) dx}_{=C}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\int_a^b f(x, \bar{y} + \eta, {}^cD_{a^+}^{\alpha(x)}\bar{y} + {}^cD_{a^+}^{\alpha(x)}\eta) dx \geq \int_a^b f(x, \bar{y}, {}^cD_{a^+}^{\alpha(x)}\bar{y}) dx,$$

e \bar{y} minimiza o funcional (3.12). Com isso, fica concluída a prova. \square

Agora vamos apresentar uma condição suficiente de otimalidade para problemas com restrições holonómicas.

Teorema 3.4.3. Sejam $f(x, y_1, y_2, {}^cD_{a^+}^{\alpha(x)}y_1, {}^cD_{a^+}^{\alpha(x)}y_2)$ uma função convexa relativamente a $y_1, y_2, {}^cD_{a^+}^{\alpha(x)}y_1, {}^cD_{a^+}^{\alpha(x)}y_2$ em $[a, b] \times \mathbb{R}^4$ e $g : [a, b] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e diferenciável com respeito ao segundo e terceiro argumentos. Consideremos uma outra função contínua

$\mu : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida pela expressão (3.21) e $\frac{\partial g}{\partial y_2} \neq 0$ para qualquer $x \in [a, b]$. Se y é solução de (3.22) sujeito a restrição holonómica (3.20), então y é também uma solução para o problema (3.18)-(3.20).

Demonstração. Consideremos uma variação de y como sendo $y + \epsilon\eta$, então tem-se que

$$\begin{aligned} J[y + \epsilon\eta] - J[y] &= \int_a^b \left[f(x, y_1 + \epsilon\eta_1, y_2 + \epsilon\eta_2, {}^cD_{a^+}^{\alpha(x)}y_1 + \epsilon {}^cD_{a^+}^{\alpha(x)}\eta_1, {}^cD_{a^+}^{\alpha(x)}y_2 + \epsilon {}^cD_{a^+}^{\alpha(x)}\eta_2) \right. \\ &\quad \left. - f(x, y_1, y_2, {}^cD_{a^+}^{\alpha(x)}y_1, {}^cD_{a^+}^{\alpha(x)}y_2) \right] dx. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} J[y + \epsilon\eta] - J[y] &\geq \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial y_1} \epsilon\eta_1 + \frac{\partial f}{\partial {}^cD_{a^+}^{\alpha(x)}y_1} \epsilon {}^cD_{a^+}^{\alpha(x)}\eta_1 + \frac{\partial f}{\partial y_2} \epsilon\eta_2 + \frac{\partial f}{\partial {}^cD_{a^+}^{\alpha(x)}y_2} \epsilon {}^cD_{a^+}^{\alpha(x)}\eta_2 \right] dx \\ &\geq \int_a^b \left[\left(\frac{\partial f}{\partial y_1} \eta_1 + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial {}^cD_{a^+}^{\alpha(x)}y_1} {}^cD_{a^+}^{\alpha(x)}\eta_1}_{n_1} \right) \epsilon + \left(\frac{\partial f}{\partial y_2} \eta_2 + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial {}^cD_{a^+}^{\alpha(x)}y_2} {}^cD_{a^+}^{\alpha(x)}\eta_2}_{n_2} \right) \epsilon \right] dx. \end{aligned}$$

Integrando por partes os termos n_1 e n_2 da expressão anterior e tendo em conta que

$$\eta_1(a) = \eta_2(a) = \eta_1(b) = \eta_2(b) = 0,$$

obtemos

$$\begin{aligned} J[y + \epsilon\eta] - J[y] &\geq \int_a^b \left[\left(\frac{\partial f}{\partial y_1} \eta_1 + D_{b^-}^{\alpha(x)} \frac{\partial f}{\partial {}^cD_{a^+}^{\alpha(x)}y_1} \eta_1 \right) \epsilon + \left(\frac{\partial f}{\partial y_2} \eta_2 + D_{b^-}^{\alpha(x)} \frac{\partial f}{\partial {}^cD_{a^+}^{\alpha(x)}y_2} \eta_2 \right) \epsilon \right] dx \\ &\quad + \underbrace{\left[I_{b^-}^{1-\alpha(x)} \frac{\partial f}{\partial {}^cD_{a^+}^{\alpha(x)}y_1} \eta_1 \right]_{x=a}^{x=b}}_{=0} + \underbrace{\left[I_{b^-}^{1-\alpha(x)} \frac{\partial f}{\partial {}^cD_{a^+}^{\alpha(x)}y_2} \eta_2 \right]_{x=a}^{x=b}}_{=0} \\ &\geq \int_a^b \left[\left(\frac{\partial f}{\partial y_1} + D_{b^-}^{\alpha(x)} \frac{\partial f}{\partial {}^cD_{a^+}^{\alpha(x)}y_1} \right) \epsilon\eta_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y_2} + D_{b^-}^{\alpha(x)} \frac{\partial f}{\partial {}^cD_{a^+}^{\alpha(x)}y_2} \right) \epsilon\eta_2 \right] dx. \end{aligned}$$

Como $g(x, y_1 + \epsilon\eta_1, y_2 + \epsilon\eta_2)$, segue que

$$\eta_2 = -\frac{\frac{\partial g}{\partial y_1}\eta_1}{\frac{\partial g}{\partial y_2}},$$

e assim

$$\begin{aligned} J[y + \epsilon\eta] - J[y] &\geq \int_a^b \left[\left(\frac{\partial f}{\partial y_1} + D_{b^-}^{\alpha(x)} \frac{\partial f}{\partial^c D_{a^+}^{\alpha(x)} y_1} \right) \epsilon\eta_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y_2} + D_{b^-}^{\alpha(x)} \frac{\partial f}{\partial^c D_{a^+}^{\alpha(x)} y_2} \right) \epsilon \left(-\frac{\frac{\partial g}{\partial y_1}\eta_1}{\frac{\partial g}{\partial y_2}} \right) \right] dx \\ &\geq \int_a^b \left[\left(\frac{\partial f}{\partial y_1} + D_{b^-}^{\alpha(x)} \frac{\partial f}{\partial^c D_{a^+}^{\alpha(x)} y_1} \right) \epsilon\eta_1 - \left(\frac{\partial f}{\partial y_2} + D_{b^-}^{\alpha(x)} \frac{\partial f}{\partial^c D_{a^+}^{\alpha(x)} y_2} \right) \frac{\frac{\partial g}{\partial y_1}\epsilon\eta_1}{\frac{\partial g}{\partial y_2}} \right] dx \\ &\geq \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial y_1} + D_{b^-}^{\alpha(x)} \frac{\partial f}{\partial^c D_{a^+}^{\alpha(x)} y_1} + \mu \frac{\partial g}{\partial y_1} \right] \epsilon\eta_1 dx. \end{aligned}$$

Como y satisfaz a Equação fracionária de Euler-Lagrange em (3.21), logo o integrando é igual a zero, e portanto,

$$J[y + \epsilon\eta] - J[y] \geq 0.$$

□

Considerações finais

O presente trabalho possibilitou fazer uma reflexão geral a respeito da necessidade de se obter conhecimentos mais sólidos sobre o Cálculo das Variações Fracionário, pois, os conteúdos abordados ao longo desta dissertação contribuíram para uma melhor compreensão dos problemas variacionais com especial atenção às condições necessárias e suficientes de otimalidade para funcionais dependendo de derivadas fracionárias de ordem variável.

A bibliografia recolhida e reunida na fase inicial do trabalho permitiu reconhecer a importância da temática e das soluções existentes. De maneira a compreendermos melhor o tema em estudo, no Capítulo 1 trouxemos em abordagem os aspectos teóricos do Cálculo Clássico das Variações, sob uma perspectiva introdutória, onde nos empenhamos em apresentar alguns resultados fundamentais da Teoria do Cálculo das Variações e aplicações. Tais resultados serviram de ponto de partida, sugerindo uma forma e uma ordem mais ou menos natural de abordar os elementos teóricos necessários para um tratamento analítico cuidadoso.

Posteriormente, apresentamos algumas das suas aplicações, o que conferiu vitalidade à teoria abordada, sendo que ao longo deste capítulo foram abordados alguns dos problemas clássicos, como a Equação de Euler-Lagrange que é uma condição necessária de otimalidade, as condições de transversalidade, os problemas isoperimétricos, e uma condição suficiente para a existência de extremos de funcionais.

No segundo capítulo apresentamos alguns resultados referentes ao Cálculo Fracionário. Para a concretização do mesmo, procuramos primeiramente, apresentar as funções especiais como requisitos básicos à compreensão do Cálculo Fracionário.

Pudemos ver que ao se fazer uma analogia entre o Cálculo Fracionário e o Cálculo usual, isto é, comparando os resultados dos integrais e das derivadas fracionárias com as mesmas operações do Cálculo usual, existem algumas diferenças. Por exemplo, a derivada de ordem fracionária de uma função constante na definição de Riemann-Liouville é diferente de zero, ao passo que no Cálculo usual é igual a zero. Em particular, apesar de mais restritiva, a derivada de Caputo admite a mesma interpretação que a formulação clássica de ordem inteira.

Vimos que diferentes definições de derivadas fracionárias podem ter resultados diferentes. Porém, existe a relação de conexão entre a definição de derivada fracionária de Riemann-Liouville e Caputo. Apresentamos ainda resultados fundamentais que serviram de base para a construção do capítulo seguinte, como a fórmula de integração por partes de uma derivada fracionária de ordem variável.

Foi possível verificar também que o Cálculo Fracionário, apesar de ter sido descoberto na mesma época do Cálculo usual, tem sido estudado com menor frequência em comparação ao cálculo de

derivadas e integrais de ordens inteiras.

Finalmente, no Capítulo 3 trouxemos em atenção a união entre o Cálculo clássico das Variações e o Cálculo Fracionário, onde apresentamos o problema variacional fracionário envolvendo o operador fracionário de Caputo de ordem variável.

Ao longo deste capítulo, apresentamos os resultados da Equação Fracionária de Euler-Lagrange, deduzindo deste modo, as condições necessárias e suficientes de optimidade, o problema isoperimétrico fracionário e o problema variacional fracionário com restrições holonómicas. Após a concretização deste trabalho, verificamos a importância do estudo de derivadas e integrais de ordem arbitrária. Alguns autores afirmam que um número elevado de fenómenos do mundo real é melhor descrito por derivadas de ordem não inteira, pois, as derivadas fracionárias têm características originais [35].

Apesar da sua importância na área da Matemática aplicada, da Física, da Engenharia, e em outras áreas importantes, o Cálculo de ordem arbitrária é pouco estudado nos cursos de licenciatura, e como aluno de pós-graduação, este trabalho serviu de grande aprendizagem. Para a construção desta dissertação e durante todo o seu processo foram utilizados como referências primordiais [1], [2], [3], [4], [6], [7], [8], [9], [12], [17], [18], [23] e [35]. São materiais valiosos para o aprofundamento das ideias subjacentes ao Cálculo das Variações com operadores fracionários de ordem variável.

Bibliografia

- [1] R. Almeida, *A Caputo fractional derivative of a function with respect to another function*. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. (44) 460-481, (2017).
- [2] R. Almeida, *Variational Problems Involving a Caputo-Type Fractional Derivative*. Journal of Optimization Theory and Applications. (174) 267-294, (2017).
- [3] R. Almeida e D. F. M. Torres, *Hölderian variational problems subject to integral constraints*, J. Math. Anal. Appl. (359), no. 2, 674–681, (2009).
- [4] R. Almeida e D. F. M. Torres, *Necessary and sufficient conditions for the fractional calculus of variations with Caputo derivatives*, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. (16), no. 3, 1490-1500, (2011).
- [5] P. L. Butzer, U. Westphal, *An Introduction to Fractional Calculus*, World Scientific, Singapore, (2000).
- [6] B. Van Brunt, *The Calculus of Variations*, United States of America, Springer Science, LLC, (2006).
- [7] C. A. L. Campos, *Algumas Aplicações de Cálculo Variacional: da Brachistócrona a Desigualdade de Hardy-Sobolev*, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica CAROLINE, Campinas, (2017).
- [8] R. F. Camargo, Tese de Doutoramento: *Cálculo Fracionário e Aplicações*, Universidade Estadual de Campinas, (2009).
- [9] R. F. Camargo, E. C. de Oliveira, *Cálculo Fraccionário*, Livraria da Física, São Paulo, Brasil, (2015).
- [10] K. Diethelm, *Epidemiology: spreading of infections diseases, Nonlinear Dynamics*, (71) 613-619, (2013).

- [11] Z. E. A. Fellah e C. Depollier, *Application of fractional calculus to the sound waves propagation in rigid porous materials: Validation via ultrasonic measurement*, Acta Acust. (88) 34-39, (2002).
- [12] A. P X. Flores, *Cálculo Variacional: Aspectos teóricos e aplicações*, Campos de Rio Claro, (2011).
- [13] M. Goto e D. Ishii, *Semidifferential electroanalysis*, J. Electroanal. Chem. and Interfacial Electrochem. (61) 361–365 (1975).
- [14] R. Herrmann, *Folded potentials in cluster physics—a comparison of Yukawa and Coulomb potentials with Riesz fractional integrals*, J. Phys. A (46) no. 40, 405203, 12 pp. (2013).
- [15] R. Hilfer, *Applications of fractional calculus in physics*, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, (2000).
- [16] M. I. Kamien e N. L. Schwartz, *Dynamic Optimization: The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management*, New York: Elsevier Science Publishing, second edition, (1991).
- [17] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava J.J. Trujillo *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Amsterdam Elsevier Science, (2006).
- [18] L. Komzsik, *Applied Calculus of Variations for Engineers*, Taylor e Francis Group, LLC, (2009).
- [19] A. Leitão, *Cálculo Variacional e Controle Ótimo*, 23º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA - Rio de Janeiro, (2001).
- [20] F. Mainardi, *The fundamental solutions for the fractional diffusion-wave equation*, Appl. Math. Lett. (9), no. 6, 23–28, (1996).
- [21] F. Mainardi, *Fractional relaxation-oscillation and fractional diffusion-wave phenomena*, Chaos Solitons Fractals. (7), no. 6, 1461–1477, (1996).
- [22] A. M. Mathai, H. J. Haubold, *An Introduction to Fractional Calculus*, New York, Nova Science Publishers, (2017).
- [23] A. B. Malinowska e D. F. M. Torres, *Introduction to the fractional calculus of variations*, Imp. Coll. Press, London, (2012).
- [24] A. B. Malinowska, T. Odzijewicz, D. F. M. Torres, *Advanced methods in the fractional calculus of variations*, Springer briefs applied sciences and technology. Cham: Springer, (2015).

- [25] A. Le Mehaute e G. Crepy, *Introduction to transfer and motion in fractal media: the geometry of kinetics*, *Solid State Ion.*, vol. 9–10, pp. 17–30, (1983).
- [26] K. B. Oldham e J. Spanier, *The Fractional Calculus, Theory and applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order*, Dover Publications, Inc., New York, (2002).
- [27] D. S. Oliveira, Dissertação de Mestrado: *Derivada Fracionária e as Funções de Mittag-Leffler*, Universidade Estadual de Campinas, (2014).
- [28] A. Oustaloup, *Systèmes asservis linéaires d'ordre fractionnaire*, Masson, Paris, French. (1983).
- [29] F. Riewe, *Nonconservative Lagrangian and Hamiltonian mechanics*, Phys. Rev. E (53) 1890-1899, (1996).
- [30] H. Sagan, *Introduction to the Calculus of Variations*, McGraw-Hill Book Company, EUA, (1969).
- [31] J. C. A. Soares, Tese de Doutoramento: *Cálculo Fracionário e as equações de evolução*, Universidade Estadual de Campinas, (2016).
- [32] E. Scalas, *Applications of Continuous-time Random Walks in Finances and Economics*, Physica A (362) 225-239, (2006).
- [33] J. I. Suárez, B. M. Vinagre, A. J. Calderón, C. A. Monje, e Y. Q. Chen, *Using Fractional Calculus for Lateral and Longitudinal Control of Autonomous Vehicles*, in *Lecture Notes in Computer Science*, vol. 2809. Springer Berlin/Heidelberg, (2004).
- [34] D. Tavares, R. Almeida e D. F. M. Torres *Constrained fractional variational problems of variable order*, IEEE/CAA J. Automat. Sinica (4) no. 1, 80-88, (2017).
- [35] D. S. Tavares, Tese de doutoramento: *Fractional Calculus of Variations*, Departamento de Matemática: Universidade de Aveiro, (2017).
- [36] G. Teodoro, Dissertação de Mestrado: *Cálculo Fracionário e as Funções de Mittag-Leffler*, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica: Universidade Estadual de Campinas Campinas, (2014).
- [37] J.L. Troutman, *Variational Calculus with Elementary Convexity*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, (1983).
- [38] F.Y.M. Wan, *Introduction to the Calculus of Variations and its Applications*, Chapman and Hall, EUA, (1995).

- [39] J. Zhang, X. Ma e L. Li, *Optimality conditions for fractional variational problems with Caputo-Fabrizio fractional derivatives*, Advances in Difference Equations. Cham: Springer, (2017).