ulm university universität uulm

K L A U S U R D E C K B L A T T

Name der Prüfung: **Numerische Optimierung**

Datum und Uhrzeit: 03.03.2020, 10:30 – 12:30 Uhr   Bearbeitungszeit: 120 min

Institut: Numerische Mathematik   Prüfer: Prof. Dr. Karsten Urban

Vom Prüfungsteilnehmer auszufüllen:

Name: ____________________   Vorname: ____________________

Studiengang: ____________________   Abschluss: ____________________

Matrikelnummer: ______________

____
Datum, Unterschrift des Prüfungsteilnehmers

Hiermit erkläre ich, dass ich prüfungsfähig bin.
Sollte ich aufgrund fehlender Anmeldung über das Hochschulportal oder über das Studiensekretariat nicht auf der Liste der angemeldeten Studierenden aufgeführt sein, dann nehme ich hiermit zur Kenntnis, dass diese Prüfung nicht gewertet werden wird.

Hinweise zur Prüfung:

Bitte dieses Feld für den Barcode freilassen!

- Die Bearbeitungszeit beträgt **120 Minuten**!
- Kontrollieren Sie, ob alle 5 Aufgaben **vollständig vorhanden sind**!
- Bearbeiten Sie jede Aufgabe auf den verteilten **leeren Blättern**. Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren **Namen** und Ihre **Matrikelnummer**!
- Beschriften Sie die **Rückseiten** der leeren Blätter.
- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem **neuen Blatt**.
- Die Bearbeitung der Multiple-Choice-Aufgabe, die Beschriftung der Legenden und die Vervollständigung von Matlab-Codes darf **direkt auf dem Aufgabenblatt stattfinden!**
- Verwenden Sie **dokumentenechte Stifte**! Es darf **nicht mit rot geschrieben** werden!
- Geben Sie **alle** (während der Bearbeitungszeit) **beschriebenen Blätter ab.**

Erlaubte Hilfsmittel:

- Ein eigenhändig, handbeschriebenes DIN A4 Blatt.

Aufgabe	1	2	3	4	5	**Gesamt**
Maximale Punkte	16	16	22	22	14	**90**
Erreichte Punkte						
Korrektor						

Viel Erfolg!

Vom Prüfer auszufüllen:

Note: ____________________   ____________________
Unterschrift Prüfer

Prof. Dr. Karsten Urban
Stefan Hain
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

Numerische Optimierung
WiSe 2019/2020

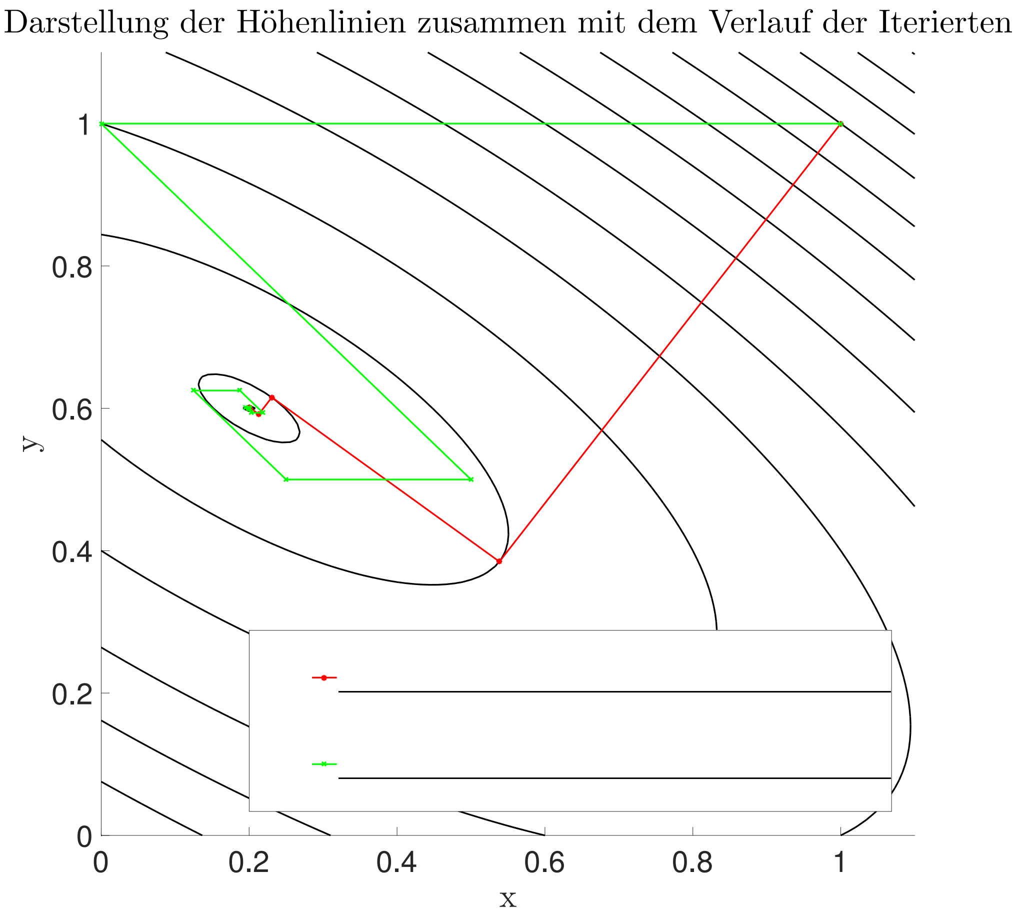
1. Klausur zur Veranstaltung „Numerische Optimierung“

Dienstag, den 03.03.2020

Aufgabe 1 (Kurzfragen) ([2 + 2] + 8 + 4 = 16 Punkte)

Die Fragen der Aufgabe 1 dürfen in *knapper Form*!

(a) Gegeben sei eine glatte Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Man betrachte das nichtrestringierte Optimierungsproblem $\min_{x\in\mathbb{R}^2} f(x)$. Unter Verwendung des *Hooke-Jeeves-Verfahren* und des *Gradientenverfahren* erhält man zusammen mit den Höhenlinien der Funktion f die folgenden Iterationsverläufe:

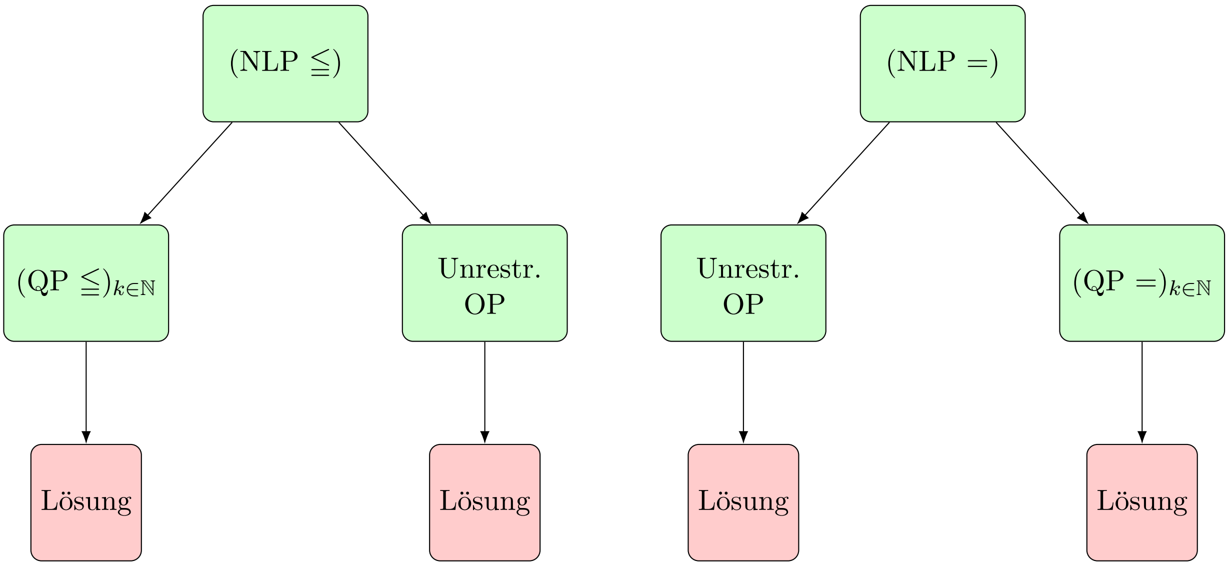


(i) Vervollständigen Sie die Legende, indem Sie die Begriffe „*Gradientenverfahren*“ und „*Hooke-Jeeves-Verfahren*“ in die dafür vorgesehene Stelle in der Legende eintragen.

(ii) Begründen Sie Ihre Zuordnung, indem Sie mindestens einen Iterationsverläuf beschreiben.

(b) Ordnen Sie den Pfeilen im Diagramm die nachfolgenden Verfahren bzw. Verfahrensklassen sinnvoll zu:

(i) Direkte Suchverfahren	(iii) Straftermverfahren	(v) SQP-Verfahren
(ii) Abstiegsverfahren	(iv) Nullraumverfahren	(vi) Innere-Punkte-Verfahren



Hinweis: Sie dürfen annehmen, dass jedes auftretende Problem/Teilproblem eindeutig lösbar ist. Im Diagramm wurden folgende Abkürzungen verwendet:

- (NLP $\leqq$): Allgemein nichtlineares Programm mit Gleichungs- und Ungleichungsrestriktionen.
- (NLP $=$): Allgemein nichtlineares Programm mit Gleichungsrestriktionen.
- (QP $\leqq$)$_{k\in\mathbb{N}}$: Folge linear-quadratischer Optimierungsproblemen mit Gleichungs- und Ungleichungsrestriktionen.
- (QP $=$)$_{k\in\mathbb{N}}$: Folge linear-quadratischer Optimierungsproblemen mit Gleichungsrestriktionen.
- Unrestr. OP: Unrestringiertes Optimierungsproblem.

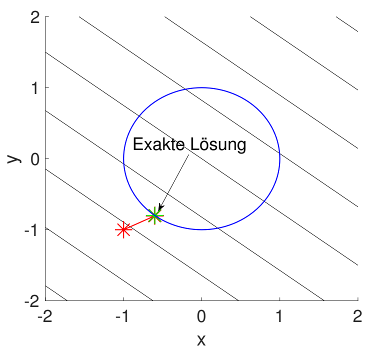
(c) Das restringierte Optimierungsproblem

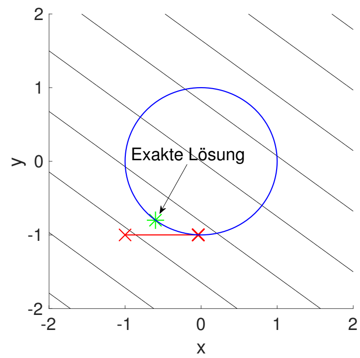
$$\begin{cases} f(x,y) = e^{3x+4y} + 1 \to \min \\ \text{u.d.N.:} \quad h(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases},$$

mit der exakten Lösung $x^* = (-0.6, -0.8)^T$ wird mit der Straftermmethode gelöst. Als Anfangswert für den Strafparameter werden die folgenden Werte gewählt:

$$\tau_0^{(0)} = \texttt{1e4} \qquad \text{und} \qquad \tau_1^{(0)} = \texttt{1}$$

Das Verfahren bricht ab, sobald $|h(x^{(k)}, y^{(k)})| < \texttt{tol} := \texttt{1e-14}$ oder sobald $\texttt{250}$ Iterationen erreicht sind. Für den Iterationsverlauf erhält man:





Ordnen Sie beiden Iterationsverläufen die Startwerte $\tau_0^{(0)}$ und $\tau_1^{(0)}$ zu und begründen Sie Ihre Zuordnung.

Hinweis: Zur Durchführung der Straftermmethode wurde das Hooke-Jeeves-Verfahren gewählt.

Aufgabe 2

(10 + [3 + 3] = 16 Punkte)

(a) Entscheiden Sie, ob die folgenden Behauptungen 'wahr' oder 'falsch' sind und markieren Sie das entsprechende Feld. Verbessern Sie weiterhin alle falschen Behauptungen.

Behauptung	wahr	falsch
Das Gauß-Newton-Verfahren zur Lösung eines nichtlinearen Ausgleichsproblems ist stets (mindestens) lokal quadratisch konvergent.		
Das im Zuge des Levenberg-Marquardt-Verfahren zu lösende lineare Gleichungssystem zur Berechnung der Newton-Korrektur ist in jedem Iterationsschritt stets eindeutig lösbar.		
Es sei $f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x$ mit einer symmetrisch und positiv definiten Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Im Allgemeinen lässt sich optimale Schrittweite für das Gradientenverfahren nicht analytisch bestimmen.		
Es sei x ein zulässiger Punkt eines restringierten Optimierungsproblems. Der linearisierte Tangentialkegel in x ist stets eine Untermenge vom Tangentialkegel in x.		
Gegeben sei ein glattes, konvexes Optimierungsproblem. $x^* \in \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine globale Lösung, wenn es Lagrange-Multiplikatoren $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ und $\mu^* \in \mathbb{R}^p$ gibt, dass (x^*, λ^*, μ^*) ein KKT-Punkt ist.		
Innere-Punkte-Verfahren für linear-quadratische Probleme lassen sich durch Anwendung des gedämpften Newton-Verfahrens auf die KKT-Bedingungen des zugehörigen Barriere-Problems herleiten.		

(b) Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Es sei $B^{(k)} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ eine symmetrisch und positiv definite Matrix sowie $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie: Unter Verwendung der optimalen Schrittweite $\alpha_k \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt für das Abstiegsverfahren

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k p^{(k)} \qquad \text{mit} \qquad p^{(k)} := -B^{(k)}\nabla f(x^{(k)})$$

die Beziehung:

$$\left(\nabla f(x^{(k)})\right)^T \cdot B^{(k)} \cdot \nabla f(x^{(k+1)}) = 0.$$

(ii) Es sei $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ sowie $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $p \in \mathbb{R}^n$ derart, dass $(\nabla f(x_0))^T p < 0$. Weiter seien $c \in (0, 1)$ und $\alpha \in (0, 1)$. Dann existiert ein endliches $l \in \mathbb{N}$ mit

$$f(x_0 + \alpha^l p) \leq f(x_0) + c\,\alpha^l\, (\nabla f(x_0))^T p.$$

Hinweis: Sie können einen Widerspruchsbeweis durchführen, indem Sie zunächst davon ausgehen, dass für alle $l \in \mathbb{N}$ die folgende Ungleichung gilt:

$$f(x_0 + \alpha^l p) > f(x_0) + c\,\alpha^l (\nabla f(x_0))^T p.$$

Führen Sie anschließend einen Widerspruch zur Voraussetzung $(\nabla f(x_0))^T p < 0$ herbei.

Aufgabe 3 (Nichtlineare Ausgleichsprobleme) (7 + [2 + 6] + 7 = 22 Punkte)

Betrachten Sie für $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ die parametrisierte Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(t) := c_1 \cdot e^{c_2 \cdot t} \cos(2\pi t)$. Zur Bestimmung der unbekannten Parameter c_1 und c_2 stehen die folgenden Messwerte zur Verfügung:

t_i	0.1	0.2	0.3
$f(t_i)$	0.395	0.134	−0.119

(a) Formulieren Sie unter Angabe einer Fehlerfunktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ ein nichtlineares Ausgleichsproblem zur Bestimmung der Parameter c_1 und c_2 und bestimmen Sie weiterhin die Jacobi-Matrix von F.

(b) Betrachten Sie die Matlab-Funktionen `GaussNewton.m` und `LevenbergMarquardt.m` aus dem Anhang.

(i) Ergänzen Sie die Zeilen 26 und 28 der Matlab-Funktion `GaussNewton.m` aus dem Anhang derart, dass das Gauß-Newton-Verfahren ausgeführt würden.

(ii) Ergänzen Sie die Zeilen 30, 48, 61, 66, 67 und 69 der Matlab-Funktion `LevenbergMarquardt.m` aus dem Anhang derart, dass das Levenberg-Marquardt-Verfahren ausgeführt würden.

(c) Löst man das nichtlineare Ausgleichsprobem aus Teilaufgabe (a) mit den Matlab-Funktionen `GaussNewton.m` und `LevenbergMarquardt.m` unter Verwendung der Startwerte $c_1^{(0)}$ = `1e-3` und $c_2^{(0)} = 1$, so erhält man für die jeweiligen Fehler (gemessen in Euklidischer Norm) die Werte:

Iterierte	Fehler `GaussNewton.m`	Fehler `LevenbergMarquardt.m`
0	2.2522	2.2522
1	791.2193	2.1945
2	1.2659e+34	2.1798
3		2.1647
4		1.9487
⋮		⋮
20		1.6340e-04
⋮		⋮
30		5.0520e-08
⋮		⋮
38		2.1264e-10

Erklären Sie die numerischen Resultate unter Zuhilfenahme der Hesse-Matrix aus Teilaufgabe (a) bzw. mit Hilfe des Hinweises. Gehen Sie bei Ihrer Erklärung insbesondere auf Unterschiede des Gauß-Newton-Verfahrens und des Levenberg-Marquardt-Verfahrens bei der Berechnung der Newton-Korrektur ein.

Hinweis: Das Gauß-Newton-Verfahren bricht nach der dritten Iteration mit folgender Warnung ab:

```
Warning: A is rank deficient to within machine precision.
```

Für die Jacobi-Matrix von F erhält man – ausgewertet in der Iterierten $x^{(3)}$ – die folgenden Einträge:

```
K>> dF(x(:,k+1))

ans =

    0.0000    0.0395
    0.0000    0.0000
   -0.0000   -0.0000
```

Aufgabe 4 (Lagrange-Newton-Verfahren) ([3 + 5] + 6 + [2 + 6] = 22 Punkte)
Zur Lösung des gleichungsrestringierten Optimierungsproblems

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x) \quad \text{u.d.N.} \quad h(x) = 0, \tag{1}$$

mit (mindestens) zweimal stetig differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ soll das so genannte Lagrange-Newton-Verfahren verwendet werden. Die Iterationsvorschrift lautet:

Data : $(x^{(0)}, \mu^{(0)}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ und setze $k = 0$.
while $(x^{(k)}, \mu^{(k)})$ *kein KKT-Punkt von* (1) **do**
Bestimme Lösung $(\Delta x, \Delta\mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} \nabla^2_{xx} L(x^{(k)}, \mu^{(k)})\cdot\Delta x + \left(\nabla_x h(x^{(k)})\right)^T \cdot \Delta\mu &= -\left(\nabla_x f(x^{(k)}) + \left(\mu^{(k)} \cdot \nabla_x h(x^{(k)})\right)^T\right) \\ \nabla_x h(x^{(k)})\cdot\Delta x &= -h(x^{(k)}) \end{aligned} \tag{2}$$

Führe Newton-Uptdate zur Bestimmung von $(x^{(k+1)}, \mu^{(k+1)})$ durch und setze $k \leftarrow k + 1$.
end

(a) Leiten Sie die Iterationsvorschrift des obigen Verfahrens her, indem Sie die folgenden Punkte bearbeiten:

(i) Formulieren Sie die KKT-Bedingungen zu (1) als Nullstellenproblem.

(ii) Wenden Sie das Newton-Verfahren auf die KKT-Bedingungen an. Notieren Sie sowohl die Iterationsvorschrift als auch das in jedem Iterationsschritt zu lösende lineare Gleichungssystem in Matrixform zur Berechnung der Newton-Korrektur.

(b) Es gelten die obigen Voraussetzungen. Weiter sei $(x^*, \mu^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ ein KKT-Punkt von (1).

Zeigen Sie: Sind die Gradienten $\nabla_x h_1(x^*), \dots, \nabla_x h_p(x^*)$ linear unabhängig und ist $\nabla^2_{xx} L(x^*, \mu^*)$ positiv definit auf dem Kern von $\nabla_x h(x^*) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n$, so ist das lineare Gleichungssystem (2) aus dem Algorithmus eindeutig lösbar.

(c) Das gleichungsrestringierte Optimierungsproblem

$$\begin{cases} f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_1 - 1)^2 + \sum_{i=1}^4 (x_i - x_{i+1})^2 \to \min \\ \text{u.d.N.:} \quad -3\sqrt{2} + x_1 + x_2^2 + x_3^3 = 2 \\ \qquad -2\sqrt{2} + x_2 - x_3^2 + x_4 = -2 \\ \qquad x_1 x_5 = 2 \end{cases} \tag{3}$$

mit der *globalen(!)* Lösung $x^* \approx (1.2391, 1.3881, 1.4545, 1.5558, 1.6141)^T$ soll mit dem Lagrange-Newton-Verfahren zum einen mit den Startwerten

$$x^{(0)} := (1, 1, 2, 1, 1)^T \qquad \text{und} \qquad \mu^{(0)} := (1, 1, 1)^T \tag{4}$$

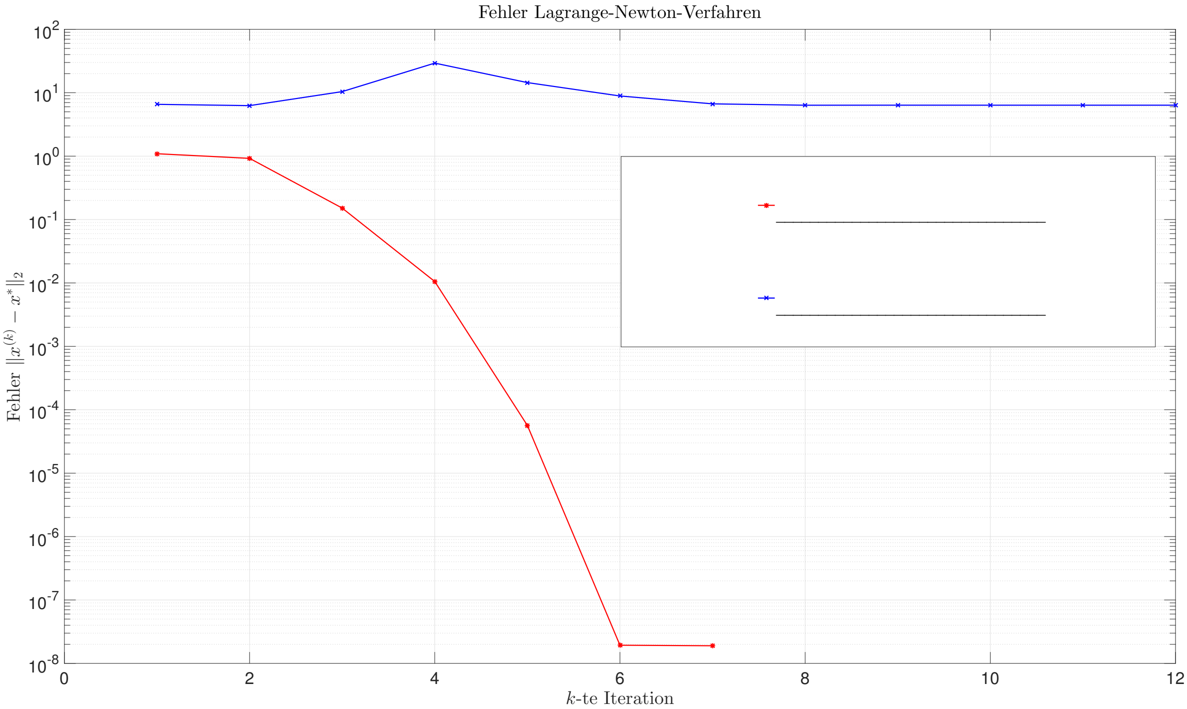
und zum anderen mit den Startwerten

$$\tilde{x}^{(0)} := (-1, 2, -2, -2, -2)^T \qquad \text{und} \qquad \mu^{(0)} := (1, 1, 1)^T \tag{5}$$

gelöst werden.

(i) Verwenden Sie Teilaufgabe (a) und Teilaufgabe (b), um (unabhängig von (3)) eine Aussage über die Konvergenzordnung des Lagrange-Newton-Verfahren zu treffen.

(ii) Führt man das oben beschriebene numerische Experiment mit den Startwerten (4) und (5) durch, so erhält man folgende Fehlerverläufe:



Interpretieren Sie die beiden Fehlerverläufe. Ordnen Sie der Legende weiterhin die Startwerte (4) bzw. (5) sinnvoll zu und begründen Sie Ihre Zuordnung mittels Ihrer Interpretation.

Hinweis 1: Sie dürfen voraussetzen, dass alle Voraussetzungen aus Teilaufgabe (b) erfüllt sind.

Hinweis 2: Der auf der y-Achse aufgetragene Fehler ist so zu verstehen, dass die Differenz zwischen der Iterierten $x^{(k)}$ und der *globalen(!)* Lösung $x^* \approx (1.2391, 1.3881, 1.4545, 1.5558, 1.6141)^T$ gebildet wird. Diese Differenz wird anschließend in der Euklidischen Norm gemessen.

Aufgabe 5 (Barriere-Verfahren) (3 + 7 + 4 = 14 Punkte)

Betrachten Sie das restringierte Optimierungsproblem

$$\begin{cases} f(x_1,x_2) = x_1 + x_2 \to \min \\ \text{u.d.N.:} \quad g_1(x_1,x_2) = x_1^2 - x_2 \le 0 \\ \qquad\qquad g_2(x_1,x_2) = -\,x_1 \le 0 \end{cases} . \tag{6}$$

(a) Formulieren Sie für $x \in \overset{\circ}{\mathcal{F}} := \{x \in \mathbb{R}^2 : g(x_1,x_2) < 0\}$ und für $\mu > 0$ das logarithmische Barriereproblem

$$f(x_1,x_2) + \mu\Phi(x_1,x_2) \to \min, \tag{7}$$

mit der logarithmischen Barriere $\Phi(x_1,x_2) := -\sum_{i=1}^{m} \log\left(-g_i(x_1,x_2)\right)$.

(b) Berechnen Sie analytisch für jedes feste $\mu > 0$ die Lösung $x^*(\mu) \in \mathbb{R}^2$ des logarithmischen Barriereproblems (7) und skizzieren Sie den zentralen Pfad. Berechnen Sie weiterhin den Grenzwert

$$\mathbb{R}^2 \ni x^* := \lim_{\nu \to 0^+} x^*(\mu).$$

(c) Skizzieren Sie den zulässigen Bereich des restringierten Optimierungsproblems (6) und zeigen Sie, dass x^* aus Teilaufgabe (b) die globale Lösung des restringierten Optimierungsproblems (6) ist.

Hinweis: Falls Sie Aufgabe (b) nicht lösen konnten: Es gilt $x^* = (0,0)^T$.